

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Методические указания
к выполнению расчетно-проектировочной работы
по дисциплине «Строительная механика»

Составитель
И.А. ЧЕРНОУСОВА

Владимир 2007

УДК 624.04
ББК 38.112
Р24

Рецензент

Кандидат технических наук профессор
Владимирского государственного университета
В.Ю. Щуко

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Расчет трехшарнирной арки : метод. указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по дисциплине «Строительная механика» / Владим. гос. ун-т ; сост. И. А. Черноусова. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 24 с.

Содержат варианты заданий к расчетно-проектировочной работе по строительной механике и примеры ее выполнения по теме «Расчет трехшарнирной арки». Способствуют усвоению основных теоретических положений и методики расчета трехшарнирных систем.

Предназначены для студентов строительных специальностей 270102 «Промышленное и гражданское строительство», 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы» очной формы обучения.

Табл. 1. Ил. 6. Библиогр.: 3 назв.

УДК 624.04
ББК 38.112

При освоении курса строительной механики очень важно приобрести навыки расчета трехшарнирных систем. Для получения этих навыков огромное значение имеет изучение темы «Расчет трехшарнирной арки».

Цель методических указаний – помочь студентам овладеть методами расчета трехшарнирной арки. Здесь рассматривается построение эпюр внутренних силовых факторов, а также вычисление усилий в трехшарнирной арке при помощи линий влияния.

Методические указания включают задание, указания к выполнению расчетно-проектировочной работы и примеры решения задачи.

Приведенные варианты заданий соответствуют программе курса строительной механики. Навыки и полученные знания послужат основой для решения специальных задач проектирования и конструирования инженерных сооружений.

ЗАДАНИЕ

Для заданной трехшарнирной арки (рис. 1) требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от постоянной внешней нагрузки.

2. Для заданного сечения K построить линии влияния внутренних силовых факторов.

3. Загрузить построенные линии влияния заданной постоянной нагрузкой и результаты сравнить с теми, что были получены для сечения K при выполнении п. 1.

Данные для расчета взять из табл. П 1 приложения.

Уравнения, описывающие очертание оси арки в предложенной системе координат (см. рис. 1):

$$x^2 + \left(y - \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \right)^2 = \frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} \quad \text{- окружность;}$$

$$y = f - \frac{4f}{l^2} x^2 \quad \text{- парабола;}$$

$$\frac{4x^2}{l^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1 \quad \text{- эллипс.}$$

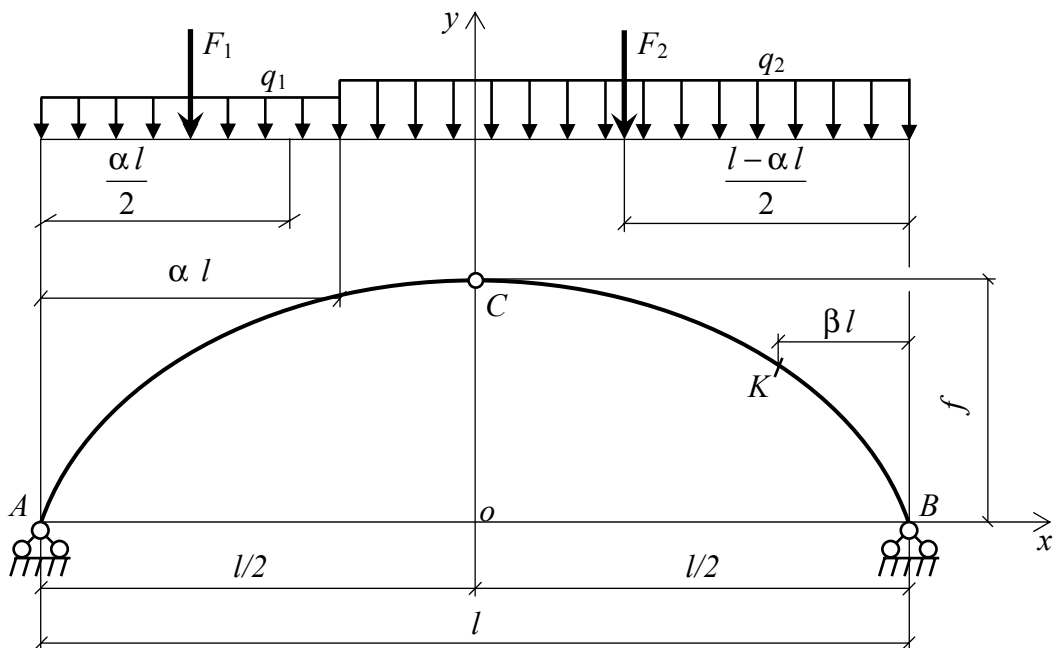


Рис. 1

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ

Вычертить арку в масштабе с указанием заданных размеров и нагрузки. Разбить ось арки на участки. Каждый участок должен составлять не менее чем одну десятую длины пролета арки. Таким образом, всего должно получиться не менее десяти участков. Обязательные точки деления - это точки приложения сил, точки смены интенсивности нагрузки, заданное сечение K , ключевой шарнир C и, конечно, опоры A и B . Здесь следует заметить, что в начале работы ось арки надо вычертить приблизительно

тонкой линией. Затем необходимо уточнить ее после вычисления ординаты y каждой точки деления.

Определить число степеней свободы системы:

$$W = 3d - 2ш - c_{\text{оп}},$$

где d - количество дисков, образующих систему; $ш$ - количество простых шарниров, соединяющих диски; $c_{\text{оп}}$ - количество опорных связей.

Найти реакции опор: из равенства нулю суммы проекций всех сил на ось x видно, что в трехшарнирных системах, работающих на вертикальную нагрузку, горизонтальные реакции равны между собой. Называют эти реакции распором H . Величину распора можно найти, воспользовавшись дополнительным уравнением статики. Таким уравнением является сумма моментов всех сил, приложенных слева или справа от врезанного шарнира C , которая должна быть равна нулю.

Определение изгибающих моментов, поперечных и продольных сил в арке производится по формулам:

$$M = M^0 - H \cdot y;$$

$$Q = Q^0 \cos \varphi - H \sin \varphi;$$

$$N = -(Q^0 \sin \varphi + H \cos \varphi),$$

где M^0 - балочный изгибающий момент в соответствующем сечении простой балки; Q^0 - балочная поперечная сила в интересующем нас сечении; y - ордината того сечения арки, где определяется момент; φ - угол между касательной к оси арки в точке, где определяются поперечная и продольная силы, и осью x .

Заменить арку простой балкой, нагруженной той же нагрузкой, и построить балочные эпюры поперечных сил Q^0 и изгибающих моментов M^0 . На этих эпюрах нужно проставить ординаты во всех сечениях балки, соответствующих точкам деления оси арки.

Преобразовать заданное уравнение оси арки таким образом, чтобы было удобно находить ординаты выбранных точек: $y = f(x)$ - взять первую производную от данной функции. Она, как известно, равна тангенсу угла наклона между касательной к оси арки и осью x , т.е. $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\varphi$. Зная тангенс, легко найти нуж-

ные нам косинус и синус этого угла: $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$;

$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi$.

Преобразуем уравнение окружности

$$x^2 + \left(y - \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} \right)^2 = \frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4}.$$

Перенесем x^2 в правую часть уравнения и извлечем квадратные корни из правой и левой частей, тогда

$$y - \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f} = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2},$$

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2} + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f},$$

$$y' = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2 \right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot (-2x),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2 \right)}}.$$

Преобразуем уравнение параболы:

$$y = f - \frac{4f}{l^2} x^2; \quad y' = \operatorname{tg} \varphi = - \frac{8f}{l^2} x.$$

Преобразуем уравнение эллипса:

$$\frac{4x^2}{l^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1; \quad y^2 = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right) f^2; \quad y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \cdot f = \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot f;$$

$$y = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} f \left(1 - \frac{4x^2}{l^2} \right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \cdot \left(- \frac{8}{l^2} x \right);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{4fx}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}}.$$

Дальнейший расчет удобно свести в таблицу (табл. П 2 приложения).

По полученным данным построить эпюры арочных усилий M , Q , и N . Для этого во всех расчетных сечениях отложить вычисленные значения соответствующего внутреннего силового фактора и соединить полученные точки плавными линиями.

Далее можно приступить к построению линий влияния изгибающего момента, поперечной и продольной сил для сечения K арки.

Начать необходимо с построения линии влияния распора. Распор можно определить по формуле $H = \frac{M_C^0}{f}$, где M_C^0 - балочный изгибающий момент в сечении C простой балки; f - ордината сечения C арки, которая в нашем случае является стрелой подъема (высотой) арки.

Очевидно, что линия влияния распора повторит по очертанию линию влияния балочного момента для сечения C , все ординаты которой нужно разделить на величину стрелы подъема арки f .

Построить линии влияния балочных усилий для сечения K .

Ординаты графика изменения изгибающего момента в сечении K арки будем определять по формуле $M_K = M_K^0 - H \cdot y_K$. Из этой формулы следует, что, для того чтобы построить линию влияния арочного изгибающего момента сечения K , нужно из каждой ординаты линии влияния балочного момента вычесть соответствующую ординату линии влияния распора, увеличенную в y_K раз.

Для построения линии влияния поперечной силы воспользуемся формулой

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K.$$

Здесь нам придется из каждой ординаты линии влияния балочной поперечной силы сечения K , умноженной на $\cos \varphi_K$, вычесть соответствующую ординату распора, умноженную на $\sin \varphi_K$.

Линию влияния продольной силы будем строить по формуле

$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K).$$

В этом случае надо сложить ординаты, взятые с линии влияния Q_K^0 , умноженные на $\sin \varphi_K$, и соответствующие ординаты, взятые с линии влияния H , умноженные на $\cos \varphi_K$. Результат следует отложить на графике изменения продольной силы в противоположную сторону.

На получившихся линиях влияния нужно проставить все характерные значения, а также те ординаты, которые могут понадобиться при загрузении линий влияния.

Найти арочные усилия в сечении K при помощи линий влияния:

$$T = \sum F_i y_i + \sum q_j \omega_j,$$

где под T подразумевается любое усилие (Q , M или N); F_i , q_j – нагрузка, приложенная к арке, причем и сила F_i и распределенная нагрузка q_j считаются положительными, если направлены вниз; y_i – ордината линии влияния под соответствующей силой, эта ордината берется со своим знаком; ω_j – площадь линии влияния, лежащая под равномерно распределенной нагрузкой. Этой площади приписывается знак линии влияния.

Сравнить результаты загрузения линий влияния и значения внутренних силовых факторов в сечении K , найденные аналитически. Оформить это сравнение в виде таблицы (табл. П 3 приложения)

Расхождение результатов, полученных при вычислении усилий во время построения эпюр и при загрузении линий влияния, оценивается в процентах:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{T_{\text{эп}} - T_{\text{л.в.}}}{T_{\text{эп}}} \right| 100 \% \leq 1 \%$$

При оформлении расчетной работы следует обязательно показывать определение реакций опор и их проверки. Балочные эпюры нужно строить по точкам без подробного описания.

Графическая часть должна состоять из двух листов. На первом необходимо друг под другом в одинаковом масштабе показать заданную арку со всеми размерами и нагрузкой, заменяющую ее

простую балку также с нагрузкой, балочные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и эпюры арочных силовых факторов.

На втором листе графической части в том же масштабе, также строго друг под другом показать заданную арку с размерами, над которой на отдельной оси показана нагрузка, простую балку без нагрузки с указанными на ней необходимыми сечениями и все промежуточные и результирующие линии влияния.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Пример 1

Для арки, показанной на рис. 2, требуется:

1. Построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил от постоянной внешней нагрузки.
2. Для заданного сечения K построить линии влияния усилий.
3. Загрузить построенные линии влияния заданной постоянной нагрузкой и результаты сравнить с теми, что были получены для сечения K при выполнении п. 1.

Уравнение оси арки – эллипс: $\frac{4x^2}{l^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1$; $y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \cdot f$.

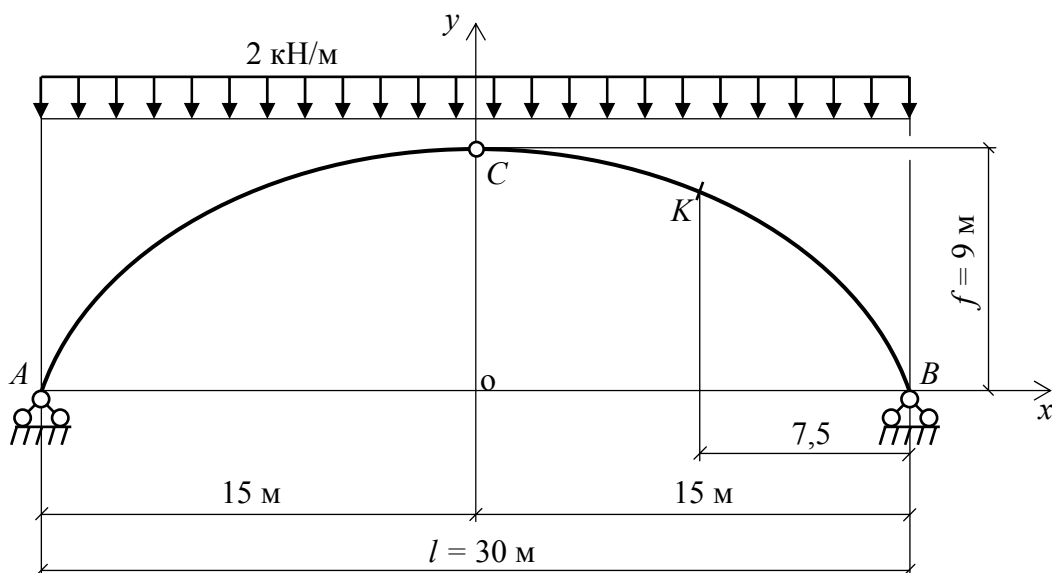


Рис. 2

Примечание: в дальнейшем размерности на рисунках не будем указывать, подразумевая, что силы измеряются в килоньютонах, а линейные размеры – в метрах.

Решение

Число степеней свободы системы:

$$W = 3d - 2ш - c_{\text{оп}} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

Вычертим арку в масштабе в тонких линиях. Уточненное очертание оси арки сделаем после просчета высот промежуточных точек (рис. 3, а).

Найдем реакции опор.

$$\sum M_A = 0: \quad R_B \cdot 30 - 2 \cdot 30 \cdot 15 = 0; \quad R_B = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A \cdot 30 + 2 \cdot 30 \cdot 15 = 0; \quad R_A = 30 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{слева}} = 0: \quad -R_A \cdot 15 + 2 \cdot 15 \cdot 7,5 - H \cdot 9 = 0; \quad H = 25 \text{ кН}.$$

Сделаем проверки правильности определения реакций:

$$\sum Y = 0: \quad 30 + 30 - 2 \cdot 30 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{справа}} = 0: \quad 30 \cdot 15 - 2 \cdot 15 \cdot 7,5 - 25 \cdot 9 = 450 - 450 = 0.$$

Разобьем пролет арки на участки, как показано на рис. 3, а.

Заменяем арку простой балкой (рис. 3, б). Построим балочные эпюры внутренних силовых факторов. На этих эпюрах представим все промежуточные значения. Балочная эпюра поперечных сил показана на рис. 3, в. Балочная эпюра изгибающих моментов – на рис. 3, г.

Преобразуем уравнение оси арки до удобного для расчетов вида. Для этого подставим все известные величины в заданное уравнение эллипса. То же самое необходимо проделать с уравнением для тангенса угла наклона между касательной к оси арки и осью x .

$$y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}} \cdot f = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot x^2}{30^2}} \cdot 9 = 9 \sqrt{1 - \frac{x^2}{225}};$$
$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{4fx}{l^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{l^2}}} = -\frac{4 \cdot 9x}{30^2 \sqrt{1 - \frac{4x^2}{30^2}}} = \frac{0,04x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{225}}}.$$

Подробно покажем, как определить арочные усилия в нескольких сечениях арки.

Сечение A : $x_A = -15$ м, $y_A = 0$, $Q_A^0 = 30$ кН, $M_A^0 = 0$,

$$\operatorname{tg} \varphi_A = -\frac{0,04 x_A}{\sqrt{1 - \frac{x_A^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-15)}{\sqrt{1 - \frac{15^2}{225}}} = \infty, \quad \varphi_A = 90^\circ, \quad \cos \varphi_K = 0, \quad \sin \varphi_K = 1.$$

Таким образом, арочные усилия для сечения A равны:

$$M_A = M_A^0 - H \cdot y_A = 0;$$

$$Q_A = Q_A^0 \cos \varphi_A - H \sin \varphi_A = 30 \cdot 0 - 25 \cdot 1 = -25 \text{ кН};$$

$$N_A = -(Q_A^0 \sin \varphi_A + H \cos \varphi_A) = -(30 \cdot 1 + 25 \cdot 0) = -30 \text{ кН}.$$

Сечение 1: $x_1 = -12$ м, $Q_1^0 = 24$ кН, $M_1^0 = 81$ кН·м,

$$y_1 = 9 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{225}} = 9 \sqrt{1 - \frac{12^2}{225}} = 5,4 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{0,04 x_1}{\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-12)}{\sqrt{1 - \frac{12^2}{225}}} = 0,8;$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,8^2}} = 0,781;$$

$$\sin \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \varphi_1 = 0,8 \cdot 0,781 = 0,625.$$

Арочные усилия сечения 1:

$$M_1 = M_1^0 - H \cdot y_1 = 81 - 25 \cdot 5,4 = -54 \text{ кН·м};$$

$$Q_1 = Q_1^0 \cos \varphi_1 - H \sin \varphi_1 = 24 \cdot 0,781 - 25 \cdot 0,625 = 3,12 \text{ кН};$$

$$N_1 = -(Q_1^0 \sin \varphi_1 + H \cos \varphi_1) = -(24 \cdot 0,625 + 25 \cdot 0,781) = -34,53 \text{ кН}.$$

Сечение 2: $x_2 = -9$ м, $Q_2^0 = 18$ кН, $M_2^0 = 144$ кН·м,

$$y_2 = 9 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{225}} = 9 \sqrt{1 - \frac{9^2}{225}} = 7,2 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{0,04 x_2}{\sqrt{1 - \frac{x_2^2}{225}}} = -\frac{0,04 \cdot (-9)}{\sqrt{1 - \frac{9^2}{225}}} = 0,45;$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,45^2}} = 0,912;$$

$$\sin \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \varphi_2 = 0,45 \cdot 0,912 = 0,410.$$

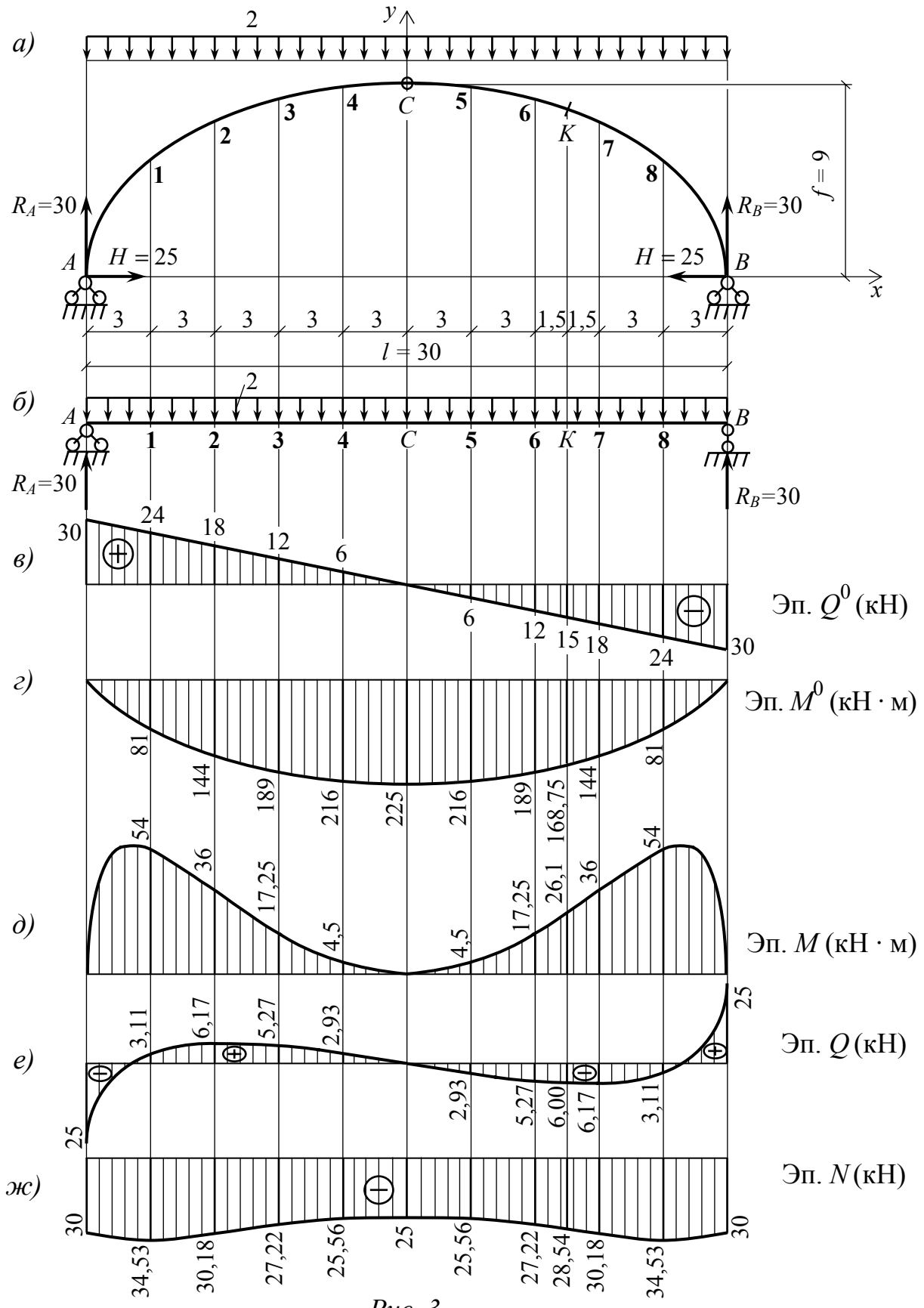


Рис. 3

Арочные усилия в сечении 2:

$$M_2 = M_2^0 - H \cdot y_2 = 144 - 25 \cdot 7,2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_2 = Q_2^0 \cos \varphi_2 - H \sin \varphi_2 = 18 \cdot 0,912 - 25 \cdot 0,410 = 6,17 \text{ кН};$$

$$N_2 = -(Q_2^0 \sin \varphi_2 + H \cos \varphi_2) = -(18 \cdot 0,410 + 25 \cdot 0,912) = -30,18 \text{ кН}.$$

Дальнейший расчет сведем в табл. П 4 (приложение).

По полученным данным построим арочные эпюры изгибающих моментов (рис. 3, *д*), поперечных сил (рис. 3, *е*) и продольных сил (рис. 3, *ж*).

Перейдем к построению линий влияния внутренних усилий сечения *K* арки. Вычертим арку в масштабе (рис. 4, *б*). Над аркой покажем нагрузку, которая понадобится нам при загрузении линий влияния (рис. 4, *а*). Простую балку покажем на рис. 4, *в*.

Параметры сечения *K*:

$$x_K = 7,5 \text{ м}; \quad y_K = 7,79 \text{ м}; \quad \cos \varphi_K = 0,945; \quad \sin \varphi_K = -0,327.$$

Сначала построим линию влияния балочного момента для сечения *C* – л.в. M_C^0 (рис. 4, *з*). Затем, согласно формуле

$$H = \frac{M_C^0}{f},$$
 построим линию влияния распора – л.в. *H*. Для это-

го каждую ординату линии влияния M_C^0 разделим на стрелу подъема арки, равную девяти метрам (рис. 4, *д*).

Построим линию влияния балочного момента сечения *K* (рис. 4, *е*).

Умножим каждую ординату линии влияния распора на величину y_K , равную 7,79 м, и построим, таким образом, линию влияния $H \cdot y_K$ (рис. 4, *ж*).

Теперь можно перейти к построению линии влияния арочного момента в сечении *K*. Для этого из каждой ординаты линии влияния M_K^0 вычтем соответствующую ординату линии влияния $H \cdot y_K$. В точке на графике – л.в. M_K , находящейся под сечением *C*, ордината будет равна разнице между значением 3,75, взятым с л.в. M_K^0 , и значением 6,489, взятым с л.в. $H \cdot y_K$. Это значение отрицательно и равно 2,739. В точке того же графика,

находящейся под сечением K , значение будет равно разнице между 5,625 (л.в. M_K^0) и 3,245 (л.в. $H \cdot y_K$). Эта разница равна 2,380. Получившийся график (л.в. M_K) показан на рис. 4, з. Все необходимые промежуточные значения на графиках определяем из подобия треугольников.

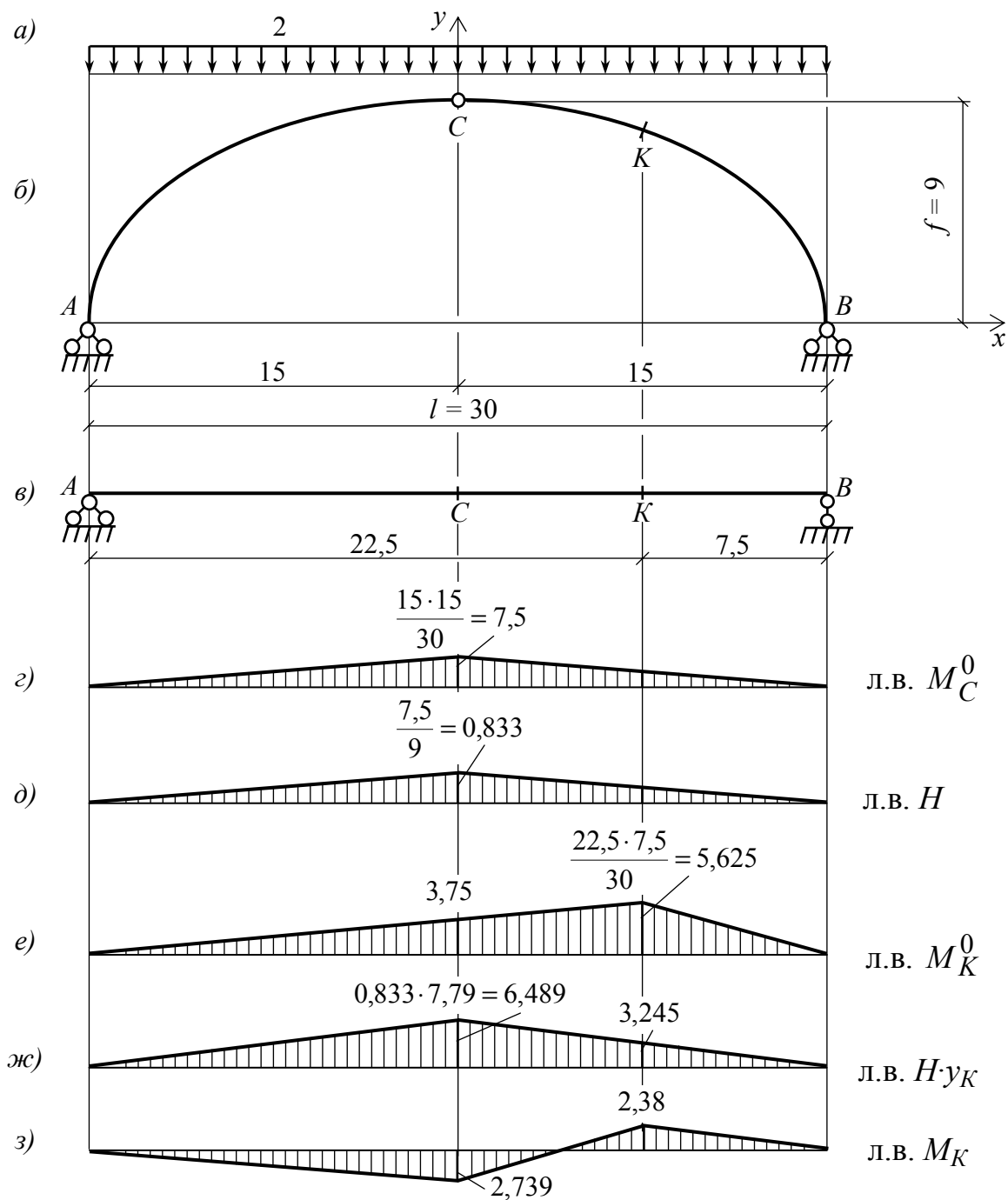


Рис. 4

Построение линии влияния поперечной и продольной сил в сечении K подробно показано на рис. 5.

Сначала обычным образом строим линию влияния балочной поперечной силы для сечения K – л.в. Q_K^0 (рис. 5, а). Затем, согласно формуле $Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K$, строим линии влияния величин, входящих в неё.

Линия влияния $Q_K^0 \cos \varphi_K$ показана на рис. 5, б. На ней каждая ордината л.в. Q_K^0 умножена на $\cos \varphi_K = 0,945$.

Линия влияния $H \sin \varphi_K$ показана на рис. 5, в. На ней каждая ордината л.в. H умножена на $\sin \varphi_K = -0,327$. Таким образом, на линии влияния $H \sin \varphi_K$ все ординаты меняют знак по отношению к л.в. H .

Окончательная линия влияния Q_K показана на рис. 5, г. Здесь ордината под сечением C арки вычисляется следующим образом:

$$-0,472 - (-0,272) = -0,200.$$

Ордината под сечением, подходящим бесконечно близко к точке K арки слева: $-0,709 - (-0,136) = -0,573$.

Ордината под сечением, подходящим бесконечно близко к точке K арки справа: $0,236 - (-0,136) = 0,372$.

Линию влияния усилия N_K строим, используя соответствующую формулу. Сначала построим л.в. $Q_K^0 \sin \varphi_K$. Она показана на рис. 5, д. Здесь каждая ордината л.в. Q_K^0 умножена на $\sin \varphi_K = -0,327$, т.е. сам график перевернется по отношению к л.в. Q_K^0 .

Линия влияния $H \cos \varphi_K$ показана на рис. 5, е. На ней каждая ордината л.в. H умножена на $\cos \varphi_K = 0,945$.

Окончательная линия влияния N_K показана на рис. 5, ж. Здесь ордината под сечением C арки вычисляется следующим образом:

$$-(0,164 + 0,787) = -0,951.$$

Ордината под сечением, подходящим бесконечно близко к точке K арки слева: $-(0,245 + 0,394) = -0,639$.

Ордината под сечением, подходящим бесконечно близко к точке K арки справа: $-(-0,082 + 0,394) = -0,312$.

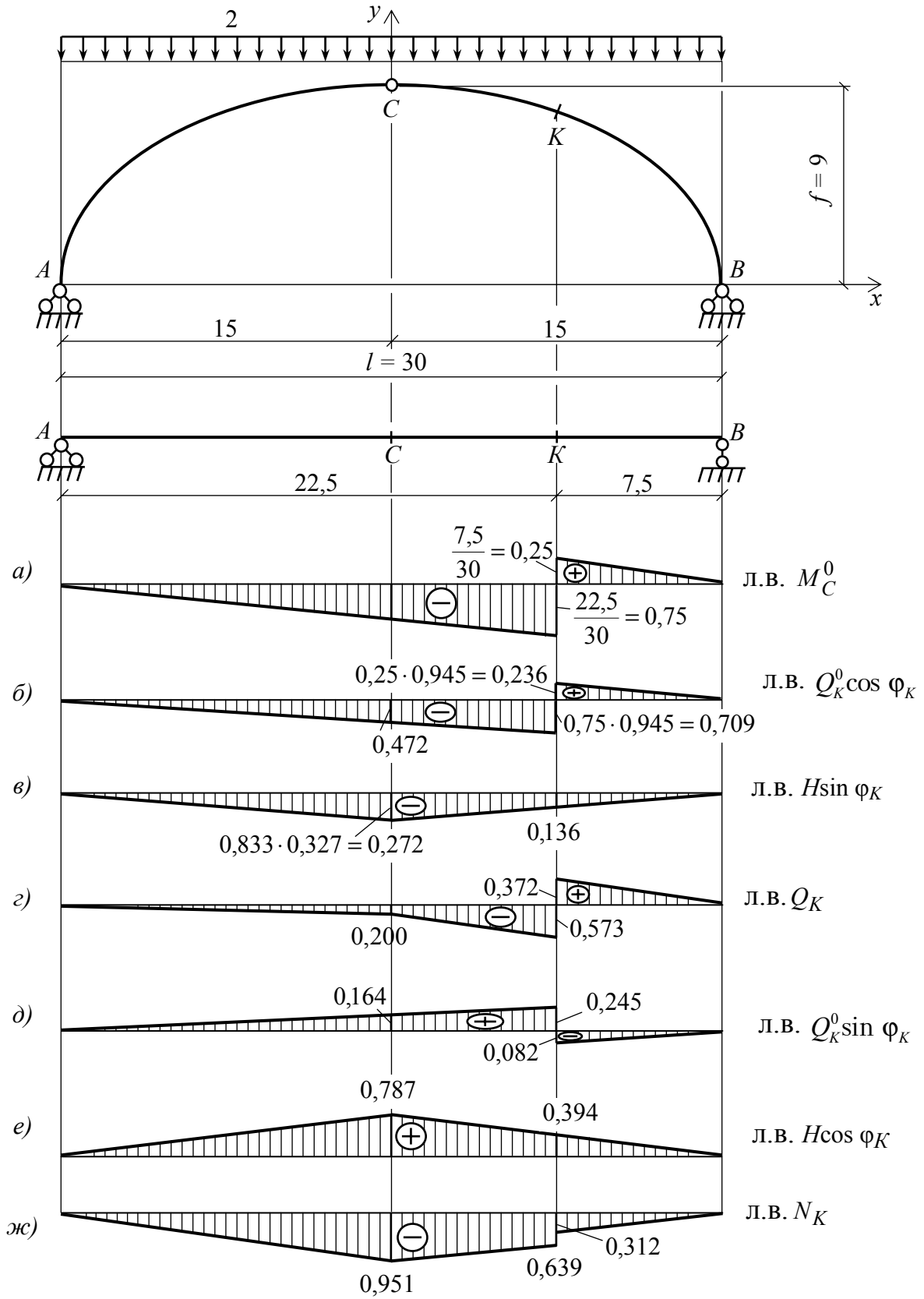


Рис. 5

Найдем арочные усилия в сечении K при помощи линий влияния:

$$M_K = 2 \cdot \left(-\frac{2,739 \cdot 15}{2} - \frac{2,739 - 2,38}{2} \cdot 7,5 + \frac{2,38 \cdot 7,5}{2} \right) = -25,9 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_K = 2 \cdot \left(-\frac{0,2 \cdot 15}{2} - \frac{0,573 + 0,2}{2} \cdot 7,5 + \frac{0,372 \cdot 7,5}{2} \right) = -6,0 \text{ кН};$$

$$N_K = 2 \cdot \left(-\frac{0,951 \cdot 15}{2} - \frac{0,639 + 0,951}{2} \cdot 7,5 - \frac{0,312 \cdot 7,5}{2} \right) = -28,53 \text{ кН}.$$

Сравним результаты загрузки линий влияния и значения внутренних силовых факторов в сечении K , найденные при построении эпюр, и занесем их в таблицу.

Искомое усилие	M_K , кН·м	Q_K , кН	N_K , кН
Найденное при построении эпюр	- 26,1	- 6	- 58,54
Найденное при загрузке линий влияния	- 25,9	- 6	- 28,53
$\Delta(\%)$ - расхождение результатов	0,77 %	0	0,02 %

Расхождение результатов:

$$\Delta(\%) = \left| \frac{M_{\text{эп}} - M_{\text{л.в.}}}{M_{\text{эп}}} \right| = \frac{26,1 - 25,9}{26,1} \cdot 100 \% = 0,77 \% \leq 1 \%;$$

$$\Delta(\%) = \left| \frac{N_{\text{эп}} - N_{\text{л.в.}}}{N_{\text{эп}}} \right| = \frac{58,54 - 58,53}{58,54} \cdot 100 \% = 0,02 \% \leq 1 \%.$$

Как видим, результаты расчетов вполне удовлетворительны.

Пример 2

Для арки, показанной на рис. 6, а, требуется найти арочные внутренние силовые факторы в сечении, расположенном под сосредоточенной силой.

Уравнение оси арки – окружность:

$$y = \sqrt{\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4}} - x^2 + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f}; \quad \text{tg}\varphi = -\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2\right)}}.$$

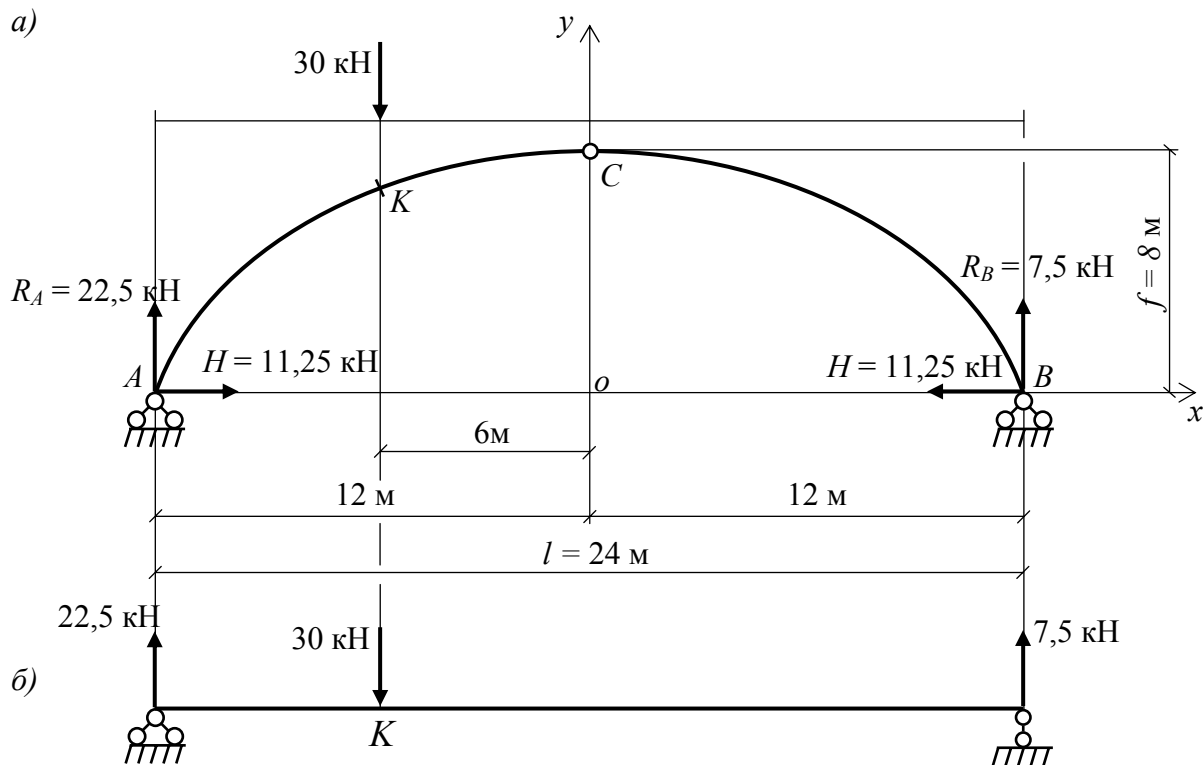


Рис. 6

Решение

Найдем реакции опор.

$$\sum M_A = 0: \quad R_B \cdot 24 - 30 \cdot 6 = 0; \quad R_B = 7,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_A \cdot 24 + 30 \cdot 18 = 0; \quad R_A = 22,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{слева}} = 0: \quad -R_A \cdot 12 + 30 \cdot 6 - H \cdot 8 = 0; \quad H = 11,25 \text{ кН}.$$

Сделаем проверки правильности определения реакций.

$$\sum Y = 0: \quad 22,5 + 7,5 - 30 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{справа}} = 0: \quad 7,5 \cdot 12 - 11,25 \cdot 8 = 0.$$

Заменим арку простой балкой (рис. 6, б). Для поставленной задачи эпюры внутренних силовых факторов нам не понадобятся. Найдем балочные усилия для сечения K .

Значение балочной поперечной силы для сечения K будет различным с левой и с правой стороны.

Бесконечно близко к сечению K балки слева: $Q_K^0 = 22,5 \text{ кН}$.

Бесконечно близко к сечению K балки справа: $Q_K^0 = -7,5 \text{ кН}$.

Балочный изгибающий момент сечения K : $M_K^0 = 135$ кН.

Вычислим геометрические параметры сечения K , зная, что $x_K = -6$ м.

$$y_K = \sqrt{\left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2\right)} + \frac{f}{2} - \frac{l^2}{8f} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{24^2}{8} + \frac{24^4}{64 \cdot 8^2} + \frac{8^2}{4} - 6^2\right)} + \frac{8}{2} - \frac{24^2}{8 \cdot 8} = 6,53 \text{ м};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_K = -\frac{x}{\sqrt{\left(\frac{l^2}{8} + \frac{l^4}{64f^2} + \frac{f^2}{4} - x^2\right)}} = -\frac{-6}{\sqrt{\left(\frac{24^2}{8} + \frac{24^4}{64 \cdot 8^2} + \frac{8^2}{4} - 6^2\right)}} = 0,520;$$

$$\cos \varphi_K = \frac{1}{\sqrt{1+0,520^2}} = 0,887;$$

$$\sin \varphi_K = \operatorname{tg} \varphi_K \cos \varphi_K = 0,887 \cdot 0,520 = 0,461.$$

Вычислим арочные усилия сечения K . Здесь учтем то, что значение арочных поперечной и продольной сил для сечения K будет различным с левой и с правой стороны.

Бесконечно близко к сечению K арки слева:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = 22,5 \cdot 0,887 - 11,25 \cdot 0,461 = 14,77 \text{ кН},$$
$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K) = -(22,5 \cdot 0,461 + 11,25 \cdot 0,887) = -20,35 \text{ кН}.$$

Бесконечно близко к сечению K арки справа:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_K - H \sin \varphi_K = -7,5 \cdot 0,887 - 11,25 \cdot 0,461 = -11,84 \text{ кН},$$
$$N_K = -(Q_K^0 \sin \varphi_K + H \cos \varphi_K) =$$
$$= -(-7,5 \cdot 0,461 + 11,25 \cdot 0,887) = -6,52 \text{ кН}.$$

Арочный момент:

$$M_K = M_K^0 - H \cdot y_K = 135 - 11,25 \cdot 6,53 = -61,54 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Покажем, как данные по расчету сечения K арки должны выглядеть в таблице при оформлении полного расчета арки (табл. П 5 приложения).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П 1

№ п/п	Первая цифра варианта					Вторая цифра варианта			
	l , м	α , град	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	F_1 , кН	Очертание оси арки	f/l	β	F_2 , кН
1	18	0,35	0	2	10	Округ- ность	0,16	0,33	4
2	20	0,40	0	3	12	Парабола	0,18	0,35	5
3	22	0,45	0	4	6	Эллипс	0,20	0,40	6
4	24	0,55	0	5	4	Округ- ность	0,22	0,45	7
5	26	0,60	0	6	5	Парабола	0,24	0,55	8
6	28	0,65	0	7	6	Эллипс	0,25	0,60	9
7	30	0,35	0	8	7	Округ- ность	0,26	0,65	10
8	32	0,40	0	2	8	Парабола	0,28	0,33	11
9	34	0,45	0	3	9	Эллипс	0,30	0,35	12
10	36	0,55	0	4	10	Парабола	0,16	0,40	13
11	38	0,60	2	0	11	Эллипс	0,18	0,45	14
12	40	0,65	3	0	12	Округ- ность	0,20	0,55	15
13	18	0,40	4	0	13	Парабола	0,22	0,60	16
14	20	0,45	5	0	14	Эллипс	0,24	0,65	17
15	22	0,55	6	0	15	Округ- ность	0,25	0,35	18
16	24	0,60	7	0	16	Парабола	0,26	0,40	19
17	26	0,65	8	0	17	Эллипс	0,28	0,45	20
18	28	0,35	2	0	18	Округ- ность	0,30	0,55	8
19	30	0,40	3	0	19	Парабола	0,25	0,60	10
20	32	0,45	4	0	20	Округ- ность	0,32	0,65	12

Таблица П 2

Но- мер сече- ния	$x, м$	$y, м$	$tg \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	M^0	$H \cdot y$	M	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N

Таблица П 3

Искомое усилие	$M_K, кН \cdot м$	$Q_K, кН$	$N_K, кН$
Найденное при построении эпюр			
Найденное при загрузении линий влияния			
$\Delta(\%)$ - расхождение результатов			

Таблица П 4

Номер сечения	$x, м$	$y, м$	$tg \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	M^0	$H \cdot \gamma$	M	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N
<i>A</i>	-15	0	∞	0	1	0	0	0	30	0	25	-25	30	0	-30
1	-12	5,4	0,8	0,781	0,625	81	135	-54	24	18,74	15,63	3,11	15	19,53	-34,53
2	-9	7,2	0,45	0,912	0,410	144	180	-36	18	16,42	10,25	6,17	7,38	22,8	-30,18
3	-6	8,25	0,262	0,967	0,253	189	206,25	-17,25	12	11,6	6,33	5,27	3,04	24,18	-27,22
4	-3	8,82	0,122	0,993	0,121	216	220,5	-4,5	6	5,96	3,03	2,93	0,73	24,83	-25,56
<i>C</i>	0	9	0	1	0	225	225	0	0	0	0	0	0	25	-25
5	3	8,82	-0,122	0,993	-0,121	216	220,5	-4,5	-6	-5,96	-3,03	-2,93	0,73	24,83	-25,56
6	6	8,25	-0,262	0,967	-0,253	189	206,25	-17,25	-12	-11,6	-6,33	-5,27	3,04	24,18	-27,22
<i>K</i>	7,5	7,79	-0,346	0,945	-0,327	168,75	194,85	-26,1	-15	-14,18	-8,18	-6	4,91	23,63	-28,54
7	9	7,2	-0,45	0,912	-0,410	144	180	-36	-18	-16,42	-10,25	-6,17	7,38	22,8	-30,18
8	12	5,4	-0,8	0,781	-0,625	81	135	-54	-24	-18,74	-15,63	-3,11	15	19,53	-34,53
<i>B</i>	15	0	∞	0	-1	0	0	0	-30	0	-25	25	30	0	-30

Таблица П 5

Но- мер сече- ния	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$\text{tg } \varphi$	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	M^0	$H \cdot y$	M	Q^0	$Q^0 \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	Q	$Q^0 \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	N
К	-6	6,53	0,520	0,887	0,461	135	73,46	-61,51	22,5	19,96	5,19	14,77	10,37	9,98	-20,35
									-7,5	-6,65		-11,84	-3,46		-6,52

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / Г. К. Клейн [и др.] ; под ред. Г. К. Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.
2. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.
3. Расчет статически определимых систем : метод. указания к расчетно-проектировочным работам № 1 – 4 по строительной механике / Владим. политехн. ин-т ; сост.: В. М. Кислов, И. А. Черноусова. – Владимир, 1992. – 48 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЗАДАНИЕ	3
УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЗАДАНИЯ.....	4
ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ.....	9
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	20
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	24

РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы по дисциплине «Строительная механика»

Составитель
ЧЕРНОУСОВА Ирина Асафовна

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор А.Ф. Ковалев

Подписано в печать 24.04.07.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 1,39. Тираж 200 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.