Владимирский государственный университет

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЮРИСТОВ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЮРИСТОВ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1671-2

УДК 517(075.8)
ББК 22.13я73

Автор-составитель: С. П. Митин

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент департамента математики Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации
М. Б. Хрипунова

Математика для юристов [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / авт.-сост. С. П. Митин ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 263 с. – ISBN 978-5-9984-1671-2. – Электрон. дан. (3,87 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит разделы математики: элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, теория вероятностей, математическая статистика. Включены большое количество примеров решений типовых задач, задания для рейтинг-контроля и задачи для самостоятельного решения, вопросы к собеседованию по пройденным темам.

Предназначено для студентов СПО юридического, экономического и социального профилей, СПО по специальности 40.02.01 – Право и организация социального обеспечения. Составлено согласно рабочей программе учебного курса «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия».

Ил. 8. Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-9984-1671-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия» входит в обязательную часть учебных циклов ППССЗ и относится к дисциплинам математического и общего естественнонаучного учебного цикла в соответствии с ФГОС СПО по специальности 40.02.01 – Право и организация социального обеспечения.

Учебная дисциплина «Математика» обеспечивает формирование профессиональных и общих компетенций по всем видам деятельности ФГОС по специальности «Право и организация социального обеспечения». Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 9. Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы.

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения использовать методы линейной алгебры и векторного анализа для решения задач; решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков; применять основные методы интегрирования при решении задач; применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности и знания основных понятий и методов линейной алгебры, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики; основные численные методы решения прикладных задач.

Цель учебно-практического пособия – помощь студенту в организации и проведении учебного процесса в течение семестра при подготовке к лекционным, практическим занятиям, рейтинговым работам и дифференцированному зачету: закрепить и отработать материал рабочей программы дисциплины «Математика» (1-, 2-, 3-й семестры), обеспечить оптимальную организацию самостоятельной работы при изучении дисциплины.

Пособие содержит восемь глав, в которых подробно изложены теоретические основы понятий линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа и теории вероятностей. Даны практические образцы решений типовых задач по темам, выполнены многие задачи на доказательство, приведены задания для рейтинг-контроля, вопросы к проведению тестирований или собеседований по изучаемым темам курса. Представлена также подборка тематических заданий для самостоятельного решения.

В первых трех главах рассматриваются вопросы линейной алгебры и векторного анализа. Подробно описаны матрицы, операции над ними векторный анализ и их применение к решению систем линейных алгебраических уравнений. Здесь же указаны способы нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного двух и более чисел.

Четвертая глава содержит различные подходы к определению вектора. В полном объёме изложен геометрический подход к определению вектора и установлена связь с алгебраическим подходом.

Следующие три главы включают в себя вопросы математического анализа.

В пятой главе изучается теория пределов функции, дается определение предела функции в точке, доказывается теорема о пределах, рассматриваются бесконечные пределы, бесконечно малые и бесконечно большие пределы, замечательные пределы. Применение их при вычислении пределов.

В шестой главе рассмотрены основные вопросы дифференциального исчисления, в седьмой – интегрального исчисления.

В восьмой главе рассмотрены вопросы теории вероятностей, традиционные задачи, решаемые в рамках раздела «Теория вероятностей», наполнены формулировками с экономическим и социологическим содержанием.

Главы снабжены большим количеством рисунков, схемами-алгоритмами для решения задач, вопросами для самоконтроля. Все темы обязательно закрепляются практическими упражнениями. Задача считается выполненной, если: а) продемонстрировано обоснованное её решение, в ходе которого описаны шаги-рассуждения последовательных действий; б) присутствуют ссылки на определения, законы, свойства и другие предложения математической теории.

Пособие содержит примерный перечень вопросов к контрольным работам, типовые варианты контрольных работ, задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

В пособие также включены решения типовых задач разного уровня сложности из разделов программы дисциплины «Математика», изучаемых в трех семестрах. Задачи для самостоятельного решения сгруппированы по темам согласно изложенному теоретическому материалу. Различные типы заданий представлены набором вариантов, что обеспечивает полноценную работу со студентами и в группе, и индивидуально.

При подготовке пособия автор использовал учебники, задачники-практикумы по математике для студентов СПО и высших учебных заведений, написанные Н. В. Богомоловым, Н. Я. Виленкиным, Н. С. Пискуновым, С. М. Никольским, Л. С. Атанасяном, Б. П. Демидовичем, М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок.

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Матрицы и арифметические операции над ними

Матрицей размера $m \times n$ называется состоящая из чисел прямоугольная таблица, содержащая m строчек и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы, стоящий в i-ой строке, j-ом столбце, обозначается a_{ij}.

Матрицу можно умножить на число (каждый элемент матрицы умножается на это число), матрицы одинакового размера можно складывать и вычитать (поэлементно). При этом получается матрица того же размера. **Транспонированной матрицей** называется матрица, получающаяся из данной, если поменять местами строки со столбцами:

$$A^T = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}.$$ При транспонировании матрицы размера $m \times n$ получается матрица размера $n \times m$.

Умножение матриц определяется следующим образом. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ - матрицы размера $m \times l$и $l \times n$ соответственно. Тогда их **произведением** называется матрица C=AB размера$m \times n$, элементы которой вычисляются по формулам $c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$. Другими словами, для вычисления элемента матрицы-произведения, стоящего в i-ой строке, j-ом столбце нужно поэлементно умножить i-ую строку первой матрицы на j-ый столбец второй и сложить эти произведения.

Замечание.

Даже если произведение двух матриц определено для любого порядка сомножителей, оно зависит от их порядка, т.е. умножение матриц некоммутативно. Тем не менее оно ассоциативно, то есть в произведении нескольких матриц скобки можно расставлять любым способом.

Единичной матрицей называется квадратная матрица, у которой на диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$. При умножении любой матрицы на единичную подходящего размера слева или справа исходная матрица не изменяется.

Пример 1. Произведите действия с матрицами:

$$-6\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T + 3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Выполним задание по действиям.

1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2) $-6\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \cdot 3 & -6 \cdot 0 \\ -6 \cdot (-2) & -6 \cdot 2 \\ -6 \cdot 1 & -6 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 12 & -12 \\ -6 & 24 \end{pmatrix}$.

3) $3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-6) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 12 & -18 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$.

4) $$\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 12 & -12 \\ -6 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 12 & -18 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18-3 & 0+0 \\ 12+12 & -12-18 \\ -6+9 & 24+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 0 \\ 24 & -30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -21 & 0 \\ 24 & -30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Решите систему матричных уравнений:
$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ 5X + 4Y = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Решение.

Система решается аналогично обычным системам из двух уравнений с двумя неизвестными. Например, прибавим ко второму уравнению первое, умноженное на 2, чтобы избавиться от неизвестной Y:

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ 5X + 4Y = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ 11X = \begin{pmatrix} 26 & -7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ 11X = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -11 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \\ X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{1}{2}\left(3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right), \\ X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Вычислите произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

При умножении матриц размера 4×3 и 3×2 получается матрица размера4×2. Вычислим её по правилу умножения матриц «строчка на столбец»: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} (-1) \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 & 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 & 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 & 5 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -9 & -3 \\ 14 & -18 \\ 16 & -27 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -9 & -3 \\ 14 & -18 \\ 16 & -27 \end{pmatrix}$.

Пример 4. ВычислитеA^{68}, если $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим несколько первых степеней матрицы A:

$$A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E.$$

Теперь заметим, что $A^{68}=\left(A^3\right)^{22}\cdot A^2=(-E)^{22}\cdot A^2=A^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Замечание.

Можно также воспользоваться тем, что матрица A имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ для $\varphi=\frac{\pi}{3}$, то есть является матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{3}$. Значит, A^{68} является матрицей поворота на угол $68\cdot\frac{\pi}{3}=22\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}\bmod 2\pi$ и имеет вид $\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Следом квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ называется сумма её диагональных элементов: $trA=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$.

Пример 5. Вычислите след матрицы: $\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 5 & -2 & 7\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix}$.

Решение.

След матрицы – это сумма её диагональных элементов. Получаем

$$tr\begin{pmatrix}3 & -2 & 5\\ 5 & -2 & 7\\ 6 & 2 & 4\end{pmatrix} = 3 + (-2) + 4 = 5.$$

Ответ: 5.

1.2. Определители и их свойства

Определителем |A| квадратной матрицы A называется число, вычисляемое по следующим правилам:

определитель матрицы размера 1×1 (состоящей из одного элемента) равен этому элементу;

определитель матрицы размера $n\times n, n>1$ вычисляется с помощью **разложения по столбцу или строке**: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij}$, где i (в первой сумме) или j (во второй) – номер выбранной для разложения строки или столбца, $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - **алгебраическое дополнение** элемента a_{ij} – определитель M_{ij} матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, получающейся из A вычёркиванием i-ой строки и j-ого столбца **(минор)**, взятый со знаком «+» или «−».

Замечание.

Мы оставляем без доказательства то, что результат вычисления определителя по этой формуле не зависит от выбора строки или столбца, про которым выполняется разложение.

Для вычисления определителей матриц размера 2×2 и 3×3 можно пользоваться явными формулами:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$ (так

называемое «правило треугольников»).

Для вычисления определителей матриц большего размера можно использовать разложение по строке или столбцу, а также ***метод Гаусса*** (см. далее).

Свойства определителей:

$|A| \neq 0$ тогда и только тогда, когда строки/столбцы матрицы A линейно независимы;

$|AB| = |A||B|$, отсюда $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$;

$\left|A^{T}\right| = |A|$,

определитель матрицы с нулевой строкой или столбцом равен нулю;

определитель верхнее- или нижнетреугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов (это следует из вычисления с помощью разложения по строке или столбцу);

при умножении строки или столбца матрицы на какое-либо число определитель умножается на это число;

если в матрице поменять местами две строчки или два столбца, её определитель изменит знак;

если к одной строке матрицы прибавить другую строку, умноженную на какое-то число, определитель матрицы не изменится (то же верно для столбцов).

Пользуясь этими свойствами, можно вычислить определитель матрицы ***методом Гаусса***: следует привести матрицу к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Определитель получившейся матрицы равен произведению её диагональных элементов. Учитывая, что каждый раз, когда мы умножали или делили строку матрицы на какое-то число, определитель умножался или делился на это число, а каждый раз, когда мы меняли строки местами, у определителя менялся знак, можно найти определитель исходной матрицы.

Пример 6. Вычислите определитель матрицы X, если известно, что она является решением матричного уравнения $X\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Воспользуемся тем, что определитель произведения матриц равен произведению их определителей, а значит, $|X| \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$, откуда $|X| = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}$. Вычислим необходимые определители.

1) Определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ вычислим по «правилу треугольников»:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 4\cdot 4 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = -59.$$

2) Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ удобно вычислять с помощью разложения по второй строке, так как она содержит много нулей:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2(2\cdot 5 - (-3)\cdot 7) = -62.$$

Получаем $|X| = \dfrac{-59}{-62} = \dfrac{59}{62}$.

Замечание.

То, что $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля, гарантирует существование решения рассматриваемого матричного уравнения.

Ответ: $\frac{59}{62}$.

Пример 7. При каких значениях параметра μ столбцы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -5 & \mu \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ линейно зависимы?

Решение.

Линейная зависимость столбцов или строк квадратной матрицы равносильна равенству её определителя нулю. Поэтому Пример сводится к поиску таких μ, при которых $\begin{vmatrix} 1 & -5 & \mu \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Воспользуемся одним из способов вычисления определителя матрицы, например элементарными преобразованиями приведём её к ступенчатому виду: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & \mu \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & \mu-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu-2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. На первом шаге мы прибавили к первой строке третью и прибавили по второй строке третью, умноженную на 2, на втором шаге мы прибавили к первой строке вторую. Определитель полученной матрицы равен $(-1)\cdot(-2)\cdot(\mu-2)$ (используем разложение по первому столбцу), то есть обращается в нуль при $\mu-2=0 \Leftrightarrow \mu=2$.

Ответ: 2.

1.3. Обратная матрица

Пусть А – квадратная матрица размера $n\times n$. Матрицей, **обратной** к А, называется матрица A^{-1} размера $n\times n$ такая, что $A^{-1}A = AA^{-1} = E.$

Замечание.

Если обратная к A матрица существует, то только одна. Необходимым и достаточным условием для существования обратной матрицы является *неравенство определителя матрицы нулю*, что *также равносильно линейной независимости её строк или столбцов.*

Для нахождения обратной матрицы можно воспользоваться одним из следующих способов.

Метод алгебраических дополнений: пусть матрица $B = \left(b_{ij}\right) = A^{-1}$, тогда её элементы можно вычислить по формулам $b_{ij} = \dfrac{\hat{A}_{ji}}{|A|}$, где $\hat{A}_{ji}$ - алгебраические дополнения в матрице A^T. Этот способ удобен для матриц небольшого размера.

Метод Гаусса: запишем слева матрицу A, а справа единичную, элементарными преобразованиями приведём A к единичной, тогда справа мы получим обратную матрицу.

Пример 8. Решите матричное уравнение $X\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Умножив левую и правую часть уравнения на матрицу, обратную к $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, слева, получим

$$X\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Обратную матрицу вычислим с помощью алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2\cdot(-3)-(-1)\cdot 4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполним умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -13 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+6\cdot 4 & 2\cdot(-1)+6\cdot(-3) \\ -13\cdot(-2)+1\cdot 4 & -13\cdot(-1)+1\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}20 & -20\\ 30 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

Пример 9. Вычислите матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -2\\ 12 & -6 & -5\\ 15 & -7 & -5\end{pmatrix}$.

Решение.

Найдём обратную матрицу методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}3 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 12 & -6 & -5 & 0 & 1 & 0\\ 15 & -7 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 12 & -6 & -5 & 0 & 1 & 0\\ 15 & -7 & -5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -5 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -7/6 & 1 & -1/6 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 2 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5/12 & -3/4 & 7/12\\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & -5/4 & 3/4\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1/2 & 1/2\end{array}\right).$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix}5/12 & -3/4 & 7/12\\ 5/4 & -5/4 & 3/4\\ -1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}5/12 & -3/4 & 7/12\\ 5/4 & -5/4 & 3/4\\ -1/2 & -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется максимальное количество линейно независимых строк или столбцов этой матрицы.

Замечание.

Мы не приводим тут доказательство того, что максимальное количество линейно независимых строк и линейно независимых столбцов совпадает.

Элементарные преобразования над строками матрицы не меняют её ранга. Легко видеть, что ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк в ней. Отсюда следует способ нахождения ранга матрицы: *следует привести её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований и посчитать количество ненулевых строк в получившейся матрице.*

Пример 10. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 & -2 \\ 24 & 30 & 6 & -6 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Разделим первую строку на 2, а вторую на 6:

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & 2 & -2 \\ 24 & 30 & 6 & -6 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем первую строку из второй и третьей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получили одну ненулевую строку, следовательно, ранг матрицы равен 1.

Ответ: 1.

Глава 2. ВЕКТОРЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

n -мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,где x_i – i-я координата вектора.

Замечание.

В дальнейшем в целях компактности вектор-столбец $\vec{x}$ будем записывать в виде $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Количество координат у вектора $\vec{x}$ называют его ***размерностью***. Например, $\vec{x} = (1,3,5,-14,9)$ – пятимерный вектор.

Если у n-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, имеющих одну и ту же размерность, одноименные координаты равны, т.е. если $x_1 = y_1; x_2 = y_2; \dots; x_n = y_n$, то такие векторы называют равными и записывают как $\vec{x} = \vec{y}$, если же хотя бы одна пара одноименных координат у векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ различна, то $\vec{x} \neq \vec{y}$. Вектор, у которого все координаты равны нулю, называют нулевым: $\vec{0} = (0,0, \dots, 0)$.

2.1. Линейные операции над векторами

Суммой векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, называется вектор $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,

т. е. при сложении векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно складываются. **Разностью векторов** $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, называется вектор $\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$,

т. е. при вычитании двух векторов одной и той же размерности их соответствующие координаты почленно вычитаются. **Произведением вектора** $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на действительное число λ называется вектор

$$\lambda\overrightarrow{x} = (\lambda x_1,\ \lambda x_2, \dots,\ \lambda x_n),$$

т. е. при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число.

Зная вектор $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, можно получить **противоположный ему вектор**:

$-\overrightarrow{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$

Пример 11. Найдите арифметический вектор $\overrightarrow{v} = 2\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$, если заданы $\vec{a} = (3,3,-2)$, $\vec{b} = (-1,-4,2)$, $\vec{c} = (-6,-1,5)$.

Решение.

Выразим $\vec{v}$ через векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Для покоординатных вычислений представим $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде вектор-столбцов

$$\vec{v} = \left(2\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\-4\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-6\\-1\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6-2-18\\6-8-3\\-4+4+15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-5\\15\end{pmatrix}$$

Ответ: $\vec{v} = (-14; -5; 15)$.

Пример 12. Найдите арифметический вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий уравнению

$-\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{x},$

где $\vec{a} = (1,4,-3,1)$, $\vec{b} = (1,4,-3,1)$.

Решение.

Выразим $\vec{x}$ через векторы $\vec{a}, \vec{b}$:

$$-\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{x} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{4}\left(3\vec{a} - \vec{b}\right).$$

Для покоординатных вычислений представим данные $\vec{a}, \overrightarrow{b}$ в виде вектор-столбцов:

$$\vec{x} = \frac{1}{4}\left(3\begin{pmatrix}-2\\4\\-5\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-6+5\\12+3\\-15-4\\-3-2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\15\\-19\\-2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\vec{x} = \left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}, -\frac{19}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

2.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух n-мерных векторов $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, называется число, обозначаемое $(\vec{x}\vec{y})$ и равное сумме произведений соответствующих координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$(\vec{x}\vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1) $(\vec{x}\,\vec{x}) \geq 0$ причем $(\vec{x}\,\vec{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

2) $\overrightarrow{(\,x\,y)} = \overrightarrow{(\,y\,x)}$.

3) $(\vec{x} + \vec{y})\vec{z} = \vec{x}\,\vec{z} + \vec{y}\vec{z}$.

4) $(\lambda\vec{x})\vec{y} = \lambda(\vec{x}\vec{y})$.

Пример 13. Вычислите скалярное произведение векторов

$\vec{a} = (1, -1, 1, -2, 1)$ и $\vec{b} = (-6, -6, -6, -3, -4)$.

Координаты векторов даны в ортонормированном базисе.

Решение.

Воспользуемся формулой для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ через их координаты:

$$\boxed{\left(\vec{a}\vec{b}\right) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n.}$$

Тогда получим

$$(\vec{a}\vec{b}) = 1 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-6) + 1 \cdot (-6) + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot (-4)) = -4.$$

Ответ: $\left(\vec{a}\vec{b}\right) = -4$.

Длиной (или **модулем**) n-мерного вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называют число $|\vec{x}|$, равное

$|\vec{x}| = \sqrt{(\overrightarrow{x, x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}$.

Пример 14. Найдите длину вектора $\vec{x} = 2a - 3b$, если $\vec{a} = (-2, -4,3)$, $\vec{b} = (2, -1,1)$.

Решение.

Найдем координаты вектора $\vec{x}$ через координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}$. Для покоординатных вычислений представим $\vec{a}, \vec{b}$ в виде вектор-столбцов:

$$\vec{x} = \left(2\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -4-6 \\ -8+3 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\vec{x} = (-10, -5,3)$. Отсюда длина вектора $\vec{x}$ равна

$|\vec{x}| = \sqrt{(-10)^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{134}$.

Ответ: $\sqrt{134}$.

Пример 15. Выясните, какой из векторов короче: $\vec{v} = (1,4, -3,1)$ или $\vec{w} = (3,2,2,3)$. В ответе укажите длину более короткого вектора.

Решение.

Воспользуемся формулой для выражения длины n-мерного вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ через его координаты:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.}$$

Последовательно находим:

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{27}$,

$|\vec{w}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{26}$.

Ответ: Вектор $\overrightarrow{\mathrm{w}}$ короче и его длина равна $\sqrt{26}$.

Углом φ между ненулевыми n-мерными векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называют угол, косинус которого равен

$$cos\varphi = \frac{|\vec{x}\vec{y}|}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}.$$

Пример 16. Найдите косинус угла между векторами

$\vec{a} = (2{,}1, -4, -2{,}5)$ и $\vec{b} = (2, -3, -1, -1, -3)$.

Решение.

Воспользуемся формулой для вычисления косинуса угла между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ через их координаты:

$$\boxed{cos(\vec{a}\vec{b}) = \frac{(\vec{a}\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}}}$$

Тогда косинус угла между векторами $\vec{v}$ и $\vec{w}$ равен:

$$cos(\vec{a}\vec{b}) =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1)(-4) + (-2) \cdot (-1) + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 5^2}\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + (-3)^2}}$$

$$= = -\frac{2}{15}\sqrt{3}.$$

Ответ: $cos(\vec{a}\vec{b}) = -\frac{2}{15}\sqrt{3}$.

Пример 17. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$, если известно, что $|\vec{v}| = 5$, $|\vec{w}| = 1$, угол между векторами равен $\frac{\pi}{6}$.

Решение.

Воспользуемся формулой для вычисления скалярного произведения векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$ через их длины и угол между ними:

$$\boxed{(\vec{v}\vec{w}) = |\vec{v}||\vec{w}|cos(\vec{v}\vec{w})}$$

Подставляя в данное выражение заданные значения, найдем скалярное произведение векторов $\vec{v}$ и $\vec{w}$

$$(\vec{v}\vec{w}) = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

Пример 18. Для $\vec{a} = -\overrightarrow{3e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$, $\vec{b} = -4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$ найдите длину вектора $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b}$ в ортонормированном базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$.

Решение.

Выразим вектор $\vec{v}$ через ортонормированный базис

$$\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2\left(-\overrightarrow{3e_1} - 2\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right) - (-4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}) =$$
$$= -2\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_2} + 11\overrightarrow{e_3}.$$

Воспользуемся формулой для вычисления длины n -мерного вектора

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ через его координаты в ортонормированном базисе:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

Тогда получим

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2 + (11)^2} = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}.$

Ответ: $5\sqrt{6}$.

Пример 19. Вычислите скалярное произведение векторов

$\vec{v} = -\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}$,$\vec{w} = 3\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_4}$, где $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$,$\overrightarrow{e_4}$ ортонормированный базис.

Решение.

Первый способ. Запишем вектора в координатной форме:

$\vec{v} = (-1,1,2,-1)$ и $\vec{w} = (3,5,4,-2)$.

Воспользуемся формулой для вычисления скалярного произведения этих векторов через их координаты в ортонормированном базисе:

$$(\vec{v}\vec{w}) = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3 + v_4 \cdot w_4 .$$

Тогда получим

$(\vec{v}\vec{w}) = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 12.$

Второй способ. Перемножим скалярно вектора $\vec{v}$ *и* $\vec{w}$*:*

$(\vec{v}\vec{w}) = (-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}) \cdot (3\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3} - 2\overrightarrow{e_4})$.

Раскроем скобки с учетом того, что вектора $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}$ образуют ортонормированный базис и, соответственно, их скалярные произведения $(\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}) = 0$ при $i \neq j$ и $(\overrightarrow{e_i}\overrightarrow{e_j}) = 1$ при $i = j$, где $i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 4$.

Тогда $(\vec{v}\vec{w}) = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 12$.

Ответ: $(\vec{v}\vec{w}) = 12$.

2.3. Линейная независимость системы векторов

Линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m$ с коэффициентами

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называется вектор $\lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\,\overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_m\,\overrightarrow{e_m}$. n-мерный вектор $\vec{y}$ разлагается по системе векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$, если можно подобрать такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, что векторы $\vec{y}$ и $\lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\,\overrightarrow{e_2} + \dots + \lambda_m\,\overrightarrow{e_m}$ равны, т.е. $\overrightarrow{y} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\,\overrightarrow{e_2} + \dots + +\lambda_m\,\overrightarrow{e_m}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ называются коэффициентами разложения.

Система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ называется **линейно независимой**, если равенство $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_m\vec{e}_m = 0$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Если же существует ненулевой набор чисел $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i^2 > 0\right)$, такой что $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \dots + \lambda_m\vec{e}_m = 0$, тогда система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ называется **линейно зависимой**.

Пример 20. Является ли система векторов

$$\vec{e}_1 = (-5,10,-15), \vec{e}_2 = (-1,2,-3)$$

линейно независимой? Ответ обоснуйте.

Решение.

В данной задаче $\vec{e}_1 = 5\vec{e}_2 \Leftrightarrow 1 \cdot \vec{e}_1 + (-5) \cdot \vec{e}_2 = 0$, следовательно, система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ линейно зависима.

Ответ: нет, данная система векторов линейно зависима.

Пример 21. Является ли система векторов

$$\vec{e}_1 = (0,0,2), \vec{e}_2 = (0,-2,2), \vec{e}_3 = (-3,-1,-2)$$

линейно независимой? Ответ обоснуйте.

Решение.

Первый способ. Для определения линейной зависимости векторов рассмотрим равенство

$$\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\cdot\lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + (-3)\cdot\lambda_3\\ 0\cdot\lambda_1 + (-2)\cdot\lambda_2 + (-1)\cdot\lambda_3\\ 2\cdot\lambda_1 + 2\cdot\lambda_2 + (-2)\cdot\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-3)\lambda_3\\ (-2)\lambda_2 + (-1)\lambda_3\\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + (-2)\lambda_3\end{pmatrix} = 0$$

Тогда из равенства по 1-й координате $\lambda_3 = 0$, затем из 2-й координаты $\lambda_2 = 0$, наконец из 3-й координаты $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ линейно независима.

Второй способ. Используем понятие ранга. **Рангом $\boldsymbol{rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m)}$ системы векторов** $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ называется максимальное число линейно независимых векторов из $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$. Из определения ранга системы векторов следует, что система векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ линейно независима $\Leftrightarrow rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m) = m$.

Ранг $rg(A)$ матрицы A равен максимальному числу ее линейно независимых строк и одновременно максимальному числу ее линейно независимых столбцов.

Поэтому Пример о нахождении ранга системы векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$ сводится к нахождению ранга матрицы $A = (\vec{e}_1|\vec{e}_2|\ \ldots |\ \vec{e}_m)$, составленной по столбцам (можно по строкам) из векторов системы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m\}$, а именно $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_m) = rg(A)$.

При нахождении $rg(A)$ (как и при решении многих других задач) полезно использовать ***алгоритм Гаусса***, состоящий здесь в приведении матрицы A к ступенчатому виду путем последовательного преобразования строк и столбцов (значение $rg(A)$ сохраняется). Разрешенными преобразованиями являются: умножение строки (столбца) на число $\lambda \neq 0$, перестановка строк (столбцов), добавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число. В результате количество ненулевых строк (столбцов) получившейся матрицы равняется $rg(A)$.

В нашей задаче $A = (\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Матрица A уже имеет треугольный вид без нулей на диагонали, поэтому $rg(\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) = rg(A) = 3 \Rightarrow$ система векторов линейно независима.

Ответ: да, данная система векторов линейно независима.

Пример 22. Найдите ранг системы векторов

$\vec{e}_1 = (4, 0, -12), \vec{e}_2 = (0,4, -6), \qquad \vec{e}_3 = (-5,12, -3), \vec{e}_4 = (-1,10, -12)$.

Решение.

$$rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) = rg\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 12 & 10 \\ -12 & -6 & -3 & -12 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{-1} \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Соответствующие преобразования: умножение 2-й строки на 1/2, 3-й строки на (-1/3); умножение 1-го столбца на 1/4, 2-го столбца на 1/2; добавление к 3-й строке 1-й, умноженной на (-1); добавление к 3-й строке 2-й, умноженной на (-1). В результате получена ступенчатая матрица с двумя ненулевыми строками, значит, $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) = 2$.

Ответ: ранг системы векторов равен 2.

Компланарными называются трехмерные векторы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$, лежащие в одной плоскости. При $m \leq 2$ любая система векторов компланарна. При $m \geq 3$ если $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) = 2$, то векторы компланарны; если $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) = 3$, то не компланарны.

Пример 23. Являются ли арифметические векторы

$$\vec{e}_1 = (0, -5,10), \vec{e}_2 = (2,7, -6), \vec{e}_3 = (1,2,0)$$

компланарными? Ответ обоснуйте.

Решение.

Решим задачу алгоритмом Гаусса

$$rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \\ 10 & -6 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Соответствующие преобразования: умножение 1-го столбца на 1/5; добавление к 2-му столбцу 1-го, умноженного на 3; умножение 2-го столбца на 1/2; добавление к 3-му столбцу 2-го, умноженного на (-1). В результате получена трапециевидная матрица с ненулевой диагональю длины 2, значит, $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2 \Rightarrow$ векторы компланарны.

Ответ: да, являются компланарными, так как данные векторы лежат в R^3 и ранг их системы равен 2.

Базисом пространства R^n (т.е. минимальной системой векторов, линейными комбинациями которых можно выразить все вектора пространства R^n) является любая система из n линейно независимых n-мерных векторов. В этом и только в этом случае $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) = m = n$ (т.е. одновременно и количеству векторов в системе, и размерности пространства). В других случаях:

1) система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$, $m < n$, базисом в R^n не является (содержит недостаточно векторов; возможно, линейно независима; $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) \leq m < n$);

2) система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$, $m > n$, базисом в R^n не является (возможно, содержит достаточно векторов, но среди них есть лишние; является линейно зависимой; $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) \leq n < m$);

3) система $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, состоящая из линейно зависимых векторов, базисом в R^n не является (содержит недостаточно векторов, среди них есть лишние; линейно зависима; $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) < m = n$).

Пример 24. Образует ли система векторов

$$\vec{e}_1 = (9,1,-5), \vec{e}_2 = (2,-2,0), \vec{e}_3 = (-6,0,3)$$

базис пространства R^3? Ответ обоснуйте.

Решение.

Для системы векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ выполнено $rg(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m) = rg(A)$, где матрица $A = (\vec{e}_1|\vec{e}_2| \ \dots | \ \vec{e}_m)$ составлена по столбцам (по строкам) из векторов системы $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$.

В нашей задаче $m = n = 3$, $A = (\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$|A| = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -6 \\ 1 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ (вынесли

множители из 2-го и 3-го столбцов) $= 6(-9 + 10 - 1) = 0 \Rightarrow rg(\vec{e}_1|\vec{e}_2|\vec{e}_3) = rg(A) < 3 \Rightarrow$ система векторов линейно зависима и не образует базис.

Ответ: нет, данная система векторов не образует базис, поскольку она линейно зависима.

Базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ называется **ортогональным**, если $\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right) = 0$ при $i \neq j$, где $i, j = 1, \dots, m$ (условие $(\vec{e}_i\vec{e}_i) \neq 0$ подразумевается, т.к. нулевые векторы в базис входить не могут).

Базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_m\}$ называется **ортонормированным**, если $\left(\vec{e}_i\vec{e}_j\right) = 0$ при $i \neq j$, где $i, j = 1, \dots, m$,а $(\vec{e}_i\vec{e}_i) = 1$.

Пример 25. Является ли базис $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ортогональным? Если да, то разложите вектор $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ по этому базису.

Решение.

Проверим ортогональность базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 = 0$, значит, базис ортогональный.

В данном примере надо найти неизвестные коэффициенты λ_1, λ_2:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -3 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = -1. \end{cases}$$

По формулам Крамера имеем $\lambda_1 = \frac{\begin{vmatrix}-3 & 3\\-1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\-3 & 2\end{vmatrix}} = \frac{-3}{13}$,

$$\lambda_2 = \frac{\begin{vmatrix}2 & -3\\-3 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 3\\-3 & 2\end{vmatrix}} = \frac{-11}{13} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \frac{-3}{13}\vec{e}_1 + \frac{-11}{13}\vec{e}_2.$$

Ответ: да, базис ортогональный, и $\vec{v} = -\frac{3}{13}\vec{e}_1 - \frac{11}{13}\vec{e}_2$.

Пример 26. Разложите вектор $\vec{v} = \begin{pmatrix}37\\-6\\-86\end{pmatrix}$ по базису

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\-5\\-6\end{pmatrix}.$$

Решение.

В задаче надо найти коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}37\\-6\\-86\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\-2\\3\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\-5\\-6\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 37 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 5\lambda_3 = -6 \\ -5\lambda_1 + 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = -86. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Гаусса, выписав расширенную матрицу и последовательно преобразуя ее строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 37 \\ 2 & -2 & -5 & -6 \\ -5 & 3 & -6 & -86 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 37 \\ 2 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -10 & -55 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 43 \\ 2 & -2 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -10 & -55 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 43 \\ 0 & -2 & -17 & -92 \\ 0 & 1 & 10 & 55 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&6&43\\0&0&3&18\\0&1&10&55\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1}&0&6&43\\0&\mathbf{1}&10&55\\0&0&\mathbf{1}&6\end{array}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\ \ 6\lambda_3=43\\ \lambda_2+10\lambda_3=55\\ \qquad\quad \lambda_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3=6\\ \lambda_2=55-10\lambda_3=-5\\ \lambda_1=43-6\lambda_3=7\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{v}=7\vec{e}_1-5\vec{e}_2+6\vec{e}_3.$$

Соответствующие преобразования: к 3-й прибавляем 1-ю и 2-ю; к 1-й прибавляем 2-ю, умноженную на (-1); к 2-й прибавляем 1-ю, умноженную на (-2), 3-ю умножаем на (-1); к 2-й прибавляем 3-ю, умноженную на 2; 2-ю умножаем на 1/3 и меняем местами с 3-й.

В результате получена верхнетреугольная матрица с ненулевой диагональю (т.е. все переменные базисные, свободных нет, решение единственно), после чего, двигаясь снизу вверх, последовательно находим $\lambda_3,\lambda_2,\lambda_1$ и $\vec{v}$.

Ответ: $\vec{v}=7\vec{e}_1-5\vec{e}_2+6\vec{e}_3$.

Глава 3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Система уравнений вида $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$ **называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)**. СЛАУ можно записать в виде Ax=b, где $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$ - **матрица системы**, $b=\begin{pmatrix}b_1\\ .\\ .\\ .\\ b_m\end{pmatrix}$- **столбец**

правой части, или в виде $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ - это **расширенная матрица системы**.

Для решения СЛАУ можно использовать один из следующих методов:

Метод Гаусса.

Используем следующие операции со строками матрицы, называемые **элементарные преобразования**: умножить или разделить строку на ненулевое число; из одной строки вычесть или прибавить другую, умноженную на какое-то число; поменять строки местами. Очевидно, что применение элементарных преобразований к расширенной матрице системы даёт эквивалентную систему. С помощью элементарных преобразований приводим эту матрицу к **ступенчатому виду**, то есть к матрице, в которой:

- ниже нулевой строки стоят только нулевые строки,

- в каждой ненулевой строке первый ненулевой элемент равен 1 (этот элемент называется ведущим),

- ниже ведущего элемента каждой строки стоят только нули.

Для того чтобы гарантированно привести систему к ступенчатому виду, можно применить так называемый ***алгоритм Гаусса***:

1) Найдём ненулевой элемент в первом столбце. Переставим строку, содержащую этот элемент, на первое место.

2) Разделим эту строку на первый элемент. Первый элемент строки станет равен единице – это ведущий элемент.

3) Вычтем из каждой строки первую строку, умноженную на первый элемент этой строки. В результате все элементы первого столбца, кроме первого, станут равны 0.

4) Повторим шаги 1)-3) с частью матрицы, которая остаётся после вычёркивания первой строки и первого столбца. Если на каком-то шаге в первом столбце нет ненулевых элементов, пропускаем этот столбец и переходим к следующему.

В итоге мы получим ступенчатую матрицу.

Замечание.

С точки зрения простоты вычислений, особенно при решении системы «вручную», бывает удобней отклониться от этого алгоритма и использовать какие-то другие элементарные преобразования. Например, если в матрице оказалось две одинаковых строки, можно сразу вычесть из одной другую, также можно выбирать в качестве ведущего не первый ненулевой элемент столбца, а тот, на который проще делить (чтобы избежать громоздких дробей). В программных реализациях метода Гаусса ведущий элемент часто выбирается наибольшим по модулю для уменьшения вычислительных погрешностей.

Итак, мы привели матрицу системы к ступенчатому виду. Если в полученной ступенчатой матрице оказалась строка вида $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | 1\right)$,

то система не имеет решений (эта строчка – краткая запись уравнения $0x_1 + \ldots + 0x_n = 1$, которому не удовлетворяют никакие переменные). Если такой строки нет, то система имеет одно или более решений, которые можно получить следующим образом:

Назовём переменные, которым соответствуют столбцы с ведущими элементами, ***базисными***, а остальные – ***свободными***. Начиная с последнего уравнения будем выражать базисные переменные через свободные (этот процесс называется обратным ходом метода Гаусса). Если свободных переменных нет (полученная матрица треугольная), то система имеет одно решение. Если есть свободные переменные, то общее решение системы имеет вид *«свободные переменные принимают произвольные значения, базисные выражены через свободные»*.

Пример 27. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + x_3 - 6x_4 = 58 \\ 3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 27 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ -4x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 69. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 9 & 1 & -6 & 58 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 7 & 9 & 4 & 69 \end{array}\right)$. Методом Гаусса приведём её к ступенчатому виду.

1) Меняем первую и третью строки местами (для удобства вычислений): $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 27 \\ 1 & 9 & 1 & -6 & 58 \\ -4 & 7 & 9 & 4 & 69 \end{array}\right)$.

2) Из второй строки вычитаем первую, умноженную на 3, из третьей – первую, к четвёртой прибавляем первую, умноженную на 4: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 & -3 & 36 \\ 0 & 8 & 0 & -7 & 61 \\ 0 & 11 & 13 & 8 & 57 \end{array}\right)$.

3) Делим вторую строку на 5: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 36/5 \\ 0 & 8 & 0 & -7 & 61 \\ 0 & 11 & 13 & 8 & 57 \end{array}\right)$.

4) Из третьей строки вычитаем вторую, умноженную на 8, из четвёртой – вторую, умноженную на 11: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 36/5 \\ 0 & 0 & -8/5 & -11/5 & 17/5 \\ 0 & 0 & 54/5 & 73/5 & -111/5 \end{array}\right)$.

5) Делим третью строку на $-\frac{8}{5}$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 36/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -17/8 \\ 0 & 0 & 54/5 & 73/5 & -111/5 \end{array}\right)$.

6) Вычитаем из четвёртой строку третью, умноженную на $\frac{54}{5}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 36/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -17/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{array}\right).$$

7) Делим четвёртую строку на $-\frac{1}{4}$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 & 36/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 & -17/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right).$

Мы получили следующую систему, равносильную исходной:
$$\begin{cases} x_4 = -3 \\ x_3 + \frac{11}{8}x_4 = -\frac{17}{8} \\ x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = \frac{36}{5} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Выполним обратный ход алгоритма Гаусса:
$$\begin{cases} x_4 = -3 \\ x_3 = -\frac{17}{8} - \frac{11}{8}x_4 = -\frac{17}{8} + \frac{33}{8} = 2 \\ x_2 = \frac{36}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{36}{5} - \frac{2}{5} - \frac{9}{5} = 5 \\ x_1 = -3 - x_2 - x_3 - x_4 = -3 - 5 - 2 + 3 = -7. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -7, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = -3.$

Метод Крамера.

Для решения системы $Ax=b$ с квадратной матрицей A, определитель которой отличен от нуля, можно использовать следующие формулы:

$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$, где A_j - матрица, получающаяся из A, если её j-ый столбец заменить на столбец правой части.

Пример 28. Решите систему линейных уравнений методом Крамера: $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ -3x+7y=-16. \end{cases}$

Решение.

Запишем матрицу системы и вычислим её определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot(-3) = 23.$

Вычислим определители матриц, получающихся при замене одного из столбцов данной матрицы столбцом правой части:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -16 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 3\cdot(-16) = 69, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -16 \end{vmatrix} = 2\cdot(-16) - 3\cdot(-3) = -23.$$

По формулам Крамера $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3,\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1.$

Ответ: $x=3, y=-1$.

3.2. Однородные системы линейных уравнений и их решения

Система линейных уравнений вида Ax=0 называется **однородной**. Система с ненулевой правой частью называется **неоднородной**.

Однородная система всегда имеет по крайней мере одно решение – нулевое. Верно следующее утверждение: однородная система Ax=0 не имеет решений, кроме нулевого, тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен количеству переменных (для систем с квадратной матрицей это условие равносильно $|A| \neq 0$).

Пример 29. Используя теорию определителей, выясните, имеет ли данная однородная система ненулевые решения: $\begin{cases} 4x_1+7x_2+8x_3=0 \\ 4x_1-7x_2-4x_3=0 \\ -4x_1-8x_2+5x_3=0. \end{cases}$

Решение.

Найдём определитель матрицы системы (например, по «правилу треугольников»):

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -4 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot(-7)\cdot 5 + 7\cdot(-4)\cdot(-4) + 8\cdot 4\cdot(-8) - 8\cdot(-7)\cdot(-4) - 7\cdot 4\cdot 5 - 4\cdot(-4)\cdot(-8) = -776.$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля, следовательно, данная однородная система не имеет ненулевых решений.

Ответ: система не имеет ненулевых решений.

Множество решений однородной системы образует линейное пространство. Его размерность равна разности количества переменных и ранга матрицы *A*. *Базис пространства решений называется* ***фундаментальным набором решений (ФНР)*** *системы.*

Замечание.

Очевидно, что ФНР определён не однозначно, так как в линейном пространстве можно найти много базисов.

Один из способов найти ФНР заключается в следующем: методом Гаусса приведём систему к ступенчатому виду. Если система имеет ненулевые решения, некоторые переменные будут свободными. По очереди положим каждую из свободных переменных равной *1*, а остальные *0* и вычислим соответствующие значения базисных переменных – таким образом мы получим столько линейно независимых решений системы, сколько оказалось свободных переменных, то есть как раз $n - rankA$. Этот набор решений и является ФНР.

Пример 30. Найти фундаментальный набор решений (ФНР) и размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 3x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 10x_3 - x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем матрицу системы: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -10 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

1) Поменяем местами первую и третью строки: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 7 & -10 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2, из третьей – первую, умноженную на 3, из четвёртой – первую, умноженную на -1: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & 1 & 8 \\ 0 & -10 & 14 & 1 & 8 \\ 0 & 10 & -14 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Из третьей строки вычтем вторую, к четвёртой строке прибавим первую. Вычеркнем получившиеся нулевые строки: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & -10 & 14 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Разделим вторую строку на -10 и вычтем из первой строки полученную вторую строку, умноженную на 3: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -7/5 & -1/10 & -4/5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 3/10 & -3/5 \\ 0 & 1 & -7/5 & -1/10 & -4/5 \end{pmatrix}$.

Мы получили $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5}x_3 - \dfrac{3}{10}x_4 + \dfrac{3}{5}x_5 \\ x_2 = \dfrac{7}{5}x_3 + \dfrac{1}{10}x_4 + \dfrac{4}{5}x_5. \end{cases}$ Переменные x_1 и x_2 базисные, а x_3, x_4 и x_5 - свободные. Размерность пространства решений системы равна количеству свободных переменных, то есть 3. Вектора ФНР можно получить, положив одну из свободных переменных равной 1, а другие нулю.

При $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$ получаем $x_1 = -\dfrac{1}{5}, x_2 = \dfrac{7}{5},$ вектор $v_1 = \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{7}{5}, 1, 0, 0\right)$.

При $x_4 = 1, x_3 = x_5 = 0$ получаем $x_1 = -\frac{3}{10}, x_2 = \frac{1}{10}$, вектор $v_2 = \left(-\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, 0, 1, 0\right)$.

При $x_5 = 1, x_3 = x_4 = 0$ получаем $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{4}{5}$, вектор $v_3 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, 1\right)$.

Замечание.

При другом выборе базисных переменных получится другой ФНР.

Ответ: размерность пространства решений равна 3, ФНР: $v_1 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0, 0\right)$, $v_2 = \left(-\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, 0, 1, 0\right)$, $v_3 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0, 1\right)$.

3.3. Неоднородные системы линейных уравнений и их решения

Пусть $Ax=b$ – неоднородная система линейных уравнений. Если ранг матрицы A равен количеству переменных (для квадратных матриц это значит $|A| \neq 0$), то для любой правой части b система имеет ровно одно решение.

Если ранг матрицы A меньше количества переменных, то система в зависимости от вектора b может не иметь решений или иметь их бесконечно много. А именно, система имеет решения, если ранг её матрицы равен рангу её расширенной матрицы (***теорема Кронекера-Капелли***). При решении системы методом Гаусса индикатором того, что решений нет, является получение строки вида $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 | 1\right)$.

Напомним, что общее решение системы записывается в виде «свободные переменные принимают произвольные значения, базисные переменные выражены через свободные». *Частное решение, которое получается, если положить все свободные переменные равными нулю, называется* ***базисным*** *решением системы.*

Замечание.

Базисные переменные можно выбрать разными способами (для того чтобы какие-то переменные можно было взять за базисные, нужно, чтобы их количество равнялось рангу матрицы системы и чтобы матрица, образованная из соответствующих им столбцов, была невырожденной). Каждому набору базисных переменных соответствует своё базисное решение.

Если в задании указано, какие переменные следует взять за базисные, нужно с помощью элементарных преобразований привести соответствующую им часть матрицы к единичной. Это значит, что в каждом столбце, соответствующем базисной переменной, в одной строке (для всех столбцов в разных) должна стоять единица, а все остальные элементы должны быть равны нулю. Если не указано, какие переменные должны быть базисными, можно выбирать их по своему желанию.

Пример 31. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1+7x_2+8x_3=1 \\ 4x_1-5x_2-4x_3=-2 \\ 3x_1+2x_2+4x_3=-1. \end{cases}$$

Решение.

Запишем матрицу системы: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & -5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right)$. Методом Гаусса приведём её к ступенчатому виду. В качестве базисных выберем первые две переменные:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & -5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -8 & -1 \\ 4 & -5 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -8 & -1 \\ 0 & 23 & 28 & 2 \\ 0 & 23 & 28 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -8 & -1 \\ 0 & 23 & 28 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 28/23 & 2/23 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 12/23 & -9/23 \\ 0 & 1 & 28/23 & 2/23 \end{array}\right).$$

Мы получили $x_1+\frac{12}{23}x_3=-\frac{9}{23}, x_2+\frac{28}{23}x_3=\frac{2}{23},$ откуда получаем общее решение

$x_1 = -\frac{9}{23} - \frac{12}{23}x_3, x_2 = \frac{2}{23} - \frac{28}{23}x_3, x_3 \in \mathbb{R}$. Положив свободную переменную $x_3 = 0,$ получим базисное решение $\left(-\frac{9}{23}, \frac{2}{23}, 0\right)$.

Замечание.

При другом выборе базисных переменных получится другой вид общего решения и другое базисное решение.

Ответ: общее решение $x_1 = -\frac{9}{23} - \frac{12}{23}x_3, x_2 = \frac{2}{23} - \frac{28}{23}x_3, x_3 \in \mathbb{R}$, базисное решение $\left(-\frac{9}{23}, \frac{2}{23}, 0\right)$.

Глава 4. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4.1. Вектор. Действия над векторами заданными длиной и направлениями

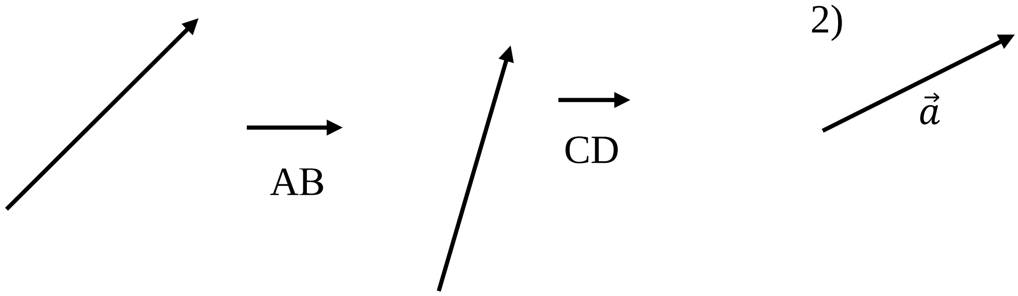
Величины, которые полностью определяются своими численными значениями, называются *скалярными*.

Например: площадь, длина, объем, температура, работа, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение определяются не только своими числовыми значениями, но и направлением. Такие величины называют *векторными*. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

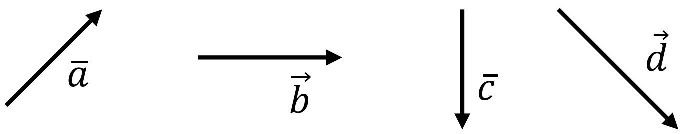
Вектор – это направленный отрезок. Вектор обозначается двумя способами.

1) 2)



Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Действия над векторами

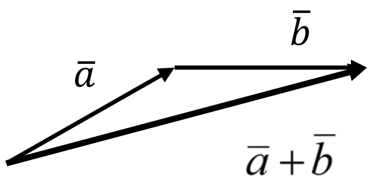


I. Сложение векторов

1. Правило треугольника

Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\overrightarrow{OA} = \bar{a}$. От точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \bar{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется *суммой векторов* $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\overrightarrow{OB} = \bar{a} + \bar{b}$$

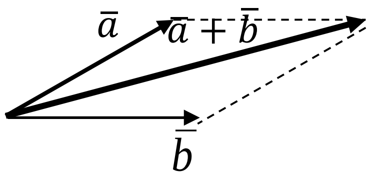


$\bar{a} + \bar{b} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$

2. Правило параллелограмма

Построим сумму векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Возьмем произвольную точку O и построим вектора $O\overline{A} = \overline{a}$ и $O\overline{B} = \overline{b}$. Достроим до параллелограмма. Диагональ выходящая из т.O называется *суммой векторов*.

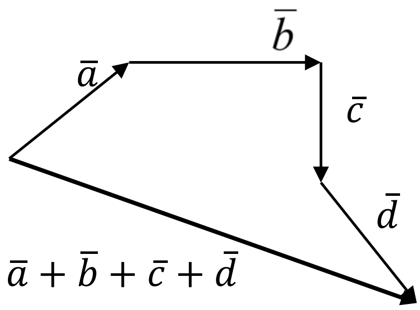


3. Правило многоугольника

Это правило используется для построения суммы более чем двух векторов. Все вектора откладываются друг за другом.

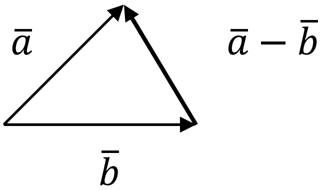
Построим $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$.

Возьмем произвольную точку О и построим вектор $O\overline{A} = \overline{a}$. От точки А отложим вектор $A\overline{B} = \overline{b}$, … $B\overline{C} = \overline{c}$, $C\overline{D} = \overline{d}$. Вектор $O\overline{D}$, соединяющий начало первого с концом последнего, называется суммой векторов, т.е. $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = O\overline{D}$.



II. Разность векторов

Построим разность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Возьмем произвольную точку О и построим вектора $O\overline{A} = \overline{a}$ и $O\overline{B} = \overline{b}$. Вектор $B\overline{A}$, соединяющий конец второго с концом первого вектора $B\overline{A} = \overline{a} - \overline{b}$.

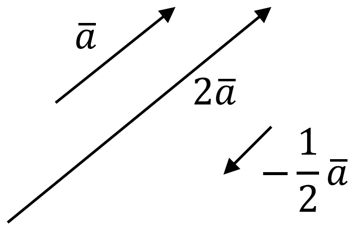


$$\bar{a}-\bar{b}=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$$

III. Умножение вектора на число

Умножение вектора $\bar{a}$ на число $k \neq 0$, есть вектор , длина которого равна $k \cdot \bar{a}$, а направление совпадает с направлением $\bar{a}$, если $k \rangle 0$, и противоположно направлен , если $k \langle 0$.

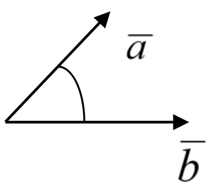
Построить $\bar{a}$, $2\bar{a}$, $-\frac{1}{2}\bar{a}$.



Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых и их направление либо совпадает, либо противоположно направлены.

IV. Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.



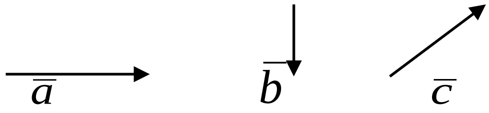
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}.$$

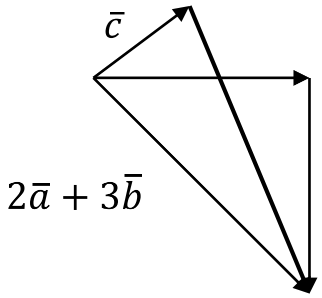
$$\varphi=(\bar{a},\bar{b}).$$

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2.$$

Пример №1

Дано:





Построить

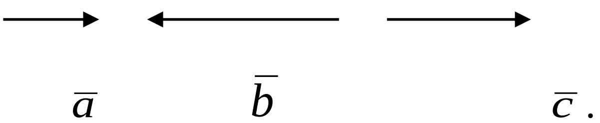
$2\overline{a}+3\overline{b}-\overline{c}$.

1. $2\overline{a}+3\overline{b}=\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$

2. $2\overline{a}+3\overline{b}-c=\overline{OB}-\overline{OC}=\overline{CB}$

Пример №2

Дано:



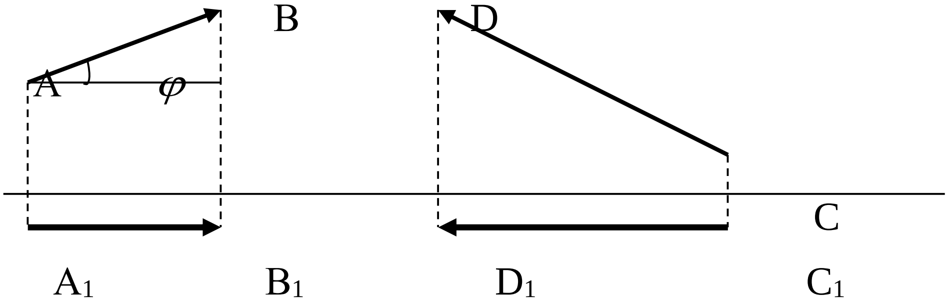
Построить $2\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c}$

$$2\overline{a}-\overline{b}=\overline{OA}-\overline{OB}=\overline{BA}$$

$$2\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c}=\overline{BA}+\overline{AC}=\overline{BC}$$

4.2. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Действия над векторами с заданными координатами

Проекцией вектора на ось называется направленный отрезок оси, начало которого есть проекция начала вектора и конец – проекция его конца.



$A_1B_1 = np_l A\overline{B}$ $\qquad\qquad$ $C_1D_1 = np_l CD$

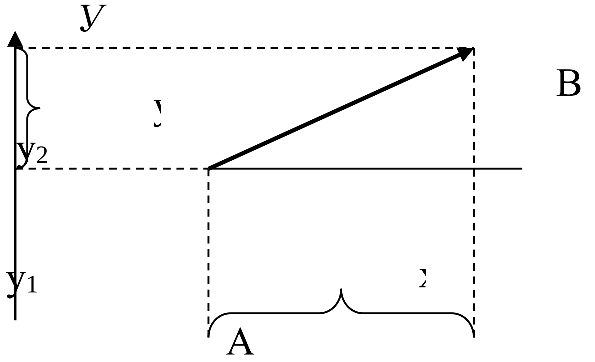
Длина этого направленного отрезка берется со знаком «+», если направление отрезка и оси совпадают, и со знаком «–», если их направления противоположны,

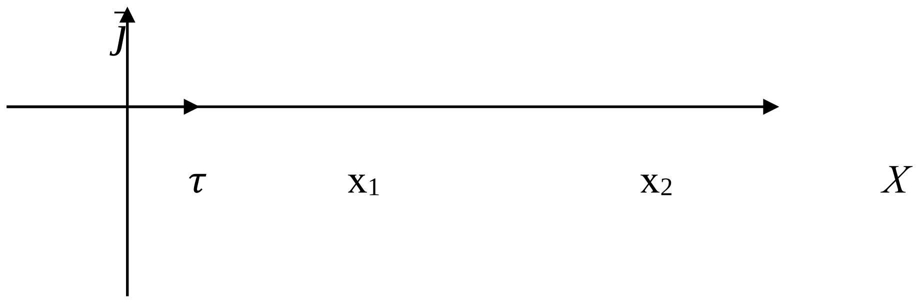
т.е. $np_l A\overline{B} = \left|A_1\overline{B}_1\right|$

$np_l C\overline{D} = -\left|C_1\overline{D}_1\right|$

Проекция вектора $\overline{a} \neq \overline{o}$ на ось l равна длине этого вектора умноженной на косинус угла φ между осью и вектором $np_l a = \left|\overline{a}\right|\cos\varphi$.

Рассмотрим вектор $A\overline{B}$, где $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$. Спроецируем вектор $A\overline{B}$ на ось координат.





$$пр_{OX}\,\overline{AB} = x_2 - x_1 \qquad\qquad пр_{OY}\,\overline{AB} = y_2 - y_1$$

$$\overline{AB}\left(x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\right).$$

Вывод: Координаты вектора это проекции вектора соответствующие

оси координат.

Если начало вектора совпадает с началом координат,

то вектор называется *радиус-вектором*.

Базис плоскости – это два неколлинеарных вектора этой плоскости, взятые в определенном порядке.

O, $\bar{i}$, $\bar{j}$; $\bar{i} \perp \bar{j}$; $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1.$

Аналогично, базис пространства:

O, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$; $\bar{i} \perp \bar{j} \perp \bar{k}$; $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1.$

$\boxed{\overline{AB} = \left(x_2 - x_1\right)\cdot \bar{i} + \left(y_2 - y_1\right)\cdot \bar{j}}$ – *разложение вектора по базису*

на плоскости	в пространстве
$\bar{a}(x_1, y_1)$ $\quad$ $\bar{b}(x_2, y_2)$	$\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$

1) *Длина вектора*

$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$	$\lvert\bar{b}\rvert = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ +

2) Скалярное произведение векторов

$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

3) ***Угол между векторами***

$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$	$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

4) Сумма / разность векторов

$\dfrac{\begin{matrix} \bar{a}(x_1, y_1) \\ \pm\, \bar{b}(x_2, y_2) \end{matrix}}{\bar{a} \pm \bar{b}(x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2)}$	$\dfrac{\begin{matrix} \bar{a}(x_1, y_1, z_1) \\ \pm\, \bar{b}(x_2, y_2, z_2) \end{matrix}}{\bar{a} \pm \bar{b}(x_1 \pm x_2,\, y_1 \pm y_2,\, z_1 \pm z_2)}$

5) *Умножение вектора на число*

$k - число$, $k \neq 0$

$k\bar{a}(kx_1, ky_1)$ | $k\bar{b}(kx_2, ky_2, kz_2)$

6) Условие параллельности векторов

$$(\bar{a} // \bar{b})$$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = n$ $\qquad$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$

7) Условие перпендикулярности векторов

$$(\bar{a} \perp \bar{b})$$

$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ $\qquad$ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Пример

Дано: $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{k}$;

$\bar{b} = \bar{j} + 7\bar{k}$;

$\bar{c} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k}$.

Найти: 1) координаты вектора $2\bar{a} - \bar{c} + 5\bar{b}$;

2) длину вектора $2\bar{a} + 10\bar{b}$;

3) скалярное произведение векторов $(\bar{a} - 3\bar{b}) \cdot 7\bar{c}$.

Решение

1) $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{k} \Rightarrow \bar{a}(2;0;3)$

$\bar{b} = \bar{j} + 7\bar{k} \Rightarrow \bar{b}(0;1;7)$

$\bar{c} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 5\bar{k} \Rightarrow \bar{c}(2;3;5)$

$2\bar{a}\ (4;0;6)$

$+$

$\bar{c}\ (2;3;5)$

$+$

$5\bar{b}\ (0;5;35)$

$2\bar{a} - c + 5\bar{b}\ (4-2+0,\ 0-3+5,\ 6-5+35) \Rightarrow 2\bar{a} - \bar{c} + 5\bar{b}\ (2,2,36)$.

2) Чтобы найти длину вектора $2\bar{a} + 10\bar{b}$, нужно сначала найти координаты этого вектора:

$2\bar{a}\ (4;0;6)$

$+$

$10\bar{b}\ (0;10;70)$

$2\bar{a} + 10\bar{b}\ (4,10,76)$

$\left|2\bar{a} + 10\bar{b}\right| = \sqrt{4^2 + 10^2 + 76^2} = \sqrt{5892}$.

3) Чтобы вычислить скалярное произведение векторов, нужно найти их координаты:

$\bar{a}(2,0,3)$

–

$3\bar{b}(0,3,21)$ $\qquad$ $7\bar{c}(14,21,35)$

$\bar{a}-3\bar{b}(2,-3,-18)$

$$\left(\bar{a}-3\bar{b}\right)\cdot 7\bar{c} = 2\cdot 14+(-3)\cdot 21+(-18)\cdot 35=-665.$$

Пример №2

Дано: $A(2,5)$;

$B(-3,7)$;

$C(0,-1)$;

$D(15,4)$.

Найти:

1) длину вектора $\overline{AB}$;
2) угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение

1) $\left.\begin{matrix} A(2,5) \\ B(-3,7) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{AB}(-3-2,\, 7-5) = \overline{AB}(-5,2)$;

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$$

2) $\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ $

$\overline{AB}\left(x_1,y_1\right)$ $\overline{CD}\left(x_2,y_2\right)$ $

$\overline{AB}(-5,2)$; $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{29}$ 4

$$\left.\begin{matrix}C(O;-1)\\D(15;4)\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overline{CD}(15-0;\quad 4-(-1))=\overline{CD}(15;5)$$
;

$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{15^2+5^2}==\sqrt{250}$;

$A\bar{B}\cdot C\bar{D}=-5\cdot 15+2\cdot 5=-65;$

$\cos\left(\overline{AB},\overline{CD}\right)=\dfrac{-65}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{250}}=-\dfrac{13}{\sqrt{290}}$.

Глава 5. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ

5.1. Предел функции в точке. Теорема о пределах

Дана функция $y = f(x)$, $D(y)$, $x_0 \in D(y)$

$$x_0 \to y_0 \, f(x_0) = A;$$

при условии $x \to x_0$ выполняется условие $f(x) \to A$ т.е. $|x - x_0|$ – уменьшается $\Rightarrow |f(x) - A|$ – уменьшается.

Определение: *Число* A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon\rangle 0$ существует такое $\delta\rangle 0$, что для всех $x \neq x_0$ удовлетворяющих неравенству $|x - x_0|\langle \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A|\langle \varepsilon$.

Обозначим $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = A$;

$$(\forall \varepsilon\rangle 0 \quad \exists \delta\rangle \quad \forall x: \ |x - x_0|\langle \delta, \quad x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - A|\langle \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_o} f(x) = A.$$

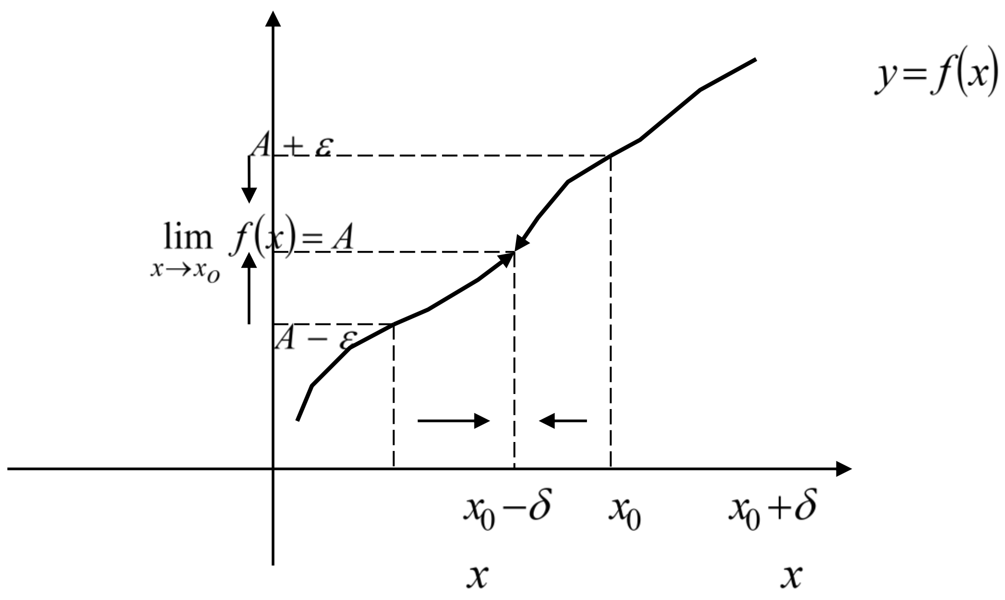


Рис. 5.1. Геометрическая иллюстрация предела функции

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \to x_o} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim_{x \to x_o} f(x) \pm \lim_{x \to x_o} \varphi(x) .$$

Например:

$$\lim_{x \to 2} \left(x^2 + x^3 - x \right) = \lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} x^3 - \lim_{x \to 2} x = 2^2 + 2^3 - 2 = 10 .$$

Следствие: функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов

$$\lim_{x \to x_o} \left(f(x) \cdot q(x) \right) = \lim_{x \to x_o} f(x) \cdot \lim_{x \to x_o} q(x) .$$

Например: $\lim\limits_{x \to 5} \left(x \cdot x^2 \right) = \lim\limits_{x \to 5} x \cdot \lim\limits_{x \to 5} x^2 = 5 \cdot 25 = 125 .$

Следствие:

1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела.

$$\lim_{x \to x_o} c\, f(x) = c \lim_{x \to x_o} f(x) .$$

Например: $\lim\limits_{x \to 1} 5x^2 = 5 \lim\limits_{x \to 1} x = 5 \cdot 1 = 5.$

2. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела.

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to x_o}f(x)\right)^n;$$

$$\lim_{x\to 3}(x+2)^n=\left(\lim_{x\to 3}(x+2)\right)^4=5^4=625.$$

Теорема 3. Предел отношения, равен отношению пределов при условии, что предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_o}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_o}q(x)},\qquad \lim_{x\to x_o}q(x)\neq 0.$$

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+7x-1\right)=\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}7x-\lim_{x\to 2}1=3\left(\lim_{x\to 2}\right)^2+7\lim_{x\to 2}x-1=$$

1). $=3\cdot 2^2+7\cdot 2-1=25;$

Таким образом, для вычисления предела многочлена $f(x)$ при $x\to x_0$ достаточно вместо переменной x подставить значение x_0, к которому она стремиться, и выполнить соответствующие действия, т.е.

$$\lim_{x\to 1}\left(x^3+3x^2-4x+5\right)=1^3+3\cdot 1-4\cdot 1+5=5;$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^2+3x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^3-2x-3\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x+3\right)}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}.$$

3) Рассмотрим решения пределов, когда предел знаменателя дроби обращается в ноль.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=.$$

При постановке «2» вместо переменной x в числителе и в знаменателе дроби получается ноль. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Чтобы решить предел такого вида нужно числитель и знаменатель разложить на множители.

$x^2+14x-32=0 \qquad\qquad x^2-6x+8=0$

$x_1=2 \quad x_2=-16 \qquad\qquad x_1=2 \quad x_2=4$

$x^2+14x-32=(x-2)(x) \qquad\qquad x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$.

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+16)}{(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=\frac{18}{-2}=-9.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

Чтобы решить предел такого вида необходимо избавиться от неопределенности, для этого числитель и знаменатель умножают на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. $\sqrt{x+1}+1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2.$$

5)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}-3}{\sqrt{x+7}-3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)(\sqrt{2x+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{((\sqrt{2x+5})^2-3^2)(\sqrt{x+7}+3)}{((\sqrt{x+7})^2-3^2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5-9)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt{2x+5}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x+5-9)(\sqrt{x+7}+3)}{(x+7-9)(\sqrt{2x+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}=$$

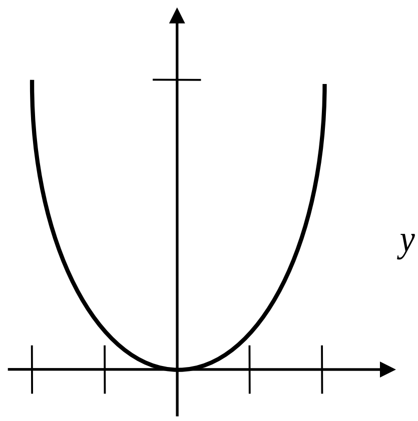
$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\cdot 6^1}{6_1}=2$$

5.2. Бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие пределы

df: Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Например:

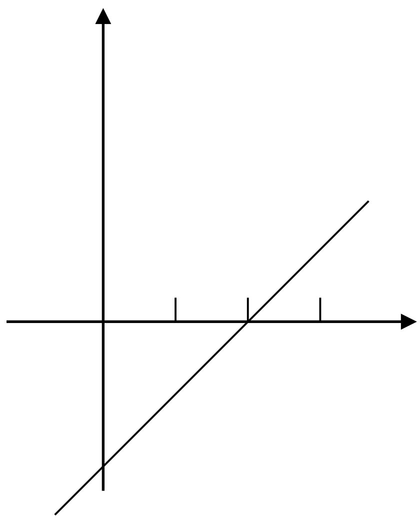
1) $y=x^2$ $\lim\limits_{x\to 0} x^2=0 \Rightarrow y=x^2$ - бесконечно малая функция



$y=x^2$

2) $y=x-2$

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0 \Rightarrow y=x-2$ - бесконечно малая функция



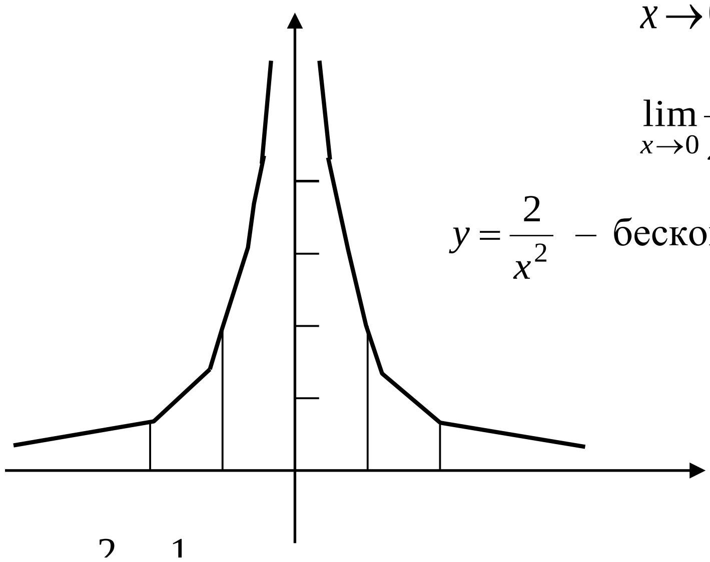
у

df: Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x_0$ если для любого числа $M\rangle 0$ найдется такое $\delta\rangle 0$, что при $x\neq x_0$ имеет место

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$;

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

Например, $y = \dfrac{2}{x^2}$



$x \to 0 \quad y \to \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x^2} = \infty \Rightarrow$

$y = \dfrac{2}{x^2}$ – бесконечно большая функция

Предел вида $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ называется бесконечным пределом.

$\frac{0}{a} = 0$; $\dfrac{0}{\infty} = 0$; $\frac{\infty}{a} = \infty$.

Например

1) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x + 2} = \dfrac{0}{2} = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3}{2x - 6} = \dfrac{3}{\infty} = 0$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{5} = \dfrac{\infty}{5} = \infty$;

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 3x^4 - 5}{x^4 - x^3 + 2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] =$

Чтобы решить предел такого вида нужно избавиться от неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для этого и числитель и знаменатель необходимо разделить на x в наивысшей степени знаменателя $\left(x^4\right)$.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^4}-\frac{3x^4}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-3-\frac{5}{x^4}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{0-3-0}{1-0} = \frac{-3}{1} = -3.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^7+3x+2}{x^6-4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^7}{x^6}+\frac{3x}{x^6}+\frac{2}{x^6}}{\frac{x^6}{x^6}-\frac{4x}{x^6}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{3}{x^5}+\frac{2}{x^6}}{1-\frac{4}{x^5}} = \frac{\infty+0+0}{1-0} = \infty.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x}{3x^3+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^3}+\frac{7x}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{3+\frac{4}{x^3}} = \frac{0+0}{3+0} = 0.$$

5.3. Замечательные пределы. Применение их при вычислении пределов

I. При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1}$$

называемый первым замечательным пределов.

Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\left\{\begin{matrix} 3x & = & t \\ x & = & \frac{t}{3} \\ x\to 0 & t\to 0 \end{matrix}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\frac{t}{3}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\lim\limits_{t\to 0}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}.$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{\sin 8x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(tg3x\cdot\frac{1}{\sin x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}tg3x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin 8x}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin 8x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{8x}{\sin 8x}=3\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin x}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=4.$

5)
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\left\{\begin{matrix} 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \\ 1-\cos 2\cdot\frac{5x}{2}=2\sin^2\frac{5x}{2}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{5x}{2}}{x^2}\right)=$

$$2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5}{2}x}\right)^2=2\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5x}{2}}{\frac{5x}{2}}\right)^2=2\left(\frac{5}{2}\cdot 1\right)^2=2\cdot\frac{25}{4}=\frac{25}{2}=12{,}5.$$

6)
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctgx}{x-\frac{\pi}{2}}=\left\{\begin{matrix} x-\frac{\pi}{2} & = & y \\ x & = & y+\frac{\pi}{2} \\ x\to\frac{\pi}{2} & & y\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}+y\right)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-tg\,y}{y}=-\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=$$
$-1\cdot 1=-1.$

II. Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

1) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{7}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x}{-2}}\right)^{\frac{-3x}{2}}\right)^{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{4}{7}}=e^{-\frac{8}{21}}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-3x}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{-3}=e^{-3}.$$

3) $$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3}{7}x\right)^{\frac{2}{5x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{3x}{7}\right)^{\frac{7}{3x}}\right)^{\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x}{7}\right)^{\frac{7}{3x}}\right)^{\frac{6}{35}}=e^{\frac{6}{35}}.$$

Глава 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6.1. Понятие производной функции в точке. Формулы производных

Понятие производной является одним из основных математических понятий. Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук.

Определение: Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при приращении аргумента стремящегося к нулю.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначение: $y = f(x)$

$y' = f'(x)$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a, \ b)$, называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

$y = f(x) \qquad x_0 \in D(y)$

Физический смысл:

$V = f(x_0)$.

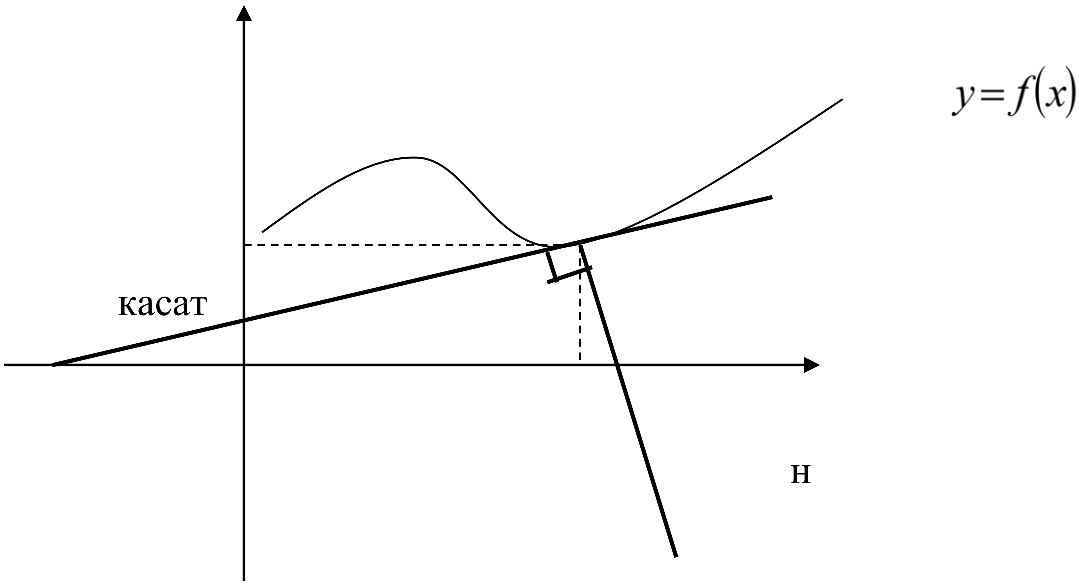
Геометрический смысл:

$k = f'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x_0)$ в точке касания x_0;

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной;

$k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ – угловой коэффициент нормали к графику функции;

$y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ – уравнение нормали.



Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой*.

Формулы дифференцирования

Основные правила

1. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$;

2. $(u\cdot v)'=u'v+uv'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

4. $(Cu)'=C\cdot u'$ $\quad C'=0 \quad C=const$

$x'=1$

$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$	$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u\ln a}$
$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$
$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u u'$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'\sin u$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'\cos u$
$\left(tgx\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgu\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgu\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\left(arctgx\right)' = \frac{1}{x^2+1}$	$\left(arctgu\right)' = \frac{u'}{u^2+1}$
$\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{x^2+1}$	$\left(arcctgu\right)' = -\frac{u'}{u^2+1}$

Рассмотрим примеры.

1. Точка движется по закону $S = 3t^3 + t^2 - 4t.$

Найти скорость в момент времени $t_0 = 4c.$

Решение: $U = S'(t_0)$

$S'(t) = (3t^3 + t^2 - 4t)' = (3t^3)' + (t^2)' - (4t)' = 3(t^3)' + (t^2)' - 4(t)' = 3 \cdot 3t^2 + 2t - 4 =$
$9t^2 + 2t - 4.$

$U = S'(t_0) = 9 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 - 4 = 144 + 8 - 4 = 148\,(м/с).$

2. Составить уравнение касательной и уравнение нормали, проведенных к графику функции $y = e^x(x+1)$ в точке $x_0 = 0$.

Решение

Уравнение касательной: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$

Уравнение нормали: $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

$f(x_0) = f'(0) = e^0(0+1) = 1;$

$x_0 = 0;$

$f'(x) = (e^x(x+1))' = (e^x)' \cdot (x+1) + e^x \cdot (x+1)' = e^x \cdot (x+1) + e^x = e^x \cdot (x+1+1) =$
$e^x \cdot (x+2);$

$$f'(x_0) = f'(0) = e^0(0+2) = 2.$$

Уравнение касательной

$y - 1 = 2(x - 0);$

$y = 2x + 1.$

Уравнение нормали:

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-0);$$

$$y=-\frac{1}{2}x+1.$$

6.2. Нахождение производных сложных функций

$$\left.\begin{matrix} y=f(u) \\ u=\varphi(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=f(\varphi(x))$$ - сложная функция.

$$\left.\begin{matrix} y=\sqrt{u} \\ u=x^2+5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\sqrt{x^2+5}$$ - сложная функция.

Производная сложной функции $y=f(\varphi(x))$ вычисляется по формуле $y'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$.

Например:

$$y=\sqrt{x^2+3x+4};$$

$$u=x^2+3x+4;$$

$$y=\sqrt{u};$$

$$y'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{\left(x^2+3x+4\right)'}{2\sqrt{x^2+3x+4}}=\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}};$$

$$y=\left(23+15+x^2\right)^3;$$

$$u=23+15x+x^2;$$

$$y=u^3$$

$$y'=3u^2\cdot u'=3\left(23+15x+x^2\right)^2\cdot\left(x^2+15x+23\right)'=3\left(23+15x+x^2\right)^2\cdot(2x+15).$$

6.3. Дифференциал функции и его нахождение

Пусть функция $y = f(x)$, где $x \in (a,b)$ дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$, т.е. функция $y = f(x)$ имеет производную в этой точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$$

бесконечно малая величина,

при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) / \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \underbrace{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}_{0}$$

$$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

$f'(x_0)\Delta x$ - главная часть приращения функции, которая называется *дифференциалом функции* и обозначается: $dy = f'(x)\Delta x$.

$$y = x$$

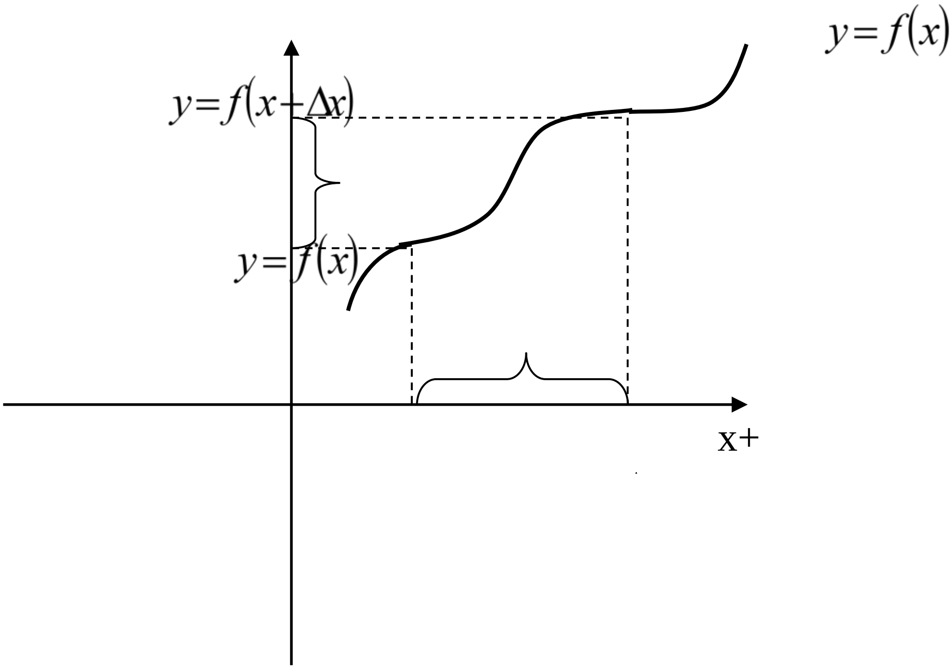
$$d(y) = dx = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow \Delta x = dx.$$

Определение : Дифференциал функции – величина равная произведению производной этой функции на дифференциал аргумента $dy = f'(x) \cdot dx$.

Например:

$$y = x^3 + 2x^2 + 106;$$

$$dy = (x^3 + 2x^2 + 106)' dx = (3x^2 + 4x)dx;$$



$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x \Rightarrow \qquad \boxed{f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x}$$

Например:

Найти приближенное функции $f(x) = 2x^3 + 5$ в точке $x = 2{,}001$.

Решение

используем формулу

$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$;

$f(x) = 2x^3 + 5$ 4;

$x = 2{,}001 = 2 + 0{,}001$;

$f(2{,}001) = f(2+0{,}001) = f(2) + f'(2)\cdot 0{,}001$;

$f(2) = 2\cdot 2^3 + 5 = 21$;

$f'(x) = 6x$;

$f'(x) = 12$;

$f(2{,}001) = 21 + 12 \cdot 0{,}001 = 21 + 0{,}012 = 21{,}012,$

если $\Delta x = 0{,}001 \Rightarrow \quad \Delta y = 21{,}012 - 21 = 0{,}012$.

Формулы для приближенных вычислений

1) $\sqrt[n]{x + \Delta x} = \sqrt[n]{x} + \dfrac{\Delta x}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$;

2) $(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1} \cdot \Delta x$;

3) $\dfrac{1}{x + \Delta x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\Delta x}{x^2}$.

Например

1) $\sqrt{25{,}16} = \sqrt{25 + 0{,}16} = \sqrt{25} + \dfrac{0{,}16}{2\sqrt{25}} = 5 + \dfrac{0{,}16}{10} = 5{,}016$;

2) $\sqrt[3]{26{,}19} = \sqrt[3]{27 - 0{,}81} = \sqrt[3]{27} + \dfrac{-0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 - \dfrac{0{,}81}{27} 3 - 0{,}03 = 2{,}97$;

3) $(4{,}012)^2 = (4 + 0{,}012)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}012 = 16 + 0{,}096 = 16{,}096$;

4) $(9{,}95)^3 = (10 - 0{,}05)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot (-0{,}05) = 1000 - 3 \cdot 100 \cdot 0{,}05 = 1000 - 15 = 985$;

5) $\frac{1}{9{,}93} = \frac{1}{10-0{,}07} = \frac{1}{10} - \frac{(-0{,}07)}{10^2} = 0{,}1 + 0{,}0007 = 0{,}1007.$

6.4. Наибольшее и наименьшее значение функции а промежутке. Задачи на максимум и минимум

Рассмотрим функцию $y = f(x), x \in [a,b]$.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной в некотором промежутке , необходимо:

1. Найти производную.

2. Приравнять производную к нулю, т.е. найти критические точки.
3. Найти значение функции на концах промежутка и в критических точках, принадлежащих данному промежутку.
4. Выбрать наибольшее и наименьшее значение функции на данном промежутке.

Например:

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ 1. $y' = 3x^2 - 6x - 9$;

$y' = 0$ $\quad 3x^2 - 6x - 9 = 0$;

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = 4 + 12 = 16;$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{array}\right..$$

3. $y(-4) = (-4)^3 - 3 \cdot (4)^2 - 9 \cdot (-4) + 35 = -41$;

$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 35 = 40$;

$y(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 35 = 8$;

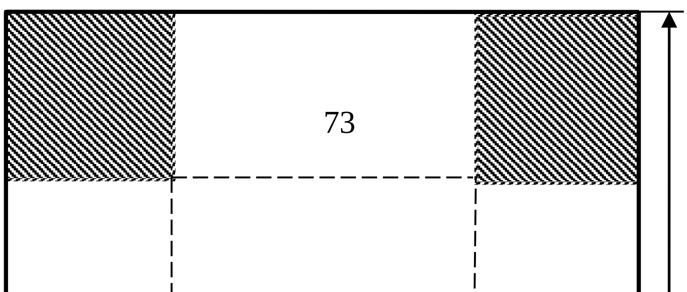
$y(4) = 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 9 \cdot 4 + 35 = 15$;

$$\max_{[-4,4]}(x^3 - 3x^2 - 9x + 35) = 40, \quad x = -1.$$

$$\min_{[-4,4]}(x^3 - 3x^2 - 9x + 35) = -41, \quad x = -4.$$

Рассмотрим задачу

Из квадратного листа жести со стороной 36 м надо изготовить ящик, открытый сверху с квадратным основанием наибольшего объема. Найти этот объем.



Обозначим за x длину стороны вырезаемого квадрата, тогда сторона основания будет равна $36-2x$. Следовательно, объем будет вычисляться по формуле $V = S \cdot h$.

Т.к. в основании ящика квадрат, тогда $S = (36-2x)^2$, а $h = x \Rightarrow$

$$V(x) = (36-2x)^2 x \qquad x \in (0{,}18).$$

1. $V'(x) = 2(36-2x)\cdot(36-2x)' x + (36-2x)^2 x' =$

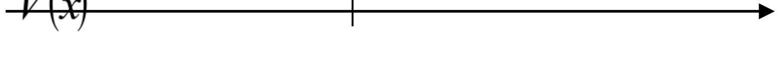
$= 2\cdot(36-2x)\cdot(-2x) + (36-2x)^2 = (36-2x)(-4x+36-2x) = (36-2x)(-6x+36)$.

2. $V'(x) = 0 \qquad (36-2x)\cdot(-6x+36) = 0$;

$$36-2x=0;$$

$$2x = 36 \Rightarrow \quad x = 18 \notin \quad (0{,}18);$$

$$2x = 36 \Rightarrow \quad x = 6 \quad \notin (0{,}18).$$



$$V(6)=(36-2\cdot 6)^2\cdot 6=3456(м^3)$$

$$\max_{(0,18)} V(x)=3456(м^3); \qquad x=6м.$$

Глава 7. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

7.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства

В дифференциальном исчислении решается Пример: по данной функции $f(x)$ найти ее производную (или дифференциал). Интегральное исчисление решает обратную задачу: нахождение функции по ее производной. Искомую функцию $F(x)$ называют первообразной функции $f(x)$.

Определение: функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ в промежутке (a,b), если в любой точке этого промежутка выполняется равенство: $F'(x)=f(x)$.

Например:

$f(x)=3x^2 \to F(x)=x^3$

$F(x)=x^3+5$

$F(x)=x^3-3$

$F(x)=x^3+c, \qquad C-const.$

Определение: Множество всех первообразных функций $F(x)=x^3+c$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначают $\int f(x)dx=F(x)+c$.

$f(x)$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Свойства неопределенного интеграла

1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

2) Интеграл от суммы (разности) равен сумме (разности) интегралов от функций.

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm g(x)dx$

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $\qquad \int dx = x + c$;

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$;

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $\qquad \int a^{kx} dx = \frac{1}{k}\frac{a^{kx}}{\ln a} + c$;

4. $\int e^x dx = e^x + c$ $\qquad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$;

5. $\int \sin x dx = \cos x$ $\qquad \int \sin kx dx = -\frac{1}{2}\cos kx + c$;

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$ $\qquad \int \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$;

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$ $\qquad \int \frac{dx}{\cos^2 kx} = \frac{1}{k}tgkx + c$;

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$ $\qquad \int \frac{dx}{\sin^2 kx} = -\frac{1}{k}ctgkx + c$;

9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$;

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$;

12. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a} + c$.

Рассмотрим метод непосредственного интегрирования, который основан на прямом использовании таблицы интегралов.

$$\int\left(x^2 + 5x - \frac{1}{x}\right)dx = \int x^2 dx + 5\int x dx - \int\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - \ln|x| + c.$$

$$\int\frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}dx = \int\frac{x^3}{x}dx + 3\int\frac{x^2}{x}dx + 4\int\frac{x}{x}dx = \int x^2 dx + 3\int x dx + 4\int dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x + c$$

$$\int\left(2^x + 7\cos x + 5\right)dx = \int 2^x dx + 7\int\cos x dx + 5\int dx = \frac{2^x}{\ln 2} + 7\sin x + 5x + c.$$

7.2. Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки

$$\int\left(2x^3 + 1\right)^4 x^2 dx = \left|\begin{array}{l} t = 2x^3 + 1 \\ dt = 6x^2 dx \\ x^2 dx = \dfrac{dt}{6} \end{array}\right| = \int t^4 \cdot \frac{dt}{6} = \frac{1}{6}\int t^4 dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5} + c$$

.

$$\int\frac{xdx}{\left(x^2 + 1\right)^3} = \left|\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right| = \int\frac{\frac{dt}{2}}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{4t^2} + c = -\frac{1}{4\left(x^2 + 1\right)^2} + c$$

.

$$\int\sqrt{5x^3+1}\cdot x^2dx=\left|\begin{array}{c}5x^3+1=t\\ 15x^2dx=dt\\ x^2dx=\dfrac{dt}{15}\end{array}\right|=\int\sqrt{t}\cdot\frac{dt}{15}=\frac{1}{15}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{15}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3}}+c=\frac{2}{45}\sqrt{\left(5x^3+1\right)^3}+c$$

.

$$\int 5^{3x+7}dx=\left|\begin{array}{c}3x+7=t\\ 3dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right|=\int 5^t\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int 5^t dt=\frac{1}{3}\cdot\frac{5^t}{\ln 5}+c=\frac{5^{3x+7}}{3\ln 5}+c$$

.

7.3. Интегрирование по частям

Интегрирование по частям сводится к использованию равенства $\int udv=u\cdot v-\int vdu$.

Есть несколько типов интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. $\int P(x)e^{kx}dx$; $\int P(x)\sin kxdx$; $\int P(x)\cos kxdx$.

$P(x)$ - многочлен; k - число.

$u=P(x)$

$dv=e^{kx}dx$; $dv=\sin kxdx$; $dv=\cos kxdx$.

2. $\int P(x)\arccos xdx$; $\int P(x)\arcsin xdx$;

$\int P(x)arctgxdx$; $\int P(x)arc\,ctgxdx$; $\int P(x)\ln x\,dx$.

$u=arc\cos x$; $u=arc\sin x$; $u=arctgx$;

$u=arcctgx$; $u=\ln x$.

$dv=P(x)dx$.

3. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$; $\int e^{ax}\sin bx\,dx$; a,b - числа;

$u=\cos bx$; $u=\sin bx$;

$dv=e^{ax}dx$.

Например:

1.

$$\int (x+1)\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{c} u=x+1 \\ du=dx \\ v=\int \sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{array}\right|=(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)-\int -\frac{1}{3}\cos 3x\,dx=$$

$$-\frac{(x+1)}{3}\cos 3x+\frac{1}{3}\int \cos 3x dx=-\frac{(x+1)}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$$

.

2.

$$\int (x+3)arctgx\,dx=\left|\begin{array}{c} u=arctgx \\ du=\frac{dx}{1+x^2} \\ v=\int (x+3)dx=\frac{x^2}{2}+3x \end{array}\right|=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\cdot arctgx-\int\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}-3\int\frac{xdx}{x^2+1}=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx-3\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$\left|\begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{dt}{2} \end{array}\right|=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)arctgx-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}-3\cdot\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=$$

$$\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)arctgx-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c.$$

3.

$$\int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ du = e^x dx \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} e^x = u \\ e^x dx = du \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$e^x \sin x + e^x \cos x + \int -\cos x e^x dx.$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx.$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + c.$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c.$$

7.4. Определенный интеграл и его свойства

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке, а числа a и b принадлежат в этом промежутке.

Определение

Приращение первообразной функции $F(x)$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом от* a *до* b *функции* $f(x)$ и обозначается

$$\int_b^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$; k - число;

2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \qquad a \le c \le b$;

5. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Например:

$$\int\limits_1^3 \left(x^2 + 7x - 2\right)dx = \int\limits_1^3 x^2 dx + \int\limits_1^3 x dx - 2\int\limits_1^3 dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{27}{3} + \frac{7 \cdot 9}{2} - 2 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 2\right) = 34{,}5 - \frac{1}{3} - 3{,}5 + 2 = 33 - \frac{1}{3} = 32\frac{2}{3}.$$

7.5. Нахождение определенного интеграла методом подстановки и по частям

Метод подстановки

1 способ

$$\int\limits_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \left|\begin{array}{c} 8 - x = t \\ -dx = dt \\ dx = -dt \\ x = 0 \quad t = 8 \\ x = 7 \quad t = 1 \end{array}\right| = \int\limits_8^1 \frac{-dt}{\sqrt[3]{t}} = -\int\limits_8^1 t^{-\frac{1}{3}} dt = \int\limits_8^1 t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_1^8 = \frac{3\sqrt[3]{t^2}}{2}\Bigg|_1^8 = \frac{3\sqrt[3]{8^2}}{2} - \frac{3\sqrt[3]{1^2}}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3}{2} = 4{,}5.$$

2 способ

$$\int\limits_1^e \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \left|\begin{array}{c} \ln x = t \\ \dfrac{dx}{x} = dt \end{array}\right| = \int\limits_1^e t dt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{(\ln x)^2}{2}\Bigg|_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Метод интегрирования по частям

$$\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ du = dx \\ v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 =$$

$$\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^{2} - \frac{1}{4}e^{2}\right) - \left(\frac{0}{2}e^{0} - \frac{1}{4}e^{0}\right) = \frac{1}{4}e^{2} - \frac{1}{4}.$$

Глава 8. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8.1. Общие правила комбинаторики. Упорядоченные выборки (размещения). Правило произведения

Основные понятия комбинаторик

Раздел математики, который называется комбинаторикой, занимается решением задачи, связанных с рассмотрением конечных множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3,… , 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например 143, 431, 5671, 1207, 43 и т.п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 143 и 431), другие - входящими в них цифрами (например, 5671 и 1207), третьи различаются и числом цифр (например, 143 и 43).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: **перестановки, размещения, сочетания**.

Предварительно познакомимся с понятием **факториала**.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют

n- факториалом и пишут

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Пример. Вычислить: а) 3!; б) 7! − 5!; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. а) $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

б) Так как $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ и $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, то можно вынести за скобки $5!$

Тогда получим

$5!(6 \cdot 7 - 1) = 5! \cdot 41 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 41 = 120 \cdot 41 = 4920$.

в) $\frac{7!+5!}{6!} = \frac{5!(6 \cdot 7 + 1)}{5! \cdot 6} = \frac{6 \cdot 7 + 1}{6} = \frac{43}{6}$.

Перестановки.

Комбинация из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются перестановками.

Перестановки обозначаются символом $\mathbf{P_n}$, где n- число элементов, входящих в каждую перестановку. (Р - первая буква французского слова permutation- перестановка).

Число перестановок можно вычислить по формуле

$P_n = n \cdot (n-1)(n-2)...3 \cdot 2 \cdot 1$

или с помощью факториала:

$P_n = n!$

Запомним, что **0!=1 и 1!=1.**

Пример. Сколькими способами можно расставлять на одной полке шесть различных книг?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Размещения.

Размещениями из m элементов в n в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо порядком из расположения.

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m- число всех имеющихся элементов, n- число элементов в каждой комбинации. (А- первая буква французского слова arrangement, что означает «размещение, приведение в порядок»).

При этом полагают, что n≤m.

Число размещений можно вычислить по формуле

$$\underbrace{A_m^n = m \cdot (m-1)(m-2) \cdot ...}_{n.множителей},$$

т.е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}.$$

Пример. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

Решение. Искомое число вариантов равно числу размещений из 5 элементов по 3 элемента, т.е.

$$A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Сочетания.

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n-натуральные числа, причем n ≤ m).

Число сочетаний из m элементов по n обозначаются C_m^n (С-первая буква французского слова combination- сочетание).

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n, деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы, получим:

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

Пример. В отряде из 25 человек нужно выделить четырех для дежурства на определенном участке. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Так как порядок выбранных четырех человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами.

Находим по первой формуле

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n} \quad (0 \le n \le m)$$

(по определению полагают $C_n^n = 1$ и $C_n^0 = 1$);

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

Решение комбинаторных задач

Пример. В семестре на профиле СППК изучается 16 предметов. На понедельник нужно в расписание поставить 3 предмета. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Способов постановки в расписание трех предметов из 16 столько, сколько можно составить размещений из 16 элементов по 3.

$$A_{16}^{3}=\frac{16!}{(16-3)!}=\frac{16!}{13!}=\frac{13!\cdot14\cdot15\cdot16}{13!}=14\cdot15\cdot16=3360.$$

Пример. Из 15 объектов нужно отобрать 10 объектов. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$$C_{15}^{10}=\frac{15!}{(15-10)!\cdot10!}=\frac{15!}{5!10!}=\frac{10!\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{5!\cdot10!}=\frac{11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{11\cdot3\cdot13\cdot3\cdot14}{2\cdot3\cdot1\cdot1}=$$

$$=\frac{11\cdot3\cdot13\cdot14}{2}=11\cdot3\cdot13\cdot7=3003.$$

Пример. В спортивных соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

Решение.

$$P_4=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

Пример. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Решение. Солдат в патруль можно выбрать

$$C_{80}^{3}=\frac{80!}{77!3!}=\frac{77!\cdot78\cdot79\cdot80}{77!\cdot1\cdot2\cdot3}=\frac{78\cdot79\cdot80}{2\cdot3}=13\cdot79\cdot80=82160$$

способами, а офицеров $C_3^1=3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется $C_{80}^{3}\cdot C_3^1=82160\cdot3=246480$ способов.

Пример. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^{2}=21$.

Решение.

Так как $C_{x-2}^{2}=\frac{(x-2)!}{(x-2-2)!2!}=\frac{(x-2)!}{(x-4)!\cdot2}=\frac{(x-4)!\cdot(x-3)(x-2)}{(x-4)!\cdot2}=\frac{(x-3)(x-2)}{2}$,

то получим

$$\frac{(x-3)(x-2)}{2}=21,$$

$(x-3)(x-2)=42$,

$x^2-5x+6-42=0$,

$x^2-5x-36=0$

$x_1=-4$, $x_2=9$.

По определению сочетания следует, что $x-2\le 2$, $x\le 4$. Т.о. $x=9$.

Ответ: 9

8.2. Генеральная совокупность без повторений. Перестановки, размещения, сочетания без повторений

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству. Иногда комбинаторику рассматривают как введение в теорию вероятностей, поскольку методы комбинаторики очень помогают в теории вероятностей осуществить подсчет числа возможных исходов и числа благоприятных исходов в разных конкретных случаях.

В теории вероятностей принято говорить не о комбинациях, а о выборках. Поэтому мы будем придерживаться термина «выборка».

В комбинаторике рассматриваются виды выборок — перестановки, размещения, сочетания.

Прежде чем говорить о видах выборок рассмотрим два общих правила, с помощью которых решается большинство задач комбинаторики,— правило суммы и правило произведения.

Допустим, в ящике имеется n разноцветных шаров. Произвольным образом вынимаем один шар. Сколькими способами можно это сделать? Конечно, n способами. Теперь эти n шаров распределим по двум ящикам: в первом m шаров, во втором k. Произвольно из какого-нибудь ящика вынимаем один шар. Сколькими разными способами можно это сделать? Из первого ящика шар можно вынуть m разными способами, из второго — k разными способами. Таким образом, один шар из этих двух ящиков можно вынуть $n = m + k$ способами. Рассмотрение этого примера позволяет сформулировать правило суммы:

Если, некоторый объект А можно выбрать m способами, а объект В — k способами (не такими, как А), то объект «либо А, либо В» можно выбрать m+k способами.

Это правило называется правилом суммы.

Рассмотрим вопрос о том, сколько можно записать двузначных чисел в десятичной системе счисления?

Поскольку число двузначное, число десятков может принимать одно из девяти значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Число единиц может принимать те же значения и может, кроме того, быть равным нулю.

Если цифра десятков 1, цифра единиц может быть 0, 1, 2, ..., 9 — всего 10 значений. Если цифра десятков 2, то вновь цифра единиц может быть равна 0, 1, 2, ..., 9. Всего получаем 90 двузначных чисел.

Обобщим полученный результат. Пусть данное множество из $n= m + k$ элементов разбито на два подмножества, состоящие соответственно из m и k элементов. В нашем случае: m –число цифр, при помощи которых можно записать число десятков, значит m равно 9; k – число цифр, при помощи которых можно записать число единиц, а значит k равно 10. Пусть из подмножества, содержащего m элементов, выбирается один элемент и независимо из подмножества, содержащего k элементов, выбирается один элемент. Спрашивается: сколько различных пар элементов при этом образуется? Очевидно, что каждому элементу из первого множества можно поставить в пару каждый элемент второго множества, а значит всего можно составить общее число пар $N=mk$.

Если объект А можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект В можно выбрать (независимо от выбора объекта А) k способами, то пары объектов А и В можно выбрать mk способами.

Это и есть правило произведений.

Генеральная совокупность без повторений — это набор некоторого конечного числа различных элементов: $a_1, a_2, a_3, ... a_n$.

Наглядному представлению такой генеральной совокупности может послужить набор из n разноцветных шаров, в которой никакие два шара не имеют одинаковой окраски.

Выборкой объема $m(m \leq n)$ будем называть произвольную группу из n элементов данной генеральной совокупности. Наглядному представлению такой выборки может служить последовательность из n шаров, выбранная из имеющегося множества.

Каким минимальным признаком может отличиться одна выборка объема m от другой выборки такого же объема? Это равносильно вопросу: каким минимальным признаком могут отличаться две линейки из шариков, построенная из их одинакового количества?

Минимальным признаком, отличающим одну выборку объема т от другой выборки такого же объема, может быть:

1) их различие по крайней мере одним элементом

2) их различие порядком расположения элементов.

Назовем такие выборки размещениями без повторений из n элементов по m

Отсюда следует определение понятия:

Размещениями без повторений из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Характерный пример размещений без повторений — вся совокупность четырехзначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр.

Число размещений из n элементов по m договоримся обозначать A_n^m. Попробуем определить это число.

Пусть имеем n элементов. Первый элемент можно выбрать n способами. Второй приходится выбирать из оставшихся n — 1 элементов, поэтому второй элемент можно выбрать n — 1 способом. Тогда по правилу произведения пары двух элементов можно образовать n (n-1) способами. Третий элемент придется отбирать из числа оставшихся n-2 элементов. Это можно сделать n-2 способами. Тогда опять по правилу произведения тройки элементов можно образовать n(n-1) (n-2) способами. Аналогично четверки можно образовать n (n- 1) (n- 2) (n- 3) способами, а размещения по m элементов n (n — 1) (n — 2).. . (n-(m- 1)) способами. Таким образом,

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(m-1)\big)$$
$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

Преобразуем полученную формулу, умножая и деля правую часть на произведение: $(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$. Тогда выведенная формула имеет вид:

$$A_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)(n-m-1)(n-m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot} = \frac{n!}{m!}.$$

В случае, когда m = n, одно размещение от другого отличается только порядком расположения элементов. **Такие размещения называются перестановками без повторений.** Таким образом, мы можем дать определение перестановкам без повторений.

Перестановками без повторений из п элементов называются размещения без повторений из n элементов по m, т. е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов.

Характерный пример перестановок без повторений — вся совокупность всех десятизначных номеров, в каждом из которых нет повторения цифр.

Обозначим число перестановок объема п символом P_n. Тогда по определению

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1.$$

Среди размещений без повторений из n элементов по m (m < n) можно выделить такие, которые отличаются одно от другого только первым признаком, а именно по крайней мере одним элементом. Значит:

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются такие размещения без повторений из n элементов по m, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число таких сочетаний обозначается символом C_n^m. Разумеется, при m = n $C_n^n = 1$.

Характерный пример сочетаний без повторений — всевозможные варианты состава представителей в количестве, например, четырех человек от учебной группы, в которой 15 человек.

В каждом из C_n^m сочетаний имеется m различных элементов, поэтому на базе каждого сочетания можно получить P_m перестановок. Совокупность всех выборок, полученных путем построения всех перестановок на базе каждого из C_n^m сочетаний, представляет собой число размещений A_n^m, т. е.

$$C_n^m \cdot P_m = A_n^m,$$

откуда

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Примеры использования полученных формул:

Пример. В секции занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано разных стартовых пятерок на тренировках?

Решение: Так как при составлении стартовой пятерки тренера интересует только состав пятерки, то достаточно определить число сочетаний из 12 элементов по 5:

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792.$$

Пример. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?

Решение: Ясно, что в этом случае на каждой горизонтали и каждой вертикали шахматной доски может быть расположено только по одной ладье. Число возможных позиций — число перестановок из 8 элементов:

$P_8 = 8! = 40320.$

Пример. Для служебной командировки необходимо укомплектовать следующую команду: командир группы, первый его заместитель, второй заместитель, два сотрудника и один стажер. Командир и его заместители могут быть отобраны из числа 25 офицеров, два сотрудника — из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих характер предстоящей работы, и стажер — из числа 8 наиболее подготовленных курсантов. Сколькими способами можно укомплектовать команду?

Решение. При выборе командира и его заместителей важно определить, какой кандидатов лучше других справляется с теми или иными функциями. Значит, здесь важен не только персональный состав командующей тройки, но и соответствующая расстановка подобранных людей. Поэтому ясно, что командующая тройка может быть укомплектована A_{25}^3 способами.

Обязанности у обоих сотрудников примерно одинаковые. Они могут выполнять их по очереди. Следовательно, пара сотрудников может быть укомплектована C_{20}^2 способами. Аналогичное положение и со стажером – его можно подобрать C_8^1способами.

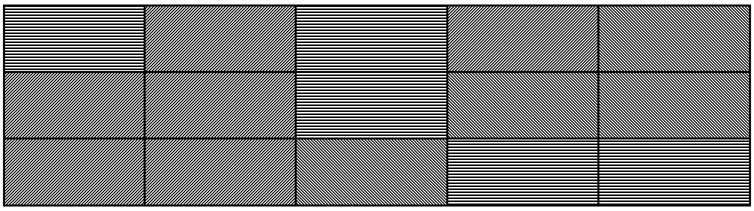
Значит по правилу умножения всю спец-команду можно укомплектовать $A_{25}^3 \cdot C_{20}^2 \cdot C_8^1 = 2\,0976\,000$ способами.

8.3. Генеральная совокупность с повторениями. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями

Генеральная совокупность с повторениями – это набор элементов различных классов, когда элементы, принадлежащие одному классу, считаются одинаковыми. Число элементов в каждом классе неограниченно.

Выборкой с повторениями объема m называется произвольная группа m элементов с повторениями.

Рассмотрим несколько пестрых лент, составленных из одинакового числа прямоугольников с разными узорами. Эти ленты могут отличаться порядком расположения прямоугольников, различным набором прямоугольников, либо и тем, и другим.



Таким образом, две выборки с повторениями могут отличаться друг от друга либо составом, либо порядком, либо и тем , и другим.

Размещениями с повторениями из элементов n классов по m, называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа элементов данных n классов генеральной совокупности с повторениями, отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число таких размещений, где n - число классов, m – число элементов выборки подсчитывается по формуле $A'(n, m) = n^m$

Пример.

Сколько можно составить пятизначных телефонных номеров?

Решение: $A'(10,5) = 10^5 = 100000$.♦

Перестановками с повторениями называются такие размещения из элементов n классов, которые отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

$$\underbrace{a, a, a,\ldots a}_{k_1} \quad \underbrace{b, b, b\ldots b}_{k_2} \quad \underbrace{l, l, l\ldots l,l}_{k_n}$$

$k_1 + k_2 + \quad + k_n = k$

Число таких перестановок обозначается $P'(k_1,k_2,..k_n)= \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}$

Пример.

Сосчитать, сколько можно сделать перестановок в словах: замок, топор, ротор, колокол.

Решение:

замок: $P' = \frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$; ротор: $P' = \frac{5!}{1!2!2!} = 30$

топор: $P' = \frac{5!}{1!1!2!} = 60$; колокол: $P' = \frac{7!}{2!2!2!} = 210$

Пример.

Я помню, что нужный мне телефонный номер начинается с цифры 9 и содержит три четверки и две пятерки. Однако расположение этих пяти цифр забыто. Сколько нужно сделать проб?

Решение:

$P' = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Сочетаниями с повторениями из элементов n классов по m называются такие размещения с повторениями из n классов по m, которые отличаются одно от другого хотя бы одним элементом. Их число подсчитывается по формуле:

$$C_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример.

В продажу поступили открытки 10 разных видов. Сколькими способами можно образовать набор из 12 открыток?

Решение:

$C_{10}^{12} = \frac{(10+12-1)!}{12!(10-1)!}$ =293930.

Обобщим полученные сведения в таблице

Выборки с повторениями

Название	Характерный признак отличия	Пример	Формула подсчета вариантов
Размеще-ния	состав порядок	a, b,c из 3 по 2 ab, bc, ca, ba, cb, ac, aa, cc, bb	A_n^m=n^m
Переста-новки	порядок	a, b из 2 ab, ba, aa, bb	P'= $\frac{k!}{k_1!k_2!*...*k_n!}$
Сочетания	состав	a, b, c из 3 по 2 ab, bc, ca, aa, cc, bb	$C_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$

8.4. Случайные события. Операции над ними

Опыт (**эксперимент**, **испытание**) – это ситуация с более чем одним возможным исходом, из которых всегда имеет место точно одно так называемое **элементарное событие**. Исходом опыта может быть результат наблюдения или измерения.

Извлечение карты из колоды – эксперимент. Один из исходов эксперимента – извлечение дамы крестей. Крестовую даму можно извлечь из колоды, содержащей 36 карт и 52 карты. Число карт – условие испытания.

Единичный, отдельный исход эксперимента называется **элементарным событием**. Набор всех элементарных событий – **пространство событий (множество).**

Извлечение любой карты из колоды – элементарное событие. Полному набору событий соответствует полное множество X, относящееся к заданному эксперименту. **Полный набор событий** – набор всех возможных исходов эксперимента. Элементарному событию соответствует только одна точка пространства событий. Аналогом элементарного события является элемент множества.

Теория вероятностей изучает **случайные** события. **Случайным событием** называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого эксперимента (далее будем опускать термин «случайный»).

Событие – это любое подмножество пространства событий, набор элементарных исходов. В диаграммах Венна событию соответствует подмножество элементарных событий. Событие произошло, если в результате эксперимента произошло элементарное событие, принадлежащее этому поднабору. Например, элементарные события – «туз конкретной масти» – благоприятствуют случайному событию «туз».

События обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D, E, F и т. д. События можно классифицировать.

Достоверное событие – это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (подброшенный камень обязательно упадет на Землю вследствие действия закона притяжения). Достоверные события условимся обозначать символом **Ω**.

Невозможное событие – это событие, которое не может произойти в результате данного опыта (извлечение черного шара из урны с белыми шарами есть событие невозможное). Невозможное событие обозначим Ø.

Достоверные и невозможные события не являются случайными.

Совместные события – несколько событий называют совместными, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других. (В магазин вошел покупатель. События «в магазин вошел покупатель старше 60 лет» и «в магазин вошла женщина» – совместные, так как в магазин может войти женщина старше 60 лет.)

Несовместные события – несколько событий называют несовместными в данном опыте, если появление одного из них исключает появление других (выигрыш, ничейный исход и проигрыш при игре в шахматы как результат одной партии – три несовместных события).

События называют **единственно возможными**, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Некоторая фирма рекламирует свой товар по радио и в газете. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «потребитель услышал о товаре по радио», «потребитель прочитал о товаре в газете», «потребитель получил информацию о товаре по радио и из газеты», «потребитель не слышал о товаре по радио и не читал газеты». Это четыре единственно возможных события.

Несколько событий называют **равновозможными**, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большей возможности появления, чем другие (при бросании игральной кости выпадение каждой из ее граней – события равновозможные).

Два единственно возможных и несовместных события называются **противоположными** (купля и продажа определенного вида товара есть события противоположные).

Полная группа событий – совокупность всех единственно возможных и несовместных событий.

Полную группу можно определить так: если $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ для любой пары $(i \neq j)$, тогда $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ – полная группа событий.

8.5. Классическое определение вероятности. Методика вычисления вероятностей событий

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. Вероятностью события A называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события A, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы n, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение m к n.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого испытания есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \le m \le n$. Разделив обе части на n, получим

$0 \le P(A) \le 1$.

2. Вероятность достоверного события равна единице, т.к. $n/n = 1$.

3. Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $0/n = 0$.

Пример. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение: Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Пример. В партии из 18 смартфонов находятся 4 контрафактных. Наугад выбирают 5 смартфонов. Найти вероятность того, что из этих 5 смартфонов два окажутся контрафактнми.

Решение: Число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5 т.е.

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 18 \cdot 17 \cdot 28 = 8568$$

Подсчитаем число m, благоприятствующих событию А. Среди 5 взятых наугад смартфонов должно быть 3 оригинальных и 2 контрафактных. Число способов выборки двух контрафактных смартфонов из 4 имеющихся контрафактных равно числу сочетаний из 4 по 2:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Число способов выборки трех оригинальных смартфонов из 14 имеющихся оригинальных равно

$$C_{14}^3 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 14 \cdot 13 \cdot 2 = 364.$$

Любая группа оригинальных смартфонов может комбинироваться с любой группой контрафактных смартфонов, поэтому общее число комбинаций m составляет

$$m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184.$$

Искомая вероятность события A равна отношению числа исходов m, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных независимых исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} \approx 0,255.$$

8.6. Произведение, сумма событий. Вероятности произведения и суммы событий. Теорема умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом A+B, а сумму n событий символом $A_1+A_2+ \ldots +A_n$.

Теорема сложения вероятностей.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$P(A + B) = P(A) + P(B)$ или

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Следствие 1. Если событие A_1, A_2, … ,A_n образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.

$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице.

$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$

Пример. Имеется 1000 лотерейных билетов. Известно, что на 50 билетов попадает выигрыш по 20000 руб., на 100 - по 15000 руб, на 150 - по 10000 руб., на 250 - по 2000 руб. и на остальные ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не менее 10000 руб.

Решение: Пусть А, В, и С- события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20000, 15000 и 10000 руб. так как события А, В и С несовместны, то

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{50}{1000} + \frac{100}{1000} + \frac{150}{1000} = 0{,}3.$$

Пример. На заочное отделение колледжа поступают контрольные работы по математике из городов А, В и С. Вероятность поступления контрольной работы из города А равна 0,6, из города В - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города С.

Решение: События «контрольная работа поступила из города А», «контрольная работа поступила из города В» и «контрольная работа поступила из города С» образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$0{,}6 + 0{,}1 + p = 1$, т.е. $p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Пример. Вероятность того, что день будет ясным, p=0,85. Найти вероятность g того, что день будет облачным.

Решение: События «день ясный» и «день облачный» противоположные, поэтому

$p + g = 1$, т.е $g = 1 - p = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Теорема умножения вероятностей независимых событий

При совместном рассмотрении двух случайных событий А и В возникает вопрос: Как связаны события А и В друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие **условной вероятности.**

Определение. Пусть А и В - два случайных события одного и того же испытания. Тогда условной вероятностью события А или вероятностью события А при условии, что наступило событие В, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$.

Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \ (P(B) \neq 0).$$

Пример. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок- мальчик, родится второй мальчик.

Решение: Пусть событие А состоит в том, что в семье два мальчика, а событие В - что один мальчик.

Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка.

Тогда $P(AB) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$ и по формуле находим

$$P(A/B) = \frac{1}{4} : \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \approx 0,3.$$

Событие А называется **независимым** от события В, если наступление события В не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события А.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

Пример. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение: Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2- из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $P(A_2) = \frac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ находим

$$P(A_1 A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

Пример. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение: Пусть событие А- выход из строя первого элемента, событие В- выход их строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременное появление А и В есть событие АВ. Следовательно,

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\overline{A}$ (противоположное событию А- выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент- событие В. Найдем вероятности событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\overline{A}\overline{B}$ и, значит,

$$P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

8.7. Независимые события. Вероятность произведения независимых событий

Рассмотрим пример с двумя событиями. Пусть событие А – «извлечение короля», В – «извлечение карты с картинкой». Тогда вероятность появления короля равна 4/52, а вероятность появления короля, если извлеченная карта – картинка, равна 4/16.

Другой пример. В урне два белых и три черных шара. Чему равна вероятность появления белого шара при первом извлечении из урны? При втором извлечении из урны? Здесь возможны два случая.

Первый случай. Схема возвращенного шара, т. е. шар после первого испытания возвращается в урну.

Пусть событие А – «появление белого шара при первом испытании». Так как N = 5, а M = 2, то P(A) = 2/5.

Пусть событие В – «появление белого шара при втором извлечении». Так как шар после первого испытания возвратился в урну, то N = 5, а M = 2 и P(B) = 2/5.

Таким образом, вероятность каждого из событий не зависит от того, произошло или не произошло другое событие. События А и В в этом случае называются независимыми. Итак, **события А и В**

называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло или нет другое событие. Вероятности независимых событий называются безусловными.

Второй случай. Схема невозвращенного шара, т. е. шар после первого испытания в урну не возвращается.

Вероятность появления белого шара при первом испытании P(A) = 2/5. Белый шар в урну не возвращается, следовательно, в урне остались один белый и три черных шара. Чему равна вероятность события B при условии, что событие A произошло? N = 4, M = 1.

Искомую вероятность обозначают P(B/A) или $P(B)_A$ или $P_A(B)$. Итак, P(B/A) = 1/4 называют **условной вероятностью**, а события A и B – зависимыми. В предыдущем примере с картами P(A) = 4/52; P(A/B) = 4/16.

Итак, **события A и B называются зависимыми, если вероятность каждого из них зависит от того, произошло или нет другое событие.** Вероятность события B, вычисленная в предположении, что другое событие A уже осуществилось, называется условной вероятностью. Очевидно, что если два события A и B независимые, то справедливы равенства:

$$P(B) = P(B/A),\ P(A) = P(A/B),\ \text{или}\ P(B/A) - P(B) = 0.$$

■ **Теорема умножения вероятностей**. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого:

$$P(A\cdot B) = P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B) = P(A)\cdot P(B/A). \qquad (1)$$

Произведением событий A и B называют событие, состоящее в одновременном появлении и события A, и события B.

Доказательство. Проиллюстрируем понятие условной вероятности для случая равновозможных элементарных исходов, где применимо классическое определение вероятности. Пусть даны два события A, B, такие, что $P(A) \neq 0$ и $P(B) \neq 0$, и пусть из всех возможных N исходов событию A благоприятствуют M исходов, событию B благоприятствуют K исходов, событию A и B благоприятствуют L исходов. Вероятности событий A, B, A·B соответственно равны P(A) = M/N, P(B) = K/N, P(A·B) = L/N.

Подсчитаем условную вероятность события B/A. Событию B/A будут благоприятствовать L исходов из M исходов. Тогда P(B/A) = L/M. Разделим числитель и знаменатель дроби на N и получим

$$P(B/A)=\frac{L/N}{M/N}=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \qquad (2)$$

где P(A) $\neq$ 0.

Вероятность наступления события B, вычисленная при условии, что событие A уже произошло, равна вероятности пересечения событий A и B, деленной на вероятность события A. Из формулы (3) следует (2).

Пример. Проиллюстрируем формулу (2). Предположим, мы подбросили игральную кость. Пусть событие A – «появилось число 6». Мы знаем, что P(A) = 1/6. Предположим, мы не знаем, какое именно число выпало при подбрасывании, но знаем, что оно четное (событие E). Информация о событии E уменьшает наше пространство событий, изменяет вероятность появления события A.

Пространство событий (полная группа событий) для первоначального события A выглядит как набор точек от 1 до 6. Пространство событий, корреспондирующее с событием B, уменьшилось сразу в два раза. Новое пространство имеет три равновозможные точки, отсюда вероятность выпадения «6» при условии, что выпавшее число – четное, возрастает от 1/6 до 1/3. Этот пример хорошо показывает обоснованность принятого определения вероятности. Из уравнения (2) имеем P(A/E) = P(A∩E) / P(E) = (1/6) / (1/2) = 1/3.

Полученный результат согласуется с тем, что мы поняли из рассмотренного примера, когда уменьшали пространство событий до трех точек.

Пример. Юридическая фирма претендует на два заказа от двух крупных корпораций. Эксперты фирмы считают, что вероятность получения консультационной работы в корпорации A (событие A) равна 0,45. По предположению экспертов, если фирма получит заказ у корпорации A, то вероятность того, что и корпорация B обратится к ним, равна 0,9. Какова вероятность получения юридической фирмой обоих заказов?

Решение: Согласно условиям P(A) = 0,45, P(B/A) = 0,9.

Необходимо найти P(A·B), которая является вероятностью того, что оба события (и событие А, и событие В) произойдут. Из формулы (1.8) имеем:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}45 \cdot 0{,}9 = 0{,}405.$

Пример. В большой рекламной фирме 21 % работников получают высокую заработную плату. Известно также, что 40 % работников фирмы – женщины, а 6.4 % работников – женщины, получающие высокую заработную плату. Можем ли мы утверждать, что на фирме существует дискриминация женщин в оплате труда?

Решение: Сформулируем решение этой задачи в терминах теории вероятностей и спросим: «Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник будет женщиной, имеющей высокую заработную плату?». Определим событие А – «случайно выбранный работник имеет высокую зарплату», событие В – «случайно выбранный работник – женщина», тогда:

$P(A/B) = P(A \cdot B)/P(B) = 0{,}064/0{,}40 = 0{,}16.$

Поскольку 0,16 меньше, чем 0,21, то можно заключить, что женщины, работающие в рекламной фирме, имеют меньше шансов получить высокую заработную плату по сравнению с мужчинами. Если события А и В – независимы, то имеет место следующая теорема. **Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению их вероятностей**:

$$P(A \cdot B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (3)$$

■ **Независимость событий в совокупности.** Если несколько событий попарно независимы, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. Введем понятие независимых событий в совокупности.

События A_1, A_2,..., A_n (п > 2) называются независимыми в совокупности, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошли или нет любые события из числа остальных. Распространим теоремы умножения на случай п независимых и зависимых в совокупности событий.

Вероятность совместного появления нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \quad (4)$$

Вероятность совместного наступления конечного числа n зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \quad (5)$$

Пример. Студент пришел на экзамен, изучив только 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту три вопроса. Вычислить вероятность того, что студент ответит на все три вопроса.

Решение: Определим следующие события: A – «студент знает все три вопроса»; A_1 – «студент знает первый вопрос»; A_2 – «студент знает второй вопрос»; A_3 – «студент знает третий вопрос». События A_1, A_2, A_3 – зависимые:

$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) = (20/25) \cdot (19/24) \cdot (18/23) = 57/115 = 0{,}496.$

Пример. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по телевидению, равна 0,04. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу того же продукта на рекламном стенде, равна 0,06. Предполагается, что оба события – независимы. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит обе рекламы?

Решение: Поскольку оба события независимы, то вероятность пересечения двух событий (потребитель увидит рекламу и по телевидению и на стенде) есть

$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}04 \cdot 0{,}06 = 0{,}0024.$

Вероятность появления хотя бы одного события из n независимых в совокупности равна разности между 1 и произведением вероятностей событий, противоположных данным:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (6)$$

Доказательство. Пусть A_1, A_2,…, A_n – события независимые в совокупности, а $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$ – противоположные им события и тоже независимые в совокупности. Обозначим событием А «наступление хотя бы одного из событий A_1, A_2,…, A_n». Рассмотрим событие ($\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$). Оно является противоположным событием по отношению к А. Следовательно, $P(A) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = 1.$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Если обозначить $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, ..., $P(A_n) = p_n$; $P(\bar{A}_1) = q_1, P(\bar{A}_2) = q_2, \dots, P(\bar{A}_n) = q_n$,то $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \ldots \cdot q_n$. Если события A_1, A_2,..., A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность наступления хотя бы одного из них равна: $P(A) = 1 - q^n$.

Если события A_1 A_2, ..., A_n – зависимые в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из них соответственно равна:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2/\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n/\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_{n-1}).$$

Возвратимся к условию примера 2, определим вероятность того, что потребитель увидит хотя бы одну рекламу.

Решение: Пусть событие С – «потребитель увидит хотя бы одну рекламу». Это значит, что потребитель увидит рекламу или по телевидению, или на стенде, или по телевидению и на стенде. По правилу определения вероятности объединения (суммы) двух событий находим:

P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB) = 0,04 + 0,06–0,0024 = 0,0976.

По теореме о вероятности наступления хотя бы одного из и независимых событий P(C) = $1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ = 1 – 0,96·0,94 = 0,0976.

Вычисление вероятностей событий такого типа характеризует эффективность рекламы. Эта вероятность может означать долю (процент) населения, охватываемого рекламой с разной частотой, и отсюда следует оценка рекламных усилий.

8.8. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Рассмотрим два события А и Н. Каковы бы ни были взаимоотношения между событиями А и Н, всегда можно сказать, что вероятность события А равна вероятности пересечения событий А и Н плюс вероятность пересечения А и дополнения Н (событие $\overline{H}$). Поясним сказанное на диаграмме Венна (рис. 8.1). Разложение А на части зависит от H и $\bar{H}$.

$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap \overline{H}).$$

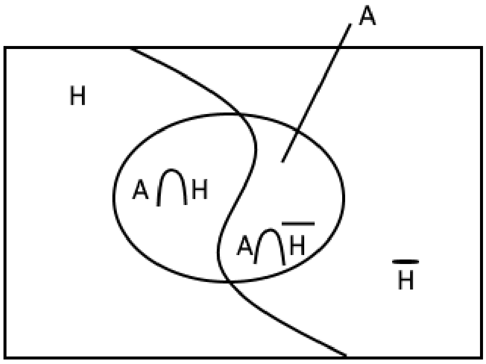


Рис. 8.1. Диаграмма Венна к формуле (1)

Наборы H и $\bar{H}$ – форма расчленения набора А на два подмножества взаимно несовместных событий. События Н и $\overline{H}$ взаимно противоположны. Событие А может произойти либо с Н, либо с $\overline{H}$, но не с двумя вместе (см. рис. 8.1).

Рассмотрим более сложный случай. Пусть событие А может осуществляться лишь вместе с одним из событий H_1, H_2, H_3,..., H_n, образующих полную группу, т. е. эти события являются единственно возможными и несовместными (рис. 8.2). Так как заранее неизвестно, какое из событий H_1, H_2, H_3,..., H_n наступит, то их называют **гипотезами**. Пусть также известны вероятности гипотез $P(H_1)$, $P(H_2)$,…, $P(H_n)$ и условные вероятности события А, а именно: $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$,…, $P(A/H_n)$.

Так как гипотезы образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Рассмотрим событие А – это или $H_1 \cdot A$, или … $H_n \cdot A$. События $H_1 \cdot A$, $H_2 \cdot A$, …, $H_n \cdot A$ – несовместные попарно, так как события H_1, H_2, H_3,..., H_n попарно несовместны. К этим событиям применяем теорему сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A)=P(H_1 \cdot A)+P(H_2 \cdot A)+\ldots+P(H_n \cdot A)=\sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i).$$

События H_1 и A, H_2 и A,..., H_n и A – зависимые. Применив теорему умножения вероятностей для зависимых событий, получим (рис. 8.2):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i).$$

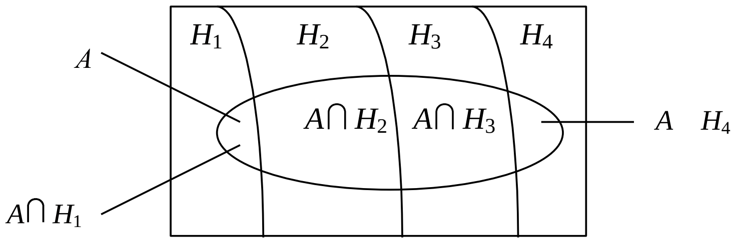


Рис. 8.2. Событие A может осуществляться лишь с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу событий

Проиллюстрируем сказанное на примере с колодой карт (рис. 8.3). Определим A как событие, состоящее в извлечении карты с картинкой (т. е. карты с изображением или туза, или короля, или дамы, или валета). Пусть события B, C, D, E означают извлечение карт различной масти («трефы», «бубны», «черви», «пики»). Мы можем сказать, что вероятность извлечь из колоды карту с изображением туза, короля, дамы или валета есть $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(A \cap D) + P(A \cap E) = 4/52 + 4/52 + 4/52 + 4/52 = 16/52$. Это означает, как мы уже знаем, вероятность извлечения карты с картинкой из колоды в 52 карты. Событие A представляет собой набор, составленный из пересечений A с наборами B, C, D, E (рис. 8.3).

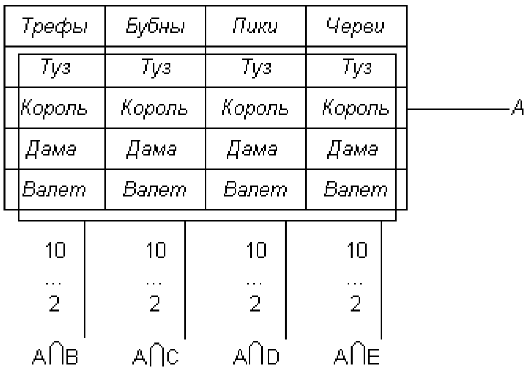


Рис. 8.3. Пример с колодой карт

Вывод. Если событие А может наступить только вместе с одним из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n, образующих полную группу несовместных событий и называемых гипотезами, то вероятность события А равна сумме произведений вероятностей каждого из событий H_1, H_2, H_3, ..., H_n на соответствующую условную вероятность события А.

Случай двух событий:

$$P(H) = P(H)\cdot P(A/H) + P(\bar{H})\cdot P(A/\bar{H}).$$

Случай более чем двух событий:

$$P(H) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i),$$

где i = 1, 2, ..., n.

Пример. Инвестор полагает, что вероятность роста стоимости акций некоторой компании в следующем году будет равна 0,75, в случае успешного развития экономики страны, и эта же вероятность составит 0,30, если произойдет спад экономики. По его мнению, вероятность экономического подъема в будущем году равна 0,80. Используя предположения инвестора, оцените вероятность того, что акции компании поднимутся в цене в следующем году.

Решение: Событие А – «акции компании поднимутся в цене в будущем году». Составим рабочую таблицу:

H_i	Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i)P(A/H_i)$

1	H_1 – «подъем	0,80	0,75	0,60
2	H_2 – «спад	0,20	0,30	0,06
∑		1,00	–	P(A) = 0,66

Пример. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из урны 1 в урну 2 наудачу переложен один шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из урны 2 после перекладывания, окажется черным.

Решение: Событие А – «шар, извлеченный из урны 2, – черный». Составим рабочую таблицу:

H_i	Гипотезы H_i	$P(H_i)$	$P(A/H_i)$	$P(H_i)P(A/H_i)$
1	H_1 – «из урны 1 в урну 2	6/10	7/11	42/110
2	H_2 – «из урны 1 в урну 2	4/10	6/11	24/110
∑		1,00	–	P(A) = 0,60

Вычисление вероятностей гипотез формула Бейеса

Представим, что существует несколько предположений (несовместных гипотез) для объяснения некоторого события. Эти предположения проверяются с помощью опыта. До проведения опыта бывает сложно точно определить вероятность этих предположений, поэтому им часто приписывают некоторые вероятности, которые называют **априорными** (доопытными). Затем проводят опыт и получают информацию, на основании которой корректируют априорные вероятности. После проведения эксперимента вероятность гипотез может измениться. Таким образом, доопытные вероятности заменяют послеопытными (**апостериорными**).

В тех случаях, когда стало известно, что событие А произошло, возникает потребность в определении условной вероятности $P(H_i/A)$. Пусть событие А может осуществляться лишь вместе с одной из гипотез H_i, $(i = 1, 2,..., n)$. Известны вероятности гипотез $P(H_1)$, ..., $P(H_n)$ и условные вероятности А, т. е. $P(A/H_1)$, $P(A/H_2)$,…, $P(A/H_n)$. Так как

$A \cdot H_i = H_i \cdot A$, то $P(A \cdot H_i) = P(H_i \cdot A)$ или $P(A)P(A/H_i)$, а отсюда по правилу пропорций:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}.$$

Итак можно записать формулы Бейеса:

случай двух событий:

$$P(H/A) = \frac{P(H) \cdot P(A/H)}{P(H) \cdot P(A/H) + P(\bar{H}) \cdot P(A/\bar{H})};$$

случай более чем двух событий:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие А.

Как видим из выражения (2.5), вероятность события Н, задаваемая при условии появления события А, получается из вероятностей событий H и $\bar{H}$ и из условной вероятности события А при заданном Н. Вероятности событий H и $\bar{H}$ называют **априорными** (предшествующими), вероятность Р(Н/А) называют **апостериорной** (последующей).

Пример. Инвестор полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0,7, в период умеренного экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,4, и при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста равна 0,3, в периоды умеренного экономического роста – 0,5 и низкого роста – 0,2. Предположим, доллар дорожает в течение текущего периода, чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста?

Решение: Определим гипотезы: H_1 – «активный экономический рост»; H_2 – «умеренный экономический рост»; H_3 – «низкий экономический рост».

Определим событие А – «доллар дорожает». Имеем: $P(H_1) = 0,3$; $P(H_2) = 0,5$; $P(H_3) = 0,2$; $P(A/H_1) = 0,7$; $P(A/H_2) = 0,4$ и $P(A/H_3) = 0,2$. Найти: $P(H_1/A)$.

Используя формулу Бейеса (2.6) и подставляя заданные значения вероятностей, получаем:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) + P(H_3)\cdot P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0,3\cdot 0,7}{0,3\cdot 0,7 + 0,5\cdot 0,4 + 0,2\cdot 0,2} = 0,467.$$

Пример. Партия гаджетов содержит 20% гаджетов, изготовленных заводом №1, 30% – заводом №2, 50% – заводом №3. Для завода №1 вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,05, для завода №2 – 0,01, для завода №3 – 0,06. Чему равна вероятность того, что наудачу взятый из партии гаджет окажется бракованным?

Решение: Обозначим через В событие: наудачу взятый гаджет – бракованный, через H_1, H_2, H_3 – гаджет, изготовленный соответственно заводом №1, №2, №3. Из условия известны вероятности:

$P(H_1)=0.2$, $P(H_2)=0.3$, $P(H_1)=0.5$,

$P(B|H_1)=0.05$, $P(B|H_2)=0.01$, $P(B|H_3)=0.06$.

По формуле полной вероятности находим

$P(B)=0.2\ 0.05+0.3\ 0.01+0.5\ 0.06=0.043$.

Пример. Имеется пять урн. В 1-й, 2-й и 3-й урнах находится по 2 белых и 3 черных шара; в 4-й и 5-й урнах – по 1 белому и 1 черному шару. Случайно выбирается урна и из нее извлекается шар. Какова условная вероятность того, что выбрана 4-я или 5–я урна, если извлеченный шар оказался белым?

Решение: Обозначим через В событие – выбранный шар белый, H_1 –шар выбран из 1-й , 2-й или 3-й урны, через H_2 –шар выбран из 4-

й или 5-й урны. Нужно определить $P(H_2|B)$. Определяем вероятности: $P(H_1)=3/5$, $P(H_2)=2/5$, $P(B|H_1)=2/5$, $P(B|H_2)=1/2$. По формулам Байеса находим

$$P(H_2 \mid B) = \frac{2/5 \cdot 1/2}{3/5 \cdot 2/5 + 2/5 \cdot 1/2} = \frac{5}{11}.$$

8.9. Понятие схемы Бернулли. Формула Бернулли. Локальная и интегральная формулы Муавра-Лапласа в схеме Бернулли

Рассмотрим серию из п испытаний, в каждом из которых событие А появляется с одной и той же вероятностью р, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется **схемой повторения испытаний (схемой Бернулли)**. Найдем вероятность того, что в такой серии событие А произойдет ровно к раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что А произошло в некоторых к испытаниях и не произошло в остальных п – к испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из п по к, то есть $C_n^к$, а вероятность каждого из них: $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 – p$ – вероятность того, что в данном опыте А не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим **формулу Бернулли**: $p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Пример. Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение: Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия. Найдем вероятность этого по формуле Бернулли: $p_9(4) = C_9^4 \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^5 = 0{,}0006092$ Тогда

р = 0,0006092·0,05 = 0,0000304. Локальная теорема Муавра – Лапласа

Теорема. Пусть в n независимых испытаниях, вероятность появления события А постоянна и равна p (0 < p < 1), тогда имеет место асимптотическая оценка

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (14)$$

где

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-x^2 \big/ 2\right)$$

Доказательство теоремы сразу следует из центральной предельной теоремы, которая рассматривается в части 3 (п. 3.2).

Справедливость формулы (14) проиллюстрирована на рис. 8.4.

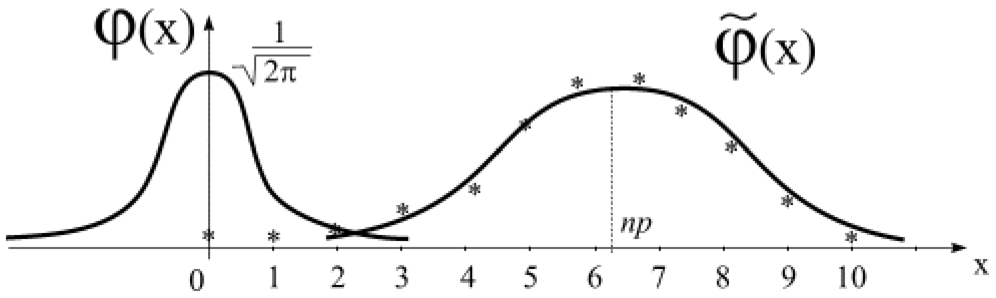


Рис. 8.4. Справедливость формулы

Изобразим координаты (k, P_n(k)) звездочками. Функцию P_n(k) аргумента k, можно приблизить, в соответствии с формулой (14):

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-(k-np)^2/(2npq)\right),$$

где np – координата центра тяжести (среднее значение), а $\sqrt{npq}$ характеризует меру «сжатости» около центра np.

Делая замену $x = (k-np)\big/\sqrt{npq}$, мы преобразуем произвольную функцию $\tilde{\varphi}(x)$ к стандартной φ(x), у которой координата центра тяжести np = 0, а $\sqrt{npq} = 1$. Из рисунка видно, что при n→ ∞, $P_n(k) \to 0$

(при этом всегда $\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1$) ошибка уменьшается. Для удобства вычислений, функция φ(x) табулирована (см. приложение, табл. 3). Сама функция называется **кривой Гаусса** [5]. Функция φ(x) – четная, φ(x) → 0 при │x │→ ∞, φ(x)< 10^{-4}, при │x │> 5, $\max_x \{\varphi(x)\} = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}3989$.

Для практических приложений (при n > 10, p→$\frac{1}{2}$) используют формулу

$$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Пример. Решить пример п 1.5, а).

Решение: Имеем

$$P_{5000}(50) = C_{5000}^{50} \cdot (0{,}01)^{50} \cdot (0{,}99)^{4950} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

k = 50, np = 50, $\sqrt{npq} = \sqrt{50 \cdot 0{,}99} \approx 7{,}04$.

Итак,

$$P_{5000}(50) \approx \frac{1}{7{,}04}\varphi(0) = \left\{\text{по табл. 3}\right\} = \frac{0{,}3989}{7{,}04} \approx 0{,}057.$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Пусть в n независимых испытаниях вероятность появления события А в каждом испытании постоянна и равна p, 0< p < 1, тогда, для любых -∞ < a < b < ∞, равномерно относительно a, b, при n → ∞, имеет место асимптотическая оценка

$$P\left\{k_1 \le k \le k_2\right\} = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \varphi(x)dx,$$

(*)

где φ(x) - кривая Гаусса, $a=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $b=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ называется функцией Лапласа.

Так как $P_n\{0\le k\le n\}=1$ для любого n, то из (*) должно следовать, что $\Phi(+\infty)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1$.

В самом деле, положим $\Im=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, тогда

$$\Im^2=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)^2=4\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\cdot\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=4\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{t^2+x^2}{2}}dtdx.$$

Введем полярные координаты:

$t=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$, $\varphi\in[0,\pi/2]$, $r\ge 0$, $dtdx=rdrd\varphi$.

Отсюда

$$\Im^2=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}re^{-\frac{r^2}{2}}drd\varphi=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\frac{r^2}{2}}rdr=2\pi\cdot 1=2\pi,\quad \Im=\sqrt{2\pi}$$ - интеграл Пуассона.

Следовательно, $\Phi(+\infty)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=1$.▼

Для практических приложений вместо (*) используют формулу:

$$P\{k_1\le k\le k_2\}\approx \Phi(в)-\Phi(a),$$

где

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Учитывая, что Ф (+∞) = 1, легко получить Ф (x) + Ф (-x) = 1.

В самом деле, пусть x > 0, тогда $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$, а

$$\Phi(-x) = \int\limits_{-\infty}^{-x} \varphi(t)dt = \ = \left\{ \begin{matrix} \text{замена} \\ y = -x, \quad dx = -dy \end{matrix} \right\} = -\int\limits_{+\infty}^{x} = \int\limits_{x}^{\infty} .$$

Отсюда

$$Ф (x) + Ф (-x) = \int\limits_{-\infty}^{x} + \int\limits_{x}^{\infty} = 1.$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - табулирована, ее значения приведены в табл. 4 приложения.

Таблица составлена для x < 0, а для x > 0, значения находятся по формуле

Ф (x) + Ф (-x) = 1.

Пример. Решить пример п 1.5, б).

Решение: Имеем

$$P_{5000}\{0 \le k \le 50\} = \sum_{k=0}^{50} C_{5000}^{k} (0,01)^k \cdot (0,99)^{5000-k} \approx \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$a = \frac{0-50}{7,07} \approx -7, \quad b = \frac{50-50}{7,07} = 0.$$

По табл. 5 приложения находим

$$\Phi(0) - \Phi(-7) = 0,5 - 0,0 = 0,5.$$

Отсюда $P_{5000}\{0 \le k \le 50\} \approx 0,5$.

Сравнивая решение задачи п.1.5. а), б), можно предположить, что, так как $k = 50$ – наивероятнейшее число, с большой вероятностью реализуется событие $\{\ 40 \le k \le 60\}$, с центром в точке k_0:

$$P_{5000}\{40 \le k \le 60\} \approx 0,037 \cdot 20 \approx 0,7 .$$

Заметим, что $\sqrt{npq}$ характеризует средние отклонения от среднего значения np (чем меньше $\sqrt{npq}$, тем «круче» кривая Гаусса в точке симметрии)

8.10. Понятие случайной величины. Понятие дискретной случайной величины (ДСВ). Методика записи распределения функции от двух независимых ДСВ

В этом разделе теории вероятностей мы познакомимся с числовыми оценками, соответствующими исходам испытаний, например таким, как подбрасывание кости. Отсюда исходы испытаний, определяемые случаем, – случайные величины (СВ). Определим случайную величину следующим образом.

Случайная величина – это величина, которая в результате эксперимента (опыта, испытания) принимает одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно. **Примеры случайных величин:**

- число дефектных деталей в партии при контроле качества;
- процент завершенного строительства жилого дома спустя 6 месяцев;
- число клиентов операционного отдела банка в течение рабочего дня;
- число продаж автомобилей в течение месяца.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами: X, Y, Z и т. п. Строчные буквы используются для обозначения определенных значений случайной величины. Например, случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ..., x_n. Различают случайные, дискретные и непрерывные величины.

Дискретной (прерывной) случайной величиной называют случайную величину, которая принимает конечное или бесконечное (но счетное) число отдельных, изолированных возможных значений с определенными вероятностями. Число студентов на лекции – дискретная случайная величина.

Совокупность значений может быть задана таблицей, функцией или графиком. Соотношение, устанавливающее связь между отдельными возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называется **законом распределения дискретной случайной величины**.

Простейшей формой закона распределения для дискретных случайных величин является ряд распределений.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется таблица, в которой перечислены возможные (различные) значения этой случайной величины x_1, x_2, ..., x_n с соответствующими им вероятностями p_1, p_2, ..., p_n.

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Таким образом, случайная величина X в результате испытания может принять одно из возможных значений x_1, x_2, ..., x_n с вероятностями

$P\ (X = x_1) = p_1;\ P(X = x_2) = p_2;\ P(X = x_n) = p_n.$

Можно использовать более короткую запись: P(x) = P(5) = 0,2. Так как события $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, …, $(X = x_n)$ составляют полную группу событий, то сумма вероятностей p_1, p_2, ..., p_n равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Ряд распределения случайной дискретной величины должен удовлетворять следующим условиям:

$$P(x) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$$
.

Пример. Каждый день местная газета получает заказы на новые рекламные объявления, которые будут напечатаны в завтрашнем номере. Число рекламных объявлений в газете зависит от многих факторов: дня недели, сезона, общего состояния экономики, активности местного бизнеса и т. д. Пусть X – число новых рекламных объявлений, напечатанных в местной газете в определенный день. X – случайная величина, которая может быть только целым числом. В нашем примере случайная величина X принимает значения 0; 1; 2; 3; 4; 5 с вероятностями 0,1; 0,2; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1 соответственно (табл. 1).

Таблица 1 . Ряд распределения случайной величины X

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)=$	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Поскольку появления различных значений случайной величины X – несовместные события, то вероятность того, что в газету будут помещены или 2 или 3 рекламных объявления, равна сумме вероятностей P(2) + P(3) = 0,3 + 0,2 = 0,5. Вероятность же того, что их число будет находиться в пределах от 1 до 4 (включая 1 и 4), равна 0,8, т. е. $P(1 \leq X \leq 4) = 0{,}8$; а $P(X = 0) = 0{,}1$. Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого по оси абсцисс откладывают возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Если точки (x_i, p_i) соединить отрезками прямых, то полученная ломаная линия есть **многоугольник** (или **полигон) распределения**.

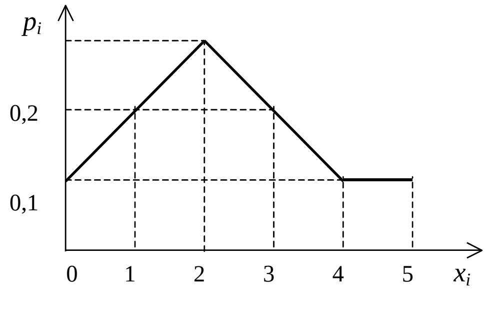


Рис. 8.5. Полигон распределения

Пример. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 10 руб. и одна – стоимостью в 30 руб. Составить закон распределения случайной величины X – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 1 руб., если всего продано 50 билетов.

Решение: Случайная величина X может принимать три значения: 1 руб. (если владелец билета не выиграет, а фактически проиграет 1 руб., уплаченный им за билет); 9 руб.; 29 руб. (фактический выигрыш уменьшается на стоимость билета – 1 руб.). Первому результату благоприятствуют 47 исходов из 50, второму – два, а третьему – один. Поэтому их вероятности таковы: P(X = –1) = 47/50 = 0,94; P(X =9) = 2/50 = 0,04; P(X = 29) = 1/50 = 0,02;

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

Сумма	–1	9	29
Вероятность, P	0,94	0,04	0,02

Контроль: $\sum_{i=1}^{n} p_i$ = 0,94 + 0,04 + 0,02 = 1.

8.11. Числовые характеристики ДСВ

Основной характеристикой случайной величины является математическое ожидание.

Пусть случайная величина X принимает значения x_k, k= 1,2,… с вероятностями p_k. Математическое ожидание (или среднее значение) дискретной случайной величины обозначается MX и равняется сумме числового ряда $\sum_k x_k p_k$, если ряд сходится абсолютно.

Пример. Средний выигрыш в примере 1 составляет:

MX= 100*(1/3)+200*(4/15)+300*(1/5)+400*(2/15)+500*(1/15)=233,(3). ♦

Свойства математических ожиданий:

для любой постоянной величины C: MC=C;

для любой постоянной a: M(aX)=a*MX;

для любых случайных величин X и Y, имеющих математические ожидания MX и MY: M(X+Y)=MX+MY;

если случайные величины X(ω) и Y(ω) таковы, что X(ω) ≤ Y(ω) для всех $\omega \in \Omega$, то MX ≤ MY;

5) $|MX| \leq M|X|$.

Все свойства математических ожиданий вытекают из свойств абсолютно-сходящихся числовых рядов.

Еще одна характеристика случайных величин – дисперсия. Дисперсия случайной величины X обозначается DX и равняется $M(X–MX)^2$.

Дисперсия - это средний квадрат отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания.

Из определения дисперсии сразу следуют ее свойства:

1) для любой постоянной величины C: DC=0;

2) для любой постоянной a: $D(aX)=a^2*D(X)$.

Утверждение. Пусть X – случайная величина, MX – ее математическое ожидание, а MX^2 – математическое ожидание случайной величины X^2. Тогда

$$DX = MX^2 - (MX)^2 .$$

Доказательство.

$$M(X - MX)^2 = M\left(X^2 - 2X \cdot MX + (MX)^2\right) = MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Наряду с дисперсией рассматривают среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_X = \sqrt{DX} .$$

Пример. Дисперсия выигрыша в рулетку $DX= MX^2-(MX)^2$.

$MX^2= 100^2*1/3+200^2*4/15+300^2*1/5+400^2*2/15+500^2*1/15=70000$; DX = 15555,(5).

$\sigma_X = \sqrt{DX} \approx 126$. ♦

8.12. Биноминальное распределение ДСВ. Понятие геометрического распределения

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся распределения дискретных случайных величин. Одно из них – биномиальное.

Пусть проводится серия из n одинаковых и независимых между собой испытаний. В каждом из них событие А может наступить с положительной вероятностью Р. Такие испытания называются испытаниями Бернулли.

Событие А будем называть «успехом», а событие $\bar{A}$ – «неудачей». $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

Рассмотрим случайную величину X – число успехов в n испытаниях. Она может принимать значения 0, 1, 2,…, n. Вероятность, что X примет значение k, т.е. в n испытаниях k раз наступит успех $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Действительно, вероятность наступления k успехов в k фиксированных испытаниях и (n – k) неудач в остальных (n – k) испытаниях равна $p^k (1-p)^{n-k}$. Распределить k успехов среди n испытаний можно C_n^k способами.

Распределение случайной величины X называется распределением Бернулли или биномиальным распределением.

Пример. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что герб выпадет 4 раза?

Решение: При каждом подбрасывании «успех» – выпадение герба, n = 10, k = 4, p = 1/2. $P(X = 4) = C_{10}^4 \cdot (1/2)^4 \cdot (1/2)^6 = 210/2^{10} \approx 0{,}206$.

Биномиально распределенная случайная величина X – это целочисленная величина. Введем для нее производящую функцию.

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k = (pz+q)^n , \quad \text{т.к. } (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$ (бином Ньютона)

Математическое ожидание $MX = \Pi'(1) = n \cdot p$.

Дисперсия $DX = \Pi''(1) + \Pi'(1) - (\Pi'(1))^2 = n \cdot p \cdot q$.

Пример. Среднее количество выпадений герба при 10 подбрасываниях монеты равно MX = np = 10*(1/2) = 5, дисперсия равна DX = npq = 5*(1/2) = 5/2. Пусть теперь испытания Бернулли проводятся до наступления первой неудачи. Случайная величина X – число проведенных испытаний. Распределение X можно задать с помощью таблицы.

X	1	2	...	k	
P	q	q	…	$p^{k-1}q$	..

$$P(X = k) = p^{k-1} \cdot q,\ k = 1,2,3, \dots$$

Такое распределение называется геометрическим.

Пример. Вероятность закатить хотя бы один шар в лузу при одном ударе бильярдиста постоянна и рана 0,7. Если при ударе закатить шар не удается, право удара переходит к другому игроку. Какова вероятность, что бильярдист сделает не менее 4 ударов?

Пусть X – число ударов, сделанных игроком.[Найдем вероятность дополнительного события.

$P(X<4) = 0,3+0,7\cdot 0,3+(0,7)^2\cdot 0,3 = 0,657$.

Тогда $P(X \geq 4) = 1–0,657 = 0,343$.

Производящая функция случайной величины с геометрическим распределением $\Pi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{k-1} q \cdot z^k = \frac{qz}{(1-pz)}$. Математическое ожидание $MX = \Pi'(1) = 1/q$.Дисперсия $DX = \Pi''(1) + \Pi'(1) - (\Pi'(1))^2 = p/q^2$.

Пример. Среднее число ударов бильярдиста MX=1/q=1/0,3=10/3=3,(3). Дисперсия числа ударов $DX = p/q^2 = 0,7/(0,3)^2 = 70/9 = 7,(7)$.

8.13. Понятие непрерывной случайной величины (НСВ). Формула вычисления вероятностей

Непрерывной случайной величиной называют случайную величину, которая может принимать любые значения на числовом интервале.

Примеры непрерывных случайных величин: возраст студентов, длина ступни ноги человека, масса детали и т. д. Это положение относится ко всем случайным величинам, измеряемым на непрерывной шкале, таким как меры веса, длины, времени, температуры, расстояния. Измерение может быть проведено с точностью до какого-нибудь десятичного знака, но случайная величина – теоретически непрерывная величина. В экономическом анализе находят широкое применение относительные величины, различные индексы экономического состояния, которые также вычисляются с определенной точностью, скажем, до двух знаков после запятой, хотя теоретически их значения – непрерывные случайные величины.

У непрерывной случайной величины возможные значения заполняют некоторый интервал (или сегмент) с конечными или бесконечными границами.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно задать в виде **интегральной функции распределения**, являющейся наиболее общей формой задания закона распределения случайной величины, а также в виде **дифференциальной функции** (плотности распределения вероятностей), которая используется для описания распределения вероятностей только непрерывной случайной величины.

Функция распределения (или интегральная функция) $F(x)$ – универсальная форма задания закона распределения случайной величины. Для непрерывной случайной величины функция распределения также определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее фиксированного действительного числа x, т. е.

$F(x) = F(X < x)$.

При изменении x меняются вероятности $P(X < x) = F(x)$. Поэтому $F(x)$ и рассматривают как функцию переменной величины. Принято считать, что случайная величина X известна, если известна ее функция распределения $F(x)$.

Теперь можно дать более точное определение непрерывной случайной величины: случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференци-руемая функция с непрерывной производной.

1. Функция распределения есть неотрицательная функция, заключенная между 0 и 1, т.е. $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция распределения есть неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$. Тогда $P(x_1 \le X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1)$.

Так как любая вероятность есть число неотрицательное, то $P(x_1 \le \le X < x_2) \ge 0$, а следовательно, $F(x_2) - F(x_1) \ge 0$ и $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (α, β), равна приращению функции распределения на этом интервале, т. е.

$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

$P(X = x_1) = 0$.

Согласно сказанному, равенство нулю вероятности $P(X = x_1)$ не всегда означает, что событие $X = x_1$ невозможно. Говоря о вероятности события $X = x_1$, априорно пытаются угадать, какое значение примет случайная величина в опыте.

Если x_1 лежит в области возможных значений непрерывной случайной величины X, то с некоторой уверенностью можно предсказать область, в которую случайная величина может попасть. В то же время невозможно хотя бы с малейшей степенью уверенности угадать, какое конкретное значение из бесконечного числа возможных примет непрерывная случайная величина.

Например, если метеослужба объявляет, что температура воздуха в полдень составила 5 °С, то это не означает, что температура будет точно равна этому значению. Вероятность такого события равна нулю.

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то

F(x) = 0 при x ≤ α; F(x) = 1 при x > β.

В самом деле, F(x) = 0 для всех значений x ≤ α и F(x) = 1 при x > β, поскольку события X < x для любого значения x ≤ α, являются в этом случае невозможными, а для любого значения x > β – достоверными.

Следствие. Если возможные значения непрерывной случайной личины расположены на всей оси OX, то справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1,$$

или F(– ∞) = 0; F(+ ∞) = 1. Это следствие справедливо и для дискретных случайных величин.

8.14. Функция плотности НСВ и интегральные функции распределения НСВ. Методика расчёта вероятностей для НСВ

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция W(x), равная первой производной от функции распределения F(x),

W(x) = F ′(x),

где W(x) – дифференциальная функция распределения. Дифференциальная функция применяется только для описания распределения вероятностей непрерывных случайных величин.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), равна определенному интегралу от дифференциальной функции, взятому в пределах от α до β,

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} W(x)dx .$$

Используя соотношения (5.2) и (5.1), получим P(α ≤ X < β) = P(α < < X < < β) = $\int_{\alpha}^{\beta} W(x)dx$.

Геометрически этот результат равен площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения W(x) и прямыми x = α, x = β.

Зная плотность распределения W(x), можно найти функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} W(x)dx .$$

В самом деле, так как неравенство X < x можно записать в виде двойного неравенства – ∞ < X < x, то F(x) = P(– ∞ < X < x) = $\int_{-\infty}^{x} W(x)dx$ (рис. 8.6).

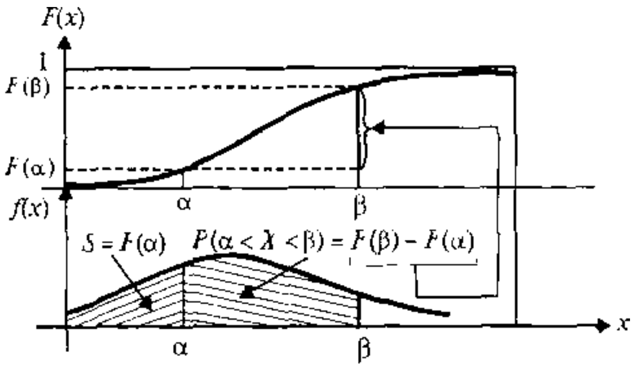


Рис. 8.6. Связь функции распределения с плотностью распределения вероятностей

Таким образом, для полной характеристики непрерывной случайной величины достаточно задать функцию распределения или плотность ее вероятности.

Свойства дифференциальной функции распределения

1. Дифференциальная функция – неотрицательная функция:

$W(x) \geq 0$.

Это следует из того, что $F(x)$ – неубывающая функция, а значит, ее производная неотрицательна.

2. Несобственный интеграл от дифференциальной функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен 1.

Очевидно, что этот интеграл выражает вероятность достоверного события $-\infty < X + \infty$.

8.15. Характеристики НСВ. Методика вычисления математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения НСВ по её функции плотности

Математическое ожидание случайной величины

Математическое ожидание характеризует среднее ожидаемое значение случайной величины, т.е. приближенно равно ее среднему значению (вероятностный смысл математического ожидания). Иногда знания этой характеристики достаточно для решения задачи. Например, при оценке покупательной способности населения вполне может хватить знания среднего дохода, при анализе выгодности двух видов деятельности можно ограничиться сравнением их средних прибыльностей. Знание того, что выпускники данного университета зарабатывают в среднем больше выпускников другого, может послужить основанием для принятия решения о поступлении в данный ВУЗ и т.п.

Математическое ожидание **дискретной** случайной величины определяется соотношением:

$$M(X) = M_X = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{, где } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

Математическое ожидание **непрерывной** случайной величины равно

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

где $f(x)$ - плотность вероятности.

Свойства математического ожидания

Прежде чем формулировать свойства математического ожидания необходимо пояснить смысл арифметических операций $X+Y$, $X-Y$, $X \cdot Y$ и т.п., где X и Y – дискретные случайные величины.

Например, под суммой $X+Y$ понимается случайная величина Z, значениями которой являются все допустимые суммы $z_{ij} = x_i + y_j$, где x_i и y_j – все возможные значения соответственно случайных величин X и Y.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной величины C равно этой величине.

$$M(C) = C \cdot 1 = C .$$

2. Математическое ожидание суммы (разности) двух или нескольких случайных величин X и Y равно сумме (разности) их математических ожиданий:

   $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

   Следствие. Если C – постоянная величина, то

   $M(X + C) = M(X) + C$

Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Следствие. Математическое ожидание произведения нескольких **взаимно независимых** случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е. $M(CX) = C \cdot M(X)$.

Дисперсия случайной величины и ее свойства.

На практике часто требуется оценить рассеяние случайной величины вокруг ее среднего значения. Например, акции двух компаний могут приносить в среднем одинаковые дивиденды, однако вложение денег в одну из них может быть гораздо более рискованной операцией, чем в другую. Поэтому возникает необходимость в числовой характеристике, оценивающей разброс возможных значений случайной величины относительно ее среднего значения (математического ожидания). Такой характеристикой является **дисперсия**.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right).$$

Легко показать, что вышеприведенное выражение может быть записано в виде

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Действительно, используя основные теоремы о математическом ожидании, получим

$$D(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = M\left(X^2 - 2XM(X) + M(X)^2\right) =$$

$$= M(X^2) - 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$$

В случае **дискретной** случайной величины, имеющей закон распределения (x_i, p_i) $(i = 1,2,..., n)$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 p_i .$$

Для **непрерывной** случайной величины формула для расчета дисперсии имеет вид

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C) = 0$$

2.Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X) .$$

3. Дисперсия суммы (разности) двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) .$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Если C – постоянная величина, то $D(X + C) = D(X)$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины являются ее основными числовыми характеристиками.

Пример. Пусть закон распределения дискретной случайной величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,07	0,21	0,55	0,16	0,01

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение: Рассчитаем вначале математическое ожидание

$M(X) = 1\cdot 0.07 + 2\cdot 0.21 + 3\cdot 0.55 + 4\cdot 0.16 + 5\cdot 0.01 = 2.83$

Дисперсия равна

$D(X) = (1-2.83)^2\cdot 0.07 + (2-2.83)^2\cdot 0.21 + (3-2.83)^2\cdot 0.55 + (4-2.83)^2\cdot 0.16 +$
$(5-2.83)^2\cdot 0.01 = 0{,}661$

Пример. Плотность вероятности непрерывной случайной величины равна

$$f(x) = \exp(-x)\text{, где } x > 0$$

Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение: Найдем математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} x e^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = e^{-x}dx & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x]\Big| + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Далее,

$$M(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2\cdot e^{-x}\, dx = \begin{bmatrix} U = x^2 & dU = 2x\,dx \\ dV = e^{-x} & V = -e^{-x} \end{bmatrix} = [-e^{-x}\cdot x^2]\Big| + 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, dx = 2$$

Найдем дисперсию, используя формулу

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - 1 = 1.$$

Среднее квадратическое отклонение.

Для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения кроме дисперсии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением σ (или стандартом) случайной величины X называется корень квадратный из дисперсии $D(X)$ этой величины:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(X)}.$$

Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Поэтому размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X. В тех случаях, когда желательно, чтобы оценка рассеяния имела размерность случайной величины, вычисляют среднее квадратичное отклонение, а не дисперсию.

Понятие дисперсии и среднего квадратического отклонения широко используется практически во всех областях человеческой деятельности, связанных с процессами измерений. Так, например, в технике, они характеризуют точность измерительной аппаратуры (чем выше среднеквадратическое отклонение (разброс) при измерениях, тем хуже качество прибора).

Примерами использования данных параметров в экономике могут служить изучение риска различных действий со случайным исходом, в частности, при анализе риска инвестирования в ту или иную отрасль, при оценивании различных активов в портфеле ценных бумаг и т.д.

Пример.

Пусть имеется два варианта инвестирования со следующими характеристиками

Вероятности возможной чистой прибыли								
	Сравнение вариантов решений							
Чистая прибыль, млн.д.е.	-3	-	-1	0	1	2	3	4
Вероятности:								
Инвестиция 1	0	0	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2	0
Инвестиция 2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2

Ожидаемая чистая прибыль инвестирования определяется математическим ожиданием и составляет:

Инвестиция 1: $M(X)=\sum x_i \cdot p_i = 1.2$ *млн.*

Инвестиция 2: $M(X)=\sum x_i \cdot p_i = 1.1$ *млн.*

По ожидаемой прибыли предпочтительнее 1-й вариант. Однако мы не учли риск, связанный с инвестициями. Этот риск может быть определен с помощью дисперсии и (или) среднего квадратического отклонения. Используя результаты таблицы, получим

Инвестиция 1: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=1.25$

Инвестиция 2: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=2.385$

Т.е. риск по варианту для инвестиции 1 меньше. Выбор – за ЛПР.

8.16. Сущность выборочного метода. Генеральная совокупность и выборка

Предметом математической статистики является изучение случайных событий и случайных величин по результатам наблюдений. Совокупность предметов или явлений, объединенных каким-либо общим признаком, называется **статистической совокупностью**. Результатом наблюдений над статистической совокупностью являются **статистические данные** – сведения о том, какие значения принял в итоге наблюдений интересующий нас признак (случайная величина X).

Обработка статистических данных методами математической статистики приводит к установлению определенных закономерностей, присущих массовым явлениям. При этом **точность** статистических выводов повышается с ростом числа наблюдений.

Статистические данные, как правило, представляют собой ряд значений $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ некоторой случайной величины. Обработка этого ряда значений представляет собой первый этап исследования случайной величины.

Первая задача математической статистики – указать **способы сбора и группировки статистических данных**, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.

Второй задачей математической статистики является разработка **методов анализа** статистических данных в зависимости от целей исследования. К этой задаче относятся:

- Оценка неизвестной **вероятности события**; оценка неизвестной **функции распределения**; оценка **параметров распределения**, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и т.п.

- Проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

В современной математической статистике есть много общего с **наукой о принятии решений в условиях неопределенности**, так как она разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в процессе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие аналогичные задачи.

Выборочный метод и его основные понятия. Случайная выборка, объем выборки.

Пусть требуется изучить совокупность **однородных** объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты. Например, для партии деталей качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

В принципе, возможно проведение сплошного обследования, т.е. обследование всех объектов. На практике такое обследование применяется редко, например,

- из–за большого числа объектов
- из–за дороговизны проведения операции контроля,
- из–за того, что контроль часто связан с разрушением объекта (проверка электролампы на долговечность ее работы), и т.д.

В таких случаях случайно отбирается и изучается **ограниченное** число объектов из совокупности.

Выборочной совокупностью или **случайной выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из 1000 деталей отбирается для обследования 100, то объем генеральной совокупности N=1000, а объем выборки n = 100.

Пример. Число единиц товара N, произведенного некоторым предприятием в течение года, есть генеральная совокупность. Для исследования качества продукции на практике рассматривается выборка, состоящая из n единиц товара. Признаком, или случайной величиной, может быть число единиц товара, удовлетворяющих сертификационным требованиям.

При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и исследован, его можно возвратить или не возвращать в генеральную совокупность. В связи с этим выборки подразделяются на **повторные** и **бесповторные**.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность. При **бесповторной** выборке отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, т.е. выборка должна быть репрезентативной (представительной). **Пример** – изучение общественного мнения.

В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют одинаковую вероятность попасть в выборку.

Если объем выборки достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборкой стирается.

Способы отбора

На практике применяются различные способы отбора, которые можно подразделить на два вида:

- Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Сюда относятся а) простой случайный бесповторный отбор и б) простой случайный повторный отбор.

- Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Сюда относятся а) **типический отбор**, б) **механический отбор** и в) **серийный отбор**.

Простым случайным называют отбор, при котором объекты извлекаются по одному из генеральной совокупности. Осуществить такой отбор для генеральной совокупности из N объектов можно, например, посредством записи на карточках номеров от 1 до N, последующем перемешиванием карточек и выниманием их наугад. При этом обследованию подлежат объекты, имеющие номера, совпадающие с номерами карточек. Если карточки возвращаются в пачку, то имеем простую случайную повторную выборку, в противном случае – простую бесповторную. При большом объеме генеральной совокупности более рациональным является использование таблиц случайных чисел. Например, чтобы выбрать 50 объектов из пронумерованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают 50 чисел подряд; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если случайное число таблицы превосходит число N, такое число пропускают. При проведении бесповторной выборки пропускают также случайные числа, уже встречавшиеся раньше.

Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее “типической” части. Например, если детали изготовлены на нескольких станках, то отбор производят из продукции каждого станка в отдельности.

Механическим называют отбор, при котором генеральная совокупность механически делится на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы выбирается один объект. Например, если нужно отобрать 20% изготовленных станком деталей, то отбирают каждую пятую деталь.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а “сериями”, которые подвергаются сплошному обследованию. Например, если изделия производятся большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков.

Этим видом отбора пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно.

На практике часто применяют **комбинированный отбор**, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.

Вариационный ряд для дискретных и непрерывных случайных величин.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем значение исследуемого параметра x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз и т.д. При этом $\sum_i n_i = n$ объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – **вариационным рядом**. Числа наблюдений называют **частотами,** а их отношения к объему выборки n_i / n **- относительными частотами. Статистическим распределением выборки** называют перечень вариант и соответствующих им относительных частот.

Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их **вероятностями,** а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми **вариантами** и их **частотами** или **относительными частотами**.

Приведенный способ представления статистических данных применяют в случае дискретных случайных величин. Для непрерывных случайных величин удобнее разбить отрезок [a,b] возможных значений случайной величины на частичные полуинтервалы $\Delta_k = [a_{k-1}, a_k), (k = 1,..., m)$ (Δ_m замкнут также и справа) с помощью некоторой системы точек $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$. Часто разбиение [a,b] производят на равные части, тогда $\Delta_k = [a + (k-1)h,\ a + kh),\ k = 1,..., m$, где $h = \dfrac{b-a}{m}$

В качестве частот n_k теперь надо брать количество наблюдаемых значений, попавших на каждый из частичных интервалов Δ_k. Число интервалов k часто выбирают на основании формулы Стерджерса

$$k = 1 + 1{,}4\ln n.$$

Полигон и гистограмма

Графически статистическое распределение представляется в частности, с помощью **полигона** и **гистограммы**.

Полигоном частот называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1;n_1),(x_2;n_2),.....(x_k,n_k)$. Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i и соединяют точки $(x_i;n_i)$ отрезками прямых.

Полигон относительных частот строится аналогично, за исключением того, что на оси ординат откладываются относительные частоты w_i.

В случае непрерывного признака строится **гистограмма**, для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i - сумму частот вариант, попавших в i – й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которой служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии (высоте) n_i/h. Площадь i-го прямоугольника равна $hn_i/h=n_i$ - сумме частот вариант i –го интервала, поэтому площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. **объему выборки**.

В случае гистограммы **относительных** частот по оси ординат откладываются относительные чатоты w_i, на оси абсцисс – частичные интервалы, над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на высоте W_i/h. Площадь i-го прямоугольника равна относительной частоте вариант W_i, попавших в i-й интервал. Поэтому площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть **единице**.

8.17. Точечные оценки для генеральной средней (математического ожидания), генеральной дисперсии и генерального среднеквадратического отклонения

Генеральным средним называется среднее арифметическое значений признака X в генеральной совокупности (обозначение $\overline{X}_Г$). Выборочным средним называется среднее арифметическое значение признака X в выборочной совокупности:

$$\overline{X}_B = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_k \cdot n_k}{n}.$$

Выборочное среднее является оценкой для генерального среднего или является оценкой неизвестного математического ожидания с.в., если выборка получена в результате наблюдения над некоторой случайной величиной.

Генеральной дисперсией называется дисперсия признака X в генеральной совокупности. Выборочной дисперсией называется дисперсия признака X в выборочной совокупности:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(x_j - \overline{X}\right)^2 \cdot n_j.$$

Для вычисления дисперсии используют формулу:

$$D_B = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} x^2{}_j n_j - \left(\overline{X}\right)^2.$$

Дисперсия равняется среднему квадратов без квадрата среднего. Выборочная дисперсия является оценкой неизвестной генеральной дисперсии, или, ели наблюдается некоторая с.в., то выборочная дисперсия служит оценкой для неизвестной дисперсии. Пример на вычисление выборочного среднего и выборочной дисперсии см. ниже в разделе ”Выборочное уравнение регрессии”.

Во многих случаях мы располагаем информацией о виде закона распределения случайной величины (нормальный, бернуллиевский, равномерный и т. п.), но не знаем параметров этого распределения, таких как Mξ, Dξ. Для определения этих параметров применяется выборочный метод.

Пусть выборка объема n представлена в виде вариационного ряда. Назовем **выборочной средней** величину

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + \frac{m_k}{n}$$

Величина $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$ называется **относительной частотой** значения признака x_i. Если значения признака, полученные из выборки не группировать и не представлять в виде вариационного ряда, то для вычисления выборочной средней нужно пользоваться формулой

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Естественно считать величину $\bar{x}$ выборочной оценкой параметра Mξ. Выборочная оценка параметра, представляющая собой число, называется **точечной оценкой**.

Выборочную дисперсию

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \omega_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

можно считать точечной оценкой дисперсии Dξ генеральной совокупности.

Приведем еще один пример точечной оценки. Пусть каждый объект генеральной совокупности характеризуется двумя количественными признаками x и y. Например, деталь может иметь два размера – длину и ширину. Можно в различных районах измерять концентрацию вредных веществ в воздухе и фиксировать количество легочных заболеваний населения в месяц. Можно через равные промежутки времени сопоставлять доходность акций данной корпорации с каким-либо индексом, характеризующим среднюю доходность всего рынка акций. В этом случае генеральная совокупность представляет собой двумерную случайную величину ξ, η. Эта случайная величина принимает значения x, y на множестве объектов генеральной совокупности. Не зная закона совместного распределения случайных величин ξ и η, мы не можем говорить о наличии или глубине корреляционной связи между ними, однако некоторые выводы можно сделать, используя выборочный метод.

Выборку объема n в этом случае представим в виде таблицы, где i-тый отобранный объект (i= 1,2,...n) представлен парой чисел x_i, y_i :

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

Выборочный коэффициент корреляции рассчитывается по формуле

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$$

Здесь

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,,\ \sigma_x = \sqrt{\sigma_x^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}\,,$$

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^{\,2}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}\,.$$

Выборочный коэффициент корреляции можно рассматривать как точечную оценку коэффициента корреляции $\rho_{\xi\eta}$, характеризующего генеральную совокупность.

Выборочные параметры $\bar{x}, s_x, r_{xy}$ или любые другие зависят от того, какие объекты генеральной совокупности попали в выборку и различаются от выборки к выборке. Поэтому они сами являются случайными величинами.

Пусть выборочный параметр δ рассматривается как выборочная оценка параметра Δ генеральной совокупности и при этом выполняется равенство

$$M\delta = \Delta.$$

Такая выборочная оценка называется **несмещенной.**

Для доказательства несмещённости некоторых точечных оценок будем рассматривать выборку объема n как систему n независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения с теми же параметрами, что и случайная величина ξ, представляющая генеральную совокупность. При таком подходе становятся очевидными равенства: $Mx_i = M\xi_i = M\xi$; $Dx_i = D\xi_i = D\xi$ для всех k = 1,2,...n.

Теперь можно показать, что выборочная средняя $\bar{x}$ есть несмещенная оценка средней генеральной совокупности или , что то же самое, математического ожидания интересующей нас случайной величины ξ :

$$M\bar{x} = M\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\left(M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n\right) = \frac{1}{n}\,nM\xi = M\xi .$$

Выведем формулу для дисперсии выборочной средней:

$$D\bar{x} = D\,\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n^2}\left(D\xi_1 + D\xi_2 + \ldots + D\xi_{n1}\right) = \frac{1}{n^2}\,nD\xi = \frac{D\xi}{n} .$$

Найдем теперь, чему равно математическое ожидание выборочной дисперсии σ^2. Сначала преобразуем σ^2 следующим образом:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\xi + M\xi - \bar{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(x_i - M\xi\right)^2 - 2\left(x_i - M\xi\right)\left(\bar{x} - M\xi\right) + \left(\bar{x} - M\xi\right)^2\right) =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\xi\right)^2 - \left(\bar{x} - M\xi\right)^2$$

Здесь использовано преобразование:

$$\sum_{i=1}^{n} 2\left(x_i - M\xi\right)\left(\bar{x} - M\xi\right) = 2\left(\bar{x} - M\xi\right)\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\xi\right) =$$

$$= 2\left(\bar{x} - M\xi\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} M\xi\right) = 2\left(\bar{x} - M\xi\right)\left(n\bar{x} - nM\xi\right) = 2n\left(\bar{x} - M\xi\right)^2$$

Теперь, используя полученное выше выражение для величины σ^2, найдем ее математическое ожидание.

$$M\sigma^2 = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\xi\right)^2 - \left(\bar{x} - M\xi\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(x_i - M\xi\right)^2 - M\left(\bar{x} - M\xi\right)^2 = \frac{1}{n} nD\xi - D\bar{x} = D\xi - \frac{D\xi}{n} = \frac{n-1}{n} D\xi .$$

Так как $M\sigma^2 \neq D\xi$, выборочная дисперсия не является несмещенной оценкой дисперсии генеральной совокупности.

Чтобы получить несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности, нужно умножить выборочную дисперсию на $\frac{n}{n-1}$. Тогда получится величина $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2$, называемая **исправленной выборочной дисперсией**.

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Пусть имеется ряд несмещенных точечных оценок одного и того же параметра генеральной совокупности. Та оценка, которая имеет наименьшую дисперсию, называется **эффективной**.

Полученная из выборки объема n точечная оценка δ_n параметра Δ генеральной совокупности называется **состоятельной**, если она сходится по вероятности к Δ. Это означает, что для любых положительных чисел ε и γ найдется такое число $n_{\varepsilon\gamma}$, что для всех чисел n, удовлетворяющих неравенству $n > n_{\varepsilon\gamma}$ выполняется условие $P\left(\left|\delta_n - \Delta\right| < \varepsilon\right) > 1 - \gamma$. $\bar{x}$ и s^2 являются несмещёнными, состоятельными и эффективными оценками величин $M\xi$ и $D\xi$.

8.18. Понятие интервальной оценки. Надежность доверительного интервала

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных. Их недостаток заключается в том, что неизвестно, с какой точностью оценивается параметр. Если для выборок большого объема точность обычно бывает достаточной (при условии несмещенности, эффективности и состоятельности оценок), то для выборок небольшого объема вопрос точности оценок становится очень важным.

Введем понятие интервальной оценки неизвестного параметра генеральной совокупности (или случайной величины ξ, определенной на множестве объектов этой генеральной совокупности). Обозначим этот параметр через Δ. По сделанной выборке по определенным правилам найдем числа Δ_1 и Δ_2, так чтобы выполнялось условие:

$$P(\Delta_1 < \Delta < \Delta_2) = P\left(\Delta \in (\Delta_1; \Delta_2)\right) = \gamma$$

Числа Δ_1 и Δ_2 называются **доверительными границами**, интервал (Δ_1, Δ_2) — **доверительным интервалом** для параметра Δ. Число γ называется **доверительной вероятностью** или **надежностью** сделанной оценки.

Сначала задается надежность. Обычно ее выбирают равной 0.95, 0.99 или 0.999. Тогда вероятность того, что интересующий нас параметр попал в интервал (Δ_1, Δ_2) достаточно высока. Число $(\Delta_1 + \Delta_2) / 2$ – середина доверительного интервала – будет давать значение параметра Δ с **точностью** $(\Delta_2 - \Delta_1) / 2$, которая представляет собой половину длины доверительного интервала.

Границы Δ_1 и Δ_2 определяются из выборочных данных и являются функциями от случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а следовательно – сами случайные величины. Отсюда – доверительный интервал (Δ_1, Δ_2) тоже случаен. Он может покрывать параметр Δ или нет. Именно в таком смысле нужно понимать случайное событие, заключающееся в том, что доверительный интервал покрывает число Δ.

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии.

Пусть случайная величина ξ (можно говорить о генеральной совокупности) распределена по нормальному закону, для которого известна дисперсия $D\xi = \sigma^2$ $(\sigma > 0)$. Из генеральной совокупности (на множестве объектов которой определена случайная величина) делается выборка объема n. Выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рассматривается как совокупность n независимых случайных величин, распределенных так же как ξ (подход, которому дано объяснение выше по тексту).

Ранее также обсуждались и доказаны следующие равенства:

$Mx_1 = Mx_2 = \ldots = Mx_n = M\xi$;

$Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_n = D\xi$;

$M\bar{x} = M\xi$;

$D\bar{x} = D\xi / n$;

Достаточно просто доказать (мы доказательство опускаем), что случайная величина $\bar{x}$ в данном случае также распределена по нормальному закону.

Обозначим неизвестную величину Mξ через a и подберем по заданной надежности γ число d > 0 так, чтобы выполнялось условие:

$$P(|\bar{x} - a| < d) = \gamma \qquad (1)$$

Так как случайная величина $\bar{x}$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $M\bar{x} = M\xi = a$ и дисперсией $D\bar{x} = D\xi / n = \sigma^2/n$, получаем:

$$P(|\bar{x} - a| < d) = P(a - d < \bar{x} < a + d) =$$

$$= \Phi\left(\frac{a + d - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{a - d - a}{\frac{}{\sqrt{n}}}\right) = 2\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Осталось подобрать d таким, чтобы выполнялось равенство $2\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma$ или $\Phi\left(\frac{d\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \frac{\gamma}{2}$.

Для любого $\gamma \in [0;1]$ можно по таблице найти такое число t, что $\Phi(t) = \gamma / 2$. Это число t иногда называют **квантилем**.

Теперь из равенства

$$\frac{d\sqrt{n}}{\sigma} = t$$

определим значение d: $d = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$.

Окончательный результат получим, представив формулу (1) в виде:

$$P\left(\bar{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)=\gamma.$$

Смысл последней формулы состоит в следующем: с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{x}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}};\bar{x}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр a = Mξ генеральной совокупности. Можно сказать иначе: точечная оценка $\bar{x}$ определяет значение параметра Mξ с точностью d=σ t / $\sqrt{n}$ и надежностью γ.

Задача. Пусть имеется генеральная совокупность с некоторой характеристикой, распределенной по нормальному закону с дисперсией, равной 6,25. Произведена выборка объема n = 27 и получено средневыборочное значение характеристики $\bar{x}$ = 12. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное математическое ожидание исследуемой характеристики генеральной совокупности с надежностью
γ =0,99.

Решение. Сначала по таблице для функции Лапласа найдем значение t из равенства Ф (t) = γ / 2 = 0,495. По полученному значению t = 2,58 определим точность оценки (или половину длины доверительного интервала) d: d = 2,5×2,58 / $\sqrt{27}\approx$ 1,24. Отсюда получаем искомый доверительный интервал: (10,76; 13,24).

Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения при неизвестной дисперсии

Пусть ξ – случайная величина, распределенная по нормальному закону с неизвестным математическим ожиданием Mξ, которое обозначим буквой a . Произведем выборку объема n. Определим среднюю выборочную $\bar{x}$ и исправленную выборочную дисперсию s^2 по известным формулам.

Случайная величина

$$t = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{s}$$

распределена по закону Стьюдента с n – 1 степенями свободы.

Задача заключается в том, чтобы по заданной надежности γ и по числу степеней свободы n – 1 найти такое число t_γ , чтобы выполнялось равенство

$$P\left(\left|\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{s}\right| < t_\gamma\right) = \gamma \qquad (2)$$

или эквивалентное равенство

$$P\left(\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \gamma. \qquad (3)$$

Здесь в скобках написано условие того, что значение неизвестного параметра a принадлежит некоторому промежутку, который и является доверительным интервалом. Его границы зависят от надежности γ , а также от параметров выборки $\bar{x}$ и s.

Чтобы определить значение t_γ по величине γ, равенство (2) преобразуем к виду:

$$P\left(\left|\frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{s}\right| \geq t_\gamma\right) = 1 - \gamma$$

Теперь по таблице для случайной величины t, распределенной по закону Стьюдента, по вероятности $1 - \gamma$ и числу степеней свободы n – 1 находим t_γ . Формула (3) дает ответ поставленной задачи.

Задача. На контрольных испытаниях 20-ти электроламп средняя продолжительность их работы оказалась равной 2000 часов при среднем квадратическом отклонении (рассчитанном как корень квадратный из исправленной выборочной дисперсии), равном 11-ти часам. Известно, что продолжительность работы лампы является нормально распределенной случайной величиной. Определить с надежностью 0,95 доверительный интервал для математического ожидания этой случайной величины.

Решение. Величина $1 - \gamma$ в данном случае равна 0,05. По таблице распределения Стьюдента, при числе степеней свободы, равном 19, находим: $t_\gamma = 2{,}093$. Вычислим теперь точность оценки: $2{,}093 \times 121/\sqrt{20}$ $= 56{,}6$. Отсюда получаем искомый доверительный интервал:

$$(1943{,}4;\ 2056{,}6).$$

Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения

Пусть случайная величина ξ распределена по нормальному закону, для которого дисперсия $D\xi$ неизвестна. Делается выборка объема n . Из нее определяется исправленная выборочная дисперсия s^2. Случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{D\xi}$$

распределена по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы. По заданной надежности γ можно найти сколько угодно границ χ_1^2 и χ_2^2 интервалов, таких, что

$$ð\left(\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2\right) = \gamma \qquad (*)$$

Найдем χ_1^2 и χ_2^2 из следующих условий:

$$P(\chi^2 \le \chi_1^2) = (1-\gamma)/2 \qquad (**)$$

$$P(\chi^2 \ge \chi_2^2) = (1-\gamma)/2 \qquad (***)$$

Очевидно, что при выполнении двух последних условий справедливо равенство (*).

В таблицах для случайной величины χ^2 обычно дается решение уравнения $P(\chi^2 \ge \chi_q^2) = q$. Из такой таблицы по заданной величине q и по числу степеней свободы $n-1$ можно определить значение χ_q^2. Таким образом, сразу находится значение χ_2^2 в формуле (***).

Для определения χ_1^2 преобразуем (**):

$$P(\chi^2 \ge \chi_1^2) = 1 - (1-\gamma)/2 = (1+\gamma)/2$$

Полученное равенство позволяет определить по таблице значение χ_1^2.

Теперь, когда найдены значения χ_1^2 и χ_2^2, представим равенство (*) в виде

$$P\left(\chi_1^{\ 2} < \frac{(n-1)s^2}{D\xi} < \chi_2^{\ 2}\right) = \gamma$$.

Последнее равенство перепишем в такой форме, чтобы были определены границы доверительного интервала для неизвестной величины Dξ:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_2^{\ 2}} < D\xi < \frac{(n-1)s^2}{\chi_1^{\ 2}}\right) = \gamma$$.

Отсюда легко получить формулу, по которой находится доверительный интервал для стандартного отклонения:

$$P\left(\frac{\sqrt{(n-1)}s}{\sqrt{\chi_2^{\ 2}}} < \sqrt{D\xi} < \frac{\sqrt{(n-1)}s}{\sqrt{\chi_1^{\ 2}}}\right) = \gamma \qquad (****)$$

Задача. Будем считать, что шум в кабинах вертолетов одного и того же типа при работающих в определенном режиме двигателях — случайная величина, распределенная по нормальному закону. Было случайным образом выбрано 20 вертолетов, и произведены замеры уровня шума (в децибелах) в каждом из них. Исправленная выборочная дисперсия измерений оказалась равной 22,5. Найти доверительный интервал, накрывающий неизвестное стандартное отклонение величины шума в кабинах вертолетов данного типа с надежностью 98%.

Решение. По числу степеней свободы, равному 19, и по вероятности (1 – 0,98)/2 = 0,01 находим из таблицы распределения χ^2 величину $\chi_2^2 = 36{,}2$. Аналогичным образом при вероятности (1 + 0,98)/2 = 0,99 получаем $\chi_1^2 = 7{,}63$. Используя формулу (****), получаем искомый доверительный интервал: (3,44; 7,49).

8.19. Проверка статистических гипотез. Сравнение выборочной средней с математическим ожиданием, двух дисперсий, двух математических ожиданий

Приведем несколько задач, которые могут быть решены с помощью проверки статистических гипотез.

1. Используется два метода измерения одной и той же величины. Первый метод дает оценки $x_1, x_2, ..., x_m$ этой величины, второй - $y_1, y_2, ..., y_n$. Требуется определить, обеспечивают ли оба метода **одинаковую точность измерений**.

2. Контроль точности работы некоторой производственной системы. Получаемые характеристики выпускаемой продукции характеризуются некоторым разбросом (дисперсией). Обычно величина этого разброса не должна превышать некоторого заранее заданного уровня. Требуется определить, обеспечивает ли система (например, линия сборки или отдельный станок) **заданную точность**.

Итак**, статистической** называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Примеры статистических гипотез: генеральная совокупность распределена по закону Пуассона; дисперсии двух нормальных распределений равны между собой.

Наряду с выдвинутой гипотезой всегда рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то принимается противоречащая гипотеза.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Альтернативной (конкурирующей) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой. Например, если нулевая гипотеза состоит в предположении, что математическое ожидание нормального распределения равно 5, то альтернативная гипотеза, например, может состоять в предположении, что $a \neq 5$. Кратко это записывают так: $H_0: a = 5;\ H_1: a \neq 5$.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если λ - параметр показательного распределения, то гипотеза $H_0 : \lambda = 3$ - простая. **Сложной** называют гипотезу, состоящую из конечного или бесконечного числа простых гипотез. Например, сложная гипотеза $H : \lambda > 3$ состоит из бесконечного множества простых гипотез вида $H_i : \lambda = b_i$, где b_i - любое число, большее 3.

Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Так как проверку производят статистическими методами, то ее называют **статистической**. В итоге **статистической проверки гипотезы** в двух случаях может быть принято неправильное решение, т.е. могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет **отвергнута правильная** гипотеза. **Ошибка второго рода** состоит в том, что будет **принята неправильная** гипотеза. Следует отметить, что последствия ошибок могут оказаться различными. Если отвергнуто правильное решение "продолжать строительство жилого дома", то эта ошибка первого рода повлечет материальный ущерб; если же принято неправильное решение "продолжать строительство" несмотря на опасность обвала дома, то эта ошибка второго рода может привести к многочисленным жертвам. Иногда, наоборот, ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия.

Естественно, правильное решение может быть принято также в двух случаях, когда **принимается правильная** гипотеза или **отвергается неверная** гипотеза.

Вероятность совершения ошибки **первого рода** называют **уровнем значимости** и обозначают α. Чаще всего уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

8.20. Регрессионный анализ. Линейная регрессия

Понятие о регрессионном анализе

При рассмотрении взаимосвязей, как правило, рассматривают одну из величин (X) как независимую (объясняющую), а другую (Y) как зависимую (объясняемую). При этом изменение первой из них может служить причиной изменения другой. Например, рост дохода ведет к увеличению потребления; рост цены – к снижению спроса; снижение процентной ставки увеличивает инвестиции и т.д. Эта зависимость не является однозначной в том смысле, что каждому конкретному значению объясняющей переменой X может соответствовать не одно, а **множество** значений Y. Другими словами, каждому конкретному значению независимой переменной соответствует некоторое **вероятностное распределение** зависимой переменной. Поэтому анализируют, как объясняющая переменная (или переменные) влияет (или влияют) на зависимую переменную "в среднем". Зависимость такого типа, выражаемая соотношением $M(Y|x) = f(x)$ называется **функцией регрессии** Y на X. При рассмотрении зависимости двух случайных величин говорят о **парной регрессии**.

Зависимость **нескольких** переменных, выражаемую функцией $M(Y|x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ называют **множественной регрессией**.

Под **регрессией** понимается функциональная зависимость между объясняющими переменными и **условным математическим ожиданием** (средним значением) зависимой переменной Y, которая строится с целью предсказания (прогнозирования) среднего значения Y при некоторых значениях независимых переменных.

Установление формы зависимости и оценка параметров функции регрессии являются задачами **регрессионного анализа**.

Так как реальные значения зависимой переменной могут быть различными при данном X (или $x_1, x_2, ..., x_m$), зависимость должна быть дополнена некоторым слагаемым ε, которое, по существу, является **случайной величиной**. Получающиеся в результате соотношения $Y = f(x) + \varepsilon$ или

$Y = f(x_1, x_2, ..., x_m) + \varepsilon$ называются **регрессионными уравнениями** (или **моделями**).

Построение уравнения регрессии, описывающего эмпирические данные, включает три этапа:

- выбор **формулы** уравнения регрессии;
- определение **параметров** выбранного уравнения;
- анализ **качества уравнения** и проверка **адекватности** уравнения эмпирическим данным и, при необходимости, **совершенствование уравнения**.

В случае **парной** регрессии выбор уравнения обычно осуществляется по графическому изображению реальных статистических данных - **корреляционному полю.**

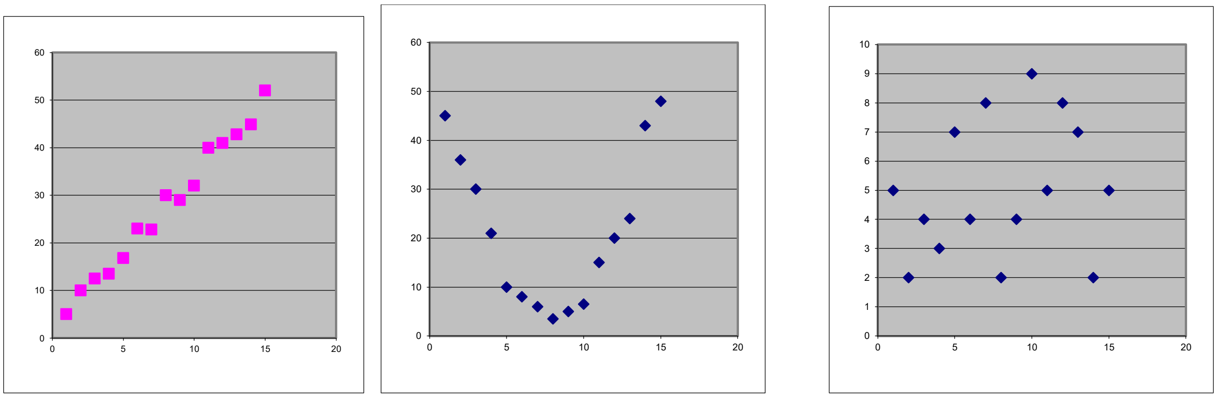


Рис. 8.7. Корреляционные поля. А) – линейная регрессия; Б) – квадратичная регрессия; В) – отсутствие выраженной связи Y и X.

Выборочные уравнения регрессии.

Для определения значений теоретических коэффициентов, входящих в уравнения регрессии, необходимо знать и использовать **все** значения переменных генеральной совокупности, что практически невозможно. В связи с этим **по выборке ограниченного объема** строится так называемое **выборочное (эмпирическое) уравнение**

регрессии. Из-за **ограниченности выборки** оценки коэффициентов, входящих в выборочное уравнение регрессии, отличаются от истинных (теоретических) значений, что приводит к несовпадению эмпирической и теоретической линий регрессии. Различные выборки из одной и той же генеральной совокупности обычно приводят к отличающимся друг от друга оценкам. Задача состоит в том, чтобы по конкретной выборке $(x_i, y_i),\ i = 1,...,n$ найти оценки неизвестных параметров так, чтобы построенная линия регрессии являлась наилучшей среди всех других линий.

Линейная регрессия

Если функция регрессии линейна, то говорят о **линейной регрессии**. Линейная регрессия (линейное уравнение) является распространенным (и простым) видом зависимости между экономическими переменными. Для простейшего случая **парной линейной регрессии**

$$M(Y|X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

или

$$y_i = M(Y|X = x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i ,$$

где β_0, β_1 - теоретические параметры регрессии; ε_i - случайное отклонение.

По выборке ограниченного объема строится **выборочное** уравнение регрессии $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i$ (1)

где b_0, b_1 - оценки неизвестных параметров β_0, β_1, называемые **выборочными коэффициентами регрессии**, $\hat{y}_i$ - оценка условного математического ожидания $M(Y|X = x_i)$. Для величин y_i справедлива формула

$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$ (2),где e_i - оценка теоретического отклонения ε_i.

Построенная прямая выборочной регрессии должна наилучшим образом описывать эмпирические данные, т.е. коэффициенты b_0, b_1 должны быть такими, чтобы случайные отклонения e_i были минимальны. Наиболее распространенным методом нахождения коэффициентов уравнения регрессии является **метод наименьших квадратов (МНК)**.

Если по выборке $(x_i, y_i),\ i=1,\dots,n$ требуется определить оценки b_0, b_1 выборочного уравнения регрессии (2), то вводится в рассмотрение и минимизируется функция

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 .$$

Необходимым условием существования минимума данной функции двух переменных является равенство нулю ее частных производных по неизвестным параметрам b_0, b_1:

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_i)\, x_i = 0 .$$

Отсюда $\quad n b_0 + b_1 \sum x_i = \sum y_i$

$$b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i ,$$

и выразив из последних соотношений коэффициенты, получим

$$b_1 = \frac{\overline{x\,y} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \qquad\qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} . \qquad (3)$$

где введены обозначения $\bar{x} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\cdot\sum y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i^2$, $\overline{x\,y} = \frac{1}{n}\cdot\sum x_i y_i$.

Пример.

Для анализа зависимости объема потребления Y(у.е.) хозяйства от располагаемого дохода X(у.е.) отобрана следующая выборка объема $n=16$

	07	09	10	13	20	22	23	28	36	40	45	50
	02	05	08	10	15	17	19	25	32	30	41	44

Необходимо определить вид уравнения регрессии и по методу наименьших квадратов оценить параметры уравнения регрессии, а также спрогнозировать потребление при доходе X=160.

План решения. Строится корреляционное поле. По расположению точек на корреляционном поле предполагается, что зависимость Y от X – линейная. По МНК определяются коэффициенты $b_0 = 3.7;\ b_1 = 0.934$. Таким образом, уравнение парной регрессии имеет вид: $\hat{Y} = 0.934X + 3.7$

Множественная линейная регрессия

На экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, спрос на некое благо определяется не только ценой данного блага, но и ценами на замещающие и дополняющие блага, доходом потребителей и многими другими факторами. В этом случае рассматривается множественная регрессия $M(Y|x_1, x_2, ..., x_m) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$.

Теоретическое **линейное** уравнение регрессии имеет вид $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_m x_m + \varepsilon$.

Для оценки параметров уравнения множественной линейной регрессии также, как правило, используется метод наименьших квадратов.

8.21. Дисперсионный анализ. Схема однофакторного дисперсионного анализа

При решении многих статистических задач приходится рассматривать зависимость результативного признака от многомерного фактора x=(x1, x2, xp), составляющие xк, к=1,…, p которого в дальнейшем будем называть его уровнями.

Примером таких задач могут служить задачи изучения зависимости качества воспроизведения учебного материала от скорости его подачи, урожайности от дозы веденных удобрений, прибыли от вложения в рекламу и т.п.

При решении подобных задач обычно используется дисперсионный метод, заключающийся в сравнении факторной и остаточной дисперсии, на которой разбивается общая дисперсия результативного признака y.

Факторная дисперсия S2факт. вызвана действием на случайную величину y фактора x, а остаточная (S2ост) целиком обусловлена случайными причинами.

Однофакторный дисперсионный анализ

Пусть на результаты признака y воздействует фактор x, имеющий p постоянных уровней, т.е. x=(x1, x2, …xp). На каждом из p уровней произведем одинаковое число испытаний, равное q, и результаты этих испытаний оформляем в виде таблицы 28. X разбивает наблюдаемые значения на p групп и значения этих групп образуют столбцы таблицы. В последней строке таблицы приведены найденные значения групповых средних.

Общая выборочная средняя y= $\frac{\sum_{j=1}^{p}\overline{y_{ir}}}{p}$.

Используя данные таблицы, найдем:

1. Общую сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\bar{y}$: Rобщ= $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(y_{ij}-\overline{y})^2$ характеризует рассеяние всех наблюдаемых значений от общей средней.

2. $R_{факт.}=q\sum_{j=1}^{p}(\overline{y_{rj}}-\overline{y})^2$ - факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней и она характеризует рассеяние групп около общей средней.

3. $R_{ост.}=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(y_{ij}-\overline{y_{ri}})^2$ - остаточная сумма квадратов отношений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая уже характеризует рассеяние внутри группы. Общая сумма дисперсии δ^2 складывается из сумм межгрупповой и внутригрупповой дисперсий.

Аналогично:

$R_{общ}=R_{факт.}+R_{ост.}$.

При практическом использовании дисперсионного анализа обычно вычисляют Rобщ и Rфакт,а Rост. находят из разности : Rобщ.-Rфакт .

№ испытания	Уровни фактора			
	X_1	X_2	…	X_p
1	y_{11}	y_{12}	…	y_p
2				
. . .				
Q	y_{q1}	y_{q2}	…	y_{qp}
Групповая Средняя	$y_{г1}$	$y_{г2}$	…	$y_{г3}$

Решение статистических задач методом дисперсионного анализа

Пусть на конечный результативный признак у, имеющий нормальное распределение, воздействует фактор x(x1, x2… xp) с р-уровнями и необходимо установить, оказывает ли этот фактор существенное влияние на признак у.

Если изучаемый фактор x(x1, x2… xp) оказывает существенное влияние на y, то групповые средние $\overline{y_{rj}}$ j=$\overline{1,p}$ существенно различаются между собой.

Поэтому одновременно значимо будут различаться Rфакт и Rост . А значит отношение $\frac{R_{\text{факт.}}}{R_{\text{ост.}}}$ будет заметно больше 1.

При решении практических задач обычно рассматривают отношение факторной и остаточной дисперсии, подсчитывается:

Fнабл=$\frac{S^2_{\text{факт.}}}{S^2_{\text{ост.}}}$, где Sфакт.= $\frac{R_{\text{факт.}}}{\text{p}-1}$, $S^2_{\text{ост.}} = \frac{R_{\text{ост.}}}{p(q-1)}$

и задача сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсий по критерию Фишера-Снедекора

Если Fнабл.>Fкр., то нулевая гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий отвергаются.

Пример. При уровне значимости α=0,05 исследовать степень влияния стажа рабочих предприятия на мотивацию труда.

Стаж	1-5 л.	6-10 л.	11л и более
1 бр.	20	22	24
2 бр.	21	23	25
3 бр.	22	24	26
	21	23	25

Результат признака y – мотивация труда зависит от стажа, который имеет 3 уровня

P=q=3 $\overline{y}$ =23

rобщ.=$\sum\sum$ $3^2+2^2+1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+3^2$ =4+8+18=12+18=30.

rфакт. =3(22+22)=24, rост. =30-24=6.

$S^2_{факт.} = \frac{24}{2} = 12$, $S^2_{ост.} = \frac{6}{3*2} = 1$.

$F = \frac{12}{1}$, Fкр(0,05;2;6)=5,14(из таблицы 10 Приложения 2).

Fнабл.>Fкр., поэтому нулевая гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий отвергаются. А это означает, что факторная дисперсия значимо отличается от остаточной дисперсии.

8.22. Сущность метода статистических испытаний. Моделирование сложных испытаний и их результатов

Основным методом моделирования таких систем на ЭВМ является **метод статистического моделирования**, составляющий методологическую основу построения **имитационных моделей** систем на ЭВМ.

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды, и реализация этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

В результате статистического моделирования системы получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализаций достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы.

Теоретической основой метода статистического моделирования являются предельные теоремы теории вероятностей. В соответствии с данными теоремами множества случайных событий подчиняются определенным закономерностям, позволяющим не только прогнозировать их поведение, но и количественно оценить некоторые средние их характеристики. Характерные закономерности наблюдаются также в распределениях случайных величин, которые образуются при сложении множества воздействий. К основным предельным теоремам, используемым при статистическом моделировании, относятся центральная предельная теорема, теоремы Бернулли, Пуассона, Чебышева, Маркова, Лапласа. Принципиальное значение данных теорем состоит в том, что они гарантируют высокое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализаций), которое с легкостью может быть получено при использовании ЭВМ.

Поясним сущность метода статистического моделирования на следующем примере: необходимо найти оценку математического ожидания выходной величины системы автоматического регулирования - $y(t) = F(x(t), f(t))$ если внешнее возмущающее воздействие $f(t) = F(\alpha)$ есть случайный процесс с известным законом распределения случайной величины α. Схема алгоритма, реализующего метод статистического моделирования для оценки $M[y]$. Из него видно, что для учета стохастического возмущающего воздействия при статистическом моделировании на ЭВМ необходим механизм формирования значений случайных величин. При этом результаты статистического моделирования зависят как от количества реализаций, так и от качества исходных последовательностей случайных чисел.

Метод постановки статистического эксперимента для решения разнообразных практических задач известен давно – это **метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)**.

Фактически современное имитационное моделирование является его развитием применительно к сложным системам.

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение α некоторой изучаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно α - $M(X) = \alpha$. Практически поступают так: производят n испытаний, в результате которых получают n возможных значений X; вычисляют их среднее арифметическое - $\bar{x} = \sum_i x_i \big/ n$ и принимают его в качестве оценки (приближенного значения) α^* искомого числа α - $\alpha \cong \alpha^* = \bar{x}$.

Другими словами метод Монте-Карло состоит в «разыгрывании случайных величин» и использовании их выборок для получения искомых оценок.

Таким образом статистическое моделирование систем и процессов на ЭВМ требует большого объема действий со случайными числами, а его результаты существенно зависят от качества исходных последовательностей случайных чисел.

Рассмотрим возможности и особенности получения последовательностей случайных чисел при статистическом моделировании систем на ЭВМ. На практике используются три основных способа генерации случайных чисел: аппаратный (физический), табличный (файловый) и алгоритмический (программный).

Реализация аппаратного способа генерации случайных чисел основана на использовании внешнего электронного устройства, подключаемого к ЭВМ. В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов чисел, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах. Напряжение с выхода источника шума, являющееся случайным процессом, стробируется напряжением полезного сигнала и квантуется относительно заданного порога. В результате получается серия импульсов, расстояния по времени между которыми являются случайными числами. Основным недостатком данного метода является невозможность получения при моделировании одинаковых последовательностей чисел. А его достоинства, связанные с не использованием ЭВМ, в настоящее время фактически нивелированы все возрастающими возможностями последних.

Табличный способ заключается в предварительном формировании таблицы случайных чисел для требуемого количества реализаций в виде файла. При достаточно большом количестве реализаций основным недостатком данного способа являются большие затраты машинных ресурсов на частое обращение к соответствующему файлу. Однако он позволяет легко осуществлять повторное воспроизведение последовательности чисел.

Алгоритмический способ получений последовательности случайных чисел основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих их программ. При этом вычисление случайных чисел может быть организовано как по мере необходимости, так и путем периодической генерации множества случайных чисел. Данный способ является наиболее предпочтительным ввиду большей гибкости реализации различных законов распределения.

При моделировании систем на ЭВМ программная имитация случайных воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) процессов и к их последующему функциональному преобразованию. В качестве базового может быть принят любой удобный случайный процесс (нормальный, пуассоновский и т.п.). Однако при дискретном моделировании в качестве базового процесса используют последовательности чисел, представляющие собой реализации равномерно распределенных на интервале [0,1] случайных величин. Ввиду того, что ЭВМ оперирует с конечным множеством чисел, получаемые последовательности являются не идеальными случайными, а так называемыми пвсевдослучайными. При этом детерминированность получаемой последовательности определяется разрядностью чисел, с которыми оперирует ЭВМ.

Генератор случайных чисел должен удовлетворять следующим требованиям: получаемые последовательности должны состоять из квазиравномерно распределенных чисел, содержать статистически независимые числа, быть воспроизводимыми, иметь неповторяющиеся числа, использовать минимум машинного времени и памяти.

Наибольшее применение в практике моделирования на ЭВМ для генерации последовательностей псевдослучайных чисел находят алгоритмы вида -

$$x_{i+1} = \Phi(x_i), \qquad (1)$$

представляющие собой рекуррентные соотношения первого порядка, для которых начальное число x_0 и параметры соотношения заданы.

Прежде чем приступать к реализации моделирующих алгоритмов на ЭВМ, необходимо проверить **качество последовательности псевдослучайных чисел**. Данная процедура включает проверку равномерности, стохастичности и независимости.

Проверка равномерности может быть выполнена следующим образом. Интервал значений случайных чисел (0,1) разбивается на m частей. Тогда при генерации последовательности $\{x_i\}$ каждое из чисел x_i с вероятностью $p_j=1/m$ должно попадать в один из подынтервалов. Всего в каждый подынтервал попадет N_j чисел ($\sum_{j=1}^{m} N_j = N$). Относительная частота попадания случайных чисел в каждый из подынтревалов буде равна N_j/N. Очевидно, что последовательность тем равномернее, чем ближе ломаная линия к теоретическому значению p_j. Оценка данной степени приближения может быть проведена с использованием критериев согласия (Пирсона, Стьюдента, Фишера). При этом на практике обычно принимается m=20-50, $N=(10^2-10^3)m$.

Существо применения критерия Пирсона заключается в следующем: находят $\chi^2 = \sum_{j=1}^{m}\left(N_j - Np_j\right)/(Np_j)$. По вычисленному значению χ^2 и числу степеней свободы $k = m - r - 1$ (r – число параметров теоретического закона распределения, для равномерного закона r=1) по таблице находят P. Если эта вероятность превышает некоторый уровень значимости γ, то гипотеза о равномерности принимается.

Проверка стохастичности осуществляется следующим образом. Последовательность разбивается на элементы первого и второго рода (a и b):

$$x_i = \begin{cases} a, \text{ если } x_1 < p \\ b, \text{ в противном случае} \end{cases} \qquad 0 < p < 1$$

Серией называется любой отрезок последовательности, состоящий из идущих друг за другом элементов одного и того же рода, а число элементов в этом отрезке называют длиной серии. В результате получаем последовательность –

aaabbbbbbbaabbaabaaaabbbbbbbbb….

Для равномерно распределенной последовательности случайных чисел вероятность появления серии длиной j в последовательности длиной l определяется формулой Бернули:

$$P(j,l)=C_l^j\, p^j (1-p)^{l-j};\ j=0,...,l;\, l=1,...,n$$

При экспериментальной проверке оцениваются частоты появлений серий длиной j. В результате получают теоретическую и экспериментальную зависимости $P(j,l)$, сходимость которых проверяется по известным критериям согласия при различных значениях p и l.

Проверка независимости последовательности псевдослучайных равномерно распределенных чисел проводится на основе вычисления корреляционного момента. Данная проверка осуществляется путем введения в рассмотрение последовательности $\{y_i\}=\{x_{i+\tau}\}$, где τ-величина сдвига последовательностей.

В общем случае корреляционный момент дискретных случайных величин ζ,η с возможными значениями x_i, y_i определяется по формуле:

$$K_{\zeta\eta}=\sum_i\sum_j (x_i - M[\zeta])(y_j - M[\eta])p_{ij},$$

где p_{ij} – вероятность того, что (ζ,η) примет значение (x_i, y_j).

Для независимых случайных величин $K_{\zeta\eta}=0$. При проведении оценок независимости используют понятие коэффициента корреляции –

$$\rho_{\zeta\eta}=K_{\zeta\eta}/(\sigma_x\sigma_y),$$

где σ_x, σ_y - средние квадратические отклонения величин ζ,η.

В качестве критерия корреляционной независимости используют соотношение:

$$\left|\rho_{\zeta\eta}\right|\le\beta\sqrt{1/N}.$$

Его выполнение означает, что с доверительной вероятностью β справедлива гипотеза корреляционной независимости.

Расчет коэффициента корреляции осуществляют следующим образом:

$$\rho_{\zeta\eta} = \frac{\frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i x_{i+\tau} - \frac{1}{(N-\tau)^2}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i \sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}}{\sqrt{D[x_i]D[x_{i+\tau}]}},$$

$$D[x_i] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_i\right)^2,$$

$$D[x_{i+\tau}] = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}^2 - \frac{1}{(N-\tau)^2}\left(\sum_{i=1}^{N-\tau} x_{i+\tau}\right)^2.$$

При анализе качества программных генераторов псевдослучайных равномерных последовательностей важной характеристикой является длина отрезка апериодичности L, то есть длина отрезка генерируемой последовательности чисел, на котором ни одно число не повторяется. Очевидно, что использование при моделировании последовательности чисел большей чем L длины приведет к повторению опытов, что не позволит получить более лучших статистических оценок при увеличении затрат машинных ресурсов. С теоретическими и практическими способами оценки данного показателя вы можете ознакомиться в литературе (Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем).

Моделирование случайных воздействий на системы

В общем случае для моделирования случайных воздействий на системы используют случайные события, дискретные и непрерывные случайные величины, векторы и процессы. Формирование на ЭВМ случайных объектов любой природы из перечисленных сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел. Рассмотрим вопросы из преобразования для генерации воздействий на моделируемую систему.

Простейшими случайными объектами являются случайные события. Процедура моделирования того или иного случайного события зависит от его формулировки. Например, необходимо смоделировать случайное событие А, наступающее с вероятностью p_A. В этом случае одним из вариантов моделирования является последовательный анализ значений x_i из сгенерированной последовательности случайных чисел и сравнения их с p_A. Если неравенство $x_i \le p_A$ выполняется, то исходом испытания является событие А.

Если искомый результат испытания является сложным событием, зависящим от двух и более простых событий, то процедура моделирования будет следующей:

а) для двух независимых простых событий А и В – осуществляют последовательную проверку условия совместного исхода испытания ($AB, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{AB}$) на основе проверки условий истинности каждого события ($x_i \le p_A, x_{i+1} \le p_B$);

б) для двух зависимых простых событий А и В – задается условная вероятность наступления события В при условии, что событие А уже произошло p(B/A); из последовательности $\{x_i\}$ извлекается очередное число и проверяется справедливость неравенства $x_i \le p_A$; далее процесс проверки организуется в зависимости от условия совместного исхода событий; например для события АВ поступают следующим образом - если выполняется $x_i \le p_A$, то извлекается следующее число и проверяется неравенство $x_{i+1} \le p(B/A)$, если и оно выполняется то значит заданное событие наступило. Путем алгоритмической организации проверки приведенных неравенств может быть реализован любой совместный исход данных событий $AB, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{AB}$.

Для формирования значений случайных величин с заданным законом распределения в качестве базовой последовательности используют последовательности случайных чисел, имеющие равномерное распределение в интервале (0,1), которые преобразуются в значения случайной величины с заданным законом распределения.

Для моделирования дискретной случайной величины принимающей значения $y_1 \le y_2 \le ... \le y_j \le ...$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_j, ...$ используют метод обратной функции: если ζ - равномерно распределенная на интервале (0,1) случайная величина, то искомая случайная величина η получается с помощью преобразования –

$\eta = F_{\eta}^{-1}(\zeta)$, где $F_{\eta}(\zeta)$ - функция распределения случайной величины ζ ($F_{\eta}(\zeta) = P(\eta \le \zeta)$).

Алгоритм формирования η сводится к следующему:

если $x_1 < p_1$, то $\eta = y_1$

если $x_1 < p_1 + p_2$, то $\eta = y_2$

………………………………

если $x_j < \sum_{j=1}^{m} p_j$, то $\eta = y_m$

Для моделирования непрерывных случайных величин с заданным законом распределения также пользуются методом обратной функции. При этом, чтобы получить число принадлежащее последовательности $\{y_j\}$ с плотностью распределения $f_{\eta}(y)$ необходимо разрешить относительно y_j уравнение вида –

$\int_{-\infty}^{y_j} f_{\eta}(y)dy = x_i$, где x_i – случайное число, имеющее равномерное распределение в интервале (0,1).

Основным недостатком данного способа является сложность интегрирования функции плотности распределения вероятностей.

Поэтому часто используют приближенные способы преобразования случайных чисел – универсальные и специализированные. Первые позволяют получать случайные числа с любым законом распределения, а вторые – только с конкретным законом.

Один из универсальных способов получения случайных чисел является следующий:

- генерируется случайное равномерно распределенное число x_i;

- с помощью этого числа случайным образом выбирается интервал (a_k,a_{k+1}) на основе предварительно сформированной таблицы коэффициентов масштабирования для каждого интервала, определенных из условия –

$\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} f_\eta(y)dy = 1/m$, m- количество интервалов разбиения плотности $f_\eta(y)$ на участке (a,b);

- генерируется x_{i+1} и осуществляется ее масштабирование - $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$;

- вычисляется случайное число с требуемым законом распределения - $y_i = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$.

Для моделирования реализаций случайных векторов, обладающих заданными вероятностными характеристиками используют понятие совместного закона распределения случайных величин.

Рассмотрим дискретный двумерный случайный процесс. Составляющая ζ принимает возможные значения $\{x_i\}_{i=\overline{1,n}}$, а составляющая η принимает значения $\{y_j\}_{j=\overline{1,n}}$, причем каждой паре (x_i, y_j) соответствует вероятность p_{ij}. Тогда каждому x_i будет соответствовать $p_i = \sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$. На основании данного распределения можно определить конкретные значения x_i . Аналогично определяются значения $y_{j=i}$ и получаются пары реализаций случайного вектора.

Непрерывный двумерный случайный процесс описывается совместной функцией плотности вероятности - $f(x, y)$. Эта функция может быть использована для определения функции плотности случайной величины ζ как - $f_\zeta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$.

Имея функцию плотности $f_\zeta(x)$, можно найти случайное число x_i, а затем при условии, что $\zeta = x_i$, определить условное распределение случайной величины η - $f_\eta(y / \zeta = x_i) = f(x, y) / f_\zeta(x_i)$. В соответствии с этой функцией плотности можно определить случайное число y_i. Тогда пара чисел (x_i, y_i) будет являться реализацией вектора (ζ, η).

Общие принципы построения и эксплуатации имитационных моделей

Во-первых, необходимо выделить основные взаимодействия компонентов системы между собой и с внешней средой, которые являются существенными с точки зрения получения требуемых оценок ее функционирования, а также выбрать единицу времени, отражающую природу моделируемой системы.

Во-вторых, определить количество и законы распределения разыгрываемых случайных величин (векторов) и с учетом качества их разыгрывания выбрать продолжительность прогона модели и число прогонов (наблюдений).

Поскольку основная цель состоит в получении наблюдений с наименьшей ошибкой, то используют либо очень длительный прогон модели, либо повторения более коротких прогонов модели с различными последовательностями случайных чисел. Применение первого способа связано с большими затратами машинного времени. Применение второго способа ограничено необходимостью правильного выбора длительности прогона, соответствующей переходу модели в стационарный режим. В рамках второго способа могут быть использованы различные методы получения наблюдений – метод повторения, метод подынтервалов, метод циклов и др.

Метод повторения заключается в организации нескольких прогонов модели при одних и тех же начальных условиях, но с различными последовательностями случайных чисел. Его преимуществом является статистическая независимость получаемых наблюдений (необходимое условие для любого статистического теста). А недостаток состоит в том, что наблюдения могут оказаться сильно смещенными под влиянием начальных условий (переходное состояние).

Метод подынтервалов направлен на уменьшение влияние переходных условий, которому подвержен метод повторения. Он основан на разбиении каждого прогона модели на равные промежутки времени. Преимущество данного метода в том, что со временем влияние переходных условий уменьшается, а недостатком – не выполнение условия о независимости наблюдений от интервала к интервалу, так как между ними возникает автокорреляция. Ее влияние можно уменьшить путем увеличения длины прогона и длину интервалов.

Метод циклов позволяет уменьшить влияние указанной автокорреляции. Он подразумевает выбор интервалов таким образом, чтобы в их начальных точках условия были одинаковыми (с точки зрения рассматриваемой переменной). Однако его недостатком является уменьшение числа получаемых наблюдений. При этом ввиду нерегулярности циклов усложняется оценка значения каждого наблюдения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОМТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи по теме «Матрицы и определители»

1. 1. Даны матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$. Вычислить AB.

Ответ: $AB=\begin{pmatrix} -21 & -37 \\ -28 & -102 \end{pmatrix}$

1.2. Даны матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -9 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 \\ -9 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Вычислить AB.

Ответ: $AB=\begin{pmatrix} -33 & 26 & 49 \\ -72 & 55 & -52 \\ 9 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

1.3. Даны матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -2 & -4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Вычислить AB.

Ответ $AB=\begin{pmatrix} -21 & 43 \\ -18 & -48 \end{pmatrix}$.

1.4. Даны матрицы A и B: $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -7 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. Вычислить AB.

Ответ: $AB=\begin{pmatrix} -14 & -10 & -48 \\ -21 & 17 & 40 \\ -42 & -8 & -67 \end{pmatrix}$.

1.5. Вычислить определители: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Ответ: 92.

1.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Ответ: 60.

1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

Ответ: 11.

1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: -56.

1.9. Для данной матрицы найдите обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.

1.10. Для данной матрицы найдите обратную матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -6 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.11. Для данной матрицы найдите обратную матрицу. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -2 & 8 & -9 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.12. Для данной матрицы найдите обратную матрицу $A=\begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.13. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

1.14. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

1.15. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.16. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 & -13 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1.17. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & -11 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.18. Решить матричное уравнение $X\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Ответ: $A^{-1} = \frac{-1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Задачи по теме «Системы линейных уравнений. Линейные пространства»

2.1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 8 \\ -4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -5 \end{cases}.$$

Ответ: $[x_1 = 2, x_2 = -7, x_3 = -3]$.

2.2. Решите систему линейных уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -9 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases}$$ *Ответ:* $[x_1 = 8, x_2 = 8, x_3 = -7]$

2.3. Решите систему линейных уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 7x_3 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}.$$

Ответ: $[x_1 = 9, x_2 = 9, x_3 = 6]$.

2.4. Решите систему линейных уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 6x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 1 \\ 6x_1 + 8x_2 - 9x_3 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left[x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 1\right]$.

2.5. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -55 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -31 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 26 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -24 \end{cases}$$

Ответ: ранг = 3,

если $\begin{cases} x_1 = -x_4 - 5 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4 + 12 \\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 + 5 \end{cases}$, то $(-5, 12, 5, 0)$,

если $\begin{cases} x_1 = 10 - 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 + 2 \\ x_4 = 3x_3 - 15 \end{cases}$, то $(10, 2, 0, -15)$,

если $\begin{cases} x_1 = 13 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2 - 1 \\ x_4 = \frac{3}{2}x_2 - 18 \end{cases}$, то $(13, 0, -1, -18)$,

если $\begin{cases} x_2 = \frac{26}{3} - \frac{2}{3}x_1 \\ x_3 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_1 \\ x_4 = -x_1 - 5 \end{cases}$, то $\left(0, \frac{26}{3}, \frac{10}{3}, -5\right)$.

2.6. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -2 \\ 5x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 8x_2 + 11x_3 - 6x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Ответ: ранг = 2,

если $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{22}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5}x_4 - \frac{7}{5}x_3 + \frac{4}{5} \end{cases}$, то $\left(-\frac{22}{5}, \frac{4}{5}, 0, 0\right)$, если $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{7}x_2 - \frac{2}{7}x_4 - \frac{30}{7} \\ x_3 = \frac{4}{7}x_4 - \frac{5}{7}x_2 + \frac{4}{7} \end{cases}$, то $\left(-\frac{30}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0\right)$,

если $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 4 \\ x_4 = \frac{5}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3 - 1 \end{cases}$, то $(-4, 0, 0, -1)$,

если $\begin{cases} x_2 = -7x_1 - 2x_4 - 30 \\ x_3 = 5x_1 + 2x_4 + 22 \end{cases}$, то $(0, -30, 22, 0)$.

если $\begin{cases} x_2 = -2x_1 - x_3 - 8 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_1 - 11 \end{cases}$, то $(0, -8, 0, -11)$,

если $\begin{cases} x_3 = -2x_1 - x_2 - 8 \\ x_4 = -\frac{7}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 15 \end{cases}$, то $(0, 0, -8, -15)$.

2.7. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 7x_4 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

Ответ: ранг 3,

если $\begin{cases} x_1 = 7 - 7x_4 \\ x_2 = 9 - 7x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{cases}$, то $(7, 9, 2, 0)$,

если $\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}x_3 + \frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{7}{3}x_3 + \frac{13}{3} \\ x_4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$, то $\left(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$,

если $\begin{cases} x_1 = x_2 - 2 \\ x_3 = \frac{3}{7}x_2 - \frac{13}{7} \\ x_4 = \frac{9}{7} - \frac{1}{7}x_2 \end{cases}$, то $\left(-2, 0, -\frac{13}{7}, \frac{9}{7}\right)$,

если $\begin{cases} x_2 = x_1 + 2 \\ x_3 = \frac{3}{7}x_1 - 1 \\ x_4 = 1 - \frac{1}{7}x_1 \end{cases}$, то $(0, 2, -1, 1)$.

2.8. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} 5x_1 - 11x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = -5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Ответ: ранг 2,

если $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{13}{7} \\ x_2 = \frac{3}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 + \frac{4}{7} \end{cases}$, то $\left(\frac{13}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0\right)$,

если $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 + \frac{5}{3} \\ x_3 = \frac{7}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{4}{3} \end{cases}$, то $\left(\frac{5}{3}, 0, -\frac{4}{3}, 0\right)$,

если $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1 \\ x_4 = \frac{7}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 - 2 \end{cases}$, то $\left(1, 0, 0, -2\right)$,

если $\begin{cases} x_2 = 3x_1 - x_4 - 5 \\ x_3 = 7x_1 - 3x_4 - 13 \end{cases}$, то $\left(0, -5, -13, 0\right)$,

если $\begin{cases} x_2 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3} \\ x_4 = \frac{7}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{13}{3} \end{cases}$, то $\left(0, -\frac{2}{3}, 0, -\frac{13}{3}\right)$,

если $\begin{cases} x_3 = 3x_2 - 2x_1 + 2 \\ x_4 = 3x_1 - x_2 - 5 \end{cases}$, то $\left(0, 0, 2, -5\right)$.

2.9. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7,\ \lambda_1 = 7,\ e_1 = \left(-\frac{2}{3}c, c\right),\ \lambda_2 = -1,\ e_2 = \left(2c, c\right)$

2.10. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda-6,\ \lambda_1=6,\ e_1=(c,-c),\ \lambda_2=-1,\ e_2=\left(\frac{4}{3}c,c\right)$

.

2.11. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

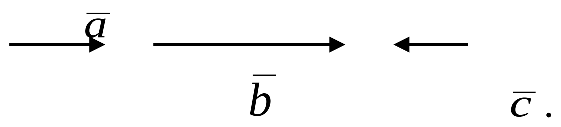
Ответ: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3,\ \lambda_1=-3,\ e_1=(3c,c),\ \lambda_2=-1,\ e_2=(c,0)$

2.12. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+15,\ \lambda_1=5,\ e_1=(c,0),\ \lambda_2=3,\ e_2=(-3c,c)$

Задачи по теме «Вектор. Действия над векторами заданными длиной и направлениями»

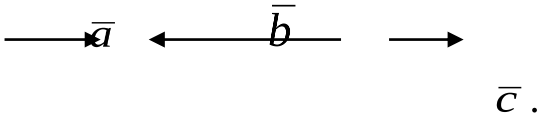
№1. Дано:



построить $2\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}$

$\bar{a}+\bar{b}+5\bar{c}$

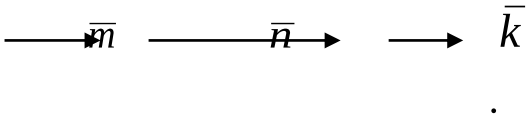
$$2\bar{a}-\bar{b}-2\bar{c}$$

№2. Дано: 

построить $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$

$$\bar{a}-2\bar{b}-\bar{c}$$

$$\bar{a}+\bar{b}-2\bar{c}$$

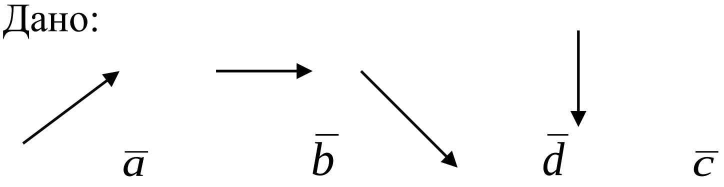
№3. Дано: 

построить $\bar{m}+\bar{n}+2\bar{k}$

$$\bar{m}-\bar{n}+\bar{k}$$

$$\bar{m}-\bar{n}-\bar{k}$$

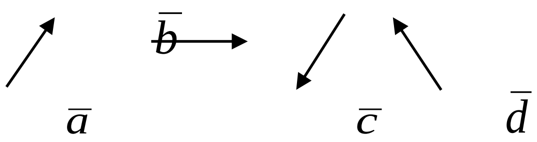
№4. Дано:



построить $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$

$$2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}-2d$$

№5. Дано:

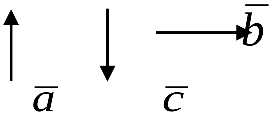


построить $2\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}$

$$\overline{a} - 2\overline{b} - \overline{c} - 2\overline{d}$$

$$\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} + \overline{d}$$

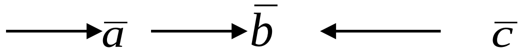
№6. Дано:



построить $\quad 2\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

$$2\overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$$

№7. Дано:

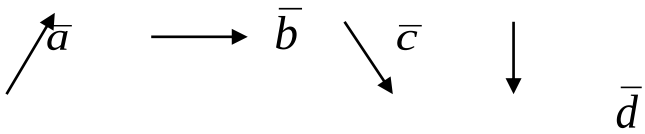


построить $\quad 2\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}$

$$2\overline{a} - \overline{b} + 3\overline{c}$$

$$\overline{a} + \overline{b} - 2\overline{c}$$

№8. Дано:



построить $\quad \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}$

$$\overline{a} - \overline{b} - \overline{c} - \overline{d}$$

$$\overline{a} + \overline{b} - \overline{c} + \overline{d}$$

$$\overline{a} - \overline{b} + \overline{c} - \overline{d}$$

№9. Дано: $|\overline{a}| = 5, |\overline{b}| = 6$.

Найти $\bar{a} \cdot \bar{b}$, если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен:

а) 45^0; б) 60^0; в) 120^0; г) 180^0.

№10. Дано: $|\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 4$ $\varphi = (\bar{a}, \bar{b}) = 120^0$.

Найти:

а) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; б) $(\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2b)$; в) $(7\bar{a} + b)^2$.

№11. Возьмите два произвольных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, построить

1) $\bar{a} - \bar{b}$; б) $\frac{1}{2}\bar{b} - 2\bar{a}$; 3) $-\bar{a} + 2\bar{b}$; 4) $2(\bar{a} + \bar{b})$.

№12. В параллелограмме *ABCD:*

$A\overline{B} = \bar{a}$; $A\overline{D} = \bar{b}$. O – точка пересечения диагоналей.

Выразите вектора $B\overline{D}$, $O\overline{B}$, $A\overline{C}$, $C\overline{D}$ через $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

№13. Даны векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, причем $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, $|\bar{c}| = 4$, $\bar{a} \perp \bar{b}$,

$(\bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{b}) = 60^0$.

Найти:

1) $(\bar{a} - 2\bar{b})(\bar{c} - \bar{a})$;

2) $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})^2$.

№14. Вычислите:

1) $(2\bar{i} - \bar{j})\bar{j} + (\bar{j} - 2\bar{k})\bar{k} + (\bar{i} - 2\bar{k})^2$;

2) $\bar{i} \cdot (\bar{j} + \bar{k}) + j(3\bar{i} - \bar{k}) + \bar{k} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j})$.

Задачи по теме «Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Действия над векторами с заданными координатами»

№1. Найти угол между векторами $\bar{a}(0,2)$ и $b(-3,-4)$.

№2. Доказать, что ΔABC с вершинами $A(1,0)$, $B(1,3)$ и $C(4,3)$ равнобедренный и прямоугольный.

№3. Найти длину вектора $\bar{a}+2b$, если $\bar{a}(0,1,2)$ и $b(3,-4,1)$.

№4. При каких значениях n векторы $\bar{a}(-2n,2n+2,-2)$ и $\bar{b}(3,-4,1)$ коллинеарны ?

№5. Определить при каких значениях α вектора $\bar{a}=\alpha\bar{i}-3\bar{j}+2\bar{k}$ и $\bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}-\alpha k$ взаимно перпендикулярны?

№6. Даны вершины ΔABC $A(-1,-2,4)$, $B(-4,-2,0)$ и $C(3,-2,1)$. Определить его внутренние углы.

№7. Дано: $\bar{a}(4;-2;-4)$;

$\bar{b}(6;-3;2)$;

$\bar{c}(5;-1;7)$.

Найти:

1. координаты вектора $2\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}$;

2. длину вектора $2\overline{b}+\overline{a}$;

3. скалярное произведение векторов $(2\overline{a}-\overline{c})\cdot(\overline{b}+\overline{a})$;

4. угол между векторами $\overline{a}$ и $2\overline{c}$.

№8. Дано: $\overline{a}=\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$;

$\overline{b}=2\overline{j}-3\overline{k}$;

$\overline{c}=2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$.

Найти: 1. координаты вектора $\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$;

2. длину вектора $2\overline{a}+\overline{c}-5\overline{b}$;

3. скалярное произведение векторов $\overline{a}-\overline{c}$ и $2\overline{b}+3\overline{c}$

4. угол между векторами $\overline{b}$ и $2\overline{c}$.

№9. Дано: $\overline{a}(1;2;-3)$;

$\overline{b}(4;-1;2)$.

Найти:

1. $3\overline{a}-2\overline{b}$;
2. $-5\overline{a}+\overline{b}$;
3. $\overline{a}\cdot\overline{b}$;
4. $(3\overline{a}-2\overline{b})\cdot(-5\overline{a}+\overline{b})$;
5. $|3\overline{a}-2\overline{b}|$.

№10. Найти скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и угол между ними:

1) $\overline{a}(2,-5,4)$; 2) $\overline{b}(-1,2,7)$;

2) $\bar{a}(1,-2,2)$; 2) $\bar{b}(-1,1,0)$.

№11. При каких значениях m вектора $\bar{a}(4,m,-6)$ и $\bar{b}(m,2,-7)$ взаимоперпендикулярны?

№12. Найти координаты вектора $\bar{b}$ Б коллинеарного вектора $\bar{a}$, если :

1) $\bar{a}(2,1,-1)$; $\bar{a}\cdot\bar{b}=3$;

2) $\bar{a}=-\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$; $\bar{a}\cdot\bar{b}=-2$.

№13. Дан треугольник с вершинами $A(1,2,4)$, $B(7,10,3)$ и $C(-1,3,1)$.

Доказать , что угол A тупой.

Задачи по теме «Введение в анализ: множества, функции. Предел и непрерывность»

Предел числовой последовательности

1. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^6+8n^5-6n^3+5n-1}{-8n^6+6n^5-5n^2+n}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

2. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+9}}{-2n+7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

3. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-5n^5+8n^3-6}{\sqrt{3n^{16}+n^7+7}}$$

Ответ: 0.

4. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+4\sin^3 4n+8}{8n+6\cos^6 4n-4}.$$

Ответ: $-\frac{9}{8}$.

5. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^2+3n+1}-n\right).$$

Ответ: -3.

6. Вычислить предел:

$$\lim_{п\to\infty}\frac{2-3n}{\sqrt{n^2-n+1}-\sqrt{25n^2+2n+1}}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

7. Вычислить предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 6^n+4\cdot 5^n+7}{6^n-3\cdot 5^n+2}.$$

Ответ: 2.

8. Вычислить предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4\cdot 7^{-n}-3\cdot 5^{-n}-2}{5\cdot 7^{-n}+2\cdot 5^{-n}+3}$. *Ответ*: $-\frac{2}{3}$.

9. Вычислить предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-7n+9}{-7n+7}\right)^{3n-1}$.

Ответ: $e^{-6/7}$.

10. **3. 10.** Вычислить предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-9n-2}{n^3+3n+9}\right)^{9n^2+6}$.

Ответ: e^{-108}.

11. Вычислить предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left((8n+3)\cdot\left(\ln(9n+2)-\ln(9n-7)\right)\right)$.

Ответ: 8.

Предел функции

12. Вычислить предел:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{7\cdot 6^{x+4}+9}{5-7\cdot 6^{x+7}}$.

Ответ: $\frac{9}{5}$.

13. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3}{2^x-1}.$$

Ответ: 1.

14. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8\cdot 4^{x+3}-1}{6+3\cdot 4^{x+5}}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

15. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-5x+1}{-4x^2+8x+1}.$$

Ответ: $-\frac{9}{4}$.

16. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2x^2-3x-9}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

17. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{2x}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

18. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}.$$

Ответ: $\frac{5}{7}$.

19. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5x^3}{x+6}\cdot\sin^2\left(\frac{5}{7+4x}\right)\right).$$

Ответ: $-\frac{125}{16}$.

20. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}.$$

Ответ: –4.

21. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^6-7}{x^6+2}\right)^{x^6+5}.$$

Ответ: e^{-9}.

22. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{arctg}5x)^{\frac{3-x}{\sin 6x}}.$$

Ответ: $e^{2,5}$.

23. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{x}}{\sin 2x}.$$

Ответ: $+\infty$.

24. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{4x}-1}{1-e^{5x}}.$$

Ответ: $-\frac{4}{5}$.

25. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^2-3x-7)\cdot e^{2x}.$$

Ответ: 0.

26. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(2\pi\cdot x^{\frac{1}{5}}\right)}{\sin\left(5\pi\cdot x^2\right)}.$$

Ответ: $-\frac{1}{25}$.

27. Вычислить предел:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\log_2 6x}{-3x+7-2e^{4x}}.$$

Ответ: 0.

Непрерывность. Классификация точек разрыва

28. Найдите точки разрыва функции

$$f(x)=\frac{x^2+12x+27}{|x+9|\left(x^2-6x-27\right)}$$

и определите их типы.

Ответ: $x=-9$ ÷ точка разрыва 1-го рода (неустранимый разрыв), $x=-3$ ÷ точка устранимого разрыва, $x=9$ ÷ точка разрыва 2-го рода (бесконечный скачок).

29. Найдите точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-4}, & x\in(-\infty;2),\\ -2x^2+6x+3, & x\in[2;3),\\ -\dfrac{3}{x-4}, & x\in[3;+\infty)\end{cases}$$

и определите их типы.

Ответ: $x=2$ ÷ точка разрыва 1-го рода (неустранимый разрыв), $x=4$ ÷ точка разрыва 2-го рода (бесконечный скачок).

30. Найдите точки разрыва функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-5}, & x\in(-\infty;4),\\ -x^2+2x+6, & x\in(4;5),\\ \dfrac{9}{x-6}, & x\in[5;+\infty)\end{cases}$$

и определите их типы.

Ответ: $x=4$ ÷ точка устранимого разрыва, $x=6$ ÷ точка разрыва 2-го рода (бесконечный скачок).

Асимптоты графика функции

31. Найдите асимптоты графика функции

$$f(x)=\frac{x^3+5x^2-7}{x^2+x-2}.$$

Ответ: $x=-2$, $x=1$ ÷ вертикальные асимптоты,

$y=x+4$ ÷ наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

Задачи по теме «Предел функции в точке. Теорема о пределах»

Найдите предел:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{y\to -2}\frac{y^3+3y^2+2y}{y^2-y-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+1}{x^3+1}$;

4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}+\frac{1}{x-1}\right)$;

13. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2 8x+7}$;

14. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{6x^2+5x-1}{2x^2-x-3}$;

15. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$;

16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x-4}$;

5. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x^2-7x+12}$;

17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x-4}{6x+6}$;

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4+x}}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$;

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+4x+3}$;

20. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}$;

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{3x^2}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-8x+7}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

12. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{3t^2-t-2}{2t^2+5t-7}$;

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{3+x}-2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{5x+1}-4}$;

29. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+20}-5}{\sqrt{2x+6}-4}$;

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$;

27. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x+11}-5}{\sqrt{x-3}-2}$;

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$;

30. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{6-x}-3}{1-\sqrt{3x+10}}$;

31. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+20}-3}{\sqrt{2x+6}-4}$;

32. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x+11}-5}{\sqrt{x+2}-3}$.

Задачи по теме «Бесконечные пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие пределы»

Найдите предел:

№1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+7x-2}{3x^2+4}$;

№2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}$;

№3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^2+3x}{2x^3+7x}$;

№4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^8-8x^9+x^{10}}{4x^{12}+7x}$;

№5. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^2+6y}{y}$;

№6. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{2y^2+y-3}{y^2-1}$;

№7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+3x+4}-2}{\sqrt{2x+9}-3}$;

№8. $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{2t^2-5t-12}{t^2-16}$;

№9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{3x+1}-4}{\sqrt{2x+15}-5}$;

№10. $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{3y^2+y-4}{y^2-3y+2}$;

№11. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{y+4}-2}{\sqrt{5y+9}-3}$;

№12. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{y^7+5y^3+7y}{25y^7+y-4}$;

№13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{3x+5}$;

№14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6+25x^3+4x}{12x^5-x^6+7x}$;

№15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x}+\dfrac{x^3}{4}\right)$;

№16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2+4x}{2x+7}$;

№17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x^{15}+74x^4+2}{2x^8+7x-8}$;

№18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x+4}{x^3+5x^2-7}$;

№19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^2+x^3+4}{12x^2-3x^3+7x^4}$;

№20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+12x}{3x^2+7x^3-2}$.

Задачи по теме «Замечательные пределы. Применение их при вычислении пределов»

Найдите предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 5x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 8x}{3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 3x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{ctg3x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{2x}{5}}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+5}\right)^{3x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$; 11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x+7}{7}\right)^{\frac{3}{8x}}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$;

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-7}{2x}\right)^{\frac{3x}{4}}$; 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{3}{2}x\right)^{\frac{2}{x}}$.

Дополнительные задачи

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arc\sin 3x}{2x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{arctg 5x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg 2x+\sin 5x}{x}$;

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$; 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x-4}$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+0,5}$.

Задачи по теме «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

1. Продифференцируйте функцию

$f(x)=\arccos^8(2x+9)$.

Ответ: $-16\frac{\arccos^7(2x+9)}{\sqrt{1-(2x+9)^2}}$.

2. Продифференцируйте функцию

$$f(x)=5(5x^2-9)^{\frac{1}{7}}+6\arcsin^4(4^{-4}).$$

Ответ: $\dfrac{50}{7}x(5x^2-9)^{-\frac{6}{7}}$.

3. Продифференцируйте функцию

$$f(x)=\cos^4(9x^3 3x^2)\cdot\sqrt[4]{2x^2-6}.$$

Ответ: $-4\cos^3(9x^3+3x^2)\cdot\sin(9x^3+3x^2)\cdot(27x^2+6x)\cdot\sqrt[4]{2x^2-6}+$

$$+\cos^4(9x^3+3x^2)\cdot\left(2x-6\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot x.$$

4. Продифференцируйте функцию

$$f(x)=\frac{1}{5+3^{8x^2-4}}+\frac{8}{\sqrt[3]{2x^2+9x}}.$$

Ответ: $-\dfrac{3^{8x^2-4}\ln 3\cdot 16x}{\left(5+3^{8x^2-4}\right)^2}-\dfrac{8}{3}\cdot\left(2x^2+9x\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot\left(4x+9\right)$.

5. Продифференцируйте функцию

$$f(x)=(-9x^3+8x)^{\sin(8x^2-5)}.$$

Ответ: $(-9x^3+8x)^{\sin(8x^2-5)}\cdot(\cos(8x^2-5)\cdot 16x\cdot\ln(-9x^3+8x)+$

$$+\sin(8x^2-5)\cdot\frac{-27x^2+8}{-9x^3+8x}.$$

6. Продифференцируйте функцию

$$f(x)=\log_{7x+2}(\operatorname{arctg}(2x+3)).$$

Ответ:

$$\frac{\frac{1}{\operatorname{arctg}(2x+3)}\cdot\frac{1}{1+(2x+3)^2}\cdot 2\cdot\ln(7x+2)-\ln(\operatorname{arctg}(2x+3))\cdot\frac{7}{7x+2}}{\ln^2(7x+2)}.$$

Задачи по теме «Понятие производной функции в точке. Формулы производных»

№1. Найдите производные следующих функций.

а) $y=\left(x^2+x+5\sqrt{x}\right)$;

б) $y=\left(\sin x+5\right)\cdot e^x$;

в) $y=\dfrac{x^2}{2-x^2}$;

г) $y=-8x+\sqrt{x}-3x^2$;

д) $y=\left(x-9\right)\cdot\left(\sqrt{x}+3^x\right)$;

е) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

ж) $y=\sqrt[4]{x^3}-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}+8$;

з) $y=\left(2x+1\right)\left(x^2+3x-1\right)$;

и) $y=\dfrac{x^2+1+x}{1+x^2}$;

к) $y=2\sqrt{x}+5\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-1$;

л) $y=\left(2^x+\ln x\right)\cdot arctgx$;

м) $y=\dfrac{3x-1}{5x+4}$;

н) $y=x^3+\dfrac{5}{x^2}+7\sin x$;

0) $y=\arcsin x\cdot\left(x^3+7x-4\sqrt{x}\right)$

;

п) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3x-x^3}$;

р) $y=4x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{2}{3}}+3x$;

с) $y=\dfrac{x^8+e^x}{7x+\cos x-4}$.

№2.Составте уравнение касательной и нормали к графику функции в точке x_0.

а) $y=\dfrac{x}{x-1}$ $\quad x_0=2$;

б) $y=\sqrt{x}\left(x^2+5\right)$ $\quad x_0=4$;

в) $y=-x^3+9x^2+x-1$ $\quad x_0=-1$.

№3. Точка движется по закону $S=t^2+11t+30$. Найдите значение скорости в момент времени $t_0=3c$.

Задачи по теме «Нахождение производных сложных функций»

№1. Найдите производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+5x+1}$;

2) $y=\lg\left(3x^2+x+4\right)$;

3) $y=\left(\dfrac{1+x}{x^2-x}\right)^2$;

4) $y=\sqrt[3]{6x^2+5x}$;

5) $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$;

6) $y=\sin^3 x$;

7) $y=\sin\left(2x+3x^3\right)$;

8) $y=x^2\cdot e^{x^2+3x}$;

9) $y=\left(3x+5x^2+x^3\right)\cdot 4^{x^2}$

10) $y=\dfrac{5x}{(5-2x)^3}$;

11) $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$;

12) $y=\left(x^2-2\right)\sin x+2x\cos x$;

13) $y=tg^4\left(x^2+1\right)$;

14) $y=\left(x^2-4x+8\right)\cdot e^{\frac{x}{2}}$;

15) $y=e^{x\ln x}$;

21) $y=\ln\dfrac{e^x}{e^x+1}$;

16) $y=\ln\frac{x^3-9}{x^3-1}$;

17) $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$;

18) $y+\ln\sin\frac{2x+4}{X+1}$;

19) $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}$;

20) $y=\arcsin\left(e^{x^2}\right)$;

22) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

23) $y=(x-1)e^x$

24) $y=(tgx-ctgx)^2$

25) $y=\frac{x^2+7x}{e^{2x+4}}$.

Задачи по теме «Дифференциал функции и его нахождение»

№1. Найти дифференциал следующих функций:

1) $y=\frac{x^2+3x-2}{x^2-4}$; 2) $y=\sqrt{\sin x+5^x}+arctg\sqrt{x^2+1}$;

3) $y=\sqrt{4+x^2}$; 4) $y=x^3\cdot\sin\left(x^2+5x\right)$; 5) $y=\cos^2\frac{x}{2}$;

6) $y=\left(2x^3+3x\right)\cdot 8^{x+x^3}$; 7) $y=\sqrt[3]{x^2}+\frac{7}{x^3}+4x^{-2}$;

8) $y=\sqrt{\frac{5+x}{x^3+3x}}$; 9) $y=x^2\cdot 4^{x^3+5}$; 10) $y=\frac{x^3}{(4x+7)^3}$

.

№2. Вычислить приближенное значение функции:

1) $y=x^3-x^2 \quad x=2{,}01$;

2) $f(x)=x^4-1 \quad x=-3{,}3$;

3) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \quad x=1{,}1$.

№3. Вычислите приближенное значение следующих выражений:

1) $\frac{1}{0{,}998}$; 2) $(1{,}02)^7$; 3) $\sqrt[3]{1{,}1}$;

4) $\frac{1}{2{,}001}$; 5) $(9{,}06)^2$; 6) $\sqrt{24{,}84}$;

7) $\frac{1}{10{,}02}$; 8) $(1{,}005)^{10}$; 9) $\sqrt{99{,}5}$;

10) $\frac{1}{1{,}004}$; 11) $(0{,}975)^4$; 12) $\sqrt[10]{1{,}03}$;

13) $\sqrt{101}$; 14) $\sqrt[3]{1{,}012}$; 15) $\frac{1}{(1{,}004)^2}$;

16) $(1{,}005)^{10}$.

Задачи по теме «Наибольшее и наименьшее значение функции а промежутке. Задачи на максимум и минимум»

№1. Найдите наибольшее и наименьшее значение следующих функций на заданных промежутках:

1. $y = 3x^4 + 4x^3 + 1 \quad x \in [-2,1]$;
2. $y = 3x^2 - 4x + 5 \quad x \in [-3,2]$;
3. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 10 \quad x \in [-2,3]$.

№2. Сумма двух положительных чисел равна 5. Каковы эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

№3. Сумма основания и высоты треугольника равна 12 см. Каким должно быть основание треугольника, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

№4. Из шара радиуса R выточить цилиндр наибольшего объема. Найдите размеры этого цилиндра.

№5. Произведение двух положительных чисел равно 16. Чему равны эти числа, если их сумма наименьшая.

№6. Из листа картона 80 х50 см, требуется изготовить коробку открытую сверху наибольшей вместимости. Найти объем коробки.

№7. На какой высоте надо повесить фонарь над центром круглой площадки радиуса 20 см, чтобы площадка была максимально освещена у границы. Ъ

№8. Из всех прямоугольников данного периметра 60 см, найти тот, у которого площадь наибольшая.

Задачи по теме «Исследование функции с помощью производных»

1. Для функции $f(x)=4x^5-6x^3+4x-3$ найдите промежутки возрастания и убывания, а также укажите точки локальных экстремумов.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$ – промежутки возрастания функции; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ – промежутки убывания;

$-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{10}}{5}$ – точки локального максимума; $-\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{2}}{2}$ – точки локального минимума.

2. Для функции $f(x)=(-6-x)e^{x+2}$ найдите промежутки возрастания и убывания, а также укажите точки локальных экстремумов.

Ответ: $(-\infty;-7)$ – промежуток возрастания;

$(-7;+\infty)$ – промежуток убывания;

-7 – точки локального максимума.

3. Для функции $f(x)=\frac{1}{2}x^4-27x^2+2x-7$ найдите промежутки выпуклости, вогнутости, а также укажите точки перегиба.

Ответ: функция вогнута при $x\in(-3;3)$; функция выпукла при $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; $x=-3$, $x=3$ – точки перегиба.

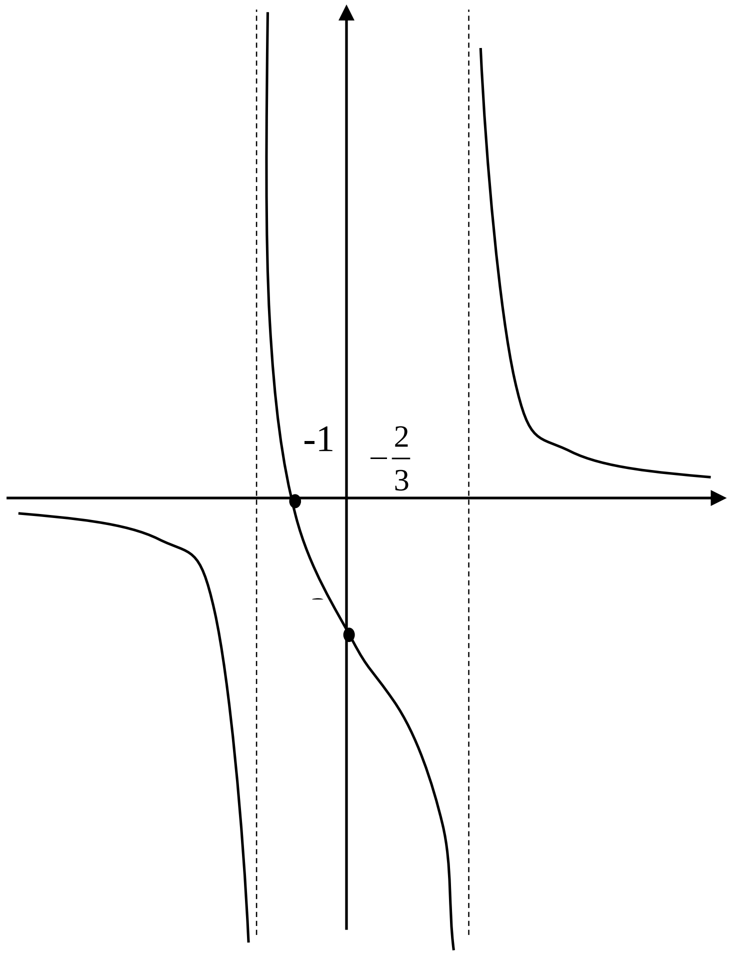
4. Для функции
$f(x)=6x^4+4x^3+8x^2-6x-8$

найдите промежутки выпуклости, вогнутости, а также укажите точки перегиба.

Ответ: функция выпукла при $x \in (-\infty; +\infty)$.

5. Проведите исследование функции
$$f(x) = \frac{6x+4}{(x+1)(x-2)}$$
и постройте эскиз ее графика.

Ответ: Итогом исследования является график функции:



Задачи по теме «Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства»

Вычислить интеграл

1. $\int 3\left(2x^2-1\right)^2 dx$; 2. $\int \frac{u^2-u}{3u}du$; 3. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{x^2}dx$;

4. $\int \left(\frac{3}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}+\frac{4\sqrt[3]{t^2}}{}\right)dt$; 5. $\int (4-3\cos x)dx$; 6. $\int \frac{dx}{1+x^2}$;

7. $\int \frac{3dz}{9+z^2}$; 8. $\int \left(e^x+2x-\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$; 11. $\int \frac{dx}{25+4x^2}$;

12. $\int \left(x^5-4x^3+x-1\right)dx$; 13. $\int 3^x \cdot 2^{2x}dx$; 14. $\int \left(2+\sqrt{x}\right)^2 dx$;

15. $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$; 16. $\int \frac{2x^3+x-1}{x^3}dx$; 17. $\int x\left(x^2-1\right)^3 dx$

;

18. $\int \left(e^{-4x}+\frac{1}{\cos^2 5x}+\sin 6x+7^{2x}\right)dx$; 19. $\int (3+x+\sin x)dx$;

20. $\int \frac{x^8-3x^5-x^2+1}{x^3}dx$; 21. $\int \left(\sqrt[7]{x}+7^x\right)dx$;

22. $\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^{2-x}}dx$; 23. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$;

24. $\int \left(3e^x+5\cos x\right)dx$; 25. $\int ctg^2 x dx$;

26. $\int \left(2\sin x+2^x\right)dx$; 27. $\int \left(2x-3\sqrt{x}\right)dx$;

28. $\int \frac{(3+x)^3 dx}{x}$; 29. $\int x^2(1+2x)dx$; 30. $\int \frac{\left(x\sqrt{x}-3\right)^2}{x^3}dx$.

Задачи по теме «Нахождение неопределенного интеграла методом подстановки»

Вычислите интеграл

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$; 2. $\int e^{2x+1}dx$; 3. $\int (x^2+5)^7 2xdx$;

4. $\int x\sqrt{1+x^2}dx$; 5. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 6. $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$;

7. $\int \cos^5 4x \sin 4xdx$; 8. $\int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}}$; 9. $\int \frac{5xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

10. $\int e^{x^3+x^2-x+1}(3x^2+2x-1)dx$; 11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

12. $\int \frac{(4-\ln x)^2}{x}dx$; 13. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+4}}$; 14. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

15. $\int 2^{x^3} x^2 dx$; 16. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; 17. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$;

18. $\int \cos(x+3)dx$; 19. $\int \sin^3 x \cos xdx$; 20. $\int \sqrt[3]{2x-3}dx$;

21. $\int e^{x^3+7x^2}(3x^2+14x)dx$; 22. $\int \frac{(2x+e^x)dx}{\sqrt{x^2+e^x}}$.

Задачи по теме «Интегрирование по частям»

Вычислите интеграл

1. $\int \arcsin xdx$; 2. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$; 3. $\int x\cos xdx$;

4. $\int e^x \sin x$; 5. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 6. $\int (x-1)\sin xdx$;

7. $\int \ln^2 x dx$; 8. $\int (2x-5)e^{-3x} dx$; 9. $\int (2x-3)\sin\frac{x}{2} dx$

;

10. $\int \sqrt{x}\ln x dx$; 11. $\int \frac{\ln x dx}{(1+x)^2}$; 12. $\int x e^{-2x} dx$;

13. $\int x\cos 2x dx$; 14. $\int arcctg 3x\, dx$; 15. $\int x^2 \ln x dx$;

16. $\int x\sin 2x dx$; 17. $\int (2x-3)e^{3x} dx$; 18. $\int (3x^2+2x-5)\ln|x| dx$;

19. $\int x\, arctg x dx$; 20. $\int x^3 e^x dx$.

Задачи по теме «Определенный интеграл и его свойства»

Вычислить интеграл

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3dx}{\cos^2 x}$; 2. $\int_0^{\pi} (2e^{2x}+3\cos x) dx$; 3. $\int_{-1}^{2} (x^2-3x+7) dx$;

4. $\int_1^2 \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 5. $\int_{-1}^{3} (1-2x+3x^2) dx$; 6. $\int_1^4 \left(2x^2-3x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$;

7. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$; 8. $\int_1^8 \left(4x-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) dx$; 9. $\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x} dx$;

10. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin x+\frac{2}{\cos^2 x}\right) dx$; 11. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^2 x dx$; 12. $\int_{-2}^{3} (4x^3-3x^2+2x+1) dx$;

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx$; 14. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$;

15. $\int_0^1 \frac{e^x x^2 + e^x \cdot x^3 + 4e^x}{e^x} dx$; 16. $\int_0^1 (x^3+2x) dx$;

17. $\int_1^2 (5^x+e^x-2x^3+4) dx$; 18. $\int_1^3 \left(x^3-\frac{7}{x^2}-\frac{2}{x}\right) dx$;

19. $\int_{1}^{e^2} \left(\frac{x^3+7x^2-4x-2}{x^3}\right) dx;$

20. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x} + \int_{-1}^{2} (x^2 + 2x - 1)\, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx;$

Задачи по теме «Нахождение определенного интеграла методом подстановки и по частям»

Вычислите интеграл

I Метод подстановки

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\sin x dx}{(1-\cos x)^2};$ 2. $\int\limits_{1}^{e} \frac{3\ln^2 x dx}{x};$ 3. $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x dx}{e^x - 1};$

4. $\int\limits_{0}^{3} 2x^2\sqrt{9-x^3}dx;$ 5. $\int\limits_{-1}^{2} (x^2-1)^3 xdx;$ 6. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{128xdx}{(x^2+1)^5};$

7. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} 6\sqrt{x^4+16}x^3 dx;$ 8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}};$ 9. $\int\limits_{2}^{4} \frac{15xdx}{(x^2-1)^3};$

10. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx;$ 11. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x+6};$ 12. $\int\limits_{0}^{1} \frac{bx^2 dx}{1+2x^3};$

13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3-\cos x};$ 14. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^x+5};$ 15. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)dx;$

16. $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2};$ 17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{2\sqrt{1-x^2}};$ 18. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2xdx;$

19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2};$ 20. $\int\limits_{-12}^{-1} \sqrt{4-5x}dx;$ 21. $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{x^2+6x+8};$

22. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$; 23. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}$; 24. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x\, dx$;

25. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$; 26. $\int\limits_{1}^{2} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$; 27. $\int\limits_{\frac{4}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$;

28. $\int\limits_{0}^{1} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx$; 29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^5 2x \cos 2x dx$; 30. $\int\limits_{1}^{2} \left(x^2 + 5x\right)^3 \cdot (2x+5) dx$

.

II Метод интегрирования по частям

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$; 2. $\int\limits_{0}^{\pi} e^x \sin x dx$; 3. $\int\limits_{0}^{1} x e^{-x} dx$;

4. $\int\limits_{0}^{1} x\, arctgx\, dx$; 5. $\int\limits_{2}^{3} x^2 \ln x dx$; 6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$;

7. $\int\limits_{1}^{e} (\ln x)^2 dx$; 8. $\int\limits_{0}^{1} 3e^{x^3} x^2 dx$; 9. $\int\limits_{0}^{2} (3-2x) e^{-3x} dx$;

10. $\int\limits_{1}^{e} x^2 \ln x dx$; 11. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 12. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x dx$;

13. $\int\limits_{0}^{1} (x+2) e^x dx$; 14. $\int\limits_{1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} arctgx dx$; 15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (x+3) \cos x dx$.

Задачи по теме «Перестановки, размещения, сочетания без повторений»

1. В группе 30 студентов. Необходимо избрать старосту, профорга и ответственного за дежурство. Сколькими способами можно образовать эту тройку, если одно лицо может занимать только один пост? (Ответ 24360)
2. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется? (Ответ: 120)
3. Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости, больше числа очков, появившихся на черной? (Ответ 15)
4. Сколько разных стартовых шестерок можно образовать из числа 10 волейболистов? (Ответ 210)
5. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей? (Ответ 36).

ЗАЧЕТНЫЕ И РЕЙТИНГОВЫЕ РАБОТЫ

Зачетная работа по теме «Линейная алгебра»

Вариант 1

Задание 1. Даны матрицы A и B : $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & -5 \\ -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$.

Вычислить $A \cdot B$.

Ответ. $AB = \begin{pmatrix} -9 & 65 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: -78.

Задание 3. Для данной матрицы A найдите обратную матрицу,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -3 & -9 & 5 \\ 4 & 11 & -6 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Ответ: $[x_1 = 7, x_2 = 9, x_3 = 2]$.

Задание 5. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Ответ: ранг = 3,

если $\begin{cases} x_1 = 5 - x_4 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_4 + \frac{20}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3}x_4 + \frac{13}{3} \end{cases}$ то $\left(5, \frac{20}{3}, \frac{13}{3}, 0\right)$,

если $\begin{cases} x_1 = 18 - 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 2 \\ x_4 = 3x_3 - 13 \end{cases}$ то $(18, -2, 0, -13)$,

если $\begin{cases} x_1 = 15 - \frac{3}{2}x_2 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_2 + 1 \\ x_4 = \frac{3}{2}x_2 - 10 \end{cases}$ то $(15, 0, 1, -10)$,

если $\begin{cases} x_2 = 10 - \frac{2}{3}x_1 \\ x_3 = 6 - \frac{1}{3}x_1 \\ x_4 = 5 - x_1 \end{cases}$ то $(0, 10, 6, 5)$.

Вариант 2

Линейная алгебра:

1. Даны матрицы A и B : $A=\begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 4 & 0 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $A \cdot B$.

Ответ. $AB=\begin{pmatrix} 63 & 18 & 27 \\ 32 & 20 & -4 \\ -69 & -55 & 28 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 80.

3. Для данной матрицы найдите обратную матрицу. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} .$$

Ответ: $[x_1 = 5, x_2 = 6, x_3 = -2]$.

5. Найдите общее и базисное решение системы линейных уравнений методом Гаусса (с указанием ранга матрицы системы).

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3-2x_4=-2 \\ \quad 5x_2+7x_3-4x_4=4 \\ x_1+8x_2+11x_3-6x_4=2 \\ -x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \end{cases}$$

Ответ: ранг = 2,

если $\begin{cases} x_1=\frac{1}{5}x_3-\frac{2}{5}x_4-\frac{22}{5} \\ x_2=\frac{4}{5}x_4-\frac{7}{5}x_3+\frac{4}{5} \end{cases}$, то $\left(-\frac{22}{5},\frac{4}{5},0,0\right)$,

если $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{7}x_2-\frac{2}{7}x_4-\frac{30}{7} \\ x_3=\frac{4}{7}x_4-\frac{5}{7}x_2+\frac{4}{7} \end{cases}$, то $\left(-\frac{30}{7},0,\frac{4}{7},0\right)$,

если $\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-4 \\ x_4=\frac{5}{4}x_2+\frac{7}{4}x_3-1 \end{cases}$, то $\left(-4,0,0,-1\right)$,

если $\begin{cases} x_2=-7x_1-2x_4-30 \\ x_3=5x_1+2x_4+22 \end{cases}$, то $\left(0,-30,22,0\right)$,

если $\begin{cases} x_2=-2x_1-x_3-8 \\ x_4=\frac{1}{2}x_3-\frac{5}{2}x_1-11 \end{cases}$, то $\left(0,-8,0,-11\right)$,

если $\begin{cases} x_3=-2x_1-x_2-8 \\ x_4=-\frac{7}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-15 \end{cases}$, то $\left(0,0,-8,-15\right)$.

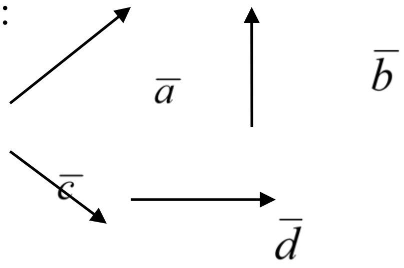
6. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ответ. $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3\text{-}\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+5,\ \ \lambda_1=5,\ e_1=(2c,c),\ \ \lambda_2=1,\ e_2=(-2c,c)$.

Зачетная работа

по теме «Вектор. Действия над векторами»

1. Дано:



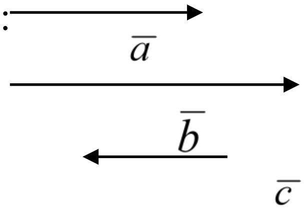
Найти:

$\overline{a}+\overline{b}+\overline{d}$;

$2\overline{a}-\overline{b}-\overline{d}$;

$2\overline{c}-2\overline{b}+\overline{d}$.

2. .Дано:



Найти:

$\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$;

$2\overline{a}-\overline{b}+3\overline{c}$;

$\overline{a}-\overline{b}-2\overline{c}$

3. Дано: $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{k}$;

$\overline{b}=3\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}$;

$\overline{c}(0,-3,5)$

Найти:

1. длину вектора $2\overline{a}-3\overline{c}+\overline{b}$;
2. координаты вектора $\overline{a}-2\overline{c}+2\overline{b}$;
3. скалярное произведение векторов $(\overline{a}-\overline{b})\cdot 2\overline{c}$.

Зачетная работа

по теме «Предел функции»

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}$;

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{3-\sqrt{2x-1}}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot ctg5x$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2}{5}x\right)^{\frac{10}{3x}}$.

Зачетная работа по теме

«Дифференциальное исчисление»

№1. Проволокой длиной 100 м нужно оградить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Установить размеры площадки.

№2. Вычислить:

$(2{,}01)^4$; $\quad \dfrac{1}{99}$; $\quad \sqrt{24{,}99}$.

№3. Найдите дифференциал следующих функций:

$y = \dfrac{x^3}{4x^2 - 7}$; $\quad y = \sqrt{\sin x + 5}$; $\quad y = (2x + \log_3 x) \cdot 4^{x^2+2}$

Зачетная работа по теме

«Определенный и неопределенный интеграл»

Вычислите интегралы

1. $\int \left(x^3 + 7^x - \frac{2x+5}{x}\right) dx;$

2. $\int xe^{2x^2+5} dx;$

3. $\int (x+3)\cos 2x dx;$

4. $\int_2^5 \left(x^2 + \frac{5}{x^3} - 7x - \log_4 x\right) dx;$

5. $\int_1^e \frac{(\ln x)^4}{x} dx;$

6. $\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos x dx.$

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Практическая работа № 1

Решение задач на расчёт количества выборок

Вариант 1

1.Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

2.Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

3.Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{P_4}$

4.Вычислить A_8^4; C_{10}^4

5.Скольким способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?

6.Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так,чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

7.Решить уравнение $C_x^6 = 210$

Вариант 2

1.Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

2.Упростить $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

3.Вычислить $\frac{P_4 + P_6}{P_3}$

4.Вычислить A_{13}^5; C_8^4

5.Скольким способами можно расставить на полке 6 книг?

6.Сколько флажков 3 разных цветов можно составить из 5 флажков разного цвета?

7.Решить уравнение $C_x^2 = 153$

Вариант 3

1.Вычислить $\frac{5!}{3!+4!}$

2.Упростить $\frac{n!}{(n-2)!}$

3.Вычислить $\frac{P_{20}}{P_4 \cdot P_{16}}$

4.Вычислить A_{25}^2; C_{36}^5

5.Сколькими способами собрание, состоящее из 18 человек, может выбрать из своего состава председателя собрания и секретаря?

6. Сколькими способами можно выбрать 3х дежурных, если в классе 30 человек?

7.Решить уравнение $C_{x-2}^2 = 21$

Вариант 4

1.Вычислить $\frac{7!+5!}{6!}$

2.Упростить $\frac{1}{(n-1)!}$

3.Вычислить $\frac{P_6 - P_5}{5!}$

4.Вычислить A_{13}^5; C_{10}^8

5.Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

6. Сколько вариантов распределения 3х путевок в санаторий различного профиля можно составить для 5 претендентов?

7.Решить уравнение $A_x^3 = \frac{1}{20} A_x^4$

Практическая работа № 2

Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Вариант 1

1. При бросании игральной кости вычислить вероятность события «Выпало 2 очка».

2. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубка написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вытянутых по одному и расположенных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

3. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

4. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

5. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашены.

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в квадрат.

Вариант 2

1. При бросании монеты вычислить вероятность выпадения «решки».

2. Пять различных книг расставлены наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов, найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

4.При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

5. В конверте среди 100 фотокарточек находится одна розыскиваемая. Из конверта наудачу извлекают 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг.

Вариант 3

1. При бросании игральной кости вычислить вероятность выпадения четного числа очков.

2. В корзине находятся 20 красных, 15 зеленых шаров. Найти вероятность того, что из 4 выбранных наудачу шаров будет 3 зеленых.

3. На каждой из шести карточек написаны буквы А, Б, И, Р, Ж. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Найти вероятность того, что получится слово «Биржа».

4. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

5. В партии из ста банок консервов 12 бракованных. Найти вероятность того, что три взятые банки консервов окажутся бракованными.

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в квадрат.

Вариант 4

1. При бросании игральной кости вычислить вероятность выпадения нечетного числа очков.

2. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажется одно окрашенное изделие.

3. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.

4. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления стандартных деталей.

5. В канцелярии народного суда находится 26 дел, среди которых 17 уголовных. Наудачу для проверки документации извлекается 5 дел. Найти вероятность того, что взятые наудачу дела окажутся не уголовными.

6. В окружность вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что эта точка попадает в круг.

Практическая работа № 3

Вычисление вероятностей сложных событий

Вариант 1

1.В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого-0,1,второго-0,15, третьего-0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

2.Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

3. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берёт наудачу

3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

4.Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого -0.7, второго-0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

5.Отдел технического контроля проверяет на стандартность по двум параметрам серию изделий. Было установлено, что у 8 из 25 изделий не выдержан только первый параметр, у 6 изделий -только второй, а у 3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берется одно из изделий. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

6.От здания аэровокзала к трапам самолётов отправились два автобуса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса к трапам равна 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы один из автобусов прибудет вовремя.

Вариант 2

1.В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо один от другого. Вероятности отказов первого-0,1, второго-0,15, третьего-0,2. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

2.Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.

3. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берёт наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплёте.

4.Два спортсмена независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первого -0.7, второго-0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

5.Отдел технического контроля проверяет на стандартность по двум параметрам серию изделий. Было установлено, что у 8 из 25 изделий не выдержан только первый параметр, у 6 изделий -только второй, а у

3 изделий не выдержаны оба параметра. Наудачу берется одно из изделий. Какова вероятность того, что оно не удовлетворяет стандарту?

6.От здания аэровокзала к трапам самолётов отправились два автобуса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса к трапам равна 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы один из автобусов прибудет вовремя.

Практическая работа № 4

Вычисление вероятностей в схеме Бернулли

1. Вероятность работы автомата в некоторый момент времени равна p. Имеется n независимых работающих автоматов.

Найти вероятность того, что:
а) в данный момент работает ровно m автоматов
б) не работают все автоматы
в) работают все автоматы
г) работает более m автоматов
д) работает менее m автоматов
е) работает не менее m автоматов

№ п/п	**p**	**n**	**m**
1.	0,55	7	4
2.	0,62	6	2
3.	0,7	8	5
4.	0,8	5	3
5.	0,45	10	6
6.	0,1	7	3
7.	0,05	5	2
8.	0,2	6	4
9.	0,07	8	3
10.	0,08	4	2
11.	0,45	5	2
12.	0,52	6	3
13.	0,57	4	2
14.	0,48	7	4

15.	0,5	8	3
16.	0,2	8	3
17.	0,4	6	4
18.	0,67	6	2
19.	0,9	8	5
20.	0,72	9	6
21.	0,3	9	4
22.	0,4	10	5
23.	0,5	11	6
24.	0,6	12	7
25.	0,8	10	8
26.	0,7	9	7
27.	0,6	8	6
28.	0,5	7	5
29.	0,3	7	4
30.	0,5	5	2

2. На конвейер за смену поступает n изделий. Вероятность того, что поступившая на конвейер деталь стандартна равна p. Найти вероятность того, что стандартных деталей на конвейер за смену поступило ровно m.

№ п/п	**n**	**P**	**m**
1.	300	0,75	240
2.	400	0,8	330
3.	625	0,8	510
4.	150	0,6	75
5.	100	0,9	96
6.	192	0,75	150
7.	600	0,6	375
8.	400	0,9	372
9.	144	0,8	120
10.	100	0,85	92
11.	220	0,55	140
12.	350	0,6	260
13.	300	0,9	280
14.	500	0,75	390
15.	250	0,65	190

16.	180	0,72	140
17.	420	0,83	380
18.	250	0,67	210
19.	600	0,84	570
20.	200	0,67	150
21.	1100	0,31	371
22.	1000	0,12	145
23.	900	0,43	427
24.	800	0,74	602
25.	700	0,23	185
26.	600	0,60	390
27.	500	0,27	156
28.	400	0,45	173
29.	300	0,58	209
30.	200	0,32	82

Практическая работа № 5

Составление ряда распределения дискретной случайной величины

Вариант 1

1. Игральная кость брошена 3 раза Написать закон распределения числа появления шестерки.
2. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, описанной в задаче первой.
3. Прядильщица обслуживает 1000 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004.Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдёт на пяти веретенах.
4. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный вопрос, равна 0.4. Составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту.
5. В магазин привезли 20 коробок с обувью, причем в 7-ми из них

обувь белого цвета. Наудачу отобрали 3 коробки. Написать закон распределения дискретной случайной величины Х- числа коробок с обувью белого цвета среди отобранных.

Вариант 2

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле 0,4. Написать закон распределения случайной величины Х - числа попаданий в цель при семи выстрелах.

2. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины Х, описанной в задаче первой.

3. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001.Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.

4. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется составить закон распределения случайной дискретной величины Х - числа дополнительных вопросов , которые задаст преподаватель студенту.

5. В партии из 24 изделий шесть - дефектных. Произвольным образом выбрали пять изделий. Написать закон распределения дискретной случайной величины Х- числа дефектных изделий из избранных.

Вариант 3

1. Электронный блок состоит из шести независимо работающих элементов, вероятность отказа которых равна 0,12. Составить закон распределения случайной величины Х - числа отказов элементов блока.

2. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины Х, описанной в задаче первой.

3. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение некоторого времени равна 0,002. Найти вероятность того, что за указанное время откажут три элемента.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнется Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

5. В корзине пять белых и три черных шара. Наудачу извлекают четыре шара. Составить закон распределения случайной величины X - числа белых шаров среди выбранных. Найти числовые характеристики полученной случайной величины.

Вариант 4

1. Вероятность того, что в библиотеке необходима студенту книга свободна, равна 0,4. Составить закон распределения библиотек, которые просит студент, если в городе пять библиотек. Построить функцию распределения случайной величины и найти ее числовые характеристики.

2. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X, описанной в задаче первой.

3. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок ровно две.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдают патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется составить закон распределения дискретной случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

5. Монета подбрасывается восемь раз. Составить закон распределения случайной величины X - числа появлений герба.

Практическая работа № 6

Вычисление характеристик ДСВ; вычисление (с помощью свойств) характеристик функций от ДСВ

Вариант 1

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	1	4	7	12
p	0,08	0,35	0,22	0,35

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z,. если известны математические ожидания X и Y:
   Z=3X+2Y+8 M(X)=3 M(Y)=4
3. В комнате установлены 4 независимо работающих светильника. Вероятность перегорания лампочки при включении 0,2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X- числа перегоревших лампочек при одном одновременном включении светильников.
4. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	2	3	5
p	0,6	0,2	0,1	0,1

Y	4	7	8
p	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание суммы X+Y двумя способами:
а) составив законы распределения X+Y; б) пользуясь свойством 4.

5. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	2	3	5
p	0,6	0,2	0,1	0,1

Y	4	7	8
p	0,3	0,2	0,5

Найти математическое ожидание произведение X*У двумя способами:
а) составив законы распределения X*Y; б) пользуясь свойством 3.

6. *Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X)=2,3$; $M(X^2)=5,9$. Найти вероятности соответствующие возможным значениям X.

Вариант 2

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	3	5	8	11
p	0,16	0,18	0,51	0,15

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z,. если известны математические ожидания X и Y: Z=7X+4Y+3
M(X)=4 M(Y)=5
3. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных .Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X-числа нестандартных деталей среди отобранных.

4. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	3	7	9
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Y	2	4	5
p	0,7	0,1	0,2

Найти математическое ожидание суммы X+Y двумя способами:
а)составив законы распределения X+Y; б) пользуясь свойством 4
5. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	1	3	7	9
p	0,3	0,1	0,2	0,4

Y	2	4	5
p	0,7	0,1	0,2

Найти математическое ожидание произведение X*Y двумя способами: а) составив законы распределения X*Y; б) пользуясь свойством 3.
6. *Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: M(X)=2,3 ; $M(X^2)=5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

Вариант 3

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

X	0,21	0,54	0,61	0,73
p	0,1	0,3	0,4	0,2

2. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z,. если известны математические ожидания X и Y:
Z=2X+3Y+6 M(X)=2 M(Y)=6
3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X-числа не окрашенных деталей, среди 3 извлеченных.
4. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	2	4	6	8
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Y	3	5	7
p	0,6	0,3	0,1

Найти математическое ожидание суммы X+Y двумя способами: а) составив законы распределения X+Y; б) пользуясь свойством 4.
5. Дискретные независимые случайные величины заданны законами распределения:

X	2	4	6	8
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Y	3	5	7
p	0,6	0,3	0,1

Найти математическое ожидание произведение X*Y двумя способами: а) составив законы распределения X*Y; б) пользуясь свойством 3.

6. *Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: M(X)=2,3 ; $M(X^2)=5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

Практическая работа № 7

Решение задач на формулу геометрического определения вероятности (для одномерного случая, для двумерного случая, для простейших функций от двух независимых равномерно распределённых величин)

Вариант 1

1. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти вероятность того, что в результате испытаний x примет значение, заключенное в интервале (2,3).

$$F(x)=\begin{cases}0, при x\le 2\\ x/5+1/3, при 2\le x\le 4\\ 1, при x>4\end{cases}$$

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить график функций этой величины.

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

3. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=0. Найти дисперсию величины x.

4. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение этой величины соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенной в интервале (15, 25).

5. Случайная величина распределена нормально. Среднее квадратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Вариант 2

1. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найти вероятность того, что в результате испытаний x примет значение, заключенное в интервале (0,1).

$$F(x) = \begin{cases} 0, при x \le 2 \\ x/6 + 1/6, при 2 < x \le 3 \\ 1, при x > 3 \end{cases}$$

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Построить график функций этой величины.

X	-1	2	4	8
p	0,1	0,4	0,1	0,4

3. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=0. Найти дисперсию величины x.

$$F(x) = \begin{cases} 0, при x \le 0 \\ x^2 + 1, при 0 < x \le 1 \\ 1, при x > 3 \end{cases}$$

4. Случайная величина X распределена нормально с параметрами a=8,5 и σ=1,6. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенной в интервале (7,3; 10,9).

5. Ошибка измерителя частоты подчинена нормальному распределению с параметрами a=5 Гц, σ=10 Гц. Найти вероятность того, что измеренное значение частоты отличается от истинного не более, чем на 20 Гц.

Практическая работа № 8

Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности и интегральной функции распределения

Вариант 1

1. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=2x в интервале (0,1); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.
2. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=cosx в интервале (0;π/2); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y=\phi(X)=X^2$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Вариант 2

1. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)= $1/(\Pi\sqrt{c^2-x^2})$ в интервале (-c,c); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание величины X.
2. Случайная величина X задана плотностью распределения f(x)=x+0,5 в интервале (0;1); вне этого интервала f(x)=0. Найти математическое ожидание функции $Y= X^3$ (не находя предварительно плотности распределения Y).

Практическая работа № 9

Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчёт по заданной выборке её числовых характеристик. Выполнение интервального оценивания математического ожидания нормального распределения; интервального оценивания вероятности события

Вариант 1

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	3	5	8	13	15	18
n_i	4	6	7	14	10	9

Найти распределение относительных частот

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	7	9	12	15	17	20
n_i	10	12	18	30	10	20

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	3	5	8	13	15	18
n_i	4	6	7	14	10	9

4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	7	9	12	15	17	20
n_i	10	12	18	30	10	20

5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
3-5	16
5-7	6
7-9	14
9-11	24
11-13	20
13-15	8
15-17	12

6. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению ыборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
10-15	16
15-20	6
20-25	14
25-30	24
30-35	20
35-40	8
40-45	12

Вариант 2

1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	6	8	10	14	17	21
n_i	10	15	30	10	10	25

Найти распределение относительных частот

2. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	4	7	8	12	18	22
n_i	6	2	4	10	16	12

3. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	6	8	10	14	17	21
n_i	10	15	30	10	10	25

4. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	4	7	8	12	18	22
n_i	6	2	4	10	16	12

5. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
10-15	14
15-20	8
20-25	16
25-30	40
30-35	10
35-40	6
40-45	12

6. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Частичный интервал X_i-X_{i+1}	Сумма частот вариант интервала n_i
3-5	4
5-7	6
7-9	20
9-11	40
11-13	20
13-15	4
15-17	6

Практическая работа № 10

Проведение регрессионного анализа по статистическим данным с использованием табличного процессора Excel. Проведение дисперсионного анализа с использованием табличного процессора Excel

Вариант 1

31. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания *a* нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma=5$, выборочная средняя $x_в=14$ и объем выборки $n=25$

32. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n=10$:

Варианта x_i	-2	1	2	3	4	5
Частота n_i	2	1	2	2	2	1

Оценить с надежностью 0,95 математическое ожидание *a* нормально распределенного признака генеральной совокупности по выборочной средней при помощи доверительного интервала.

Вариант 2

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,99 неизвестного математического ожидания *a* нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение σ, выборочная средняя $x_в$ и объем выборки n: а) $\sigma=4$, $x_в=10,2$, $n=16$; б) $\sigma=5$, $x_в=16,8$, $n=25$

2. По данным девяти независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены среднее арифметическое результатов измерений $x_в=30,1$ и «исправленное» среднее квадратическое отклонение $s=6$. Оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала с

надежностью γ=0,99. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

Практическая работа № 11

Решение задач различных типов на моделирование случайных величин

Вариант 1

1. Разыграть восемь возможных значений ДСВ, закон распределения которой:

x	3	8	12	23
p	0,2	0,12	0,43	0,23

2. Заданы вероятности трех событий А1, А2, А3, образующих полную группу событий: $p_1=p(A_1)=0,2$ $p_2=p(A_2)=0,31$ $p_3=p(A_3)=0,47$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.
3. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,52.
4. Разыграть 4 возможных значения НСВ, распределенной равномерно в интервале (6;14)

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

5. События А и В независимы и совместны. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых p(A)=0,5; p(B)=0,8

Вариант 2

1. Разыграть шесть возможных значений ДСВ, закон распределения которой:

x	2	4	13	15
p	0,15	0,25	0,2	0,4

2. Заданы вероятности трех событий A1, A2, A3, образующих полную группу событий: $p_1=p(A_1)=0,2$ $p_2=p(A_2)=0,32$ $p_3=p(A_3)=0,48$. Разыграть шесть испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

3. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,48.

4. Разыграть 4 возможных значения НСВ, распределенной равномерно в интервале (4;14)

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$$

5. События А и В независимы и совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых p(A)=0,4; p(B)=0,6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассматриваются теоретические и практические вопросы линейной алгебры и теории матриц, аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики. Задания книги направлены на активную умственную деятельность будущего специалиста в области права и организации социального обеспечения, приучение его к математической культуре и технике выполнения практических заданий.

Выпускник специальности среднего профессионального образования социально-экономического профиля «Право и организация социального обеспечения», вооружённый теоретическими знаниями разделов математики, владеющий умениями выстраивать шаги действий при выполнении задачи, анализировать и оптимизировать процесс получения результата, интерпретировать его содержание на языке цифровых инструментов, уже является подготовленным к реализации своего богатого практического навыка в разрешении повседневных жизненных ситуаций. Именно такой специалист нужен современной юридической и социальной системам, и его квалификация соответствует требованиям ФГОС СПО, предъявляемым к специалистам в области права и организации социального обеспечения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб.заведений/ Н.В. Богомолов.-11-е изд., стер. — Москва.: Издательство Юрайт, 2022
2. Высшая математика : учебник и практикум для СПО / под общ. ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — М. : Издательство Юрайт, 2016.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для СПО. - М.: Издательство Юрайт, 2016.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике учебное пособие для вузов. — Москва : Издательство Юрайт, 2020.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

Дополнительная литература

1. Математика в примерах и задачах. Часть 1 : учебное пособие / Л.И. Майсеня [и др.].. — Минск : Вышэйшая школа, 2014
2. . Математика в примерах и задачах. Часть 2 : учебное пособие / Л.И. Майсеня [и др.].. — Минск : Вышэйшая школа, 2014.
3. . Информатика и математика для юристов : учебник для студентов вузов, обучающихся по юридическим специальностям / С.Я. Казанцев [и др.].. — Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2017
4. Карбачинская Н.Б. Математика : практикум для среднего профессионального образования / Карбачинская Н.Б., Харитонова Е.Е.. — Москва : Российский государственный университет правосудия, 2019

Интернет-ресурсы

1. http://library.vlsu.ru/ - Научная библиотека ВлГУ.
2. http://www.iprbookshop.ru/ - ЭБС IPR BOOKS
3. http://aclient.integrum.ru/ - ЭБС eLIBRARY.RU

5. http://www.znanium.com/ - ЭБС znanium.com

ГЛОССАРИЙ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Алгебра– раздел математики, изучающий операции над элементами множеств произвольной природы, обобщающие обычные операции сложения и умножения чисел.

Верхне-треугольная матрица – квадратная матрица, у которой элементы, стоящие ниже главной диагонали, суть нули.

Вырожденная матрица – матрица, определитель которой равен нулю.

Главная диагональ матрицы – элементы матрицы, у которых номер строки совпадает с номером столбца.

Диагональная матрица – матрица, являющаяся одновременно и нижне- и верхне-треугольной.

Единичная матрица – квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, а прочие элементы суть нули.

Квадратная матрица – матрица, у которой число строк и столбцов совпадает.

Комплексное число – число, представляющее собой сумму действительного числа и произведения мнимой единицы на другое действительное число.

Линейная комбинация векторов – вектор, представляющий собой сумму произведений каждого из исходных векторов на некоторое число.

Линейно зависимая система векторов – совокупность векторов, в которой хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов системы.

Линейно независимая система векторов – совокупность векторов, ни один из которых не является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Линейное векторное пространство – совокупность векторов одного размера, для которых введены операции сложения векторов и умножения векторов на число при условии выполнения некоторых аксиом.

Матрица – прямоугольная таблица чисел.

Матрица СЛАУ – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, входящих в уравнения СЛАУ.

Матрица-столбец – матрица, состоящая из одного столбца.

Матрица-строка – матрица, состоящая из одной строки.

Матричное уравнение – уравнение, в котором в качестве неизвестного фигурирует матрица.

Минор элемента матрицы – определитель матрицы, полученной из исходной матрицы вычеркиванием строки и столбца, содержащих указанный элемент.

Мнимая единица – число, квадрат которого равен минус единице.

Невырожденная матрица – матрица, определитель которой отличен от нуля.

Неоднородная система линейных алгебраических уравнений- СЛАУ, у которой хотя бы один из свободных членов не равен нулю.

Неопределённая СЛАУ – СЛАУ, имеющая неединственное решение.

Несовместная СЛАУ – то же, что и неразрешимая СЛАУ.

Неразрешимая СЛАУ –СЛАУ, не имеющая решений.

Нижне-треугольная матрица – квадратная матрица, у которой элементы, стоящие выше главной диагонали, суть нули.

Нуль-матрица – матрица, все элементы которой суть нули.

Обратимая матрица – матрица, у которой существует обратная матрица.

Обратная матрица для некоторой матрицы – матрица, которая при перемножении с исходной матрицей дает единичную матрицу.

Общее решение СЛАУ – совокупность всех решений системы.

Однородная система линейных алгебраических уравнений - СЛАУ, у которой все свободные члены суть нули.

Определённая СЛАУ – СЛАУ, имеющая единственное решение.

Определитель матрицы – сумма произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца со знаком плюс или минус.

Ортогональные векторы – векторы, скалярное произведение которых равно нулю.

Приведённая матрица – матрица, у которой в каждой ненулевой строке существует хотя бы один ненулевой элемент, в столбце которого все элементы суть нули.

Приведённая СЛАУ – СЛАУ, у которой матрица системы приведенная.

Присоединённая матрица – матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов транспонированной исходной матрицы.

Равносильные СЛАУ – системы, у которых общие решения совпадают.

Размерность линейного векторного пространства - число, равное количеству компонент рассматриваемых векторов.

Разрешимая СЛАУ– СЛАУ**,**имеющая хотя бы одно решение.

Ранг матрицы – максимальное число линейно независимых строк матрицы.

Расширенная матрица СЛАУ – матрица СЛАУ, к которой добавлен столбец свободных членов уравнений системы.

Решение СЛАУ – набор значений неизвестных системы, обращающий все уравнения системы в числовые равенства.

Симметричная матрица – матрица, совпадающая со своей транспонированной.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) – совокупность нескольких линейных алгебраических уравнений относительно одного набора неизвестных.

Скалярное произведение двух векторов – сумма произведений соответствующих координат этих векторов.

Собственный вектор матрицы – ненулевой вектор, который под действием матрицы переходит в вектор, коллинеарный самому себе.

Собственное значение матрицы – коэффициент пропорциональности между собственным вектором матрицы и произведением матрицы и этого собственного вектора.

Совместная СЛАУ – то же, что и разрешимая СЛАУ.

Транспонированная матрица – матрица, в которой по отношению к исходной матрице строки и столбцы поменяны местами.

Элементарные преобразования матриц – три следующие преобразования строк матрицы:

1) перемена местами двух строк матрицы;

2) умножение строки матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке матрицы другой строки, умноженной на произвольное число.

Элементарные преобразования СЛАУ – три следующие преобразования уравнений системы:

1) перемена местами двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей одного из уравнений системы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на произвольное число.

Математический анализ

ГЛОССАРИЙ

Аксиома – утверждение, содержащееся в формулировках основных свойств простейших фигур, которое не доказывается.

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды.

Аргументы функции – величины из некоторого множества элементов (называемого областью определения функции), которые являются исходными данными для функции и которым соответствуют значения функции.

Арифметический корень n-й степени из числа а – неотрицательное число, n-я степень которого равна а.

Арккосинус числа а – такое число из отрезка, косинус которого равен а.

Арккотангенс числа а – такое число из интервала, котангенс которого равен а.

Арксинус числа а – такое число из отрезка, синус которого равен а.

Арктангенс числа а – такое число из интервала, тангенс которого равен а.

Боковая поверхность призмы (площадь боковой поверхности) – сумма площадей боковых граней.

Вектор – математическая абстракция объектов, характеризующихся величиной и направлением (это направленный отрезок).

Высказывание – это языковое образование, в отношении которого имеет смысл говорить о его истинности или ложности.

Высота конуса – перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

Геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур.

График функции f – множество всех точек (x; y) координатной плоскости, где $y = f(x)$, а x «пробегает» всю область определения функции f.

Графический метод – метод решения задачи линейного программирования, заданной на плоскости, т.е. содержащей только две переменные.

Двухгранный угол – фигура, образованная двумя плоскостями с общей ограничивающей их прямой.

Десятичный логарифм – логарифм по основанию 10:

$\lg x = \log_{10} x$.

Диаметр шара – отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара. Концы любого диаметра называются диаметрально противоположными точками шара.

Диаметральная плоскость – плоскость, проходящая через центр шара. Сечение шара диаметральной плоскостью называется большим кругом, а сечение сферы – большой окружностью.

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и их применения к исследованию функций.

Доказательство в логике и математике - цепь правильных умозаключений, ведущих от истинных посылок к доказываемым тезисам.

Достаточное условие – условие, достаточное для того, чтобы данное условие соблюдалось. Однако возможны и другие варианты, которые не входят в утверждение, но для которых верно достаточное условие.

Достоверное событие – событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Единичная окружность – окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

Закономерность – устойчивая связь между измеряемыми параметрами, полученная в результате проведения эксперимента (опыта). Закономерности могут быть достоверными и случайными закономерностями.

Замкнутая область – область вместе с её границей.

Значение функции f в точке x – число y, соответствующее числу x.

Иррациональные уравнения – уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная.

Испытание – наблюдение явления, опыт, эксперимент, которые можно провести многократно.

Исход – событие, результат некоторого испытания, не разложимы на другие составные части (результаты) этих испытаний. На основе понятия элементарного исхода построена формула умозрительного подсчета вероятностей.

Касательная плоскость к конусу – плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Квадратный корень – корень второй степени.

Комбинаторика – раздел математики, изучающий дискретные объекты, множества (сочетания, перестановки, размещения и перечисление элементов) и отношения на них (например, частичного порядка).

Конус (круговой конус) – тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – вершины конуса и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются образующими конуса.

Координаты вектора с началом в точке A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ и концом в точке A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ – это числа $(x_2 – x_1, y_2 – y_1, z_2 – z_1)$.

Корень n-й степени из числа a – такое число, n-я степень которого равна a.

Куб – прямоугольный параллелепипед, у которого все рѐбра равны.

Кубический корень – корень третьей степени.

Линейные размеры (измерения) прямоугольного параллелепипеда – длины его непараллельных рёбер.

Логарифм числа b по основанию a – показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.

Логарифмическая функция с основанием a – функция, заданная формулой $y = \log_a x$.

Математическая модель – формальная схема реального объекта (процесса, проблемы), составленная с помощью математических обозначений, символов и соотношений.

Многогранник – такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник, вписанный в шар – многогранник, все вершины которого лежат на поверхности шара. Многогранник называется описанным около шара, если все его грани касаются поверхности шара.

Множество – совокупность элементов (предметов, физических объектов и т.п.), объединенных в единое целое по имеющимся у них свойствам (цвет, размер, и т.п.).

Наклонная, проведѐнная из данной точки к данной плоскости, – любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием наклонной. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется проекцией наклонной.

Натуральный логарифм – логарифм по основанию e: $\ln x = \log_e x$.

Необходимое условие – условие, без которого данное утверждение несостоятельно. Однако могут существовать и другие варианты, для которых необходимое условие соблюдается.

Нечѐтная функция – функция f, если для любого x из еѐ области определения f (–x) = – f (x).

Обратимая функция – функция, принимающая каждое свое значение в единственной точке области определения.

Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых – отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Объединение множеств А и В – множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств А или В.

Объем (для простых тел) – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.

2. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Окрестность точки а – любой интервал, содержащий эту точку.

Осевое сечение цилиндра – сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось.

Ось правильной пирамиды – прямая, содержащая еѐ высоту.

Ось цилиндра – прямая, проходящая через центры оснований.

Отрезок – часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными еѐ точками.

Параллелепипед – призма, основание которой параллелограмм.

Параллельные плоскости – плоскости, которые не пересекаются.

Параллельные прямые – прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельный перенос в пространстве – такое преобразование, при котором произвольная точка (x; y; z) фигуры переходит в точку (x+a; y+b; z+c), где числа a, b, c одни и те же для всех точек (x; y; z).

Первообразная для функции f на заданном промежутке – функция F, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Пересечение (множеств) – множество, состоящее из элементов, принадлежащих строго и первому, и второму множествам.

Периодическая функция с периодом T – функция f, если для любого x из области значения этой функции в точках x, x –T и x+T равны, то есть

$$f(x+T) = f(x) = f(x-T).$$

Перпендикуляр, опущенный из данной точки на данную плоскость – отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется основанием перпендикуляра.

Перпендикулярные прямые – прямые, пересекающиеся под прямым углом.

Повторение n элементов в m ячейках – количество повторения любого числа n различных и/или одинаковых элементов в любом порядке m раз. Повторения часто используются в теории кодирования данных.

Повторная выборка – выборка, при которой отобранный объект возвращается после проведения обследования обратно в генеральную совокупность.

Подмножество – множество элементов, целиком входящее в другое множество.

Постоянная – функция, которая на всей своей области определения имеет постоянное значение (например: y = 2). График постоянной – прямая линия, параллельная оси абсцисс.

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, – вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Пирамида, вписанная в конус – такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса.

Пирамида, описанная около конуса – пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

Планиметрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры на плоскости.

Поверхность тела – граница тела.

Показательная функция с основанием а – функция, заданная формулой

$y = a^x$ (где $a > 0$, $a \neq 1$).

Полная поверхность призмы равна сумме боковой поверхности и площадей оснований.

Полупрямая или луч – это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной её точки. Эта точка называется начальной точкой полупрямой. Различные полупрямые одной и той же прямой, имеющие общую точку, называются дополнительными.

Правильная пирамида – пирамида, основанием которой является правильный многоугольник, а основание её высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Правильный многогранник – выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число рёбер. Существует пять типов правильных выпуклых многогранников:

Призма – многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом,

Призма, вписанная в цилиндр – такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами – образующие цилиндра.

Призма, описанная около цилиндра – призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра.

Приращение независимой переменной (приращение аргумента) в точке x_0 – разность $x – x_0$, обозначается Δx.

Приращение функции f в точке x_0, соответствующее приращению Δx – разность f (x) – f (x0) = f (x0 +Δx) – f (x0).

Производная функции f в точке x_0 – число, к которому стремится разностное отношение при x, стремящемся к нулю.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой перпендикулярны основаниям.

Прямой конус – если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

Прямоугольный параллелепипед – прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник.

Равные тела имеют равные объемы.

Равновеликие тела – тела, имеющие равные объѐмы.

Радиус цилиндра – радиус его основания.

Размещения – размещениями из n элементов по m элементов (m n) называются комбинации, составленные из данных n элементов по m элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Расстояние между скрещивающимися прямыми – длина их общего перпендикуляра.

Расстояние от прямой до параллельной ей плоскости – расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

Результат (испытания) – одно из возможных значений случайной величины, полученной в результате испытания. Если все закономерности и входящие в них величины достоверны (однозначны), то полученный результат будет достоверным и единственным.

Синус и косинус – числовые функции, заданные соответственно формулами y = sin x и y = cos x. Синусоида – график синуса.

Скалярное произведение векторов – это число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скрещивающиеся прямые – прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости.

Сочетания – сочетанием из n по k называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов.

Степенная функция – функция, заданная формулой $f(x) = a^x$.

Степень числа а с рациональным показателем r = , где m – целое число, а n – натуральное число.

Стереометрия – раздел геометрии, в котором изучаются фигуры пространстве.

Сумма векторов (a_1; a_2; a_3) и (b_1; b_2; b_3) – это вектор ($a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$; $a_3 + b_3$).

Тангенс и котангенс – числовые функции, заданные соответственно формулами y = tg x и y = ctg x. Тангенсоида – график функции tgx.

Тело – конечная замкнутая область.

Тело вращения – объёмное тело, возникающее при вращении плоской фигуры, ограниченной кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости.

Тело называется простым, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Теория вероятностей – наука, изучающая общие закономерности случайных явлений массового характера.

Тетраэдр – треугольная пирамида. Пирамида называется n-угольной, если еѐ основанием является n-угольник.

Тождество – равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого принимают равные значения при всех допустимых значениях переменных.

Треугольник – фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки – сторонами.

Трехгранный угол (abc) – фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc), (ac).

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна

радиусу окружности.

Угол между прямой и плоскостью – угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость.

Угол между скрещивающимися прямыми – угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

Формула – математическое описание физической закономерности, выраженное в виде уравнения и позволяющее однозначно определить результат исхода по входящим в формулу переменным.

Функция – математическое понятие, отражающее связь между элементами различных множеств. Более точно, это «закон», по которому каждому элементу одного множества (называемому областью определения) ставится в соответствие некоторый элемент другого множества (называемого областью значений).

Цилиндр – тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, – образующими цилиндра.

Чѐтная функция – функция f, если для любого x из еѐ области определения

f (–x) = f (x).

Шар – тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на

расстоянии, не большем данного растояния от данной точки. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние радиусом шара.

Шаровая поверхность, или сфера – граница шара.

Шаровой сегмент – часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровой сектор – тело, которое получается из шарового сегмента и конуса. Если шаровой сегмент меньше полушара, то шаровой сегмент дополняется конусом, у которого вершина в центре шара, а основанием является основание сегмента. Если же сегмент больше полушара, то указанный конус из него удаляется.

Шаровой слой – часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар.

Учебное электронное издание

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЮРИСТОВ

Учебно-практическое пособие

Автор-составитель:
МИТИН Сергей Петрович

Издается в авторской редакции

***Системные требования*:** Intel от 1,3 ГГц; Windows 7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж: 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт
Кафедра физико-математического образования и информационных технологий
miser65@mail.ru