Владимирский государственный университет

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1675-0

УДК 517.4
ББК 22.161

Автор-составитель О. В. Крашенинникова

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры физико-математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Операционное исчисление [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / авт.-сост. О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 45 с. – ISBN 978-5-9984-1675-0. – Электрон. дан. (1,3 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-R). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальный типовой расчет по операционному исчислению.

Предназначено для студентов бакалавриата очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых трех семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 33. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.4
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-1675-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия соответствует программе второго курса обучения и включает раздел «Операционное исчисление».

Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемому разделу, примеры решения типовых задач и индивидуальный типовой расчет, включающий 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей его защитой во время рейтинговой недели).

Обозначения и терминология, используемые в пособии, являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы по операционному исчислению, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с изданием предполагает параллельное изучение этой темы по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. ПОНЯТИЕ ОРИГИНАЛА И ИЗОБРАЖЕНИЯ

В XIX столетии многие математики занимались так называемым символическим исчислением, в основе которого лежит построение математического анализа как системы формальных операций над символом $p = \dfrac{d}{dt}$.

Обоснование символического, или как его стали теперь называть, операционного метода было дано в 20-х гг. XX столетия Бромвичем и Карсоном, связавшими этот метод с известным из теории функций комплексного переменного методом интегральных преобразований. При этом символ p получил новое толкование как комплексная переменная $p = s + i\sigma$.

Определение. **Функцией-оригиналом** называется любая комплексная функция $f(t)$ действительного аргумента t, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $f(t)$ интегрируема на любом конечном интервале оси t (локально интегрируема);
2) $f(t) = 0$ для всех отрицательных t;
3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть постоянные $M > 0$, $s_0 \geq 0$ такие, что для любого t $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$.

Число s_0 называется показателем роста функции $f(t)$ ($s_0 = \inf s$, $|f(t)| \cdot e^{-st}$ остается ограниченным при $t \to \infty$). Для ограниченных оригиналов можно принять $s_0 = 0$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая **единичная функция Хевисайда**: $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Очевидно, умножение функции $\varphi(t)$ на $\eta(t)$ «гасит» эту функцию для $t < 0$ и оставляет без изменения для $t > 0$: $\varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

так, что если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1) и 3), то и функция $\varphi(t) \cdot \eta(t)$ удовлетворяет всем условиям 1)-3).

В дальнейшем для сокращения записи будем писать $f(t)$ вместо $f(t)\cdot\eta(t)$ считая, что рассматриваемые функции продолжены нулем для отрицательных t.

Определение. **Изображением функции** $f(t)$ **по Лапласу** называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, определяемая равенством $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt.$ (1)

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение $f(t)$ будем символически записывать $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Теорема 1.1. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$ и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

Замечание 1. Интеграл Лапласа (1), вообще говоря, определяет изображение $F(p)$ лишь в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$. В большинстве практических задач область определения изображения значительно шире этой полуплоскости.

Замечание 2. Если точка p стремится в бесконечности так, что $\operatorname{Re} p = s$ неограниченно возрастает, то $F(p) \to 0$: $\lim\limits_{s\to+\infty} F(p) = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\left|\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le \int\limits_0^{+\infty} M\cdot e^{-(s-s_0)t}dt = \frac{M}{s-s_0}.$$ Отсюда вытекает требуемое.

Пример. Пользуясь определением, найти изображение функции $f(t) = e^{2t}$.

Решение.

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{2t}\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{(2-p)t}dt = \left.\frac{e^{(2-p)t}}{2-p}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-2}. \qquad (\operatorname{Re} p = s > 2)$$

Таким образом, $F(p) = \dfrac{1}{p-2}$, она аналитическая при $\operatorname{Re} p > 2$ и, кроме того, аналитическая всюду, за исключением точки $p = 2$.

Перед тем, как перейти к изучению основных свойств преобразования Лапласа, поясним основную идею его применения. Преобразование Лапласа устанавливает соответствие между оригиналами $f(t)$ и их изображениями $F(p)$: $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Оказывается, что определенным действиям, производимым над оригиналами, будут соответствовать некоторые действия, производимые над их изображениями, причем, как правило, действия над изображениями будут проще, чем над оригиналами. В этом проявляется полная аналогия с основной идеей применения логарифмов в элементарной математике. Роль оригиналов там играют числа, а роль изображений – их логарифмы. Действию умножения чисел соответствует сложение их логарифмов, действию возведения числа в степень соответствует умножение логарифма этого числа на показатель степени и т.д. Таким образом, более сложные действия над числами заменяются более простыми действиями над их логарифмами.

Если имеется некоторое сложное соотношение между оригиналами, то при помощи преобразования Лапласа мы будем получать значительно более простое соотношение между изображениями. Например, вместо дифференциального уравнения относительно оригинала будет получаться алгебраическое уравнение относительно изображения. Решив это уравнение и перейдя затем от изображения назад к оригиналу, мы и получим решение исходного дифференциального уравнения.

После того как в следующем пункте мы установим основные правила действия над преобразованиями Лапласа и составим таблицу соответствия между оригиналами и изображениями, нам уже не придется больше вычислять интеграл Лапласа для различных оригиналов $f(t)$, и переход от оригинала к изображению и обратно – от изображения к оригиналу будет осуществляться при помощи этой таблицы.

Таким образом интеграл Лапласа (1) нужен главным образом для установления основных свойств и правил преобразования Лапласа, или, как мы чаще будем говорить, свойств и правил операционного исчисления.

Вообще под операционным исчислением понимают методы решения задач, основанные на следующих этапах:

1) от искомых функций переходят к некоторым другим функциям – их изображениям;

2) над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над самими функциями (отсюда название – операционное исчисление);
3) произведя действия над изображениями и получив некоторый результат, возвращаются к самим функциям.

2. СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Отметим два простых примера преобразования Лапласа:

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{p},\ e^{p_0 t} \leftrightarrow \frac{1}{p-p_0}, \tag{2}$$

которые получаются непосредственно из определения.

Далее будем всюду обозначать через $f(t)$, $g(t)$,… оригиналы, через $F(p)$, $G(p)$,… их изображения: $F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt$, $G(p)=\int\limits_0^{+\infty} g(t)\cdot e^{-pt}dt$,…

Непосредственно из свойств интегралов получаем:

1) **Свойство линейности**.

Для любых комплексных постоянных α и β

$\alpha f(t)+\beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(p)+\beta G(p)$.

На основании этого свойства из (2) сразу получаем соотношения

$$\sin\omega t=\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i} \leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega}-\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},$$

аналогично, $$\cos\omega t=\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega}+\frac{1}{p+i\omega}\right)=\frac{p}{p^2+\omega^2}, \tag{3}$$

$$sh\,\omega t=\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},$$

$$ch\,\omega t=\frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

2) **Теорема подобия**. Для любого постоянного $\alpha > 0$ имеем

$$f(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Полагая $\alpha t = \tau$, имеем $f(\alpha t) \leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(\alpha t) \cdot e^{-pt} dt =$

$$= \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-\frac{p\tau}{\alpha}} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$ Теорема доказана.

3) **Дифференцирование оригинала**.

Если функция $f(t)$ непрерывна при $t > 0$ и $f(t)$, $f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то

$$f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - f'(0),$$

$\ldots$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где под $f^{(k)}(0)$ понимается $\lim\limits_{t \to 0+} f^{(k)}(t)$.

Доказательство. Переходя к изображениям и интегрируя по частям, получаем:

$$f'(t) \leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} f'(t) \cdot e^{-pt} dt = f(t) \cdot e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + p \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Применив эту формулу дважды, получим

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)' \leftrightarrow p\left(-f(0) + pF(p)\right) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$ и т.д.

В частности, если $f(0) = 0$, то $f'(t) \leftrightarrow pF(p)$ и дифференцирование оригинала сводится к умножению на p его изображения.

Пример. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Пусть $f(t) \leftrightarrow F(p)$, тогда $f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0) = pF(p)$, так как $f(0) = 0$. Далее,

$$f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t \leftrightarrow \frac{2}{p^2 + 4}$$, следовательно, $\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p) \Rightarrow$

$$F(p)=\frac{2}{p\left(p^2+4\right)}\leftrightarrow \sin^2 t.$$

4) **Дифференцирование изображения**.

Дифференцирование изображения сводится к умножению на $(-t)$ оригинала: $F'(p)\leftrightarrow -t\cdot f(t)$ или, вообще, $F^{(n)}(p)\leftrightarrow (-1)^n t^n\cdot f(t)$. (4)

Доказательство. Так как $F(p)$ является в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ аналитической функцией, то ее можно дифференцировать по p и мы получим $F'(p)=-\int\limits_0^{+\infty} t\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt$, $F''(p)=\int\limits_0^{+\infty} t^2\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt,\ldots,$

$F^{(n)}(p)=(-1)^n\int\limits_0^{+\infty} t^n\cdot f(t)\cdot e^{-pt}dt$, что равносильно (4).

В качестве примера применения свойства 4 отметим, что из (2) вытекает: $t^n\leftrightarrow\dfrac{n!}{p^{n+1}}$, $t^n e^{p_0 t}\leftrightarrow\dfrac{n!}{(p-p_0)^{n+1}}$, а из (3) вытекает:

$$t\sin\omega t\leftrightarrow\frac{2p\omega}{\left(p^2+\omega^2\right)^2},\ t\cos\omega t\leftrightarrow\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$$

5) **Интегрирование оригинала**.

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p:

$$\int\limits_0^t f(t)dt\leftrightarrow\frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Легко проверить, что функция $g(t)=\int\limits_0^t f(t)dt$ вместе с $f(t)$ является оригиналом, то есть удовлетворяет условиям 1-3. Тогда в силу формулы $f'(t)\leftrightarrow pF(p)$, которая применима, ибо $g(0)=0$, имеем $f(t)=g'(t)\leftrightarrow pG(p)$. Таким образом, для изображения $f(t)$ имеем $F(p)=pG(p)$, откуда $G(p)=\dfrac{F(p)}{p}$, что и требуется.

Пример. Найти изображение функции $\int_0^t e^{\tau} d\tau$.

Имеем $e^t \leftrightarrow \frac{1}{p-1}$, тогда $\int_0^t e^{\tau} d\tau \leftrightarrow \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$.

6) **Интегрирование изображения**.

Если $\int_p^{+\infty} F(p)dp$ сходится, то он служит изображением функции $\frac{f(t)}{t}$.

Доказательство. $\frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty} F(p)dp$, то есть интегрирование изображения равносильно делению на *t* оригинала.

Пример. Найти изображение функции $\frac{\sin t}{t}$.

Известно, что $\sin t \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, поэтому $\frac{\sin t}{t} \leftrightarrow \int_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} =$

$= arctg\, p\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - arctg\, p = arcctg\, p$.

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы. Пусть $f(t) \leftrightarrow F(p)$ и сходится несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$, тогда $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} F(p)dp$, где интеграл справа можно вычислять по положительной полуоси.

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt\ (a > 0, b > 0) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{p+a} - \frac{1}{p+b} \right) dp = \left(\ln|p+a| - \ln|p+b| \right)\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \ln\left|\frac{p+a}{p+b}\right|\Bigg|_0^{+\infty} = -\ln\frac{a}{b} = \ln\frac{b}{a}.$$

7) **Теорема запаздывания**.

Если $f(t) \leftrightarrow F(p)$, то для любого положительного τ имеем $f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-p\tau}F(p)$.

Доказательство. Так как $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, то делая замену переменной $t-\tau=t_1$, получим $f(t-\tau) \leftrightarrow \int\limits_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt =$

$$= \int\limits_{\tau}^{+\infty} f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1 = e^{-p\tau}F(p).$$

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Пример. Найти изображение $F(p)$ функции $f(t)$, которая задана следующим графиком (рис. 1)

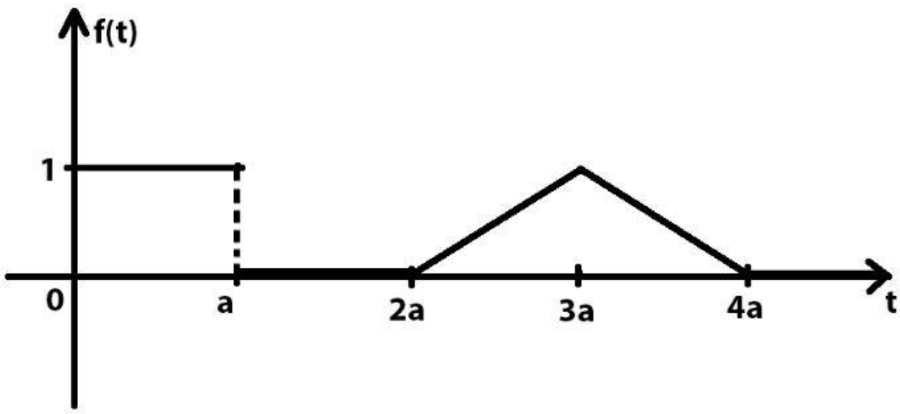


Рис.1

Найдем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases} 1, \quad t\in(0,a) \\ 0, \quad t\in(a,2a) \\ \dfrac{t}{a}-2, \quad t\in(2a,3a) \\ -\dfrac{t}{a}+4, \quad t\in(3a,4a) \\ 0, \quad t\in(4a,+\infty) \end{cases}.$$

Для $t \in (0, a)$ имеем $f(t) = 1$. Найдем функцию $\Psi_1(t)$ такую, чтобы при $t \geq a$ выполнялось соотношение $1 + \Psi_1(t) = 0$, откуда $\Psi_1(t) = -1 \cdot \eta(t-a)$. Теперь находим функцию $\Psi_2(t)$ такую, чтобы при всех $t > 2a$ было справедливо $0 + \Psi_2(t) = \dfrac{t-2a}{a}$, отсюда $\Psi_2(t) = \dfrac{t-2a}{a} \cdot \eta(t-2a)$. Аналогично находим функцию $\Psi_3(t)$ такую, чтобы при всех $t > 3a$ было справедливо $\dfrac{t-2a}{a} + \Psi_3(t) = \dfrac{-t+4a}{a}$, отсюда $\Psi_3(t) = \dfrac{-2t+6a}{a} \cdot \eta(t-3a)$. Наконец находим функцию $\Psi_4(t)$ такую, чтобы при всех $t > 4a$ было справедливо $\dfrac{-t+4a}{a} + \Psi_4(t) = 0$, отсюда $\Psi_4(t) = \dfrac{t-4a}{a} \cdot \eta(t-4a)$.Таким образом,

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a}\eta(t-2a) - 2 \cdot \frac{t-3a}{a}\eta(t-3a) + \frac{t-4a}{a}\eta(t-4a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, получим

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-ap} + \frac{1}{ap^2}e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2}e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2}e^{-4ap}.$$

8) **Теорема смещения**.

Для любого комплексного p_0 имеем $e^{p_0 t} f(t) \leftrightarrow F(p - p_0)$ («смещение» изображения на p_0 равносильно умножению оригинала на $e^{p_0 t}$).

Доказательство. Имеем $e^{p_0 t} f(t) \leftrightarrow \int\limits_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0)$.

Теорема позволяет по известным изображениям функций находить изображения тех же функций, умноженных на экспоненту:

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}, e^{-\lambda t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2},$$

$$e^{-\lambda t} t^n \leftrightarrow \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}.$$

9) **Теорема умножения**.

Особое место в операционном методе занимают предложения, выражающие связь между оригиналами и изображениями произведения функций.

Теорема умножения (теорема о свертке)

Произведение двух изображений $F(p)$ и $G(p)$ также является изображением, причем $F(p)\cdot G(p) \leftrightarrow \int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$.

Интеграл в правой части последнего равенства называется сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$ и обозначается $(f*g)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$.

Эта теорема утверждает, что умножение изображений равносильно свертыванию оригиналов: $(f*g)\leftrightarrow F(p)\cdot G(p)$.

В приложениях полезно следствие теоремы умножения, которое относится к случаю, когда нужно найти оригинал произведения $pF(p)\cdot G(p)$. Пользуясь правилом дифференцирования оригинала и теоремой умножения, получим **интеграл Дюамеля**:

$$pF(p)\cdot G(p)=f(0)G(p)+\bigl(pF(p)-f(0)\bigr)\cdot G(p)\leftrightarrow f(0)g(t)+$$

$$+\int\limits_0^t f'(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau .$$

На основании свойства симметрии свертки $(f*g)\leftrightarrow(g*f)$ этот интеграл переписывается также в виде:

$pF(p)\cdot G(p)\leftrightarrow f(0)g(t)+\int\limits_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau$, а перемена ролей функций $F(p)$ и $G(p)$ приводит к формуле:

$$pF(p)\cdot G(p)\leftrightarrow g(0)f(t)+\int\limits_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau=g(0)f(t)+\int\limits_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau .$$

Пример. Найти изображение функции $\Psi(t)=\int\limits_0^t (t-\tau)e^{\tau}d\tau$.

Функция $\Psi(t)$ есть свертка функций $f(t)=t$ и $\varphi(t)=e^t$. По теореме умножения $\Psi(t)\leftrightarrow F(p)\cdot\Phi(p)=\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{p^2(p-1)}$.

10) **Теоремы разложения**.

Первая теорема разложения.

Если $F(p)$ – аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки и равна в ней нулю, имеет в ее окрестности $|p| \geq R$ лорановское разложение $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$, то оригиналом $F(p)$ служит функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1}.$$

Пример. Рассмотрим функцию $F(p) = \frac{p}{p^2+1}$. Она аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки $p = \infty$ (так как функция $f(z) = F\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z\left(\frac{1}{z^2}+1\right)} = \frac{z}{z^2+1}$ аналитична в нуле).

Ее лорановское разложение в окрестности этой точки имеет вид:

$$F(p) = \frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n}} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n+1}} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{p^{2n+1}}.$$

Тогда $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} = \cos t$.

Отыскание оригинала по изображению

Для нахождения оригинала $f(t)$ по известному изображению $F(p)$ применяют следующие приемы:

1. Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то раскладывают эту дробь на сумму простейших дробей, находят оригиналы для каждой простой дроби, используя свойства преобразования Лапласа.

Пример. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-4)\left(p^2-4p+5\right)}$.

Решение. Разложим дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{p+1}{(p-4)\left(p^2-4p+5\right)}=\frac{A}{p-4}+\frac{Bp+C}{p^2-4p+5},$$

$$p+1=A\left(p^2-4p+5\right)+(Bx+C)(p-4),$$

при $p=4$: $5=5A,\quad A=1,$

при p^2: $0=A+B,\quad B=-1,$

при p: $1=-4A-4B+C,\quad C=1.$

Тогда

$$F(p)=\frac{1}{p-4}+\frac{-p+1}{(p-2)^2+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{p-2+1}{(p-2)^2+1}=\frac{1}{p-4}-\frac{p-2}{(p-2)^2+1}-$$

$$-\frac{1}{(p-2)^2+1}\leftrightarrow e^{4t}-e^{2t}\cos t-e^{2t}\sin t=f(t).$$

2. Вторая теорема разложения. При определенных условиях, наложенных на $F(p)$, оригиналом для $F(p)$ служит функция $f(t)=\sum\limits_{(p_k)} res\left(F(p)e^{pt}\right)$, где сумма вычетов берется по всем особым точкам p_k функции $F(p)$.

Следствие. Если $F(p)=\dfrac{Q(p)}{R(p)}$ есть правильная рациональная дробь, то ее оригиналом служит функция

$$f(t)=\sum_{\kappa=1}^{l}\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}}\left(F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\right), \qquad (5)$$

где p_k – полюсы функции $F(p)$ кратности n_k и сумма берется по всем полюсам.

Если все полюсы $F(p)$ простые, то формула (5) упрощается и принимает вид $f(t) = \sum\limits_{\kappa=1}^{l} \dfrac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}$.

В приложениях важна разновидность этой формулы, когда $F(p) = \dfrac{Q(p)}{pR(p)}$, $\deg Q(p) \le \deg R(p)$, $R(p)$ имеет простые корни, отличные от нуля. В этом случае $\dfrac{Q(p)}{pR(p)} \leftrightarrow \dfrac{Q(0)}{R(0)} + \sum\limits_{\kappa=1}^{l} \dfrac{Q(p_k)}{p_k R'(p_k)} e^{p_k t}$.

Пример. Дано изображение $F(p) = \dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$. Найти оригинал $f(t)$.

Решение. Функция $F(p)$ имеет полюсы $p_{1,2} = \pm 1$ второго порядка. По формуле (5) имеем:

$$f(t) = \lim_{p\to 1}\left(\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2}\right)' + \lim_{p\to -1}\left(\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2}\right) = \lim_{p\to 1}\frac{e^{pt}\big((pt+1)(p+1)-2p\big)}{(p+1)^3} +$$

$$+ \lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}\big((pt+1)(p-1)-2p\big)}{(p-1)^3} = \frac{2te^t}{8} + \frac{2te^{-t}}{-8} = t\,\frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}t \cdot sht.$$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Операционный метод особенно просто применяется к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений.

Пусть дано дифференциальное уравнение:

$$L(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \tag{6}$$

с начальными условиями:

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_{10}, \ldots,\ x^{(n-1)}(0) = x_{(n-1)0}. \tag{7}$$

Будем считать, что $a_0 \neq 0$, а функция $f(t)$ и решение $x(t)$ вместе с его производными до n-го порядка являются оригиналами: обозначим $X(p) \leftrightarrow x(t)$, $F(p) \leftrightarrow f(t)$.

По правилу дифференцирования и свойству линейности вместо дифференциального уравнения (6) с начальными условиями (7) получим операторное уравнение:

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) X(p) = F(p) + x_0\left(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\right) +$$

$$+ x_{10}\left(a_0 p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \ldots + a_{n-2}\right) + x_{(n-1)0} a_0$$

или $A(p)X(p) = F(p) + B(p)$, где $A(p)$ и $B(p)$ - известные многочлены. Решая это уравнение, найдем операторное решение $X(p) = \dfrac{F(p)+B(p)}{A(p)}$.

Если уравнение (6) с начальными условиями (7) допускает решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям, наложенным на оригиналы, то это решение является оригиналом $X(p)$.

Примеры.1) Найти решение задачи Коши:

$y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

Решение. Имеем $y(t) \leftrightarrow Y(p)$,

$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p)$,

$y''(t) \leftrightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) + 1$.

Тогда получаем операторное уравнение

$$p^2 Y(p) + 1 - 3pY(p) + 2Y(p) = \frac{2}{p+1},\ Y(p)\left(p^2 - 3p + 2\right) = \frac{2}{p+1} - 1,$$

$$Y(p) = \frac{1-p}{(p+1)(p-2)(p-1)},\ Y(p) = -\frac{1}{(p+1)(p-2)},$$

$$\frac{1}{(p+1)(p-2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-2},$$

$1 = A(p-2) + B(p+1)$,

при $p = 2$: $1 = 3B$, $B = \dfrac{1}{3}$,

при $p = -1$: $1 = -3A$, $A = -\dfrac{1}{3}$.

Тогда $Y(p)=\dfrac{1}{3(p+1)}-\dfrac{1}{3(p-2)}\leftrightarrow\dfrac{1}{3}\left(e^{-t}-e^{2t}\right)=f(t)$.

2) Найти решение задачи Коши:

$y'''+6y''=72t^2+60t+6,\ y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$.

Решение. Имеем $y(t)\leftrightarrow Y(p)$,

$y'(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(p),$

$y''(t)\leftrightarrow p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p),$

$y'''(t)\leftrightarrow p^3Y(p)-p^2y(0)-py'(0)-y''(0)=p^3Y(p).$

Тогда получаем операторное уравнение

$$p^3Y(p)+6p^2Y(p)=\frac{144}{p^3}+\frac{60}{p^2}+\frac{6}{p},$$

$$Y(p)=\frac{144+60p+6p^2}{p^3\left(p^3+6p^2\right)}=\frac{6\left(24+10p+p^2\right)}{p^5(p+6)}=\frac{6(p+4)(p+6)}{p^5(p+6)}=\frac{6}{p^4}+\frac{24}{p^5}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\frac{6}{3!}t^3+\frac{24}{4!}t^4=t^3+t^4=f(t).$$

Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке $t=0$ несущественно, так как линейной заменой независимой переменной t задача Коши при $t=t_0\neq 0$ сводится к задаче с начальными условиями в точке $t=0$.

Действительно, пусть требуется найти решение уравнения

$$a_0x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=f(t), \tag{8}$$

удовлетворяющее условиям $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x_1$, где $t_0\neq 0$. (9)

Положим $t=\tau+t_0$, $x(t)=x(\tau+t_0)=\tilde{x}(\tau)$, $f(t)=f(\tau+t_0)=\tilde{f}(\tau)$. Тогда $x'(t)=x'(\tau+t_0)=\tilde{x}'(\tau)$, $x''(t)=x''(\tau+t_0)=\tilde{x}''(\tau)$ и уравнение (8) с начальными условиями (9) примут вид:

$$a_0\tilde{x}''(\tau)+a_1\tilde{x}'(\tau)+a_2\tilde{x}(\tau)=\tilde{f}(\tau),\quad \tilde{x}(0)=x_0,\ \tilde{x}'(0)=x_1.$$

Мы получили задачу Коши для уравнения с начальными условиями, заданными в точке $\tau=0$.

Пример. Найти решение задачи Коши: $x''(t)+x'(t)=t,\ x(1)=1,\ x'(1)=0$.

Решение. Положим $t=\tau+1$, $x(t)=x(\tau+1)=\tilde{x}(\tau)$. Тогда $x''+x'=\tau+1,$ $\tilde{x}(0)=1,\ \tilde{x}'(0)=0$.

Пусть $\tilde{x}(t) \leftrightarrow X(p)$, тогда
$\tilde{x}'(t) \leftrightarrow pX(p) - \tilde{x}(0) = pX(p) - 1,$
$\tilde{x}''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - p\tilde{x}(0) - \tilde{x}'(0) = p^2 X(p) - p$. Тогда получаем операторное уравнение: $p^2 X(p) - p + pX(p) - 1 = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{1}{p}$,

$$X(p)\left(p^2 + p\right) = \frac{1+p}{p^2} + p + 1,$$

$X(p) = \dfrac{1}{p^3} + \dfrac{1}{p} \leftrightarrow \dfrac{\tau^2}{2} + 1 = \tilde{x}(\tau)$. Следовательно, $x(t) = 1 + \dfrac{(t-1)^2}{2}$.

Отметим особо роль интеграла Дюамеля. Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами $L(x) = f(t)$ (10)
при нулевых начальных условиях. Если известно $x_1(t)$ – решение уравнения $L(x) = 1$ (11) с той же левой частью и правой частью 1, также при нулевых начальных условиях, то интеграл Дюамеля позволит написать решение уравнения (10) без всяких вычислений.

Действительно, операторные уравнения, соответствующие уравнениям (10) и (11) имеют вид:

$$A(p) \cdot X(p) = F(p), \qquad A(p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p},$$

где $F(p) \leftrightarrow f(t)$, откуда $X(p) = \dfrac{F(p)}{A(p)} = p \cdot X_1(p) \cdot F(p)$. Таким образом, согласно формуле Дюамеля,

$x(t) = \int\limits_0^t f(\tau) \cdot x_1'(t-\tau)\, d\tau$ (учитываем, что $x_1(0) = 0$) или

$$x(t) = x_1(t) f(0) + \int\limits_0^t x_1'(\tau) \cdot f'(t-\tau)\, d\tau.$$

Пример. С помощью формулы Дюамеля найти решение Задачи Коши:

$$y'' - 2y' = \frac{4e^{4t}}{1+2e^{2t}}, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 0.$$

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу: $x'' - 2x' = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Пусть $x(t) \leftrightarrow X(p)$, тогда $x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p)$,
$x''(t) \leftrightarrow p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$. Тогда получаем операторное уравнение: $p^2 X(p) - 2pX(p) = \dfrac{1}{p}$, $X(p)\left(p^2 - 2p\right) = \dfrac{1}{p}$, $X(p) = \dfrac{1}{p^2(p-2)}$
.
Разложим последнюю дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{p^2(p-2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p-2},$$

$$1 = Ap(p-2) + B(p-2) + Cp^2,$$

при $p = 0$: $1 = -2B$, $B = -\dfrac{1}{2}$,

при $p = 2$: $1 = 4C$, $C = \dfrac{1}{4}$,

при p^2: $0 = A + C$, $A = -\dfrac{1}{4}$.

Тогда

$$X(p) = -\frac{1}{4p} - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{4(p-2)} \leftrightarrow -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}e^{2t} = x(t),\ x'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}.$$

Решение исходной задачи имеет вид $y(t) = \int\limits_0^t f(\tau) \cdot x'(t-\tau) d\tau =$

$$= \int\limits_0^t \frac{4e^{4\tau}}{1+e^{2\tau}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2(t-\tau)}\right) d\tau = 2\int\limits_0^t \frac{e^{2\tau}(e^{2t} - e^{2\tau})}{1+e^{2\tau}} d\tau = \begin{bmatrix} z = 1 + e^{2\tau} \\ dz = 2e^{2\tau} d\tau \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_2^{1+e^{2t}} \frac{(e^{2t} - z + 1)}{z} dz = \left((e^{2t}+1)\ln|z| - z\right)\Big|_2^{1+e^{2t}} = (e^{2t}+1)\left(\ln(1+e^{2t}) - \ln 2\right) + 1 - e^{2t}$$

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения.

Пусть нужно решить систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i(t),\ \ i=\overline{1,n} \tag{12}$$

где $a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} - const$ при начальных условиях $x_k(0)=\alpha_k$, $x_k'(0)=\beta_k$.
Обозначая через $X_k(p)$ и $F_i(p)$ изображения $x_k(t)$ и $f_i(t)$ от системы (12) с учетом начальных условий, получим операторную систему:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)X_k(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}\left((a_{ik}p+b_{ik})\alpha_k+a_{ik}\beta_k\right), \tag{13}$$

$i=\overline{1,n}$.

Решая (13) как линейную алгебраическую систему уравнений относительно $X_k(p)$, найдем $X_k(p)$, а затем их оригиналы $x_k(t)$ ($k=\overline{1,n}$). Эти последние будут решениями задачи Коши для системы (12).

Пример. Решить систему $\begin{cases} x'=x+3y+4, & x(0)=2 \\ y'=x-y & y(0)=0. \end{cases}$

Решение. Пусть $x(t)\leftrightarrow X(p)$, тогда $x'(t)\leftrightarrow pX(p)-x(0)=pX(p)-2$, $y(t)\leftrightarrow Y(p)$, тогда $y'(t)\leftrightarrow pY(p)-y(0)=pY(p)$. Получаем операторную систему:

$$\begin{cases} pX(p)-2=X(p)+3Y(p)+\dfrac{4}{p}, \\ pY(p)=X(p)-Y(p) \end{cases} \quad \begin{cases} X(p)(p-1)-3Y(p)=2+\dfrac{4}{p}, \\ X(p)-Y(p)(p+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(p)\left(p^2-4\right)=2+\dfrac{4}{p}, \\ X(p)=Y(p)(p+1) \end{cases} \qquad \begin{cases} Y(p)=\dfrac{2}{p(p-2)} \\ X(p)=\dfrac{2(p+1)}{p(p-2)} \end{cases}.$$

Разложим каждую из дробей на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2}{p(p-2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2},$$

$2=A(p-2)+Bp$,

при $p=0$: $2=-2A$, $A=-1$,

при $p=2$: $2=2B$, $B=1$.

Тогда $Y(p)=\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{1}{p}\leftrightarrow e^{2t}-1=y(t)$.

Аналогично, $\dfrac{2(p+1)}{p(p-2)}=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-2}$,

$2p+2=A(p-2)+Bp$,

при $p=0$: $2=-2A,\quad A=-1$,

при $p=2$: $6=2B,\quad B=3$.

Тогда $X(p)=\dfrac{3}{p-2}-\dfrac{1}{p}\leftrightarrow 3e^{2t}-1=x(t)$.

4. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ЯДРАМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Определение. **Интегральным уравнением** называется уравнение, содержащее искомую функцию под знаком интеграла. Например, решение задачи Коши: $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$ сводится к решению интегрального уравнения: $y=y_0+\int\limits_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx$.

Если искомая функция $y(x)$ входит в уравнение линейно, то интегральное уравнение называется линейным.

Уравнение вида $\quad y(x)=f(x)+\int\limits_a^b K(x,t)\cdot y(t)dt$, $\hfill$ (14)

где $a,b-const$ называется линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Здесь $K(x,t)$ и $f(x)-$заданные функции, $y(x)$ искомая функция. Функцию $K(x,t)$ называют ядром уравнения (14).

Уравнение вида $\quad y(x)=f(x)+\int\limits_a^x K(x,t)\cdot y(t)dt$ $\hfill$ (15)

называют линейным уравнением Вольтерра второго рода.

Если в уравнениях (14) и (15) $f(t)\equiv 0$, то уравнения называются однородными. Если искомая функция $y(x)$ входит только под знак интеграла, то имеем соответственно уравнения Фредгольма или Вольтерра первого рода:

$$\int_a^b K(x,t)\cdot y(t)dt = f(x) \qquad \text{или} \qquad \int_a^x K(x,t)\cdot y(t)dt = f(x).$$

Уравнение вида $\varphi(x)+\int_0^x K(x-t)\cdot\varphi(t)dt = f(x)$ с ядром $K(x-t)$, зависящим лишь от разности аргументов, представляют собой важный класс уравнений Вольтерра. Они иногда называются уравнениями свертки.

Пусть имеем уравнение Вольтерра типа свертки

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x-t)\cdot\varphi(t)dt + f(x). \qquad (16)$$

Будем предполагать, что функции $f(x)$ и $K(x)$ достаточно гладкие функции и имеют конечный порядок роста при $x\ge 0$. В этом случае и функция $\varphi(x)$ при $x\ge 0$ имеет конечный порядок роста, а значит может быть найдено изображение функций $f(x)$, $K(x)$ и $\varphi(x)$. Пусть $f(x)\leftrightarrow F(p)$, $K(x)\leftrightarrow L(p)$, $\varphi(x)\leftrightarrow\Phi(p)$. Применяя к обеим частям (16) преобразование Лапласа и пользуясь формулой свертки, будем иметь: $\Phi(p)=F(p)+L(p)\cdot\Phi(p)$, откуда $\Phi(p)=\dfrac{F(p)}{1-L(p)}$, $L(p)\ne 1$.

Для $\Phi(p)$ находим оригинал $\varphi(x)-$ решение интегрального уравнения (16).

Пример. Решить интегральное уравнение $\varphi(x)=\sin x+\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt/$

Решение. Переходя к изображениям и рассматривая интеграл как свертку функций t и $\varphi(t)$, получим на основании правила изображения свертки:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\Phi(p),\ \Phi(p)=\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{C}{p-1}+\frac{D}{p+1},$$

$$p^2=(Ap+B)\left(p^2-1\right)+C(p+1)\left(p^2+1\right)+D(p-1)\left(p^2+1\right),$$

при $p=1$: $1=4C,\quad C=\dfrac{1}{4}$,

при $p=-1$: $1=-4D,\quad D=-\dfrac{1}{4}$, при p^3: $0=A+C+D, \quad A=0$,

при p^2: $1=B+C-D, \quad B=\dfrac{1}{2}$.

Тогда

$$\Phi(p)=\frac{1}{2\left(p^2+1\right)}+\frac{1}{4(p-1)}-\frac{1}{4(p+1)}\leftrightarrow\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4}e^{t}-\frac{1}{4}e^{-t}=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{2}sh\,t.$$

Заменим t на x и получим окончательный ответ $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}shx$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. Найти изображение функции.

1. $f(t)=t\cdot e^{-5t}\sin 11t$
2. $f(t)=t\cdot e^{-4t}\cos 15t$
3. $f(t)=t\cdot e^{3t}\sin 4t$
4. $f(t)=t\cdot e^{-3t}\cos 8t$
5. $f(t)=t\cdot e^{2t}\sin 6t$
6. $f(t)=t\cdot e^{-5t}\cos 12t$
7. $f(t)=t\cdot e^{-4t}\sin 13t$
8. $f(t)=t\cdot e^{-11t}\cos 10t$
9. $f(t)=t\cdot e^{-14t}\sin 7t$
10. $f(t)=t\cdot e^{2t}\sin 5t$
11. $f(t)=t\cdot e^{3t}\sin 2t$
12. $f(t)=t\cdot e^{-3t}\sin 2t$
13. $f(t)=t\cdot e^{7t}\cos 2t$
14. $f(t)=t\cdot e^{-2t}\sin 5t$
15. $f(t)=t\cdot e^{-3t}\cos 7t$
16. $f(t)=t\cdot e^{-4t}\cos 4t$
17. $f(t)=t\cdot e^{-7t}\sin 3t$
18. $f(t)=t\cdot e^{-t}\cos 11t$
19. $f(t)=t\cdot e^{-11t}\cos 9t$
20. $f(t)=t\cdot e^{-9t}\cos 10t$
21. $f(t)=t\cdot e^{-5t}\cos 7t$
22. $f(t)=t\cdot e^{-5t}\sin 6t$
23. $f(t)=t\cdot e^{-10t}\sin 9t$
24. $f(t)=t\cdot e^{3t}\cos 10t$
25. $f(t)=t\cdot e^{-3t}\sin 10t$
26. $f(t)=t\cdot e^{-8t}\sin 10t$
27. $f(t)=t\cdot e^{8t}\cos 10t$
28. $f(t)=t\cdot e^{8t}\sin 5t$
29. $f(t)=t\cdot e^{-8t}\cos 7t$
30. $f(t)=t\cdot e^{2t}\sin 3t$

2. Вычислить интеграл

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}dt$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}\sin 4t}{t}dt$

3. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}\sin 2t}{t}dt$

4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-3t}\sin 4t}{t}dt$

5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}\sin 5t}{t}dt$

6. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}\sin 7t}{t}dt$

7. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4t}\sin 3t}{t}dt$

8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4t}\sin 5t}{t}dt$

9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-5t}\sin 3t}{t}dt$

10. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-5t}\sin 4t}{t}dt$

11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 3t}{t}dt$

12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 7t - \cos 3t}{t}dt$

13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 4t - \cos 7t}{t}dt$

14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 7t - \cos 5t}{t}dt$

15. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2t - \cos 5t}{t}dt$

16. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 4t}{t}dt$

17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 7t}{t}dt$

18. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 5t - \cos 9t}{t}dt$

19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 7t - \cos 11t}{t}dt$

20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 9t - \cos 7t}{t}dt$

21. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 9t - \cos 8t}{t}dt$

22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 10t - \cos 6t}{t}dt$

23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5t \cdot \sin 3t}{t}dt$

24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5t \cdot \sin 4t}{t}dt$

25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5t \cdot \sin 7t}{t}dt$

26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 5t \cdot \sin 6t}{t}dt$

27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 7t \cdot \sin 10t}{t} dt$

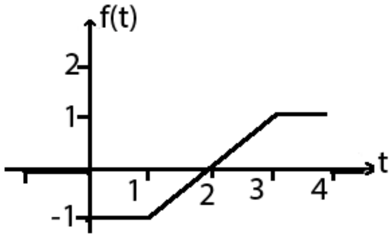
28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 8t \cdot \sin 9t}{t} dt$

29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 9t \cdot \sin 6t}{t} dt$

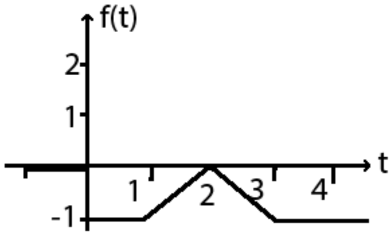
30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 10t \cdot \sin 13t}{t} dt$

3. По данному графику $f(t)$ найти изображение $F(p)$

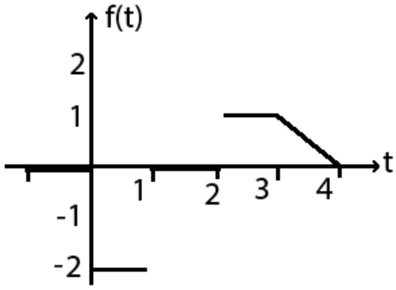
1.



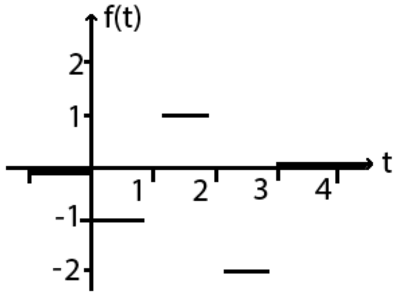
2.



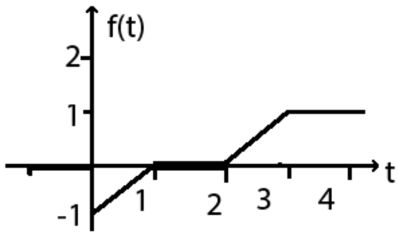
3.



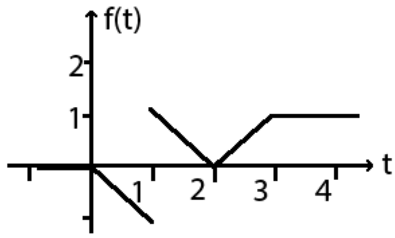
4.



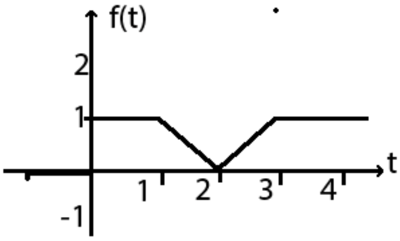
5.



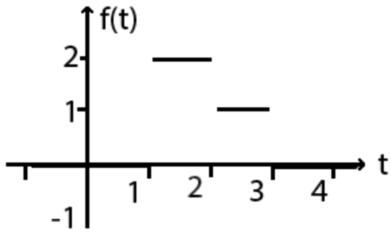
6.



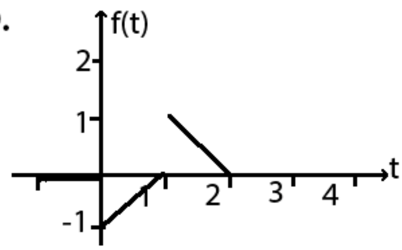
7.



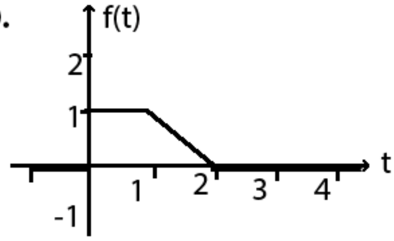
8.



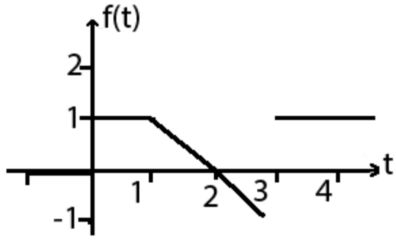
9.



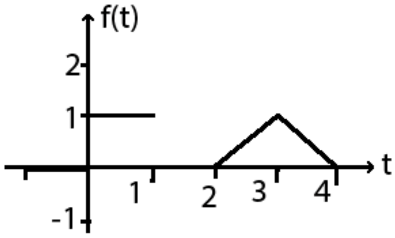
10.



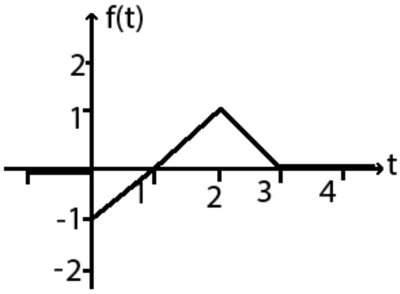
11.



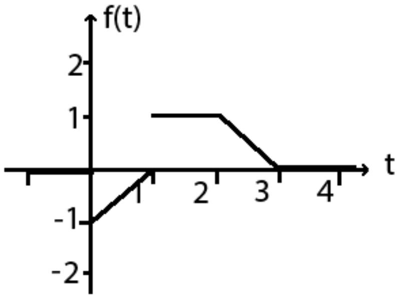
12.



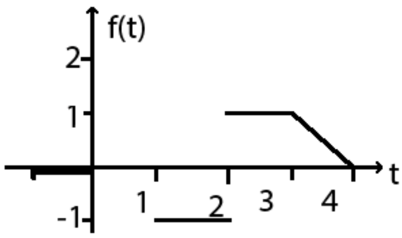
13.



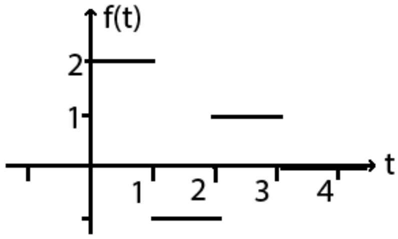
14.



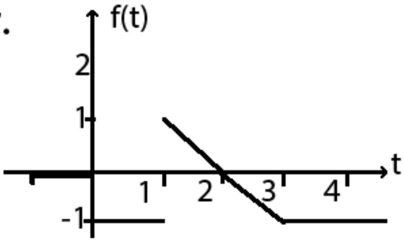
15.



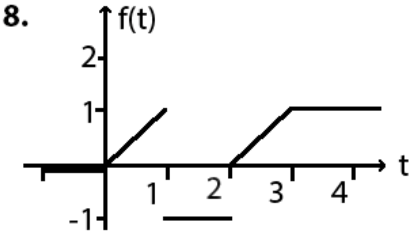
16.



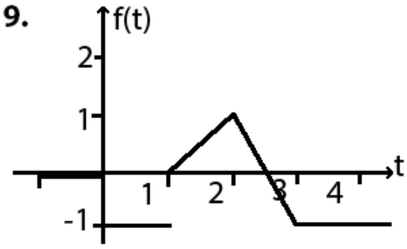
17.



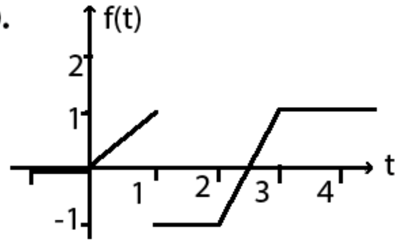
18.



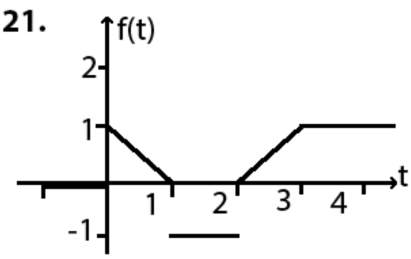
19.



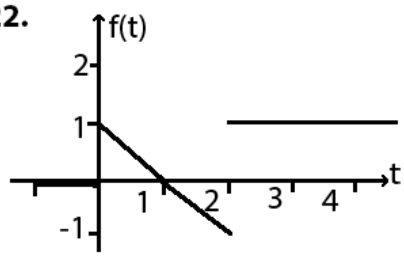
20.



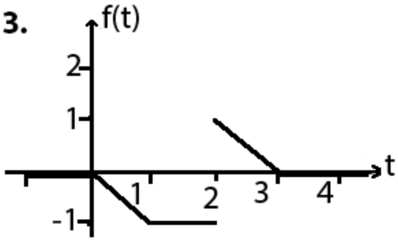
21.



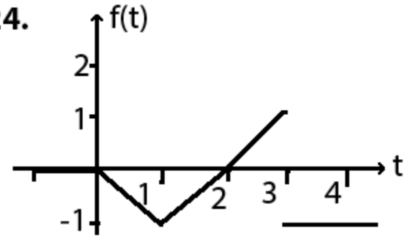
22.



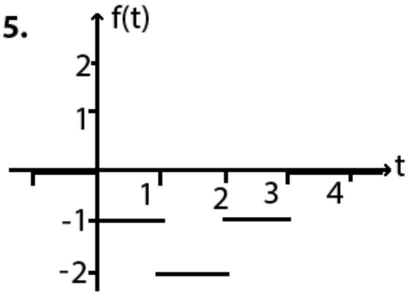
23.



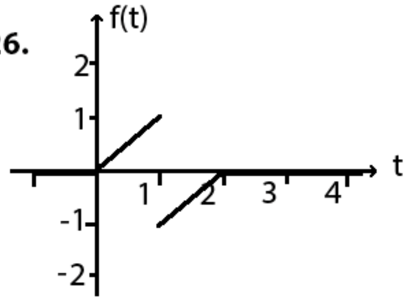
24.



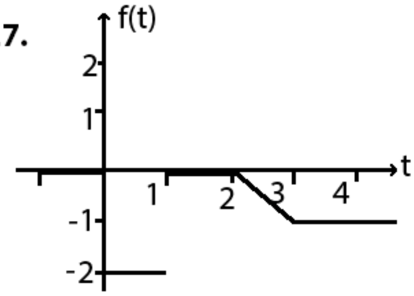
25.



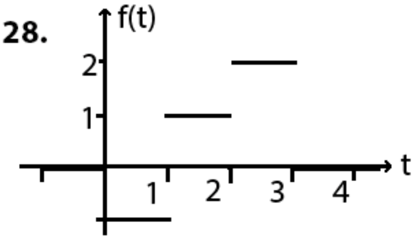
26.



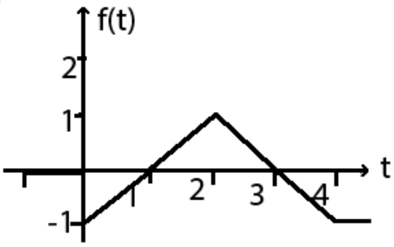
27.



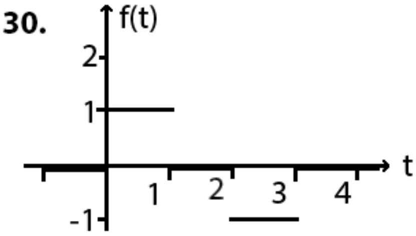
28.



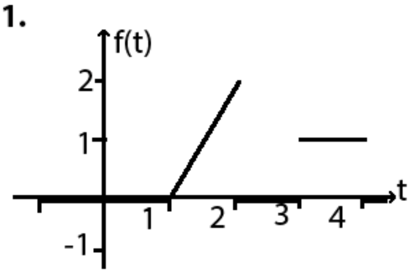
29.



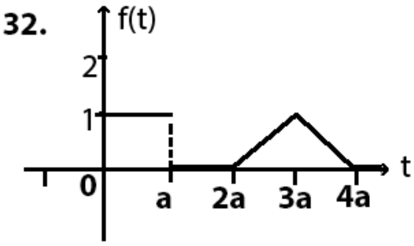
30.



31.



32.



4. Найти оригинал по заданному изображению.

1. $F(p)=\dfrac{6p+5}{(p-2)\left(p^2+4p+5\right)}$

2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)\left(p^2+2p+2\right)}$

3. $F(p)=\dfrac{3p+8}{(p+1)\left(p^2+4p+8\right)}$

4. $F(p)=\dfrac{2p-p^2+1}{p(p+1)\left(p^2+1\right)}$

5. $F(p)=\dfrac{p+3}{p\left(p^2+2p+3\right)}$

6. $F(p)=\dfrac{2p}{(p+1)\left(p^2+4p+5\right)}$

7. $F(p)=\dfrac{6}{p^3-8}$

8. $F(p)=\dfrac{12}{p^3+8}$

9. $F(p)=\dfrac{8}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+9\right)}$

10. $F(p)=\dfrac{p-5}{p\left(p^2+4p+5\right)}$

11. $F(p)=\dfrac{3p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+4\right)}$

12. $F(p)=\dfrac{2p+10}{(p+1)\left(p^2+4p+5\right)}$

13. $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+2p+1\right)}$

14. $F(p)=\dfrac{6p+4}{(p+1)\left(p^2+4p+5\right)}$

15. $F(p)=\dfrac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$

16. $F(p)=\dfrac{4}{p\left(p^2-4\right)}$

17. $F(p)=\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+2\right)}$

18. $F(p)=\dfrac{2}{p\left(p^2-1\right)}$

19. $F(p)=\dfrac{2}{\left(p^2+1\right)\left(p^2+2\right)}$

20. $F(p)=\dfrac{10}{(p-1)\left(p^2+4p+5\right)}$

21. $F(p)=\dfrac{10}{(p+2)\left(p^2-2p+2\right)}$

22. $F(p)=\dfrac{13}{(p-2)\left(p^2+2p+5\right)}$

23. $F(p)=\dfrac{p+8}{p\left(p^2+4p+8\right)}$

24. $F(p)=\dfrac{p+3}{p\left(p^2+2p+3\right)}$

25. $F(p)=\dfrac{5}{(p+1)\left(p^2-2p+2\right)}$

26. $F(p)=\dfrac{-8p+17}{(p-2)\left(p^2-4p+5\right)}$

27. $F(p)=\dfrac{11p-23}{(p-1)\left(p^2-p-12\right)}$

28. $F(p)=\dfrac{p+5}{p\left(p^2-2p+5\right)}$

29. $F(p)=\dfrac{2}{(p+1)\left(p^2+2p+2\right)}$

30. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-4)\left(p^2-4p+5\right)}$

5. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

1. $y''+y=t$
2. $y''+4y=8t$
3. $y''+9y=27t$
4. $y''+16y=64t$
5. $y''+25y=125t$
6. $y''+36y=216t$
7. $y''+2y'=2$
8. $y''-3y'=3$
9. $y''-4y'=4$
10. $y''-5y'=5$
11. $y''-y=2t$
12. $y''-4y=32t$
13. $y''-9y=27t$
14. $y''-16y=64t$
15. $y''-25y=125t$
16. $y''-y=4t$
17. $y''-4y=16t$
18. $y''-9y=54t$
19. $y''-16y=128t$
20. $y''-25y=250t$
21. $y''+y=2t$
22. $y''+4y=16t$
23. $y''+9y=54t$
24. $y''+36y=432t$
25. $y''+25y=250t$
26. $y''+16y=128t$
27. $y''+y=2\sin t$
28. $y''+4y=4\sin 2t$
29. $y''+9y=6\sin 3t$
30. $y''+16y=8\sin 4t$

6. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

1. $y''+y=2e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
2. $y''-y=t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
3. $y''+y=2t$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.
4. $y''-y=3t$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.
5. $y''+2y'=6e^{t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=6$.

6. $y'' + + y' - 2y = 1 - 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
7. $y'' + 9y = 6\sin 3t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
8. $y'' + 2y = 3e^{t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
9. $y'' - y' = 6e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.
10. $y'' + 2y' = 3e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$.
11. $y'' + y = t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
12. $y'' + 4y' + 4y = e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
13. $y'' + 3y' + 2y = e^{t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
14. $y'' + 3y' = 4e^{t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
15. $y'' - 2y' - 3y = 3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
16. $y'' + 4y = 4t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
17. $y'' + 9y = 9t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$.
18. $y'' + 5y' = 25t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
19. $y'' + 4y = 8\sin 2t$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.
20. $y'' - y' - 6y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
21. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.
22. $y'' + 4y = 12\cos 2t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
23. $y'' + 4y' + 4y = t^{3}e^{-2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
24. $y'' + 3y' - 10y = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
25. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
26. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
27. $y'' - 2y' = -3e^{t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
28. $y'' + y' = 2\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
29. $y'' - y = 4\sin t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$.
30. $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

7. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям
1. $y''' - y'' = -12t^{2} + 18t + 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.
2. $y''' - 2y'' = -24t^{2} + 36t - 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

3. $y''' - 3y'' = -36t^2 + 27t - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

4. $y''' - 4y'' = 12t^2 - 30t + 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

5. $y''' - 5y'' = -15t^2 - 24t + 6$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

6. $y''' + y'' = t^2 + 2t + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

7. $y''' + 2y'' = 2t^2 + 2t - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$.

8. $y''' + 3y'' = 6t^2 + 4t - 18$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -6$.

9. $y''' + 4y'' = 4t^2 + 2t + 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

10. $y''' + 5y'' = 60t^2 + 100t^3$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

11. $y''' - y'' = e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

12. $y''' - 2y'' = 4e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

13. $y''' - 3y'' = 9e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 6$.

14. $y''' - 4y'' = 16e^{4t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 8$.

15. $y''' - 5y'' = 25e^{5t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 10$.

16. $y''' - y' = 2e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$.

17. $y''' - 4y' = 8e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 4$.

18. $y''' - 9y' = 18e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 6$.

19. $y''' - 16y' = 32e^{4t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 8$.

20. $y''' - 25y' = 50e^{5t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 10$.

21. $y''' - y' = (4t + 6)e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

22. $y''' - 4y' = (16t + 12)e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

23. $y''' - 2y'' + y' = 2e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

24. $y''' - 4y'' + 4y' = 4e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

25. $y''' + y'' - 2y' = (6t + 8)e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

26. $y''' - y'' - 2y' = (12t + 10)e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8t + 10)e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

28. $y''' + 2y'' - 8y' = (24t + 16)e^{2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.

29. $y''' + y'' = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

30. $y''' + 2y'' = 4e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -4$.

8. Решить систему дифференциальных уравнений

1. $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, & x(0) = -1, \\ y' = x - y + 1, & y(0) = 2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = x + y, & y(0) = 2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = x + 4y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x - y + 9, & y(0) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 4x - y, & y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 2x + 5y, & x(0) = 1, \\ y' = x - 2y + 2, & y(0) = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = x + 2y + 1, & y(0) = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 3x + y, & x(0) = 2, \\ y' = -5x - 3y + 2, & y(0) = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 4x - 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = x + 2y, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + y + 1, & y(0) = 5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x - 2y, & x(0) = -1, \\ y' = -4x + 4, & y(0) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, & x(0) = 1, \\ y' = -1{,}5x + y, & y(0) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 3x + 5y - 6, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 3x + 2y, & x(0) = 0, \\ y' = 2{,}5x - y + 2, & y(0) = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 2y, & x(0) = -1, \\ y' = 2x + 3, & y(0) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + 4y, & y(0) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1, \\ y' = 4x + y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = -3x, & y(0) = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 3y + 2, & x(0) = 0, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 3y, & y(0) = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = 2y, & x(0) = 2, \\ y' = 2x + 3y + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = -2x + y, & x(0) = 1, \\ y' = 3x + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 4x + 3, & x(0) = 0, \\ y' = x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = y + 3, & x(0) = 1, \\ y' = x + 2, & y(0) = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = x + 3y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = x - y, & y(0) = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, & x(0) = 0, \\ y' = x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 3y, & x(0) = 2, \\ y' = 3x + 1, & y(0) = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = x + 3y + 4, & x(0) = 2, \\ y' = x - y, & y(0) = 0. \end{cases}$

9. Решить систему дифференциальных уравнений с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=0$.

1. $\begin{cases} x' = 11x - 20y + 10e^{t}, \\ y' = 12x - 20y + 9e^{t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = -23x + 12y + 13e^{2t}, \\ y' = -20x + 8y + 14e^{2t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = -21x - 12y + 10e^{t}, \\ y' = 24x + 13y - 12e^{t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -17x - 20y - e^{2t}, \\ y' = 12x + 14y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -6x - 6y + e^{t}, \\ y' = 12x + 11y - 2e^{t}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -14x + 20y - 4e^{-2t}, \\ y' = -12x + 17y - 3e^{-2t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -7x - 6y - 2e^{-t}, \\ y' = 12x + 10y + 3e^{-t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 10x - 12y + 4e^{-2t}, \\ y' = 6x - 7y + 3e^{-2t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -8x + 12y - 3e^{t}, \\ y' = -20x + 23y - 2e^{t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 17x - 12y - 3e^{2t}, \\ y' = 24x - 17y - 5e^{2t}. \end{cases}$,

11. $\begin{cases} x' = 26x - 30y + 7e^{3t}, \\ y' = 20x - 23y + 6e^{3t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 10x + 6y - 5e^{-t}, \\ y' = -12x - 7y + 6e^{-t}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x + 6y + 8e^{3t}, \\ y' = -12x - 16y - 7e^{3t}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 15x + 12y - 4e^{-2t}, \\ y' = -24x - 19y + 6e^{-2t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 14x - 12y + e^{3t}, \\ y' = 20x - 17y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -14x + 6y + 7e^{-t}, \\ y' = -12x + 3y + 8e^{-t}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = -17x + 20y, \\ y' = -12x + 14y + e^{3t}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 17x + 12y + 6e^{-t}, \\ y' = -20x - 14y - 7e^{-t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = -7x - 6y + 4e^{3t}, \\ y' = 12x + 10y - 5e^{3t}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = 11x - 24y + 12e^{-t}, \\ y' = 12x - 23y + 10e^{-t}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 19x + 12y - 9e^{-2t}, \\ y' = -20x - 12y + 10e^{-2t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = -22x + 20y, \\ y' = -12x + 9y + e^{-2t}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -11x - 12y + 3e^{2t}, \\ y' = 6x + 6y - 2e^{2t}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 9x + 24y + 13e^{-2t}, \\ y' = -12x - 25y - 11e^{-2t}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = -9x - 24y - 11e^{4t}, \\ y' = 12x + 25y + 9e^{4t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = -11x + 24y + 8e^{6t}, \\ y' = -12x + 23y + 6e^{6t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 14x - 6y - 4e^{4t}, \\ y' = 12x - 3y - 5e^{4t}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = -x + 5y - 2e^{5t}. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 7x - 2y - 4e^{4t}, \\ y' = -4x + 5y + 7e^{4t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 7x - 4y - 10e^{5t}, \\ y' = -2x + 5y + 2e^{5t}. \end{cases}$

10. Решить систему дифференциальных уравнений

1. $\begin{cases} x' = -y - z, & x(0) = -1, \\ y' = -x - z, & y(0) = 2, \\ z' = -x - y, & z(0) = 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y + z, & x(0) = 0, \\ y' = 3x + z, & y(0) = 5, \\ z' = 3x + y, & z(0) = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 2x + y, & x(0) = 0, \\ y' = x + z, & y(0) = 1, \\ z' = -3x + y - z, & z(0) = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, & x(0) = 1, \\ y' = -2x + y - 2z, & y(0) = 0, \\ z' = 5x + 2y + 7z, & z(0) = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 4x - 2y - z, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 3y - z, & y(0) = 0, \\ z' = x - 2y + 2z, & z(0) = 2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = 2x - y, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 2y, & y(0) = 0, \\ z' = x - y + 2z, & z(0) = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2x - y + z, & x(0) = 2, \\ y' = 2y - z, & y(0) = 0, \\ z' = -y + 2z, & z(0) = 2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, & x(0) = 2, \\ y' = 4y - z, & y(0) = 2, \\ z' = -y + 4z, & z(0) = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 2x - z, & x(0) = 2, \\ y' = x + 2y - z, & y(0) = 1, \\ z' = -x + 2z, & z(0) = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 4x + y, & x(0) = 1, \\ y' = x + 4y, & y(0) = -1, \\ z' = -x + y + 4z, & z(0) = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 5x - 4y + 4z, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + y + 2z, & y(0) = 1, \\ z' = 2x + 3z, & z(0) = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 2x - 2y + 2z, & x(0) = 3, \\ y' = 3y, & y(0) = 1, \\ z' = 2y + z, & z(0) = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0) = 0, \\ y' = 2x + 5y + 2z, & y(0) = 0, \\ z' = z, & z(0) = -1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0) = 0, \\ y' = 4x + 3y + 4z, & y(0) = 0, \\ z' = z, & z(0) = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0) = 0, \\ z' = 3z, & z(0) = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = 4x - y - z, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 4y - z, & y(0) = 0, \\ z' = z, & z(0) = 2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 7x + 6z, & x(0) = 2, \\ y' = 2x + 5y + 2z, & y(0) = 0, \\ z' = 4z, & z(0) = -1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 15x + 2y - 2z, & x(0) = 1, \\ y' = 7y - 4z, & y(0) = 0, \\ z' = -2y + 5z, & z(0) = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 2x - y, & x(0) = 1, \\ y' = -x + 2y, & y(0) = 1, \\ z' = x - y + 5z, & z(0) = 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = x - y - z, & x(0) = 0, \\ y' = 3y - z, & y(0) = 0, \\ z' = -y + 3z, & z(0) = 2. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0) = 0, \\ z' = 6z, & z(0) = 3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 6x - y - z, & x(0) = 1, \\ y' = -x + 6y - z, & y(0) = 1, \\ z' = 6z, & z(0) = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = x + 2y - 2z, & x(0) = 0, \\ y' = 7y - 4z, & y(0) = 0, \\ z' = -2y + 5z, & z(0) = 4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = 9x + y - z, & x(0) = 1, \\ y' = 4y - z, & y(0) = 0, \\ z' = -y + 4z, & z(0) = 4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 11x + y - z, & x(0) = 1, \\ y' = 4y - z, & y(0) = 0, \\ z' = -y + 4z, & z(0) = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = x + y - z, & x(0) = 1, \\ y' = 5y - z, & y(0) = 4, \\ z' = -y + 5z, & z(0) = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 13x + 2y - 2z, & x(0) = 0, \\ y' = 9y - 2z, & y(0) = 0, \\ z' = -2y + 9z, & z(0) = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 13x + 6y + 2z, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 9y - 2z, & y(0) = 0, \\ z' = -2x - 6y + 5z, & z(0) = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 7x - 6y + 6z, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 3y + 2z, & y(0) = 1, \\ z' = 2x + 2y + 3z, & z(0) = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 7x + 2y + 2z, & x(0) = 1, \\ y' = -6x + 3y + 2z, & y(0) = -2, \\ z' = 6x + 2y + 3z, & z(0) = 1. \end{cases}$

11. С помощью формулы Дюамеля найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

1. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^t}$

2. $y'' - y' = \dfrac{1}{2+e^t}$

3. $y'' - 2y' = \dfrac{4}{1+e^{2t}}$

4. $y'' - 2y' = \dfrac{4}{2+e^{3t}}$

5. $y'' - 3y' = \dfrac{9}{1+e^{3t}}$

6. $y'' - 3y' = \dfrac{9}{3+e^{3t}}$

7. $y''-4y'=\dfrac{16}{1+e^{4t}}$ 8. $y''-4y'=\dfrac{16}{4+e^{4t}}$ 9. $y''+y'=\dfrac{1}{1+e^{t}}$

10. $y''+y'=\dfrac{1}{2+e^{t}}$ 11. $y''+2y'=\dfrac{4}{1+e^{2t}}$ 12. $y''+2y'=\dfrac{4}{2+e^{2t}}$

13. $y''+3y'=\dfrac{9}{1+e^{3t}}$ 14. $y''+3y'=\dfrac{9}{3+e^{3t}}$ 15. $y''+4y'=\dfrac{16}{1+e^{4t}}$

16. $y''+4y'=\dfrac{16}{4+e^{4t}}$ 17. $y''+y'=\dfrac{e^{t}}{1+e^{t}}$ 18. $y''+y'=\dfrac{e^{t}}{2+e^{t}}$

19. $y''+2y'=\dfrac{4e^{2t}}{1+e^{2t}}$ 20. $y''+2y'=\dfrac{4e^{2t}}{2+e^{t}}$ 21. $y''+3y'=\dfrac{3e^{3t}}{1+e^{3t}}$

22. $y''+3y'=\dfrac{9e^{3t}}{3+e^{3t}}$ 23. $y''+4y'=\dfrac{16e^{4t}}{1+e^{4t}}$ 24. $y''+4y'=\dfrac{16e^{4t}}{4+e^{4t}}$

25. $y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{1+e^{3t}}$ 26. $y''-y'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^{t}}$ 27. $y''-2y'=\dfrac{4e^{4t}}{1+e^{2t}}$

28. $y''-2y'=\dfrac{4e^{4t}}{2+e^{2t}}$ 29. $y''-3y'=\dfrac{9e^{6t}}{1+e^{3t}}$ 30. $y''-3y'=\dfrac{9e^{6t}}{3+e^{3t}}$

12. Решить интегральное уравнение Вольтерра.

1. $\varphi(x)=\sin 2x+4\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$ 2. $\varphi(x)=\sin 3x+9\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

3. $\varphi(x)=\sin 4x+16\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$ 4. $\varphi(x)=\sin 5x+25\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

5. $\varphi(x)=\sin 6x+36\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$ 6. $\varphi(x)=\sin 7x+49\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

7. $\varphi(x)=\cos 2x+4\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$ 8. $\varphi(x)=\cos 3x+9\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

9. $\varphi(x)=\cos 4x+16\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$ 10. $\varphi(x)=\cos 5x+25\int_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

11. $\varphi(x)=\cos 6x+36\int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

12. $\varphi(x)=\cos 7x+49\int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi(t)dt$

13. $\varphi(x)=x+4\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

14. $\varphi(x)=x+\frac{27}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

15. $\varphi(x)=x+32\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

16. $\varphi(x)=x+\frac{125}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

17. $\varphi(x)=x+108\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

18. $\varphi(x)=x+\frac{343}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2\varphi(t)dt$

19. $\varphi(x)=x+4\int\limits_0^x \sin 4(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

20. $\varphi(x)=x+3\int\limits_0^x \sin 3(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

21. $\varphi(x)=x+2\int\limits_0^x \sin 2(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

22. $\varphi(x)=x+5\int\limits_0^x \sin 5(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

23. $\varphi(x)=x+6\int\limits_0^x \sin 6(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

24. $\varphi(x)=x+7\int\limits_0^x \sin 7(x-t)\cdot\varphi(t)dt$

25. $\varphi(x)=\cos 2x+2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi(t)dt$

26. $\varphi(x)=\cos 3x+3\int\limits_0^x e^{3(x-t)}\varphi(t)dt$

27. $\varphi(x)=\cos 4x+4\int\limits_0^x e^{4(x-t)}\varphi(t)dt$

28. $\varphi(x)=\cos 5x+5\int\limits_0^x e^{5(x-t)}\varphi(t)dt$

29. $\varphi(x)=\cos 6x+6\int\limits_0^x e^{6(x-t)}\varphi(t)dt$

30. $\varphi(x)=\cos 7x+7\int\limits_0^x e^{7(x-t)}\varphi(t)dt$

13. Решить систему дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} x'=-21x+2y+2, & x(0)=2, \\ y'=-149x+13y, & y(0)=17. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'=-23x+16y, & x(0)=0, \\ y'=-16x+9y, & y(0)=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = 10x - 2y, & x(0) = 0, \\ y' = 113x - 20y, & y(0) = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -21x + 17y, & x(0) = 0, \\ y' = -17x + 13y, & y(0) = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = -7x + 2y, & x(0) = 2, \\ y' = -53x + 11y, & y(0) = 9. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = -13x + 9y, & x(0) = 0, \\ y' = -25x + 17y, & y(0) = 1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = -14x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -50x + 16y, & y(0) = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = 10x + 4y, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 6y, & y(0) = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = -9x - 5y, & x(0) = 0, \\ y' = 52x + 23y, & y(0) = -2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x' = 17x + y, & x(0) = 0, \\ y' = -x + 15y, & y(0) = 1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x' = 25x - 15y, & x(0) = 0, \\ y' = 39x - 23y, & y(0) = -3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x' = 18x - 5y, & x(0) = 1, \\ y' = 5x + 8y, & y(0) = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = 6x - 4y, & x(0) = 2, \\ y' = 2x + 10y, & y(0) = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x' = 4x - 2y, & x(0) = 3, \\ y' = 5x + 2y, & y(0) = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x' = 6x - 4y, & x(0) = 1, \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -10x - 5y, & x(0) = 2, \\ y' = 4x - 6y, & y(0) = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x' = 6x + 5y, & x(0) = -3, \\ y' = -2x + 4y, & y(0) = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x' = 8x + 4y, & x(0) = -1, \\ y' = -2x + 4y, & y(0) = 1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = 4x - 4y, & x(0) = -2, \\ y' = 5x + 8y, & y(0) = 5. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x' = -10x + 5y, & x(0) = 0, \\ y' = -5x - 4y, & y(0) = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x' = 12x - 8y, & x(0) = 4, \\ y' = 5x + 8y, & y(0) = 1. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = 10x - 2y, & x(0) = 2, \\ y' = 5x + 8y, & y(0) = 1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x' = -8x - 5y, & x(0) = 0, \\ y' = 2x - 10y, & y(0) = -3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x' = -10x - 4y, & x(0) = 0, \\ y' = 2x - 14y, & y(0) = -1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 10x + 5y, & x(0) = 5, \\ y' = -5x + 4y, & y(0) = -3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x' = 21x - y, & x(0) = 0, \\ y' = 289x - 13y, & y(0) = -3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x' = 50x + 8y, & x(0) = 0, \\ y' = -61x + 6y, & y(0) = 1. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 40x - 17y, & x(0) = 0, \\ y' = 17x + 6y, & y(0) = -1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x' = 13x + 9y, & x(0) = 1, \\ y' = -4x + y, & y(0) = 1. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x' = 13x + 9y, & x(0) = 3, \\ y' = -5x + y, & y(0) = -2. \end{cases}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

1. Понятие оригинала и изображения.
2. Свойство линейности.
3. Теорема подобия.
4. Дифференцирование оригинала.
5. Дифференцирование изображения.
6. Интегрирование оригинала.
7. Интегрирование изображения.
8. Теорема запаздывания.
9. Теорема смещения.
10. Теорема умножения. Интеграл Дюамеля.
11. Теоремы разложения.
12. Приложения операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и систем.
13. Решение интегральных уравнений Вольтерра с ядрами специального вида.

ПРИЛОЖЕНИЕ

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{p+\lambda}$
3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
5	$sh\,at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
6	$ch\,at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$
7	$e^{-\lambda t}\sin at$	$\frac{a}{(p+\lambda)^2+a^2}$
8	$e^{-\lambda t}\cos at$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+a^2}$
9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
10	$t^n e^{-\lambda t}$	$\frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$
11	$t\sin at$	$\frac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
12	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$
13	$t\,sh\,at$	$\frac{2pa}{\left(p^2-a^2\right)^2}$

14	$t\,ch\;at$	$\dfrac{p^2+a^2}{\left(p^2-a^2\right)^2}$
15	$\dfrac{1}{2a^3}\left(\sin at - at\cos at\right)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие отражает опыт работы автора со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит раздел высшей математики «Операционное исчисление», изучаемый в третьем семестре.

Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты второго курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб. : Лань, 2002. 78 с.5

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1981.

3. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1965.

4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с. – ISBN 5-02-013925-4.

5. Еропкина Т. А. Теория функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Задания к типовым расчетам по математике : учеб. пособие / Т. А. Еропкина ; Владим. гос. ун-т. – 3-е изд., испр. и доп. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 72 с. – ISBN 5-89368-656-X.

Учебное электронное издание

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-практическое пособие

Автор-составитель О. В. Крашенинникова

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Кафедра функционального анализа и приложений
krashola2012@yandex.ru