Владимирский государственный университет

Т. В. ПРОХОРОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Т. В. ПРОХОРОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1672-9

УДК 512:514
ББК 22.14+22.151

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. Ю. Лексин

Кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
(Владимирский филиал)
С. В. Никифорова

Прохорова, Т. В.

Линейная алгебра и аналитическая геометрия в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Т. В. Прохорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 121 с. – ISBN 978-5-9984-1672-9. – Электрон. дан. (3,02 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Предназначено для студентов вузов всех инженерно-технических и математических специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 8. Библиогр.: 9 назв.

ISBN 978-5-9984-1672-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 6

1. Каноническое уравнение эллипса 7
2. Каноническое уравнение гиперболы 11
3. Каноническое уравнение параболы 15
4. Матрицы и действия над ними 17
5. Определители и их свойства 22
6. Правило Крамера 27
7. Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность 31
8. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца 34
9. Неравенство треугольника 35
10. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора. Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между векторами 36
11. Векторное произведение и его свойства 37
12. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя 3-го порядка 40
13. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений 41
14. Определитель произведения двух квадратных матриц 43
15. Обратная матрица и ее вычисление 43
16. Линейный оператор. Примеры линейных операторов 47
17. Сумма и произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изоморфизм кольца эндоморфизмов конечномерного линейного пространства с кольцом квадратных матриц 48
18. Матрица поворота плоскости. Зависимость матрицы оператора от выбора базиса. Определитель оператора 51

19. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственых векторов 52
20. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса 54
21. Ранг матрицы и его вычисление. Метод окаймляющих миноров.. 56
22. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Алгоритм решения системы линейных уравнений............................ 58
23. Прямая на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости 61
24. Угол между двумя прямыми на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости 63
25. Плоскость в трехмерном пространстве. Расстояние от точки до плоскости в трехмерном пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плосkстей в трехмерном пространстве. Взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве 64
26. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора............................ 66
27. Спектральная теорема.. 68
28. Ортогональные операторы и матрицы 70
29. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду 72
30. Классификация кривых второго порядка на плоскости................ 73
31. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию ... 77
32. Линейные операторы, сохраняющие объем 79
33. Простейшие примеры алгебр Ли 81
34. Экспонента и логарифм квадратной матрицы 82
35. Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты симметрической матрицы.. 86
36. Аффинная группа 87

37. Движения (изометрии) евклидова пространства 89
38. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства 91
39. Аффинная классификация кривых второго порядка 94
40. Понятие о плоскости Лобачевского 95
41. Классификация поверхностей 2-го порядка в 3-мерном пространстве 97
42. Прямые на однополостном гиперболоиде 103
43. Прямые на гиперболическом параболоиде................................... 105
44. Проективное пространство.. 106
45. Проективная классификация кривых второго порядка 109

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.. 119

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 120

ВВЕДЕНИЕ

Математика играет определяющую роль в развитии творческого потенциала студента и выработке научной методологии. Математика является универсальным языком всех естественных наук и основанных на них технических дисциплинах, изучаемых в вузе.

Пособие написано в соответвии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования. Содержит теоретический и практический материал по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Весь материал пособия разделён на темы. В каждой теме приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию и решены задачи. Наличие в пособии большого количества решённых задач разного уровня сложности значительно облегчит самостоятельную работу студентов.

Автор стремился сделать изложение материала ясным и доступным. Основная цель пособия – помочь студенту, приступающему к изучению математики, организовать свою самостоятельную работу, выделить и усвоить главное, приобрести достаточно прочные навыки решения задач различного уровня сложности.

Пособие будет полезно для преподавателей и студентов вузов.

1. Каноническое уравнение эллипса

Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ на плоскости вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1.1)$$

Фиксируем точки F_1 и F_2 (**фокусы**).

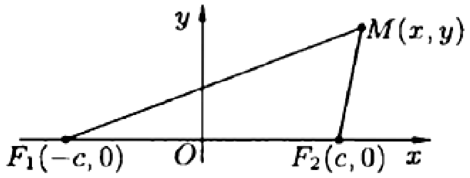


Рис. 1

Эллипсом с фокусами F_1, F_2 называется множество таких точек (x, y), что сумма расстояний от точки (x, y) до фокусов равна постоянному числу:

$$r_1 + r_2 = 2a\,.$$

Возьмем $M(x, y)$, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, где $c \geq 0$ (рис. 1). Тогда $r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Имеем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

$$(x+c)^2 + \underline{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \underline{y^2}\,,$$

$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{\underline{c^2}} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{\underline{c^2}}\,,$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,,$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc,$$

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^4 - a^2c^2,$$

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

В нашем случае $r_1 + r_2 = 2a > 2c$, поэтому $a > c$, и можно разделить последнее из уравнений на $a^2(a^2 - c^2)$. Получим уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$. Положим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Получим **каноническое уравнение эллипса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \qquad (1.2)$$

Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются **вершинами** эллипса (рис. 2).

Числа a и b называются **большой и малой полуосью** эллипса соответственно.

В частности, если $a=b=r$, то $c=0$, $F_1=F_2=O(0,0)$, и эллипс превращается в окружность $x^2+y^2=r^2$ с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом r.

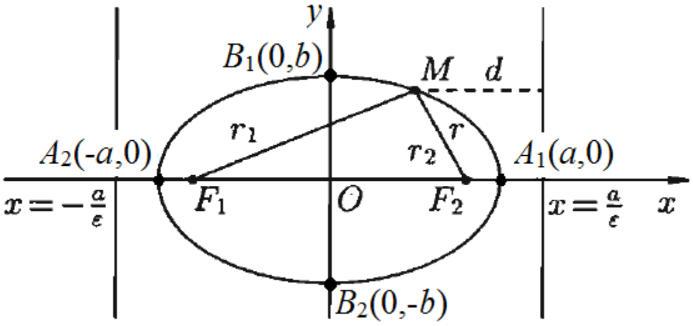


рис. 2

В качестве характеристики формы эллипса пользуются отношением $\dfrac{c}{a}=\varepsilon$, которое называется **эксцентриситетом** эллипса ($0<\varepsilon<1$). Чем меньше эксцентрисетет эллипса, тем эллипс будет менее сплющенным. В частности, если $\varepsilon=0$, то эллипс превращается в окружность.

Фокальные радиусы r_1 и r_2 точки $M(x,y)$ эллипса (расстояние от точки M до фокусов) вычисляются по формулам:

$$r_1=a-\varepsilon x \text{ и } r_2=a+\varepsilon x \quad (a\ge b) \tag{1.3}$$

или

$$r_1=b-\varepsilon y \text{ и } r_2=b+\varepsilon y \quad (b>a). \tag{1.4}$$

Директрисами эллипса называются прямые

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon} \quad (a\ge b) \text{ или } x=\pm\frac{b}{\varepsilon} \quad (b>a). \tag{1.5}$$

Теорема. Если r – расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d – расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\dfrac{r}{d}$ есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса: $\dfrac{r}{d}=\varepsilon$.

Взаимное расположение точки $M(x, y)$ и эллипса определяется условиями:

1) если $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, то точка M лежит на эллипсе;

2) если $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}>1$, то точка M лежит вне эллипса;

3) если $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1$, то точка M лежит внутри эллипса.

Пример 1. Составить уравнение эллипса, если его полуоси соответственно равны 5 и 3.

Решение. Пусть $a=5,\ b=3$. Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Пример 2. Составить уравнение эллипса, если расстояние между фокусами равно 8 и большая полуось равна 7.

Решение. Расстояние между фокусами $2c=8 \quad \Rightarrow \quad c=4$.

Большая полуось $a=7$.

Зная c и a, можем найти b^2 по формуле

$$b^2=a^2-c^2=7^2-4^2=49-16=33.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{33}=1,$$

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{33}=1.$$

Пример 3. Составить уравнение эллипса, если большая полуось равна 20 и эксцентриситет $\varepsilon=0{,}4$.

Решение. Большая полуось $a=20$, эксцентриситет $\varepsilon=0{,}4$.

Воспользуемся формулой $\dfrac{c}{a}=\varepsilon$ и найдём c:

$$c=a\varepsilon=20\cdot 0{,}4=8.$$

Зная c и a, можем найти b^2 по формуле

$$b^2=a^2-c^2=20^2-8^2=400-64=336.$$

Подставим эти значения в каноническое уравнение эллипса (1.2). Получим

$$\frac{x^2}{20^2}+\frac{y^2}{336}=1,$$

$$\frac{x^2}{400}+\frac{y^2}{336}=1.$$

Пример 4. Составить уравнение эллипса, если малая полуось равна 3 и эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Малая полуось $b=3$, эксцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Для нахождения a воспользуемся формулой $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2-3^2}}{a}$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{a^2-3^2}}{a}\right)^2$, $\frac{2}{4}=\frac{a^2-9}{a^2}$, $\frac{1}{2}=\frac{a^2-9}{a^2}$,

$a^2=2\cdot\left(a^2-9\right)$, $a^2=2a^2-18$, $a^2=18$.

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{3^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Пример 5. Составить уравнение эллипса, если сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8.

Решение. По условию $a+b=8\Rightarrow a=8-b$, $2c=8\Rightarrow c=4$.

$b^2=a^2-c^2=(8-b)^2-4^2$,

$b^2=64-16b+b^2-16$,

$16b=48$, $b=3$.

$a=8-3=5$

Тогда уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

2. Каноническое уравнение гиперболы

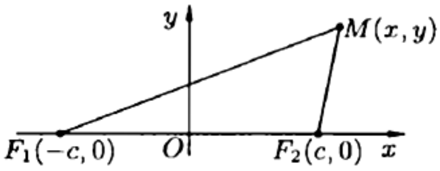


рис. 3

Гиперболой с фокусами F_1, F_2 называется множество таких точек (x, y), что модуль разности расстояний от точки (x, y) до фокусов равна постоянному числу:

$$|r_1 - r_2| = 2a. \qquad (2.1)$$

Фиксируем точки $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ – **фокусы**, где $c \geq 0$ (рис. 3). Тогда

$$r_1 = |F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$r_2 = |F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Имеем:

$$|r_1 - r_2| = 2a, \; r_1 - r_2 = \pm 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$\underline{x^2} + 2xc + \underline{\underline{c^2 + y^2}} = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \underline{x^2} - 2xc + \underline{\underline{c^2 + y^2}},$$
$$4xc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = xc - a^2,$$
$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 - 2a^2xc + a^4,$$
$$x^2(c^2 - a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

В этом случае $c > a$, и можно разделить последнее из уравнений на $a^2(c^2 - a^2)$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Положим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Получим **каноническое уравнение гиперболы**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.2)$$

Ось Ox проходит через фокусы, а ось Oy – через середину отрезка F_1F_2.

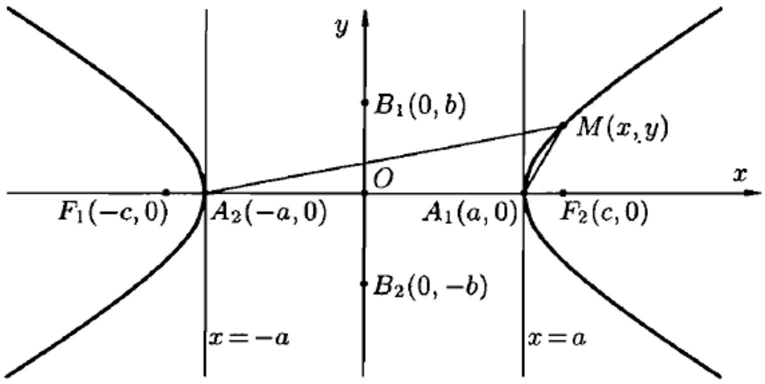


рис. 4

Оси Ox и Oy – оси симметрии гиперболы, точка $O(0,0)$ – центр симметрии гиперболы. Точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ называются **вершинами** гиперболы (рис. 4).

Отрезок $A_1A_2 = 2a$ – **действительной осью**, число a – **действительной полуосью** гиперболы. Отрезок $B_1B_2 = 2b$ – **мнимой осью**, число b – **мнимой полуосью** гиперболы. Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ называется **основным прямоугольником** гиперболы.

Так как $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ или $|x| \geq 1$, то точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$(**правая ветвь** гиперболы) и слева от прямой $x = b$(**левая ветвь** гиперболы).

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$, $\varepsilon > 1$. Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем ε меньше, тем более вытянут её основной прямоугольник.

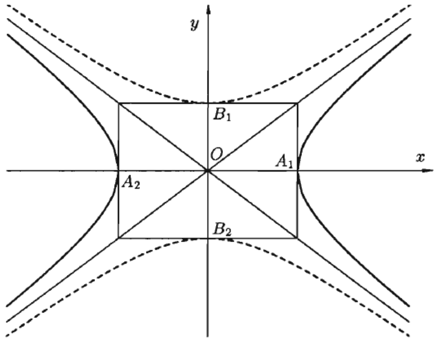


рис. 5

Кривая, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, является гиперболой и называется **сопряжённой** к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. У сопряжённой гиперболы b – действительная полуось, расположенная на оси Oy, a – мнимая полуось, расположенная на оси Ox, фокусы лежат на оси

Oy и $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$. Сопряжённая гипербола изображена на рис. 5 пунктиром.

Фокальные радиусы для точек правой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = \varepsilon x + a \text{ и } r_2 = \varepsilon x - a, \qquad (2.3)$$

для точек левой ветви гиперболы имеют вид

$$r_1 = -(\varepsilon x + a) \text{ и } r_2 = -(\varepsilon x - a). \qquad (2.4)$$

Для сопряжённой гиперболы:

$$r_1 = | b - \varepsilon y |,\ r_2 = | b + \varepsilon y |. \qquad (2.5)$$

Директрисами гиперболы называются прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ ($y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ для сопряжённой гиперболы). Правая директриса расположена между точками O и A_1, левая – между точками O и A_2. Директрисы гиперболы имеют то же свойство $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, что и директрисы эллипса.

Асимптотами гиперболы являются прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

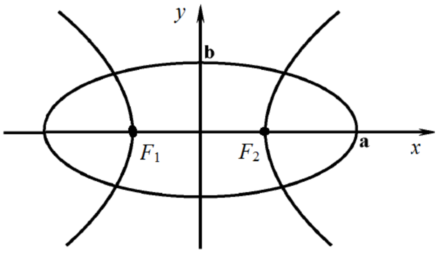
Асимптоты проходят через вершины основного прямоугольника гиперболы (рис. 5). Асимптоты гипербол $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ совпадают.

В частности, гипербола называется **равносторонней**, если её полуоси равны, т.е. $a = b$. Её каноническое уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2.6)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов, т.е. $y = \pm x$.

Пример 1. Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$ и имеющий фокусы в вершинах этого эллипса.



Решение. Из уравнения эллипса следует, что вершинами эллипса являются точки $(\pm 13;0)$ и $(0;\pm 12)$, поэтому $a = 13,\ \ b = 12$ и, следовательно, $c^2 = a^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, поэтому $c = 5$.

По условию задачи вершины гиперболы совпадают с фокусами эллипса, т.е. $a = c = 5$, а её фокусы – с вершинами эллипса, т.е. $c = a = 13$.

Для гиперболы $b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, поэтому $b = 12$. Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$.

Пример 2. Составить уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(9;8)$, если асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$.

Решение. Так как гипербола проходит через точку $M(9;8)$, то её координаты удовлетворяют уравнению гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$\frac{9^2}{a^2} - \frac{8^2}{b^2} = 1,\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1.$

Асимптоты гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}x$, следовательно, $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{b^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{2}}{3}a, \quad b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{64}{\frac{8}{9}a^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ \frac{81}{a^2} - \frac{72}{a^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = \frac{8}{9}a^2 \\ a^2 = 9 \end{cases}, \begin{cases} b^2 = 8 \\ a^2 = 9 \end{cases}.$$

Тогда уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$.

Пример 3. Угол между асимптотами гиперболы равен 60°. Вычислить эксцентриситет гиперболы.

Решение. Уравнение асимптоты имеет вид $y = \pm\frac{b}{a}x$.

$k = \frac{b}{a} = tg\frac{\alpha}{2} = tg30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Пусть $b = \sqrt{3},\ \ a = 3$.

$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2 = 9 + 3 = 12$, тогда $c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Эксцентрисит гиперболы вычисляется по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Каноническое уравнение параболы

Фиксируем прямую L (директрису) и точку F (фокус).

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой **фокусом**, и данной прямой, называемой **директрисой**.

Расстояние от фокуса F до директрисы называется **параметром** параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Пусть r_1 – расстояние от точки $M(x, y)$ до директрисы, r_2 – расстояние от точки $M(x, y)$ до фокуса. По определению, уравнение параболы имеет вид $r_1 = r_2$.

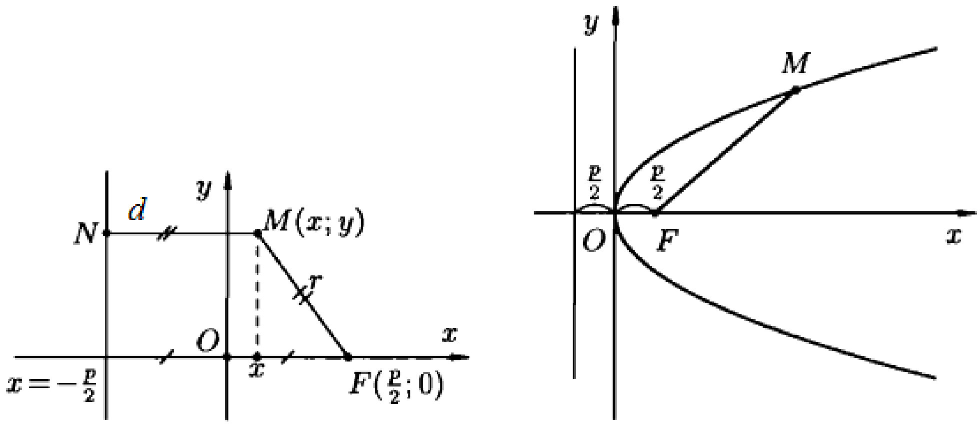


рис. 6

Возьмем в качестве директрисы вертикальную прямую, проходящую через точку $\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$, и возьмем фокус $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ (рис. 6).

Тогда

$$r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2,$$

$$y^2 = 2px \tag{3.1}$$

– **каноническое уравнение параболы**.

Ось Ox – ось симметрии параболы. Точка $O(0,0)$ – вершина параболы. Отрезок $FM = r$ называется **фокальным радиусом точки** M (рис. 6), который вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, $r = d$, d – расстояние от точки M до директрисы (рис. 6).

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$, $(p > 0)$ определяют параболы (рис. 7).

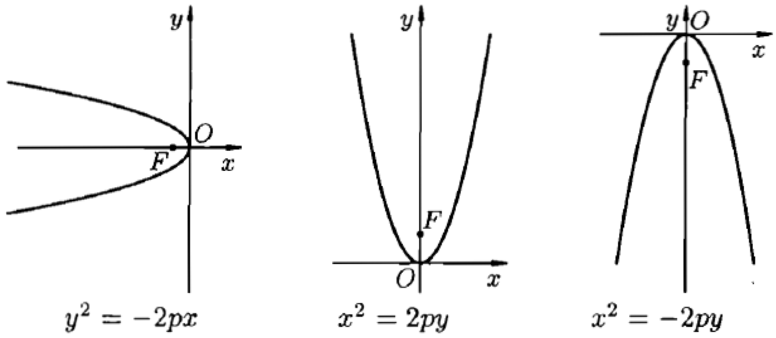


рис. 7

Пример 1. Составить уравнение параболы, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(4,-1)$ и симметричной относительно оси Ox.

Решение. Искомое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$. Подставляем в него координаты точки M и получаем $(-1)^2 = 2p \cdot 4 \Rightarrow 2p = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{y^2 = \frac{1}{4}x}$ – искомое уравнение параболы.

Пример 2. Написать уравнение директрис (см. условия в примере 1).

Решение. Уравнение директрисы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$, т.к. $p = \frac{1}{8} \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{x = -1/16}$ – искомое уравнение директрисы.

Пример 3. Найти фокальный радиус вектор точки M (см. условия в примере 1).

Решение. Фокальный радиус точки M вычисляем по формуле

$\underline{r} = x + \frac{p}{2} = 4 + \frac{1}{16} = \underline{\frac{65}{16}}$.

4. Матрицы и действия над ними

Определение 1. Квадратной матрицей порядка n с вещественными коэффициентами называется таблица чисел типа

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество вещественных (действительных) чисел.

Определение 2. Суммой матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Определение 3. Разностью матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Пример 1. Найти сумму и разность матриц

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+10 & -2+(-25) & 1+98 \\ 5+3 & 9+0 & -8+(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -27 & 99 \\ 8 & 9 & -22 \end{pmatrix}$$

$$D = A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -25 & 98 \\ 3 & 0 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1-10 & -2-(-25) & 1-98 \\ 5-3 & 9-0 & -8-(-14) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 23 & -97 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Определение 4. Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$.

Другими словами, умножить матрицу на число – означает умножить каждый элемент заданной матрицы на это число.

Пример 2. Найти $-7A$, если $A=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 7\end{pmatrix}$.

Решение. $-7A=-7\cdot\begin{pmatrix}-3 & 5 & 0\\ -2 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot(-7) & 5\cdot(-7) & 0\cdot(-7)\\ -2\cdot(-7) & 1\cdot(-7) & 7\cdot(-7)\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}21 & -35 & 0\\ 14 & -7 & -49\end{pmatrix}.$$

Определение 5. Произведением матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{n\times k}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}=(c_{ij})$, для которой каждый элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A на элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj},\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Замечание 1. Умножить матрицу А на матрицу В можно только тогда, когда количество столбцов матрицы А равно количеству строк матрицы В.

Пример 4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}$.

Найти $a) A\cdot B$;

$b) B\cdot A$.

$a) A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 4+3\cdot(-6) & -1\cdot 1+3\cdot(-2)\\ 5\cdot 4+7\cdot(-6) & 5\cdot 1+7\cdot(-2)\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}-22 & -7\\ -22 & -9\end{pmatrix}$.

$b) B\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot(-1)+1\cdot 5 & 4\cdot 3+1\cdot 7\\ -6\cdot(-1)-2\cdot 5 & -6\cdot 3-2\cdot 7\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1 & 19\\ -4 & -32\end{pmatrix}$.

Пример 5. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1\\ -8 & 11 & -10 & -5\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ 6 & 20\\ 7 & 0\\ 12 & -4\end{pmatrix}$.

Найти матрицу $C = A \cdot B$.

$$A_{3\times\boxed{4}} \cdot B_{\boxed{4}\times 2} = C_{3\times 2}$$

В результате произведения матриц A и B мы должны получить матрицу C, состоящую из трёх строк и двух столбцов:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}.$$

Начнём с элемента c_{11}. Чтобы получить элемент c_{11} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A и первого столбца матрицы B:

c_{11}

Строка №1 *Столбец №1*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$c_{11} = -1 \cdot (-9) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 7 + 0 \cdot 12 = 0.$

Найдём элемент c_{12}. Чтобы получить элемент c_{12} нужно найти сумму произведений элементов первой строки матрицы A и второго столбца матрицы B:

c_{12}

Строка №1 *Столбец №2*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 6 & 20 \\ 7 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$c_{12} = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 20 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-4) = 37.$

Все элементы первой строки матрицы C найдены.

Найдём элемент c_{21}. Чтобы получить элемент c_{21} нужно найти сумму произведений элементов второй строки матрицы A и первого столбца матрицы B:

c_{21}

Строка №2 *Столбец №1*

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ \boxed{5 \quad 4 \quad -2 \quad 1} & & & \\ -8 & 11 & -10 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -9 \\ 6 \\ 7 \\ 12 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 20 \\ 0 \\ -4 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$c_{21} = 5 \cdot (-9) + 4 \cdot 6 + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 12 = -23.$

Найдём элемент c_{22}. Чтобы получить элемент c_{22} нужно найти сумму произведений элементов второй строки матрицы A и второго столбца матрицы B:

$c_{21} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot 20 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot (-4) = 91.$

Все элементы второй строки матрицы C найдены.

Найдём элемент c_{31}. Чтобы получить элемент c_{31} нужно найти сумму произведений элементов третьей строки матрицы A и первого столбца матрицы B:

$c_{31} = -8 \cdot (-9) + 11 \cdot 6 + (-10) \cdot 7 + (-5) \cdot 12 = 8.$

Найдём элемент c_{32}. Чтобы получить элемент c_{32} нужно найти сумму произведений элементов третьей строки матрицы A и первого столбца матрицы B:

$c_{32} = -8 \cdot 3 + 11 \cdot 20 + (-10) \cdot 0 + (-5) \cdot (-4) = 216.$

Все элементы третьей строки матрицы C найдены.

Тогда матрица C примет вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 37 \\ -23 & 91 \\ 8 & 216 \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Умножение матриц некоммутативно.

Определение 6. Транспонированной по отношение к матрице $A_{m\times n} = (a_{ij})$ называется матрица $A^T_{m\times n} = (a^T_{ij})$, для элементов $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Пример 6.

Первая строка стала первым столбцом

$$A_{3\times 5} = \begin{pmatrix} \boxed{-1 & 2 & 4 & 0 & 7} \\ \boxed{3 & -5 & 24 & 9 & -3} \\ \boxed{-10 & -8 & -2 & -4 & 11} \end{pmatrix} \qquad A^T_{5\times 3} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -10 \\ 2 & -5 & -8 \\ 4 & 24 & -2 \\ 0 & 9 & -4 \\ 7 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Вторая строка стала вторым столбцом

Третья строка стала третьим столбцом

Определение 7. (Возведение матрицы в степень.) Пусть k – целое неотрицательное число. Для любой квадратной матрицы $A_{n\times n}$ имеем: $A^k = \underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{k\ \ раз}$.

Замечание 3. $A^0 = E$, где E – единичная матрица.

Пример 7. Задана матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти A^2.

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+3\cdot 5 & -1\cdot 3+3\cdot 2 \\ 5\cdot(-1)+2\cdot 5 & 5\cdot 3+2\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+15 & -3+6 \\ -5+10 & 15+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 5 & 19 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Вычислить значение матричного многочлена $A^2 - 2A\cdot E$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+3\cdot(-2)+4\cdot(-5) & -1\cdot3+3\cdot0+4\cdot2 & -1\cdot4+3\cdot1+4\cdot1 \\ -2\cdot(-1)+0\cdot(-2)+1\cdot(-5) & -2\cdot3+0\cdot0+1\cdot2 & -2\cdot4+0\cdot1+1\cdot1 \\ -5\cdot(-1)+2\cdot(-2)+1\cdot(-5) & -5\cdot3+2\cdot0+1\cdot2 & -5\cdot4+2\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-6-20 & -3+0+8 & -4+3+4 \\ 2+0-5 & -6+0+2 & -8+0+1 \\ 5-4-5 & -15+0+2 & -20+2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -25 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & -7 \\ -4 & -13 & -17 \end{pmatrix},$$

$$A\cdot E=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2A=2\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\cdot2 & 3\cdot2 & 4\cdot2 \\ -2\cdot2 & 0\cdot2 & 1\cdot2 \\ -5\cdot2 & 2\cdot2 & 1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & 2 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^2-2A\cdot E=\begin{pmatrix} -25 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & -7 \\ -4 & -13 & -17 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ -4 & 0 & 2 \\ -10 & 4 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -25+2 & 5-6 & 3-8 \\ -3+4 & -4-0 & -7-2 \\ -4+10 & -13-4 & -17-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -23 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & -9 \\ 6 & -17 & -19 \end{pmatrix}.$$

5. Определители и их свойства

Определение 1. Определителем 1-го порядка называется число $\det(a_{11})=a_{11}$ (determinant = определитель).

Определение 2. Определителем 2-го порядка называется число

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21},$$

где со знаком плюс берутся произведения элементов матрицы, обозначенных символом $\oplus$: $\begin{vmatrix} \oplus & \circ \\ \circ & \oplus \end{vmatrix}$,

со знаком минус берутся произведения элементов матрицы, обозначенных символом Θ: $\begin{vmatrix} \circ & \Theta \\ \Theta & \circ \end{vmatrix}$.

Определение 3. Определителем 3-го порядка называется число

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

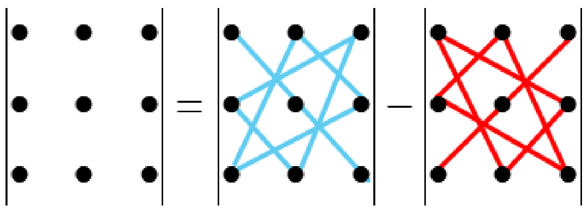
где со знаком плюс берутся произведения элементов матрицы, обозначенных символом $\oplus$:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \oplus & \circ \\ \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \circ & \oplus \\ \oplus & \circ & \circ \\ \circ & \oplus & \circ \end{vmatrix},$$

со знаком минус берутся произведения элементов матрицы, обозначенных символом Θ:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \Theta \\ \circ & \Theta & \circ \\ \Theta & \circ & \circ \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \circ & \Theta & \circ \\ \Theta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \Theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \Theta & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \Theta \\ \circ & \Theta & \circ \end{vmatrix}.$$

Это правило называют **правилом треугольника**. Для запоминания его удобно изобразить схематично:



Удобно считать определитель, используя **правило Саррюса** (французский математик). Оно отличается от правила треугольника только наглядностью. Справа от определителя дописывают первых два столбца и произведения элементов на главной диагонали и на диагоналях, ей параллельных, берут со знаком "плюс" (синии стрелки); а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком "минус" (красные стрелки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определение 4. Определителем n-го порядка называется число

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det\begin{pmatrix} *_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ *_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{i+2} a_{i2} \det\begin{pmatrix} a_{11} & *_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & *_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & *_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{i+j} a_{ij} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & *_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & *_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & *_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \ldots +$$

$$+(-1)^{i+n}a_{in}\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & *_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & *_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ *_{i1} & *_{i2} & \dots & *_{ij} & \dots & *_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & *_{nn} \end{pmatrix},$$

где вычеркнуты i-ая строка и последовательно вычеркиваются столбцы с номерами $1,2,\ldots,j,\ldots,n$.

Мы будем обозначать определитель матрицы A через

$$\det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойства определителей.

1) Определитель не меняется при транспонировании матрицы, т.е. при замене строк на столбцы.

Доказательство (в случае $n=2$).

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2) Кососимметричность: если в матрице поменять местами две строки, то ее определитель умножится на (-1).

Доказательство (в случае $n=2$).

$$\det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21}\cdot a_{12} - a_{11}\cdot a_{22} = -\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

3) Линейность по строке:

а) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$

Доказательство.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}+b_{22}) - a_{12}(a_{21}+b_{21}) = \left[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right] + \left[a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

b) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$

Доказательство.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\lambda a_{22} - a_{12}\lambda a_{21} = \lambda\left[a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right] =$$

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

4) Если в квадратной матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

Доказательство. Обозначим определитель матрицы через d. Если поменять местами две одинаковые строки, то определитель матрицы умножится на (-1); с другой стороны, он не изменится, потому что матрица не изменилась. Значит, $(-1)\cdot d = d$, поэтому $2\cdot d = 0$. Поскольку $d \in \mathbb{R}$, то мы получаем соотношение $d = 0$.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение.

a) $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - 1\cdot 7 = -6 - 7 = -13.$

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ по правилу треугольника.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 12\cdot 3 + (-8)\cdot(-1)\cdot 2 + (-5)\cdot 4\cdot(-7) -$$

$$-(-5)\cdot 12\cdot 2 - (-8)\cdot 4\cdot 3 - 1\cdot(-1)\cdot(-7) =$$

$$= 36 + 16 + 140 + 120 + 96 - 7 = 401.$$

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

Решение.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -8 & -5 & 1 & -8 \\ 4 & 12 & -1 & 4 & 12 \\ 2 & -7 & 3 & 2 & -7 \end{array}\right. = 1\cdot 12\cdot 3+(-8)\cdot(-1)\cdot 2+(-5)\cdot 4\cdot(-7)-$$

$$-(-5)\cdot 12\cdot 2-(-8)\cdot 4\cdot 3-1\cdot(-1)\cdot(-7)=$$

$$=36+16+140+120+96-7=401.$$

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -8 & -5 \\ 4 & 12 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{vmatrix} =$

$$=(-8)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+12\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+(-7)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot(12+2)+12\cdot(3+10)+7\cdot(-1+20)=8\cdot 14+12\cdot 13+7\cdot 19=$$

$$=112+156+133=401.$$

6. Правило Крамера

Теорема (правило Крамера). Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система имеет единственное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n)$, где

$$\alpha_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & b_i & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$). Имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

По условию,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Из свойств определителей следует, что

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} \\ a_{21}x_1 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} \\ a_{22}x_2 & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\Delta} + x_2 \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_{0} = x_1\Delta,$$

поэтому $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогично $x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема Крамера доказана.

В случае $n = 3$ имеем систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Пример. Решить системы уравнений методом Крамера

a) $\begin{cases} 5x - 3y = 1 \\ x + 11y = 6 \end{cases};$

b) $\begin{cases} 5x - y + 2z = 16 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 9x - y + 4z = 30 \end{cases}.$

Решение.

a) Составим определители и вычислим их

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - (-3) \cdot 1 = 55 + 3 = 58 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - (-3) \cdot 6 = 11 + 18 = 29,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 1 = 30 - 1 = 29,$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{29}{58}=\frac{1}{2},$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{29}{58}=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

b) Составим определители и вычислим их

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot2\cdot4+(-1)\cdot(-1)\cdot9+2\cdot3\cdot(-1)-$$

$$-2\cdot2\cdot9-5\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot3\cdot4=40-6+9-36-5+12=14\neq0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 16 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 30 & -1 & 4 \end{vmatrix}=16\cdot2\cdot4+(-1)\cdot(-1)\cdot30+2\cdot3\cdot(-1)-2\cdot2\cdot30-$$

$$-16\cdot(-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot3\cdot4=128+30-6-120-16+12=28,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 5 & 16 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 30 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot3\cdot4+16\cdot(-1)\cdot9+2\cdot3\cdot30-$$

$$-2\cdot3\cdot9-5\cdot(-1)\cdot30-16\cdot3\cdot4=60-144+180-54+150-192=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 16 \\ 3 & 2 & 3 \\ 9 & -1 & 30 \end{vmatrix}=5\cdot2\cdot30+(-1)\cdot3\cdot9+16\cdot3\cdot(-1)-$$

$$-16\cdot2\cdot9-5\cdot3\cdot(-1)-(-1)\cdot3\cdot30=300-27-48-288+15+90=42.$$

Тогда

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{28}{14}=2,$$

$$y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{14}=0,$$

$$z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{42}{14}=3.$$

Ответ: $(2,\ 0,\ 3)$.

7. Векторные пространства. Примеры линейных пространств. Линейно независимые векторы. Базис. Размерность

Определение 1. Множество E называется векторным (линейным) пространством $\Leftrightarrow$ на E определены операции сложения и умножения на числа из поля $\mathbb{R}$ так, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$,

2) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$,

3) $\exists\vec{0} \quad \forall\vec{x} \quad \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$,

4) $\forall\vec{x} \quad \exists(-\vec{x}) \quad \vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$,

5) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$,

6) $(\lambda+\mu)\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$,

7) $(\lambda\mu)\vec{x}=\lambda(\mu\vec{x})$,

8) $\lambda(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$.

Примеры.

1) $E=\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения.

2) E – плоскость с отмеченной точкой 0. В любую точку плоскости из точки 0 можно направить стрелку; сложение определяется по правилу параллелограмма: $\vec{x}+\vec{y}$ – это диагональ параллелограмма со сторонами $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0.

n) $E=\mathbb{R}^n=\{\,\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i\in\mathrm{R}\}$;

$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$; $\vec{0}=(0,0,\ldots,0)$;

$-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_n)$; $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$.

Определение 2. Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n$ линейно независимы $\Leftrightarrow$ соотношение $\lambda_1\vec{e}_1+\ldots+\lambda_n\vec{e}_n=\vec{0}$ возможно лишь в случае, когда $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

Примеры.

1) $E=\mathbb{R}$, $\vec{e}_1\neq\vec{0}$. Предположим, что $\lambda_1\vec{e}_1=\vec{0}$. Если $\lambda_1\neq0$, то $\exists\lambda_1^{-1}$,

$$\begin{array}{c}\lambda_1^{-1}(\lambda_1\vec{e}_1)=\lambda_1^{-1}\vec{0}=\vec{0}\\ \parallel \\ (\lambda_1^{-1}\lambda_1)\vec{e}_1=1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_1\end{array},$$

поэтому $\vec{e}_1 = \vec{0}$, что противоречит нашим предположениям. Значит, $\lambda_1 = 0$, и поэтому вектор $\vec{e}_1$ линейно независим.

2) E – плоскость с отмеченной точкой 0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не лежат на одной прямой.

Докажем, что эти векторы линейно независимы. Пусть L_j – прямая, проходящая через точку 0 и конец вектора $\vec{e}_j$.

Предположим, что $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 = \vec{0}$. Тогда $L_1 \ni \lambda_1\vec{e}_1 = -\lambda_2\vec{e}_2 \in L_2$, поэтому $\lambda_1\vec{e}_1 = -\lambda_2\vec{e}_2 \in L_1 \cap L_2 = \vec{0}$. Значит, $\lambda_1\vec{e}_1 = \vec{0}$. Действуя как в предыдущем примере, мы получим соотношение $\lambda_1 = 0$. С другой стороны, $-\lambda_2\vec{e}_2 = \vec{0} \Rightarrow \lambda_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, и векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ линейно независимы.

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы линейно независимы (доказывается аналогично).

Басня Крылова о линейно зависимых векторах. Имеем соотношение

$$\vec{\text{Л}} + \vec{\text{Р}} + \vec{\text{Щ}} = \vec{0},$$

в котором $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, поэтому векторы $\vec{\text{Л}}, \vec{\text{Р}}, \vec{\text{Щ}}$ линейно зависимы.

Определение 3. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется базисом пространства E $\Leftrightarrow$

1) векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы;

2) $\forall \vec{x} \in E \quad \exists x_i \in \mathbb{R} \;\; \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$.

Примеры.

1) $E = \mathbb{R}$, $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$. Любой вектор на прямой E пропорционален вектору $\vec{e}_1$ с коэффициентом пропорциональности x_1: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1$. Поскольку $\vec{e}_1$ линейно независим, то он образует базис прямой E.

2) E – плоскость с отмеченной точкой 0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ не лежат на одной прямой. Мы уже знаем, что эти векторы линейно независимы. Для любого вектора $\vec{x}$ рассмотрим проекции $\vec{x}$ на оси $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Эти проекции равны соответственно $x_1\vec{e}_1$, $x_2\vec{e}_2$ причем вектор $\vec{x}$ является диагональю в соответствующем параллелограмме, и поэтому

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Значит, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют базис плоскости.

3) E – трехмерное пространство с отмеченной точкой 0, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не лежат на одной плоскости. Тогда эти векторы образуют базис (доказывается аналогично).

n) $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1 = (1,0,\ldots 0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,\ldots 0)$, … $\vec{e}_n = (0,0,\ldots 1)$.

Пусть $\lambda_1\vec{e}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{e}_n = \vec{0}$.Тогда

$$\lambda_1(1,0,\ldots,0) + \lambda_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + \lambda_n(0,0,\ldots,1) = (0,0,\ldots,0),$$

т.е. $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0,0,\ldots,0)$ и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Поэтому векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы.

С другой стороны, любой вектор $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1(1,0,\ldots,0) + x_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + x_n(0,0,\ldots,1) =$$
$$= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

поэтому $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – стандартный базис $\mathbb{R}^n$.

Теорема (без доказательства). В любом линейном пространстве E существует базис (быть может, бесконечный).

Определение 4. Пространство E называется конечномерным $\Leftrightarrow$ в E существует конечный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Теорема (без доказательства). Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – базис E, то любой другой базис пространства E состоит из n элементов. Число n называется размерностью E и обозначается $\dim E$ (dimension = размерность).

Пример. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Определение 5. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис E. Тогда $\forall \vec{x} \in E$ $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется набором координат вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Замечание. Координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определены единственным образом: если $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ – другой набор координат вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, то

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n \Rightarrow$$
$$(x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\vec{e}_n = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0},$$

поэтому из линейной независимости базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ следует, что $x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \ldots = x_n - x_n' = 0$, т.е. $x_j = x_j'$.

8. Скалярное произведение. Примеры скалярных произведений. Неравенство Коши – Шварца

Определение 1. Пусть E – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Скалярным произведением на пространстве E называется функция $E \times E \to \mathbb{R}$, которая каждой паре векторов $\vec{x}, \vec{y} \in E$ ставит в соответствие вещественное число $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}$ так, что выполняются следующие аксиомы:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

2) $(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$;

3) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y})$;

4) $\forall \vec{x} \neq 0 \quad (\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Примеры.

1) $E = \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) = xy$ – обычное произведение чисел; аксиома 4 имеет вид $\forall x \neq 0 \quad x^2 > 0$.

2) $E = \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ – стандартное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

3) $E = C(a, b)$ – пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Это пространство не имеет конечного базиса (т.е. является бесконечномерным). Для функций $f, g \in E$ пределим скалярное произведение формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

Определение 2. Число $\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$ называется нормой (длиной) вектора $\vec{x}$.

Теорема (неравенство Коши – Шварца). $|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$.

Доказательство. По свойствам 1 – 4 скалярного произведения имеем:

$$\forall t \in \mathbb{R} \;\; 0 \leq (\vec{x} + t\vec{y}, \vec{x} + t\vec{y}) = \underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=c} + 2t\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{=b} + t^2 \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=a} = at^2 + 2bt + c = p(t).$$

Если $\vec{y} = \vec{0}$, то

$$\underbrace{|(\vec{x}, \vec{y})|}_{=0} \leq \|\vec{x}\| \cdot \underbrace{\|\vec{y}\|}_{=0},$$

и неравенство Коши – Шварца в этом случае очевидно.

Если $\vec{y} \neq \vec{0}$, то по свойству 4 скалярного произведения $a = (\vec{y}, \vec{y}) > 0$. Поэтому график функции $p(t)$ – это парабола рожками вверх, причем мы уже доказали, что $\forall t \in \mathbb{R}\ \ p(t) \geq 0$. Это значит, что график функции $p(t)$ не опускается ниже оси t (иначе $p(t)$ будет принимать отрицательные значения на некотором отрезке). В итоге квадратичный многочлен $p(t)$ либо не имеет вещественных корней (и тогда его дискриминант $(2b)^2 - 4ac < 0$), либо $p(t)$ имеет совпадающие вещественные корни $t_1 = t_2$ и его дискриминант $(2b)^2 - 4ac = 0$ (и график $p(t)$ касается оси t в точке $t_1 = t_2$). В любом случае

$$(2b)^2 - 4ac \leq 0.$$

Подставляя в это неравенство $a = (\vec{y}, \vec{y})$, $b = (\vec{x}, \vec{y})$, $c = (\vec{x}, \vec{x})$, получим

$$4(\vec{x}, \vec{y})^2 - 4(\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}) \leq 0.$$

В итоге

$$(\vec{x}, \vec{y})^2 \leq (\vec{y}, \vec{y})(\vec{x}, \vec{x}), \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})^2} \leq \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} \cdot \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})},$$

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $\vec{x} \neq \vec{0}, \vec{y} \neq \vec{0}$, то по неравенству Коши – Шварца

$$\left|\frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \in [-1,1] \Rightarrow \exists \left(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}\right) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

– угол между векторами $\vec{x}, \vec{y}$.

9. Неравенство треугольника

Теорема (неравенство треугольника). $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Доказательство.

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| = \sqrt{(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\vec{x}, \vec{x})}_{=\|\vec{x}\|^2} + 2\underbrace{(\vec{x}, \vec{y})}_{\leq|(\vec{x}, \vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} + \underbrace{(\vec{y}, \vec{y})}_{=\|\vec{y}\|^2}} \leq \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 + \|\vec{y}\|^2} =$$

$$= \sqrt{(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2} = \left| \ \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \ \right| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть $E=\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
Тогда

$$(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n,$$

$$\|\vec{x}\|=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2},$$

неравенство Коши – Шварца имеет вид

$$|x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n|\le\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2},$$

угол между векторами вычисляется по формуле

$$\left(\vec{x}\,\hat{,}\,\vec{y}\right)=\arccos\frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}=\arccos\frac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}}.$$

10. Ортогональность векторов. Теорема Пифагора. Ортонормированные базисы. Скалярное произведение в ортонормированном базисе, норма вектора и угол между векторами

Определение 1. Векторы $\vec{x},\vec{y}$ называются ортогональными $\Leftrightarrow$ $(\vec{x},\vec{y})=0$. Обозначение: $\vec{x}\perp\vec{y}$.

Теорема Пифагора. Если $\vec{x}\perp\vec{y}$, то $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$.

Доказательство.

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2=(\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y})=(\vec{x},\vec{x})+2\underbrace{(\vec{x},\vec{y})}_{=0}+(\vec{y},\vec{y})=\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Базис $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ называется ортонормированным

$$\Leftrightarrow\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad i=j;\\ 0, & \text{если}\quad i\ne j;\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\|\vec{e}_i\|=1;\\ \vec{e}_i\perp\vec{e}_j, \quad \text{если}\quad i\ne j.\end{cases}$$

Пример. Стандартный базис $E=\mathbb{R}^n$, $\vec{e}_1=(1,0,\ldots0)$, $\vec{e}_2=(0,1,\ldots0)$, … $\vec{e}_n=(0,0,\ldots1)$ пространства $\mathbb{R}^n$ является ортонормированным относительно стандартного скалярного произведения $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+$ $+\ldots+x_n\vec{e}_n$, $\vec{y}=y_1\vec{e}_1+\ldots+y_n\vec{e}_n$. Тогда $(\vec{x},\vec{y})=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$,

$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, угол между векторами вычисляется по формуле $\left(\vec{x},\hat{\ }\vec{y}\right) = \arccos \dfrac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}}$.

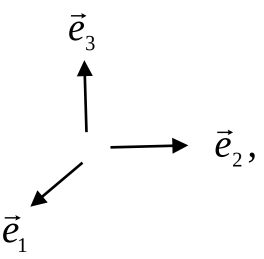
Доказательство.

$$(\vec{x},\vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + \ldots + y_n\vec{e}_n) =$$
$$= x_1y_1\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)}_{=1} + x_1y_2\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_2)}_{=0} + \ldots + x_1y_n\underbrace{(\vec{e}_1,\vec{e}_n)}_{=0} +$$
$$+ x_2y_1\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_1)}_{=0} + x_2y_2\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_2)}_{=1} + \ldots + x_2y_n\underbrace{(\vec{e}_2,\vec{e}_n)}_{=0} + \ldots +$$
$$+ x_ny_1\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_1)}_{=0} + x_ny_2\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_2)}_{0} + \ldots + x_ny_n\underbrace{(\vec{e}_n,\vec{e}_n)}_{=1} =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Остальные формулы получаются из этой формулы для скалярного произведения. Теорема доказана.

11. Векторное произведение и его свойства

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства E:



$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$. Вектор

$$[\vec{x},\vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3$$

называется векторным произведением векторов $\vec{x}, \vec{y}$. Иногда его обозначают $\vec{x} \times \vec{y}$.

Теорема. 1) $[\vec{x},\vec{y}] = -[\vec{y},\vec{x}]$;

2) $[\vec{x}+\vec{y},\vec{z}] = [\vec{x},\vec{z}] + [\vec{y},\vec{z}]$;

3) $[\lambda\vec{x},\vec{y}] = \lambda[\vec{x},\vec{y}]$;

4) $[\vec{x},\vec{y}] \perp \vec{x}$, $[\vec{x},\vec{y}] \perp \vec{y}$;

5) $\|[\vec{x},\vec{y}]\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$;

6) правило правого винта.

Доказательство.

1) - 3) Из свойств определителей следует, что

$$[\vec{x},\vec{y}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = -[\vec{y},\vec{x}],$$

$$[\vec{x},\vec{y}+\vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = [\vec{x},\vec{y}]+[\vec{x},\vec{z}]$$

,

$$[\lambda\vec{x},\vec{y}] = \begin{vmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 & \lambda x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \lambda[\vec{x},\vec{y}].$$

4) $\left([\vec{x},\vec{y}],\vec{x}\right) =$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3, x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \right) =$$

$= x_1 \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}_1 - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} =$ {разложение нулевого (одинаковые строки!) определителя $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ по первой строке} = 0, поэтому $[\vec{x},\vec{y}] \perp \vec{x}$; аналогично $[\vec{x},\vec{y}] \perp \vec{y}$.

5) Поскольку $\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right) \in [0,\pi]$, то $\sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right) \geq 0$. Поэтому достаточно проверить, что

$$\|[\vec{x},\vec{y}]\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \sin^2\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right),$$

т.е. что

$$\|[\vec{x},\vec{y}]\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1-\cos^2\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)\right) =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \cdot \left(1 - \frac{(\vec{x},\vec{y})^2}{\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2}\right) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x},\vec{y})^2.$$

Очевидно,

$$\|[\vec{x},\vec{y}]\|^2 = \left\| \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 \right\|^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (x_1y_3 - y_1x_3)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 =$$

$$= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 - 2x_1x_3y_1y_3 + x_3^2y_1^2 +$$

$$+ x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 =$$

$$= x_1^2(y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 + y_3^2) + x_3^2(y_1^2 + y_2^2) -$$

$$- 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_1x_2y_1y_2 =$$

$$= x_1^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_1^2y_1^2 + x_2^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_2^2y_2^2 +$$

$$+ x_3^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - x_3^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_1x_2y_1y_2 =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) -$$

$$- x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_1x_2y_1y_2 =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 =$$

$$= \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x},\vec{y})^2,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что $h = \|\vec{y}\| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{x},\vec{y}}\right)$ – это высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$; поэтому формула 4 показывает, что $\|[\vec{x},\vec{y}]\|$ – это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$.

6) Правило правого винта (без доказательства): $[\vec{x},\vec{y}]$ направлено в ту сторону, в какую движется правый винт при минимальном повороте от направления вектора $\vec{x}$ к направлению вектора $\vec{y}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{x} = \{1,2,-3\}$, $\vec{y} = \{0,-1,2\}$.

Решение.

$$[\vec{x},\vec{y}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_3 =$$

$$= (4-3) \cdot \vec{e}_1 - (2-0) \cdot \vec{e}_2 + (-3-0) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3.$$

12. Смешанное произведение. Геометрический смысл определителя 3-го порядка

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис 3-мерного пространства E. Число $(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])$ называется смешанным произведением векторов $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

Теорема.

$$(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Очевидно,

$$(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])=\left(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3, \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_1-\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_2+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_3 \right)=$$

$=x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}-x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}==$ {разложение определителя $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ по первой строке} $=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$. Теорема доказана.

Следствие (геометрический смысл определителя 3-го порядка). Абсолютная величина определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

равна $|(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])|$ и равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$.

Доказательство. Мы считаем, что $\vec{y},\vec{z}$ лежат в основании параллелепипеда. Поэтому

$$|(\vec{x},[\vec{y},\vec{z}])|=\|\vec{x}\|\cdot\|[\vec{y},\vec{z}]\|\cdot\left|\cos\left(\vec{x},[\hat{\vec{y}},\vec{z}]\right)\right|=$$

$$=\underbrace{\|[\vec{y},\vec{z}]\|}_{=площадь\ основания}\cdot\underbrace{\|\vec{x}\|\cdot\left|\cos\left(\vec{x},[\hat{\vec{y}},\vec{z}]\right)\right|}_{=высота}=\{\text{объем параллелепипеда}\}.$$

Следствие доказано.

13. Геометрические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений

Теорема. 1) {площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ } = $\|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

2) {площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ } = $\frac{1}{2}\|[\vec{x},\vec{y}]\|$;

3) {высота параллелограмма, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$ } = {высота треугольника, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y}$ с основанием $\vec{x}$ } = $\frac{\|[\vec{x},\vec{y}]\|}{\|\vec{x}\|}$;

4) {объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ } = {абсолютной величине определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

5) {объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y},\vec{z}}$ } = $\frac{1}{6}$ {абсолютной величины определителя} $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$;

6) {высота параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\vec{y},\vec{z}$ } = {высота пирамиды, построенной на векторах $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ с основанием $\Delta_{\vec{y},\vec{z}}$ } = {абсолютной величине} $\dfrac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{\|[\vec{y},\vec{z}]\|}$.

Все эти результаты получены выше.

Пример 1. Вычислить площадь параллелограмма, построенного $\vec{x}=\{6{,}3{,}-2\}$, $\vec{y}=\{3{,}-2{,}6\}$.

Решение.

Найдём векторное произведение векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$[\vec{x},\vec{y}]=\begin{vmatrix}6 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 6\\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_1-\begin{vmatrix}6 & -2\\ 3 & 6\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_2+\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix}\cdot\vec{e}_3=$$

$$=(18-4)\cdot\vec{e}_1-(36+6)\cdot\vec{e}_2+(-12-9)\cdot\vec{e}_3=14\vec{e}_1-42\vec{e}_2-21\vec{e}_3.$$

$$S=\left\|[\vec{x},\vec{y}]\right\|=\sqrt{14^2+42^2+21^2}=49.$$

Пример 2. Вычислить площадь площадь треугольника с вершинами в точках $A(-4,2,6)$, $B(2,-3,0)$, $C(-10,5,8)$.

Решение.

Найдём векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(2,-3,0)-(-4,2,6)=\{6,-5,-6\},$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(-10,5,8)-(-4,2,6)=\{-6,3,2\}.$$

Найдём векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$:

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix}6 & -5 & -6\\ -6 & 3 & 2\\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{vmatrix}=8\vec{e}_1+24\vec{e}_2-12\vec{e}_3.$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}S_{пар.}=\frac{1}{2}\left\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+24^2+12^2}=14.$$

Пример 3. Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(-4,2,6)$, $B(2,-3,0)$, $C(-10,5,8)$, $D(-5,2,-4)$ и её высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

Решение.

$\overrightarrow{AD}=\{-1,0,10\}.$

Найдём смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$:

$$(\overrightarrow{AB},[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])=\begin{vmatrix}6 & -5 & -6\\ -6 & 3 & 2\\ -1 & 0 & -10\end{vmatrix}=112.$$

Вычислим объём пирамиды $V=\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}])\right|=\dfrac{1}{6}\cdot 112=\dfrac{56}{3}.$

Найдём высоту пирамиды $h=\dfrac{3V}{S}=\dfrac{3\cdot\frac{56}{3}}{14}=4.$

14. Определитель произведения двух квадратных матриц

Теорема. Если $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, то

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B. \tag{14.1}$$

Доказательство (для $n = 2$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) =$$

$$= \underline{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \underline{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} -$$

$$- \underline{a_{21}b_{11}a_{11}b_{12}} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} - \underline{a_{22}b_{21}a_{12}b_{22}} =$$

$$= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} =$$

$$= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det A \cdot \det B.$$

Теорема доказана.

15. Обратная матрица и ее вычисление

Определение 1. Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ называется обратимой $\Leftrightarrow$ $\exists \ A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, A^{-1} – обратная матрица к матрице A

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E. \tag{15.1}$$

Теорема. 1) Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ обратима $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

2) Если $\det(A) \neq 0$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{21}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{n1}}{\det A} \\ \dfrac{A_{12}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{n2}}{\det A} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{A_{1n}}{\det A} & \dfrac{A_{2n}}{\det A} & \cdots & \dfrac{A_{nn}}{\det A} \end{pmatrix},$$

где

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & *_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & *_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ *_{i1} & *_{i2} & \cdots & *_{ij} & \cdots & *_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & *_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

– алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (вычеркнуты i-я строка и j-й столбец).

Доказательство. 1) Если A обратима, то $\exists\ A^{-1} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, поэтому $AA^{-1} = E$, $1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$ и, следовательно, $\det(A) \neq 0$.

2) Если $\det(A) \neq 0$, то в случае $n = 2$ рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}}{\det A} & \dfrac{A_{21}}{\det A} \\ \dfrac{A_{12}}{\det A} & \dfrac{A_{22}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ *_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} *_{11} & *_{12} \\ a_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{21},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} *_{11} & a_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = -a_{12}, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & *_{12} \\ *_{21} & *_{22} \end{vmatrix} = a_{11},$$

поэтому

$$B=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}.$$

С другой стороны,

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\det A} & \dfrac{-a_{11}a_{12}+a_{12}a_{11}}{\det A} \\ \dfrac{a_{21}a_{22}-a_{22}a_{21}}{\det A} & \dfrac{-a_{21}a_{12}+a_{22}a_{11}}{\det A} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается, что $B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Поэтому $B=A^{-1}$.

Теорема доказана.

Определение. $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})=[\mathrm{M}_n(\mathbb{R})]^{\times}$ – группа обратимых матриц порядка n с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ (general linear group).

Следствие. $\det:\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{\times}$ является морфизмом групп:

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B,$$

$$\mathrm{Im}(\det)=\mathbb{R}^{\times},$$

$$\mathrm{Ker}(\det)=\{A\in\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})\mid \det A=1\}=\mathrm{SL_n}\mathbb{R}$$

– специальная линейная группа (special linear group). Так как фактор по ядру изоморфен образу, то

$$\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})/\mathrm{SL_n}(\mathbb{R})\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^{\times}.$$

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=7\cdot(-3)-(-4)\cdot 6=-21+24=3\neq 0\Rightarrow\exists!\ \ A^{-1},$$

т.е. матрица A – обратимая.

($\exists!$ – *существует и притом единственная*)

Для нахождения обратной матрицы для матрицы второго порядка воспользуемся формулой:

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель матрицы

$$\det A=\Delta=\begin{vmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 9\cdot 3+3\cdot 3\cdot 5+7\cdot 4\cdot 1-\left(3\cdot 9\cdot 1+7\cdot 3\cdot 3+2\cdot 4\cdot 5\right)=$$

$$=54+28+45-27-40-63=-3\neq 0\Rightarrow$$

матрица A – обратимая.

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}9 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=9\cdot 3-4\cdot 5=27-20=7,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-\left(3\cdot 3-4\cdot 1\right)=-\left(9-4\right)=-5,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 9\\ 1 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-9\cdot 1=15-9=6,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}7 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-\left(7\cdot 3-3\cdot 5\right)=-\left(21-15\right)=-6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-3\cdot 1=6-3=3,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-\left(2\cdot 5-7\cdot 1\right)=-\left(10-7\right)=-3,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{vmatrix}=7\cdot 4-3\cdot 9=28-27=1,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-\left(2\cdot 4-3\cdot 3\right)=-\left(8-9\right)=1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 7\\ 3 & 9\end{vmatrix}=2\cdot 9-7\cdot 3=18-21=-3.$$

Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A = -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 7\cdot2-6\cdot3+1\cdot1 & 7\cdot7-6\cdot9+1\cdot5 & 7\cdot3-6\cdot4+1\cdot3 \\ -5\cdot2+3\cdot3+1\cdot1 & -5\cdot7+3\cdot9+1\cdot5 & -5\cdot3+3\cdot4+1\cdot3 \\ 6\cdot2-3\cdot3-3\cdot1 & 6\cdot7-3\cdot9-3\cdot5 & 6\cdot3-3\cdot4-3\cdot3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 14-18+1 & 49-54+5 & 21-24+3 \\ -10+9+1 & -35+27+5 & -15+12+3 \\ 12-9-3 & 42-27-15 & 18-12-9 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, матрица A^{-1} найдена верно.

16. Линейный оператор. Примеры линейных операторов

Определение. Пусть E, F – линейные пространства над полем $\mathbb{R}$. Функция $\mathcal{A}: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ называется линейным оператором $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Линейные операторы – это морфизмы линейных пространств.

Примеры.

1) $E = F$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall\vec{x}\quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \mu\mathcal{A}(\vec{x})$.

Очевидно, $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \mu(\vec{x}+\vec{y}) = \mu\vec{x} + \mu\vec{y} = \mathcal{A}(\vec{x}) + \mathcal{A}(\vec{y})$ и $\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \mu(\lambda\vec{x}) = \lambda\mu\vec{x} = \lambda\mathcal{A}(\vec{x})$. Этот оператор называется гомотетией с коэффициентом μ.

2) $E = F$ – плоскость с отмеченной точкой 0, $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ вокруг отмеченной точки. Так как диагональ параллелограмма при повороте переходит в диагональ, то

$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y})$. С другой стороны, очевидно, $\mathcal{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

3) $E=F$ – плоскость с отмеченной точкой 0, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ – ортонормированный базис E, $\mathcal{A}(\vec{x})$ – проекция вектора $\vec{x}$ на ось $\vec{e}_1$. Легко видеть, что $\mathcal{A}(\vec{x})=(\vec{x},\vec{e}_1)\vec{e}_1$. Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})=(\vec{x}+\vec{y},\vec{e}_1)\vec{e}_1=(\vec{x},\vec{e}_1)\vec{e}_1+(\vec{y},\vec{e}_1)\vec{e}_1=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}),$$
$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x})=(\lambda\vec{x},\vec{e}_1)\vec{e}_1=\lambda(\vec{x},\vec{e}_1)\vec{e}_1=\lambda\mathcal{A}(\vec{x}).$$

Оператор $\mathcal{A}$ называется проектором.

4) $E=F$ – трехмерное пространство со скалярным произведением.

Фиксируем вектор $\vec{e}\in E$ и рассмотрим $\mathcal{A}(\vec{x})=[\vec{x},\vec{e}]$. Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})=[\vec{x}+\vec{y},\vec{e}]=[\vec{x},\vec{e}]+[\vec{y},\vec{e}]=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}),$$
$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x})=[\lambda\vec{x},\vec{e}]=\lambda[\vec{x},\vec{e}]=\lambda\mathcal{A}(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A}$ – линейный оператор.

5) Пусть $E=\{\vec{x}=(x_n)_{n\in N} \;\big|\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\}$ – (бесконечномерное) пространство сходящихся числовых последовательностей, $F=\mathbb{R}$, $\mathcal{A}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})=\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y}),$$
$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x})=\lim_{n\to\infty}\lambda x_n=\lambda\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda\mathcal{A}(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A}=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ – линейный оператор.

6) Пусть $E=C^1(a,b)$ – пространство функций на интервале (a,b) с непрерывной производной, $E=C(a,b)$ – пространство непрерывных на интервале (a,b) функций, $\mathcal{A}(f)=f'=\dfrac{df}{dx}$. Ясно, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор, потому что $(f+g)'=f'+g'$ и $(\lambda f)'=\lambda' f+\lambda f'=\lambda f'$.

17. Сумма и произведение линейных операторов. Матрица линейного оператора. Изоморфизм кольца эндоморфизмов конечномерного линейного пространства с кольцом квадратных матриц

Определение 1. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B}:E\to E$ – линейные операторы. Определим их сумму $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и произведение $\mathcal{A}\mathcal{B}$ формулами

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{B}(\vec{x}),$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x})=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})).$$

Очевидно,

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{x}+\vec{y})=\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})+\mathcal{B}(\vec{x}+\vec{y})=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y})+\mathcal{B}(\vec{x})+\mathcal{B}(\vec{y})=$$
$$=(\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{B}(\vec{x}))+(\mathcal{A}(\vec{y})+\mathcal{B}(\vec{y}))=(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{x})+(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{y});$$
$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\lambda\vec{x})=\mathcal{A}(\lambda\vec{x})+\mathcal{B}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathcal{A}(\vec{x})+\lambda\mathcal{B}(\vec{x})=$$
$$=\lambda(\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{B}(\vec{x}))=\lambda(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\vec{x});$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}+\vec{y})=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}+\vec{y}))=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x})+\mathcal{B}(\vec{y}))=$$
$$=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}))+\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{y}))=(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x})+(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{y});$$
$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\lambda\vec{x})=\mathcal{A}(\mathcal{B}(\lambda\vec{x}))=\mathcal{A}(\lambda\mathcal{B}(\vec{x}))=\lambda\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{x}))=\lambda(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{x}).$$

Поэтому $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}\mathcal{B}$ – линейные операторы.

Определение 2. Пусть $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ – базис E, $\mathcal{A}:E\to E$ – линейный оператор. Тогда

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j)=a_{1j}\vec{e}_1+\ldots+a_{ij}\vec{e}_i+\ldots+a_{nj}\vec{e}_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\vec{e}_i,\quad a_{ij}\in\mathbb{R}.$$

Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$; j-й столбец матрицы $\mathcal{A}$ – это набор координат вектора $\mathcal{A}(\vec{e}_j)$ в базисе $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$.

Определение 3. $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)=\{\mathcal{A}:E\to E\}$ – множество всех линейных операторов, действующих из E в E (endomorphism = эндоморфизм, т.е. морфизм из E в E).

Легко видеть, что $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)$ – ассоциативное кольцо, единицей которого является тождественный оператор $\mathrm{id}_E:E\to E$, действующий по правилу $\mathrm{id}_E(\vec{x})=\vec{x}$ (identity morphism).

Изоморфизмом двух колец $R\xrightarrow{\sim}R'$ называется взаимно однозначное отображение $f:R\to R'$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $f(r_1 + r_2) = f(r_1) + f(r_2)$;

2) $f(r_1 r_2) = f(r_1) f(r_2)$;

3) $f(1_R) = 1_{R'}$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – базис E. Тогда отображение $f : \operatorname{End}\mathbb{R}(E) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, определенное формулой

$$f(\mathcal{A}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$, является изоморфизмом колец.

Доказательство. Очевидно, что оператор $\mathcal{A}$ восстанавливается по матрице A единственным образом: если $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j$, то

$$\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i\right).$$

Поэтому f – взаимно однозначное отображение. При этом единица id_E кольца $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, которая является единицей кольца $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Осталось проверить, что сумме операторов отвечает сумма матриц, а произведению операторов отвечает произведение матриц:

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\vec{e}_j) = \mathcal{A}(\vec{e}_j) + \mathcal{B}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})\vec{e}_i;$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e}_j) = \mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}_j)) = \mathcal{A}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\mathcal{A}(\vec{e}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)\vec{e}_i.$$ Теорема доказана.

18. Матрица поворота плоскости. Зависимость матрицы оператора от выбора базиса. Определитель оператора

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – поворот плоскости E вокруг точки 0 на угол φ, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Это следует из очевидных соотношений

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2,$$

$$\mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2.$$

Теорема (зависимость матрицы оператора от выбора базиса). Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – линейный оператор,

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, определенная из соотношения $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i$. Если

$$A_f = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора $\mathcal{A}$ в новом базисе $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$,

причем $\vec{f}_j = \sum\limits_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i$, где $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от старого базиса $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ к новому базису $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, то $A_f = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q$.

Доказательство. Достаточно доказать равенство $Q \cdot A_f = A_e \cdot Q$. Очевидно,

$$\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\vec{f}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ki}b_{ij}\right)\vec{e}_k.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\mathcal{A}(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}q_{ij}\right)\vec{e}_k .$$

Поэтому

$$(Q \cdot A_f)_{kj} = \sum_{i=1}^{n} q_{ki}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}q_{ij} = (A_e \cdot Q)_{kj} .$$

Теорема доказана.

Следствие – определение. Число

$$\det A_f = \det(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q) = \det Q^{-1} \cdot \det A_e \cdot \det Q =$$

$$= \det Q^{-1} \cdot \det Q \cdot \det A_e = \det(Q^{-1} \cdot Q) \cdot \det A_e =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \det A_e = 1 \cdot \det A_e = \det A_e$$

не зависит от выбора базиса и называется определителем $\det \mathcal{A}$ оператора $\mathcal{A}$.

Пример. Если $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ вокруг точки 0, то

$$\det \mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

19. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Вычисление собственных чисел и собственых векторов

Определение. Вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором (eigenvector) линейного оператора $\mathcal{A} : E \to E \Leftrightarrow \exists \lambda \in k \quad \mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Число λ называется собственным числом (eigenvalue) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору $\vec{x}$.

Теорема. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица оператора $\mathcal{A}: E \to E$ в базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ. Тогда λ является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

а набор координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ собственного вектора является (ненулевым!) решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Доказательтво (в случае $n = 2$).

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \neq \vec{0}$;

$\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$;

$$\mathcal{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1\mathcal{A}(\vec{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\vec{e}_2) =$$
$$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = \lambda(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2).$$

Сравним коэффициенты при $\vec{e}_i$ в обеих частях последнего равенства:

$$\begin{cases} \vec{e}_1: \ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1, \\ \vec{e}_2: \ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Осталось проверить, что $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Предположим, напротив, что $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда по правилу Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}} = 0, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & 0 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}} = 0,$$

поэтому $\vec{x} = \vec{0}$, что невозможно (по определению, собственный вектор всегда ненулевой).

Теорема доказана.

20. Независимость характеристического уравнения от выбора базиса. След линейного оператора и его независимость от выбора базиса

Теорема. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Пусть $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ – другой базис. Тогда $A_f = Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q$. С другой стороны, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Очевидно,

$$\det\left(A_f - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det\left(Q^{-1} \cdot A_e \cdot Q - Q^{-1} \cdot \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot Q \right) =$$

$$= \det\left(Q^{-1} \cdot \left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot Q \right) =$$

$$= \det Q^{-1} \cdot \det\left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \det Q =$$

$$= \det\left(A_e - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Теорема доказана.

Следствие. След $\mathrm{Tr}\mathcal{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ не зависит от выбора базиса (trace=след).

Доказательство. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет вид

$$(-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) + \ldots + \det \mathcal{A} = 0$$

и не зависит от выбора базиса. Поэтому его коэффициенты (и, в частности, след $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$) не зависят от выбора базиса. Следствие доказано.

Пример. В случае $n=2$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

имеет вид

$$\lambda^2-\lambda(a_{11}+a_{22})+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0,$$

т.е.

$$\lambda^2-\mathrm{Tr}\mathcal{A}\cdot\lambda+\det\mathcal{A}=0.$$

21. Ранг матрицы и его вычисление. Метод окаймляющих миноров

Определение 1. Пусть $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ – векторы линейного пространства E над полем $\mathbb{R}$. Рангом этой системы векторов называется размерность пространства

$$F=\mathbb{R}\vec{f}_1+\ldots+\mathbb{R}\vec{f}_n\subset E:\mathrm{rank}\{\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n\}=\dim\mathbb{R}F,$$

где $\mathbb{R}\vec{f}_1+\ldots+\mathbb{R}\vec{f}_n$ – всевозможные линейные комбинации векторов $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$.

Пример.

$$\vec{\text{Л}}+\vec{\text{Р}}+\vec{\text{Щ}}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\text{Р}}=-\vec{\text{Л}}-\vec{\text{Щ}}\Rightarrow F=\mathbb{R}\vec{\text{Л}}+\mathbb{R}\vec{\text{Р}}+\mathbb{R}\vec{\text{Щ}}=\mathbb{R}\vec{\text{Л}}+\mathbb{R}\vec{\text{Щ}}\Rightarrow$$
$$\dim\mathbb{R}F\le 2\Rightarrow rank\{\vec{\text{Л}},\vec{\text{Р}},\vec{\text{Щ}}\}=\dim\mathbb{R}F\le 2.$$

Определение 2. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $\vec{f}_1=(a_{11},\ldots,a_{1n})\in\mathbb{R}^n,\ldots,\vec{f}_m=(a_{m1},\ldots,a_{mn})\in\mathbb{R}^n$,

$$F=\mathbb{R}\vec{f}_1+\ldots+\mathbb{R}\vec{f}_m.$$

Рангом матрицы A называется число $\dim\mathbb{R}F$.

Определение 3. Выберем k строк и k столбцов матрицы A. Пусть M =(определитель k-го порядка, элементы которого a_{ij} расположены в выбранных строках и столбцах). M называется минором k-го порядка.

Пример. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\end{pmatrix}.$$

Миноры 1-го порядка: $1, 2, \ldots, 12$.

Миноры 2-го порядка: $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix}7 & 8\\ 11 & 12\end{vmatrix}$.

Миноры 3-го порядка: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\\ 9 & 10 & 11\end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 6 & 7 & 8\\ 10 & 11 & 12\end{vmatrix}$.

Теорема. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров.

Комментарий. Предположим, что существует минор r-го порядка $M \neq 0$. Если все миноры порядка $> r$ равны нулю, то ранг A равен r.

Доказательство. Пусть $M \neq 0$ – минор порядка r, а все миноры порядка $> r$ равны нулю. Мы должны доказать, что $\operatorname{rank} A = r$.

Можно считать, что M расположен в северо - западном углу:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1r+1} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & M \neq 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rr+1} & \ldots & a_{rn}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & a_{mr+1} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Мы должны проверить, что все строки с номерами $> r$ выражаются через первые r строк.

Возьмем для простоты случай $r = 2$:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = 0, \qquad \text{где} \quad M = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Поскольку $M \neq 0$, то строки минора M не пропорциональны. Поэтому строки (a_{11}, a_{12}, a_{13}) и (a_{21}, a_{22}, a_{23}) тоже не пропорциональны (эти векторы не лежат на одной прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$). С другой стороны, объем параллелепипеда, построенного на строках матрицы A, равен нулю. Значит, этот параллелепипед плоский, и поэтому 3-я строка лежит в плоскости, натянутой на 1-ю и 2-ю строки. Поскольку 1-я и 2-я строки образуют базис плоскости, то 3-я строка является линейной комбинацией 1-й и 2-й строк.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема:

Теорема. Если $M \neq 0$ и все окаймляющие миноры равны нулю, то $\operatorname{rank} A = r$.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix},$$

Окаймляющие миноры:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2.$$

22. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли. Алгоритм решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(матрица $\overline{A}$ называется расширенной матрицей системы уравнений).

Теорема Кронекера – Капелли. Система уравнений имеет хотя бы одно решение (совместна) $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$.

Доказательство.

1) Предположим, что система совместна, и пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – решение. Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A, поэтому размерность пространства, порожденного столбцами матрицы $\overline{A}$, равна размерности пространства, порожденного столбцами A, т.е. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$ (надо учесть, что ранг матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля миноров, а поэтому ранг, вычисленный по строкам, равен рангу, вычисленному по столбцам).

2) Пусть $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A}$. Присоединяя столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ к столбцам матрицы A, мы получим ту же размерность пространства, порожденного столбцами. Значит, $\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ выражается через $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ с какими-то коэффициентами $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Поэтому $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – решение системы. Теорема доказана.

Пример 1.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} A \geq 2$. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 2$, и система совместна по теореме Кронекера – Капелли. Так как $M \neq 0$, то 1-я и 2-я строки матрицы $\overline{A}$ линейно независимы, а 3-я строка является линейной комбинацией этих строк. Поэтому система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Переменные, которые не попали в минор M, перенесем в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 - 3x_3 \\ x_1 + x_2 = -x_3 \end{cases}$$

и будем рассматривать как независимые переменные. Поскольку $M \neq 0$, то можно воспользоваться правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 - 3x_3 & -2 \\ -x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(4 - 3x_3) \cdot 1 - 2x_3}{3} = \frac{4 - 5x_3}{3},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - 3x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_3 - 4 + 3x_3}{3} = \frac{2x_3 - 4}{3}.$$

Решение имеет вид

$$\left(\frac{4 - 5x_3}{3}, \frac{2x_3 - 4}{3}, x_3 \right),$$

где x_3 – независимая переменная. Если, например, $k = \mathbb{R}$, то решения нашей системы образуют прямую.

Пример 2.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 - 2x_3 = 4 \end{cases}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Очевидно,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} A \geq 2$. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} A = 2$. Очевидно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

поэтому $\operatorname{rank} \overline{A} = 3 \neq \operatorname{rank} A$, и система несовместна (не имеет решений) по теореме Кронекера – Капелли.

23. Прямая на плоскости. Уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости

1-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точку (x_0, y_0) и имеет направляющий вектор $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости. Тогда $(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{a}$, поэтому в координатной записи получаем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2. \end{cases}$$

2-й способ задания прямой на плоскости: пусть прямая L проходит через точки $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, и (x, y) – произвольная точка прямой L. Имеем:

$$(x,y)-(x_1,y_1)=t[(x_2,y_2)-(x_1,y_1)]\Rightarrow\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

Это уравнение имеет вид $Ax+By+C=0$.

3-й способ задания прямой на плоскости: фиксируем нормаль $\vec{n}$ к прямой L (по определению, $\|\vec{n}\|=1,\ \ \vec{n}\perp\vec{a}$). Поскольку $(\vec{n},\vec{a})=0$, то

$$(\vec{n},t\vec{a})=0\Rightarrow(\vec{n},(x-x_0)\vec{e}_1+(y-y_0)\vec{e}_2)=0,$$

где $\vec{n}=n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2$, $n_1^{\ 2}+n_2^{\ 2}=1$, в силу соотношения $\|\vec{n}\|=1$. Наше уравнение принимает вид

$$(n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2,(x-x_0)\vec{e}_1+(y-y_0)\vec{e}_2)=0,$$

т.е. мы получаем нормальное уравнение прямой:

$$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)=0,$$

$$n_1x+n_2y+(-n_1x_0-n_2y_0)=0.$$

Сравним: прямая L задается уравнением $Ax+By+C=0$ и нормальным уравнением. Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix}A & B\\ n_1 & n_2\end{pmatrix},\qquad \overline{A}=\begin{pmatrix}A & B & -C\\ n_1 & n_2 & n_1x_0+n_2y_0\end{pmatrix}.$$

Поскольку множество решений системы

$$\begin{cases}Ax+By=-C\\ n_1x+n_2y=n_1x_0+n_2y_0\end{cases}$$

– прямая L, то $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\overline{A}=1$ (если бы $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}\overline{A}=2$, то по правилу Крамера множество решений состояло бы из одной точки). Поэтому $(n_1,n_2)=\lambda(A,B)$. С другой стороны,

$$1=\|\vec{n}\|=\sqrt{(\lambda A)^2+(\lambda B)^2}=|\lambda|\sqrt{A^2+B^2},$$

$$|\lambda|=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow$$

$$\vec{n}=n_1\vec{e}_1+n_2\vec{e}_2=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A\vec{e}_1+B\vec{e}_2).$$

Теорема. Расстояние от точки (x_0,y_0) на плоскости до прямой $Ax+By+C=0$ равно $\rho=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Доказательство. Опустим перпендикуляр из точки (x_0, y_0) на прямую L. Обозначим точку пересечения перпендикуляра с прямой L через (x, y). Имеем $(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{n}$, где $t = \pm\rho$. Это соотношение принимает вид

$$\begin{cases} x = x_0 + tn_1 \\ y = y_0 + tn_2, \end{cases}$$

причем $Ax + By + C = 0$, т.е. $A(x_0 + tn_1) + B(y_0 + tn_2) + C = 0$. Можно считать, что $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2)$. В этом случае $n_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $n_2 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, поэтому

$$Ax_0 + By_0 + C + t \cdot \left(\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$Ax_0 + By_0 + C + t\sqrt{A^2 + B^2} = 0 \Rightarrow$$

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow$$

$$\rho = |t| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть даны две пересекающиеся прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Уравнения биссектрис, проведенных через точку пересечения, имеют вид

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

24. Угол между двумя прямыми на плоскости. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Пусть даны две прямые L_1, L_2. По определению,

$$\left(L_1 \widehat{,} L_2\right) = \left(\vec{n}_1 \widehat{,} \vec{n}_2\right) =$$

$$= \arccos \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} = \arccos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) =$$

$$= \arccos\left(\pm \frac{A_1\vec{e}_1 + B_1\vec{e}_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \pm \frac{A_2\vec{e}_1 + B_2\vec{e}_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right) =$$

$$= \arccos\left(\pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2}}} \right).$$

Следствие. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Теорема. Рассмотрим две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (L_1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (L_2)$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{pmatrix}.$$

1) Если $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} \overline{A}$, то прямые не пересекаются (параллельны).

2) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$, то прямые совпадают.

3) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 2$, то прямые пересекаются в одной точке.

25. Плоскость в трехмерном пространстве. Расстояние от точки до плоскости в трехмерном пространстве. Угол между плоскостями. Взаимное расположение двух плосkстей в трехмерном пространстве. Взаимное расположение трех плоскостей в трехмерном пространстве

Пусть даны три точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), не лежащие на одной прямой. Тогда они задают единственную плоскость π.

Очевидно, $(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ является линейной комбинацией векторов $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ и $(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0.$$

Плоскость $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ имеет нормаль

$$\vec{n} = \pm\frac{A\vec{e}_1+B\vec{e}_2+C\vec{e}_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам о прямых на плоскости:

Теорема. Расстояние от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно

$$\rho = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Теорема. Рассмотрим плоскости

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Двугранный угол между этими плоскостями равен

$$(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = (\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2) =$$
$$= \arccos\left(\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right).$$

Следствие (условие ортогональности двух плоскостей). $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$

Теорема (взаимное расположение 2-х плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}.$$

1) Если $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} \overline{A}$, то плоскости не пересекаются (параллельны и не совпадают).

2) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 2$, то плоскости пересекаются по прямой.

3) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$, то плоскости совпадают.

Теорема (взаимное расположение 3-х плоскостей в трехмерном пространстве). Рассмотрим плоскости

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$
$$\pi_3 : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}.$$

1) Если $\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank} \overline{A}$, то либо две плоскости параллельны, а третья их пересекает, либо две плоскости пересекаются по прямой L, а третья параллельна этой прямой, либо все три плоскости параллельны, либо две плоскости совпадают, а третья им параллельна.

2) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 3$, то плоскости пересекаются в одной точке (в этом случае говорят, что плоскости находятся в общем положении).

3) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 2$, то плоскости содержат одну общую прямую.

4) Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \overline{A} = 1$, то все три плоскости совпадают.

26. Самосопряженные операторы и симметрические матрицы. Собственные числа самосопряженного оператора

Определение 1. Конечномерное линейное пространство E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел называется евклидовым $\Leftrightarrow$ на E определено скалярное произведение.

Определение 2. Пусть E – евклидово пространство. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ называется самосопряженным $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ $(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y}))$.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ самосопряжен $\Leftrightarrow$ его матрица A_e симметрическая, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Доказательство.

Напомним, что $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 1, & если \quad i = j, \\ 0, & если \quad i \neq j, \end{cases}$, поэтому

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{y}) = (\vec{x}, \mathcal{A}(\vec{y})) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cc} (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \vec{e}_i) & (\vec{e}_j, \mathcal{A}(\vec{e}_i)) \\ \| & \| \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k, \vec{e}_i \right) & \left(\vec{e}_j, \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} \vec{e}_k \right) \\ \| & \| \\ a_{ij} & a_{ji}. \end{array}$$

Теорема. Если оператор $\mathcal{A}: E \to E$ самосопряжен, то все комплексные корни характеристического уравнения являются вещественными.

Доказательство (для $n = 2$). Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. По предыдущей теореме имеем: $a_{ij} = a_{ji}$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ \underbrace{a_{21}}_{=a_{12}} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$

Напомним, что

$$\lambda^2 + \lambda p + q = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

В нашем случае

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} =$$

$$= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2+2a_{11}a_{22}+a_{22}^2}{4} - (a_{11}a_{22}-a_{12}^2)} =$$

$$= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{11}^2-2a_{11}a_{22}+a_{22}^2+4a_{12}^2}{4}} =$$

$$= \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}{4}}_{\ge 0}} \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Теорема доказана.

27. Спектральная теорема

Спектральная теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E. Тогда в E существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}: \mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$,

$$A_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство (в случае $n = 2$).

Пусть A_e – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Тогда $a_{ij} = a_{ji}$,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}{4}}.$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то $(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$, поэтому $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = a_{21} = 0$, и матрица $A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$.

В частности, $\mathcal{A}(\vec{e}_j) = a_{11}\vec{e}_j$. В этом случае можно в качестве ортонормированного базиса из собственных векторов взять $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$.

Предположим, что $\lambda_1 \ne \lambda_2$. Пусть $\vec{x}$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_1, $\vec{y}$ – собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_2. Рассмотрим

$$\vec{f}_1 = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}, \quad \vec{f}_2 = \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}.$$

Очевидно,

$$\|\vec{f}_1\| = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| = 1, \quad \|\vec{f}_2\| = \left\| \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\| = 1,$$

$$\mathcal{A}(\vec{f}_1) = \frac{\mathcal{A}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \frac{\lambda_1 \vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \lambda_1 \vec{f}_1, \quad \mathcal{A}(\vec{f}_2) = \frac{\mathcal{A}(\vec{y})}{\|\vec{y}\|} = \frac{\lambda_2 \vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \lambda_2 \vec{f}_2.$$

Остается проверить, что $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Очевидно,

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}(\vec{f}_1), \vec{f}_2) & & (\vec{f}_1, \mathcal{A}(\vec{f}_2)) \\ \| & & \| \\ (\lambda_1 \vec{f}_1, \vec{f}_2) & & (\vec{f}_1, \lambda_2 \vec{f}_2) \\ \| & & \| \\ \lambda_1(\vec{f}_1, \vec{f}_2) & & \lambda_2(\vec{f}_1, \vec{f}_2), \end{array}$$

поэтому $\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0}(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, и, следовательно, $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$, $\vec{f}_1 \perp \vec{f}_2$.

Теорема доказана.

28. Ортогональные операторы и матрицы

Определение 1. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ в евклидовом пространстве E называется ортогональным $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$.

Теорема 1. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то он сохраняет скалярное произведение, нормы векторов и углы между ними.

Доказательство. По определению, $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение: $(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y})) = (\vec{x}, \vec{y})$. Поэтому

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\| = \sqrt{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{x}))} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{y})} = \|\vec{x}\|,$$

$$(\mathcal{A}(\vec{x}) \widehat{,} \mathcal{A}(\vec{y})) = \arccos \frac{(\mathcal{A}(\vec{x}), \mathcal{A}(\vec{y}))}{\|\mathcal{A}(\vec{x})\| \cdot \|\mathcal{A}(\vec{y})\|} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = (\vec{x} \widehat{,} \vec{y}).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства E. Оператор $\mathcal{A}: E \to E$ ортогональный $\Leftrightarrow$ его матрица A ортогональная, т.е. ${}^tA = A^{-1}$, где ${}^tA$ – матрица, транспонированная к A.

Доказательство.

По определению матрицы A,

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i.$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad j = k; \\ 0, & \textit{если} \quad j \neq k; \end{cases}$$

$$\|$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \vec{e}_i, \sum_{l=1}^{n} a_{lk} \vec{e}_l\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{ij} a_{lk} (\vec{e}_i, \vec{e}_l)$$

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik}.$$

В итоге

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad j = k; \\ 0, & \textit{если} \quad j \neq k; \end{cases}$$

$$\|$$

$$\sum_{i=1}^{n} {}^t a_{ji} a_{ik},$$

где ${}^t a_{ji} = a_{ij}$ – элемент транспонированной матрицы ${}^t A$, расположенный в j-й строке и i-м столбце. Поэтому соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} {}^t a_{ji} a_{ik} = \begin{cases} 1, & если \quad j = k; \\ 0, & если \quad j \neq k; \end{cases}$$

эквивалентно соотношению ${}^t A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Значит, ${}^t A = A^{-1}$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$ – другой ортонормированный базис, $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i$, $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица перехода. Тогда ${}^t Q = Q^{-1}$, т.е. Q – ортогональная матрица.

Доказательство.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$ с матрицей $A_e = Q$, т.е.

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} \vec{e}_i = \vec{f}_j.$$

Тогда

$$(\vec{f}_j, \vec{f}_k) = (\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = \begin{cases} 1, & если \quad j = k; \\ 0, & если \quad j \neq k; \end{cases} = (\vec{e}_j, \vec{e}_k) \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_j), \mathcal{A}(\vec{e}_k)) = (\vec{e}_j, \vec{e}_k).$$

Поэтому $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, а его матрица $A_e = Q$ является ортогональной.

Теорема доказана.

Теорема 4. Если $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, то $\det \mathcal{A} = \pm 1$.

Доказательство.

$\det \mathcal{A} = \det A$, где A – ортогональная матрица: ${}^t A = A^{-1}$. С другой стороны, по свойству определителей, $\det {}^t A = \det A$. Поэтому

$$1 = \det A^{-1} \cdot \det A = \det {}^t A \cdot \det A = \det A \cdot \det A = \det^2 A \Rightarrow \det A = \pm 1.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Ортогональный оператор $\mathcal{A}$ с определителем $\det \mathcal{A} = 1$ называется поворотом.

29. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ – ортонормированный базис, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Функция $f(\vec{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$, называется квадратичной формой. Симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей квадратичной формы.

Пример. Если $f(\vec{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, то

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(коэффициент (–4) при x_1x_2 разносится в матрице A как $a_{12} = -2 = a_{21}$).

Теорема. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 .$$

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}: E \to E$, определенный формулой

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i .$$

Поскольку матрица A симметрическая, то оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.

Очевидно,

$$(\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = \left(\mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\vec{e}_j \right), \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathcal{A}(\vec{e}_j), \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i, \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j x_k \underbrace{(\vec{e}_i, \vec{e}_k)}_{=0,\ \text{если}\ i=k;=0,\ \text{если}\ i\neq k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j x_i = f(\vec{x}) .$$

В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(\vec{f}_j) = \lambda_j \vec{f}_j$. В этом базисе вектор $\vec{x}$ имеет новые координаты: $\vec{x} = y_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \vec{f}_n$,

$$f(\vec{x}) = (\mathcal{A}(\vec{x}), \vec{x}) = (\mathcal{A}(y_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \vec{f}_n) =$$
$$= (y_1 \mathcal{A}(\vec{f}_1) + \ldots + y_n \mathcal{A}(\vec{f}_n), y_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \vec{f}_n) =$$
$$= (y_1 \lambda_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \lambda_n \vec{f}_n, y_1 \vec{f}_1 + \ldots + y_n \vec{f}_n) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 .$$

Теорема доказана.

30. Классификация кривых второго порядка на плоскости

Задачи. Привести к каноническому виду:

1) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;
2) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 6y + 2 = 0$;
3) $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 3y + 2 = 0$.

На евклидовой плоскости с ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ рассмотрим кривую 2-го порядка, заданную уравнением

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2,$$
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2,$$
$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{2} q_{ij}\vec{e}_i ,$$

$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2$.

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = y_1 \vec{f}_1 + y_2 \vec{f}_2 = y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2) .$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{e}_j$ в левой и правой частях, получим:

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение кривой, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right) +$$

$$+ b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 - \lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = -c_0.$$

1) Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 > 0$, то положим $a^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(эллипс).

2) Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 < 0$, то положим $a^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1$$

(мнимый эллипс).

3) Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 > 0,\ \ -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{1}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке).

4) Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 > 0$, то положим $a^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

(гипербола).

Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 < 0$, то снова получим гиперболу.

5) Если $\lambda_1 > 0,\ \ \lambda_2 < 0,\ \ -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ \ b^2 = \dfrac{-1}{\lambda_2}$.

Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$$

(пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2 = 0$. Тогда уравнение кривой принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + b_2y_2 + b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 = 0;$$

$$\lambda_1\left(y_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2y_2 + \underbrace{b_0 - \lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2}_{c_0} = 0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} = z_1 \\ y_2 = z_2. \end{cases}$$

Тогда уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2 z_2 = -c_0.$$

Если $b_2 \neq 0$, то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 + \dfrac{c_0}{b_2} = t_2, \end{cases}$$

и уравнение кривой приводится к виду

$$\lambda_1 t_1^2 + b_2 t_2 = 0.$$

Предположим сначала, что $b_2 \neq 0$.

6) Если $\lambda_1 > 0,\ b_2 > 0$, то положим $a^2 = \dfrac{b_2}{\lambda_1}$. Уравнение кривой принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} + t_2 = 0$$

(парабола); случай $b_2 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_2 на $-t_2$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_2 = 0$ (в этом случае уравнение кривой не содержит переменной t_2). Мы получаем следующие варианты:

7) $\dfrac{z_1^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных вещественных прямых);

8) $\dfrac{z_1^2}{a^2} = -1$ (пара параллельных мнимых прямых);

9) $z_1^2 = 0$ (пара совпадающих прямых).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существуют 9 классов кривых 2-го порядка:

1) эллипс;
2) мнимый эллипс;
3) пара мнимых прямых, пересекающихся в вещественной точке;
4) гипербола;

5) пара вещественных пересекающихся в одной точке прямых;
6) парабола;
7) пара параллельных вещественных прямых;
8) пара параллельных мнимых прямых;
9) пара совпадающих прямых.

31. Ориентация. Линейные операторы, сохраняющие ориентацию

Определение. Пусть $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$ – другой базис этого же пространства,

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i \,,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

– матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$. Будем говорить, что эти базисы имеют одинаковую ориентацию, если $\det Q > 0$.

Если $\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_n$ – третий базис пространства E, ориентация которого совпадает с ориентацией $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$, то $\vec{g}_j = \sum_{i=1}^{n} q'_{ij}\vec{f}_i$, $\det Q' > 0$. Проверим, что матрица Q'' перехода от базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_n$ является произведением $Q'' = QQ'$: действительно,

$$\vec{g}_j = \sum_{k=1}^{n} q'_{kj}\vec{f}_k = \sum_{k=1}^{n} q'_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ik}\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}q'_{kj}\right)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} q''_{ij}\vec{e}_i \,.$$

Поэтому из соотношения

$$\det Q'' = \det(QQ') = \det Q \det Q' > 0$$

следует, что базисы $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ и $\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_n$ имеют одну и ту же ориентацию.

В итоге все базисы пространства E разбиваются на два класса: один класс состоит из базисов, ориентация которых совпадает с ориентацией базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$; другой класс состоит из базисов, ориентация которых противоположна ориентации базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$.

Примеры.

1) $E=\mathbb{R}$ с обычными операциями сложения и умножения. Здесь строго положительные числа задают положительное направление числовой прямой (положительную ориентацию), а строго отрицательные числа задают отрицательное направление числовой прямой (отрицательную ориентацию).

2) E – плоскость с отмеченной точкой. Базисы

$$\begin{array}{l} \vec{e}_2 \\ \uparrow \\ \quad \rightarrow\ \ \vec{e}_1=\vec{f}_1 \\ \downarrow \\ \vec{f}_2 \end{array}$$

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1=\vec{e}_1,\ \vec{f}_2=-\vec{e}_2$,

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \det Q=-1<0.$$

3) Правый ортонормированный базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ и левый ортонормированный базис $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$ 3-мерного пространства

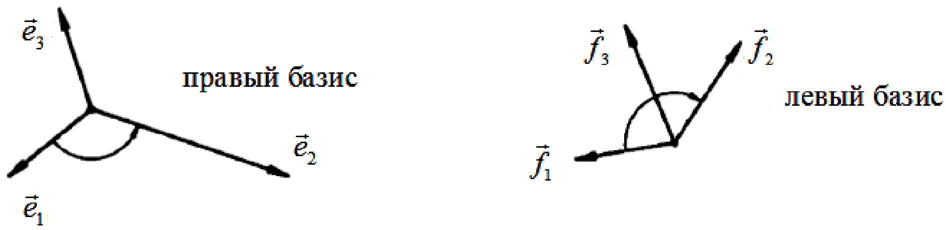


рис. 8

имеют противоположные ориентации, потому что $\vec{f}_1=-\vec{e}_1,\ \vec{f}_2=\vec{e}_2$, $\vec{f}_3=\vec{e}_3$,

$$Q=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \det Q=-1<0.$$

Пусть $\mathcal{A}:E\to E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (другими словами, $\det\mathcal{A}\neq 0$). Тогда $\mathcal{A}(\vec{e}_1),\dots,\mathcal{A}(\vec{e}_n)$ – новый базис пространства E, причем $\mathcal{A}(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\vec{e}_i$. Поэтому базисы $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ и $\mathcal{A}(\vec{e}_1),\dots,\mathcal{A}(\vec{e}_n)$ имеют одинаковую ориентацию $\Leftrightarrow$ $\det\mathcal{A}>0$

(что эквивалентно соотношению $\det \mathrm{A} > 0$, поскольку определитель матрицы оператора не зависит от выбора базиса).

Если $\det\mathcal{A} > 0$, то мы будем говорить, что оператор $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию.

Например, если $\mathcal{A}$ – поворот плоскости на угол φ, то $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию, потому что

$$\det\mathcal{A} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Напомним, что операторы, сохраняющие скалярное произведение, называются ортогональными. Поскольку для любого ортогонального оператора $\mathcal{A}$ имеем соотношение $\det\mathcal{A} = \pm 1$, то сохраняющие ориентацию ортогональные операторы – это в точности повороты.

32. Линейные операторы, сохраняющие объем

Теорема. Пусть $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ – базис конечномерного векторного пространства E над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел, $\mathcal{A}: E \to E$ – обратимый (невырожденный) линейный оператор (т.е. $\det\mathcal{A} \neq 0$). Тогда (объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1),\ldots,\mathcal{A}(\vec{e}_n)$)=$|\det\mathcal{A}|\cdot$(объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$). В частности, $\mathcal{A}$ увеличивает объемы тел в $|\det\mathcal{A}|$ раз.

Доказательство. Для простоты мы рассмотрим случай $\dim E = 3$.

Можно считать, что $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис E. Имеем

$$\mathcal{A}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\vec{e}_i\ ,$$

поэтому объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2)$, $\mathcal{A}(\vec{e}_3)$, равен

$$\left(\text{абсолютной величине } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \left(\text{абсолютной величине } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) = |\det \mathcal{A}| =$$

$$= |\det \mathcal{A}| \cdot \underbrace{(\text{объем параллелепипеда, построенного на векторах } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}_{=1}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Оператор $\mathcal{A}$ сохраняет объем $\Leftrightarrow$ $|\det\mathcal{A}| = 1$.

Следствие 2. Оператор $\mathcal{A}$ сохраняет объем и ориентацию $\Leftrightarrow$ $\det\mathcal{A} = 1$.

В частности, повороты сохраняют объем и ориентацию.

Линейные операторы $\mathcal{A} : E \to E$, сохраняющие объем и ориентацию, образуют *специальную линейную группу* $\mathrm{SL}(E)$ (special linear group). По определению,

$$\mathrm{SL}(E) = \{\mathcal{A} : E \to E \mid \det \mathcal{A} = 1\}.$$

Теорема. Пусть $\mathcal{A} : E \to E$ – линейный оператор, сохраняющий объем и углы между векторами. Тогда $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор.

Доказательство.

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – ортонормированный базис плоскости. Так как $\mathcal{A}$ сохраняет углы, то

$$\frac{\pi}{2} = (\vec{e}_1 \widehat{,} \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1) \widehat{,} \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому параллелограмм, построенный на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$, является прямоугольником. Пусть $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ – диагональ квадрата, построенного на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Ясно, что $\mathcal{A}(\vec{d}) = \mathcal{A}(\vec{e}_1) + \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ – диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$. Поэтому из равенств

$$\frac{\pi}{4} = (\vec{d} \widehat{,} \vec{e}_1) = (\mathcal{A}(\vec{d}) \widehat{,} \mathcal{A}(\vec{e}_1)),$$

следует, что прямоугольник является квадратом. Поскольку $\mathcal{A}$ сохраняет площади, то площадь этого квадрата равна 1. Значит, длины векторов $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ равны 1. Поэтому оператор $\mathcal{A}$ переводит ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ в ортонормированный базис $\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)$ и, следовательно, $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор.

Теорема доказана.

33. Простейшие примеры алгебр Ли

Определение 1. Векторное пространство g над полем k называется алгеброй Ли, если каждой паре векторов $x, y \in g$ отвечает вектор $[x, y] \in g$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) $\forall \lambda \in k \quad [\lambda x, y] = [x, \lambda y] = \lambda [x, y]$;

2) $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$; $[x, y+z] = [x, y] + [x, z]$;

3) $\forall x \in g \quad [x, x] = 0$;

4) (тождество Якоби) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Из свойств 2) – 3) следует, что

$$0 = [x+y, x+y] = \underbrace{[x, x]}_{=0} + [y, x] + [x, y] + \underbrace{[y, y]}_{=0}.$$

Поэтому $[x, y] = -[y, x]$.

Примеры.

1) g – 3-мерное пространство со скалярным произведением, $[x, y]$ – векторное произведение. Нуждается в проверке только тождество Якоби. Его достаточно проверить только для базисных векторов правого ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (легкое упражнение).

2) $g = M_n(\mathbb{R})$ – кольцо квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля k. Пусть $[x, y] = xy - yx$, где xy – обычное произведение матриц. В этом случае тождество Якоби действительно выполняется:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = [xy - yx, z] + [yz - zy, x] + [zx - xz, y] =$$
$$= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xyz + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz = 0.$$

3) Пусть $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in g$. В этом случае алгебра Ли g называется коммутативной.

4) Пусть $g = \mathrm{sl}_n(\mathbb{R})$ – множество всех квадратных матриц порядка n с нулевым следом. Если $\mathrm{Tr}(x) = 0$ и $\mathrm{Tr}(y) = 0$, то

$$\mathrm{Tr}([x, y]) = \mathrm{Tr}(xy - yx) = \mathrm{Tr}(xy) - \mathrm{Tr}(yx) = 0$$

(и поэтому $\mathrm{sl}_n(\mathbb{R})$ – алгебра Ли) в силу общей теоремы:

Теорема 1. Для любых квадратных матриц x, y порядка n

$$\mathrm{Tr}(xy) = \mathrm{Tr}(yx).$$

Доказательство.

Имеем:

$$\mathrm{Tr}(xy)=\sum_{i=1}^{n}(xy)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}y_{ki}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}y_{ki}x_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(yx)_{kk}=\mathrm{Tr}(yx).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $x\in M_n(\mathbb{R})$ и ${}^tx$ – транспонированная матрица. Тогда

$${}^t(xy)={}^ty\cdot{}^tx.$$

Доказательство. Очевидно,

$$\left({}^t(xy)\right)_{ij}=(xy)_{ji}=\sum_{k=1}^{n}x_{jk}y_{ki}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}{}^tx_{kj}\cdot{}^ty_{ik}=\sum_{k=1}^{n}{}^ty_{ik}\cdot{}^tx_{kj}=({}^ty\cdot{}^tx)_{ij}.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Квадратная матрица $x\in M_n(\mathbb{R})$ называется кососимметрической, если ${}^tx=-x$.

Теорема 3. Множество $\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ = $\{x\in M_n(\mathbb{R})\mid{}^tx=-x\}$ всех кососимметрических матриц порядка n является алгеброй Ли.

Доказательство. Если $x,y\in\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$, то

$${}^t[x,y]={}^t(xy-yx)={}^t(xy)-{}^t(yx)={}^ty\cdot{}^tx-{}^tx\cdot{}^ty=$$
$$=(-y)(-x)-(-x)(-y)=yx-xy=-[x,y],$$

поэтому $x,y\in\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

34. Экспонента и логарифм квадратной матрицы

Пусть $x\in(\mathbb{R})$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x.$$

Действительно, если $x=0$, то это соотношение очевидно. Если же $x\neq0$, то из второго замечательного предела получим:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{x}{n}\right)}}\right]^x=e^x.$$

Бином Ньютона дает соотношение

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n =$$

$$=1+n\cdot\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^m+\ldots=$$

$$=1+x+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\ldots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m}\cdot x^m+\ldots.$$

В курсе математического анализа доказывается, что

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}+\ldots$$

– сумма сходящегося всюду степенного ряда.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}:E\to E$ на конечномерном евклидовом пространстве E определим его норму формулой

$$\|\mathcal{A}\|=\sup_{\substack{\vec{e}\in E\\ \|\vec{e}\|\le 1}}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|.$$

Поскольку функции $\mathcal{A}:E\to E$ и $E\xrightarrow{\vec{e}\mapsto\|\vec{e}\|}\mathbb{R}$ непрерывны, их композиция непрерывна на замкнутом ограниченном множестве (компакте) $B=\{e\in E \mid \|e\|\le 1\}$, и в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса ограничена на единичном шаре B. Поэтому норма оператора $\mathcal{A}$ существует. Более того, она обладает следующими свойствами:

i) $\|\mathcal{A}\|=0\Leftrightarrow\forall\vec{e}\in B;\ \|\mathcal{A}(\vec{e})\|=0\Leftrightarrow\forall\vec{e}\in B\ \ \mathcal{A}(\vec{e})=\vec{0}\Leftrightarrow\mathcal{A}=0$;

ii) $\|\lambda\mathcal{A}\|=\sup_{\vec{e}\in B}|\lambda|\cdot\|\mathcal{A}(\vec{e})\|=|\lambda|\cdot\|\mathcal{A}\|$;

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\|=\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{A}(\vec{e})+\mathcal{B}(\vec{e})\|\le\sup_{\vec{e}\in B}\left(\|\mathcal{A}(\vec{e})\|+\|\mathcal{B}(\vec{e})\|\right)\le$

$\le\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|++\sup_{\vec{e}\in B}\|\mathcal{B}(\vec{e})\|=\|\mathcal{A}\|+\|\mathcal{B}\|$;

iv) $\forall\vec{e}\in E\ \ \|\mathcal{A}(\vec{e})\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\vec{e}\|$, потому что

$$\forall\vec{e}\ne\vec{0}\quad\left\|\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}\right\|=1,\ \ \frac{1}{\|\vec{e}\|}\|\mathcal{A}(\vec{e})\|=\left\|\mathcal{A}\left(\frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}\right)\right\|\le\|\mathcal{A}\|;$$

v) $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\|=\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|$ (действительно, в силу свойства (iv) имеем: $\forall\vec{e}\in E$,

$\|(\mathcal{A}\mathcal{B})(\vec{e})\|=\|\mathcal{A}(\mathcal{B}(\vec{e}))\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}(\vec{e})\|\le\|\mathcal{A}\|\cdot\|\mathcal{B}\|\cdot\|\vec{e}\|$).

Наличие нормы в пространстве $\operatorname{End}\mathbb{R}(E)$ линейных операторов позволяет перенести на функции со значениями в E (линейные операторы) теорию сходящихся последовательностей. По определению, последовательность операторов $\mathcal{A}_n$ сходится к оператору $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}\| \to 0$ при $n \to +\infty$.

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \to E$ определим его экспоненту $e^{\mathcal{A}}$ формулой

$$e^{\mathcal{A}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\mathcal{A}}{n}\right)^n = 1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \ldots$$

Сходимость обеспечивается теоремой Вейерштрасса, потому что ряд $1 + \mathcal{A} + \frac{\mathcal{A}^2}{2!} + \ldots + \frac{\mathcal{A}^m}{m!} + \ldots$ мажорируется (согласно свойству (v)) сходящимся числовым рядом $\|1\| + \|\mathcal{A}\| + \frac{\|\mathcal{A}\|^2}{2!} + \ldots + \frac{\|\mathcal{A}\|^m}{m!} + \ldots = e^{\|\mathcal{A}\|}$.

Если $x \in M_n(\mathbb{R})$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ пространства E, то можно определить экспоненту e^x теми же формулами:

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots$$

Теорема (без доказательства). Если матрицы $x, y \in M_n(\mathbb{R})$ коммутируют, т.е. $[x, y] = xy - yx = 0$, то

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

Теорема. Если $x \in \mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ – кососимметрическая матрица, то e^x – ортогональная матрица.

Доказательство. По условию, ${}^t x = -x$, поэтому

$${}^t(e^x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{{}^t x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-x}{n}\right)^n = e^{-x}.$$

С другой стороны, матрицы x и $-x$ коммутируют:

$$[x, -x] = -[x, x] = 0,$$

поэтому $1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x} = e^x \cdot {}^t(e^x)$ и, следовательно, ${}^t(e^x) = (e^x)^{-1}$. Поэтому e^x – ортогональная матрица. Теорема доказана.

Если $x \in \mathbb{R}$ и $|x| < 1$, то

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{dx}{1+x}=\int_0^x [1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^m x^m+\ldots]dx=$$
$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m x^{m+1}}{m+1}+\ldots,$$

поэтому можно определить логарифм вещественного числа $y=1+x$ (где $|x|<\varepsilon<1$) формулой

$$\ln y=(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots$$

Теорема (без доказательства). Если $y=1+x$, где x – квадратная матрица, близкая к нулевой матрице, то определен логарифм

$$\ln y=(y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots$$

причем $e^{\ln y}=y,\ \ \ln e^x=x$.

Следствие. Если $y=e^x$ – ортогональная матрица, близкая к единичной матрице (так что логарифм $\ln y=\ln(e^x)=x$ существует), то x – кососимметрическая матрица.

Доказательство. Поскольку $y=e^x$ – ортогональная матрица, то ${}^t(e^x)=(e^x)^{-1}$. Поэтому

$${}^t x={}^t(\ln y)=$$
$$={}^t\left((y-1)-\frac{(y-1)^2}{2}+\frac{(y-1)^3}{3}-\frac{(y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m (y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots\right)=$$

$$=({}^t y-1)-\frac{({}^t y-1)^2}{2}+\frac{({}^t y-1)^3}{3}-\frac{({}^t y-1)^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^m ({}^t y-1)^{m+1}}{m+1}+\ldots=$$
$$=\ln({}^t y)=\ln((e^x)^{-1})=\ln(e^{-x})=-x$$

и, следовательно, x – кососимметрическая матрица. Следствие доказано.

Мы видим, что экспонента взаимно однозначно отображает малую окрестность нулевой матрицы в алгебре Ли $\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ кососимметрических матриц на малую окрестность единичной матрицы в группе $O_n(\mathbb{R})$ ортогональных матриц. Обратное отображение осуществляется с помощью логарифма. В частности,

$$\dim_{\mathbb{R}} O_n(\mathbb{R})=\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{so}_n(\mathbb{R}).$$

Поскольку кососимметрическая матрица $x \in \mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ имеет вид

$$x = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \dots & x_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то $\dim \mathbb{R}\mathrm{so}_n(\mathbb{R})$ = $(n-1)+(n-2)+\ldots+1 = n(n-1)/2$. Такую же размерность имеет группа ортогональных матриц $O_n(\mathbb{R})$.

35. Определитель экспоненты. Вычисление экспоненты симметрической матрицы

Теорема. Для любого линейного оператора $\mathcal{A}: E \to E$ в евклидовом пространстве E имеем: $\det e^{\mathcal{A}} = e^{\mathrm{Tr}\mathcal{A}}$.

Доказательство. Для простоты рассмотрим случай $n = 2$. Характеристическое уравнение оператора $\mathcal{A}$ имеет вид

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\mathcal{A} \cdot \lambda + \det\mathcal{A} = 0.$$

Поэтому комплексные собственные числа оператора $\mathcal{A}$ различны $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Tr}\mathcal{A})^2 - 4\det\mathcal{A} \neq 0$. Это условие задает открытое плотное подмножество U в кольце $\mathrm{End}\,\mathbb{R}(E)$. Все операторы $\mathcal{A} \in U$ диагонализируются (над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел). Значит, в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеем: $\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ – собственные числа оператора $\mathcal{A}$.

Очевидно,

$$\mathcal{A}^m(\vec{e}_1) = \lambda_1^m \vec{e}_1, \qquad \mathcal{A}^m(\vec{e}_2) = \lambda_2^m \vec{e}_2,$$

поэтому

$$e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_1) = e^{\lambda_1} \vec{e}_1, \qquad e^{\mathcal{A}}(\vec{e}_2) = e^{\lambda_2} \vec{e}_2,$$

и, следовательно, матрица оператора $e^{\mathcal{A}}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\det e^{\mathcal{A}} = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 + \lambda_2} = e^{\mathrm{Tr}\mathcal{A}}.$$

В итоге мы доказали теорему для операторов $\mathcal{A} \in U$. Поскольку

$e^{\mathcal{A}}$ и $e^{\operatorname{Tr}\mathcal{A}}$ непрерывны (как функции от $\mathcal{A}$) и совпадают на открытом плотном подмножестве $U \hookrightarrow \operatorname{End}\mathbb{R}(E)$, то они совпадают всюду. Теорема доказана.

Следующая очевидная теорема позволяет сравнительно просто вычислять экспоненты симметрических матриц и самосопряженных операторов.

Теорема. Пусть $\mathcal{A}: E \to E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве E, $\mathcal{A}_e$ – (симметрическая) матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$. В силу спектральной теоремы существует ортонормированный базис $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть Q – матрица перехода от базиса $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ к базису $\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_n$, определенная формулой $\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij}\vec{e}_i$. Тогда

$$A_f = Q^{-1}A_eQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$$e^{A_f} = Q^{-1}e^{A_e}Q = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix},$$

$$e^{A_e} = Q \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}.$$

Доказательство. Все следует из очевидных равенств

$$A_f^2 = Q^{-1}A_eQQ^{-1}A_eQ = Q^{-1}A_e^2Q,\ \ A_f^3 = Q^{-1}A_e^3Q,\ \ \ldots\ \ , A_f^m = Q^{-1}A_e^mQ.$$

36. Аффинная группа

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k. Положим $\mathrm{GL}(E) = \{\mathcal{A}: E \to E \mid \det\mathcal{A} \neq 0\}$ (general linear group). Это группа линейных автоморфизмов линейного пространства E над полем k. Очевидно, вектор $\vec{0}$ является неподвижным вектором любого линейного оператора $\mathcal{A}$ в силу соотношения $\mathcal{A}(\vec{0})=\vec{0}$.

Мы хотим расширить группу $\mathrm{GL}(E)$ обратимых операторов до аффинной группы

$$\mathrm{Aff}\,(E)=\{\Phi: E\to E \;\;\big|\;\; \forall\vec{x}\in E \;\; \Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a},\;\; \mathcal{A}\in\mathrm{GL}(E)\;\;\vec{a}\in E\}.$$

Из определения тотчас следует, что $\Phi(\vec{0})=\mathcal{A}(\vec{0})+\vec{a}=\vec{a}$. Таким образом, элемент $\vec{0}$ может переводиться элементами аффинной группы $\mathrm{Aff}\,(E)$ в произвольный элемент $\vec{a}\in E$, что более отвечает реальностям физического мира.

Проверим, что $\mathrm{Aff}\,(E)$ действительно является группой. Если $\Psi(\vec{x})=\mathcal{B}(\vec{x})+\vec{b}$, то

$$\Psi\circ\Phi(\vec{x})=\Psi(\Phi(\vec{x}))=\Psi(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a})+\vec{b}=$$
$$=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\mathcal{C}(\vec{x})+\vec{c},$$

где $\mathcal{C}=\mathcal{B}\mathcal{A}\in\mathrm{GL}(E)$ – произведение линейных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathrm{GL}(E)$, $\vec{c}=\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}\in E$ – фиксированный вектор. Поэтому $\Psi\circ\Phi\in\mathrm{Aff}\,(E)$. С другой стороны, если Ψ – обратный элемент для Φ, то мы имеем $\forall\vec{x}\in E\;\;\Psi\circ\Phi(\vec{x})=\vec{x}$. Поэтому $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\vec{x}$ и, следовательно, $\forall\vec{x}\in E\quad \mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))=\vec{x},\quad \mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}=\vec{0}$. Значит, $\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1},\;\; \vec{b}=-\mathcal{A}^{-1}(\vec{a})$, поэтому

$$\forall\vec{x}\in E\;\;\Phi^{-1}(\vec{x})=\mathcal{A}^{-1}(\vec{x})-\mathcal{A}^{-1}(\vec{a})=\mathcal{A}^{-1}(\vec{x}-\vec{a}).$$

Теорема. Группа $\mathrm{Aff}\,(E)$ содержит в качестве нормальной подгруппы группу параллельных переносов

$$\mathrm{Transl}(E)=\{T\in\mathrm{Aff}\,(E)\;\;\big|\;\;\forall\vec{x}\in E\;\;T(\vec{x})=\vec{x}+\vec{t}\;\tilde{\to}\;E,$$

причём

$$\mathrm{Aff}\,(E)/\mathrm{Transl}(E)\;\tilde{\to}\;\mathrm{GL}(E).$$

Доказательство. Рассмотрим каноническое отображение

$$f:\mathrm{Aff}\,(E)\to\mathrm{GL}(E),$$
$$\Phi\mapsto\mathcal{A}.$$

Проверим, что f – морфизм групп (т.е. что $f(\Psi\circ\Phi)=f(\Psi)\circ f(\Phi)=$ $=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}$).

Действительно, мы уже знаем, что

$$\Psi\circ\Phi(\vec{x})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\vec{x}))+\mathcal{B}(\vec{a})+\vec{b}\,.$$

Поэтому $f(\Psi\circ\Phi)=\mathcal{B}\circ\mathcal{A}=f(\Psi)\circ f(\Phi)$. С другой стороны, ядро f равно

$$\mathrm{Ker}(f)=\{\Phi\in\mathrm{Aff}\,(E)\;\big|\;\mathcal{A}=1\}=\{\Phi\in\mathrm{Aff}\,(E)\quad\forall\vec{x}\in E\quad\Phi(\vec{x})=\vec{x}+\vec{a}\}=$$
$$=\mathrm{Transl}(E)\stackrel{\sim}{\to}E$$

и является нормальной подгруппой в $\mathrm{Aff}\,(E)$ (согласно общей теореме из теории групп, ядра морфизмов являются нормальными подгруппами); кроме того, согласно общей теореме из теории групп фактор по ядру изоморфен образу, т.е.

$$\mathrm{Aff}\,(E)/\mathrm{Ker}(f)\stackrel{\sim}{\to}f(\mathrm{Aff}\,(E))=\mathrm{GL}(E),$$

что и требовалось доказать.

Определение. Элементы группы $\mathrm{Aff}\,(E)$ называются аффинными морфизмами.

Очевидно, любой аффинный морфизм $\Phi:E\to E$ является композицией линейного морфизма $\mathcal{A}:E\to E$ и параллельного переноса $\vec{x}\mapsto\vec{x}+\vec{a}$.

37. Движения (изометрии) евклидова пространства

Определение. Пусть E – евклидово пространство (конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, снабженное скалярным произведением). Тогда E имеет структуру метрического пространства с метрикой $\rho(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|$. Движением (изометрией) пространства E называется любое отображение $\Phi:E\to E$, сохраняющее расстояние, т.е.

$$\forall\vec{x},\vec{y}\in E\quad\rho(\Phi(\vec{x}),\Phi(\vec{y}))=\rho(\vec{x},\vec{y})\,.$$

В этом определении движения не предполагается, что Φ – аффинное отображение, но на самом деле Φ – аффинное:

Теорема. Отображение $\Phi:E\to E$ является движением $\Leftrightarrow$ $\forall\vec{x}\in E\;\;\Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a}$, где $\mathcal{A}\in\mathrm{O}(E)$ – ортогональный оператор. Если, кроме того, $\mathcal{A}\in\mathrm{SO}(E)$ (другими словами, $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию), то Φ называется собственным движением.

Доказательство. Предположим, что $\forall\vec{x}\in E\;\;\Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a}$, где $\mathcal{A}\in\mathrm{O}(E)$ – ортогональный оператор. Поскольку $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов, то

$$\rho(\Phi(\vec{x}),\Phi(\vec{y}))=\rho(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a},\mathcal{A}(\vec{y})+\vec{a})=$$
$$=\|(\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a})-(\mathcal{A}(\vec{y})+\vec{a})\|=\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|=$$
$$=\|\mathcal{A}(\vec{x}-\vec{y})\|=\|\vec{x}-\vec{y}\|=\rho(\vec{x},\vec{y}),$$

поэтому Φ – изометрия.

Предположим теперь, что $\Phi:E\to E$ – произвольная изометрия. Пусть $\vec{a}=\Phi(\vec{0})$ и $T_{\vec{a}}:E\to E$ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$, определенный формулой $T_{\vec{a}}(\vec{x})=\vec{x}+\vec{a}$. Тогда $\mathcal{A}=T_{\vec{a}}^{-1}\circ\Phi$ является изометрией (потому что композиция двух изометрий является изометрией). Очевидно, $T_{\vec{a}}(\vec{0})=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, поэтому

$$\mathcal{A}(\vec{0})=T_{\vec{a}}^{-1}\circ\Phi(\vec{0})=T_{\vec{a}}^{-1}(\vec{a})=\vec{0}.$$

Следовательно, $\Phi=T_{\vec{a}}\circ\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}(\vec{0})=\vec{0}$, т.е. любая изометрия является произведением изометрии $\mathcal{A}$, оставляющей неподвижной точку $\vec{0}$, и сдвига $T_{\vec{a}}$. Осталось проверить, что $\mathcal{A}$ – линейный ортогональный оператор.

Поскольку $\mathcal{A}$ – изометрия, то

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|=\rho(\mathcal{A}(\vec{x}),\mathcal{A}(\vec{y}))=\rho(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}-\vec{y}\|.$$

Полагая в этом соотношении $\vec{y}=\vec{0}$, получим:

$$\|\mathcal{A}(\vec{x})\|=\|\vec{x}\|$$

(другими словами, $\mathcal{A}$ сохраняет длины векторов).

Проверим, что $\mathcal{A}$ сохраняет скалярное произведение: действительно,

$$\|\vec{x}\|^2-2(\vec{x},\vec{y})+\|\vec{y}\|^2=(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}-\vec{y})=$$
$$=\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=\|\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|^2=(\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}),\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}))=$$
$$=\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2-2(\mathcal{A}(\vec{x}),\mathcal{A}(\vec{y}))+\|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2=\|\vec{x}\|^2-2(\mathcal{A}(\vec{x}),\mathcal{A}(\vec{y}))+\|\vec{y}\|^2,$$

поэтому

$$(\vec{x},\vec{y})=(\mathcal{A}(\vec{x}),\mathcal{A}(\vec{y})).$$

Осталось проверить, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Для этого рассмотрим вектор $\vec{z}=\vec{x}+\vec{y}$. Очевидно,

$$0=\|\vec{z}-\vec{x}-\vec{y}\|^2=(\vec{z}-\vec{x}-\vec{y},\vec{z}-\vec{x}-\vec{y})=$$
$$=\|\vec{z}\|^2+\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2-2(\vec{z},\vec{x})-2(\vec{z},\vec{y})+2(\vec{x},\vec{y})=$$
$$=\|\mathcal{A}(\vec{z})\|^2+\|\mathcal{A}(\vec{x})\|^2+\|\mathcal{A}(\vec{y})\|^2-2(\mathcal{A}(\vec{z}),\mathcal{A}(\vec{x}))-2(\mathcal{A}(\vec{z}),\mathcal{A}(\vec{y}))+2(\mathcal{A}(\vec{x}),\mathcal{A}(\vec{y}))=$$
$$=(\mathcal{A}(\vec{z})-\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}),\mathcal{A}(\vec{z})-\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y}))=\|\mathcal{A}(\vec{z})-\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})\|^2.$$

Поэтому $\mathcal{A}(\vec{z})-\mathcal{A}(\vec{x})-\mathcal{A}(\vec{y})=\vec{0}$ и $\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y})=\mathcal{A}(\vec{z})=\mathcal{A}(\vec{x})+\mathcal{A}(\vec{y})$.

Аналогично доказывается, что $\mathcal{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathcal{A}(\vec{x})$.

Теорема доказана.

38. Классификация изометрий прямой, плоскости и трехмерного пространства

Изометрии постоянно встречаются в геометрии и механике твердого тела, поэтому мы рассмотрим классификацию изометрий евклидовых пространств малых размерностей.

1) Пусть $E=\mathbb{R}$ – аффинная прямая. Любая изометрия $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ имеет вид

$$\Phi(x)=\varepsilon x+a,$$

где $\varepsilon=\pm1$ (действительно, любой ортогональный оператор $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}$ сохраняет скалярное произведение и является гомотетией с коэффициентом ε, поэтому из соотношения $\mathcal{A}(x)\mathcal{A}(x)=x^2$ следует, что $\varepsilon x\varepsilon x=\varepsilon^2x^2=x^2$ и $\varepsilon^2=1$, $\varepsilon=\pm1$).

Если $\varepsilon=1$, то $\Phi(x)=x+a$, и поэтому Φ – сдвиг (параллельный перенос прямой). Если, кроме того, $a\neq0$, то Φ не имеет неподвижных точек.

Если $\varepsilon=-1$, то $\Phi(x)=-x+a$. Неподвижная точка отображения Φ находится из уравнения $x_0=\Phi(x_0)=-x_0+a$. Это точка $x_0=a/2$. Очевидно, $\forall\vec{x}\in E$ $\Phi(x)-a/2=-(x-a/2)$, поэтому Φ – отражение прямой относительно неподвижной точки $a/2$ (оно не сохраняет ориентацию):

0 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Phi(x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $a/2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ x

$\cdot$––––––––––––––––––––>–––––––––––––>–––––––––––––>

2) Пусть E – евклидова плоскость, $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ – ортонормированный базис E. Тогда $\Phi(\vec{x})=\mathcal{A}(\vec{x})+\vec{a}$, где $\mathcal{A}$ – поворот на угол φ (если $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию) или $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор с определителем -1.

Предположим сначала, что $\mathcal{A}$ имеет ненулевой собственный вектор. Можно считать, что $\vec{e}_1$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ с собственным числом $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Поскольку оператор $\mathcal{A}$ ортогональный, то

$$(\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_1)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1,$$

поэтому

$$(\lambda_1 \vec{e}_1, \lambda_1 \vec{e}_1) = \lambda_1^2 (\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 1$$

и, следовательно, $\lambda_1 = \pm 1$. С другой стороны,

$$0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\mathcal{A}(\vec{e}_1), \mathcal{A}(\vec{e}_2)) = (\lambda_1 \vec{e}_1, \mathcal{A}(\vec{e}_2)).$$

Поэтому $\mathcal{A}(\vec{e}_2) \perp \vec{e}_1$, $\mathcal{A}(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2 = \pm \vec{e}_2$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то $\forall \vec{x} \in E \;\; \mathcal{A}(\vec{x}) = \vec{x}$ и Φ – параллельный перенос на вектор $\vec{a}$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, то $\forall \vec{x} \in E \;\; \mathcal{A}(\vec{x}) = -\vec{x}$ и $\Phi(\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{a}$. Неподвижная точка отображения Φ находится из уравнения $\vec{x}_0 = \Phi(\vec{x}_0) = -\vec{x}_0 + \vec{a}$. Это точка $\vec{x}_0 = \vec{a}/2$. Очевидно, $\forall \vec{x} \in E$ $\Phi(\vec{x}) - \vec{a}/2 = -(\vec{x} - \vec{a}/2)$, поэтому Φ – отражение плоскости относительно неподвижной точки $\vec{a}/2$ (оно сохраняет ориентацию). Легко видеть, что в этом случае мы имеем поворот плоскости E вокруг неподвижной точки $\vec{a}/2$ на угол π.

Наконец, можно считать, что $\lambda_1 = -\lambda_2 = 1$. В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \vec{e}_1, \;\; \mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\vec{e}_2,$$

$$\Phi(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2) = x_1 \vec{e}_1 - x_2 \vec{e}_2 + a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 = (x_1 + a_1)\vec{e}_1 + (-x_2 + a_2)\vec{e}_2.$$

Очевидно, Φ является композицией отражения относительно оси, проходящей через точку $(0, a_2/2)$ параллельно вектору $\vec{e}_1$, и сдвига на вектор $a_1 \vec{e}_1$.

Предположим теперь, что $\mathcal{A}$ не имеет вещественных собственных векторов. Тогда комплексные собственные числа оператора $\mathcal{A}$ связаны соотношениями $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ (потому что λ_1 является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - Tr\mathcal{A} \cdot \lambda + \det \mathcal{A} = 0$ с вещественными коэффициентами и, следовательно, $\overline{\lambda_1}$ также является корнем характеристического уравнения), $\{\pm 1\} \ni \det \mathcal{A} = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 > 0$, поэтому $\det \mathcal{A} = 1$ и, следовательно, $\mathcal{A}$ сохраняет ориентацию (т.е. является поворотом на угол $\varphi \neq 0, \neq \pi$). В этом случае

$$\mathcal{A}(\vec{e}_1) = \cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2, \; \mathcal{A}(\vec{e}_2) = -\sin\varphi \vec{e}_1 + \cos\varphi \vec{e}_2,$$

поэтому

$$\Phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2.$$

Неподвижная точка (x_1^0, x_2^0) определяется уравнением

$$\Phi(x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2) =$$
$$= x_1^0(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2^0(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2,$$

которое имеет единственное решение по правилу Крамера:

$$\begin{cases} x_1^0(\cos\varphi - 1) - x_2^0\sin\varphi + a_1 = 0 \\ x_1^0\sin\varphi + x_2^0(\cos\varphi - 1) + a_2 = 0 \end{cases},$$

потому что определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{vmatrix} = \cos^2\varphi - 2\cos\varphi + 1 + \sin^2\varphi = 2 - 2\cos\varphi \neq 0.$$

Из соотношений

$$\Phi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + (x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2)) =$$
$$= (x_1 + x_1^0)(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + (x_2 + x_2^0)(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 =$$
$$= x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) +$$
$$+ x_1^0(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2^0(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 =$$
$$= x_1(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + x_2(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + (x_1^0\vec{e}_1 + x_2^0\vec{e}_2)$$

следует, что Φ – это поворот плоскости на угол φ вокруг неподвижной точки (x_1^0, x_2^0).

В результате доказана следующая теорема:

Теорема. Любая изометрия евклидовой плоскости, сохраняющая ориентацию, является параллельным переносом или вращением вокруг неподвижной точки. Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой прямой и параллельного переноса вдоль этой прямой.

3) Изометрии 3-мерного евклидова пространства допускают следующее описание:

Теорема. Любая изометрия 3-мерного евклидова пространства, сохраняющая ориентацию, является винтовой, т.е. является композицией параллельного переноса вдоль некоторой прямой и вращения вокруг этой же прямой (винтовая изометрия включает как чистый параллельный перенос, так и чистое вращение). Изометрия, не сохраняющая ориентацию, является композицией отражения относительно некоторой плоскости и параллельного переноса на вектор, параллельный той же плоскости, либо является композицией отражения относительно некоторой плоскости P и вращения на угол φ вокруг некоторой прямой L, перпендикулярной плоскости P.

Следствие (теорема Эйлера). Любое перемещение твердого тела с одной закрепленной точкой является вращением вокруг некоторой оси, проходящей через закрепленную точку.

39. Аффинная классификация кривых второго порядка

Две фигуры F_1 и F_2 в пространстве E называются аффинно эквивалентными $\Leftrightarrow$ $\exists \mathrm{g} \in \mathrm{Aff}(E)$ $g(F_1)=F_2$.

Теорема. Любая кривая второго порядка на плоскости аффинно эквивалентна одному из следующих объектов:

1) окружность $x^2+y^2=1$;

2) мнимая окружность $x^2+y^2=-1$;

3) гипербола $x^2-y^2=1$;

4) парабола $y^2=2x$;

5) пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $x^2+y^2=0$;

6) пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $x^2-y^2=0$;

7) пара параллельных вещественных прямых $x^2=1$;

8) пара параллельных мнимых прямых $x^2=-1$;

9) пара совпадающих вещественных прямых $x^2=0$.

Доказательство. Из метрической классификации кривых 2-го порядка известно, что композиция ортогонального линейного оператора и параллельного переноса приводит уравнение кривой к одному из следующих типов:

1') эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

2') мнимый эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$;

3') гипербола $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

4') парабола $y^2=2px$;

5') пара мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$;

6') пара вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$;

7') пара параллельных вещественных прямых $\frac{x^2}{a^2}=1$;

8') пара параллельных мнимых прямых $\frac{x^2}{a^2}=-1$;

9') пара совпадающих вещественных прямых $x^2=0$.

Замена координат $x=ax'$, $y=by'$ отвечает некоторому аффинному линейному оператору и приводит уравнение 1') – 3'), 5') – 8') к соответствующему уравнению 1) – 3), 5) – 8). Наконец, аффинная замена $x'=px$, $y'=y$ приводит уравнение 4') к виду 4).

Очевидно, эллипс аффинно неэквивалентен кривым 2) – 8), так как он является ограниченным замкнутым 1-мерным множеством (и это свойство сохраняется при аффинных морфизмах), в отличие от кривых 2) – 9), множество вещественных точек которых либо пусто (2,8), либо неограничено (3,4,6,7,9), либо нульмерно (5).

Аналогично проверяется неэквивалентность всех других классов. Например, гипербола состоит из двух ветвей, и поэтому неэквивалентна параболе. Наконец, надо учесть, что параллельность прямых сохраняется при аффинных морфизмах.

40. Понятие о плоскости Лобачевского

Напомним, что любое комплексное число z имеет вид $z=x+iy$, где $x=\mathrm{Re}(z)\in\mathbb{R}$ и $y=\mathrm{Im}(z)\in\mathbb{R}$ называются вещественной и мнимой частью z.

Определение 1. Пусть $H=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$ – верхняя полуплоскость. Назовем "прямыми" в H лучи, перпендикулярные вещественной оси $\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)=y=0\}$, а также полуокружности, центры которых расположены на вещественной оси (такие полуокружности пересекаются с вещественной осью под прямым углом).

Верхняя полуплоскость с такими "прямыми" называется плоскостью Лобачевского (или, более точно, моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского).

Теорема. Через любые две точки $z_1 \neq z_2 \in H$ проходит единственная "прямая".

Доказательство. Если $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) = a$, то точки z_1, z_2 лежат на одном вертикальном луче $\mathrm{Re}(z) = a$ и не могут лежать на полуокружности с центром на вещественной оси $\mathbb{R}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$ (потому что для любых точек $z_1 \neq z_2$ на полуокружности выполнено соотношение $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$). Следовательно, в этом случае существует единственная "прямая", проходящая через z_1 и z_2.

Если $\mathrm{Re}(z_1) \neq \mathrm{Re}(z_2)$, то точки z_1, z_2 не лежат на вертикальном луче. Существует единственная точка $a \in \mathbb{R}=\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$, для которой $|z_1 - a| = |z_2 - a|$, поэтому точка a является центром полуокружности, проходящей через точки z_1 и z_2. Теорема доказана.

Можно проверить, что все аксиомы обычной евклидовой геометрии (кроме 5-го постулата Евклида) выполнены на плоскости Лобачевского.

Напомним, что 5-й постулат Евклида утверждает существование и единственность прямой на евклидовой плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

На плоскости Лобачевского 5-й постулат Евклида не выполняется: через данную точку, не лежащую на "прямой" l, можно провести более одной "прямой", параллельной (т.е. не пересекающей) l.

На самом деле таких параллельных прямых бесконечно много.

Наша конструкция показывает, что 5-й постулат не является логическим следствием других аксиом евклидовой геометрии.

Хорошо известно, что 5-й постулат Евклида имеет следующую эквивалентную формулировку: сумма внутренних углов треугольника на евклидовой плоскости равна π.

Теорема (без доказательства). Сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского строго меньше π (угол в точке пересечения двух "прямых" по определению равен обычному углу между касательными в точке пересечения). Более того, сумма внутренних углов треугольника на плоскости Лобачевского может быть сколь угодно малой.

Определение 2. Фиксируем вещественное положительное число $a \neq 1$ и определим неевклидово расстояние между точками $z_1, z_2 \in H$ формулой

$$\rho_L(z_1, z_2) = \log_a \frac{1 + \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_2}\right|}. \tag{39.1}$$

Можно проверить, что неевклидовы окружности, т.е. множества точек, равноудаленных от одной точки в смысле неевклидова расстояния ρ_L, являются обычными окружностями на верхней полуплоскости, не пересекающими вещественную ось.

Отображение $\Phi : H \to H$ называется изометрией плоскости Лобачевского $\Leftrightarrow$ $\forall z_1, z_2 \in H \;\; \rho_L(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) = \rho_L(z_1, z_2)$.

Теорема (без доказательства). Любая изометрия $\Phi : H \to H$ плоскости Лобачевского имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R},\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0,$$

или

$$\Phi(z) = \frac{a_{11}\bar{z} + a_{12}}{a_{21}\bar{z} + a_{22}}, \text{ где } a_{ij} \in \mathbb{R},\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} < 0.$$

41. Классификация поверхностей 2-го порядка в 3-мерном пространстве

В 3-мерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ рассмотрим поверхность 2-го порядка, заданную уравнением

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \\ + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

– ненулевая матрица. Существует ортонормированный базис $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду:

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 =$$
$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2,$$

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3,$$

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{3} q_{ij}\vec{e}_i ,$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}$$ – ортогональная матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ к базису $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Мы имеем:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{f}_1 + y_2\vec{f}_2 + y_3\vec{f}_3 =$$
$$= y_1(q_{11}\vec{e}_1 + q_{21}\vec{e}_2 + q_{31}\vec{e}_3) + y_2(q_{12}\vec{e}_1 + q_{22}\vec{e}_2 + q_{32}\vec{e}_3) + y_3(q_{13}\vec{e}_1 + q_{23}\vec{e}_2 + q_{33}\vec{e}_3).$$

Сравнивая коэффициенты при $\vec{e}_j$ в левой и правой частях, получим

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + q_{13}y_3 \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + q_{23}y_3 \\ x_3 = q_{31}y_1 + q_{32}y_2 + q_{33}y_3. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в уравнение поверхности, получим уравнение

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_0 = 0.$$

При этом $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$, потому что квадратичная форма не является нулевой.

Можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Предположим сначала, что $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right) +$$

$$+\lambda_3\left(y_3^2+\frac{b_3}{\lambda_3}y_3+\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2\right)+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2-\lambda_3\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2=0;$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+$$

$$+\lambda_3\left(y_3+\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2+\underbrace{b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2-\lambda_3\left(\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2}_{c_0}=0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1+\dfrac{b_1}{2\lambda_1}=z_1 \\ y_2+\dfrac{b_2}{2\lambda_2}=z_2 \\ y_3+\dfrac{b_3}{2\lambda_3}=z_3. \end{cases}$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1 z_1^2+\lambda_2 z_2^2+\lambda_3 z_3^2=-c_0.$$

1) Если $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0,\ -c_0>0$, то положим $a^2=\dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ b^2=\dfrac{-c_0}{\lambda_2},\ c^2=\dfrac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=1$$

(эллипсоид).

2) Если $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_3>0,\ -c_0<0$, то положим $a^2=\dfrac{c_0}{\lambda_1},\ b^2=\dfrac{c_0}{\lambda_2},\ c^2=\dfrac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2}+\frac{z_2^2}{b^2}+\frac{z_3^2}{c^2}=-1$$

(мнимый эллипсоид).

3) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 > 0,\ -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{1}{\lambda_2},\ c^2 = \dfrac{1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(мнимый конус).

4) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,\ -c_0 > 0$, то положим $a^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_2},\ c^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 1$$

(однополостный гиперболоид).

5) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,\ -c_0 < 0$, то положим $a^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{c_0}{\lambda_2},\ c^2 = \dfrac{-c_0}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = -1$$

(двуполостный гиперболоид).

6) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 < 0,\ -c_0 = 0$, то положим $a^2 = \dfrac{1}{\lambda_1},\ b^2 = \dfrac{1}{\lambda_2},\ c^2 = \dfrac{-1}{\lambda_3}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} - \frac{z_3^2}{c^2} = 0$$

(конус).

Далее мы можем считать, что $\lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\lambda_1\left(y_1^2 + \frac{b_1}{\lambda_1}y_1 + \left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2\right) + \lambda_2\left(y_2^2 + \frac{b_2}{\lambda_2}y_2 + \left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2\right) +$$

$$+b_3y_3+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2=0;$$

$$\lambda_1\left(y_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(y_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+$$

$$\underbrace{+b_3y_3+b_0-\lambda_1\left(\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2-\lambda_2\left(\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2}_{c_0}=0.$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1+\dfrac{b_1}{2\lambda_1}=z_1 \\ y_2+\dfrac{b_2}{2\lambda_2}=z_2 \\ y_3=z_3 \end{cases}.$$

Тогда уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1z_1^2+\lambda_2z_2^2+b_3z_3=-c_0.$$

Если $b_3\neq 0$, то мы можем сделать замену координат

$$\begin{cases} z_1=t_1 \\ z_2=t_2 \\ z_3+\dfrac{c_0}{b_3}=t_3 \end{cases},$$

и уравнение поверхности приводится к виду

$$\lambda_1t_1^2+\lambda_2t_2^2+b_3t_3=0$$

Предположим сначала, что $b_3\neq 0$.

7) Если $\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ b_3>0,$ то положим $a^2=\dfrac{b_3}{\lambda_1},\ b^2=\dfrac{b_3}{\lambda_2}.$

Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2}+\frac{t_2^2}{b^2}+t_3=0$$

(эллиптический параболоид); случай $b_3<0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

8) Если $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0,\ b_3 > 0$, то положим $a^2 = \frac{b_3}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{-b_3}{\lambda_2}$. Уравнение поверхности принимает канонический вид

$$\frac{t_1^2}{a^2} - \frac{t_2^2}{b^2} + t_3 = 0$$

(гиперболический параболоид); случай $b_3 < 0$ сводится к предыдущему заменой t_3 на $-t_3$ и не дает ничего нового.

Далее можно считать, что $b_3 = 0$ (в этом случае равнение оверхности не содержит переменной t_3 или $\lambda_2 = 0$ (в этом случае уравнение поверхности не содержит переменной t_2). В обоих случаях мы имеем дело с цилиндрами, основаниями которых служат кривые 2-го порядка. Так как кривые 2-го порядка классифицированы (существуют 9 типов), то каждый из этих типов дает соответствующий цилиндр.

Очевидно, цилиндры 2-го порядка задаются следующими каноническими уравнениями:

9) эллиптический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$;

10) мнимый эллиптический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = -1$;

11) гиперболический цилиндр $\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$;

12) параболический цилиндр $z_2^2 = 2pz_1$;

13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке $\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 0$ (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых $\frac{z_1^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных плоскостей);

16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых $\frac{z_1^2}{a^2} = -1$ (пара параллельных мнимых плоскостей);

17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых $z_1^2 = 0$ (пара совпадающих плоскостей).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Существуют 17 классов поверхностей 2-го порядка:

1) эллипсоид;

2) мнимый эллипсоид;

3) мнимый конус;

4) однополостный гиперболоид;

5) двуполостный гиперболоид;

6) конус;

7) эллиптический параболоид;

8) гиперболический параболоид;

9) эллиптический цилиндр;

10) мнимый эллиптический цилиндр;

11) гиперболический цилиндр;

12) параболический цилиндр;

13) цилиндр над парой мнимых пересекающихся в одной вещественной точке прямых (пара мнимых плоскостей, пересекающихся вдоль вещественной прямой);

14) цилиндр над парой вещественных прямых, пересекающихся в одной вещественной точке (пара вещественных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой);

15) цилиндр над парой параллельных вещественных прямых (пара параллельных плоскостей);

16) цилиндр над парой параллельных мнимых прямых (пара параллельных мнимых плоскостей);

17) цилиндр над парой совпадающих вещественных прямых (пара совпадающих плоскостей).

42. Прямые на однополостном гиперболоиде

Пусть однополостный гиперболоид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{41.1}$$

Рассмотрим пару вещественных чисел $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ и систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\dfrac{y}{b}\right).\end{cases} \tag{41.2}$$

Для каждой пары чисел (α,β) наши уравнения (41.2) определяют пару плоскостей, пересекающихся по прямой, и эта прямая целиком лежит на однополостном гиперболоиде, так как решение системы уравнений (41.2) дает решение уравнения (41.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра $u=\beta/\alpha$. Аналогично уравнениям (41.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha',\beta')\neq(0,0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=\beta'\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \beta'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=\alpha'\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\end{cases} \tag{41.3}$$

определяющую прямую, лежащую на однополостном гиперболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, зависящее от одного параметра $v=\beta'/\alpha'$.

Легко проверяется, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II.

43. Прямые на гиперболическом параболоиде

Пусть гиперболический параболоид задается своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

(согласно классификации поверхностей 2-го порядка гиперболический параболоид задается уравнением

$$\frac{t_1^2}{a^2}-\frac{t_2^2}{b^2}+t_3=0,$$

и мы полагаем здесь $t_1=x, t_2=y, t_3=-2z$).

Перепишем каноническое уравнение гиперболического параболоида в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z \tag{42.1}$$

Для каждой пары вещественных чисел $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=2\beta z\\ \beta\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=\alpha\end{cases} \tag{42.2}$$

Эта система задает прямую (пересечение двух плоскостей, задаваемых двумя линейными уравнениями из системы (42.2)), и эта прямая лежит на гиперболическом параболоиде, потому что решение системы (42.2) дает решение уравнения (42.1).

В итоге мы получили семейство прямолинейных образующих гиперболического параболоида, которое мы обозначим через I. Оно зависит от одного параметра $u=\beta/\alpha$. Аналогично уравнениям (42.2) можно было бы для любой пары чисел $(\alpha',\beta')\neq(0,0)$ рассмотреть систему уравнений

$$\begin{cases}\alpha'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=2\beta' z\\ \beta'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=\alpha',\end{cases} \tag{42.2}$$

определяющую прямую, лежащую на гиперболическом параболоиде; мы получим в итоге семейство II прямолинейных образующих гиперболического параболоида, зависящее от одного параметра $v = \beta' / \alpha'$.

Легко проверяется, что через каждую точку гиперболического параболоида проходят единственная образующая семейства I и единственная образующая семейства II, причем любые две образующие, принадлежащие разным семействам, пересекаются, а принадлежащие одному семейству всегда скрещиваются.

44. Проективное пространство

Проективизацией $\mathbb{P}(E)$ конечномерного линейного пространства E над полем k называется фактормножество $(E \setminus 0 / \sim)$, где векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \in k^{\times}$ $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ (здесь $k^{\times} = k \setminus 0$ – группа ненулевых элементов поля k с операцией умножения).

Таким образом, $\mathbb{P}(E)$ – это множество всех прямых пространства E, проходящих через точку 0.

Положим $\mathbb{P}_k^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$. В этих обозначениях $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ называется n-мерным вещественным проективным пространством, $\mathbb{P}^n \mathbb{C}$ называется n-мерным комплексным проективным пространством.

Очевидно, проективная вещественная прямая $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ – это множество всех прямых в $\mathbb{R}^2$, проходящих через начало координат. Каждая такая прямая пересекает единичную окружность U^1 с центром 0 в двух диаметрально противоположных точках; эта пара диаметрально противоположных точек задает единственную точку проективной прямой $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$. В итоге можно рассматривать $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ как окружность с отожествленными диаметрально противоположными точками. Более точно, существует каноническое непрерывное сюръективное отображение $U^1 \to \mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ склеивания диаметрально противоположных точек единичной окружности. Отождествим $\mathbb{R}^2$ с $\mathbb{C}$, и будем рассматривать U^1 как группу комплексных чисел $\{z \in \mathbb{C}^{\times} \mid |z| = 1\}$. Тогда точки $z_1, z_2 \in U^1$ диаметрально противоположны $\Leftrightarrow$ $z_1 = -z_2$. Таким образом, $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ можно естественным образом отождествить с факторгруппой $U^1 / \{\pm 1\}$.

Попробуем найти такой сюръективный морфизм групп $f: U^1 \to U^1$, чтобы $\mathrm{Ker} f = \{\pm 1\}$. Можно взять, например, $f(z) = z^2$. Поскольку фактор по ядру изоморфен образу, то имеем:

$$U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} f(U^1) = U^1.$$

Значит, $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} U^1$ (как топологическое пространство).

Итак, вещественная проективная прямая $\mathbb{P}^1\mathbb{R}$ топологически устроена как единичная окружность. Другой топологический изоморфизм $\mathbb{P}^1\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} U^1$ можно построить, если перенести центр единичной окружности в точку i и рассмотреть прямые, проходящие через точку $2i$. Каждая такая прямая (кроме прямой, пераллельной вещественной оси $\mathbb{R}$) пересекает вещественную ось в единственной точке и пересекает окружность в единственной точке; это устанавливает диффеоморфизм вещественной оси и окружности с выколотой точкой $2i$. Прямая, параллельная вещественной оси и проходящая через точку $2i$, играет роль бесконечно удаленной точки ∞ на проективной прямой $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$. Заметим, что U^1 – компакт (любое покрытие U^1 открытыми подмножествами содержит конечное подпокрытие). Поэтому компакт $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \infty$ можно рассматривать как одноточечную компактификацию аффинной прямой $\mathbb{R}$.

В теории функций одной комплексной переменной важную роль играет комплексная проективная прямая $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \infty$, отождествляемая (с помощью стереографической проекции) с единичной сферой.

Вещественная проективная плоскость $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ естественным образом изоморфна (как топологическое пространство) сфере с отождествленными диаметрально противоположными точками.

Пусть $\Phi: (\mathbb{R}^3 \setminus 0) \to \mathbb{P}^2\mathbb{R} =$ $(\mathbb{R}^3 \setminus 0)$ – каноническое сюръективное отображение. Проективной прямой на $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ называется образ $\pi \setminus 0$ при отображении Φ, где π – это плоскость в $\mathbb{R}^3$, проходящая через начало координат. Так как любые две несовпадающие плоскости π_1, π_2 в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по прямой $l = \pi_1 \bigcap \pi_2$, то соответствующие проективные прямые $\Phi(\pi_1 \setminus 0)$ и $\Phi(\pi_2 \setminus 0)$ пересекаются в одной точке $\Phi(l \setminus 0)$ проективной плоскости.

Итак, любые две несовпадающие проективные прямые на вещественной проективной плоскости пересекаются в единственной точке.

Пусть E – конечномерное линейное пространство над полем k. Группа $\mathrm{GL}(E)$ обратимых линейных операторов $\mathcal{A}: E \to E$ естественным образом действует на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Действительно, если векторы $\vec{x} \neq \vec{0}$ и $\vec{y} \neq \vec{0}$ эквивалентны, то $\vec{x} = \lambda\vec{y}$ для некоторого $\lambda \in k^{\times}$, поэтому $\mathcal{A}(\vec{x}) = \mathcal{A}(\lambda\vec{y}) = \lambda\mathcal{A}(\vec{y})$ и, следовательно, $\mathcal{A}(\vec{x}) \sim \mathcal{A}(\vec{y})$. Значит, можно определить действие оператора $\mathcal{A}$ на проективизации $\mathbb{P}(E)$ формулой $\mathcal{A}(\vec{x} \mod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \mod \sim$.

Если $\mathcal{A}$ – гомотетия с коэффициентом $\mu \in k^{\times}$, то для любого векто-ра $\vec{x} \neq \vec{0}$ имеем:

$$\mathcal{A}(\vec{x} \mod \sim) = \mathcal{A}(\vec{x}) \mod \sim = \mu\vec{x} \mod \sim = \vec{x} \mod \sim.$$

Поэтому гомотетии действуют тривиально на проективизации $\mathbb{P}(E)$. Значит, на $\mathbb{P}(E)$ определено каноническое действие факторгруппы $\mathrm{PGL}(E) = \mathrm{GL}(E)/k^{\times}$, где $k^{\times} \hookrightarrow \mathrm{GL}(E)$ – подгруппа гомотетий. Группа $\mathrm{PGL}(E)$ называется проективной линейной группой. Поскольку элементы из $\mathrm{GL}(E)$ переводят любую плоскость в пространстве E в любую другую плоскость, то элементы из $\mathrm{PGL}(E)$ переводят любую проективную прямую в проективизации $\mathbb{P}(E)$ в любую другую проективную прямую.

Пусть $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ – базис линейного пространства E над полем k, $\vec{x} = x_0\vec{e}_0 + x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$. Пусть $E \setminus 0 \to \mathbb{P}(E)$ – каноническое отображение, которое вектору $\vec{x} \neq \vec{0}$ ставит в соответствие точку $\vec{x} \mod \sim \in \mathbb{P}(E)$. Ясно, что для любого $\lambda \in k^{\times}$ векторы с координатами $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ и $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ дают одну и ту же точку проективного пространства, которую мы обозначим через $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$. По определению, имеем:

$$(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0 : \lambda x_1 : \cdots : \lambda x_n).$$

Набор $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n)$ называется набором однородных координат точки проективного пространства $\mathbb{P}(E)$.

Очевидно,

$$\mathbb{P}(E) = \bigcup_{i=0}^{n} D_{+}(x_i),$$

где

$$D_{+}(x_i) = \{(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) \mid x_i \neq 0\}.$$

Рассмотрим для примера

$$D_+(x_0) = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid x_0 \neq 0\} = \left\{\left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right)\right\}.$$

Поскольку $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ могут принимать любые значения из поля k, то

$$D_+(x_0) \xrightarrow{\sim} k^n.$$

Значит, $\mathbb{P}(E)$ склеено из множеств $D_+(x_0), D_+(x_1), \dots, D_+(x_n)$, каждое из которых изоморфно k^n.

45. Проективная классификация кривых второго порядка

Проективная кривая 2-го порядка на проективной плоскости $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ задается уравнением

$$a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Существует такой ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$, в котором квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$\lambda_0 y_0^2 + \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = 0.$$

Предположим сначала, что квадратичная форма невырождена (т.е. $\det A \neq 0$, что эквивалентно неравенству $\forall i \quad \lambda_i \neq 0$). Можно считать, что замена координат

$$z_i = \sqrt{|\lambda_i|} \cdot y_i$$

приводит квадратичную форму к одному из следующих видов:

$z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$ (мнимый овал);

$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0$ (вещественный овал).

В открытом множестве $D_+(z_0)$ вещественный овал задается уравнением

$$1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} - \frac{z_2^2}{z_0^2} = 0$$

(гипербола), в то же время в $D_+(z_2)$ этот овал задается уравнением

$$\frac{z_0^2}{z_2^2} + \frac{z_1^2}{z_2^2} - 1 = 0$$

(окружность).

Если квадратичная форма вырождена, то можно считать, что уравнение кривой принимает один из следующих видов:

$z_0^2 + z_1^2 = 0$ (пара мнимых проективных прямых);

$z_0^2 - z_1^2 = 0$ (пара вещественных проективных прямых);

$z_0^2 = 0$ (пара совпадающих проективных прямых).

Мы доказали следующую теорему:

Теорема. Любая кривая 2-го порядка на вещественной проективной плоскости $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ проективно эквивалентна одному из следующих объектов:

мнимый овал;

вещественный овал;

пара мнимых проективных прямых;

пара вещественных проективных прямых;

пара совпадающих проективных прямых.

Задачи для самостоятельного решения

1. Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M(5;\ 0)$, если фокальное расстояние равно 6.
2. Доказать, что уравнение $36x^2+100y^2-3600=0$ является уравнением эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние.
3. Эллипс касается оси абсцисс в точке $A(4;\ \ 0)$ и оси ординат в точке $B(0;-3)$. Составить уравнение этого эллипса, если его оси симметрии параллельны осям координат.
4. Эллипс проходит через точку $M(1;\ \ 1)$ и имеет эксцентриситет равен 3/5. Составить уравнение эллипса.
5. Прямые $x=\pm 8$ служат директрисами эллипса, малая ось которого равна 8. Найти уравнение этого эллипса.
6. Меридиан земного шара имеет форму эллипса, отношение осей которого равно $\frac{299}{300}$. Определить эксцентриситет земного меридиана.
7. На эллипсе $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ найти точку, расстояние от которой до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до ее левого фокуса.
8. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ с прямой $2x-y-9=0$.
9. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $A(-4;\ \ 3)$ к эллипсу $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$.
10. Составить уравнение гиперболы, оси которой совпадают с осями координат, зная, что:

    1) расстояние между вершинами равно 8, а расстояние между фокусами – 10;

    2) вещественная полуось равна 5 и вершины делят расстояния между центром и фокусами пополам;

3) вещественная ось равна 6 и гипербола проходит через точку (9;−4);

4) гипербола проходит через две точки $A(-5;\ \ 2)$ и $B(2\sqrt{5};\ \ \sqrt{2})$.

11. Вычислить полуоси гиперболы, зная, что:

1) расстояние между фокусами равно 6 и расстояние между директрисами равно 4;

2) директрисы заданы уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами – прямой;

3) асимптоты даны уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от центра;

4) асимптоты даны уравнениями $y = \pm\frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку $D(6;\ \ 9)$.

12. На гиперболе $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ взята точка, абсцисса которойравна 10 и ордината положительна. Вычислить фокальные радиусы-векторы этой точки и угол между ними.

13. Найти фокальные радиусы-векторы гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точках пересечения её с окружностью $x^2 + y^2 = 91$.

14. На левой ветви гиперболы $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ найти точку, правый фокальный радиус-вектор которой равен 18.

15. На параболе $y^2 = 8x$ найти:

1) точку, фокальный радиус-вектор которой равен 20;

2) точку, расстояние до которой от директрисы равно 4.

16. Дана парабола $y^2 = 12x$. Провести к ней касательную:

1) в точке с абсциссой $x = 5$;

2) параллельно прямой $x - 2y + 3 = 0$;

3) перпендикулярно прямой $2x - 3y + 7 = 0$;

4) образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол $\frac{\pi}{4}$.

17. На параболе $y^2 = 32x$ найти точку, расстояние до которой от прямой $4x + 3y + 10 = 0$ равно 2.

18. Составить уравнение параболы, если известно, что её фокус находится в точке пересечения прямой $4x-3y-4=0$ с осью Ox.
19. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix}$.

20. Вычислить определители 3-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -2 & 6 & -7 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$.

21. Решить системы методом Крамера

1) $\begin{cases} 2x-y+10z=13 \\ 3x+2y+5z=23; \\ 9x-y+7z=62 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-y+2z=16 \\ 3x+2y-z=3 \\ 9x-y+4z=30 \end{cases}$.

22. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(7;-2;3)$ и $\vec{b}=(-5;1;4)$.
23. Даны векторы $\vec{a}=\lambda\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}-2\lambda\vec{j}+3\vec{k}$ При каком занчении λ эти векторы перпендикулярны?
24. Найти скалярное произведение векторов $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $5\vec{a}-6\vec{b}$, если $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=6,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$.
25. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $C(-3;2;-1)$.

26. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=(7;-2;3)$ и $\vec{b}=(-5;1;4)$.
27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $(\widehat{\vec{p},\vec{q}})=\dfrac{\pi}{4}$.
28. Даны точки $A(1;-3;-1)$, $B(3;-5;-2)$, $C(5;2;6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.
29. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$ и $C(1;3;-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.
30. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=(4;-2;-3)$ и $\vec{b}=(0;1;3)$, образует с осью Oy тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=6$, найти его координаты.
31. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a}=(8;-15;3)$, образует острый угол с осью Ox. Зная, что $|\vec{x}|=51$, найти его координаты.
32. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=(2;-3;1)$ и $\vec{b}=(1;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k})=10$.
33. Вычислить объем треугольной пирамиды, с вершиной в точке $C(-3;2;-1)$, если $A(3;3;-1)$, $B(1;5;-2)$, $D(-1;4;2)$.
34. Выяснить компланарны векторы или нет:
    $\vec{a}(3;2;1)$, $\vec{b}(1;-3;-7)$, $\vec{c}(1;2;3)$.
35. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:
    1) $\vec{a}=(-2;1;5)$, $\vec{b}=(4;-3;0)$, $\vec{c}(0;-1;10)$;
    2) $\vec{a}=(2;0;2)$, $\vec{b}=(1;-1;0)$, $\vec{c}(0;-1;-2)$;
36. Найти обратную матрицу для матриц:
    1) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix}$;
    2) $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$;

3) $C=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}.$

37. Найти значение матричных многочленов:

1) $2C-5C\cdot D$, где $D=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -5 & 2\end{pmatrix}$;

2) $A^2+2A\cdot E$, где $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -5\end{pmatrix}$;

3) $A^T-2E\cdot A$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$.

38. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

2) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

39. Исследовать систему на совместность и найти общее решение

1) $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1\\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2\\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4\end{cases};$

2) $\begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=2\\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=5\\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=3\end{cases}.$

40. Найти ранг матрицы и её базисные миноры

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8\\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}.$

41. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$
42. Составить уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок $b=1$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$.
43. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=7$.
44. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $A(-2;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$.
45. Дано общее уравнение прямой $4x-3y+12=0$. Составить нормальное уравнение прямой.
46. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки $A(6;\ 2)$ и $B(-3;\ 5)$.
47. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;-5)$ и параллельно прямой $3x+4y+2=0$.
48. Найти острый угол между прямыми $y=-3x+7$ и $y=2x+1$.
49. Определить расстояние от точки $A(2;-1)$ до прямой, отсекающей на осях координат отрезки $a=8$, $b=6$.
50. Найти расстояние от точки $A(-1;\ 2)$ до прямой $2x-5y+4=0$.
51. Найти прямую, проходящую через точку пересечения прямых $x+2y+3=0$, $2x+3y+4=0$ и параллельную прямой $4x-3y=0$.
52. Даны вершины треугольника $A(-4;-3)$, $B(6;\ 2)$, $C(-2;\ 11)$. Составить уравнения его медиан.
53. Даны вершины треугольника $A(-4;-3)$, $B(6;\ 2)$, $C(-2;\ 11)$. Составить уравнения его высот.
54. Даны стороны треугольника AB: $x+y-6=0$, AC: $3x-5y+14=0$, BC: $5x-3y-14=0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины B.
55. Найти уравнение плоскости, точки которой одинаково удалены от точек $A(1;-4;\ 2)$, $B(7;\ 1;-5)$.
56. Найти точку A, симметричную точке $B(3;-3;-1)$ относительно плоскости $2x-4y-4z-13=0$.

57. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;\ 0;-1)$ и $B(1;-1;\ 3)$ и перпендикулярной плоскости $3x+2y-z+5=0$3x+2y−z+5=0.

58. Найти точку A, симметричную точке $B(0;\ 2;\ 1)$ относительно прямой $\frac{x-1{,}5}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$.

59. Найти собственные числа и собственные векторы матриц:

1) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

60. Привести к каноническому виду следующие общие уравнения кривых 2-го порядка и нарисовать получившиеся фигуры:

1) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$;

2) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$;

3) $x^2+2xy+y^2+2x+2y-4=0$;

4) $7xy-3=0$;

5) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$;

6) $y^2+5xy-14x^2=0$;

7) $x^2+y^2-4x-6y=0$;

8) $2y^2+8x+12y-3=0$;

9) $5x^2+3y^2+x-2=0$;

10) $x^2+3y^2+4x-5y=0$;

11) $x^2-2y^2+3=0$;

12) $3x^2-4y^2+2y+5=0$;

13) $8x^2 - 3y^2 + 2x - 5y + 1 = 0;$

14) $2xy + 3x - y - 2 = 0;$

15) $x^2 + xy + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0;$

16) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 6y = 0;$

17) $2x^2 + 6x - y - 1 = 0;$

18) $3x^2 - 4y + 5 = 0;$

19) $x^2 - 5y = 0;$

20) $4x^2 - 2x - 3 = 0;$

21) $2xy + 3x - y - 2 = 0;$

22) $x^2 + 2y^2 - 16 = 0;$

23) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0;$

24) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y - 3 = 0;$

25) $x^2 + y = 0;$

26) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0;$

27) $x^2 - 2xy + y^2 - x - 2y + 3 = 0;$

28) $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0;$

29) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 6y + 1 = 0;$

30) $y^2 - 2xy - 4x - 2y - 2 = 0;$

31) $x^2 - 4x - y + 3 = 0.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебно-практическом пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения основных разделов математики (линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия), изучаемой в высшей школе студентами всех инженерно-технических и математических специальностей; проиллюстрировать теорию примерами и разобрать задачи разного уровня сложности.

Дополнительный дидактический материал позволит студентам самостоятельно закрепить полученные знания и отработать на практике приобретённые навыки решения задач различной сложности.

Автор надеется, что пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, П.С. Лекции по аналитической геометрии / П.С. Александров. – М.: Наука, 1968. – 911 с.

2. Архангельский, А.В. Конечномерные векторные пространства / А.В. Архангельский. – М.: МГУ, 1982. – 248 с.

3. Заманский, М. Введение в современную алгебру и анализ / М. Заманский. – М.: Наука, 1974. – 487 с.

4. Кострикин, А.И. Введение в алгебру / А.И Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 496 с.

5. Кострикин, А.И. Сборник задач по алгебре / А.И Кострикин. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

6. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты: учебное пособие. – 9-е изд., стер. –СПб.: Издательство Лань, 2007. – 240 с.

7. Милнор, Дж., Хьюзмоллер, Д. Симметрические билинейные формы / Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. – М.: Наука, 1986. – 175 с.

8. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1/ Д.Т. Письменный. – 10-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2010. – 288 с.

9. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: Наука, 1967. – 384 с.

Учебное электронное издание

ПРОХОРОВА Татьяна Вячеславовна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Кафедра функционального анализа и его приложений
tvprokhorova@mail.ru