Владимирский государственный университет

Н. Ю. КУРАНОВА

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. Ю. КУРАНОВА

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1623-1

УДК 512.5
ББК 22.144

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры вычислительной техники и систем управления
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Шутов

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Куранова, Н. Ю. Основы высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Н. Ю. Куранова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 393 с. – ISBN 978-5-9984-1623-1. – Электрон. дан. (7,13 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Излагаются основные разделы высшей алгебры. Подробно представлен теоретический и практический материал, позволяющий студентам самостоятельно освоить предложенные темы. Упражнения и задачи могут быть использованы как задания для контрольных работ. Пособие составлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Алгебра и теория чисел».

Предназначено для студентов 1 – 2-го курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование. Некоторые темы будут интересны учащимся старших классов средней школы.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 512.5
ББК 22.144

ISBN 978-5-9984-1623-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
Глава 1. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ 6
1.1. Группы 6
1.2. Подгруппы. Циклические группы 11
1.3. Смежные классы. Разложение группы по подгруппе 13
1.4. Нормальный делитель группы. Фактор-группы 15
1.5. Кольца 16
1.6. Подкольца. Идеалы 19
1.7. Поля 20
Упражнения 22
Глава 2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ 27
2.1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме 27
2.2. Операция сопряжения и ее свойства. Модуль комплексного числа 34
2.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа 44
2.4. Решение линейных и квадратных уравнений в поле комплексных чисел 46
2.5. Геометрическая интерпретация комплексных чисел 50
2.6. Тригонометрическая форма комплексного числа, связь с алгебраической формой 76
2.7. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра 85
2.8. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа 91
2.9. Комплексные корни n-й степени из единицы 96
2.10. Показательная форма комплексного числа, связь с тригонометрической формой 116
Упражнения 119
Глава 3. АЛГЕБРА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 120
3.1. Понятие матрицы. Операции над матрицами 120
3.2. Определители второго и третьего порядков 133
3.3. Перестановки и подстановки 138
3.4. Определители n-го порядка 141
3.5. Основные свойства определителей n-го порядка 146
3.6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа 149
3.7. Вычисление определителей n-го порядка 160
3.8. Обратная матрица 164
3.9. Ранг матрицы 170
Упражнения 182
Глава 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ 183
4.1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений 183
4.2. Правило Крамера решения систем линейных уравнений 197
4.3. Решение систем линейных уравнений в матричном виде 199
4.4. Решение матричных уравнений 201
Упражнения 203
Глава 5. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА 204
5.1. Линейные векторные пространства 204
5.2. Линейная зависимость и независимость векторов 206
5.3. Размерность, базис и ранг пространства векторов 212
5.4. Пространство решений однородной системы уравнений 218
5.5. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений 222
5.6. Координаты вектора при переходе к новому базису 223
5.7. Евклидово векторное пространство 226
5.8. Ортонормированный базис евклидова векторного пространства. Процесс ортогонализации 229

Упражнения ... 233
Глава 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ... 235
6.1. Основные понятия ... 235
6.2. Матрица линейного оператора в данном базисе ... 238
6.3. Матрица оператора в различных базисах ... 244
6.4. Ранг, ядро и дефект линейного оператора ... 249
6.5. Действия над линейными операторами ... 253
6.6. Инвариантные подпространства. Собственные векторы ... 256
Упражнения. ... 260
Глава 7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ ... 262
7.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ... 262
7.2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду ... 266
7.3. Приведение квадратичной формы к главным осям ... 271
7.4. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду ... 275
7.5. Закон инерции действительных квадратичных форм ... 276
7.6. Положительно определенные формы ... 280
Упражнения ... 284
Глава 8. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ... 287
8.1. Основные определения и простейшие свойства ... 287
8.2. Деление многочлена с остатком ... 290
8.3. Рациональные дроби ... 293
8.4. Делимость многочленов. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида ... 299
8.5. Дифференцирование многочленов. Отделение кратных множителей ... 307
8.6. Многочлены над числовыми кольцами и полями. Схема Горнера. Корни многочлена ... 309
8.7. Неприводимые многочлены. Основная теорема алгебры ... 315
8.8. Интерполяционный многочлен ... 320
8.9. Целые и рациональные корни многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна ... 322
8.10. Формула Тейлора. Разложение многочлена по степеням двучлена ... 327
8.11. Формулы Виета ... 331
8.12. Многочлены с действительными коэффициентами ... 332
8.13. Уравнения третьей и четвертой степени ... 333
8.14. Границы для комплексных и вещественных корней многочленов ... 340
8.15. Результант и дискриминант многочленов ... 343
8.16. Распределение корней многочлена на действительной оси ... 347
8.17. Алгебраическое расширение полей. Освобождение от иррациональности в знаменателе ... 351
Упражнения ... 355
Глава 9. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ ... 356
9.1. Многочлены от нескольких переменных ... 356
9.2. Разложение многочлена от n переменных в произведение неприводимых множителей ... 359
9.3. Симметрические многочлены ... 360
9.4. Основная теорема о симметрических многочленах ... 362
9.5. Результант двух многочленов ... 364
Упражнения ... 367
Индивидуальные задания ... 368
Итоговый тест по курсу алгебры ... 383
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 391
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ... 392

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра – один из самых больших разделов математики, принадлежащих наряду с арифметикой и геометрией к числу старейших ветвей этой науки. Задачи, а также методы алгебры, отличающие её от других отраслей математики, создавались постепенно, начиная с древности, исходя из различных аспектов практической деятельности человека. Развитие алгебры, её методов и символики оказало существенное влияние на науку, подготовив серьёзный фундамент и способствуя появлению многочисленных областей математики. Наиболее важная в приложениях часть алгебры – линейная алгебра. Первым по времени возникновения вопросом, относящимся к линейной алгебре, была теория линейных уравнений, развитие которой привело к созданию теории определителей, а затем теории матриц и связанной с ней теории векторных пространств и линейных преобразований в них.

Предлагаемое учебно-практическое пособие должно оказать помощь в овладении основными понятиями, утверждениями и методами высшей алгебры, а также умении применять их при решении различных математических задач.

Весь материал пособия разбит на разделы и подразделы, в которых приведены основные теоретические сведения (определения, утверждения и правила), примеры и задачи с подробными решениями, а также варианты для самостоятельного решения типовых задач. Такое изложение материала позволит студентам, изучающим вопросы высшей алгебры, овладеть стандартными приёмами и навыками и впоследствии творчески применять их в решении сложных задач.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

1.1. Группы

Пусть G — какое-то множество элементов (например, множество чисел, или функций, или каких-нибудь объектов геометрической природы и т. д.). Говорят, что в множестве G определена *алгебраическая операция,* если каждым двум элементам a, b из G, взятым в определенном порядке, однозначным образом поставлен в соответствие некоторый третий элемент c из G.

Примеры алгебраических операций: сложение целых чисел (каждым двум целым числам ставится в соответствие их сумма), их вычитание; сложение векторов на плоскости; сложение или умножение квадратных матриц n-го порядка; векторное умножение векторов трехмерного пространства.

Алгебраическая операция, определенная в множестве G, обычно называется или *умножением,* или *сложением.* В первом случае, если элементам a, $b \in G$ поставлен в соответствие элемент $c \in G$, пишут $c = ab$, во втором случае пишут $c = a + b$.

Множество G с определенной в нем алгебраической операцией является *группой,* если выполнены следующие условия:

1) для любых трех элементов $a, b, c \in G$

$a (bc) = (ab) c$

(*ассоциативность* умножения);

2) в множестве G существует такой элемент e, что для любого $a \in G$

$ae = ea = a$;

3) для любого $a \in G$ существует такое $a' \in G$, что $aa' = a'a = e$.

Элемент e называется *единицей* группы, элемент a' называется элементом, *обратным* a, и обозначается обычно через a^{-1}. Если операция, определенная в группе, называется сложением, то вместо единицы группы говорят о *нуле* группы (это элемент, обозначаемый символом 0 и обладающий свойством $a+0 = 0+a = a$ для любого $a \in G$), а вместо элемента a^{-1}, обратного элементу *а,* говорят об элементе — *а, противоположном а* $(a+(-a)=0)$.

Множество *X* с заданной на нем ассоциативной алгебраической операцией называется *полугруппой.* Полугруппу с единичным (нейтральным) элементом называют *моноидом.*

Пример 1. Группами являются:

1) множество всех целых чисел относительно операции сложения (так называемая *аддитивная группа* всех целых чисел);

2) множество всех четных чисел относительно операции сложения (аддитивная группа всех четных чисел);

3) множество всех отличных от нуля рациональных чисел относительно операции умножения *Мультипликативная группа* отличных от нуля рациональных чисел);

4) множество всех векторов на плоскости относительно обычного сложения векторов;

5) множество всех невырожденных квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами относительно операции умножения матриц.

Целые числа относительно операции умножения группы не образуют, так как для целого числа, отличного от ±1, не существует обратного ему целого числа. По той же причине не образуют группы относительно умножения все квадратные матрицы n-го порядка. Не является группой и множество всех векторов трехмерного пространства относительно векторного умножения векторов, так как эта операция не ассоциативна.

Если операция, определенная в группе, *коммутативна* (т.е. для любых элементов a, b группы $ab = ba$), то сама группа называется *коммутативной* или *абелевой.* Группы приведенных выше примеров 1, 2, 3, 4 абелевы, группа примера 5 не абелева. Еще пример не абелевой группы — множество всех вращений трехмерного пространства вокруг начала координат, где произведением двух вращений называется их последовательное выполнение.

Если группа G состоит из конечного числа элементов, то она называется *конечной группой,* а число элементов в ней называется *порядком группы.*

Пример 2. Произведением двух подстановок n-й степени называется результат их последовательного выполнения (например, если

$n = 4$ и $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, то $ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, так как, например, число 1 при подстановке a переходит в 2, а число 2 при подстановке b переходит в 4, т.е. в итоге 1 переходит в 4, и т. д.). Это — алгебраическая операция, относительно которой множество всех подстановок n-й степени является группой. Единицей группы служит тождественная подстановка, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, элементом, обратным к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ является подстановка $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Эта группа называется *симметрической группой n-й степени* и обычно обозначается через S_n.

Задача 1. Образует ли группу множество элементов

M={a, b, c, d, e}

относительно операции умножения, заданной таблицей.

*	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	b	d	e	c	a
b	e	b	a	d	b
c	d	c	d	a	c
d	b	a	c	e	d
e	a	c	b	d	e

Ответ: данное множество не является группой.

Задача 2. Показать, что множество {a} степеней подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

образует группу относительно операции умножения подстановок. Составить таблицу умножения.

Решение.

Пусть $a_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, тогда таблица умножения имеет вид

*	$\mathbf{a_0}$	$\mathbf{a_1}$	$\mathbf{a_2}$	$\mathbf{a_3}$
$\mathbf{a_0}$	a_0	a_1	a_2	a_3
$\mathbf{a_1}$	a_1	a_2	a_3	a_0
$\mathbf{a_2}$	a_2	a_3	a_0	a_1
$\mathbf{a_3}$	a_3	a_0	a_1	a_2

Ответ: данное множество образует группу.

Задача 3. Образует ли группу множество элементов

M={a, b, c, d, e}

относительно операции умножения, заданной таблицей.

*	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	b	c	d	e	a
b	c	d	e	a	b
c	d	e	a	b	c
d	e	a	b	c	d
e	a	b	c	d	e

Ответ: данное множество образует группу.

Изоморфизм групп. Говорят, что между элементами множеств (см. введение) M и N установлено *взаимно однозначное соответствие,* если каждому элементу множества M поставлен в соответствие некоторый вполне определенный элемент множества N, причем различным элементам из M соответствуют различные элементы в N и всякий элемент из N соответствует некоторому элементу из M.

Две группы G и H называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором для любых элементов a, $b \in G$ и соответствующих им элементов a', $b' \in H$ элементу $ab = c$ будет соответствовать элемент $c'=a'b'$.

Пример 3. Аддитивная группа G всех целых чисел изоморфна аддитивной группе H всех четных чисел (для установления изоморфизма между ними можно каждому числу $k \in G$ поставить в соответствие число $2k \in H$).

Пример 4. Мультипликативная группа всех положительных действительных чисел изоморфна аддитивной группе всех действительных чисел (изоморфизм: $a \to \lg a$).

Изоморфное отображение группы на себя называется *автоморфизмом* этой группы.

Пример 5. Одним из автоморфизмов аддитивной группы всех целых чисел является отображение, при котором каждому целому числу a ставится в соответствие число — a.

Гомоморфизм. Пусть каждому элементу группы G соответствует однозначно определенный элемент группы *H,* причем если элементам $a,b \in \mathrm{G}$ соответствуют элементы $a',b' \in H$, то элементу $ab = c$ соответствует элемент $c'=a'b'$. Такое отображение $G \to H$ называется *гомоморфизмом;* говорят, что *группа G гомоморфно отображена в группу H.* Если при этом на каждый элемент группы *H* отображается хотя бы один элемент группы G, то говорят о *гомоморфном отображении* группы *G на* группу *H*; гомоморфизм в этом случае называется *эпиморфизмом.*

Вообще говоря, при гомоморфизме в данный элемент группы *H* могут переходить различные элементы *группы* G, а также может не переходить ни одного.

Пример 6. Если каждому четному числу поставить в соответствие число 1, а каждому нечетному поставить в соответствие число —1, то получится гомоморфное отображение аддитивной группы всех целых чисел в мультипликативную группу всех отличных от нуля рациональных чисел. Это отображение будет также гомоморфным отображением аддитивной группы всех целых чисел на мультипликативную группу, состоящую из чисел —1, 1.

Пример 7. Если каждой невырожденной квадратной матрице n-го порядка с действительными элементами поставить в соответствие определитель этой матрицы, то получится гомоморфное отображение группы (по умножению) всех действительных невырожденных квадратных матриц n-го порядка на мультипликативную группу всех отличных от нуля действительных чисел.

При всяком гомоморфном отображении группы G в группу H единица группы G (или нуль, если групповая операция — сложение) переходит в единицу (в нуль) группы *H.* Совокупность всех элементов группы G, переходящих в единицу (в нуль) группы *H,* называется *ядром* данного гомоморфизма. В приведенном выше примере ядро гомоморфизма составляют все четные числа, в примере — все матрицы с определителем, равным 1.

Гомоморфное отображение группы в себя называется *эндоморфизмом* этой группы. Примером эндоморфизма может служить отображение, при котором каждому элементу группы ставится в соответствие единица этой группы.

Если группа G гомоморфно отображена на какое-то множество M, в котором определена алгебраическая операция, то относительно этой алгебраической операции множество M само необходимо является группой.

1.2. Подгруппы. Циклические группы

Подмножество A группы G называется *подгруппой* этой группы, если вместе с каждым элементом a оно содержит также обратный ему элемент a^{-1} и вместе с каждыми двумя элементами a, b оно содержит и их произведение ab. Эти два требования можно заменить одним: для любых элементов $a, b \in A$ элемент ab^{-1} должен лежать в A.

Всякая подгруппа данной группы G сама является группой относительно той операции, которая определена в G.

Пример 1. Аддитивная группа всех четных чисел является подгруппой аддитивной группы всех целых чисел, которая сама является подгруппой аддитивной группы всех комплексных чисел.

Пример 2. Множество всех четных подстановок n элементов является подгруппой в группе всех подстановок n элементов. Эта подгруппа называется *знакопеременной группой, n-й степени* и обычно обозначается через A_n.

В любой группе подмножество, состоящее только из единичного элемента группы, является подгруппой. Эта подгруппа называется *единичной подгруппой* данной группы и обычно обозначается символом E. Сама группа также всегда является своей подгруппой. Всякая подгруппа, отличная от всей группы, называется *истинной подгруппой* этой группы.

Если в группе G взять какой-нибудь элемент g и все степени этого элемента (или все его кратные, если операция в группе — сложение), то также получится подгруппа группы G. Эта подгруппа называется *циклической подгруппой, порожденной элементом g,* и обозначается через $\{g\}$. Если подгруппа $\{g\}$ совпадает со всей группой G, то сама группа G называется *циклической группой.*

Пусть G – произвольная группа, a – ее некоторый элемент. Имеются две возможности.

1) Все степени элемента a различны, т.е. $m \neq n$, а потому $a^m \neq a^n$. В этом случае говорят, что элемент $a \in G$ имеет *бесконечный порядок.*

2) Имеются совпадения $a^m = a^n$ при $m \neq n$. Если, например, $m>n$, то существуют положительные степени элемента $a \in G$, равные единичному элементу. Пусть q – наименьший положительный показатель, для которого $a^q = e$. Тогда говорят, что a – элемент *конечного порядка* q.

В конечной группе все элементы будут конечного порядка.

Пример 3. Аддитивная группа всех целых чисел есть бесконечная циклическая группа (она состоит из всех кратных числа 1).

Пример 4. Все значения корня n-й степени из 1 образуют (относительно умножения) циклическую группу порядка n, порожденную любым из первообразных корней n-й степени из 1.

Группы подстановок — это подгруппы симметрических групп. При их изучении обычно для удобства пользуются записью подстановок в виде произведений циклов. *Циклом* или *циклической подстановкой* называется такая подстановка чисел 1,2,..., n, которая одно из этих чисел i_1 переводит в число i_2, i_2 переводит в i_3 и т.д., i_{k-1} переводит в i_k $(k \leq n)$ i_k переводит в i_1 а все остальные числа оставляет на месте. Эта подстановка обозначается через $(i_1\, i_2, ..., i_k)$. Циклы $(i_1\, i_2, ..., i_k)$ и, например, $(i_2, \ldots, i_k, i_1)$ равны между собой. Число k называется *длиной* цикла. Цикл длины 1 — это тождественная подстановка. Чтобы представить произвольную подстановку чисел 1, 2,..., n в виде произведения циклов, нужно взять любое из этих чисел (например, 1), затем число, в которое оно переводится данной подстановкой (пусть это число—j_2), затем число, в которое j_2 переходит при этой подстановке, и т.д. до числа j_l, переводящегося данной подстановкой в первое из взятых чисел (в нашем случае в 1), и выписать цикл $(1, j_2, ..., j_l)$, после этого нужно взять какое-нибудь из чисел 1,2,..., n, которое пока еще не встречалось (если такое число существует), и, начиная с него, сделать то же самое и т.д., пока не будут использованы все числа 1, 2,..., n. Тогда мы получим несколько циклов, не имеющих общих действительно перемещаемых ими чисел, произведению которых (в любом порядке) и будет равна данная подстановка. Циклы, не содержащие общих действительно перемещаемых ими чисел, называются *независимыми.* Т.е. циклы, входящие в произведение, длина которых равна 1, обычно не пишут. При этом условии всякая подстановка разлагается в произведение независимых циклов единственным образом.

1.3. Смежные классы. Разложение группы по подгруппе

Если A — подгруппа, g — произвольный элемент группы G то через gA обозначается множество всех элементов группы G, получающихся при умножении элемента g на всевозможные элементы из подгруппы A (т.е., множество всех элементов вида ga, где $a \in A$). Это множество называется *левым смежным классом группы G по подгруппе A, определяемым элементом g*. Аналогично *правым смежным классом Ag* группы G по подгруппе A, определяемым элементом g, называется множество всех элементов вида ag, где $a \in A$. Если групповая операция — сложение, то левые и правые смежные классы обозначаются соответственно через $g+A$ и $A+g$.

Пример 1. В группе всех подстановок третьей степени возьмем подгруппу A, состоящую из подстановок $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, и возьмем элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда левый смежный класс gA будет состоять из подстановок $ge = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $ga = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, а правый смежный класс Ag — из подстановок $eg = g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $ag = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Каждый левый смежный класс определяется любым из входящих в него элементов, т. е. если $g_1 \in gA$, то $g_1A = gA$.

Два любых левых смежных класса группы G по подгруппе A или совпадают, или не имеют ни одного общего элемента. Одним из левых смежных классов группы G по подгруппе A является сама подгруппа A ($A = eA$, где e — единица группы G); все остальные левые смежные классы по подгруппе A подгруппами группы G не являются.

Эти же утверждения верны для правых смежных классов.

Пример. Группа S_3 перестановок из 3 элементов. Составим для нее таблицу умножения. Эта группа состоит из 6 элементов

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; x_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; x_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; x_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Клетка таблицы, стоящая в i-ой строке и в j- ом столбце содержит номер элемента, равного $x_i * x_j$. Она имеет следующий вид:

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	4	1	2	6	5
4	4	3	6	5	1	2
5	5	6	2	1	4	3
6	6	5	4	3	2	1

Рассмотрим подмножество H в S_3 состоящее из элементов x_1 и x_2. (Будем писать: H = {1,2}). Легко видеть, что H - подгруппа. (Заметим, что $x_1 = e_H; x_2 * x_2 = e_H$). Пользуясь таблицей умножения находим левые смежные классы:

$$x_1 * H = x_2 * H = \{1,2\},\, x_3 * H = x_4 * H = \{3,4\},\, x_5 * H = x_6 * H = \{5,6\}.$$

Таким образом, имеем 3 различных левых смежных класса {1,2}, {3,4}, {5,6}. Аналогично строятся правые смежные классы: {1,2}, {3,5}, {4,6}.

Возьмем теперь $H' =$ {1,4,5}. H' - подгруппа четных перестановок $A_3 \subset S_3$. Для нее левые и правые смежные классы совпадают и состоят из элементов {1,4,5} и {2,3,6}.

Число всех различных левых смежных классов группы *G* по подгруппе *A* всегда равно числу всех различных правых смежных классов группы *G* по этой же подгруппе (в бесконечном случае это означает, что мощность множества всех различных левых смежных классов группы *G* по подгруппе *A* совпадает с мощностью множества правых смежных классов). Это число (в бесконечном случае - мощность) называется *индексом* подгруппы *A* в группе G.

Теорема Лагранжа. Если группа G конечна, то ее порядок равен произведению порядка любой ее подгруппы *A* на индекс этой подгруппы в группе G. Отсюда следует, что порядок всякой подгруппы конечной группы является делителем порядка группы. Также порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка этой группы.

Теорема Коши. Если порядок конечной группы *G* делится на простое число *p,* то *G* обладает элементами порядка.

Если в произвольной группе *G* выбрана какая-то подгруппа *A,* то все элементы группы *G* можно разбить на непересекающиеся классы, объединяя вместе те элементы, которые лежат в одном и том же левом смежном классе группы *G* по подгруппе *A.* Такое разбиение называется *левосторонним разложением группы* G *по подгруппе* A. Если вместо левых смежных классов взять правые смежные классы по подгруппе A, то получится *правостороннее разложение группы* G *по подгруппе* A.

Пример 2. В симметрической группе 3-й степени S_3, элементы которой $a_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, возьмем подгруппу A, состоящую из элементов e и a_6. Тогда при левостороннем разложении группы S_3 по подгруппе A множество ее элементов разобьется на классы: 1) e, a_6 (смежный класс $eA = A$), 2) a_2, a_5, (смежный класс a_2A), 3) a_3, a_4 (смежный класс a_3A), а при правостороннем разложении получатся классы: 1) e, a_6 (смежный класс $Ae = A$), 2) a_2, a_4 (смежный класс Aa_2), 3) a_3, a_5 (смежный класс Aa_3). Индекс подгруппы A в группе S_3 равен 3.

1.4. Нормальный делитель группы. Фактор-группы

Если при левостороннем и при правостороннем разложении группы G по некоторой ее подгруппе H классы, на которые распадаются элементы группы G, получаются одинаковыми, то подгруппа H называется *нормальным делителем* группы G (или *инвариантной подгруппой.)*

Пример 1. В примере подгруппа A группы S_3 не является нормальным делителем этой группы.

Подгруппа H тогда и только тогда является нормальным делителем группы G, когда для любого элемента g группы G

$$gH=Hg.$$

Это равенство означает, что для всякого элемента h из H можно найти в H такие элементы h' и h'', что

$$gh = h'g, hg = gh''.$$

Пример 2. Если группа G абелева, то всякая ее подгруппа H является нормальным делителем.

Фактор-группа. Если в множестве всех смежных классов группы G по нормальному делителю H ввести операцию по правилу $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$ (при аддитивной записи $(g_1+H)+(g_2+H) =(g_1+g_2)+\mathrm{H}$, то это будет алгебраическая операция, относительно которой множество всех смежных классов группы G по нормальному делителю H само окажется группой. Эта группа называется *фактор-группой группы G по нормальному делителю H* и обозначается через G/H. Единицей фактор-группы G/H является смежный класс H. Элементом, обратным элементу фактор-группы gH, является смежный класс $g^{-1}H$. Порядок фактор-группы G/H равен индексу H в G.

1.5. Кольца

Множество R с двумя определенными в нем алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется *кольцом,* если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения связана с операцией сложения законами *дистрибутивности,* т. е. для любых трех элементов $a, b, c \in R$

$$a(b + c) = ab + ac \text{ и } (b+c)a = ba + ca.$$

Умножение, определенное в кольце, не обязано быть ни ассоциативным, ни коммутативным. Если умножение, определенное в кольце R, ассоциативно (т.е. для любых трех элементов $a, b, c \in R$ $a(bc)=(ab)c$), то кольцо R называется *ассоциативным кольцом.* Если, кроме того, умножение, определенное в R, коммутативно, то R называется *коммутативным кольцом.* В коммутативном кольце второе из равенств является следствием первого.

Если в кольце R для любого элемента a выполнено условие

$a^2 = 0$ и для любых трех элементов a, b, c

$$a(bc)+b(ca)+c(ab) = 0 \text{ (тождество Якоби),}$$

то R называется *кольцом Ли.*

Пример 1. Все целые числа относительно обычных операций сложения и умножения чисел образуют коммутативное кольцо.

Пример 2. Все рациональные числа, все действительные числа, все комплексные числа относительно обычных операций сложения и умножения образуют коммутативные кольца.

Пример 3. Все многочлены от одного переменного с произвольными числовыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов образуют коммутативное кольцо.

Пример 4. Ассоциативное, но не коммутативное, кольцо образуют все квадратные матрицы n-го порядка с произвольными числовыми элементами.

Пример 5. Множество всех векторов трехмерного пространства, где векторы складываются обычным образом, а произведением двух векторов называется их векторное произведение, является неассоциативным кольцом. Это кольцо есть кольцо Ли.

Абелева группа, которая получится, если в кольце рассматривать только одну операцию сложения, называется *аддитивной группой* кольца. Нулевой элемент этой группы называется *нулем кольца.* Произведение любого элемента a кольца на нуль равно нулю кольца: $a \bullet 0 = 0$.

Если для элементов a, b некоторого кольца $ab = 0$, но $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то a и b называются *делителями нуля (a* — левый делитель нуля, b — правый). Если в кольце R делителей нуля нет, то R называется *кольцом без делителей нуля.* Коммутативное кольцо без делителей нуля называется *областью целостности.*

Пример 6. Всякое кольцо, в котором элементы — числа, а операции — обычное сложение и умножение чисел, является областью целостности.

Пример 7. Все функции, определенные и непрерывные на отрезке [—1,1], относительно обычных операций сложения и умножения функций образуют кольцо с делителями нуля (например, произведение функций

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & при \quad -1 \le x \le 0, \\ x & при \quad 0 < x \le 1 \end{cases}; \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & при \quad -1 \le x \le 0, \\ 0 & при \quad 0 < x \le 1 \end{cases};$$

ни одна из которых не равна нулю кольца, является нулем).

Если для элементов a, b_1, b_2 кольца выполнено равенство $ab_1 = ab_2$ (или $b_1 a = b_2 a$), причем $a \neq 0$ не есть левый (соответственно — правый) делитель нуля, то $b_1 = b_2$, т. е. на отличные от нуля элементы, не являющиеся делителями нуля, равенства можно сокращать. Производить сокращение на элемент, являющийся делителем нуля, нельзя.

Пример 8. В кольце всех квадратных матриц 2-го порядка для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

справедливо равенство $AB_1=AB_2$, хотя $B_1 \neq B_2$. Здесь A — левый делитель нуля: например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Элемент e кольца R называется *единицей* этого кольца, если для любого элемента $a \in R$ $ae = ea = a$. Единицы в кольце может и не быть. Если в кольце R единица есть, то R называется *кольцом с единицей.*

Пример 9. Кольцо всех целых чисел есть кольцо с единицей.

Пример 10. Все четные числа образуют кольцо без единицы.

В кольце с единицей e для элемента $a \neq 0$ может существовать *обратный* ему элемент a^{-1} со свойством $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (но может такого элемента и не быть). Элементы кольца с единицей, для которых в этом кольце обратный элемент существует, называются *делителями единицы.*

Пример 11. В кольце всех квадратных матриц *n-го* порядка единицей является единичная матрица. Обратный элемент существует для всякой невырожденной матрицы; для вырожденных матриц обратных им элементов не существует.

Кольца R и Q называются *изоморфными,* если между их элементами можно установить такое взаимно однозначное соответствие, что если элементам a_1 $a_2 \in R$, соответствуют элементы b_1 $b_2 \in$ Q, то элементу a_1+a_2 соответствует элемент b_1+b_2 и элементу a_1a_2— элемент b_1b_2.

Пример 12. Кольцо всех квадратных матриц n-го порядка с действительными элементами изоморфно кольцу всех линейных преобразований, действующих в действительном n-мерном линейном векторном пространстве

Говорят, что кольцо R *гомоморфно отображено* в кольцо Q, если каждому элементу кольца R поставлен в соответствие однозначно определенный элемент кольца Q, причем если элементам a_1, a_2 кольца R соответствуют элементы $b_1,b_2 \in Q$, то элементу a_1+a_2 соответствует b_1+b_2, элементу a_1a_2 соответствует b_1b_2. Если при этом на каждый элемент кольца Q отображается по крайней мере один элемент кольца R, то говорят о гомоморфном отображении кольца R на кольцо Q; гомоморфизм в этом случае называется *эпиморфизмом.*

1.6. Подкольца. Идеалы

Подгруппа A аддитивной группы кольца R называется *подкольцом* этого кольца, если она вместе с каждыми двумя элементами a_1, a_2 содержит также их произведение a_1a_2. Подкольцо A кольца R называется *левым* (соответственно *правым) идеалом* этого кольца, если оно вместе с каждым элементом a содержит также все элементы вида ra (вида ar), где r — произвольный элемент кольца R. В коммутативных кольцах понятия левого и правого идеала совпадают. Если подкольцо A произвольного кольца одновременно является и левым, и правым идеалом, то оно называется *двусторонним идеалом* этого кольца.

Пример 1. В кольце всех целых чисел числа, кратные некоторому фиксированному числу n, составляют двусторонний идеал.

Пример 2. В кольце всех квадратных матриц n-*го* порядка множество всех матриц, у которых последний столбец состоит из нулей, является левым идеалом, а множество всех матриц, у которых последняя строка состоит из нулей, является правым идеалом

В любом кольце элемент 0 и само кольцо являются двусторонними идеалами. Если других двусторонних идеалов в кольце нет, оно называется *простым кольцом.*

Пример 3. Простым кольцом служит кольцо всех квадратных матриц n-го порядка с любыми комплексными (или с любыми действительными) элементами

Пример 4. Всякое поле является простым кольцом.

Если в кольце R дано некоторое множество элементов N, то наименьший (левый, правый или двусторонний) идеал кольца R, содержащий все элементы из N, называется (соответственно левым, правым или двусторонним) *идеалом, порожденным множеством* N; этот идеал является пересечением всех (соответственно левых, правых или двусторонних) идеалов кольца R, содержащих множество N. Идеал, порожденный одним элементом a, называется *главным идеалом (обозначение:* $(a)_l$, $(a)_r$ или (a), в зависимости от того, идеал левый, правый или двусторонний). Если R — коммутативное кольцо, то главный идеал (a), порожденный элементом a этого кольца, состоит из всех элементов вида $ra+na$, где $r \in R$, n — целое число. Если R — коммутативное кольцо с единицей, то (a) состоит просто из всех элементов вида ra, где $r \in R$.

1.7. Поля

Полем называется коммутативное кольцо, состоящее не только из нуля, в котором для любого элемента $a \neq 0$ и любого элемента b существует ровно один такой элемент x, что $ax = b$. Элемент x называется *частным* от деления элемента b на элемент a (обозначение: $x = \frac{b}{a}$).

Примерами полей служат: кольцо всех рациональных чисел, кольцо всех действительных чисел, кольцо всех комплексных чисел. Все комплексные числа, являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, также образуют поле, называемое *полем алгебраических чисел.* Кольцо всех целых чисел полем не является

Всякое поле обладает единицей. Для любого отличного от нуля элемента поля существует обратный ему элемент. Множество всех отличных от нуля элементов поля образует относительно умножения, определенного в поле, абелеву группу *(мультипликативную группу поля).* Никакое поле не содержит делителей нуля. Единственными идеалами поля являются нулевой идеал и само поле.

Множество с двумя алгебраическими операциями, изоморфное полю, само является полем. Всякое гомоморфное отображение одного поля в другое является или изоморфизмом, или отображением, переводящим все элементы поля в нуль.

Если некоторое целое положительное кратное единичного элемента e поля P $ne=e+e+...+e$ (n слагаемых) равно нулю, то наименьшее целое положительное число p со свойством $pe = 0$ называется *характеристикой поля* P; p всегда является простым числом. Если никакое целое положительное кратное единичного элемента поля P нулю не равно, то P называется полем *характеристики нуль.* Пример поля характеристики p — поле классов вычетов по модулю p, пример поля характеристики нуль — любое числовое поле (например, поле всех действительных чисел).

Множество P' элементов поля P называется *подполем* этого поля, если оно само является полем по отношению к тем операциям, которые определены в P; P' тогда и только тогда является подполем поля Р, когда оно вместе с любыми двумя элементами a,b содержит также $a+b$, ab, $a—b$ и $\frac{a}{b}$ (если $b \neq 0$). Если P' — подполе поля P, то P

называется *расширением* поля P'. Поле, не имеющее никаких подполей, кроме него самого, называется *простым полем.* Примеры простых полей — поле классов вычетов по модулю p, поле всех рациональных чисел.

Всякое поле характеристики p содержит подполе, изоморфное полю классов вычетов по модулю p, а всякое поле характеристики нуль содержит подполе, изоморфное полю всех рациональных чисел.

Если в поле P даны подполе P' и множество элементов N, то наименьшее подполе P'' поля P, содержащее P' и N, называется полем, полученным *присоединением* к полю P' множества N (обозначение: $P''=P'(N)$). Поле $P'(N)$ состоит из всех элементов, получающихся из элементов поля P' и множества N путем сложения, вычитания, умножения и деления, и является пересечением всех подполей поля P, содержащих P' и N. Если множество N состоит из одного элемента α, то P'' называется *простым расширением* поля P'. Если при этом α является корнем некоторого многочлена $f(x)$ с коэффициентами из поля P', то $P'' = P'(\alpha)$ называется *простым алгебраическим расширением* поля P', а элемент α называется *алгебраическим относительно* P'; если же не существует многочлена $f(x)$ с коэффициентами из P', корнем которого был бы элемент α, то $P'' = P'(\alpha)$ называется *простым трансцендентным расширением* поля P', а элемент α называется *трансцендентным относительно* P'

Пример 1. Простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел, полученное присоединением к нему числа $\alpha=\sqrt[3]{2}$, состоит из всех чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где a, b, c — рациональные числа.

Пример 2. Поле всех комплексных чисел является простым алгебраическим расширением поля всех действительных чисел, полученным из него присоединением корня i многочлена x^2+1.

Кольцо A называется *алгеброй* над полем P, если его аддитивная группа есть векторное пространство над полем P и если умножение в A связано с умножением на элементы из P формулой $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$ $(a,b\in A, \alpha\in P)$.

Если векторное пространство, которое служит аддитивной группой алгебры A, является n-мерным, то число n называется *рангом* алгебры A. Алгебры конечного ранга называются также *гиперкомплексными системами.* Если алгебра A является кольцом Ли, то она называется *алгеброй Ли*. Если какая-то алгебра является не только кольцом, но даже телом, она называется *алгеброй с делением.*

Пример 3. Множество всех векторов трехмерного пространства, в котором векторы складываются и умножаются на числа обычным образом, а произведением двух векторов является их векторное произведение, есть алгебра Ли над полем действительных чисел.

Пример 4. Множество всех квадратных матриц n-го порядка с комплексными элементами, в котором обычным образом определены операции сложения и умножения матриц и операция умножения матрицы на комплексное число, является алгеброй ранга n^2 над полем комплексных чисел.

Пример 5. Все комплексные числа относительно обычных операций сложения и умножения комплексных чисел и обычной операции умножения комплексных чисел на действительные числа образуют алгебру с делением ранга 2 над полем действительных чисел.

Упражнения

1 Ассоциативна ли операция * на множестве M, если

1) $M=N$, $x*y=x^y$,
2) $M=N$, $x*y=(x, y)$ – наименьший общий делитель
3) $M=N$, $x*y=2xy$,
4) $M=Z$, $x*y=x-y$,
5) $M=Z$, $x*y=x^2+y^2$,
6) $M=R$, $x*y=\sin x\cdot\sin y$,

2 Пусть S- полугруппа матриц $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $x, y\in R$ с операцией умножения. Найти в этой полугруппе левые и правые нейтральные элементы, элементы, обратимые слева и справа относительно этих нейтральных.

3 Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами:

1) $(A, +)$, где A — одно из множеств N, Z, Q, M, C;
2) $(A, \bullet)$, где A — одно из множеств N, Z, Q, R, C;
3) $(A_0, \bullet)$, где A — одно из множеств N, Z, Q, R, C, а $A_0 = A \setminus \{0\}$;
4 $(nZ, +)$, где n — натуральное число;
5) $(\{-1, 1\},\cdot)$;

6) множество степеней вещественного числа $a \neq 0$ с целыми показателями относительно умножения;

7) множество всех комплексных корней фиксированной степени n из 1 относительно умножения;

8) множество комплексных корней всех степеней из 1 относительно умножения;

9) множество комплексных чисел с фиксированным модулем r относительно умножения;

10) множество ненулевых комплексных чисел с модулем, не превосходящим фиксированное число r, относительно умножения;

11) множество ненулевых комплексных чисел, расположенных на лучах, выходящих из начала координат и образующих с лучом Ox углы $\varphi_1, \varphi_2, \ \ , \varphi_n$ относительно умножения;

4 Какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу:

1) множество симметрических матриц относительно сложения;

2) множество симметрических матриц относительно умножения;

3) множество невырожденных матриц относительно сложения;

4) множество невырожденных матриц относительно умножения;

5) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения;

6) множество диагональных матриц относительно сложения;

7) множество диагональных матриц относительно умножения;

8) множество диагональных матриц, все элементы диагоналей которых отличны от 0, относительно умножения;

9) множество верхних треугольных матриц относительно умножения.

5 Перемножить перестановки в указанном и обратном порядках

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&2&1\end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&5&1&6&2&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&4&2&1&5\end{pmatrix}$.

6 Составить таблицу умножения перестановок порядка 3, порядка 4.

7 Записать в виде произведения независимых циклов перестановки

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\5&4&1&7&3&6&2\end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&6&7&5&2&4\end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&7&6&5&1&2&4\end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&3&6&7&1&5&2\end{pmatrix}$,

5) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&\dots&2n-1&2n\\2&1&4&3&\dots&2n&2n-1\end{pmatrix}$.

8 Какие из отображений групп $f: C \mapsto R$ являются гомоморфизмами

1) $f(z)=|z|$, 2) $f(z)=2|z|$, 3) $f(z)=\dfrac{1}{|z|}$, 4) $f(z)=1+|z|$,

5) $f(z)=|z|^2$, 6) $f(z)=1$.

9 Найти порядок элемента группы

1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}\in S_5$, 2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&1&6\end{pmatrix}\in S_6$,

3) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\in C$, 4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\in C$.

10 Найти смежные классы

1) аддитивной группы *Z* по подгруппе *nZ* (множество чисел, кратных *n*), *n* – натуральное число,

2) аддитивной группы *R* по подгруппе *Z*,

3) аддитивной группы *C* по подгруппе *R*,

4) мультипликативной группы *C* по подгруппе *U* чисел с модулем 1,

5) мультипликативной группы *C* по подгруппе *R*,

6) мультипликативной группы *C* по подгруппе положительных вещественных чисел,

7) аддитивной группы всех многочленов степени не выше 5 с комплексными коэффициентами по подгруппе многочленов степени не выше 3.

11 Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:

1) множество Z;

2) множество чисел кратных n, nZ ($n > 1$);

3) множество неотрицательных целых чисел;

4) множество Q;

5) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in N$;

6) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число p,

7) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа p;

8) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где $x, y \in Q$;

9) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2}$, где $x, y \in Q$;

10) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, где $x, y, z \in Q$;

11) множество комплексных чисел вида $x + yi$, где $x, y \in Z$;

12) множество комплексных чисел вида $x + yi$, где $x, y \in$ Q;

12. Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо относительно матричного сложения и умножения:

a) множество вещественных симметрических матриц порядка n;

b) множество верхних треугольных матриц порядка $n \geq 2$;

c) множество матриц порядка $n \geq 2$, у которых две последние строки нулевые;

d) множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ Dy & x \end{pmatrix}$, где D – фиксированное целое число, $x, y \in$ Z;

13 Какие из следующих множеств функций образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций:

a. множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

b. множество функций, имеющих вторую производную на интервале (a, b);

c. множество целых рациональных функций вещественного переменного;

d. множество рациональных функций вещественного переменного;

e. множество функций вещественного переменного, обращающихся в 0 на некотором подмножестве $D\in R$;

f. множество тригонометрических многочленов

b) $$a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

a. с вещественными коэффициентами, где n — произвольное натуральное число;

b. все степенные ряды от одной или нескольких переменных;

c. все лорановские степенные ряды от одной переменной?

14 Какие из колец в задачах 11, 12, 13 являются полями?

15 Какие из следующих множеств матриц образуют поле относительно обычных матричных операций

a. $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix};\quad x,y\in Q\right\}$, где n – фиксированное целое число;

b. $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix};\quad x,y\in R\right\}$, где n – фиксированное целое число;

c. $\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ ny & x \end{pmatrix};\quad x,y\in Z\right\}$, где n – фиксированное целое число;

Глава 2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Существуют такие алгебраические уравнения, которые не имеют действительных корней. Например, квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом. Простейшее из них – уравнение $x^2+1=0$. Введём новое число i, которое будем считать корнем уравнения $x^2+1=0$. Таким образом, для числа i выполнено равенство $i^2+1=0$. Символ i называется *мнимой единицей.*

Определение. Комплексным называется число вида $z = a + bi$, где $a, b \in R, i^2 = -1$.

Определение. Число a называется *действительной частью* комплексного числа z, а число b - *мнимой частью* комплексного числа z.

Действительную часть комплексного числа z принято обозначать *Re z*, а мнимую - *Im z* (от французского *reè*l - действительный, *imaginiare* - мнимый).

Определение. Комплексное число, у которого действительная часть равна нулю, называется чисто мнимым; $z=bi$– чисто мнимое число.

Определение. *Два комплексных числа называются* равными тогда и только тогда, когда раны действительные и мнимые части т.е.

$$(a_1+b_1i=a_2+b_2i) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

Определение. Комплексное число $z = 0 + 0i$ называется *нулем* и совпадает с нулем действительных чисел.

Определение. Два числа называются *комплексно-сопряжёнными*, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряженным* числу $z = a + bi$.

Определение. Два числа называются *противоположными,* если их действительные и мнимые части отличаются только знаками.

Числа $z = a + bi$ и $-z = -(a + bi)$ называются *противоположными.*

Определение. Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа.*

Пример: Записать противоположное и сопряженное число числу $z = -2 + 5i$, $-z = 2 - 5i$ - противоположное z; $\overline{z} = -2 - 5i$ - сопряженное к z.

Комплексные числа вида $z=a+0i=a$ являются *действительными* числами и, следовательно, *множество комплексных чисел содержит в себе множество действительных чисел.* Если потребовать, как мы сделаем это ниже, чтобы операции сложения и умножения комплексных чисел не выводили за пределы множества комплексных чисел и обладали всеми свойствами одноименных операций на множестве действительных чисел, то *множество комплексных чисел будет расширением множества действительных чисел.*

Комплексные числа вида $z=0+bi$ называются *чисто мнимыми.*

Введем операции над комплексными числами в алгебраической форме.

1. Сложение.

Чтобы сложить комплексные числа, надо отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Данное определение сводит операции сложения комплексных чисел к операции сложения двух действительных чисел. Из этого следуют следующие законы сложения:

1) Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2) ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. **Вычитание.**

Чтобы из одного комплексного числа вычесть другое комплексное число, надо соответствующую операцию произвести над их действительными и мнимыми частями:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

3. **Умножение.**

Чтобы перемножить два комплексных числа, надо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, учитывая, что $i^2 = -1$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac+bci+adi+bdi^2 = ac+bci+adi-bd = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

При этом выполняются следующие законы умножения:

1) Переместительный: $z_1 z_2 = z_2 z_1$,

2) сочетательный $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$,

3) распределительный $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

4. **Деление.**

Чтобы одно комплексное число разделить на другое, надо:

1) записать деление с помощью дроби;

2) числитель и знаменатель дроби умножить на сопряжённое к знаменателю;

3) В числителе и знаменателе раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и выполнить почленное деление.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bci-adi+bd}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} =$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Пример 1. Выполнить действие:

1) (5+3i) + (–2–i) = (5–2) + (3–1)i=3+2i.

2) 2·(3+4i) + (5–3i) (1+2i) = 2·3 + 2·4i + 5·1 + 5·2i – 3i·1 – 3i·2i = 6 + 8i + 5 + 10i –3i + 6 = 6 + 5 + 6 + (8 + 10 – 3)i =17+15i.

Пример 2. Найти вещественные x и y из равенства

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

Решение.

Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами: $x + 2ix + 3y - 5iy = 1 - 3i$. Группируем вещественные и мнимые части равенства

$$(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i.$$

Используя определения равенства комплексных чисел, приравниваем вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3y \\ 2-6y-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3y \\ -11y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3\cdot\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{5}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{11} \\ y=\dfrac{5}{11} \end{cases}.$$

Пример 3. Выполнить деление: $\dfrac{4-i}{1-2i}$.

$$\frac{(4-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i-i-2i^2}{1+4} = \frac{6+7i}{5} = \underline{\frac{6}{5}+\frac{7}{5}i}.$$

Пример 4. Выполнить действия: $(2+3i)(1-i)-\dfrac{i^{15}}{1+i}$.

$$\left[i^{15} = i\cdot i^{14} = i\cdot\left(i^2\right)^7 = i\cdot(-1)^7 = -i\right]$$

$$2-2i+3i-3i^2+\frac{i}{1+i} = 5+i+\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= 5+i+\frac{i-i^2}{1+1} = 5+i+(\frac{i}{2}+\frac{1}{2}) = \underline{5{,}5+1{,}5i}.$$

Пример 5. Выполнить действия: $\dfrac{(2-i)(-3+i)}{(1-i)(-1-2i)}$.

$$\frac{(2-i)(-3+i)(1+i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{(-6+2i+3i-i^2)(-1+2i-i+2i^2)}{(1+1)(1+4)} =$$

$$= \frac{(-5+5i)(-3+i)}{2\cdot 5} = \frac{5(-1+i)(-3+i)}{2\cdot 5} = \frac{3-i-3i+i^2}{2} = \frac{2-4i}{2} = \underline{1-2i}.$$

Задача 1. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 2x^2 - yi - 1 - \frac{3}{i}$ и $z_2 = y - 3 + x^2 i - 2i$ будут равными?

Решение.

Комплексные числа $z_1 = (2x^2 - 1) + (3 - y)\, i$, $z_2 = (y - 3) + (x^2 - 2)i$ будут равными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = y - 3\,, \\ 3 - y \;=\; x^2 - 2\,. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x_1 = -1$, $y_1 = 4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 4$.

Пример 6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

Решение.

Выражаем из первого уравнения системы переменную x через переменную y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 + 6i - (4 + 2i)y}{3 - i}, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

Домножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(2 + 6i)(3 + i) - (4 + 2i)(3 + i)y}{(3 - i)(3 + i)}, \\ (4 + 2i)x - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

В числителе дроби раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{cases} x = \dfrac{20i - 10y - 10iy}{10} = 2i - y - iy, \\ (4 + 2i)(2i - y - iy) - (2 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

Подставляем полученное значение переменной x во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ 4i - 4y - 9iy - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \dfrac{-9 + 4i}{4 + 9i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \dfrac{(-9 + 4i)(4 - 9i)}{16 + 81} = \dfrac{97i}{97} = i; \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2i - i - i^2 = i + 1, \\ y = i. \end{cases}$$

Задача 2. Решите уравнение $(2 - i)\,x + (5 + 6i)\,y = 1 - 3i$ относительно действительных переменных x и y.

Решение.

Левую часть уравнения можно рассматривать, как некоторое неизвестное комплексное число.

Приведя его к виду $a + bi$ получаем уравнение, равносильное данному:

$$(2x + 5y) + (-x + 6y)\,i = 1 - 3i.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, приходим к системе:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ -x + 6y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $x = \dfrac{21}{17}$; $y = -\dfrac{5}{17}$.

Замечание. При решении задачи использовано, что x и y по условию действительные числа. Если же x и y - комплексные числа, то приведенное решение неверно, так как в этом случае выражение $2x + 5y$ нельзя считать действительной частью искомого числа (аналогично, выражение $-x + 6y$ не будет его мнимой частью).

Пример 7. Вычислите i^{36}; i^{46}; i^{125}; i^{239}.

Решение.

Используем формулу:

$$i^{4m+r} = i^r = \begin{cases} 1, & r=0; \\ i, & r=1; \\ -1, & r=2; \\ -i, & r=3. \end{cases}$$

С ее помощью легко получаем:

$$i^{36} = i^0 = 1; \quad i^{46} = i^2 = -1; \qquad i^{125} = i; \; i^{239} = i^3 = -i.$$

Задача 3. Найдите значение функции $f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3+2i)$ при $x = 1 - 2i$.

Решение.

$$f(1-2i) = (1-2i)^4 + \frac{2+i}{1-2i} - (-3+2i).$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i\,.$$

Вычислим первое слагаемое:

$((1-2i)^2)^2 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i.$

Таким образом,

$f(1 - 2i) = (-7 + 24i) + i - (-3 + 2i) = -4 + 23i.$

Пример 8. Выполните указанные действия: $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Решение.

Вычислим значение дроби $\frac{1+i}{1-i}$.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \,.(1+i)^2 = 2i$$

Следовательно, $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6} = i^6 \cdot 2i = -2i$.

Упражнения

1. Выполнить действия:

a) $(2+5i)+(1-7i)=2+5i+1-7i=(2+1)+(5-7)i=3-2i$;

b) $(3-9i)-(7+i)=3-9i-7-i=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i$;

c) $(1+2i)\cdot(3-i)=3+6i-i-2i^2=3+6i-i+2=5+5i$;

г) $\frac{23+i}{3+i}=\frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{69+3i-23i-i^2}{9-i^2}=\frac{69+3i-23i+1}{9+1}=\frac{70-20i}{10}=\frac{70}{10}-\frac{20i}{10}==7-2i$

2. Найти действительные части *(Rez)* и мнимые части *(Imz)* комплексных чисел.

1) $z=\frac{(2-i)^3}{3+4i}$ 2) $z=\frac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$ 3) $z=(\frac{1+i}{1-i})^2$ 4) $z=\frac{3-2i}{1-4i}+i^9$.

2.2. Операция сопряжения и ее свойства. Модуль комплексного числа

Комплексное число $\bar{z}$ называется *сопряженным комплексному числу* $z=a+bi$, если

$$\bar{z} = a-b.$$

Пример. $\overline{3+4i} = 3-4i$.

Свойства операции сопряжения

1. $\bar{\bar{z}}=z$.

2. Для любого действительного числа a справедливо равенство $\bar{a}=a$.

3. Для любого действительного числа b *справедливо равенство* $\overline{bi}=-bi$.

Справедливость свойств 1-3 следует непосредственно из определения операции сопряжения.

4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$, $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$. Поэтому

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} =$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2} .$$

5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i .$$

С другой стороны, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$.

Полученные одинаковые результаты доказывают справедливость свойства 5.

Следствие из свойства 5. Для любого натурального числа n справедливо равенство

$$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n .$$

6. $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

Справедливость данного равенства следует из равенства $\overline{z} \cdot \dfrac{1}{\overline{z}} = 1$ и свойства 5: $\overline{z} \cdot \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = 1$.

7. Сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел являются действительными числами.

Действительно,

$$z+\bar{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a;$$

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2.$$

Модулем комплексного числа z = a + bi называется действительное число вида

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Непосредственно из свойства 7 следует, что

$$z^2 = z\cdot\bar{z}.$$

8. Теорема о сопряженном корне.

Если число $z=a+bi$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с действительными коэффициентами a_0, a_1, . . . , a_n, то число $\bar{z} = a-bi$ также является корнем уравнения.

*Доказательств*о.

По определению корня имеем:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0;$$

$$a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a+bi) + a_n = 0$$

Применим к обеим частям равенства операцию сопряжения. Из свойств операции сопряжения следует, что

$$\overline{a_i} = a_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)\ ,$$

так как все коэффициенты a_i - действительные числа (по условию). Кроме того, $\overline{(a+bi)^k} = \left(\overline{a+bi}\right)^k = \left(a-bi\right)^k$; $\bar{0} = 0$.

Следовательно,

$$\overline{a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_n} = a_0(a-bi)^n + a_1(a-bi)^{n-1} + \ \ldots\ + a_n = 0.$$

Последнее равенство означает, что число $z = a - bi$ является корнем уравнения.

Задача 1. Зная, что корнем уравнения $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$ является число $z_1 = 2 + i$, найти все корни данного уравнения.

Решение.

Поскольку все коэффициенты уравнения – действительные числа, то на основании теоремы 8 делаем вывод, что число $z_2 = 2 - i$ также является корнем уравнения.

Пусть z_3 – неизвестный корень уравнения, тогда

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3);$$

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x^2 - 4x + 5)(x - z_3).$$

Разделив обе части последнего равенства на $x^2 - 4x + 5$, получим

$$x - z_3 = x - 3.$$

Следовательно, $z_3 = 3$.

Задача 2. Найдите все комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

Решение.

Пусть $z = x + yi$ - искомое комплексное число, где x и y - действительные числа. Тогда число $\bar{z}$, сопряженное числу z, равно $x - yi$. По условию задачи имеем: $\bar{z} = z$.

$$(x + yi)^2 = x - yi.$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = x - y.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Следовательно, последнее уравнение равносильно следующей системе уравнений с действительными переменными x и y:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2xy = -y. \end{cases}$$

Возможны два случая.

1) $y \neq 0$. Тогда система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2x = -1, \end{cases}$$

которая имеет следующие решения:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $y = 0$. Тогда система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 = x, \\ y = 0, \end{cases}$$

которая имеет два решения: (0;0) и (1;0). Итак, искомых чисел четыре:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \; z_3 = 0; \; z_4 = 1,$$

из них два числа z_3 и z_4 - действительные, а два других – z_1 и z_2 - комплексно сопряженные.

Пример 1. Известно, что $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2i$. Найдите:

а) $\dfrac{z_2}{\overline{z_1}}$; б) $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{3\overline{z_2}}\right)^8$.

Решение.

а) $\dfrac{z_2}{\overline{z_1}} = \dfrac{2i}{3-i} = \dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = -0{,}2 + 0{,}6i$.

б) $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{3\overline{z_2}}\right)^8 = \dfrac{(1+i)^8}{2^8} = \dfrac{(2i)^4}{2^8} = \dfrac{1}{16}$.

Пример 2. Известно, что $z_1=1+2i$, $z_2=-3i$. Найдите:

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$; б) $\left(\dfrac{\overline{z_1}-i\,z_2}{2z_2}\right)^6$.

Решение.

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{z_1}=\dfrac{3i}{1+2i}=\dfrac{3i\,(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)}=\ 1{,}2+0{,}6i$.

б) $\left(\dfrac{\overline{z_1}-iz_2}{2z_2}\right)^8=\left(\dfrac{1-2i-3}{2(-3i)}\right)^6=\dfrac{(1+i)^6}{3^6}=\dfrac{8}{729}i$.

Ответ: а) $1{,}2+0{,}6i$; б) $\dfrac{8}{729}i$.

Задача 3. При каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = x^2 + yi - 5 - \frac{7}{i} \text{ и } z_2 = -y - x^2\, i - 4i$$

будут сопряженными?

Решение.

Комплексные числа

$$z_1 = (x^2 - 5) + (y + 7i) \text{ и } z_2 = (-y) - (x + 4)i$$

будут комплексно сопряженными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -y, \\ y + 7 = x^2 + 4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим:

$$x_1 = 2,\ y_1 = 1;\ x_2 = -2,\ y_2 = 1.$$

Задача 4. При каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = \mathrm{x} - \frac{y^2}{i} - 4 + 5i \text{ и } z_2 = y^2 + 1 - 3xi$$

будут противоположными?

Решение.

Комплексные числа $z_1 = (x - 4) + (y^2 + 5)$ и $z_2 = (y^2 + 1) - 3xi$ будут противоположными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} y^2 + 5 = 3x, \\ x - 4 = -y^2 - 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим:

$$x_1 = 2,\ y_1 = -1;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1.$$

Задача 5. Произведите действия с комплексными числами в алгебраической форме:

а) $(1+i)(2+i)+\dfrac{5}{1+2i}$; б) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12}$; в) $\dfrac{(1+2i)^3-(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$.

Решение.

а) $$(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}=\frac{(1+3i)(1+2i)+5}{1+2i}=\frac{1+5i-6+5}{1+2i}=\frac{5i}{1+2i}=\frac{(5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=$$
$$=\frac{10+5i}{1-4i^2}=\frac{5(2+i)}{5}=2+i;$$

б) $$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12}=\frac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}-\left(\left((1-i)^2\right)^2\right)^3=\frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{1-3i^2}-\left((-2i)^2\right)^3=$$
$$=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+64=\frac{-1+i\sqrt{3}+128}{2}=\frac{127}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

в) $$\frac{(1+2i)^3-(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}=\frac{(1+2i+1-2i)(-3+4i-3-4i-5)}{(2-i-2-i)(2-i+2+i)}=\frac{2(-11)}{-8i}=\frac{11i}{4i\cdot i}=$$
$$=\frac{11}{4i^2}=-\frac{11}{4}i.$$

Задача 6. Запишите комплексное число

$$z=\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} \text{ в виде } a+bi.$$

Решение.

$$z=\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=\frac{5+i}{2+2i-3i+3}=\frac{5+i}{5-i}=\frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{25+10i-1}{25+1}=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i.$$

Задача 7. Найдите значение функции $f(x) = x^4 + \frac{2+i}{x} - (-3+2i)$ при $x = 1-2i$.

Решение.

Подставим значение x в функцию:

$$f(1-2i) = (1-2i)^4 + \frac{2+i}{1-2i} - (-3+2i).$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i.$$

Вычислим первое слагаемое:

$$\left((1-2i)^2\right)^2 = 1-8i-24+32i+16 = -7+24i.$$

Таким образом, $f(1-2i) = (-7+24i) + i - (-3+2i) = -4+23i$.

Задача 8. Вычислите i^{36}; i^{46}; i^{125}; i^{239}.

Решение.

С помощью формулы: $i^{4m+r} = i^r = \begin{cases} 1, & r=0; \\ i, & r=1; \\ -1, & r=2 \\ -i, & r=3. \end{cases}$

легко получаем:

$$i^{36} = i^0 = 1;$$

$$i^{46} = i^2 - 1;$$

$$i^{125} = i;$$

$$i^{239} = i^3 = -i\ .$$

Задача 9. Выполните указанные действия: $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Решение.

Вычислим значение дроби $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i$. Следовательно, $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}=i^6\cdot 2i=-2i$

Задача 10. Докажите, что если число $\frac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым, то $|z|=1$.

Решение.

По условию $\frac{z-1}{z+1}=bi$, где b – действительное число, тогда

$$z-1=bzi+bi,\quad z=\frac{1+bi}{1-bi},\quad |z|=\frac{|1+bi|}{|1-bi|}=\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}=1.$$

Задача 11. Пусть $|z_1|=|z_2|=c$. Докажите, что $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4c^2$.

Решение.

Поскольку $|z|^2=z\bar{z}$, то

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+$$

$$+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)=$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2=4c^2.$$

Задача 12. Решите уравнение $z^2+|z|=0$.

Решение.

Пусть $z=x+iy$. Тогда данное уравнение запишется в виде $(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$, откуда $\left(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)+2xyi=0$.

Комплексное число равно нулю, тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю; поэтому для нахождения неизвестных x и y получим систему:

$$\begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0, \\ xy=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим: x=0 и y=0.

При x=0 первое уравнение системы запишется в виде $-y^2+|y|=0$ или $|y|^2-|y|=0$. Отсюда находим $|y|=0$ или $|y|=1$. Таким образом, числа

$$z_1=0,\ z_2=i,\ z_3=-i$$

являются решениями данного уравнения.

При y=0 для нахождения x получаем уравнение $x^2+|x|=0$. Отсюда следует, что x=0, и тем самым $z=0$.

Задача 13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right|=\dfrac{5}{8}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right|=1. \end{cases}$$

Решение.

Полагая $z=x+iy$, имеем

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|^2=\frac{|z-12|^2}{|z-8i|^2}=\frac{(x-12)^2+y^2}{x^2+(y-8)^2}=\frac{x^2+y^2+144-24x}{x^2+y^2+64-16y},$$

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|^2=\frac{|z-4|^2}{|z-8|^2}=\frac{(x-4)^2+y^2}{(y-8)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+16-8x}{x^2+y^2+64-16x},$$

следовательно, $\dfrac{x^2+y^2+144-24x}{x^2+y^2+64-16y}=\dfrac{25}{9}$ и $\dfrac{x^2+y^2+16-8x}{x^2+y^2+64-16x}=1$.

После преобразований данная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+27x-50y+38=0, \\ x=6. \end{cases}$$

Решение полученной системы является пары $(6;17)$ и $(6;8)$. Таким образом, исходная система имеет два решения $z_1=6+17i$ и $z_2=6+8i$.

Задача 14. Докажите, что если $|z|\le 1$, то $\left|\dfrac{2z-i}{2+iz}\right|\le 1$.

Решение.

Предположим, что существует такое комплексное число z_0, $|z_0| \le 1$, для которого выполнено неравенство $\left|\frac{2z_0 - i}{2 + iz_0}\right| > 1$. Тогда $\left|\frac{2z_0 - i}{2 + iz_0}\right|^2 > 1^2$, или $|2z_0 - i|^2 > |2 + iz_0|^2$.

Поскольку

$$|2z_0 - i|^2 = (2z_0 - i)\overline{(2z_0 - i)} = (2z_0 - i)(\overline{2z_0} - \bar{i}) = (2z_0 - i)(2\overline{z_0} + i) = = 4z_0\overline{z_0} + 1 - 2i\overline{z_0} + 2iz_0,$$

$$|2 + iz_0|^2 = (2 + iz_0)\overline{(2 + iz_0)} = (2 + iz_0)(\bar{2} + \overline{iz_0}) = (2 + iz_0)(2 - \overline{iz_0}) = 4 + z_0\overline{z_0} + 2iz_0 - 2i\overline{z_0},$$

$$\begin{aligned} 2iz_0 - 2i\overline{z_0} &= 2i(z_0 - \overline{z_0}) = 2i(\operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Re}\overline{z_0} - i\operatorname{Im}\overline{z_0}) = \\ &= 2i(\operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0) = -4\operatorname{Im} z_0, \end{aligned}$$

то $4|z_0|^2 - 4\operatorname{Im} z_0 + 1$ и $4 + |z_0|^2 - 4\operatorname{Im} z_0 + 1$ – действительные числа. Поэтому из последнего неравенства получим неравенство: $4|z_0|^2 + 1 > 4 + |z_0|^2$.

Следовательно, $|z_0| > 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Найдем значение корня квадратного из числа $z=a+bi$. Пусть

$$\sqrt{a+bi} = x + yi,$$

где x и y - неизвестные действительные числа. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем:

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Последнее уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy \quad\;\; = b. \end{cases}$$

Возведем каждое уравнение системы в квадрат и сложим полученные равенства. Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы находим

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где в правой части равенства следует иметь в виду арифметический корень, так как сумма x^2+y^2 неотрицательна. Учитывая, кроме того, что $x^2 - y^2 = a$, получаем:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2 + b^2} > a$, то оба полученные числа положительны. Извлекая из них квадратные корни, получим действительные значения для x и y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Из соотношения $2\,xy = b$ следует, что при $b > 0$ числа x и y имеют одинаковые знаки, а при $b<0$ противоположные.

Учитывая вышесказанное, получаем формулу:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

В скобках перед мнимой единицей берется знак плюс, если $b > 0$, и знак минус, если $b < 0$.

Пример 1. Вычислите $\sqrt{-3-4i}$.

Решение.

Воспользуемся полученной формулой:

$$\sqrt{-3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{3 + \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}}{2}}\right) = \pm(1-2i).$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{-7-24i}$.

Решение.

Пусть $\sqrt{-7-24i} = x + yi$, тогда

$$-7-24i=(x+yi)^2,$$
$$-7-24i=x^2-y^2+2xyi.$$

Составляем систему, приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x^2-y^2=-7, \\ 2xy=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\dfrac{144}{x^2}=-7, \\ y=-\dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+7x^2-144=0, \\ y=-\dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (\otimes)$$

Решим отдельно биквадратное уравнение:

$$x^4+7x^2-144=0.$$

Пусть $x^2=t, t>0$. Тогда

$$t^2+7t-144=0;$$
$$t_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+144\cdot 4}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{625}}{2}=\frac{-7\pm 25}{2};$$
$$t_1=9, \quad t_2=-16<0-\textit{не подходит};$$
$$x^2=9, \quad x_{1,2}=\pm 3;$$
$$(\otimes)\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2}=\pm 3, \\ y_{1,2}=\mp 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-7-24i}=\left[\begin{array}{l} -3+4i, \\ 3-4i. \end{array}\right.$$

Другой способ решения возможен после введения тригонометрической формы записи комплексного числа.

2.4. Решение линейных и квадратных уравнений в поле комплексных чисел

В области комплексных чисел верны те же формулы для решения линейных и квадратных уравнений, что и в области действительных чисел.

Пример 1. Решить уравнение: $(-2 - i)z = 3 + i$.

$$z=\frac{3+i}{-2-i}=\frac{(3+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)}=\frac{-6+3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{-7+i}{5}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

Пример 2. Решить уравнение: $x^2+4x+5=0$**.**

Решение.

Воспользуемся формулой для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2};$$
$$\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4}=[\textit{так как } \sqrt{-1}=i]=\pm 2i;$$
$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 2i}{2}=-2\pm i.$$

Пример 3. Решить уравнение: $iz^2-(3+2i)z+3-i=0$**.**

Решение.

$$z_{1,2}=\frac{3+2i\pm\sqrt{(3+2i)^2-4i(3-i)}}{2i}=\frac{3+2i\pm\sqrt{9+12i-4-12i-4}}{2i}=\frac{3+2i\pm 1}{2i};$$
$$z_1=\frac{4+2i}{2i}=\frac{2+i}{i}=\frac{(2+i)(-i)}{i\cdot(-i)}=\frac{-2i+1}{1}=1-2i;$$
$$z_2=\frac{2+2i}{2i}=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=\frac{-i+1}{1}=1-i.$$

Пример 4. Решить уравнение: $z^2-(2+i)z+2i=0$.

Решение.

$$z_{1,2}=\frac{2+i\pm\sqrt{(2+i)^2-4\cdot 2i}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{4+4i-1-8i}}{2}=\frac{2+i\pm\sqrt{3-4i}}{2}.$$

Вычислим $\sqrt{3-4i}$ **:**

$$\sqrt{3-4i}=x+yi;$$
$$3-4i=(x+yi)^2;$$
$$3-4i=x^2-y^2+2xyi.$$

Составляем систему, приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{4}{x^2} - 3 = 0, \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \\ y = -\dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (\otimes)$$

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

Пусть $x^2 = t,\ t > 0.$ *Тогда*

$$t^2 - 3t - 4 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2};$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = -1 < 0;$$

$$x^2 = 4,\ x = \pm 2;$$

$$(\otimes) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \mp 1; \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{2 + i + (2 - i)}{2} = 2;$$

$$z_2 = \frac{2 + i + (-2 + i)}{2} = i.$$

Пример 5. Решите уравнение

$$(2+i)x^2 - (5-i)x + (2-2i) = 0.$$

Решение.

По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{5-i \pm \sqrt{(5-i)^2 - 4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)} = \frac{5-i \pm \sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Извлекая корень квадратный из числа –2i, получаем $\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$.

Следовательно,

$$x_1 = \frac{5-i+1-i}{4+2i} = \frac{6-2i}{4+2i} = \frac{3-i}{2+i} = \frac{5-5i}{5} = 1-i;$$

$$x_2 = \frac{5-i-1+i}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{4-2i}{5} = 0{,}8-0{,}4i.$$

Упражнения

1. Произведите действия с комплексными числами в алгебраической форме:

а) $(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12}$; в) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

Ответ: а) 2 + i; б) $\frac{127}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$.

2. Вычислите

a) $\frac{(2-i)^2-(-1-i)^2}{(1+2i)^3+(2+2i)^3}$;

b) $\frac{(1-2i)^3+(2-i)^3}{(3+2i)^2-(2+i)^3}$;

c) $\frac{(2+i)^3-(1-2i)^3}{(1+2i)^3-(2+3i)^2}$;

d) $\frac{(2-i)^3-(1+i)^3}{(2+i)^3-(1-2i)^2}$.

3. Решите уравнения относительно действительных переменных x и y:

а) $(1 + 2i)\,x + (3 - 5i)\,y = 1 - 3i$;

б) $\frac{6x-yi}{5+2i}=\frac{15}{8x+3yi}$;

в) $2 + 5xi - 3yi = 14i + 3x - 5y$.

Ответ: а) $\left(-\frac{4}{11};\frac{5}{11}\right)$; б) (1;3); (-1;-3); $\left(\frac{3}{4};4\right)$; $\left(-\frac{3}{4};-4\right)$ в) (4; 2).

4. Найдите значения следующих многочленов:

а) $x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$ при $x = i$;

б) $2x^3 + 3\sqrt[3]{4}\,x^2y + 3\sqrt[3]{2}\,xy^2 + y^3$ при $x = 1 + i$, $y = -i\sqrt[3]{2}$;

в) $3x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 3y^3$ при $x = 1 + 2i$, $y = 2 + i$.

Ответ: а) 1; б) 2; в) $6 + 6i$.

Замечание. В примерах б) и в) необходимо сначала свернуть формулы куба суммы и куба разности соответственно.

5. Вычислите следующие квадратные корни:

а) $\sqrt{8+6i}$; б) $\sqrt{3-4i}$.

Ответ: а) $\pm(3+i)$; б) $\pm(2-i)$.

6. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2 + (5 - 2i)\,x + 5(1 - i) = 0$;

б) $x^2 + (1 - 2i)\,x - 2i = 0$;

в) $(2 + i)\,x^2 - (5 - i)\,x + 2 - 2i = 0$.

Ответ: а) $-2 + i$; $-3 + i$; б) $2i$; -1 в) $1 - i$; $0{,}8 - 0{,}4\,i$; б) $2i$; -1.

7. Решить уравнение

a) $z \cdot \overline{z} + 2(z + \overline{z}) = 3i + 1$;

b) $2z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 2 + i$;

c) $z \cdot \overline{z} + 2(z - \overline{z}) = 1 + 3i$;

d) $z \cdot \overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 1 + 3i$.

8. Решить систему в комплексных числах x и y

a) $\begin{cases} x + (1+2i)y = 1 - i \\ (1-i)x - (6-i)y = 4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2ix + (1-i)y = 3 - i \\ (1+i)x - (2-i)y = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 + i \\ (1-i)x + (6+i)y = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 - i \\ (1-i)x + (6-i)y = 2 \end{cases}$.

9. Найдите все комплексные числа, сопряженные своему кубу.

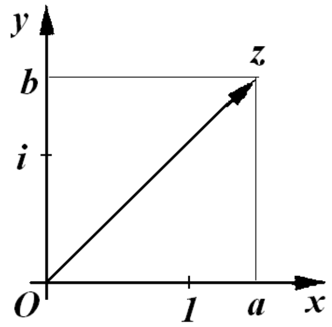
Ответ: 0; 1; -1; i; $-i$.

2.5. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная её конструкция, лучше всего – геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел неотделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей 0, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Ни Эйлер, ни Коутс не представляли себе геометрической интерпретации комплексных чисел. Представление о комплексных числах, как точках на комплексной плоскости, появилось лишь полвека спустя, в 1799 году в работе Каспара Весселя, опубликованной в трудах Датской Королевской Академии наук. Геометрическое представление комплексных чисел, иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806 году работы Жана-Робера Аргана, повторявшей независимо выводы Весселя. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать комплексное число не самой точкой z, а вектором $0z$, идущим в точку z из начала координат. При таком истолковании сложение и вычитание комплексных чисел совпадает с соответствующим операциями над векторами.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = a + bi$ точку плоскости с координатами $(a;b)$.



Полученное соответствие между всеми комплексными числами и всеми точками плоскости взаимно однозначно:

- каждому комплексному числу $z=a+bi$ соответствует одна точка плоскости с координатами $(a;b)$, и обратно;
- каждой точке плоскости с координатами $(a;b)$ соответствует единственное комплексное число $z = a + bi$.

Таким образом, через z мы будем одновременно обозначать и комплексное число и точку, изображающую это комплексное число.

Комплексное число $z=a+bi$ *называется комплексной координатой точки* $(a;b)$.

Поскольку при указанном соответствии действительные числа $z = a + 0i$ изображаются точками оси абсцисс, то ось Ox называется *действительной осью.* Ось Oy, на которой лежат чисто мнимые числа $z = 0 + bi$, называется *мнимой осью.* Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.*

Комплексное число $z = a + bi$ может также изображаться вектором с координатами a и b, идущим из начала координат в точку $(a;b)$.

Поскольку по определению модуля комплексного числа

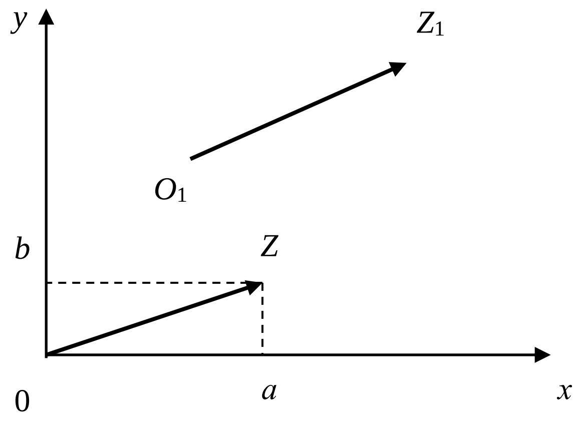
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

очевидно, что модуль комплексного числа равен длине вектора $\overline{OZ}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{O_1Z_1}$, равный вектору $\overline{OZ}$. Из курса геометрии известно, что равные векторы имеют равные координаты, поэтому координатами вектора $\overline{O_1Z_1}$ также являются числа a и b.

Вектору $\overline{O_1Z_1}$ сопоставим то же самое комплексное число $z = a + bi$, которое назовем *комплексной координатой вектора* $\overline{O_1Z_1}$.

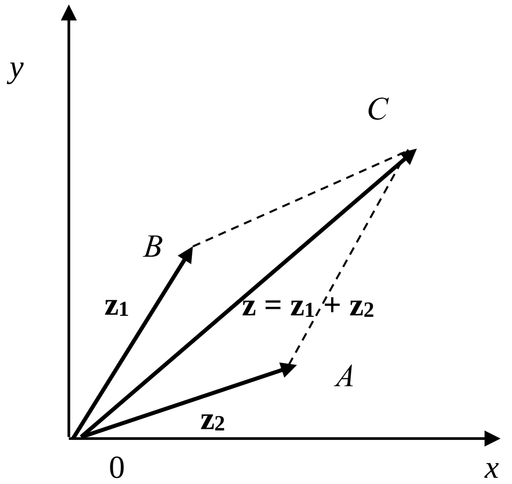
Таким образом, мы приходим к следующему определению: *комплексной координатой вектора* $\overline{AB}(a;b)$ называется комплексное число $z = a + bi$.



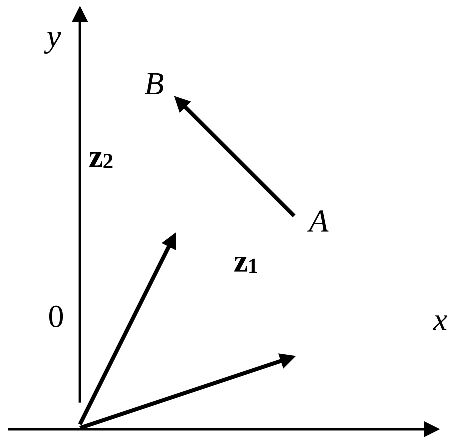
Так как при сложении и вычитании векторов их соответствующие координаты складываются и вычитаются, то же самое справедливо и для их комплексных координат z_1 и z_2.

Точнее, пусть векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ имеют комплексные координаты z_1 и z_2 , а вектор $\overline{OC}$ имеет комплексную координату $z = z_1 + z_2$. Геометрически это означает, что вектор **z** – это диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|\,z_1 + z_2\,| < |\,z_1\,| + |\,z_2\,|.$$



Пусть теперь z – комплексная координата вектора $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Тогда $z = z_2 - z_1$, так как числа z_2 и z_1 являются комплексными координатами точек A и B; поэтому комплексная координата вектора $\overline{AB}$ равна разности между комплексными координатами его конца и начала.



Пример. Найдите комплексную координату середины отрезка АВ, если комплексные координаты его концов равны z_1 и z_2 соответственно.

Решение.

Обозначим середину отрезка AB через O_1. Тогда

$OO_1 = OA + AO_1 = OA + \frac{1}{2}AB.$

Учитывая, что комплексная координата вектора AB равна $z_2 - z_1$, получим $z = z_1 + \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Задача 1. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$.

Решение.

Известно, что

$$|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

а это и есть, как известно из геометрии, формула расстояния между двумя точками z_1 $(a_1; b_1)$ и z_2 $(a_2; b_2)$.

Задача 2. Докажите, что равенство $|z - z_0| = R$ задает уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Решение.

Как известно из геометрии, окружность с центром в точке z_0 радиуса R представляет собой множество точек плоскости, удаленных от точки z_0 на расстояние R. Пользуясь результатами задачи 1, получаем: расстояние между точками z и z_0 равно $|z - z_0|$. Поэтому равенство $|z - z_0| = R$ задает уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Задача 3. Докажите, что если точка z_1 не совпадает с точкой z_2, то равенство $|z - z_1| = |z - z_2|$ задает уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящей через его середину.

Решение.

Все точки z_1, удовлетворяющие равенству

$$| z - z_1 | = | z - z_2 |,$$

равноудалены от точек z_1 и z_2 и поэтому, как это известно из геометрии, лежат на прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящей через его середину.

Обратно, все точки z этой прямой, очевидно, удовлетворяют равенству, следовательно, равенство

$$| z - z_1 | = | z - z_2 |$$

является уравнением указанной выше прямой.

Задача 4. Укажите, где на плоскости расположены точки, соответствующие комплексным числам z, для которых

$$1 < | z + 2 - 3i | \leq 2.$$

Решение.

Представим выражение $z + 2 - 3i$ в виде разности двух комплексных чисел:

$$z + 2 - 3i = z - (-2 + 3i).$$

Тогда становится ясно, что равенство $| z - (-2 + 3i) | = 2$ является уравнением окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом 2.

Неравенству $| z + 2 - 3i | \leq 2$ удовлетворяют внутренние точки указанного круга вместе с точками, лежащими на окружности

$$| z - (-2 + 3i) | = 2,$$

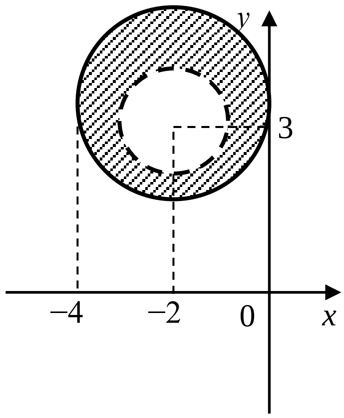
тогда как неравенству

$$1 < | z + 2 - 3i |$$

соответствует внешность круга радиуса 1, концентрического первому.

Нас интересуют точки, удовлетворяющие одновременно: двум этим условиям:

$$1 < | z + 2 - 3i | \leq 2,$$



поэтому искомая область является пересечением двух найденных областей и представляет собой кольцо, содержащее точки внешней ограничивающей окружности. Так как левое неравенство является строгим, точки внутренней ограничивающей окружности не входят в полученную область.

Задача 5. Укажите, где на плоскости расположены точки, соответствующие комплексным числам, удовлетворяющим условию:

$$|z| < |z - 2i|.$$

Решение.

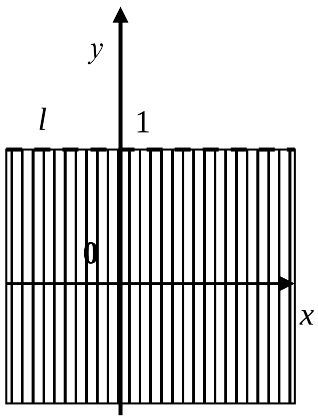
По задаче 3: равенство $|z - 2i| = |z|$ является уравнением прямой l, перпендикулярной отрезку AB (A (0; 0) и B (0; 2)) и проходящей через его середину, т.е. прямая l параллельна оси Ox и проходит через точку (1; 0), так как из равенств:

$$|z-2i|^2 = |x+(b-2)i|^2 = x^2+(b-2)^2;$$

$$|z|^2 = |x+yi|^2$$

следует равенство:$(y - 2)^2 = y^2$, а значит, $y = 1$, т.е. $z = x + i$.

Поэтому неравенству удовлетворяют точки полуплоскости, лежащие ниже прямой l. Точки самой прямой l не входят в указанную область, так как данное неравенство строгое.



Задача 6. Изобразите на плоскости комплексные числа z, удовлетворяющие условию: $z^3 = \frac{1-i}{1+i}$.

Решение.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1+1} = -\frac{2i}{2} = -i.$$

Следовательно, $z^3 = -i = i^3$. Таким образом, $z^3 = -i = i^3$;

$(z - i)\,(z^2; + zi + i^2) = 0;$

$(z - i)\,(z^2; + zi - 1) = 0;$

$z_1 = i;\ z_2 = \frac{-i+\sqrt{3}}{2};\ z_3 = \frac{-i-\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$z_1 = i;\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

Этим числам соответствуют три точки: $A(0;1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ Они расположены на единичной окружности и делят ее на три равные части.

Задача 7. Изобразите на плоскости комплексные числа z, удовлетворяющие условию: $z^2 = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2.$$

Поэтому $z^2=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2$, значит, $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $\quad z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Получили две точки: $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Задача 8. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\frac{|z+1|}{|z-2|}\geq 0{,}5$.

Решение.

Данное неравенство равносильно выполнению двух условий:

$$|z+1|\geq 0{,}5|z-2| \text{ и } z\neq 2.$$

Если $z = x + yi$, где x и y − действительные числа, то получаем следующие неравенства:

$$(x+1)^2+y^2\geq\frac{(x-2)^2+y^2}{4};$$

$$x^2+2x+1+y^2\geq\frac{1}{4}x^2-x+1+\frac{1}{4}y^2;\ \frac{3}{4}x^2+3x+\frac{3}{4}y^2\geq 0;\ x^2+4x+y^2\geq 0;$$

$$(x+2)^2+y^2\geq 4.$$

Искомая область лежит вне круга с центром в точке (−2;0) радиуса 2, включая границу круга и исключая точку (2; 0).

Задача 9. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\frac{|z+2i|}{|z-i|}\geq 2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно выполнению двух условий:

$$|z+2i|\geq 2|z-i| \text{ и } z\neq i.$$

Если $z = x + yi$, то получаем следующие неравенства:

$x^2 + (y + 2)^2 \geq 4(x^2 + (y - 1)^2)$;

$x^2 + y^2 + 4y + 4 \geq 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4$;

$3x^2 - 12y + 3y^2 \leq 0$

$x^2 + y^2 - 4y \leq 0$; $x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$.

Искомая область − круг с центром в точке (0; 2) радиуса 2,

Задача 10. Изобразить на комплексной плоскости числа, модуль которых равен 1, т. е. $|z| = 1$.

Решение.

Запишем комплексное число в алгебраической форме $z = x + yi$. По условию задачи интерес представляют те числа, модуль которых равен 1, т. е. $|x + yi| = 1$. По определению модуля комплексного числа $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2 + y^2 = 1$. Данное уравнение определяет на плоскости окружность с центром в точке с координатами (0; 0) и радиусом, равным 1.

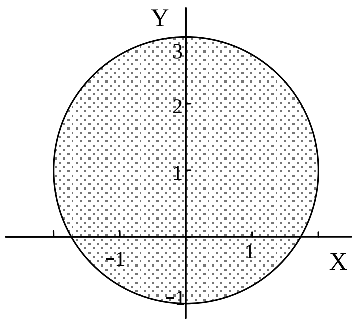
Задача 11. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенству $|z - i| \leq 2$.

Решение.

Запишем комплексное число в общем виде $z = x + yi$. По условию задачи, интерес представляют те числа, модуль которых меньше или равен 2, т. е. $|x + yi - i| \leq 2$. Сгруппируем под знаком модуля слагаемые, содержащие i: $|x + (y - 1)i| \leq 2$. По определению модуля комплексного числа:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

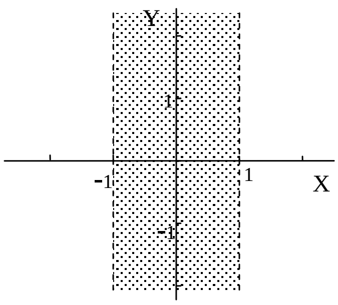
Данное уравнение определяет на плоскости круг с центром в точке с координатами (0; 1) и радиусом равным 2.



Задача 12. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенству $|\operatorname{Re} z| < 1$.

Решение.

Re z – действительная часть числа z, $\Rightarrow$ неравенство можно записать как $|x| < 1$, или $\begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$ или $-1 < x < 1$. Эта система определяет на плоскости полосу, ограниченную прямыми $x = 1$ и $x = -1$. Причем, обе прямые нарисованы штрихами, так как сами прямые в искомую область не входят из-за строгого знака неравенства.

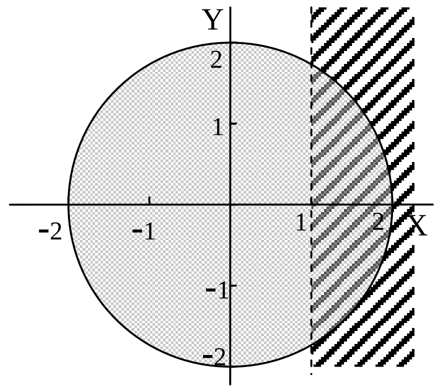


Задача 13. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} |z| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

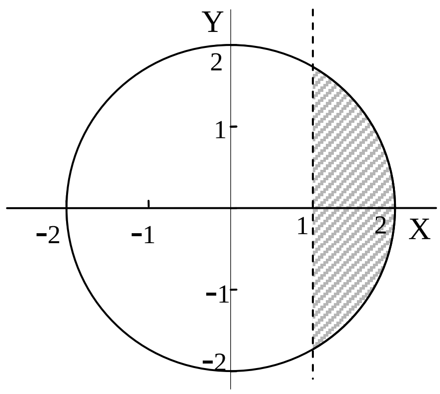
Решение.

Как показано в предыдущих примерах, неравенство $|z| \le 2$ определяет на плоскости круг с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 2. Неравенство $\operatorname{Re} z > 1$, определяет полуплоскость, ограниченную прямой $x = 1$ и находящуюся от нее справа. Так как неравенство

$\operatorname{Re} z > 1$ строгое, то сама прямая $x = 1$ в область не входит и штрихами пунктиром. Обе эти области изображены на рисунке.



Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей.

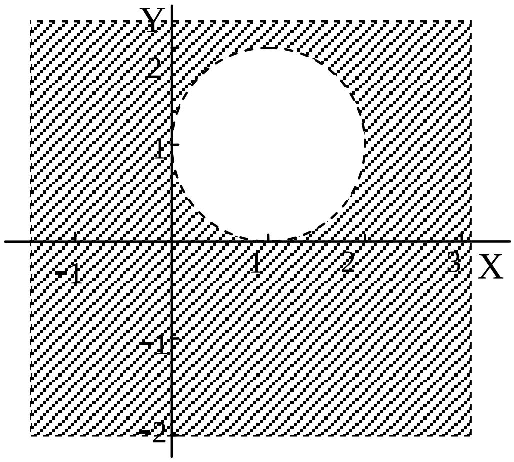


Задача 14. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие системе неравенств

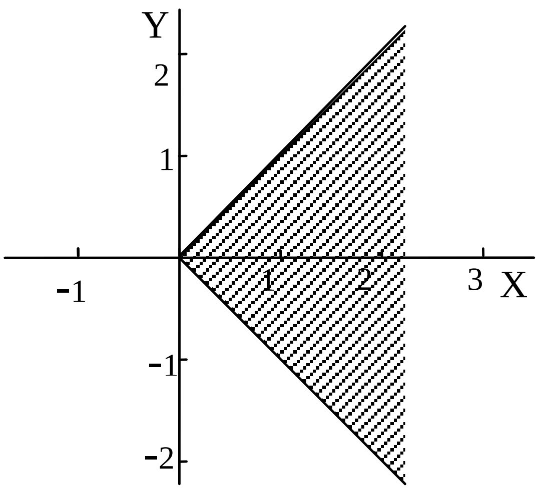
$$\begin{cases} |z-1-i| > 1 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Решение.

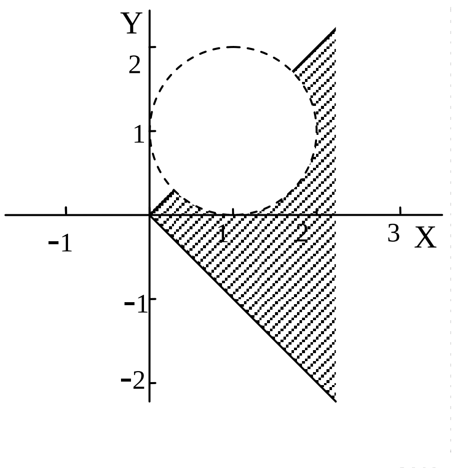
Неравенство $|z-1-i| > 1$ определяет область вне круга с центром в точке (1; 1) и радиусом 1. Так как неравенство строгое, то сама окружность в область не входит и изображена штрихами.



Двойное неравенство $-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ определяет на плоскости область, в которую входят комплексные числа с аргументами в интервале от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. Эта область представляет собой угол.



Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей.

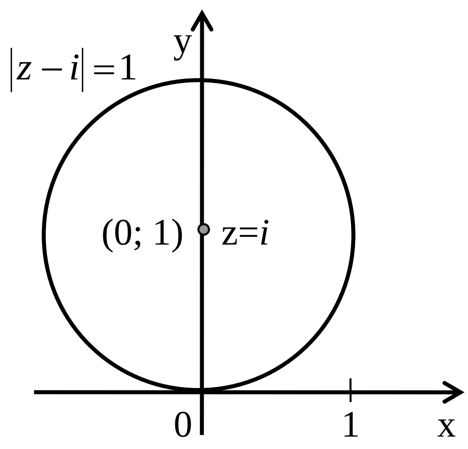


Задача 15. Изобразите на плоскости XOY множество, всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих условию:

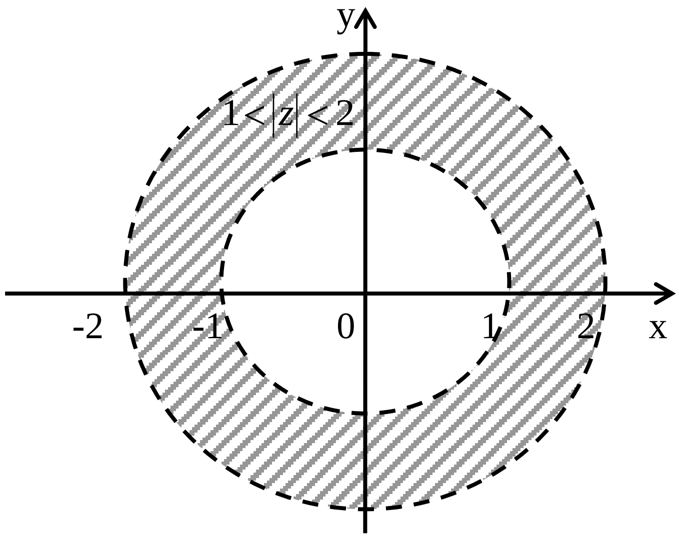
а) $|z-i|=1$; б) $1<|z|<2$; в) $arqz=\dfrac{\pi}{3}$; г) $|z+i|>|z-i|$; д) $\begin{cases} 1 \le |z+1| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{2} < arqz < \pi. \end{cases}$

Решение.

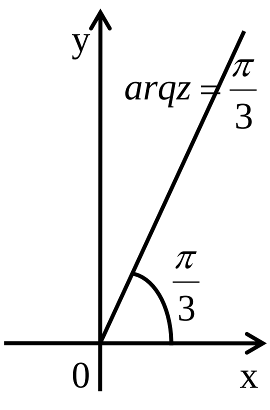
а) $|z-i|=1$. Для каждого z число $|z-i|$ равно расстоянию между точкой z и точкой i. Поэтому заданному условию $|z-i|=1$ удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке $(0;1)$.



б) $1<|z|<2$. Для каждого z число $|z|=|z-0|$ равно расстоянию между точкой z и началом координат. Поэтому условию $1<|z|<2$ удовлетворяют те и только те точки, которые лежат внутри кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$ соответственно.



в) $arqz = \frac{\pi}{3}$. Из определения главного аргумента комплексного числа следует, что множество точек z, удовлетворяющих данному соотношению, является открытым лучом Oz, образующем угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox.

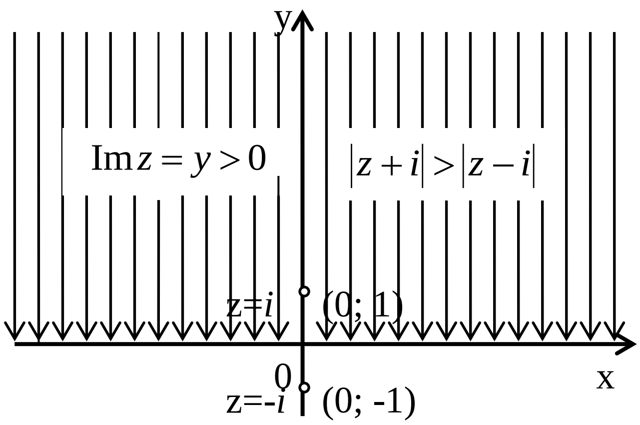


г) $|z+i| > |z-i|$. Пусть $z = x + iy$. Тогда данное соотношение перепишется в виде $|x + (y+1)i| > |x + (y-1)i|$ или $x^2 + (y+1)^2 > x^2 + (y-1)^2$.

Отсюда находим: $(y+1)^2 > (y-1)^2$, т.е. $(y+1-y+1)(y+1+y+1) > 0$.

Таким образом, $y>0$, и, следовательно, исходному соотношению удовлетворяют только те комплексные числа, для которых $\operatorname{Im} z>0$. Такие точки заполняют всю верхнюю полуплоскость.

Этот ответ можно получить из геометрических соображений, учитывая, что ось OX есть перпендикуляр к отрезку, соединяющий точки $(0;-1)$ и $(0;1)$, восстановленный из его середины.



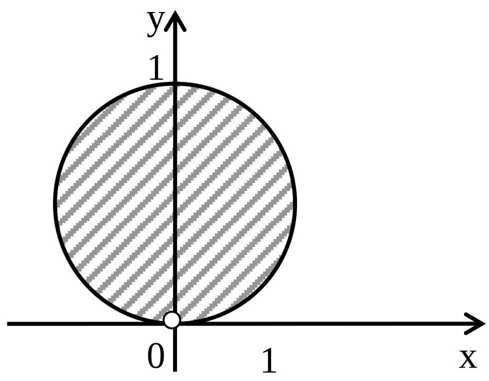
Задача 16. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) \geq 1$.

Решение.

Положим $z=x+yi$.

Тогда $\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}=\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}=\frac{3x+iy}{(x+iy)(x-iy)}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$.

Неравенство $\frac{y}{x^2+y^2} \geq 1$ при $x^2+y^2 \neq 0$ равносильно неравенству $x^2+y^2-y \leq 0$ или $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$. Последнее неравенство задает круг с центром в точке (0; 0,5) и радиусом 0,5 включая границу круга. Вследствие ограничения $x^2+y^2 \neq 0$ точка (0; 0) не принадлежит заданному множеству.



Задача 17. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}\,.$$

Решение.

Представим число z как $z = x + yi$. Тогда

$$(1-i)z - i = (x+iy)(1-i) - i = (x+y) + (y-x-1)i;$$

$$|(x+y)+(y-x-1)i| = \sqrt{(x+y)^2 + (y-x-1)^2} = \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}\,.$$

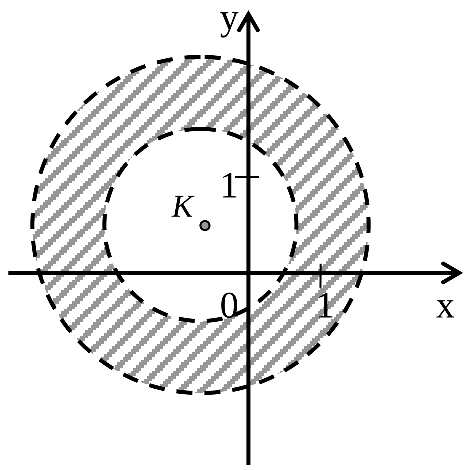
По условию, $\sqrt{2} < \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1} < 2\sqrt{2}$, откуда

$$2 < 2x^2+2y^2+2x-2y+1 < 8;$$

$$1 < x^2+y^2+x-y+0{,}5 < 4;$$

$$1 < (x+0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 < 4\,.$$

Левая часть двойного неравенства задает область, лежащую вне круга с центром в точке K(–0,5; 0,5) и радиусом 1. правая часть задает круг с центром в точке K и радиусом 2. В каждом случае граница не включается в заданное множество. Искомое множество точек изображено на рисунке.



Задача 18. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 25$, найдите такие, что $|z-7|+|z-7i|$ принимает наименьшее значение.

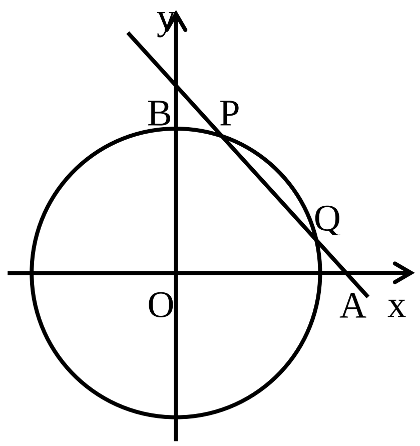
Решение.

<u>I способ.</u>

Пусть $z = x + yi$. Тогда $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$.

Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ задает на комплексной плоскости окружность с центром в точке O(0; 0) и радиусом 5. С геометрической точки зрения величина $|z-7|+|z-7i|$ представляет собой сумму расстояний от точки, соответствующей комплексному числу z, до точек A(7; 0) B(0; 7), соответствующих числами 7 и 7i. Из рисунка видно, что окружность с центром в O и радиусом 5 пересекает отрезок AB в двух точках P и Q. Эти точки и будут соответствовать тем комплексным числам, для которых величина $|z-7|+|z-7i|$ принимает наименьшее значение.

Действительно, для точек P и Q значение $|z-7|+|z-7i|$ равно длине отрезка AB, а для любой точки N окружности, отличной от P и Q, в силу неравенства треугольника справедливо соотношение AN+BN>AB.



Найдем координаты точек P и Q. Эти точки лежат на прямой AB, которая задается уравнением $y+x=7$. Решим систему

$$\begin{cases} x+y=7, \\ x^2+y^2=25. \end{cases}$$

Так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то перейдем к системе

$$\begin{cases} x+y=7, \\ xy=12. \end{cases}$$

Уравнение $t^2-7t+12=0$ имеет корни 3 и 4, поэтому решениями системы являются пары (3; 4) и (4; 3). Таким образом, точкам P и Q соответствуют числа $3+4i$ и $4+3i$.

<u>II способ.</u> Пусть $z=x+yi$. Тогда $x^2+y^2=25$ (см. I способ);

$$|z-7|=|(x-7)+yi|=\sqrt{(x-7)^2+y^2}=\sqrt{x^2+y^2-14x+49}=\sqrt{74-14x}.$$

$$|z-7i|=|x+(y-7)i|=\sqrt{x^2+(y-7)^2}=\sqrt{x^2+y^2-14y+49}=\sqrt{74-14y}.$$

Найдем пары (x;y), для которых достигается минимум функции $\varphi(x;y)=\sqrt{74-14x}+\sqrt{74-14y}$ при условии $x^2+y^2=25$. Поскольку функция $\varphi(x;y)$ принимает не отрицательное значения при всех допустимых x и y, вместо минимума функции φ можно рассматривать минимум функции

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x;y)=74-7(x+y)+\sqrt{(74-14x)(74-14y)}.$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$148-14(x+y)+2\sqrt{5476-74\cdot 14(x+y)+196xy}$, так как $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, то $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=(x+y)^2-25$, откуда

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x;y)=74-7(x+y)+\sqrt{98(x+y)^2-74\cdot 14(x+y)+3026}.$$

Произведем замену $t=7(x+y)$ и найдем значение t, для которых достигается минимум функции $g(t)=74-t+\sqrt{2t^2-148t+3026}$ или $g(t)=37+(37-t)+\sqrt{2(t-37)^2+288}$, или после замены $p=t-37$ – те значения p, при которых минимально выражение $37-p+\sqrt{2p^2+288}$.

Исследуем функцию $f(p)=37-p+\sqrt{2p^2+288}$ с помощью производной. Имеем $f'(p)=\dfrac{2}{\sqrt{2p^2+288}}-1$; $f'(p)=0$, если $\sqrt{2p^2+288}=2p$, т.е. если $2p^2+288=4p^2$, а $p\geq 0$. Последнее равенство выполняется при $p=12$.

Нетрудно убедиться в том, что если $p<12$, то $f'(p)<0$, т.е. $f(p)$ убывает, а если $p>12$, то $f'(p)>0$, т.е. $f(p)$ возрастает. При $p=12$ функция $f(p)$ принимает наименьшее значение.

Значению $p=12$ соответствует $t=49$, при $x+y=7$. Отсюда, учитывая соотношение $x^2+y^2=25$, находим $x=3$, $y=4$ или $x=4$, $y=3$ и получаем окончательный ответ.

Ответ: $3+4i$ и $4+3i$.

<u>Замечание.</u> Конечно, II способ более трудоемкий, но вместе с тем и более универсальный. В частности, если бы на отрезке АВ не нашлось ни одной точки, удовлетворяющей заданному в условии равенству, то решение I способом было бы вообще невозможно.

Задача 19. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\mathrm{Im}\dfrac{2}{\bar{z}-1}\geq 1$.

Решение.

Представим z в виде $x+iy$ и преобразуем заданную дробь:

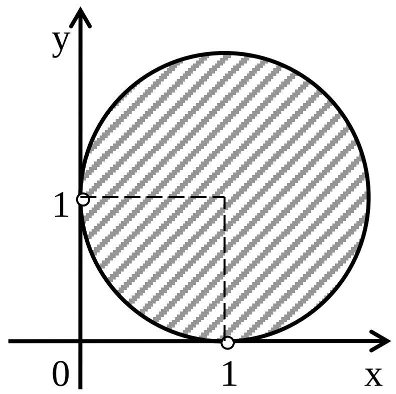
$$\frac{2}{\bar{z}-1}=\frac{2}{x-iy-1}=\frac{2}{(x-1)-iy}=\frac{2((x-1)+iy)}{((x-1)-iy)((x-1)+iy)}=\frac{2(x-1)+2iy}{(x-1)^2+y^2}.$$

Мнимая часть дроби равна $\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$.

Неравенство $\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}\ge 1$ равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2-2y\le 0,\\(x-1)^2+y^2-2y\ne 0.\end{cases}$$

Неравенство $(x-1)^2+y^2-2y\le 0$ перепишем в виде $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$. Это соотношение задает круг с центром в точке (1; 1) и радиусом 1. Точка (1;0) принадлежит кругу, однако ее координаты не удовлетворяют второму условию системы. Полученное множество изображено на рисунке.



Задача 20. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию: $|z|=|z-2i|$, найдите число с наименьшим модулем.

Решение.

Воспользуемся геометрическим смыслом модуля комплексного числа. Как известно, для комплексных чисел z и w величина $|z-w|$ равна расстоянию между точками комплексной плоскости, соответствующими числами z и w. Точки, соответствующие числам z, для которых выполняется равенство $|z|=|z-2i|$, равноудалены от точек (0; 0) и (0; 2) комплексной плоскости, а, следовательно, образуют прямую $y=1$. Среди точек прямой наименее удаленной от начала координат является точка (0; 1). Она соответствует числу $z = i$ – числу с наименьшим модулем, удовлетворяющему заданному уравнению.

Задача 21. Пусть М – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что $\left|iz_1 + \sqrt{2}\right| = 0{,}5$; К – множество точек z_2 комплексной плоскости вида $z_2 = iz_1$, где $z_1 \in M$. Найдите расстояние между фигурами М и К.

Решение.

I способ.

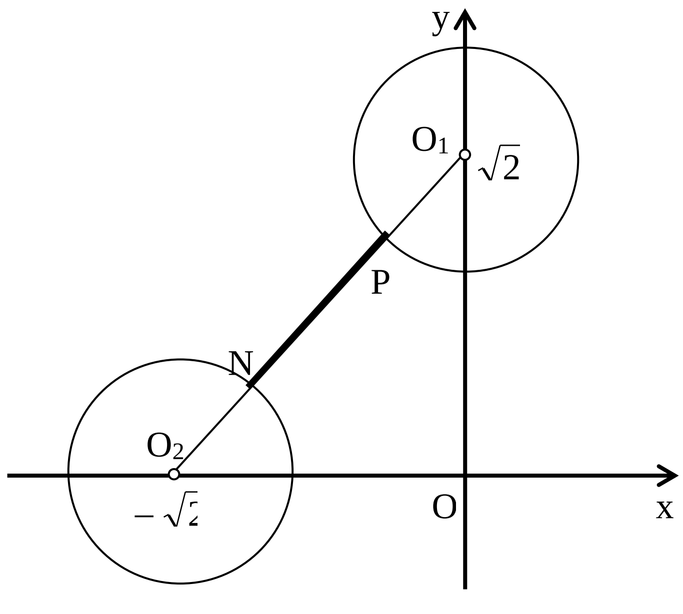
Пусть $z_1 = a + bi$; тогда $\left|iz_1 + \sqrt{2}\right| = \left|ai - b + \sqrt{2}\right| = 0{,}5$, откуда

$$(\sqrt{2} - b)^2 + a^2 = 0{,}25.$$

Множество точек М комплексной плоскости, удовлетворяющих данному условию, есть окружность с центром в точке O_1 (0; $\sqrt{2}$) и радиусом 0,5.

По условию, $z_2 = iz_1$, т.е. $\left|z_2 + \sqrt{2}\right| = 0{,}5$. Полагая $z_2 = a + bi$, имеем $\left|a + \sqrt{2} + bi\right| = 0{,}5$ и $(a + \sqrt{2})^2 + b^2 = 0{,}25$.

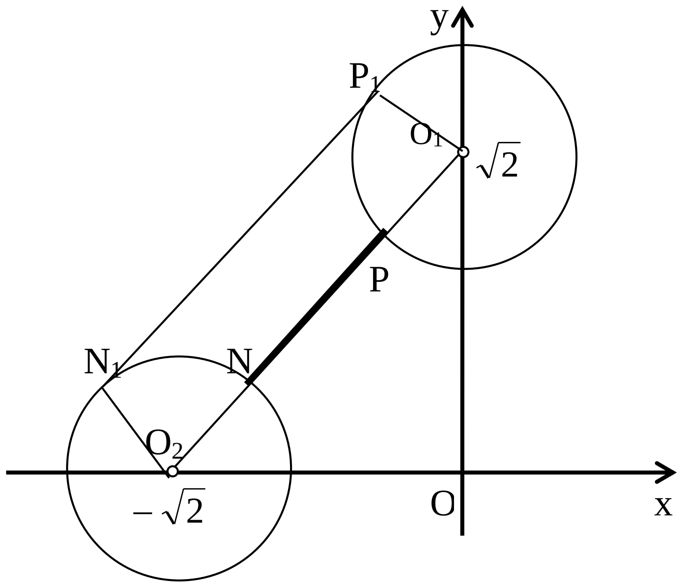
Множество К точек комплексной плоскости, удовлетворяющих этому условию, есть окружность с центром в точке O_2 ($-\sqrt{2}$; 0) и радиусом 0,5. Так как окружности М и К не имеют общих точек, то расстоянием между ними является длина отрезка PN линии центров, т.е. $PN = O_1O_2 - 2r = 2 - 1 = 1$.



Замечание. Геометрическое обоснование того, что длина отрезка PN есть расстояние между данными фигурами, весьма просто.

Действительно, возьмем на окружностях K и M такие точки N_1 и P_1 соответственно, что $N_1 \neq N_2$, $P_1 \neq P_2$.

Для ломанной $O_1P_1N_1O_2$ и прямой O_1O_2 выполняется неравенствO_1P_1 + P_1N_1P+ N_1O_2 > O_1P+ PN+ NO_2. Вычитая из обеих частей неравенства сумму радиусов, получаем P_1N_1 > PN.



II способ.

Запишем неравенства $\left|iz_1 + \sqrt{2}\right| = \left|i \cdot \left(z_1 - \sqrt{2}\right)\right| = |i| \cdot \left|z_1 - \sqrt{2}\right| = \left|z_1 - \sqrt{2}\right|$. Таким образом, $\left|z_1 - \sqrt{2}\right| = 0{,}5$. Это значит, что расстояние от точек фигуры M до точки O_1 (0; $\sqrt{2}$) постоянно и равно 0,5. фигура M – окружность с центром в точке O_1 и радиусом 0,5. Условие $z_2 = iz_1$ означает, что множество K получено поворотом точек множества M на угол 90^0 вокруг начала координат, т.е. представляет собой окружность с центром в точке O_2 ($-\sqrt{2}$; 0) и радиусом 0,5. Дальнейшие рассуждения такие же, как при решении I способом.

Задача 22. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию $|zi - 3i + 4| \leq |i|$.

Решение.

Так как $|i|=1$, а $|zi-3i+4|=|i\cdot(z-3-4i)|=|i|\cdot|z-(3+4i)|=|z-(3+4i)|\le 1$. Это круг с центром в точке А (3; 4) и радиусом $r=1$.

Поскольку ОА= 5, $OA-r\le|r|\le OA+r$, имеем $4\le|z|\le 6$. Среди точек круга существует точка z_0, для которой $|z_0|=6$. Это точка пересечения границы круга и продолжения отрезка ОА.

Задача 23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right|=1,\\ \dfrac{|z+2i|}{|z-1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Решение.

Так как $\left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right|=\dfrac{|z+2i|}{|z+4i|}=1$, то $|z+2i|=|z+4i|$. Это множество – серединный перпендикуляр к отрезку АВ, где А (0; 2), В (0; 4) – точки, соответствующие числам $-2i$ и $-4i$. Уравнение этого перпендикуляра $y=-3$. Из второго уравнения системы имеем $\sqrt{2}|z+2i|=|z-1|$.

Пусть $z=x+yi$, тогда $2\left(x^2+(y+2)^2\right)=(x-1)^2+y^2$. Так как $y=-3$ для каждой из искомых точек, то $2x^2+2=x^2-2x+1+9$; $x^2+2x-8=0$, корнями этого уравнения являются числа 2 и – 4. системе уравнений удовлетворяют 2 числа: $z_1=2-3i$ и $z_2=-4-3i$.

Ответ: $z_1=2-3i$; $z_2=-4-3i$.

Задача 24. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,\dfrac{3}{z}\ge \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}-1\right)$.

Решение.

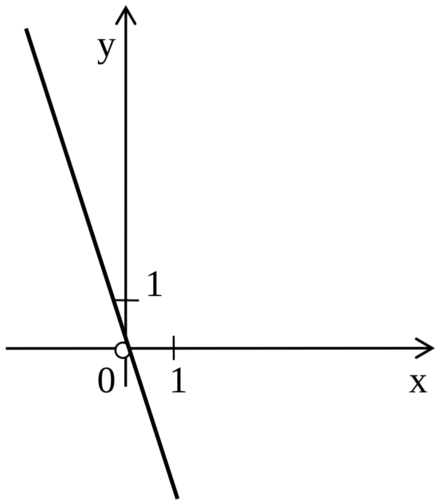
Пусть $z=x+yi$, тогда $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ и, значит,

$$\mathrm{Re}\,\frac{3}{z}=\frac{3x}{x^2+y^2},\ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Исходное неравенство перепишется так: $\frac{3x}{x^2+y^2} \geq \frac{-y}{x^2+y^2}$. Последнее неравенство можно заменить системой двух условий:

$$3x \geq -y \text{ и } x^2+y^2 \neq 0, \text{ или } y \geq -3x \text{ и } x^2+y^2 \neq 0.$$

Искомое множество изображено на рисунке. Отметим, что граница множества (прямая $y=-3x$) принадлежит ему за исключением точки (0; 0).



Задача 25. Множество точек комплексной плоскости определяется условием $|z-3-4i| \leq 1$. В каких пределах изменяется $\operatorname{Im} z : \operatorname{Re} z$.

Решение.

Множество точек, заданное условием $|z-3-4i| \leq 1$, определяется на комплексной плоскости круг с центром в точке $(3;4)$ и радиусом 1. такой круг в системе координат xOy задается неравенством $(x-3)^2+(y-4)^2 \leq 1$.

Пусть $z=x+yi$, тогда $\operatorname{Im} z = y$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z : \operatorname{Re} z = \frac{y}{x}$. Задача сводиться к определению границ, в которых может изменяться соотношение $\frac{y}{x}$ при условии $(x-3)^2+(y-4)^2 \leq 1$. Вопрос может быть сформулирован так: при каких значениях c система

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2 \le 1, \\ \dfrac{y}{x} = c. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Последняя система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} y = cx, \\ (x-3)^2 + (cx-4)^2 \le 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = cx, \\ (c^2+1)x^2 - 2(3+4c)x + 24 \le 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решения тогда, когда имеет решение квадратное неравенство $(c^2+1)x^2 - 2(3+4c)x + 24 \le 0$. Так как коэффициент при x^2 положителен, то оно имеет решения, если дискриминант квадратного трехчлена в его левой части неотрицателен. Имеем

$$\frac{D}{4} = (3+4c)^2 - 24(c^2+1) = -8c^2 + 24c - 15 \ .$$

$$\frac{D}{4} \ge 0 \text{ при } \frac{1}{4}\left(6-\sqrt{6}\right) \le c \le \frac{1}{4}\left(6+\sqrt{6}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(6-\sqrt{6}\right) \le \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \le \frac{1}{4}\left(6+\sqrt{6}\right)$.

Упражнения

Определить геометрическое место точек (построить и описать)

a) $\begin{cases} 1 < |z-2i| \le 2 \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \pi \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 1 < |z-2i+3| \le 3 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2 < |z+3i| \le 4 \\ 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2 < |z + 1 + 4i| \le 3 \\ \pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$.

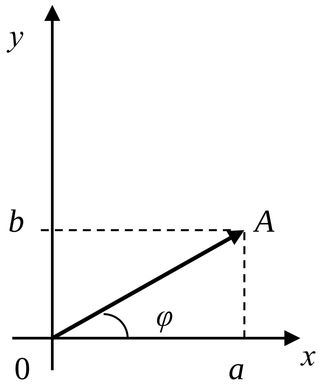
2.6. Тригонометрическая форма комплексного числа, связь с алгебраической формой

Запись комплексного числа z в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* этого числа.

Существует и другая, так называемая, тригонометрическая форма записи комплексных чисел, отличных от нуля, которая часто оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Пусть вектор ***OA*** задается на комплексной плоскости числом

$$z = a + bi.$$



Обозначим через φ угол между положительной полуосью Ox и вектором OA (угол φ считается положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае).

Обозначим длину вектора OA через r. Тогда $r = | z |$. Обозначим также

$$a = r\cos\varphi = | z |\cos\varphi\,;\; b = r\sin\varphi = | z |\sin\varphi\,.$$

Тогда

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Запись отличного от нуля комплексного числа z в виде

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

называется *тригонометрической формой* комплексного числа z. Число r называется *модулем* комплексного числа z, а число φ называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается $Arg\, z$.

Очевидно, что у комплексного числа z имеется бесконечно много аргументов: если φ_0 − какой-либо аргумент числа z, то все остальные можно найти по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi,\ n \in \mathbf{Z}.$$

*Для комплексного числа $z = 0$ аргумент и тригонометрическая форма не определяются***.**

Из равенства (1) находим:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом, аргументом отличного от нуля комплексного числа $z = a + bi$ является любое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Среди всех аргументов комплексного числа z всегда есть один и только один, удовлетворяющий неравенствам:

$$0 \le \varphi < 2\pi.$$

Это означает, что мы можем однозначно определить аргумент любого отличного от нуля комплексного числа.

Значение φ аргумента комплексного числа z, удовлетворяющее неравенствам $0 \le \varphi < 2\pi$ называется главным и обозначается $\arg z$.

Аргументы *Arg z* и *arg z* связаны равенством:

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k,$$

где $k \in \boldsymbol{Z}$, $0 \leq arg\ z < 2\pi$.

Разделив почленно второе из равенств системы на первое, получим равенство:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}.$$

Формула (6) является следствием системы, поэтому все аргументы комплексного числа $z = a + bi$ удовлетворяют данному равенству, но не все решения φ последнего уравнения являются аргументами числа z.

Пример 1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i$

Решение.

1. По формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ найдём модуль числа:

$$a = 1; \qquad b = 1; \qquad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2. По формулам $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ найдём аргумент:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2. Найти главное значение аргумента числа $z = -1 + i$.

Решение.

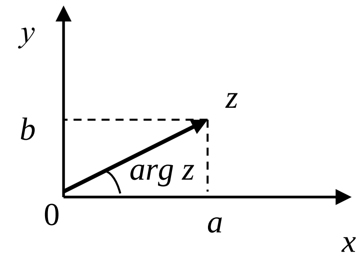
Тогда $tg\ \varphi = -1$, следовательно, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $\varphi = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где k − любое целое число. Так как данное комплексное число z лежит во второй четверти, то аргументами z являются числа из второй серии решении, т.е.

$$Arg\,(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k - \text{целое число.}$$

Покажем, что главное значение аргумента отличного от нуля комплексного числа $z = a + bi$ можно найти по формулам:

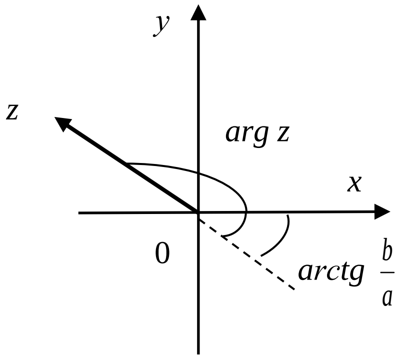
$$\arg z = \left[\begin{array}{ll} arctg\dfrac{b}{a}; & a > 0,\ b \ge 0; \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi; & a < 0; \\ arctg\dfrac{b}{a} + 2\pi; & a > 0,\ b < 0. \end{array}\right.$$

Рассмотрим три случая.



<u>Первый случай: $a > 0$, $b \ge 0$.</u>

Если $a > 0$, $b \ge 0$, то точка z лежит в первой четверти. При этом $\arg z = arctg\dfrac{b}{a}$

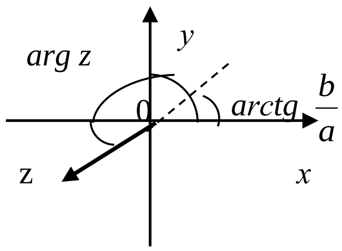


<u>Второй случай: $a < 0$.</u>

Если $a < 0$, то точка z лежит либо во второй, либо в третьей четверти.

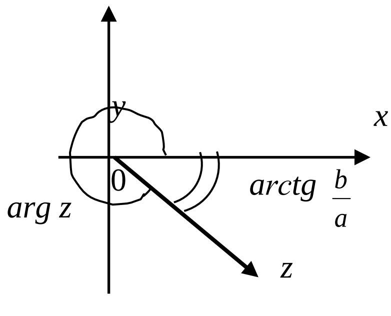
Если точка z лежит во второй четверти, то $b \ge 0$ и $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\dfrac{b}{a} \le 0$

Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{b}{a} + \pi$.



Если точка z лежит в третьей четверти, то $b < 0$ и $0 < arctg\dfrac{b}{a} < \dfrac{\pi}{2}$

Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{b}{a} + \pi$.



<u>Третий случай: $a > 0$, $b < 0$.</u>

Если $a > 0$, $b < 0$, то точка z расположена в четвертой четверти.

Тогда $-\frac{\pi}{2} < arctg\frac{b}{a} < 0$. Поэтому $\arg z = arctg\frac{b}{a} + 2\pi$.

<u>В случае, когда $a = 0$,</u> получаем $z = bi$. Очевидно, что в этом случае

$$\arg(bi) = \left[\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2}; & b > 0; \\ \frac{3\pi}{2}; & b < 0. \end{array}\right.$$

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число

$$z=1.$$

Решение.

Для числа $z = 1$ $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ и по формуле находим

$$\begin{cases} \cos\varphi = 1, \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $\varphi = 0$. В итоге: $1 = \cos 0 + i\sin 0$.

Пример 4. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -i.$$

Решение.

Для него $a = 0$, $b = -1$. Следовательно, $\rho = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ и система имеет вид:

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0, \\ \sin\varphi = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})$.

Пример 5. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -1.$$

Решение.

Для числа $z = -1$ $a = -1$, $b = 0$. Следовательно, $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ и система имеет вид

$$\begin{cases} \cos\varphi = -1, \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi .$$

Получаем $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

Пример 6. Представить в тригонометрической форме число

$$z = 1 + i.$$

Решение.

Для него $a = 1$, $b = 1$. Следовательно, $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и по системе

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} .$$

Значит, $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Пример 7. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -5 + 7i.$$

Решение.

Для него $a = -5$, $b = 7$. Следовательно, $\rho = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ и система принимает вид

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{74}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{74}}. \end{cases}$$

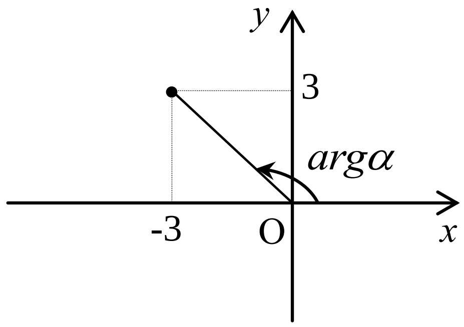
Решением этой системы будет $\varphi = \pi - \arccos\frac{5}{\sqrt{74}}$. Тогда

$$-5+7i=\sqrt{74}(\cos(\pi-\arccos\frac{5}{\sqrt{74}})+i\sin(\pi-\arccos\frac{5}{\sqrt{74}})).$$

Пример 8. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$\alpha=-3+3i.$$

Решение.



Используя формулу, находим модуль данного числа:

$$|\alpha|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}.$$

$$\cos(Arg\alpha)=\frac{a}{|\alpha|}=\frac{(-3)}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(Arg\alpha)=\frac{b}{|\alpha|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

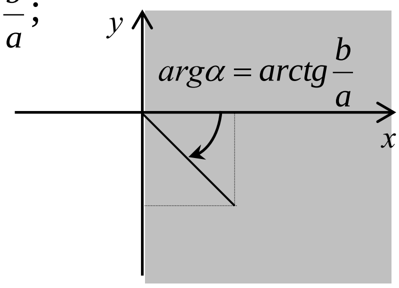
Так как точка, изображающая данное число, лежит во II четверти, то $\arg\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и, следовательно, $Arg\alpha=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\quad(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

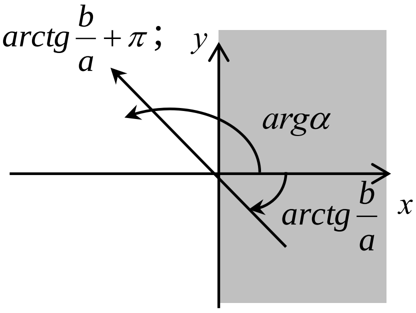
$$\arg\alpha=\begin{cases}arctg\frac{b}{a}, & x>0;\\ arctg\frac{b}{a}+\pi, & x<0,\quad y\geq 0;\\ arctg\frac{b}{a}-\pi, & x<0,\quad y<0.\end{cases}$$

В самом деле, так как главное значение $arctg\frac{b}{a}$ лежит между $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{\pi}{2}$, то:

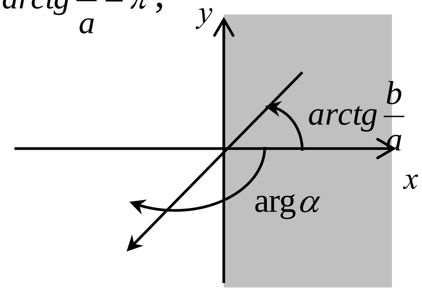
1) если точка α лежит в I или IV четверти $(x>0)$, то и $\arg\alpha = arctg\dfrac{b}{a}$;



2) если точка α лежит в II четверти $(x<0; y\geq 0)$, то и $\arg\alpha = arctg\dfrac{b}{a}+\pi$;



3) если точка α лежит в III четверти $(x<0; y<0)$, то и $\arg\alpha = arctg\dfrac{b}{a}-\pi$;



Пример 9. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$\alpha = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Решение.

Вычислим модуль: $|\alpha| = \sqrt{\left(-\sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^2} = 1$.

Так как $x = -\sin\dfrac{\pi}{8} < 0$, $y = -\cos\dfrac{\pi}{8} < 0$, то число α лежит в III четверти, поэтому

$$\arg\alpha = arctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) - \pi = arctg\left(ctg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right) - \pi = arctg\left(ctg\frac{3\pi}{8}\right) - \pi = \frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8}$$

Следовательно, $Arg\alpha = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Задача 1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $1+i$; б) i; в) 2; г) $-i$; д) -3; е) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$; ж) $\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Решение.

Так как тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда:

а) В комплексном числе $z = 1+i$: $a = 1, b = 1$.

Тогда $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4},$$

Поэтому $z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$

б) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, где $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

в) $2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$, где $r = 2$, $\varphi = 0$.

г) $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, где $r = 1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

д) $-3 = -3(\cos\pi + i\sin\pi)$, где $r = 3$, $\varphi = \pi$.

е) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$.

ж) $r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$, а $\cos\varphi = \frac{a}{r} = 1\cdot\frac{2}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Поэтому $\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

2.7. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра

Рассмотрим умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 +$$

$$+ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) i] = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Пусть теперь

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \qquad z_2 = z^{-1} = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда, с одной стороны,

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 ,$$

с другой стороны,

$$1 = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Следовательно,

$$\cos 0 + i \sin 0 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Откуда получаем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \text{ или } \varphi_2 = -\varphi_1, \text{ т.е.}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r_1} (\cos (-\varphi_1) + i \sin (-\varphi_1)).$$

Вывод: *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей; аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.*

Аналогично доказывается, что *модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленного на модуль делителя; аргумент частного получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого*.

Поэтому для частного двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, легко получается формула:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right),$$

где комплексное число z_2 отлично от нуля.

Формула (1) легко обобщается на произвольное конечное число сомножителей. Поэтому для любого натурального числа n справедлива следующая формула:

$$z^n = \underbrace{z\,z\,\ldots\,z}_{n\ раз} = \left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

Формула

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

называется *формулой Муавра*.

Пример 1. Вычислить: $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Решение.

Переведем числитель и знаменатель дроби из алгебраической формы в тригонометрическую.

Для числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$.

Для числа $z_2 = 1 - i$ $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = arctg\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))} = \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i\sin(\frac{7\pi}{12})).$$

В итоге:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20}(\cos(\frac{7\pi}{12}\cdot 20) + i\sin(\frac{7\pi}{12}\cdot 20)) =$$

$$= 2^{10}(\cos\frac{35\pi}{3} + i\sin\frac{35\pi}{3}) = [\textit{так как}\ \frac{35\pi}{3} = 12\pi - \frac{\pi}{3}] =$$

$$= 2^{10}(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})) = 2^{10}(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \underline{2^9(1-\sqrt{3}i)}.$$

Поскольку

$$z^{-1} = \frac{1}{r_1}\ (\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)),$$

формула Муавра справедлива и для целых отрицательных чисел n.

Задача 1. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произведите указанные действия:

а) $\dfrac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3} + i\right)}{1 + i}$;

б) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение.

а) Представим сначала каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$-\sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3} + i\right)}{1 + i} = \frac{4\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1+i) = 2+2i\ .$$

б) В этом случае первый из двух сомножителей уже представлен в тригонометрической форме. Относительно второго сомножителя этого сказать нельзя, так как здесь в скобках перед синусом стоит знак минус вместо нужного нам знака плюс. Поэтому представим сначала второй сомножитель в тригонометрической форме. Для этого мы воспользуемся четностью и нечетностью тригонометрических функций косинуса и синуса соответственно:

$$cos\,(-\varphi) = cos\,(\varphi); \qquad sin\,(-\varphi) = -sin\,(\varphi).$$

Тогда можно записать:

$$\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\ .$$

Задача 2. Вычислите: $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{\left(-1+i\right)^{12}}$.

Решение.

Воспользуемся формулой Муавра:

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

По этой формуле:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12} = \left(2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right)^{12}$$

$$= 2^{12}\left(\cos\frac{60\pi}{3} + i\sin\frac{60\pi}{3}\right) = 2^{12}\left(\cos 20\pi + i\sin 20\pi\right) = 2^{12}$$

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{6} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{6} = 2^{6}\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 2^{6}\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = 2^{6}.$$

$$(-1+i)^{12}=\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{36\pi}{4}+i\sin\frac{36\pi}{4}\right)=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=$$

$$=-2^6.$$

Следовательно, $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2^{12}+2^6}{2^6}=-\left(2^6+1\right)=-63$.

Задача 3. Выясните геометрический смысл произведения двух комплексных чисел.

Решение.

Если хотя бы одно из двух комплексных чисел равно нулю, то их произведение также равно нулю (это следует из свойств комплексных чисел).

Пусть теперь z_1 и z_2 – произвольные отличные от нуля комплексные числа. Запишем их в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются. Следовательно, чтобы умножить отличное от нуля комплексное число z_1 на отличное от нуля комплексное число z_2, нужно вектор $\mathbf{z_1}$ растянуть (или сжать) в r_2 раз, а затем полученный вектор повернуть вокруг начала координат на угол $\arg z_2$.

Задача 4. Выразите $\cos 3x$ и $\sin 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение.

Возьмем произвольное комплексное число

$$z = \cos x + i\sin x$$

и возведем его в третью степень, пользуясь формулой Муавра и формулой куба суммы. Получим, с одной стороны,

$$z^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos 3x + i\sin 3x,$$

а с другой стороны,

$z^3 = (\cos x + i\sin x)^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x = (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, поэтому

$$cos\ 3x = cos^3 x - 3\ cos\ x\ sin^2 x;$$

$$sin\ 3x = 3\ cos^2 x\ sin\ x - sin^3 x.$$

Выражая в предпоследнем равенстве $sin^2 x$ через $cos^2 x$, а в последнем равенстве $cos^2 x$ через $sin^2 x$, получаем:

$$cos\ 3x = 4\ cos^3 x - 3\ cos\ x;\ sin\ 3x = 3\ sin\ x - 4\ sin^3 x.$$

З*амечание*. Аналогичным способом можно выразить $sin(nx)$ и $cos(nx)$ через $sin\ x$ и $cos\ x$ для любого натурального числа n.

Задача 5. Представьте в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций, кратных x (т.е. тригонометрических функций от x, $2x$, $3x$ и т. д.) следующие функции: а) $cos^5 x$;   б) $sin^4 x$.

Решение.

Пусть $z = cos\ x + i\ sin\ x$. Тогда

$$z^{-1} = cos\ (-x) + i\ sin\ (-x) = cos\ x - i\ sin\ x.$$

Используя выражения для z и z^{-1}**,** получаем равенства:

$$\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}; \qquad \sin x = \frac{z + z^{-1}}{2i}.$$

Возведем первое из полученных равенств в пятую степень:

$$\cos^5 x = \frac{z^5 + 5z^4z^{-1} + 10z^3z^{-2} + 10z^2z^{-3} + 5z\,z^{-4} + z^{-5}}{2^5} =$$

$$= \frac{\left(z^5 + z^{-5}\right) + 5\left(z^3 + z^{-3}\right) + 10\left(z + z^{-1}\right)}{32}.$$

Учитывая, что

$$z^n = (cos\ x + sin\ x)^n = cos\ (nx) + i\ sin\ (nx), z^{-n} = cos\ (-\ nx) + i\ sin\ (-\ nx)$$

$$z^n = cos\ (nx) - i\ sin\ (nx),$$

получаем:

$$\cos^5 x = \frac{2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x}{32} = \frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}.$$

Аналогично вычисляем $\sin^4 x$:

$$\sin^4 x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^4 = \frac{\left(z^4 + z^{-4}\right) - 4\left(z^2 + z^{-2}\right) + 6}{16} =$$

$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.$$

Задача 6. Найдите тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = \frac{i-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Решение.

Пусть $z_1 = i-1$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $|z_2| = 2$, $Arqz_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

Поскольку $|z_1| = \sqrt{2}$ и $Arqz_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $(m \in Z)$, то $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а

$$Arq\frac{z_1}{z_2} = Arqz_1 - Arqz_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m - \frac{\pi}{4} - 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(m-n).$$

Следовательно, $Arq\frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi p\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi p\right)\right), \text{ где } p \in Z.$$

2.8. Извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа

Применяя формулу Муавра, легко найти комплексные корни *n*-ой степени из произвольного отличного от нуля комплексного числа *z*.

Пусть $\sqrt[n]{z} = u$. Тогда $u^n = z$ и все корни *n*-й степени из числа *z* являются решениями уравнения.

Поскольку комплексное число u отлично от нуля (в противном случае комплексное число z равно нулю, а мы договорились не рассматривать этот случай в виду того, что при $z = 0$ уравнение имеет единственный n-кратный корень $u = 0$). Его можно представить в тригонометрической форме:

$$u = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1).$$

Пусть, как обычно, $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, тогда уравнение примет вид:

$$r_1^n (\cos n\varphi_1 + i \sin n\varphi_1) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Комплексные числа, заданные в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$ ($k \in \mathbf{Z}$) . Поэтому

$$\begin{cases} r_1^n = r, \\ \varphi_1 = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$r_1 = \sqrt[n]{r}, \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \qquad (k \in \mathbf{Z}).$$

Здесь $\sqrt[n]{z}$ − арифметический корень из положительного действительного числа r.

Обозначим k-й корень n-й степени из комплексного числа z через u_k: Тогда

$$u_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \mathbf{Z}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$.

Замечание. Корней n-й степени из ненулевого комплексного числа z, заданного в тригонометрической форме, будет ровно n, так как именно столько различных значений будет принимать дробь $\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где k пробегает n значений от 0 до n-1.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

Решение.

Для того чтобы воспользоваться формулой, необходимо представить число, стоящее под знаком корня, в тригонометрической форме. Для числа z = -1 найдем его модуль и аргумент: $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1,\ \varphi = \pi$.

В итоге $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

По формуле $w_k = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4})$. Тогда:

$$w_0 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4} = \underline{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$
$$w_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} = \underline{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$
$$w_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} = \underline{\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$
$$w_3 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} = \underline{\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[5]{-32i}$.

Решение.

Для числа $z = -32i$ найдем его модуль ρ и аргумент φ: $\rho = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, так как число $z = -32i$ лежит на отрицательной части мнимой оси. В итоге $z = -32i = 32(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})$.

По формуле $w_k = \sqrt[5]{32}(\cos\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5})$, где k = 0, 1, 2, 3, 4.

Тогда:

$$w_0 = \underline{2(\cos\frac{-\pi}{10} + i\sin\frac{-\pi}{10})},$$

$$w_1 = \underline{2(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10})},$$

$$w_2 = \underline{2(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10})},$$

$$w_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}) = \underline{2(\cos\frac{-9\pi}{10} + i\sin\frac{-9\pi}{10})},$$

$$w_4 = 2(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}) = \underline{2(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})}.$$

Для w_3 и w_4 аргументами будут $\frac{-9\pi}{10}$ и $\frac{-\pi}{2}$, а не $\frac{11\pi}{10}$ и $\frac{15\pi}{10}$ соответственно, так как $\varphi \in (-\pi;\pi]$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Решение.

Для числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ модуль ρ и аргумент φ есть:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+124} = \sqrt{16} = 4, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

В итоге

$$z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

$$w_k = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3}), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

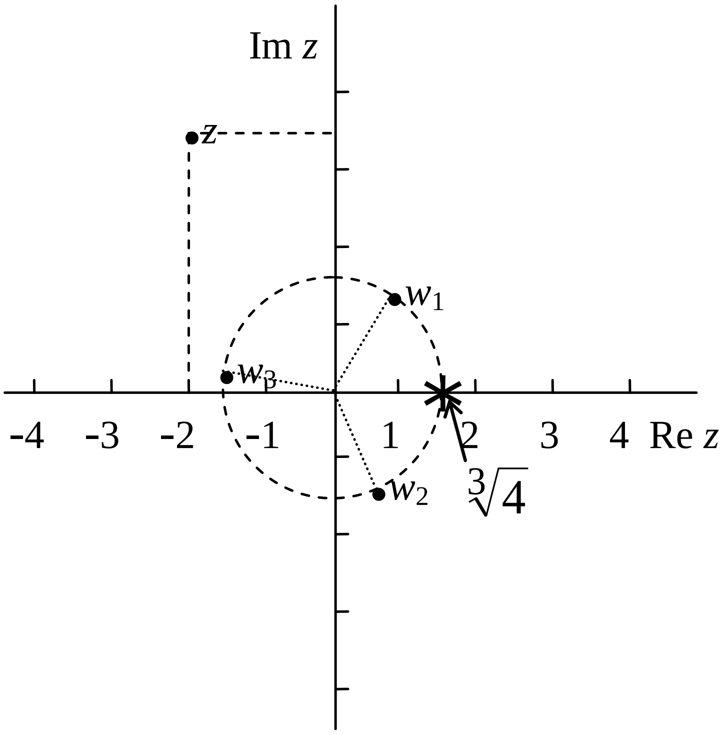
Тогда

$$w_0 = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9})},$$

$$w_1 = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9})},$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}) = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{-4\pi}{9} + i\sin\frac{-4\pi}{9})}.$$

Из формулы видно, что аргументы корней w_k отличаются на одну и ту же величину $\frac{2\pi}{n}$, а модули всех корней одинаковые и равны $\sqrt[n]{\rho}$. Значит, на комплексной плоскости все w_k лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ на одинаковом расстоянии друг от друга. Для примера изображения самого числа $z=-2+2\sqrt{3}i$ и его корней w_0, w_1, w_2 можно видеть на рисунке.



Пример 5. Найдите $\sqrt[3]{-i}$.

Решение.

$$-\mathrm{i} = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$u_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{3}\right), \quad k=0,1,2;$$

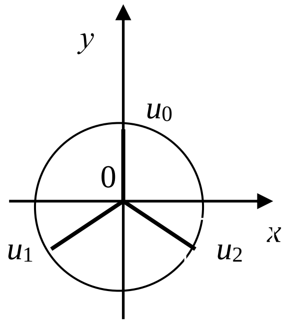
$$u_k = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi k}{3}\right), \quad k=0,1,2.$$

Таким образом,

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\ ;$$

$$u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ ;$$

$$u_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ .$$



Точки $u_0(0;\ 1)$, $u_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ и $u_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ являются вершинами правильного треугольника.

Замечание. Для любого отличного от нуля комплексного числа z и любого натурального числа $n > 2$ корни степени n из числа z являются вершинами правильного n - угольника с центром в точке O (0;0). Это следует из того, что модули всех корней n-й степени равны $\sqrt[n]{|\,z\,|}$, а углы между соседними корнями u_k и u_{k+1} равны $\dfrac{2\pi}{n}$.

2.9. Комплексные корни *n*-й степени из единицы

Вычислим все корни n-ой степени из единицы. Пусть $\varepsilon = p(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Зная, что $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, составим систему:

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\varphi = 0 + 2\pi k, k \in Z \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{2\pi k}{n}, k \in Z \end{cases}$ и любой корень n - ой степени из единицы будет иметь вид:

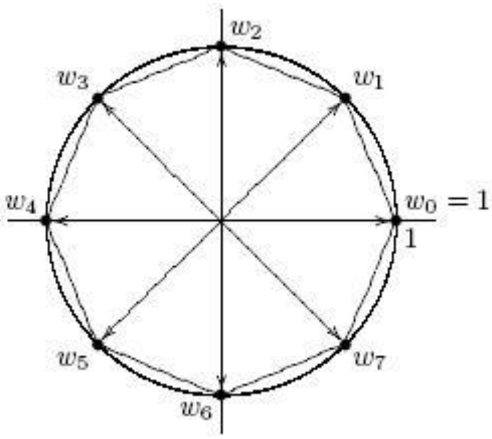
$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\ .$$

Заметим, что $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

Покажем, что существует ровно n различных корней n - ой степени из единицы. Для этого поделим k на n с остатком, получим $k = nq + r$, где $0 \le r < n$.

Следовательно, $\cos\frac{2\pi(nq+r)}{n} + i\sin\frac{2\pi(nq+r)}{n} = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}$. Поскольку r может принимать только одно из n значений $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, то и различных корней n - ой степени из единицы также будет ровно n штук, причем $\varepsilon_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}$, где $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Точки w_k являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в *окружность* единичного радиуса с центром в начале координат, при этом одной из вершин этого многоугольника является 1. Например, при n=8



Теорема. Корни n - ой степени из единицы образуют мультипликативную циклическую группу.

Доказательство.

Пусть M - всех корней n -ой степени из единицы. Очевидно, что $\forall \varepsilon_i, \varepsilon_j \in M$, $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in M$. Тогда M замкнуто относительно умножения. Операция умножения во множестве M ассоциативна; $\varepsilon_0 = 1$ - нейтральный элемент в M; $(\varepsilon_i)^{-1} = \varepsilon_{n-i}$.

Таким образом, $< M \cdot >$ группа, в которой элемент ε_1 является порождающим, так как $\forall \varepsilon_i \in M$ $\varepsilon_i = (\varepsilon_1)^i$, следовательно, M - мультипликативная циклическая группа.

Свойство. *Произведение и частное любых двух значений корня* n*-й степени из* 1 *является корнем* n*-й степени из* 1.

Доказательство.

Пусть $\varepsilon, \varepsilon'$ — некоторые значения корня n-й степени из 1, тогда $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon'^n = 1$, следовательно, $(\varepsilon\varepsilon')^n = \varepsilon^n\varepsilon'^n = 1$ и $(\varepsilon/\varepsilon')^n = \varepsilon^n/\varepsilon'^n = 1$, таким образом, $\varepsilon\varepsilon'$, ε/ε' являются значениями корня n-й степени из 1.

Корень ε n-й степени из 1 называется *первообразным*, или *примитивным*, если $\varepsilon^m = 1$ для любого натурального $m < n$ (т. е. ε не является корнем из единицы никакой меньшей степени). В данном случае говорят также, что *ε принадлежит показателю n*. Из определения сразу вытекает, что произвольное число ε может принадлежать лишь одному показателю.

Легко видеть, что

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

является первообразным корнем n-ой степени из 1.

Теорема. *Для того, чтобы корень ε n-й степени из* 1 *являлся первообразным, необходимо и достаточно, чтобы величины*

$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ *исчерпывали все значения* $\sqrt[n]{1}$.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное: среди величин $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ нашлось две равных, например, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ для некоторых натуральных k, l, причем 1 $k < l$ n. Тогда $\varepsilon^{l-k} = 1$, l $k > 0$, следовательно, ε не является первообразным.

Достаточность. Так как величины исчерпывают все значения $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ корня n-й степени из 1, то, в частности, $\varepsilon^m = \varepsilon^n = 1$ для всякого натурального $m < n$, следовательно, ε — первообразный корень.

Утверждение. *Пусть ε - первообразный корень n-й степени из* 1, *тогда для того, чтобы* $\varepsilon^m = 1$, *необходимо и достаточно, чтобы m было кратно n.*

Доказательство.

Необходимость. Разделим m с остатком на n: имеем $m = np + r$ для некоторых натуральных p и r ($0 \le r < n$), поэтому

$$1 = \varepsilon^m = \varepsilon^{np}\varepsilon^r = \varepsilon^r.$$

Итак, $\varepsilon^r = 1$. Так как ε - первообразный и $0\ r < n$, то $r = 0$.

Достаточность. Имеем $m = np$, следовательно, $\varepsilon^m = (\varepsilon^n)^p = 1$.

Следствие. *Если корень ε m-й степени из* 1 *принадлежит показателю n, то m кратно n.*

Утверждение. *Пусть ε - первообразный корень n-ой степени из* 1*, тогда для того, чтобы ε^k был также первообразным n-й степени, необходимо и достаточно, чтобы* НОД$(n, k) = 1$.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное: ε и ε^k — первообразные, однако НОД$(n, k) = d > 1$. Имеем $n = n'd$, $k = k'd$ для некоторых натуральных n', k', причем, так как $d > 1$, то $n' < n$. Однако

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'dn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1.$$

Так как $n' < n$, то ε^k не является первообразным корнем.

Достаточность. Предположим теперь, что ε — первообразный корень, НОД$(n, k) = 1$, однако $(\varepsilon^k)^m = 1$ для некоторого натурального $m < n$ (т. е. ε^k не является первообразным). Из утверждения следует, что km кратно n, однако НОД$(n, k) = 1$, поэтому m кратно n, что невозможно, так как $m < n$.

Следствие. *Величина*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

является первообразным корнем n-й степени из 1 *тогда и только тогда, когда* НОД$(n, k) = 1$.

Согласно следствию число первообразных корней n-й степени из 1 совпадает с количеством $\phi(n)$ натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Функция $\phi(n)$ называется *функцией Эйлера*. Она играет существенную роль в теории чисел.

Пример. Найдем все первообразные корни из 1 степени равной:

1) 1, ответ: 1;

2) 2, один первообразный корень: $\varepsilon_1 = -1$;

3) 3, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) 4, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,3} = \pm i$;

5) 6, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,5} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) 8, выпишем все натуральные числа, не превосходящие $n = 8$ и взаимно простые с ним: 1, 3, 5, 7; первообразными корнями являются:

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{3\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{3\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{5\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_7 = \cos\frac{7\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{7\cdot 2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание. Для каждого $j = 0,1,\ldots,n-1$ справедливо

$$z_i = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi j}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi j}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}\right) = u_0 \cdot \varepsilon_j.$$

Следствие. Все корни n- ой степени из ненулевого комплексного числа z являются результатом умножения одного из этих корней на корни n - ой степени из единицы.

Пример. *Найти все корни 3 – ей степени из -8.*

Очевидно, что -2 – один из искомых корней. Тогда, согласно вышеприведенному следствию, $z_0 = -2\cdot\varepsilon_0 = -2\cdot 1 = -2$,

$$z_1 = -2\cdot\varepsilon_1 = -2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}i\ ,$$

$$u_2 = -2\cdot\varepsilon_2 = -2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i\ .$$

Рассмотрим уравнение $z^n = a$, $a \in \boldsymbol{C}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, а решение уравнения пишется в виде $z = re^{i\varphi}$. Тогда получаем $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$, откуда находим, что $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2\pi k$, т.е.

$$r = \sqrt[n]{\rho}\ ,\ \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n},\ k = 0,\pm1,\pm2,\dots\ .$$

Таким образом, уравнение имеет корни

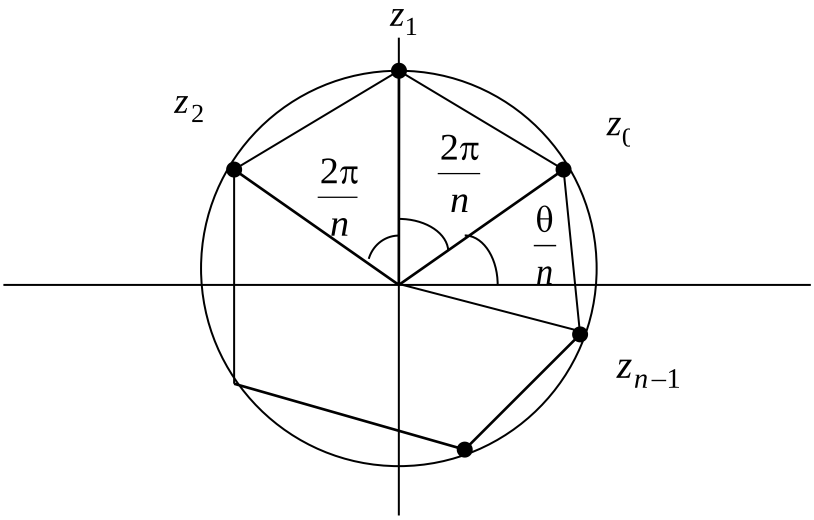
$$z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}},\ k = 0,\pm1,\pm2,\dots\ .$$

Покажем, что имеется ровно n различных корней. Действительно, $z_0,\dots,\ z_{n-1}$ различны, т.к. их аргументы

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \dots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

различны и отличаются меньше, чем на 2π. Далее, $z_n = z_0$, т.к. $\varphi_n = \dfrac{\theta + 2\pi n}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi$. Аналогично $\varphi_{n+1} = \varphi_1, \dots$.

Таким образом, уравнение при $a \neq 0$ имеет ровно n корней $z_k = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}}, k = 0,\dots,n-1$, расположенных в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в т. О.



Геометрическое место корней n-ой степени

Таким образом, доказана

Теорема. *Извлечение корня* n *-ой степени из комплексного числа* $a \neq 0$ *всегда возможно. Все значения корня* n *-ой степени из* a *расположены в вершинах правильного* n *- угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиуса* $\sqrt[n]{|a|}$ *. При этом,*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}} \equiv \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n}), k = 0, \ldots, n-1.$$

Задача 6. Вычислите все значения $\sqrt[4]{-4}$ и изобразите их на комплексной плоскости.

Решение.

Как известно, корень n-ой степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \mathbf{Z}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Представим число (-4) в тригонометрической форме:

$$-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Тогда

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$ где $k = 0, 1, 2, 3, 4.$

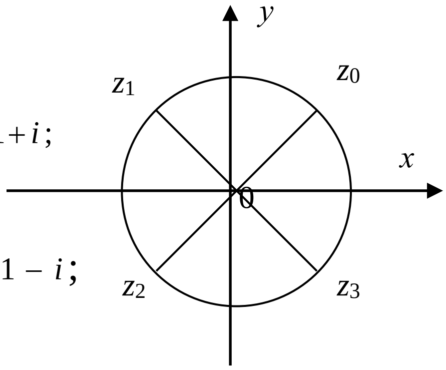
Получаем следующие четыре значения корня четвертой степени из числа (−4):

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i;$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i;$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i;$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$



Задача 7. Вычислите: $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Решение.

Представим числа $1 - i$ и $\sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right); \quad \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}} = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)}} = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{\frac{19\pi}{12} + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\frac{19\pi}{12} + 2\pi k}{6}\right).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, получим шесть значений искомого корня:

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{72} + i\sin\frac{19\pi}{72}\right);\ z_1 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{42\pi}{72} + i\sin\frac{42\pi}{72}\right);$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{67\pi}{72} + i\sin\frac{67\pi}{72}\right);\ z_3 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{91\pi}{72} + i\sin\frac{91\pi}{72}\right);$$

$$z_4 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{115\pi}{72} + i\sin\frac{115\pi}{72}\right);\ z_5 = \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{139\pi}{72} + i\sin\frac{139\pi}{72}\right).$$

Задача 8. Пользуясь корнями третьей степени из 1, вычислите $\sqrt[3]{-8i}$.

Решение.

Известно, что все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить, умножая одно из них на все значения корня n-й степени из числа 1.

Одно из значений $\sqrt[3]{-8i}$ можно найти непосредственно. Оно равно $2i$, так как $(2i)^3 = -8\ i$.

Найдем теперь все значения $\sqrt[3]{1}$:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3},$$

где k принимает значения 0, 1 и 2.

Следовательно, $e_0 = 1$; $e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, получаем три значения для $\sqrt[3]{-8i}$:

$$z_0 = 2i\ e_0 = 2i;\ z_1 = 2i\ e_1 = -\sqrt{3} - i;\ z_2 = 2i\ e_2 = \sqrt{3} - i.$$

Задача 9. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произведите указанные действия: $\sqrt[3]{\frac{-3i}{2+2\sqrt{3}i}}$.

Решение.

Представим числа $z_1 = -3i$ и $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

1) $z_1 = -3i$, где $a_1 = 0, b_1 = -3,$ тогда $r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_1^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3,$

Находим значение главного аргумента φ_1:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{a_1}{r_1} = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi_1 &= \frac{b_1}{r_1} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Подставим значения r_1 и φ_1 в выражение $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, получим $z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

2) $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$, где $a_2 = 2,\ b_2 = 2\sqrt{3},$ тогда $r_2 = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4,$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}. \text{ Тогда } z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Найдем частное

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\right) = = \frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Далее, применяя формулу получим:

$$\sqrt[3]{\frac{-3i}{2 + 2\sqrt{3}i}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7\pi}{6} + 2\pi k}{3}\right).$$

Полагая k=0, 1, 2, получим три различных значения искомого корня:

если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{18} + i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$;

если $k = 1$, то $z_1 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{19\pi}{18} + i\sin\frac{19\pi}{18}\right)$;

если $k = 2$, то $z_2 = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{31\pi}{18} + i\sin\frac{31\pi}{18}\right)$.

Задача 10. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Докажите, что

а) число $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ является действительным положительным числом;

б) имеет место равенство:

$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|$.

Решение.

а) Представим данные комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = \rho(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),\ z_2 = \rho(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),\ z_3 = \rho(\cos\alpha_3 + i\sin\alpha_3),$$

$$z_4 = \rho(\cos\alpha_4 + i\sin\alpha_4),$$

так как $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \rho$.

Предположим, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_1 + 2\pi$. Тогда $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} =$

$$= \frac{((\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + i(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2))((\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4) + i(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_4))}{((\cos\alpha_1 - \cos\alpha_4) + i(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_4))((\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3) + i(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3))} =$$

$$= \frac{\left(-2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + i2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}{\left(-2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} + i2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(-2\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} + i2\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}{\left(-2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + i2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)} = \frac{\left(i\cos\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - \sin\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}{\left(i\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(4\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\left(i\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right)}{\left(4\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\left(i\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} - \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}\right)\right)} =$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_4}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}+i\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_4}{2}+i\sin\frac{\alpha_1+\alpha_4+\alpha_3+\alpha_4}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_4}{2}}{\sin\frac{\alpha_1-\alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha_2-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_4-\alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_4-\alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3-\alpha_2}{2}}.$$

Последнее выражение является положительным числом, так как под знаками синусов стоят числа из интервала $(0;\pi)$.

б) Имеем

$$|(z_1-z_2)(z_3-z_4)|+|(z_1-z_4)(z_2-z_3)|=|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)|,$$

так как число $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ вещественно и положительно. Действительно, если a и b – комплексные числа и $\frac{a}{b}$ вещественно и больше нуля, то

$$|a+b|=|b|\left|1+\frac{a}{b}\right|=|b|\left(1+\frac{a}{b}\right)=|b|\left(1+\left|\frac{a}{b}\right|\right)=|b|\left(1+\frac{|a|}{|b|}\right)=|a|+|b|.$$

Кроме того,

$$|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)|=|-z_1z_4-z_2z_3+z_1z_2+z_4z_3|=|(z_1-z_3)(z_2-z_4)|,$$

следовательно, нужное равенство доказано.

Задача 13. Запишите в алгебраической форме число $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}$.

Решение.

Представим число z в тригонометрической форме, а затем найдем его алгебраическую форму. Имеем $\left|\sqrt{3}+i\right|=\sqrt{3+1}=2$. Для $\varphi=arq\left(\sqrt{3}+i\right)$ получаем систему:

$$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin\varphi=\frac{1}{2},\\ 0\le\varphi<2\pi.\end{cases}$$

Отсюда следует равенство: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17}$. Применяя формулу Муавра: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, получаем

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17}=2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right)=2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Найдена тригонометрическая форма заданного числа. Запишем теперь это число в алгебраической форме:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}=2^{17}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-2^{16}-\sqrt{3}+2^{16}i.$$

Задача 14. Найдите сумму $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x$, $x\neq\pi k$, $k\in Z$.

Решение.

Рассмотрим сумму

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)^3+\cdots+(\cos(2n-1)x+i\sin(2n-1)x)$$

Применяя формулу Муавра, найдем

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)^3+\cdots+(\cos x+i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=(\cos x+i\sin x)^2$ и первым членом $b_1=\cos x+i\sin x$.

Применяя формулу для суммы членов такой прогрессии, имеем

$$S_n(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^{2n-1}}{1-(\cos x+i\sin x)^2}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos(2n+1)x+i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x+\sin^2 x-i2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)+(\sin x-\sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x-i\cos x)}=$$

$$=((\cos x-\cos(2n+1)x)+(\sin x-\sin(2n+1)x))\cdot(\sin x+i\cos x)\cdot$$

$$(2\sin x(\sin x-i\cos x)(\sin x+i\cos x))^{-1}=$$

$$\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)\sin x-(\sin x-\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x}+$$

$$+\frac{i((\sin x-\sin(2n+1)x)\sin x+(\cos x-\cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

Выделяя мнимую часть в последнем выражении, находим $\operatorname{Im} S_n(x) = \sin x + \sin 3x + \dots + \sin(2n-1)x =$

$$= \frac{1 - \sin x \sin(2n+1)x - \cos x \cos(2n+1)x}{2\sin x} = \frac{1 - \cos 2nx}{2\sin x} = \frac{2\sin^2 nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Итак, $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x = \dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

Выделяя действительную часть, получаем также следующую формулу: $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos(2n-1)x = \dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, $x \ne \pi k$, $k \in Z$.

Задача 15. Найдите сумму:

а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots$.

Решение.

По формуле Ньютона для возведения в степень имеем

$$(1+i)^n = 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + \dots + C_n^n i^n = 1 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 +$$

$$+ iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots\right) + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots\right).$$

По формуле Муавра находим:

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Приравнивая вещественные и мнимые части полученных выражений для $(1+i)^n$, имеем:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{4} \text{ и } C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{4}.$$

Эти формулы в компактном виде можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{4},$$ где $[a]$ - целая часть числа a.

Задача 16. Найдите все ω, для которых $\omega^4 = 16i$.

Решение.

Поскольку $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то, применяя формулу

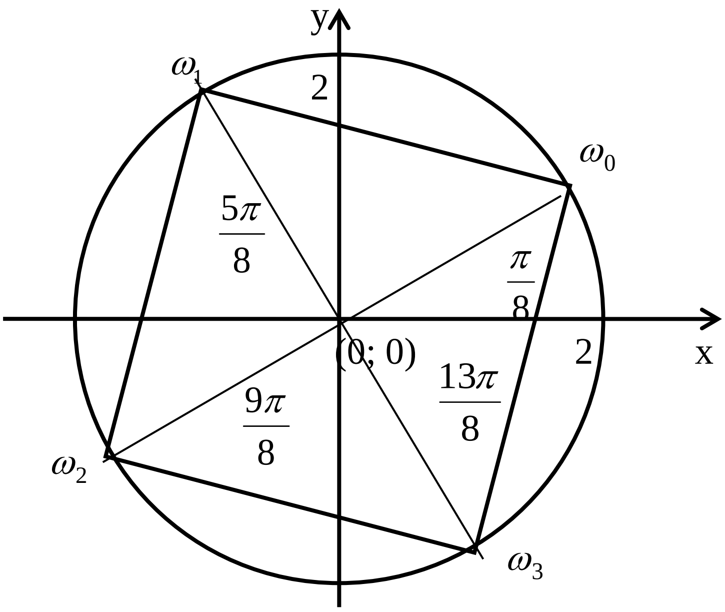
$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right),\ k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Для извлечения корней, получаем $\omega_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3.$

Следовательно, $\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$,

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right),\ \omega_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

Точки, соответствующие числам ω_k, расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке (0;0).



Задача 17. Решите уравнение $(z+\alpha)^n = z^n$, $n \in N, \alpha \in R, \alpha \neq 0$.

Решение.

По условию $\alpha \neq 0$; поэтому данное уравнение не имеет корня $z = 0$, и, значит, оно равносильно уравнению $\left(z + \frac{\alpha}{z}\right)^n = 1$.

Для того чтобы число z было корнем данного уравнения, нужно, чтобы число $\left(z+\frac{\alpha}{z}\right)$ было корнем n-й степени из числа 1.

Отсюда заключаем, что исходное уравнение имеет $n-1$ корней $z_1,\ldots,z_{n-1}$, определенных из равенств

$$1+\frac{\alpha}{z_k}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=1,2,\ldots,n-1.$$

Таким образом, $z_k=\dfrac{\alpha}{\cos\frac{2k\pi}{n}-1+i\sin\frac{2k\pi}{n}}=\dfrac{\alpha\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-1-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)}{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}=$

$$=\frac{\alpha}{2}\left(-1-i\frac{\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}}\right)=-\frac{\alpha}{2}\left(1+i\frac{2\sin\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{2k\pi}{n}}\right)=-\frac{\alpha}{2}\left(1+ictg\frac{k\pi}{n}\right),$$

т. е. $z_k=-\dfrac{\alpha}{2}\left(1+ictg\dfrac{k\pi}{n}\right),\ k=1,2,\ldots,n-1.$

Задача 18. Решите во множестве комплексных чисел уравнение

$$z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0.$$

Решение.

Так как число $z_0=1$ не является корнем данного уравнения, то при $z\neq 1$ данное уравнение равносильно уравнению

$(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$, т. е. уравнению $z^6=1$.

Все корни этого уравнения получаются из формулы:

$z_0=1$

$$z_1=\cos\left(0+\frac{2\pi}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{2\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2=\cos\left(0+\frac{2\pi\cdot 2}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{2\pi\cdot 2}{6}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3=\cos\left(0+\frac{2\pi\cdot 3}{6}\right)+i\sin\left(0+\frac{2\pi\cdot 3}{6}\right)=-1,$$

$$z_4 = \cos\left(0 + \frac{2\pi \cdot 4}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi \cdot 4}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_5 = \cos\left(0 + \frac{2\pi \cdot 5}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi \cdot 5}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i.$$

Задача 19. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам: $\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}$.

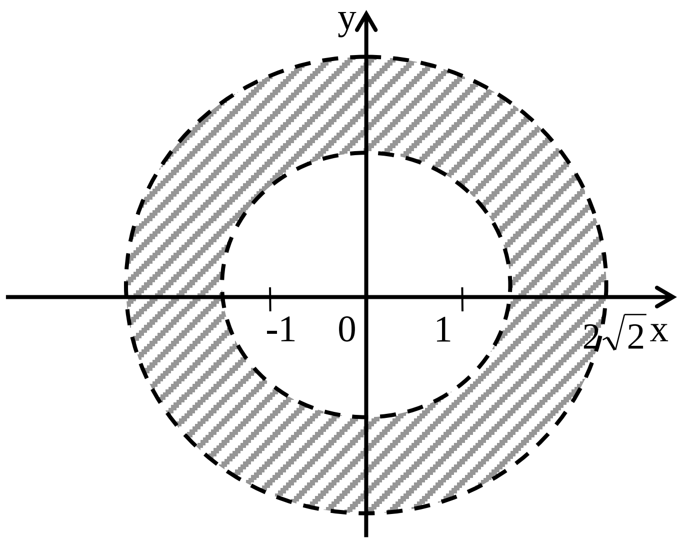
Решение.

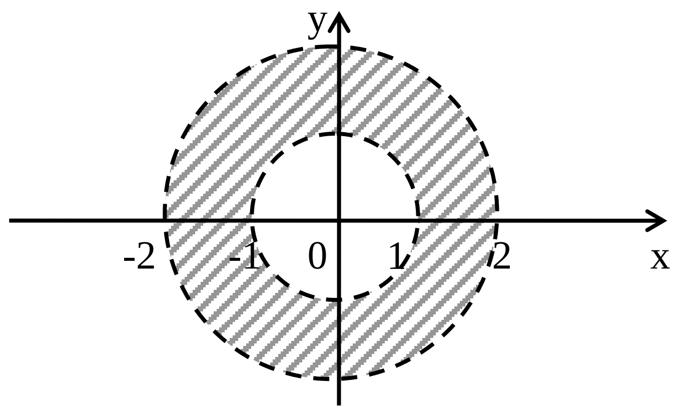
Пусть $w = (1-i)z - 1$.

Тогда $z = \frac{w+i}{1-i} = \frac{(w+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = w \cdot \frac{1+i}{2} + \frac{i(1+i)}{2} = w\frac{1+i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Комплексным числам, имеющим одинаковые модули, соответствуют точки плоскости, лежащие на окружности с центром в начале координат, поэтому неравенству $\sqrt{2} < |w| < 2\sqrt{2}$ удовлетворяют все точки открытого кольца, ограниченного окружностями с общим центром в начале координат и радиусами $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Пусть некоторая точка комплексной плоскости соответствует числу w_0.

Число $w_1 = w_0 \cdot \frac{1+i}{2} = w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, имеет модуль, в $\sqrt{2}$ раз меньший модуля w_0, аргумент, на $\frac{\pi}{4}$ больший аргумента w_0. С геометрической точки зрения точку, соответствующую w1, можно получить, используя гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а также поворот относительно начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. В результате применения этих двух преобразований к точкам кольца последнее перейдет в кольцо, ограниченное окружностями с тем же центром и радиусами 1 и 2.





Преобразование $w_1 \to w_1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ реализуется с помощью параллельного переноса на вектор $(-0{,}5; 0{,}5)$. Перенося кольцо с центром в точке $(0; 0)$ на указанный вектор, получим кольцо такого же размера с центром в точке $(-0{,}5; 0{,}5)$.

Предложенный способ, использующий идею геометрических преобразований плоскости, наверное, менее удобен в описании, но весьма изящен и эффективен.

Задача 20. Найдите z^{12}, если $z + 2\bar{z} = 3 + i$.

Решение.

Пусть $z = a + bi$, тогда $\bar{z} = a - bi$ и $z + 2\bar{z} = (a + bi) + 2(a - bi) = 3a - bi$. Исходное равенство примет вид $3a - bi = 3 + i$. Из условия равенства двух комплексных чисел получим $3a = 3$, $-b = 1$, откуда $a = 1$, $b = -1$. Таким образом, $z = 1 - i$.

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \text{ где } r = \sqrt{2},\ \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Согласно формуле Муавра, находим

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 12\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 12\right)\right) = -64.$$

Задача 21. Для комплексного числа $d = \sqrt{3} - i$ найдите все комплексные числа z, такие, что

$$|z| = 2|d|, \text{ а } |\arg d - \arg z| = \frac{\pi}{3}.$$

Решение.

Представим число d в тригонометрической форме:

$$d = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Отсюда $|d| = 2$, $\arg d = -\frac{\pi}{6}$. Для числа z получим $|z| = 4$, $\arg z$ может быть равен $-\frac{\pi}{2}$ либо $\frac{\pi}{6}$.

В первом случае

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -4i,$$

во втором

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Задача 22. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из таких чисел.

Решение.

Заметим, что уже из самой формулировки задачи можно понять, что сумма корней уравнения можно найти без вычисления самих корней.

Действительно, сумма корней уравнения $z^4 - \sqrt{3} + i = 0$ есть коэффициент при z^3, взятый с противоположным знаком (обобщенная теорема Виета), т.е. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Приведем и другое возможное обоснование. Пусть z_0 – корень уравнения. Тогда $-z_0$ также является его корнем, поскольку $(z_0)^4 = (-z_0)^4$, и сумма всех корней равна нулю.

Допустимо и такое решение. Представив правую часть исходного уравнения в тригонометрической форме, получим

$$z^4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Отсюда

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right)\right), \text{ где } k \in \{0;1;2;3\}.$$

Далее вычисляем сумму четырех корней, которая равна нулю.

Упражнения

1. Вычислите

a) $\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$;

b) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{20}$;

c) $\left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10}$;

d) $\left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10}$.

2. Вычислите

a) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{i+\sqrt{3}}}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}}$.

3. Найдите значение

a) $\frac{(1-i)^{n+2}}{(1+i)^n}$;

b) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^{n-2}}$;

c) $\frac{(1+i)^{n-2}}{(1-i)^{n+2}}$;

d) $\frac{(1-i)^{n-2}}{(1+i)^n}$.

2.10. Показательная форма комплексного числа, связь с тригонометрической формой

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма записи комплексного числа,* которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Пусть $z(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ зависит от действительной переменной φ.

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу $z(\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi$ комплексно показательное выражение

$$u(\varphi)=e^{i\varphi}.$$

С помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим полагают по определению

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера* и представляет собой определение комплексной показательной функции $e^{i\varphi}$, где φ – любое действительное число.

Пусть дано комплексное число

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Сопоставляя с предыдущей формулой, получаем

$$z = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной формой* комплексного числа.

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}}, \;\; k = \overline{0, n-1}.$$

Из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Пример 1. Найти показательную форму чисел:

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Решение.

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2$, $\varphi = \arg z_2 = \dfrac{7\pi}{6}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.

Пример 2. Найти алгебраическую форму чисел:

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$, в) $z_3 = e^{-3+4i}$.

Решение.

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}) = 2(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$,

б) $z_2 = 3e^{\frac{-\pi i}{6}} = 3(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)) = 3(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2}$,

в) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3}\cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$

Пример 3. Найти $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, результат записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}$, $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; б) $z_1 = e^{3-7i}$, $z_2 = e^{-4+5i}$.

Решение.

а) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}}\cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18(\cos\dfrac{5}{6} + i\sin\dfrac{5}{6})$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}),$$

б) $z_1 z_2 = e^{3-7i}\cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^{7}(\cos 12 - i\sin 12).$$

Пример 4. Вычислить: а) z^4, б) $\sqrt[5]{z}$, где $z = 2e^{-3i}$.

Решение.

а) $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i\sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366i)$,

б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k, \quad k = 0,1,2,3,4$

$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0.95 - 0.65i$,

$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i$,

$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i$,

$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i$,

$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$

Пример 5. Вычислите $\sqrt[3]{(\bar{z})^2}$, где $z = \sqrt{3} - i$.

Решение.

Представим решение данного выражения в показательной форме записи комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cdot e^{i\varphi}$.

Если $z = \sqrt{3} - i$, то $\bar{z} = \sqrt{3} + i$. Тогда $r = |\bar{z}| = 2$, $\varphi = \arg\bar{z} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Поэтому $\bar{z} = 2\cdot e^{\frac{i\pi}{6}}$, тогда $\bar{z}^2 = 4\cdot e^{\frac{2i\pi}{6}} = 4\cdot e^{\frac{i\pi}{3}+2k\pi i}$ и $\sqrt[3]{(\bar{z})^2} = \sqrt[3]{4\cdot e^{\frac{i\pi}{3}+\frac{2k\pi i}{3}}}$, где $k = 0,1,2$.

Упражнения

Представить комплексное число в показательной форме

a) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

b) $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

c) $z = -1 + i$

d) $z=-\sqrt{3} - i$.

Глава 3. АЛГЕБРА МАТРИЦ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

3.1. Понятие матрицы. Операции над матрицами

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размеров* $m \times n$. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент. В дальнейшем будем обозначать матрицы большими буквами латинского алфавита: A, B и т.д.

Часто вместо подробной записи употребляют сокращенную: $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ или даже $A = \left(a_{ij}\right)$.

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ считаются *равными*, если совпадают их размеры и $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j.

Наряду с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A (т.е. столбцы и строки меняются местами). Эта матрица называется *транспонированной* к A и обозначается через A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число n ее строк (равное числу столбцов) – *порядком* квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные равны нулю, называется *единичной матрицей* и обозначается E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

Действия с матрицами

Определение 1. Суммой двух $(m \times n)$-матриц $A = (\alpha_{ij})$ и $B = (\beta_{ij})$ называется такая матрица $C = (\gamma_{ij})$, элемент γ_{ij} которой равен $\alpha_{ij} + \beta_{ij}$, т.е. $A+B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})$ для любых наборов $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров.

Определение 2. Пусть F — некоторое поле. *Произведением* $(m \times n)$- матрицы $A = (\alpha_{ij})$ *на скаляр* $\lambda \in F$ называется такая $(m \times n)$-матрица λA, что $\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})$, где $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ (∗)

Пример 1. Вычислите A+B для матриц из (∗).

Решение.

Суммой матриц будет матрица, элементы которой получены суммированием элементов слагаемых. Складывать и вычитать можно только матрицы одинаковой размерности, причем результат будет той же размерности.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 2+1 & 1+(-1) \\ -1+4 & 0+3 & 2+1 \\ 2+(-2) & 5+1 & -3+7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}}.$$

Пример 2. Вычислите 3A+2B для матриц из (∗).

Решение.

Найдем сначала матрицы 3A и 2B. При умножении матрицы на число необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы B аналогично:

$$2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix}.$$

Сложим результаты:

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \\ 6 & 15 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 8 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 17 & 5 \end{pmatrix}}.$$

Пример 3. Выполнить действия:

а) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

b) $2A-3B+4$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Решение.

a) $4\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot1 & 4\cdot2 & 4\cdot(-1)\\ 4\cdot2 & 4\cdot1 & 4\cdot1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cdot(-1) & 3\cdot3 & 3\cdot1\\ 3\cdot2 & 3\cdot1 & 3\cdot2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\cdot2 & 2\cdot4 & 2\cdot1\\ 2\cdot(-1) & 2\cdot3 & 2\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ 8 & 4 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 9 & 3\\ 6 & 3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 8 & 2\\ -2 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3-4 & 9 & -3\\ 8+6-2 & 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -3\\ 16 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

b) Так как в данное выражение вместо переменных A и B подставляются матрицы, то можно считать, что число 4 есть $4E$, где E — единичная матрица. Таким образом,

$$2A-3B+4=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 4 & 9\end{pmatrix}.$$

Ответ: a) $\begin{pmatrix}-3 & 9 & -3\\ 16 & 1 & 6\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}0 & -5\\ 4 & 9\end{pmatrix}$.

Операция произведения определяется не для всех матриц, а лишь для согласованных.

Матрицы А и В называются *согласованными*, если число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В. Так, если A_{mxn}, B_{nxk}, m≠k, то матрицы А и В согласованные, так как n = n, а в обратном порядке матрицы В и А несогласованные, так как m ≠ k. Квадратные матрицы согласованы, когда у них одинаковый порядок n, причем согласованы как А и В, так и В и А. Если A_{mxn}, а B_{nxm}, то будут согласованы матрицы А и В, а также матрицы В и А, так как n = n, m = m.

Определение 3. Пусть даны две матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{np}\end{pmatrix},$$

причем число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Произведением матрицы A на матрицу B называется матрица

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix},$$

обозначаемая через AB, элементы которой вычисляются по формулам:

$$\gamma_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\ldots+\alpha_{in}\beta_{nj}=\sum_{s=1}^{n}\alpha_{is}\beta_{sj}\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Для удобства запоминания запишем это кратко: $\underbrace{A\,B=C}_{(m\times n)(n\times k)=m\times k}$

Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C=AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Другими словами, элемент c_{ij} является результатом скалярного произведения i-й вектор-строки и j-го вектор-столбца.

Замечание. Согласно нашему определению, произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что оба произведения AB и BA можно определить лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, а число строк матрицы A совпадает с числом столбцов матрицы B. А именно, матрица A имеет размеры $m\times n$, а B – размеры $n\times m$. При этом, вообще говоря, $AB\neq BA$.

Свойства операций над матрицами

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих свойств операций над матрицами:

1. $0\cdot A=\theta$ – нулевая матрица (все элементы равны 0).
2. $\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A.$
3. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A.$
4. $A+(B+C)=(A+B)+C.$

5. $A+B=B+A$.

6. $\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$.

7. $A+\theta=\theta+A=A$.

Свойства 4 и 5 называются соответственно *ассоциативностью и коммутативностью сложения* матриц.

8. $\alpha\cdot(A\cdot B)=(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$.

9. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

10. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

11. $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$.

Свойство 9 носит название *ассоциативности умножения*, а свойства 10 и 11–*дистрибутивности умножения относительно сложения* матриц. Эти свойства можно доказать, рассмотрев общий элемент матриц в левой и правой части этого равенства.

12. $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Т. е. умножение матриц некоммутативно, например,

$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4\\-1&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}.$

13. $A\cdot E=E\cdot A=A$, для любой квадратной матрицы A.

Если A– матрица порядка $m\times n$, а B матрица порядка $n\times m$, причём $a_{ij}=b_{ji}$, то B называют *транспонированной* матрицей по отношению к A и обозначают через A^T.

14. $(\alpha\cdot A+\beta\cdot B)^T=\alpha\cdot A^T+\beta\cdot B^T$.

15. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

Доказательство свойств 14 и 15 заключается в рассмотрении ij-ого элемента в правой и левой частях этих равенств. □

Пусть A квадратная матрица порядка n. Она называется *симметрической,* если $A=A^T$; *кососимметрической,* если $A=-A^T$.

Пусть $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&0&2\\2&5&-3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\4&3&1\\-2&1&7\end{pmatrix}$ $(*)$

Пример 4. Вычислите $A{\cdot}B$ и $B{\cdot}A$ для матриц $(*)$.

Решение.

Перемножить матрицы можно, если количество столбцов первого сомножителя совпадает с количеством строк второго сомножителя. Если умножается матрица порядка $m\times k$ на матрицу порядка $k\times n$, то в результате получится матрица порядка $m \times n$. Для получения ее i, j -го элемента необходимо элементы i-ой строки левой матрицы умножить на соответствующие элементы j-го столбца правой матрицы и сложить полученные результаты.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}_{3\times\underline{3}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times 3} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 2\cdot 4 + 1\cdot(-2) & 3\cdot 1 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 7 \\ -1\cdot 0 + 0\cdot 4 + 2\cdot(-2) & -1\cdot 1 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1 & -1\cdot(-1) + 0\cdot 1 + 2\cdot 7 \\ 2\cdot 0 + 5\cdot 4 + (-3)\cdot(-2) & 2\cdot 1 + 5\cdot 3 + (-3)\cdot 1 & 2\cdot(-1) + 5\cdot 1 + (-3)\cdot 7 \end{pmatrix}_{3\times 3} = \underline{\begin{pmatrix} 6 & 10 & 6 \\ -4 & 1 & 15 \\ 26 & 14 & -18 \end{pmatrix}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times\underline{3}} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}_{\underline{3}\times 3} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 11 & 13 & 7 \\ 7 & 31 & -21 \end{pmatrix}}.$$

Произведение матриц не коммутативно, то есть для любых матриц A и B: $A\cdot B \neq B\cdot A$, что и показывают полученные результаты.

Пример 5. Вычислите A^2 для матрицы из (*).

Возвести матрицу в *n-ую* степень, значит умножить ее на себя n раз.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9-2+2 & 6+0+5 & 3+4-3 \\ -3+0+4 & -2+0+10 & -1+0-6 \\ 6-5-6 & 4+0-15 & 2+10+9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 11 & 4 \\ 1 & 8 & -7 \\ -5 & -11 & 21 \end{pmatrix}}.$$

Пусть $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ и $D = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$ (**)

Пример 6. Вычислите $C\cdot D$ и $D\cdot C$ для матриц из (**).

Решение.

Произведение $C\cdot D$ не определено, так как число столбцов матрицы $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, которых три, не совпадает с числом строк матрицы $D = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, которых два. Напоминаем, что перемножить матрицы можно, если количество столбцов первого сомножителя совпадает с количеством строк второго сомножителя.

Если умножается матрица порядка $2\times\underline{2}$ на матрицу порядка $\underline{2}\times 3$, то в результате получится матрица порядка 2×3.

$$D\cdot C=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}8\cdot 5-3\cdot(-3) & 8\cdot 4-3\cdot 1 & 8\cdot 1-3\cdot 2\\ 4\cdot 5-1\cdot(-3) & 4\cdot 4-1\cdot 1 & 4\cdot 1-1\cdot 2\end{pmatrix}_{2\times 3}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}49 & 29 & 2\\ 23 & 15 & 2\end{pmatrix}}.$$

Пример 7. Вычислите $C^T\cdot D$ для матриц из (**).

Решение.

При выполнении операций над матрицами в первую очередь выполняется транспонирование, затем умножение матриц. Для того чтобы найти транспонированную матрицу надо строки матрицы записать в столбцы (или наоборот, столбцы в строки).

$$C^T\cdot D=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}^T_{2\times 3}\cdot\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}_{3\times 2}\cdot\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}_{2\times 2}=$$

$$\begin{pmatrix}40-12 & -15+3\\ 32+4 & -12-1\\ 8+8 & -3-2\end{pmatrix}_{3\times 2}=\underline{\begin{pmatrix}28 & -12\\ 36 & -13\\ 16 & -5\end{pmatrix}}.$$

Пример 8. Вычислите $D\cdot E$ для матриц из (**).

Решение.

На главной диагонали матрицы E стоят 1, другие элементы равны нулю.

$$D\cdot E=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\cdot 1-3\cdot 0 & 8\cdot 0-3\cdot 1\\ 4\cdot 1-1\cdot 0 & 4\cdot 0-1\cdot 1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}}=D.$$

Легко проверить, что $E\cdot D=D$. Полученные равенства верны для произвольных матриц. Единичная матрица E при умножении матриц играет роль числа 1 при умножении чисел.

Пример 9. Найти значение многочлена $f(x)=x^2+x+2$ для матрицы$\cdot D$ (**).

Решение.

Запись $f(D)=D^2+D+2$ будет не корректна: выражение D^2+D есть матрица размера 2×2, к которой нельзя прибавить число 2. А потому $f(D)=D^2+D+2E$, где E - единичная матрица подходящего размера.

$$f(D)=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}8 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 64-12 & -24+3 \\ 32-4 & -12+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 & -21 \\ 28 & -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 60 & -24 \\ 32 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 62 & -24 \\ 32 & -10 \end{pmatrix}}.$$

Пример 10. Вычислите:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

При вычислениях следует помнить о последовательности выполнения действий: сначала умножение матриц и умножения матрицы на число, потом сложение матриц.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 & 3 \\ 3 & 12 & 9 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 10 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 12 & 11 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times\underline{4}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}_{\underline{4}\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 11.

Вычислить *AB* и *BA*, если они существуют, если:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

d) $A=\begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

a)

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}=(-1\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 1+(-1)\cdot(-2))=(-2+4+3+2)=7;$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 2 & 6 & -2 \\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 2 & 3 & -1 \\ (-2)\cdot(-1) & (-2)\cdot 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $AB=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2+2\cdot 1+0\cdot 0 & 9 \\ 2\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

c) $AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, произведение BA не существует.

d) $AB = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -f & e & -d \\ f & 0 & -c & b \\ -e & c & 0 & -a \\ d & -b & a & 0 \end{pmatrix} = (af - be + cd) \cdot E = BA$’

где E — единичная матрица.

Ответ: a) AB=7, BA=$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 & -2 \\ -2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$; b) AB=$\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, BA= =$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) AB=$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$, произведение BA не существует;

d) AB= =$(af - be + cd) \cdot E = BA$, где E — единичная матрица.

Пример 12.

Выполнить действия: a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$; b)$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n$.

Решение.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$.

b) Заметим, что при n=2 имеем:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

При n=3 аналогично получаем:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \cos 3\varphi & -\sin 3\varphi \\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi \end{pmatrix}.$$

В итоге: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Ответ: a) $\begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$.

Задача 1.

Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} 2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 2 и сложим со вторым

$$4X - 2Y + 3X + 2Y = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Из первого уравнения системы

$$Y = 2X - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -1 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$

Из задачи следует, что умножение матриц не подчиняется перестановочному (коммутативному) закону, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$ (речь идет о случае, когда оба произведения, AB и BA, имеют смысл). Однако в некоторых отдельных случаях может оказаться, что $AB = BA$. В таких случаях матрицы A и B называются *перестановочными.* Очевидно, что это может иметь место только в том случае, когда A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка.

Задача 2.

Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.

От нас требуется найти все матрицы A второго порядка такие, что

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Пусть $A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

или $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & 2x_1 - x_2 \\ x_3 - x_4 & 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 - x_3 & -x_2 - x_4 \end{pmatrix}$.

Равенство двух матриц означает равенство их элементов, занимающих одинаковые места. Следовательно, имеем систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 = x_2 + 2x_4 \\ x_3 - x_4 = -x_1 - x_3 \\ 2x_3 - x_4 = -x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Проводя соответствующие вычисления, находим общее решение системы:

$$\begin{cases} x_2 = -2x_3 \\ x_4 = x_1 + 2x_3 \end{cases}.$$

Таким образом, общий вид матрицы A будет:

$A = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$, где x_1 и x_3 – любые числа.

Ответ: $\begin{pmatrix} x_1 & -2x_3 \\ x_3 & x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}$, где x_1 и x_3 – любые числа.

Упражнения

1. Произвести умножение матриц в указанном порядке:

a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислить выражения:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$; c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^n$, где $a^2 + bc = 1$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$.

3. Найти все матрицы $X=\begin{pmatrix} x & -y \\ -y & x \end{pmatrix}$, удовлетворяющие уравнению $f(X) = 0$, если $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

4. Решить систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} n & 1 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} \\ 2X + (n+2)Y = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 2 & n-2 \end{pmatrix} \end{cases},$$ где n – номер варианта.

5. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Как изменится матрица

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, если ее умножить справа (слева) на одну из матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

7. Можно ли рассматривать действие добавить к первой строке матрицы все остальные” как умножение (слева или справа) на некоторую вспомогательную матрицу?

8. Для произвольной матрицы A обозначим через $\overline{A}$ матрицу, получающуюся из A заменой всех ее элементов комплексно-сопряженными числами. Доказать, $AB = C$, то $\overline{A}\overline{B} = \overline{C}$.

3.2. Определители второго и третьего порядков

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Заметим, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение[1], определяемое формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2.$$

Величина Δ называется *определителем матрицы второго порядка*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще *определителем произвольной матрицы второго порядка* $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

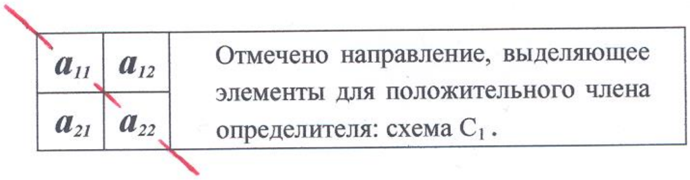
$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 тоже являются определителями:

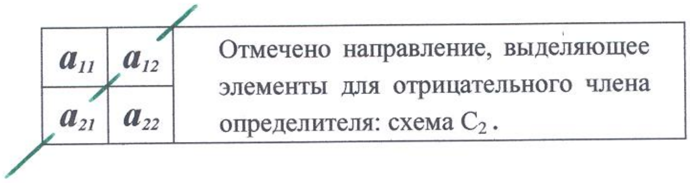
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Левую часть выражения назвали *определителем 2-го порядка,* правая часть выражает *правило его вычисления*. При использовании определителя применяют термины:

При внимательном рассмотрении нетрудно заметить правило использования элементов определителя для записи суммы левой части выражения. Для записи положительного члена определителя ($a_{11} \cdot a_{22}$) используют схему:



Для записи отрицательного члена определителя ($-a_{21}\cdot a_{12}$) используют схему:



Определение. Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$, где α_{ij} — некоторые числа $i, j \in \{1,2\}$.

Выражение $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$ называется *определителем 2-го порядка матрицы А. Обозначение:* $|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12}$.

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка можно изобразить следующим образом:

Совершенно аналогично для произвольной квадратной матрицы *А* третьего порядка можно рассмотреть *определитель 3-го порядка матрицы А.*

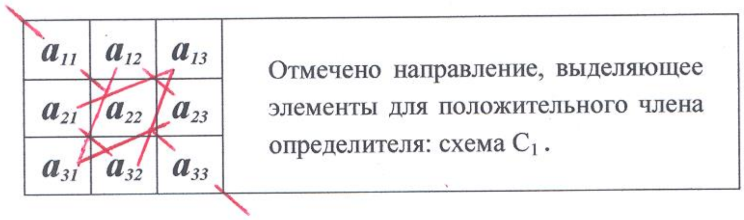
Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

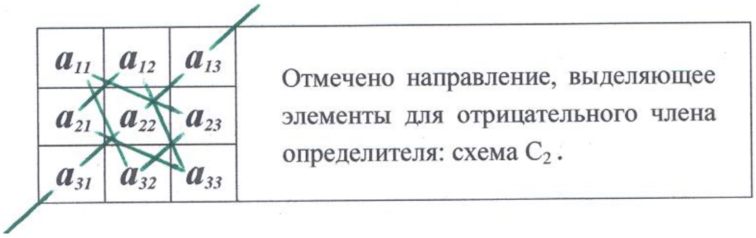
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Для определителей 3-го порядка можно было, как и для определителей 2-го порядка, начинать с системы 3-х уравнений с тремя неизвестными. Реализуя идею: разделить переменные так, чтобы в одно уравнение входила только одна неизвестная величина, мы обязательно придём к конструкции определитель 3-го порядка. Тогда по аналогии

$$|A|=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}=\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23}+\alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-\alpha_{33}\alpha_{21}\alpha_{12}--\alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$$

Представленное соответствие, то есть формула для вычисления определителя, легко запоминается, если использовать геометрическую схему составления членов определителя:

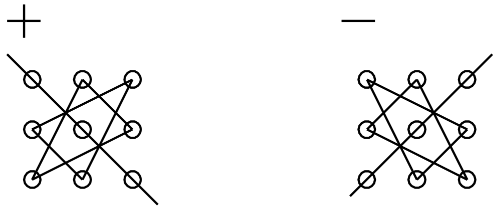




Схематически правило для вычисления определителей третьего порядка (так называемое “правило треугольника” или правило Саррюса) может быть изображено следующим образом:

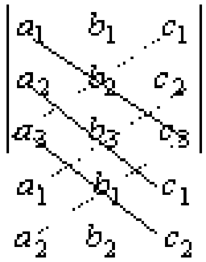
<u>*Правило треугольника:*</u>

схематически изображается следующим образом



<u>*Правило Саррюса*</u>

заключается в том, что приписываем первую и вторую строчки снизу определителя.



Проводим главную диагональ и две линии ей параллельные. Проводим побочную диагональ и две линии ей параллельные. Перемножаем числа, стоящие на каждой из трех первых линий, и домножаем каждое такое произведение на +1. Произведение чисел, стоящих на побочной диагонали или линии ей параллельной, домножаем на -1.

Сумма полученных шести слагаемых и есть определитель третьего порядка.

Пример 1.

Вычислить определители:

$\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение.

1) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) - (2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5}) = (1-2)-(4-5) = 0$.

2) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon^2 + 1 = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + 1 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + 1 =$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

3) $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1 + (1-i)\cdot i\cdot 0 + (1+i)\cdot(-i)\cdot 0 - (1-i)\cdot 1\cdot(1+i) -$

$1\cdot(-i)\cdot i - 1\cdot 0\cdot 0 = 1 + 0 + 0 - (1-i^2) - (-i^2) - 0 = 1 - 1 - 1 - 1 = -2$.

Ответ: 1) 0; 2) $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$; 3) –2.

Упражнения

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$.

2. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x+7y+13=0 \\ 5x+8y+14=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax-by=2a \\ bx+ay=2b \end{cases}$.

3. Доказать, что определитель второго порядка равен нулю тогда и только тогда, когда одна из его строк пропорциональна другой. То же самое для столбцов.

4. Доказать, что значение дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ (где, по крайней мере, одно из чисел c, d отлично от нуля) тогда и только тогда не зависит от значения x, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$.

5. Доказать, что квадратный трехчлен $ax^2 + 2bx + c$ тогда и только тогда будет полным квадратом, когда $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$.

6. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} = 0$, считая неизвестные x и y действительными числами.

7. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$.

8. Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

a) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ 3x+y+4z=-13 \\ 8x+9y+5z=-5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 2x-y+z=9 \\ x-4y+2z=11 \end{cases}$; c) $\begin{cases} bx+ay=-2ab \\ -2cy+bz=3bc \\ cx+az=0 \end{cases}$,

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

9. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & -2 \end{vmatrix}$=0; b) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc$.

3.3. Перестановки и подстановки

Определение 1. Пусть M – некоторое множество, состоящее из n элементов, т.е. M=$\{1,2,\ldots,n \mid n\in\mathrm{N}\}$. *Подстановкой* множества M называется взаимно однозначное отображение множества M на себя.

Обозначение: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ или $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Определение 2. Перестановкой n чисел называется всякое расположение чисел от 1 до n в каком либо порядке. В общем виде она записывается так $i_1, i_2, ..., i_n$.

Говорят, что в перестановке (1) числа i_s и i_t образуют *инверсию*, если $s \le t$, но $i_s > i_t$. Перестановку называют *чётной* (*нечётной*), если количество всех её инверсий есть число чётное (соответственно нечётное). Оно обычно подсчитывается так: берём число i_1 и находим количество чисел, лежащих правее и меньших i_1, т.е. число инверсий, которое образует i_1 с остальными. Затем поступаем аналогично с числами $i_2, ..., i_{n-1}$. Сумма этих чисел и будет количеством всех её инверсий.

Например, в перестановке 3, 1, 2, 5, 4 три инверсии; в перестановке 2, 6, 3, 1, 4, 5 – шесть инверсий, в перестановке 5, 3, 1, 4, 2 число инверсий равно 7 и поэтому она нечётная.

Если в перестановке поменять местами два элемента, то говорят, что в ней совершена *транспозиция*.

Лемма (о транспозиции): *При совершении одной транспозиции чётность перестановки изменяется.*

Доказательство.

Это почти очевидно, если в перестановке совершить транспозицию двух соседних элементов.

Предположим теперь, что совершена транспозиция элементов i_s и i_t, где $s < t$. Будем совершать транспозицию элемента i_t с i_{t-1}, затем с i_{t-2}, пока i_t не займёт место элемента i_s. При этом будет совершено $t-s$ транспозиций соседних элементов. Затем совершаем транспозицию элемента i_s с i_{s+1}, затем с i_{s+1}, пока i_s не займёт бывшее место элемента i_t. При этом будет совершено $t-s-1$ транспозиций, а всего $2(t-s)-1$ таких транспозиций. Это число нечётное, а поэтому чётность перестановки изменяется. □

Задача 1. Определить число инверсий в перестановках:

a) (5 4 1 7 6 3 2); b) (n n−1 … 2 1), а также решить вопрос о четности этих перестановок.

Решение.

а) Первое число в данной перестановке есть 5. Определяем, в скольких инверсиях участвует это число. В данном случае 5 образует инверсии с 1, 2, 3, 4. Таким образом, число 5 участвует в четырех инверсиях. Вычеркиваем (мысленно) число 5 и обращаемся к следующему числу, 4. Оно образует инверсии с 1, 2, 3 — всего 3 инверсии. Вычеркиваем число 4 и обращаемся к следующему, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел, иначе говоря, число таких инверсий равно нулю. Зачеркиваем 1 и т. д. Суммарное число инверсий равно: 4+3+0+3+2+1 = 13.

Поскольку 13 — число нечетное, данная перестановка является нечетной.

b) На первом месте в данной перестановке стоит число n. Оно образует инверсию с любым из последующих чисел: $n-1$, $n-2$, …, 2, 1. Следовательно, число n входит в $n-1$ инверсию. Вычеркиваем n и обращаемся к следующему числу — $(n-1)$. Оно также образует инверсию с любым из последующих чисел; число таких инверсий равно $n-2$ и т. д. Всего в данной перестановке имеется

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2} \text{ инверсий.}$$

Это число будет четным, если произведение $n(n-1)$ делится на 4. Но из двух сомножителей n, $n-1$ один обязательно является нечетным; следовательно, для того чтобы произведение делилось на 4, нужно, чтобы другой сомножитель делился на 4. Итак, перестановка будет четной, если одно из чисел n или $n-1$ делится на 4, и нечетной в противном случае.

Очевидно, в данной перестановке любые два числа образуют инверсию. Следовательно, число всех инверсий равно числу сочетаний из n элементов по 2, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

Ответ: a) 13, нечетная; b) $\frac{n(n-1)}{2}$, перестановка четная если одно из чисел n, $n-1$ делится на 4, и нечетная в противном случае.

Определение 3. Подстановка называется *четной,* если обе перестановки (верхняя и нижняя) имеют одинаковую четность.

Задача 2.

Определить, четна или нечетна подстановка:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данном случае число инверсий в верхней перестановке равно 10, в нижней — 6. Следовательно, подстановка четная.

Ответ: чётная.

Упражнения

1. Определить число инверсий в перестановках:

a) (7 6 9 1 2 3 5 4 8);

b) ($2n$ $2n-1$ … $n+2$ $n+1$ n $n-1$ … 2 1);

c) (1 3 5 7 … $2n$-1 2 4 6 … $2n$).

2. Подобрать i и k так, чтобы:

a) перестановка (1 2 7 4 i 5 6 k 9) была четной;

b) перестановка (1 i 2 5 k 4 8 9 7) была нечетной.

3. Решить вопрос о четности подстановок:

a)$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 1 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$; b)$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$.

3.4. Определители *n*-го порядка

Рассмотрим квадратную матрицу $A=(\alpha_{ij})$ порядка n. Выберем по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы и составим произведение этих элементов, называемое членом определителя: $\alpha_{1j}\alpha_{2k}\dots\alpha_{nr}$, (*)

где вторые индексы j, k, …, r образуют перестановку чисел 1, 2, …, n.

Определение 1. Определителем квадратной матрицы n-го порядка называется сумма n! слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строчки и из каждого столбца, помноженное на +1, если подстановка, образованная индексами элементов, входящих в произведение, четна и на -1, если нечетна.

Определитель матрицы A обозначается через $|A|$ или $det\ A$, и если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то по определению

$$|A| = \sum_{<i_1,\dots,i_n>} (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

где значок сокращенного суммирования берется по всем перестановкам $i_1 i_2 \dots i_n$.

Определитель матрицы A порядка n записывается так:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Задача 1. С каким знаком входит в определитель 5-го порядка следующее произведение: $a_{51}a_{23}a_{34}a_{45}a_{12}$?

Решение.

Напомним правило знака. Если $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ — какой-либо член определителя *n-го* порядка, то знак, с которым это произведение входит в определитель, зависит от четности подстановки

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}.$$

Точнее, если эта подстановка четная, произведение берется со знаком плюс, если подстановка нечетная — со знаком минус. В данном случае имеем четную подстановку

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, произведение берется со знаком плюс.

Ответ: со знаком плюс.

Задача 2.

Пользуясь только определением, доказать, что определитель 5-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Решение.

Определитель 5-го порядка представляет собой сумму произведений вида $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$, каждое из которых берется с определенным знаком (правило знака сейчас не играет роли). Здесь $(j_1 \quad j_2 \quad j_3 \quad j_4 \quad j_5)$ – любая перестановка из чисел 1, 2, 3, 4, 5; поэтому всего в таком определителе должно быть 5! = 120 членов. Однако, в данном случае многие члены определителя будут равны нулю. Посмотрим, какие члены могут быть отличны от нуля. Для этого нужно, чтобы все пять сомножителей $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ были отличны от нуля. Но $a_{5j_5} \neq 0$ возможно только при $j_5 = 1$ или $j_0 = 2$ (элементы a_{63}, a_{64}, a_{66} по условию равны нулю). То же самое относится к a_{4j_4} и a_{3j_3}. Итак, рассматриваемое произведение может быть отлично от нуля лишь в том случае, когда любое из чисел j_3, j_4, j_6 равняется 1 или 2. Но это невозможно, так как j_3, j_4, j_6 — три различных числа. Следовательно, все члены данного определителя равны нулю, а вместе с ними равен нулю и сам определитель.

Задача 3. Пользуясь только определением, вычислить определители:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \text{b)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

в которых все элементы по одну сторону от главной (побочной) диагонали равны нулю.

Решение.

а) Выясним, какие из членов $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$, в данном определителе могут быть отличны от нуля. Очевидно, для этого нужно, чтобы j_1 равнялось 1, j_2 – 1 или 2, j_3 − 1, 2 или 3 и т. д. Так как $j_2 \neq j_1$, то отсюда j_2=2. Так как j_3 не равно ни j_1 ни j_2, то отсюда , j_3= 3, и т. д. В результате приходим к выводу, что единственным отличным от нуля членом в данном определителе может быть только $a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$.

Это произведение входит в определитель со знаком плюс. Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

b) Рассуждая аналогично, приходим к тому, что единственным ненулевым членом данного определителя может быть лишь $a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$. Определим его знак. Поскольку первые индексы сомножителей члена определителя располагаются в порядке возрастания, то знак определяется чётностью перестановки из вторых индексов (n $n-1$ $n-2$ … 1). Определим количество инверсий в ней.

1 соответствует $(n-1)$ инверсия,

2 соответствует $(n-2)$ инверсии,

… … …

$(n-1)$ соответствует 1 инверсия.

Всего: $(n-1) + (n-2) +\ldots+1 = \dfrac{1+n-1}{2}(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ инверсий.

Итак, данный определитель равен произведению элементов, стоящих на побочной диагонали со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Ответ: a) $a_{11}\cdot a_{12}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$; b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_{1n}\cdot a_{2(n-1)}\cdot\ldots\cdot a_{n1}$.

Упражнения

1. Определить, с каким знаком входит в определитель 7-го порядка произведение: $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

2. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ было членом определителя (какого порядка?) и входило в него со знаком плюс.

3. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 5-го порядка и имеющие вид $a_{14}a_{23}a_{3\alpha_3}a_{4\alpha_4}a_{5\alpha_5}$. Что получится, если из их суммы вынести $a_{14}a_{23}$ за скобки?

4. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.

5. Найти члены определителя:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}, \text{ содержащие } x^4 \text{ и } x^3.$$

6. Пользуясь только определением, вычислить определители:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}; \text{ b) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix};$$

c) определитель шестого порядка, у которого все элементы равны нулю, кроме элементов главной и побочной диагоналей.

7. Дан определитель *n-го* порядка:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{(k+1)1} & \dots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доказать, что он равен произведению двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} a_{(k+1)(k+1)} & \dots & a_{(k+1)n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n(k+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8. Дан определитель порядка *2n*:

$$\left|\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{matrix}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)} \end{matrix}} \end{array}\right|,$$

в котором все элементы, расположенные вне указанных n «ящиков», равны нулю. Доказать, что он равен произведению:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{vmatrix} a_{(2n-1)(2n-1)} & a_{(2n-1)(2n)} \\ a_{(2n)(2n-1)} & a_{(2n)(2n)} \end{vmatrix}$$ — определителей 2-го порядка, соответствующих всем «ящикам».

3.5. Основные свойства определителей *n*-го порядка

Свойство 1. *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.*

Доказательство.

Каждое слагаемое определителя транспонированной матрицы

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$$

равно соответственно слагаемому исходной матрицы A

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}.$$

Если слагаемые соответственно равны, то и их суммы равны, отсюда следует равенство $|A| = |A|^T$.

Замечание. Свойство 1 означает, что с точки зрения вычисления определителей строчки и столбцы квадратной матрицы равноправны, т.е. свойство определителей, доказанное для строчек, выполняется и для столбцов. Это позволяет формулировать свойства как для строчек, так и для столбцов, ограничиваясь доказательствами, скажем, для строчек.

Свойство 2. *Если в определителе поменять местами две строчки (столбца), то знак определителя изменится на противоположный.*

Доказательство.

В квадратной матрице A поменяем местами строчки $\underline{j}$ и $\underline{k}$. Для слагаемого определителя преобразованной матрицы A_1 имеем

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} \ldots & j & \ldots & k & \ldots \\ \ldots & i_k & \ldots & i_j & \ldots \end{pmatrix}} a_{1i_1} \ldots a_{ki_k} \ldots a_{ji_j} \ldots a_{ni_k} =$$

$$= -(-1)^{Inv\begin{pmatrix} \ldots & k & \ldots & j & \ldots \\ \ldots & i_k & \ldots & i_j & \ldots \end{pmatrix}} a_{1i_1} \ldots a_{ki_k} \ldots a_{ji_j} \ldots a_{ni_j}.$$

Просуммировав левые и правые части таких равенств соответственно, мы и получим, что $|A_1| = -|A|$.

Свойство 3. *Если квадратная матрица имеет две одинаковые строчки (столбца), то ее определитель равен нулю.*

Доказательство.

Поменяв местами эти две равные строчки матрицы А, мы получим матрицу В, которая ничем не отличается от матрицы А, поэтому $|A| = |B|$. С другой стороны, по предыдущему свойству $|B| = -|A|$.

Следовательно, $|A| = -|A|, 2 \cdot |A| = 0, |A| = 0.$

Свойство 4. *Если все элементы строчки (столбца) квадратной матрицы равны нулю, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство.

В каждое произведение элементов матрицы, взятых по одному из каждой строчки и каждого столбца, входит элемент из этой строчки, т.е. ноль, поэтому все слагаемые определителя равны нулю; их сумма тоже равна нулю.

Свойство 5. *Если все элементы строчки (столбца) квадратной матрицы умножить на число, то и определитель матрицы домножится на это число.*

Доказательство.

Каждое слагаемое определителя матрицы А домножается на это число λ, так как в него обязательно входит в качестве множителя элемент выбранной строчки. Следовательно, и вся сумма домножается на λ.

<u>*Замечание*</u>. Свойство 5 при вычислении определителей удобно использовать и в такой переформулировке:

Постоянный множитель строчки (столбца) определителя выносится за знак определителя.

Если найдется такое число $\lambda \neq 0$, что каждый элемент одной строчки получается домножением на λ соответствующего элемента другой строчки (столбца), то такие строчки (столбцы) называются пропорциональными с коэффициентом пропорциональности λ.

Свойство 6. *Если две строчки (столбца) квадратной матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.*

Доказательство.

Вынесем за знак определителя коэффициент пропорциональности λ. Получим определитель матрицы с двумя равными строчками (столбцами). По свойству 3 такой определитель равен нулю.

Свойство 7. *Если все элементы i-ой строки матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых*

$$a_{ik}=a'_{ik}+a''_{ik}\ (k=1,2,...,n),$$

то ее определитель можно представить в виде суммы определителей двух матриц, у которых элементами i-ой строки являются соответственно первые и вторые слагаемые разложения, а все остальные строки – такие же, как у исходной матрицы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Аналогичное утверждение, разумеется, имеет место и для столбцов.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$a_{1i_1}\ldots a_{k-1i_{k-1}}\left(b_{i_k}+c_{i_k}\right)a_{k+1i_{k+1}}\ldots a_{ni_n}=$$
$$=a_{1i_1}\ldots a_{k-1i_{k-1}}b_{k_{i_k}}a_{k+1i_{k+1}}\ldots a_{ni_n}+a_{1i_1}\ldots a_{k-1i_{k-1}}c_{k_{i_k}}a_{k+1i_{k+1}}\ldots a_{ni_n}.$$

Ясно, что аналогичное свойство верно и для столбцов.

Будем понимать под линейной комбинацией строчек. $a_1=(a_{11}a_{12}\ldots a_{1n})$ и $a_k=(a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kn})$ с коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ строчку

$$\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_k a_k=\left(\lambda_1 a_{11}+\ldots+\lambda_k a_{k1},\ldots,\lambda_1 a_{1n}+\ldots+\lambda_k a_{kn}\right).$$

Свойство 8. *Если к строчке (столбцу) квадратной матрицы прибавить линейную комбинацию остальных строчек (столбцов), то ее определитель не изменится.*

Доказательство.

Определитель преобразованной матрицы можно представить в виде суммы определителей, один из которых есть определитель исходной матрицы, а остальные – определители матриц, имеющих пропорциональные строчки (равные нулю по свойству 6).

Свойство 9. *Если строчка (столбец) квадратной матрицы есть линейная комбинация остальных строчек (столбцов), то ее определитель равен нулю.*

Доказательство.

Определитель равен сумме определителей матриц с пропорциональными строчками, каждый из которых равен нулю.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычитая из второй строчки первую, домноженную на 2, из третьей первую же, домноженную на 3, из четвертой первую, домноженную на 4, получим определитель треугольной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5. \qquad \text{Ответ: } 20.$$

3.6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа

Пусть дана матрица A n-го порядка. *Минором* любого элемента a_{ij} называют определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Возьмем квадратную матрицу *n-го* порядка. Вычеркнем *k* строчек и *k* столбцов и, не нарушая порядка, сдвинем оставшиеся элементы. Определитель М полученной матрицы *(n – k) – го* порядка называется *дополнительным минором.* Пусть $S_M = i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$ – сумма номеров вычеркнутых строчек и столбцов. Тогда произведение дополнительного минора на $(-1)^{S_M}$ называется *алгебраическим дополнением минора М:* $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}^{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{S_M} \cdot M'$.

Теорема. *Произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя исходной матрицы.*

Доказательство.

Предположим вначале, что минор взят в левом верхнем углу

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+11} & \dots & a_{k+1k} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{array}\right).$$

Произведение слагаемого минора на слагаемое его алгебраического дополнения имеет вид:

$$(-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}} a_{1i_1}\dots a_{ki_k} \cdot (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_{n-k} \end{pmatrix}} (-1)^{2(1+2+\dots+k)} a_{k+1k+j_1}\dots a_{nk+j_n} =$$

$$= (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} + Inv\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ k+j_1 & k+j_2 & \dots & k+j_{n-k} \end{pmatrix}} a_{1i_1}\dots a_{ki_k} a_{k+1k+j_1}\dots a_{nk+j_{n-k}} =$$

$$= (-1)^{Inv\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k & i_{k+1} & \dots & i_n \end{pmatrix}} a_{1i_1}\dots a_{ni_n}.$$

Последнее произведение и есть слагаемое определителя исходной матрицы $i_{k+1} = k + j_1, \dots, i_n = k + j_{n-k}$.

Пусть теперь $i_1, \dots, i_k$ – номера вычеркнутых строчек, а $j_1, \dots, j_k$ – номера вычеркнутых столбцов. Переместим строчку i_1 на первое место, переставляя ее последовательно с соседней строчкой $i_1 - 1$, строчку i_2 на второе место, переставляя ее последовательно с соседней строчкой $i_2 - 2$раза и т.д. Переместим столбец j_1 на первое место, столбец j_2 на второе место и т.д. Пусть d – определитель исходной матрицы, а d_1 – определитель преобразованной матрицы. Тогда $d_1 = (-1)^{S_M - 2(1+2+\dots+k)} \cdot d, d_1 = (-1)^{S_M} \cdot d, d = (-1)^{S_M} \cdot d_1.$

В определителе d_1 выбранный минор оказался в левом верхнем углу и по доказанному при рассмотрении первого случая произведение с слагаемого a этого минора на слагаемое b его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя d_1: $c = ab$. А из равенства $d = (-1)^{S_M} \cdot d_1$ следует, что произведение слагаемого a минора на слагаемое $(-1)^{S_M} \cdot b$ его алгебраического дополнения есть слагаемое определителя d. ■

Теорема Лапласа. *Сумма произведений всех миноров k-го порядка, стоящих на фиксированных k строчках, на их алгебраические дополнения равна определителю исходной матрицы.*

Доказательство.

В миноре k-го порядка $k!$ разных слагаемых, а в его алгебраическом дополнении $(n-k)!$ разных слагаемых. Перемножая минор и его алгебраическое дополнение, мы получим $k!(n-k)$ разных слагаемых определителя. А для всех C_n^k миноров k-*го* порядка, стоящих на фиксированных k строчках, получим $C_n^k k!(n-k)! = n!$ разных слагаемых исходного определителя, т.е. сам определитель.
Ясно, что аналогичное утверждение верно и для столбцов. ■

Следствие 1. *Определитель матрицы* A n*-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. для любого* $i = 1,2,\dots,n$ *имеет место равенство* $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$*, называемое разложением определителя* $|A|$ *по элементам* i*-й строки.*
Аналогично для $k = 1,2,\dots,n$ *имеет место разложение определителя* $|A|$ *по элементам* k*-го столбца:* $|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = d.$$

Доказательство.

Сформулирован частный случай теоремы Лапласа при $k = 1$ – разложение определителя по строчке (столбцу).

Следствие 2. *Сумма произведений всех элементов строчки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строчки (столбца) равна определителю*

$$\sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{jl} = 0.$$

Доказательство.

Рассмотрим квадратную матрицу, имеющую две одинаковые строчки i и j, на месте строчки i находится строчка j. Ее определитель равен нулю. Разложив определитель по строчке i, получим сформулированное равенство.

Матрица, составленная из блоков A, B, нулевого и произвольного

$$F = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline X & B \end{array}\right),$$

где A и B – квадратные матрицы, называется, *ступенчатой*.

Теорема (об определителе ступенчатой матрицы)

$$|F| = |A| \cdot |B|.$$

Доказательство.

Зафиксируем *n* строчек, на которых расположена матрица A. Все миноры *n-го* порядка, стоящие на этих строчках, содержат столбец из нулей и поэтому равны нулю, кроме одного, равного определителю матрицы A. Алгебраическое дополнение этого минора равно определителю матрицы B. По теореме Лапласа $|F| = |A| \cdot |B|$. ■

Теорема. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей.*

Доказательство.

Рассмотрим ступенчатую матрицу

$$F = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right).$$

По теореме Лапласа $|F| = |A| \cdot |B|$. Определитель этой же матрицы *F*, пользуясь свойствами определителей, можно преобразовать к виду

$$|F| = \begin{vmatrix} 0 & AB \\ -E & B \end{vmatrix}$$

(прибавляя к первой строчке *(n+1)*-ю, домноженную на a_{11}, *(n+2)*-ю, домноженную на a_{12} и т.д.). Отсюда вновь по теореме Лапласа

$|F| = |A \cdot B| \cdot |-E| \cdot (-1)^{1+2+\ldots+n+n+1+\ldots+2n} = |AB|, \square\ |A| \cdot |B| = |AB|.$ ■

Разумеется, в теореме Лапласа и следствиях 1 и 2 слово «строки» можно заменить на слово «столбцы».

Задача 1.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив его по элементам второй строки, получим:

$$\Delta = aA_{21} + bA_{22} + cA_{23} + dA_{24} = -a\Delta_{21} + b\Delta_{22} - c\Delta_{23} + d\Delta_{24} = -a\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ b\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 12b - 9c + 3d.$$

Ответ: $9a+12b - 9c + 3d$.

Задача 2. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

В данном случае для разложения целесообразно выбрать третий столбец, так как наличие нулевых элементов дает возможность не вычислять соответствующих алгебраических дополнений (произведение нуля на любое число равно нулю). Получим:

$$\Delta = 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 3 \cdot A_{43} = -3\Delta_{43} = -3\begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} = 3x^3 + 9x.$$

Ответ: $3x^3 + 9x$.

Задача 3. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & -b \\ -b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложив наш определитель по элементам первого столбца, получим:

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & -b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}_{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & -b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -b & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a & -b \end{vmatrix}_{n-1}.$$

Так как в первом определителе нули — под главной диагональю, а во втором — над главной диагональю, то оба они равны произведению элементов, расположенных на главной диагонали. Таким образом,

$$\Delta = a \cdot a^{n-1} + (-b)(-1)^{n+1}(-b)^{n-1} = a^n - b^n.$$

Ответ: $a^n - b^n$.

Задача 4. Найти значение определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы первого столбца являются здесь суммами двух слагаемых, поэтому согласно свойству 3^0, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & x \\ 1 & 2 & b & x \\ 1 & 3 & c & x \\ 1 & 4 & d & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 1 & a & x \\ 2b & 2 & b & x \\ 2c & 3 & c & x \\ 2d & 4 & d & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый столбец пропорционален последнему, во втором же первый столбец пропорционален третьему. Следовательно, по свойству 7 оба они равны нулю, а значит, $\Delta=0$.

Ответ: 0.

Задача 5. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \dots & x & n+x \end{vmatrix}.$$

Решение.

Элементы последней строчки представимы в виде сумм:

$$0 + x,\ 0 + x,\ \ldots,\ n + x.$$

Тогда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n-1 \\ x & x & x & \ldots & x & x \end{vmatrix}.$$

В первом определителе под главной диагональю везде нули, поэтому он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n = n!$. Второй определитель равен нулю, так как у него первая и последняя строки пропорциональны. Таким образом, $\Delta = n! + 0 = n!$.

Ответ: $n!$.

Задача 6. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Здесь целесообразно первую строку, умноженную на 2, прибавить к четвертой. Так как при таком преобразовании определитель не меняется, то:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54.$$

Ответ: 54.

Задача 7. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Легко можно получить нули над главной диагональю. Для этого первый столбец, умноженный на –2, прибавим ко второму. Затем в полученном определителе первый столбец, умноженный на –3, прибавим к третьему. Во вновь полученном определителе опять первый столбец, умноженный на –4, прибавим к последнему. Так как, по свойству 4^0, при наших преобразованиях матрицы определитель не меняется, то в результате этих трех последовательно выполненных преобразований мы получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4\cdot 5 = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 8. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \\ n-2 & n-1 & n & \dots & 4 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix}.$$

Решение.

Вычтем здесь из первого столбца второй (т. е. к первому прибавим второй, умноженный на –1), затем из второго столбца вычтем третий, из третьего – четвертый и т. д., наконец, из предпоследнего столбца вычтем последний. В результате мы получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & n-1 \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе первую строку, (умноженную на 1), прибавим последовательно ко всем остальным:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdots 2\cdot (n+1) = 2^{n-2}(n+1).$$

Ответ: $2^{n-2}(n+1)$.

Задача 9. Вычислить определитель матрицы n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{pmatrix},$$

представив A в виде произведения двух матриц более простого устройства.

Решение.

Элемент матрицы A, расположенный в i-ой строке и j-ом столбце, имеет вид $a_{ij} = 1 + x_iy_j = 1\cdot 1 + x_iy_j$. Следовательно, если ввести в рассмотрение матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

то a_{ij} будет равняться сумме произведений элементов i-ой строки матрицы B на соответствующие элементы j-ой строки матрицы C. Так как при перемножении матриц приходится умножать строки первой матрицы на столбец второй, то отсюда видно, что матрица A равна произведению B и C^{T}, где C^{T} — транспонированная матрица для C.

Отсюда $|A|=|B|\cdot|C^{\mathrm{T}}|=|B|\cdot|C|$, так как от транспонирования определитель не меняется. Но при $n > 2$ оба определителя $|B|$ и $|C|$ равны, очевидно, нулю. Следовательно, и определитель $|A|$ также равен нулю. Исключением является случай $n=2$; тогда $|A| = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Ответ: $n = 2$, тогда $|A| = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$; $n > 2$, тогда $|A| = 0$.

Упражнения

1. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен Δ. Чему равен определитель: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$?

2. Доказать, что, если все элементы одной строки (столбца) определителя равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов определителя равна самому определителю.

3. Как изменится определитель матрицы, n-го порядка, если ее столбцы записать в обратном порядке?

4. Изменится ли определитель, если его матрицу транспонировать относительно побочной диагонали? Относительно главной диагонали?

5. Что произойдет с определителем, если его матрицу повернуть на 90^0 против часовой стрелки?

6. Вычислить определитель *задачи 3*, пользуясь лишь определением определителя.

7. Вычислить определители, разложив их:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ по элементам третьей строки;

c) $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{vmatrix}$ по элементам последнего столбца.

8. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

9. Используя свойства определителей, вычислить:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 12 & 31 & 62 \\ 122 & 315 & 623 \end{vmatrix}.$$

10. Вычислить определители n-го порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & a & a & \dots & a & a \\ -x & -x & a & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & a & a \\ -x & -x & -x & \dots & -x & a \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ -x & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

11. Проверьте утверждение теоремы об умножении определителей для следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$$

рассмотрите произведения: $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot A$.

12. Вычислить определитель матрицы:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}$ путём возведения его в квадрат.

Указание. Примените теорему об умножении определителей к произведению AA^T, где A^{T} — транспонированная матрица.

13. Вычислить определитель n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \dots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix},$$

представив его в виде произведения двух определителей.

14. Докажите, что если A – невырожденная матрица (т.е. $|A| \neq 0$), то $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

15. Пусть B — невырожденная матрица. Докажите, что для любой матрицы A имеет место равенство: $\left|B^{-1}AB\right| = |A|$.

3.7. Вычисление определителей *n*-го порядка

Вычисление определителей основано на формуле разложения определителя по элементам строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

и аналогичной формуле разложения по элементам столбца. Учитывая связь между алгебраическими дополнениями и минорами:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

можно записать:

$$\Delta = a_{i1}(-1)^{i+1} M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2} M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n} M_{in}.$$

С помощью этой формулы вычисление определителей n-го порядка Δ сводится к вычислению ряда определителей $(n-1)$-го порядка — миноров $M_{i1}, M_{i2}, \ldots, M_{in}$. Каждый из этих определителей, в свою очередь, можно свести к определителям $(n-2)$-го порядка, эти последние — к определителям порядка $(n-3)$ и т. д. В конечном счете, вычисление Δ сводится таким путем к вычислению ряда определителей 3-го порядка, или, при желании, даже 2-го. Последние вычисляются непосредственно.

Особенно простой вид принимает разложение определителя по i-ой строке в случае, когда все элементы этой строки, кроме одного a_{ij}, равны нулю. Тогда имеем:

$$\Delta = a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij},$$

благодаря чему вычисление Δ сводится к вычислению единственного определителя $(n-1)$-го порядка M_{ij}. Хотя в наперед заданном определителе Δ может и не оказаться строки с нужным количеством нулей, тем не менее всегда можно, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной строке все элементы оказались равными нулю, кроме одного. Это преобразование основано на одном из свойств определителя, а именно: определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, или, выражаясь короче, если к одной строке прибавить другую, умноженную на любое число. Конкретно способ преобразования определителя к нужному виду объяснён в решении следующей задачи.

Задача 1.

Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Во второй строке определителя уже имеются два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя значения определителя, преобразовать его так, чтобы во второй строке все элементы оказались нулями, кроме a_{24}, равного 1. Очевидно, для этого достаточно ко второму столбцу прибавить четвертый, умноженный на 2, а к третьему столбцу — четвертый, умноженный на (–2). После таких преобразований получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Разлагаем его по элементам второй строки:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В этом определителе удобно выбрать второй столбец, поскольку в нем уже имеется один нуль и, кроме того, элементы этого столбца невелики. Преобразуем определитель так, чтобы все элементы второго столбца, кроме $a_{12} = -1$, стали равными нулю. Для этой цели из третьей строки вычитаем первую, а из четвертой — удвоенную первую. Получаем определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix},$$

по-прежнему равный Δ. Разлагая его по элементам второго столбца, находим:

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель 3-го порядка можно было бы вычислить непосредственно. Однако еще проще разложить его по элементам первого столбца. В результате получим:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ответ: 1.

Упражнения

1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix};\ \text{c)}\begin{vmatrix}3&4&6&7\\1&-2&3&4\\5&-1&2&4\\8&7&1&5\end{vmatrix};\ \text{d)}\begin{vmatrix}1&3&4&5&1\\5&1&1&2&4\\8&1&-1&-1&2\\4&3&-3&4&5\\1&-1&2&4&7\end{vmatrix};$$

$$\text{e)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\-2&1&5&6\\-3&-5&1&7\\-4&-6&-7&1\end{vmatrix};\ \text{f)}\begin{vmatrix}6&1&1&1&1\\1&5&1&1&1\\1&1&4&1&1\\1&1&1&3&1\\1&1&1&1&2\end{vmatrix};\ \text{h)}\begin{vmatrix}23&11&48&106\\19&32&45&116\\7&25&43&83\\67&73&81&289\end{vmatrix}.$$

3. Вычислить определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix}2&0&-1&3&4\\0&1&0&2&1\\-1&0&1&5&3\\-3&1&-2&0&2\\-1&-1&2&5&1\end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&7&10&13\\3&5&11&16&21\\2&-7&7&7&2\\1&4&5&3&10\end{vmatrix};\ \text{c)}\begin{vmatrix}1&0&-1&2&0&0\\0&0&-1&0&-2&1\\2&-1&0&1&3&1\\0&3&2&0&-1&-1\\1&0&2&2&-1&0\\1&2&0&0&-2&0\end{vmatrix}.$$

4. Вычислить определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix}0&1&1&a\\1&0&1&b\\1&1&0&c\\a&b&c&d\end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix}-1&1&1&1&x\\1&-1&1&1&y\\1&1&-1&1&z\\1&1&1&-1&u\\x&y&z&u&0\end{vmatrix}.$$

5. Вычислить определители:

$$\text{a)}\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&-1&-2&\frac{1}{3}\\-1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{5}\\1&1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\2&3&1&\frac{1}{5}\end{vmatrix};\ \text{b)}\begin{vmatrix}\frac{2}{3}&\frac{4}{8}&\frac{6}{9}&1\\1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&-1\\\frac{5}{6}&\frac{1}{3}&\frac{3}{5}&2\\\frac{1}{7}&\frac{1}{3}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\end{vmatrix};$$

$$\text{c)}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{7} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -\sqrt{7} & 0 \end{vmatrix};\ \text{d)}\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{7} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{10} & -\sqrt{7} & -\sqrt{5} & 0 \end{vmatrix}.$$

3.8. Обратная матрица

Определение 1. Квадратная матрица A называется *невырожденной,* если её определитель не равен нулю. Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица A называется *вырожденной* или *особенной*.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица.

Теорема (о произведении определителей). *Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного и того же порядка равен произведению их определителей, т.е.* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Доказательство.

Рассмотрим вспомогательный определитель порядка $2n$

$$|D| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & B & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & \theta \\ \hline -E & B \end{array}\right|$$

Используя теорему Лапласа, вычислим $|D|$, разлагая его по первым n строкам. Так как в них лишь один минор $|A|$ может быть не равен 0, а его алгебраическое дополнение есть $(-1)^{1+2+\ldots+n+1+2+\ldots+n} \cdot |B|$, то $|D| = |A||B|$. Используя свойство определителей, добьемся, что все элементы b_{ij} обратились в 0. Для этого $i-ый$ столбец $|D|$ умножим на b_{ij} и прибавим к $n+j-ому$ столбцу $|D|$, и так для каждых $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$. Получим

$$|D| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & A & \cdots & \cdots & C & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ \hline -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline -E & \theta \end{array}\right|$$

Вычислим $|D|$, разлагая его по последним n столбцам. Получим $|D| = |C|(-1)^s(-1)^n$, где $s = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) + \ldots + 2n = \frac{(2n+1)2n}{2} = 2n^2 + n$.

Тогда $(-1)^s(-1)^n = (-1)^{s+n} = (-1)^{2n^2+2n} = 1$ и $|D| = |C|$. Но нетрудно проверить, что $C = AB$. □

Пусть A и B – матрицы порядка n. Матрица B называется *обратной* для матрицы A, если $AB = BA = E$. Матрица A называется *невырожденной*, если $|A| \neq 0$.

Лемма (к теореме об обратной матрице).

(*а*) *если A имеет обратную матрицу B, то A- невырожденная;*

(*б*) *если обратная матрица для A существует, то она единственна.*

Доказательство.

(а) Имеем $AB = E$. По теореме о произведении определителей получаем $|A||B| = |AB| = |E| = 1$. Значит $|A| \neq 0$.

(б) Пусть C также обратная матрица для A. Используя ассоциативность умножения матриц, имеем

$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$. □

Оказывается, утверждение (а) можно обратить.

Теорема (об обратной матрице). *Если матрица A- невырожденная матрица, то она имеет обратную матрицу A^{-1}, где*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} \cdots \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} \cdots \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} \cdots A_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

Иными словами, $ij-$ый элемент A^{-1} равен алгебраическому дополнению $ji-$го элемента A, деленному на $|A|$.

Доказательство.

Найдем $ij-ый$ элемент произведения матрицы A на указанную матрицу A^{-1}. Он равен

$$\frac{1}{|A|}\cdot\left(a_{i1}A_{j1}+a_{12}A_{j2}+...+a_{in}A_{jn}\right).$$

Но по следствиям 1 и 2 из теоремы Лапласа сумма в скобках равна $|A|$, если $i=j$, и равна 0, если $i\neq j$. Следовательно $AA^{-1}=E$. Аналогично, используя замечание после следствия 2, доказывается, что $A^{-1}A=E$. ■

Нахождение обратной матрицы

Вычисления обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений

Пусть А – квадратная матрица *n-го* порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Вычисляем определитель *d* матрицы А. Если *d = 0,* то матрица А вырожденная и для нее обратной нет.

2. Если $d\neq 0$, то вычисляем алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} матрицы А. Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. Транспонируем эту матрицу. Матрица

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *присоединенной* или *взаимной для матрицы А.*

4. Домножим матрицу А на величину 1/*d.* Матрица $\frac{1}{d}\tilde{A}$ и есть обратная для А, т. е. $A^{-1}=\frac{1}{d}\tilde{A}.$

Для доказательства этого достаточно проверить, что $\widetilde{A}\cdot A = dE$, $A\cdot\widetilde{A} = dE.$

$$\widetilde{A}\cdot A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}a_{11}+\ldots+A_{n1}a_{n1} & \dots & A_{11}a_{1n}+\ldots+A_{n1}a_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}a_{11}+\ldots+A_{nn}a_{n1} & \dots & A_{1n}a_{1n}+\ldots+A_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = dE.$$

Аналогично проверяется, что $A\cdot\widetilde{A} = dE$. Итак, для всякой невырожденной матрицы существует обратная (и наоборот, как было отмечено раньше). Равенство $A\cdot\widetilde{A} = dE$ в дальнейшем будет также востребовано.

Формула для вычисления обратной матрицы

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{d} & \frac{A_{21}}{d} & \dots & \frac{A_{n1}}{d} \\ \frac{A_{12}}{d} & \frac{A_{22}}{d} & \dots & \frac{A_{n2}}{d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{d} & \frac{A_{2n}}{d} & \dots & \frac{A_{nn}}{d} \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти для неё обратную матрицу A^{-1}.

Решение.

1. Находим определитель $|A|$ матрицы A. Имеем $|A|=-1\neq 0$. Следовательно, обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения для всех элементов матрицы:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4.$$

3. Запишем теперь обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{31}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} \\ \frac{A_{13}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 2.

Дана матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Её определитель $|A|=5$, поэтому обратная матрица A^{-1} существует. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Нахождение обратной матрицы путём элементарных преобразований

Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} необходимо:

1) приписать к матрице A слева единичную матрицу E соответствующей размерности;

2) путём элементарных преобразований над строками всей составной матрицы привести матрицу A к единичной матрице E;

тогда на месте единичной матрицы будет обратная матрица A^{-1}.

Задача. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Поскольку $|A| = 1 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнения

1. Найти матрицу A^{-1}, если:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где ad – bc ≠ 0; b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$; d) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

2. Найти A^{-1}, если:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Проверьте, что если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{4}A.$$

Разъяснение. Под kA, где k — число, понимается матрица, полученная из A умножением всех элементов на k.

4. Найти A^{-1}, если A — матрица n-го порядка:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{pmatrix}$.

5. Найти обратные матрицы для следующих:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & -8 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3.9. Ранг матрицы

Метод элементарных преобразований

Определение. Рангом матрицы называется максимальное число её линейно независимых строк (столбцов).

Наиболее удобным способом вычисления ранга является способ элементарных преобразований.

Элементарные преобразования матриц

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;

4) вычёркивание строки (столбца), состоящей сплошь из нулей.

Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.

Теорема. *С помощью элементарных преобразований в матрице можно поменять местами две строчки (столбца).*

Доказательство. $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i+j \\ j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i \to j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$.

<u>*Замечание*</u>. Удобно при решении примеров перемену местами строчек и перемену местами столбцов называть пятым и шестым элементарными преобразованиями, хотя по структуре они вовсе не элементарные. Иногда седьмым и восьмым элементарными преобразованиями называют приписывание строчки или столбца из нулей, при которых, очевидно, ранг не меняется.

Если от матрицы А к матрице В можно перейти с помощью цепочки элементарных преобразований, то будем называть матрицу *В эквивалентной матрице А* и обозначать это так: В~А.

Легко видеть, что каждое элементарное преобразование обратимо, т.е. если от матрицы А к матрице В можно перейти с помощью элементарных преобразований, то и от матрицы В к матрице А тоже можно перейти с помощью элементарных преобразований. Значит, если В ~ А, то А ~ В; матрицы А и В эквивалентны друг другу.

Теорема. *При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.*

Доказательство. При переходе от матрицы А к матрице В с помощью первого и третьего элементарных преобразований все миноры, отличные от нуля в матрице А, остались отличными от нуля и в матрице В. Все миноры, равные нулю в матрице А, остались равными нулю и в матрице В. Таким образом, первое и третье элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Пусть матрица В получена из матрицы *A* прибавлением к её строчке *i* другой строчки *j*, домноженной на число $\lambda \neq 0$. Все миноры, не затрагивающие строчку *i* в матрице остались равными нулю или отличными от нуля, т.е. такими же какими были в матрице *A*. Минор же, затрагивающий строчку *i* в матрице В, представим в виде суммы $M=M_1+\lambda M_2$, которая может оказаться равной нулю, несмотря на то, что миноры M_1 и M_2 матрицы *A* отличны от нуля. Таким образом, $rB \leq rA$. В силу обратимости элементарных преобразований отсюда следует, что $rA \leq rB$, т.е. $rA = rB$.

Аналогично утверждение доказывается и для четвертого элементарного преобразования. ■

Вместе с тем, любую ненулевую матрицу A с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

где все диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже диагональных, равны нулю. Отметим, что в матрице B система всех строк линейно независима. Поэтому её ранг равен r. Учитывая, что ранг не меняется при элементарных преобразованиях, можем записать: $\operatorname{rank} A = r$.

Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A) = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

В принципе безразлично, проводятся элементарные преобразования над строками или над столбцами матрицы. Однако мы будем пользоваться только преобразованиями строк, допуская исключение для столбцов в случае 1), т.е. допуская перестановку столбцов. Для приведения любой матрицы к виду B этих действий достаточно.

В следующих ниже задачах запись $A \sim B$ обозначает тот факт, что матрица B получена из A элементарными преобразованиями; в частности, отсюда следует, что матрицы A и B имеют одинаковый ранг.

Задача 1. Найти ранг матрицы путём элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

1. Постараемся сначала при помощи элементарных преобразований добиться того, чтобы первый элемент в первом столбце был отличен от нуля, в то время как остальные элементы этого столбца обратились в нуль. С этой целью оставим первую строку без изменения, а к каждой из остальных строк прибавим первую, умноженную на подходящее число; ко второй — первую, умноженную на (–3), к третьей — первую, также умноженную на (–3), наконец, к четвёртой — первую, умноженную на (–5). Получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

Теперь добиваемся того, чтобы второй элемент второго столбца был отличен от нуля, а все следующие за ним элементы этого столбца были равны нулю. Для этого вторую строку оставляем без изменения, а к каждой из следующих за ней строк прибавляем вторую, умноженную на (–2). Получаем матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Третья строка состоит сплошь из нулей; вычёркиваем её, получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

имеющую тот же ранг. Третий элемент в третьем столбце здесь равен нулю, однако можно добиться того, чтобы он был отличен от нуля, если переставить третий и пятый столбцы. Получится матрица:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (*)$$

которая уже имеет требуемый вид. Ранг B равен трём, следовательно, и ранг исходной матрицы A также равен трём.

2. Как видно из первой части решения, матрица A после ряда элементарных преобразований переходит в матрицу B вида (*). При этом в процессе перехода от A к B третья строка обратилась в нулевую (и была отброшена). Если удалить из матрицы A третью строку, то останется матрица

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен рангу матрицы A, т.е. 3. Значит, система всех строк матрицы A' линейно независима. Отсюда следует, что 1-ая, 2-ая и 4-ая строки матрицы A образуют максимальную линейно независимую подсистему строк.

Ответ: rank A=3; 1-ая, 2-ая и 4-ая строки матрицы A образуют максимальную линейно независимую подсистему строк.

Вывод. Решение задачи 1 делает понятным следующее правило нахождения максимальной линейно независимой подсистемы строк матрицы: *чтобы найти максимальную линейно независимую подсистему строк в произвольной матрице A, нужно с помощью элементарных преобразований вида 3) привести эту матрицу к виду* (1) *(см.*

начало пункта) и затем исключить из неё те строки, которые в процессе перехода к матрице (1) *превратились в нулевые. Тогда оставшиеся строки матрицы A будут составлять максимальную линейно независимую подсистему.*

Задача 2. Чему равен ранг матрицы при различных значениях a:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix}?$$

Решение.

Применяем способ элементарных преобразований, как если бы a было конкретным числом:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 8 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 8-a & a-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & a & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3a & a \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что если хотя бы одно из чисел $(6 + 3a)$ или a отлично от нуля, то ранг A равен 3; если же оба эти числа равны нулю, то ранг A равняется 2. Однако последний случай невозможен, так как при $a = 0$ имеем: $6+3a = 6 \neq 0$. Поэтому ранг A равен 3 во всех случаях.

Ответ: rank $A = 3$ при любых значениях a.

Задача 3.

Чему равен ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & a & b & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

при различных значениях a и b?

Решение.

Первую строку матрицы A делаем последней; столбцы, содержащие параметры a и b делаем, соответственно, предпоследним и последним.

Имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & a & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & a+6 & b-10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & a-4 & b+10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 & b+19 \end{pmatrix}.$$

Отсюда: ранг A равен 3, если $a = 9$ и $b = -19$, ранг A равен 4 — в остальных случаях.

Ответ: $\operatorname{rank} A = 3$, если $a = 9$ и $b = -19$; $\operatorname{rank} A = 4$ — в остальных случаях.

Упражнения

1. При помощи элементарных преобразований найти ранги следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 7 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

$$
\text{i)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 11 \\ -1 & -4 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix};\ \text{k)}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -12 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 13 & -7 & 3 \end{pmatrix};
$$

$$
\text{l)}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & -5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix};\ \text{m)}\begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & -39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}.
$$

2. Найти ранги следующих матриц:

$$
\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ a & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 11 & 1 & 2a \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}
$$

при различных значениях a.

Метод окаймляющих миноров

По теореме о базисах любая максимальная линейная независимая система векторов из A содержит одно и то же число векторов. Поэтому корректно следующее определение: число столбцов, образующих в матрице максимальную линейно независимую систему, называется *рангом матрицы по столбцам.* Аналогично определяется и *ранг матрицы по строкам*.

Теорема (о ранге матриц). *Ранг матрицы по столбцам равен ее минорному рангу.*

Доказательство.

Если в матрице любые $r+1$ столбцов линейно зависимы, то, по свойству определителя, любой минор $(r+1)-ого$ порядка равен нулю. Поэтому минорный ранг не больше ранга по столбцам.

Обратно, пусть минорный ранг матрицы A порядка $m\times n$ равен r. Так как при расстановке строк и столбцов матрицы ее ранг не меняется, то можно считать, что минор M $r-ого$ порядка, не равный 0, находится на пересечении первых r столбцов и строк. Рассмотрим *«окаймляющий»* его минор.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \cdots & M & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Здесь $j > r$. Если $i \le r$, то D содержит две равные строки и, по свойству определителей, равен 0. Если же $i > r$, то D – минор $(r+1)$–*ого* порядка и равен 0 по предположению. Вычислим D методом разложения по последней строке:

$$a_{ij}A_1 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ij}M = 0$$

Заметим, что $A_1,\ldots,A_r$, M не зависят от i. Из равенства получаем:

$$a_{ij} = \left(-\frac{A_1}{M}\right)\cdot a_{i1} + \ldots + \left(-\frac{A_r}{M}\right)\cdot a_{ir}$$

Это равенство справедливо при любом i. Поэтому j–*ый* столбец исходной матрицы равен линейной комбинации ее первых r столбцов, взятых с коэффициентами:

$$-\frac{A_1}{M},\quad -\frac{A_2}{M},\ldots,\quad -\frac{A_r}{M}$$

Итак, первые r столбцов образуют максимальную линейную независимую систему столбцов. Значит ранг по столбцам не выше минорного ранга, что заканчивает доказательство теоремы. □

Так как при транспонировании матрицы ее минорный ранг не меняется, то получаем:

Следствие 1. *Ранг матрицы по строкам равен ее рангу по столбцам.*

Следствие 2. *Квадратная матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее строки* (*столбцы*) *образуют линейно независимую систему строк* (*столбцов*).

Доказательство теоремы о ранге дает и метод вычисления ранга матрицы. Именно, найдя минор r–*ого* порядка, не равный 0, надо перебрать все его окаймляющие (в теореме надо брать i, $j > r$), и, если все они равны 0, то ранг матрицы равен r.

Она дает также и способ нахождения максимальной линейно независимой системы строк (столбцов) матрицы. Именно, это будут те строки (столбцы), в которых лежит минор наивысшего порядка, не равный нулю.

Пример 1. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу этой матрицы отличен от нуля. $d=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2.$

Минор третьего порядка $d'=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=1,$ окаймляющий d, отличен от нуля, однако оба минора четвёртого порядка, окаймляющие d', равны нулю:

Определение. Матрица имеет ранг r, если среди её миноров существует хотя бы один минор порядка r, отличный от нуля, а все миноры порядка $(r + 1)$ и выше равны нулю или не существуют.

Метод окаймляющих миноров состоит в следующем:

1. Выбираем некоторый минор матрицы (как правило, берут минор в левом верхнем углу), который не равен нулю. Затем вычисляют *все* миноры, окаймляющие этот минор, порядок которых на 1 больше данного. Если *все* они равны нулю, то ранг матрицы равен порядку выбранного минора.

2. Если хотя бы один из окаймляющих миноров не равен нулю, то вычисляют все окаймляющие его миноры. Если они все равны нулю, то ранг матрицы равен порядку этого окаймляющего минора, если хотя бы один отличен от нуля, то берут этот окаймляющий минор и т.д.

Задача 1.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

Указать максимальную линейно независимую подсистему строк в матрице A.

Решение.

Начинаем с миноров первого порядка, т.е. с элементов матрицы A. Среди них явно имеются отличные от нуля. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и второго столбца, получаем минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, равный нулю. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам третьего порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвёртый). Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен 2. Максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, первая и вторая строки.

Ответ: rank $A = 3$; максимальную линейно независимую подсистему образуют, например, первая и вторая строки.

Задача 2.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Легко находим минор 3-го порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -2,$$

отличный от нуля. Окаймляя его при помощи четвёртого столбца и четвёртой строки, получаем минор 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix},$$

равный нулю. Однако второй окаймляющий минор:

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Для этого минора в матрице A уже не существует окаймляющих миноров. Следовательно, ранг A равен 4.

Ответ: rank A = 4.

Задача 3.

Найти методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ в зависимости от значений a.

Решение.

В качестве минора 1-го порядка, не равного нулю, возьмём элемент M_1=1, расположенный в третьей строке и первом столбце. Окаймляющие его миноры 2-го порядка суть:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1, \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

Единственное значение a, при котором все эти миноры равны нулю, есть $a = 1$; тогда ранг A равен 1. Если же $a \neq 1$, то отличным от нуля будет хотя бы первый из указанных миноров. Окаймляющий его минор третьего порядка есть сам определитель матрицы A. Он равен

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$$

Выясним, при каких значениях a это выражение равно нулю. Для этого решим уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Имеем:

$$x^3-3x+2=(x^3-x)-(2x-2)=x(x^2-1)-2(x-1)=(x-1)(x^2+x-2),$$

откуда следует $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. Следовательно, если $a \neq 1$ и $a \neq -2$, то ранг A равен 3.

Ответ: при $a = 1$ — rank $A = 1$, при $a = -2$ — rank $A = 2$, при всех остальных значениях a rank $A = 3$.

Упражнения

1. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix};\ \text{b)} \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix};\ \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix};\ \text{e)} \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 0 & 7 & 11 \end{pmatrix};\ \text{f)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 & 8 \\ 3 & 8 & -9 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};\ \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 1 \end{pmatrix};\ \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & 8 & -15 & 6 & -5 \\ 5 & 5 & -6 & 11 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Указать в каждом случае максимальную линейно независимую подсистему строк.

2. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ \text{b)} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix};\ \text{c)} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix};\text{d)} \begin{pmatrix} a & a & a+1 \\ a & a & a-1 \\ a+1 & a & 2a+3 \end{pmatrix},$$

в зависимости от значений a.

3. Найти методом окаймляющих миноров ранги следующих матриц:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix};\ \text{b)}\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & c \\ 1 & 1 & a & d \end{pmatrix};\ \text{c)}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ a & b & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

в зависимости от значений a, b, c и d.

Глава 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

В самом общем случае *система линейных уравнений* имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - *неизвестные,* значения которых подлежат нахождению. Как видно из структуры системы, в общем *случае* число неизвестных не обязательно должно быть равно числу уравнений самой системы. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots , a_{mn}$ называются *коэффициентами системы*, а $b_1, b_2, \dots , b_m$ - её *свободными членами.* Для удобства коэффициенты системы a_{ij} ($i = 1, 2, . . ., m; j = 1, 2, . . ., n$) и свободные члены b_i ($i=1, 2, . . .,m$) снабжены индексами. Первый индекс коэффициентов a_{ij} соответствует номеру уравнения, а второй индекс – номеру неизвестной x_i, при которой коэффициент поставлен. Индекс свободного члена b_i соответствует номеру уравнения, в которое входит b_i.

Дадим определения некоторых понятий, необходимых при изучении системы уравнений. *Решением системы уравнений* называется всякая совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$, которая будучи поставлена в систему на место неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, обращает все уравнения системы в тождества. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет решений. Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет одно единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет по крайней мере два различных решения.

Две системы уравнений называются *равносильными* или *эквивалентными*, если они имеют одно и тоже множество решений.

Теорема Кронекера-Капелли. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной.*

Доказательство. Пусть СЛУ (*) имеет частное решение $\overline{x_1},...,\overline{x_n}$. Видно, что столбец из свободных членов СЛУ является линейной комбинацией столбцов ее основной матрицы. Поэтому ранг основной матрицы равен рангу расширенной.

Обратно, пусть ранг основной матрицы СЛУ равен рангу расширенной. С точностью до перестановки уравнений и переименования неизвестных можно считать, что минор наивысшего порядка r находится на пересечении первых r строк и столбцов основной матрицы. Следовательно, существуют такие числа $\overline{x_1},...,\overline{x_r}$, что столбец из свободных членов равен линейной комбинации первых r столбцов основной матрицы. Полагая $\overline{x}_{r+1} = ... = \overline{x}_n = 0$, видно, что $n-ка$ $(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$ является решением СЛУ (*). □

Две СЛУ от одного и того же числа неизвестных называются *равносильными*, если они обе не совместны, либо множества их частных решений равны. Нетрудно показать, что полученная СЛУ равносильна исходной, если

из СЛУ вычеркнуть уравнение вида 0=0;

обе части какого-то уравнения СЛУ умножить на число, отличное от нуля;

прибавить к одному из уравнений другое, умноженное на некоторое число.

Изложим один метод решения СЛУ (*), называемый методом последовательного исключения переменных или методом Гаусса. Будем считать, что $a_{11} \neq 0$ (этого можно всегда добиться с помощью перестановок строк). Попытаемся теперь, умножая первое уравнение на подходящие числа и прибавляя его к последующим, уничтожить в них слагаемые, содержащие x_1. Для этого, умножаем первое уравнение на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и прибавляем ко второму, и так далее, пока не умножим первое уравнение на $\left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ и не прибавим к последнему. Получим равносильную СЛУ вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Полагаем, что $a'_{22} \neq 0$ (этого можно добиться, переставляя строки или переименовывая переменные). Затем временно «забываем» про первое уравнение и продолжаем такую процедуру с оставшимися уравнениями.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

В результате придем к ступенчатой СЛУ, которая имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2r}x_r + a'_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a'_{rr}x_r + a'_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r. \end{cases}$$

Эта часть метода Гаусса часто носит название «прямого хода». Заметим, что число r является рангом основной матрицы СЛУ и он равен рангу расширенной. Теперь для нахождения общего решения СЛУ (*) воспользуемся «обратным ходом». Для этого из последнего уравнения системы выразим x_r через $x_{r+1},...,x_n$. Зная это выражение из предпоследнего уравнения можно выразить x_{r-1} также через $x_{r+1},...,x_n$, и так далее. Наконец получим систему

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + d_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_r + d_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Она равносильна исходной и называется *общим решением* СЛУ (*). Теперь подставляя вместо неизвестных произвольные значения $\overline{x_{r+1}},\ldots,\overline{x_n}$ и вычисляя $\overline{x_1}, \overline{x_2},\ldots,\overline{x_r}$ можно получить все частные решения $\overline{x_1}, \overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}$ СЛУ (*).

Если все свободные члены СЛУ $b_1,\ldots,b_m$ равны 0, то СЛУ называется *системой линейных однородных уравнений* (СЛОУ). СЛОУ всегда имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Несложно проверить истинность следующих утверждений:

сумма двух частных решений СЛОУ также является ее частным решением;

если число умножить на частное решение СЛОУ, то получится также ее частное решение.

В частности, если СЛОУ зависит от n неизвестных, то множество всех частных решений ее образует подпространство в пространстве R^n. Базис этого подпространства называется *фундаментальной системой решений* СЛОУ.

Теорема. *Фундаментальная система решений СЛОУ состоит из $n-r$ некоторых ее частных решений, где $n-$ число неизвестных СЛОУ, а $r-$ ранг ее основной матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим СЛОУ (*), считая, что $b_1 = \ldots = b_m = 0$. Найдем ее общее решение, которое будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = d_{1r+1}x_{r+1} + d_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{1n}x_n \\ x_2 = d_{2r+1}x_{r+1} + d_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + d_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_{rr+1}x_{r+1} + d_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + d_{rn}x_n. \end{cases}$$

Далее свободным неизвестным $x_{r+1},\ldots,x_n$ будем приписывать последовательно 1, а всем остальным 0. Получим $n-r$ частных решений.

Покажем, что векторы

$e_1 = (d_{1r+1}, d_{2r+1}, \ldots, d_{rr+1}, 1, 0, \ldots, 0);$

$e_2 = (d_{1r+2}, d_{2r+2}, \ldots, d_{rr+2}, 0, 1, \ldots, 0);$

…………………………………………

$e_{n-r} = (d_{1n}, d_{2n}, \ldots, d_{rn}, 0, 0, \ldots, 1)$

образуют фундаментальную систему СЛОУ (*).

Минор, стоящий на пересечении всех ее решений и последних их $n-r$ столбцов не равен 0. Значит, решения линейно независимы. Пусть теперь $(\alpha_1,...,\alpha_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},...,\alpha_n)=e$ какое-то ее частное решение. Докажем, что вектор e линейно выражается через векторы $e_1,e_2,\ldots,e_{n-r}$. Рассмотрим линейную комбинацию

$$\alpha_{r+1}e_1+\alpha_{r+2}e_2+\ldots+\alpha_n e_{n-r}=e^{/},$$

вектор $e^{/}$ тоже является решением СЛОУ. Имеем,

$$e^{/}=(\beta_1,...,\beta_r,\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},...,\alpha_n).$$

Но $\alpha_1,...,\alpha_r$ и $\beta_1,\ldots,\beta_r$ однозначно определяются в общем решении через значения $\alpha_{r+1},...,\alpha_n$, придаваемых свободным неизвестным. Поэтому $\alpha_1=\beta_1,...,\alpha_r=\beta_r$. Таким образом, векторы $e_1,e_2,\ldots,e_{n-r}$ являются и системой порождающих подпространства решений СЛОУ, т.е. ее базисом. ■

Следствие. *СЛОУ имеет тривиальное решение в том и только в том случае, когда ранг ее основной матрицы равен числу неизвестных.*

Теорема (о числе решений). *Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е. ранг r матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы. Тогда, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r=n$), то система имеет единственное решение. Если же ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r<n$), то система имеет бесконечное множество решений, а именно: некоторым $n-r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.*

Пример 1. Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+2x_4=11 \\ 4x_1+6x_2-x_3=-1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-x_4=3 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_4=2 \end{cases}.$$

Решение.

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11}\neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}.$$

Системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{array}\right).$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Если матрица А является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица А переводится в матрицу В, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, *треугольной матрицей*. Матрица коэффициентов системы – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Пример 2. Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}.$$

Решение.

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел x_1, x_2, …, x_5, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{array}\right).$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению $x_3–2x_4+3x_5=–4$. Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4=r$; $x_5=s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3=–4+2r–3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2=–3+2r–2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1=4–r+s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу А, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу А можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу А назовем *трапециевидной* или *трапецеидальной*. Очевидно, что матрица в данном примере — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1+0x_2+\ldots 0x_n=b_j \; (b_j\neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел $x_1,x_2,\ldots,x_n$ не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет *бесконечно много решений*.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются *базисными.* В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются *свободными.* В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется *частным решением*.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется *общим решением.*

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется *базисным.*

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, в матрице можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы. Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1 и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое *рангом системы*.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений:

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Решение.

Проведем преобразование расширенной матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, мы не получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4. Решение исходной системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 48. \end{cases}$$

Решение.

Подвергнем преобразованиям расширенную матрицу этой системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 13 & 48 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 20 \\ 0 & -3 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен двум. Приходим, следовательно, к системе уравнений, равносильной исходной

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = -12 \end{cases},$$

в которой одна переменная является независимой. В качестве независимой переменной возьмём x_3, и выразим через неё остальные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 12 - \dfrac{11}{3}x_3 \\ x_2 = 4 - \dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}.$$

Полагая, например, $x_3 = 3$, получим одно из частных решений системы: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 3.$

Пример 5. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Это система однородных уравнений, причём число уравнений меньше числа неизвестных; она будет иметь множество решений. Так как все свободные члены равны нулю, то будем подвергать преобразованиям лишь матрицу из коэффициентов системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}.$$

Мы пришли к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве независимых выберем две переменные, например x_3, x_4. Выразим остальные переменные через независимые. Получим

$$\begin{cases} x_1 = -8x_3 + 19x_4 \\ x_2 = -5x_3 + 11x_4. \end{cases}$$

Тогда фундаментальная система будет иметь следующий вид:

x_1	x_2	x_3	x_4
-8	-5	1	0
19	11	0	1

Любое частное решение системы может быть представлено в виде линейной комбинации фундаментальных решений, т. е. общее решение системы

$$\bar{x} = \alpha(-8, -5, 1, 0) + \beta(19, 11, 0, 1); \alpha, \beta \in R.$$

Упражнения

1. Исследовать совместность и найти общее и одно частное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 9x_3 + x_4 - 3x_5 = 28 \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

2. Исследовать систему и найти общее решение в зависимости от значений параметра λ:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

3. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

4.2. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Системой линейных уравнений (*СЛУ*) n неизвестных $x_1, \dots, x_n$ называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Эта СЛУ состоит из m уравнений от n неизвестных. Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов при неизвестных, называется *основной*, а если к ней приписать столбец из $b_1,...,b_m$ - свободных членов СЛУ, то полученную матрицу называют *расширенной.* СЛУ можно записать и в матричном виде

$$A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

СЛУ называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных $(m=n)$ и основная матрица ее невырожденная.

Правило Крамера. *Крамеровская СЛУ имеет единственное решение* $(\overline{x_1},...,\overline{x_n})$*, которое находится по формулам*

$$\overline{x_1}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\overline{x_2}=\frac{\Delta_2}{\Delta},...,\overline{x_n}=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta-$ *определитель основной матрицы СЛУ, а* Δ_i *получается из* Δ *в результате замены в* Δ $i-$*го столбца на столбец из свободных членов.*

Доказательство. Так как $|A|\neq 0$, то существует обратная матрица A^{-1}. Домножая обе части равенства слева на A^{-1}, получим

$$E\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

Вспоминая, чему равна матрица A^{-1} и находя произведение в правой части получаем

$$\overline{x_i}=\frac{b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+...+b_nA_{ni}}{|A|}$$

Но по следствию 1 из теоремы Лапласа числитель есть Δ_i, если вычислить Δ_i, разлагая Δ_i по $i-$*му* столбцу. ■

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y+z=1\\2x+y+z=-1\\x+3y+z=2.\end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

т. о. $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-1}{1} = -1; \quad y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{1} = 1; \quad z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Упражнения

Решить систему методом Крамера:

a) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ 2x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28 \\ 7x + 3y - 6z = -1 \\ 7x + 9y - 9z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$ f) $\begin{cases} x - y + z = a \\ x + y - z = b \\ -x + y + z = c \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -3x + y + 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$

4.3. Решение систем линейных уравнений в матричном виде

Рассмотрим снова произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными, которую запишем, как и раньше, в матричной форме:

$$A\bar{x} = \bar{b},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матрицу A называют матрицей системы, а матрицу, полученную из матрицы A добавлением столбца свободных членов $\overline{b}$, – *расширенной матрицей системы*. Обозначим расширенную матрицу системы символом $(A \mid b)$:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранги матриц A и $(A \mid b)$ связаны неравенством

$$r(A \mid b) \ge r(A).$$

При решении матричных уравнений вида $AX=B$ или $YA=B$, где A, B — квадратные матрицы n-го порядка, а X — искомая квадратная матрица того же n-го порядка, надо различать два случая:

1. A — невырожденная матрица. В этом случае каждое из уравнений $AX = B$ и $YA = B$ имеет единственное решение $A=AA^{-1}B$ и $Y=BA^{-1}$. В самом деле, легко непосредственно проверить, что $A^{-1}B$ удовлетворяет уравнению $AX=B$ и BA^{-1} удовлетворяет уравнению $YA=B$. Если X_1 и X_2 — решения уравнения $AX=B$, то $AX_1=B$ и $AX_2=B$, откуда $AX_1=AX_2$. Умножая обе части равенства слева на обратную матрицу A^{-1}, получаем $X_1=X_2$. Аналогично убеждаемся в единственности решения уравнения $YA=B$.

$$\mathbf{A}\overline{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{B}} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{B}} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{E}\,\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{B}} \;\Leftrightarrow\; \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{B}}$$

Пример 1. Решить СЛУ с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = 18 \\ 2x + 2y + 3z = 15 \\ 4x + 4y + z = 15 \end{cases}$$

Решение.

Матричный вид системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&3\\4&4&1\end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\overline{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}18\\15\\15\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&-\frac{11}{30}&\frac{1}{10}\\0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$

тогда $\overline{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\overline{\mathbf{B}}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&-\frac{11}{30}&\frac{1}{10}\\0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}18\\15\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Ответ: (1,2,3).

4.4. Решение матричных уравнений

Матричным уравнением называется выражение вида

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$$

или в краткой записи: $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$,

где: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$

$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}-$заданные матрицы, $\det\mathbf{A}\neq 0$, $\mathbf{X}-$неизвестная матрица, которую надо найти. Под решением матричного уравнения будем понимать матрицу $\mathbf{X}$, которая обращает матричное уравнение в тождество.

Искать решение матричного уравнения будем с помощью обратной матрицы

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{EX}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Пример 1. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&3\\4&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&8&9\\2&4&9\\4&8&3\end{pmatrix}$$

Решение.

Искать решение будем по формуле: $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&3\\4&4&1\end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&8&9\\2&4&9\\4&8&3\end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&3\\4&4&1\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}1&8&9\\2&4&9\\4&8&3\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&4&3\\2&2&3\\4&4&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&-\frac{11}{30}&\frac{1}{10}\\0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{15}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{3}&-\frac{11}{30}&\frac{1}{10}\\0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&8&9\\2&4&9\\4&8&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$

Задача 1. Найти матрицу X второго порядка, удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}.$$

Решение.

Здесь матрица $A=\begin{pmatrix}4&3\\1&1\end{pmatrix}$ — невырожденная. Находим, что:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}\text{ и } X=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&-11\\15&15\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-11&-11\\15&15\end{pmatrix}$.

Если A — вырожденная матрица, то в этом случае предыдущий способ непригоден и приходится пользоваться другим приёмом, который мы поясним с помощью следующей задачи.

Задача 2. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

Решение.

Полагаем $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Тогда после перемножения матриц $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и X получаем:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 & 2y_1 + 3y_2 \\ 4x_1 + 6x_2 & 4y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 = 2 \end{cases}; \text{ (I)} \qquad \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 = 4 \end{cases}. \text{ (II)}$$

Системы (I) и (II) являются совместными и неопределёнными. Находим, что $x_1 = \dfrac{1-3x_2}{2}$ — общее решение системы (I) и $y_1 = \dfrac{2-3y_2}{2}$ — общее решение системы (II). Полагая $x_2 = 2a + 1$, $y_2 = 2b$, получаем:

$X = \begin{pmatrix} -3a-1 & 1-3b \\ 2a+1 & 2b \end{pmatrix}$, где a и b — произвольные числа.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -3a-1 & 1-3b \\ 2a+1 & 2b \end{pmatrix}$, $a, b \in$ R.

Обращаем внимание на то, что матричное уравнение $AX = B$ или $YA = B$ в случае вырожденной матрицы A может оказаться неразрешимым (т.е. не имеющим решения), так как соответствующие системы линейных уравнений могут быть и несовместными.

Упражнения

1. Решить системы уравнений, используя обратную матрицу:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y \quad = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1. \\ x_1 + x_2 \quad = 5 \end{cases}$

2. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу X из следующих уравнений:

a) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$; b) $X\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -5 & 6\end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 5 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & -4 & -1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 6 & 3\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix}$; f) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{pmatrix}$; h) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$;

i) $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 7 & -8\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 9 & -3 & 6\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$; k) $\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 2 & -5 & 7\\ 4 & -9 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

l) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}$.

Глава 5. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Линейные векторные пространства

Определение. Упорядоченная совокупность из n действительных чисел называется n-мерным вектором и обозначается в виде строки $X=(x_1,\ \ x_2,\ \ \cdots\ \ x_n)$ или в виде столбца $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}$. Числа $x_1,\ \ x_{2,}\ \ \cdots,\ \ x_n$ называются компонентами вектора.

Определение. Два n-мерных вектора $X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ и $Y=(y_1,\ \ y_2,\ \ \cdots,\ \ y_n)$ называются равными, если у них соответствующие компоненты равны: $x_1=y_1,\ \ x_2=y_2,\ \ \cdots,\ \ x_n=y_n$.

Определение. Нулевым вектором будем называть такой вектор 0, у которого все компоненты равны нулю.

Линейные операции над n-мерными векторами – это умножение вектора на действительное число и сложение векторов. При умножении вектора X на число α все компоненты вектора умножаются на это число:

$$\alpha X = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\ ...,\ \alpha x_n).$$

При сложении двух векторов складываются соответствующие компоненты:

$$X + Y = (x_1 + y_1,\ \ x_2 + y_2,\ \ \cdots,\ \ x_n + y_n).$$

Определение. Линейным векторным пространством R_n называется множество всех n-мерных векторов, для которых определены операции умножения на число и сложение и при этом выполняется:

для $\forall X \in R_n$ и числа α вектор $\alpha X \in R_n$;

для $\forall X, Y \in R_n$ существует вектор $Z = X + Y \in R_n$.

Кроме того, операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $X + Y = Y + X$,

2) $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$,

3) $0 \in R_n$,

4) $\exists(-X),\ X + (-X) = 0$,

5) $1 \cdot X = X$,

6) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$, $\alpha, \beta -$ числа

7) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$,

8) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$.

Пример 1. Даны векторы

a_1=(3, 2, –1, 0), a_2=(–1, 0, 4, 1), a_3=(–2,–2, –3, –1). Найти вектор $b=2a_1–a_2–a_3$.

Решение.

$b=2a_1–a_2–a_3$=2(3, 2, –1, 0)+(–1)(–1, 0, 4, 1)+(–1)(–2,–2, –3, –1)=(6, 4, –2, 0)+(1, 0, –4, –1)+(2, 2, 3, 1)=(9, 6, –3, 0).

Пример 2. Даны векторы

a_1=(6, 4, –2), a_2=(–1, 0, 4), a_3=(–2, –2, –3).

Найти вектор $b=a_1+2a_2+2a_3$.

Решение.

$b=a_1+2a_2+2a_3$=(6, 4, –2)+2(–1, 0, 4)+2(–2,–2, –3)=
=(6, 4, –2)+(–2, 0, 8)+(–4,–4, –6)=(0, 0, 0)=o.

5.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеются n-мерные векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Будем говорить, что вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, ..., a_k$, если $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k$. В результате составления линейной комбинации векторов можно получить нулевой вектор. Существуют такие совокупности векторов, линейные комбинации которых в нулевой вектор не превращаются ни при каких наборах чисел, одновременно не равных нулю. В зависимости от этого вводятся понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение. Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не равные нулю одновременно, что выполняется $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k = 0.$ Векторы $a_1, a_2, ..., a_k \in R_n$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k \neq 0$ ни при каких числах α_i, кроме случая, когда все числа $\alpha_i = 0$ одновременно.

Пример 1. Рассмотрим R_2 – пространство двумерных векторов. Геометрически R_2 – множество всех векторов на плоскости. Пусть плоскость фиксируется системой координат *X0У*, i, j – единичные векторы, направленные по осям координат. Тогда $i = (1,0), \quad j = (0,1)$ – линейно независимые векторы, так как $\alpha_1 i + \alpha_2 j \neq 0$ ни при каких числах α_1, α_2 (кроме случая $\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0$ одновременно). Заметим, что матрица А, составленная из компонентов векторов $i, j,$ имеет определитель не равный нулю: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$ Любые два неколлинеарных вектора на плоскости линейно независимы, например, если $a = (2,3), \quad b = (1,4),$ то $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Рассмотрим любые два коллинеарных вектора a_1, b_1. Как известно из векторной алгебры, существует единственное число α, при котором выполняется $b_1 = \alpha a_1 \quad \Rightarrow \alpha a_1 - b_1 = 0.$ Линейная комбинация обращается в 0. Ясно, что компоненты векторов пропорциональны и если $a_1 = (3,5),$ то $b_1 = (3\alpha, 5\alpha) \quad, \alpha \neq 0$ и тогда $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3\alpha & 5\alpha \end{vmatrix} = 0$.

Пример 2. Являются ли векторы $a_1=(1,-1,2)$, $a_2=(2,3,1)$, $a_3=(4,1,5)$ линейно зависимыми?

Решение.

Составим линейную комбинацию данных векторов: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=0,$ в которой числа $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ нужно определить. Для этого перейдем к линейным комбинациям соответствующих компонентов:

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 &= 0, \\ -\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 &= 0, \\ 2\alpha_1+\alpha_2+5\alpha_3 &= 0. \end{cases}$$

Имеем однородную линейную систему уравнений, которая имеет единственное нулевое решение $\alpha_1=0,\ \ \alpha_2=0,\ \ \alpha_3=0$, если определитель системы не равен нулю (легко проверить по правилу Крамера), другими словами ранг *r* матрицы системы равен трем. В этом случае векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ линейно независимы. Для линейной зависимости должно существовать хотя бы одно ненулевое решение системы уравнений, тогда ранг *r* матрицы меньше трех. Выпишем матрицу А системы и вычислим ранг, приведя ее к ступенчатому виду

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что в матрице А компоненты векторов расположены в виде столбцов. Хотя, как известно, величина ранга не меняется при транспонировании. Прибавим элементы первой строки к элементам второй строки и, умноженные на два, вычтем из третьей строки. Получим в результате матрицу

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 вторую строку разделим на 5, а третью на (-3). Тогда будем иметь матрицу

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем из третьей строки элементы второй строки, получим ступенчатую матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что ранг матрицы равен двум. Данные векторы линейно зависимы. Можно найти ненулевые значения $\alpha_1,\ \alpha_2, \alpha_3$, составив систему уравнений по последней матрице:

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 & = & 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = & -4\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_{33} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha_1 - 2\alpha_2 & = & -4\alpha_3 \\ \alpha_2 & = & -\alpha_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = -2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{matrix}.$$

Вместо α_3 можно подставить любое число не равное нулю. Например, если принять $\alpha_3 = 1$, то $\alpha_2 = -1,\ \alpha_1 = -2.$ Тогда имеем $-2a - a_2 + a_3 = 0$ или $a_3 = 2a_1 + a_2$. Согласно определению векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ линейно зависимы.

Пример 3. Дана система векторов четырехмерного пространства $a_1 = (2,\ 1,\ -1,\ 0);\ a_2 = (3,\ 2,\ -1,\ 2);\ a_3 = (1,\ 0,\ -1,\ -2).$ Требуется определить является ли данная система линейно зависимой и, если да, то найти зависимость.

Решение.

Составим матрицу: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Находим ранг матрицы А. Для этого переставим строки в матрице А, получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1, умножив первую строку на два, вычтем из второй и, умножив на три, вычтем из третьей. Получим матрицу

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 третью строку разделим на два. Получим матрицу:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_3 вторую строку вычтем из третьей, получим матрицу:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_4 исключим последнюю строку, получим матрицу:

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы A_5 равен двум, так как минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ и минора более высокого порядка, отличного от нуля, в этой матрице нет.

Рассмотрим в общем виде критерий линейной зависимости и независимости системы векторов из пространства R_n. Пусть

$$y_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), \quad y_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, y_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$$

элементы пространства R_n. Составим матрицу, столбцами которой являются компоненты векторов

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix}.$$

Если ранг этой матрицы равен числу векторов в системе, то векторы линейно независимы. Например, векторы: $e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$ из пространства R_2 линейно независимые, так как ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ равен двум. В пространстве R_3 векторы $e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad e_3 = (0,0,1)$ линейно независимые. И вообще, в пространстве R_3 любые три некомпланарных вектора линейно независимы.

Заметим, что если среди множества векторов присутствует нулевой вектор, то такая система векторов всегда линейно зависима. Этот факт легко проверить, составив линейную комбинацию таким образом, чтобы все ненулевые векторы умножались на нулевые коэффициенты, а нулевой вектор умножался на число не равное нулю. В результате получим линейную комбинацию векторов, равную нулю.

Отметим также следующий факт: если множество векторов содержит линейно зависимую подсистему векторов, то само будет линейно зависимым. Это легко доказать, составив линейную комбинацию векторов таким образом, что векторы подсистемы войдут с ненулевыми коэффициентами, а остальные векторы умножатся на нулевые коэффициенты. Тем самым линейная комбинация всех векторов, входящих в данное множество, обратится в нуль. Если же исходная система векторов линейно независима, то любая подсистема этих векторов будет тоже линейно независима.

Критерием линейной зависимости совокупности векторов из пространства R_n является следующая теорема:

Теорема. *Чтобы система векторов* $y_1, y_2, ..., y_k$ *была линейно независимой необходимо и достаточно, чтобы один из векторов выражался в виде линейной комбинации через остальные векторы.*

Доказательство.

1. *Необходимость*. Пусть векторы $y_{1,} y_2, ..., y_k$ линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_k y_k = 0.$ Пусть для определенности $\alpha_1 \neq 0.$ Очевидно , что получим соотношение $y_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} y_2 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} y_k.$ Это равенство означает, что вектор y_1 является линейной комбинацией векторов $y_2, y_3, ..., y_k.$

2. *Достаточность*. Предположим, что $y_1 = \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 + ... + \beta_k y_k$, где $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_k -$ действительные числа. Из этого разложения непосредственно следует линейная зависимость всей системы векторов, так как выполняется равенство $y_1 - \beta_2 y_2 - ... - \beta_k y_k = 0.$

Алгоритм решения вопроса о линейной зависимости или независимости системы векторов $a_1, a_2, ..., a_k$ следующий*:*

1. составить линейную комбинацию векторов $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_к a_к = 0,$ которая в координатной форме представляет собой однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_к.$

2) записать матрицу, располагая векторы столбцами.

3) методом Гаусса привести матрицу к ступенчатому виду.

4) сделать вывод о ранге матрицы и существовании ненулевых решений однородной системы уравнений:

а) если ранг равен числу векторов и система имеет только нулевое решение, то система векторов линейно независима.

б) если ранг меньше числа векторов и система имеет ненулевые решения, то векторы линейно зависимы.

Пример 4. Выяснить является ли система векторов

a_1=(2, 2, 7, –1), a_2=(3, –1, 2, 4), a_3=(1,1, 3, 1) линейно зависимой?

Решение.

Составим линейную комбинацию данных векторов

$$\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \alpha_3 \cdot a_3 = 0;$$

подставим вместо векторов их координаты:

$$\alpha_1\,(2, 2, 7, -1) + \alpha_2 \cdot (3, -1, 2, 4) + \alpha_3 \cdot (1,1, 3, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Данное векторное равенство запишем для каждой координаты, и получим систему:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + (-1)\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 7\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ (-1)\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \\ 0 & 30 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, данная система векторов линейно независима.

Пример 5. Является ли данная система векторов линейно зависимой?

$$a_1 = (1,3,-5) \qquad a_2 = (-8,-4,12) \qquad a_3 = (6,3,-9).$$

Решение.

Линейная комбинация векторов имеет следующий вид $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$. Запишем матрицу и преобразуем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -5 & 12 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -8 & 6 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r = 2.$$

Система векторов линейно зависима. Составим систему уравнений по последней матрице

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ -4\alpha_2 & = & -3\alpha_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & \frac{3}{4}\alpha_3 \end{array},$$

при $\alpha_3=4$ имеем $\alpha_1=0$, $\alpha_2=3$, $\alpha_3=4$. Векторы линейно зависимы и $3a_2 + 4a_3 = 0.$

Упражнения

Является ли система векторов линейно зависимой или независимой?

1. $a_1 = (2,-1,3), \quad a_2 = (-3,5,2), \quad a_3 = (0,2,-4).$
2. $a_1 = (2,-3,0,1), \quad a_2 = (1,4,-2,3), \quad a_3 = (5,2,-1,2).$
3. $a_1 = (2,-5,1,0), \quad a_2 = (1,3,1,-2), \quad a_3 = (4,1,3,-4).$

5.3. Размерность, базис и ранг пространства векторов

Рассмотрим линейное пространство R_n n- мерных векторов. Если существует в R_n система n линейно независимых векторов и при этом любые n+1 векторов линейно зависимы, то число n называется размерностью пространства.

Определение. Базисом линейного векторного пространства R_n, имеющего размерность n, называется совокупность n линейно независимых векторов.

Например, размерность пространства всех векторов, лежащих в плоскости, равна двум, а базисом является любая совокупность двух линейно независимых векторов. Два вектора $e_1 = (1,0), \quad e_2 = (0,1)$ образуют базис. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

В пространстве R_3 трехмерных векторов любая совокупность трех линейно независимых векторов образует базис, а любые четыре вектора линейно зависимы. Таким образом, в пространстве R_n, имеющем размерность n, существует бесчисленное количество базисов. Все базисы содержат одинаковое количество векторов, равное размерности пространства.

Теорема (о единственности разложения вектора по базису). *Любой вектор $x \in R_n$, не входящий в число базисных, может быть* *представлен единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов.*

Доказательство.

Пусть векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют базис и вектор X не входит в их число. Из условия теоремы следует, что векторы $e_{1,}, e_2, ..., e_n$ линейно независимы и размерность пространства n, тогда любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Это означает, что существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}$, одновременно не равные нулю такие, что $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n + \alpha_{n+1} X = 0.$ Число $\alpha_{n+1} \neq 0$, иначе векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ были бы линейно зависимы.

Поскольку $\alpha_{n+1} \neq 0$, то разделив на него последнее равенство получим, что $X = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} e_1 - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} e_2 - ... - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} e_n$, то есть X записан в виде линейной комбинации базисных векторов. Такое представление X будет единственным.

Если предположить, что найдется другое представление вектора $X = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$, то разность $X - X = (\beta_1 - \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}) e_1 + ... + (\beta_n - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}) e_n = 0.$ Векторы $\boldsymbol{e_1, e_2, ..., e_n}$ линейно независимы, следовательно, $\beta_1 = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}},\ \beta_2 = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}, ..., \beta_n = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}.$ Это и доказывает единственность разложения.

Пример 1. Даны векторы $e_1 = (1,2,3),\ e_2 = (-1,0,2),\ e_3 = (0,0,1),\ e_4 = (1,0,-1).$ Проверить образуют ли векторы базис в пространстве R_3 и найти разложение e_4 по базису.

Решение.

Чтобы векторы e_1, e_2, e_3 составили базис пространства R_3, они должны быть линейно независимы, то есть ранг матрицы, составленной из компонентов векторов, должен равняться трем.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определитель этой квадратной матрицы равен двум. Поэтому ранг $r(A) = 3$.Следовательно, векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы и образуют базис в R_3. Существует единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такой, что $e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{lcr} \alpha_1-\alpha_2 & = & 1 \\ 2\alpha_1 & = & 0 \\ 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3 & = & -1 \end{array}\right\}.$$

Решая эту систему, найдем что $\alpha_1=0,\ \ \alpha_2=-1,\ \ \alpha_3=1.$ Значит, $e_4=-e_2+e_3$. Заметим, что вектор e_4 в первоначальном базисе задан компонентами (1,0,-1), а в базисе (e_1,e_2,e_3) этот же вектор определен другими компонентами (0,-1,1).

Пусть имеется система *m* векторов *n*-мерного векторного пространства

$$\begin{array}{lcl} a_1 & = & (a_{11},a_{12},...,a_{1n}) \\ a_2 & = & (a_{21},a_{22},...,a_{2n}) \\ ... & ... & .... \\ a_m & = & (a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}) \end{array}.$$

Определение. Рангом *r* системы векторов называется максимальное число линейно независимых векторов системы.

Любая линейно независимая часть системы, состоящая из *r* векторов, является ее базисом. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из компонентов этих векторов.

Составим эту матрицу, располагая координаты строчками (или столбцами)

$$\text{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если ранг *r* равен числу *m* содержащихся в системе векторов, то система векторов линейно независима. Если $r<m$, то система линейно зависима, то есть любой вектор из системы линейно выражается через базисные векторы.

Пример 2. Найти ранг и базис системы векторов a_1=(1, 3, 0, 5), a_2=(1, 2, 0, 4), a_3=(1,1, 1, 3) a_4=(1, 0, –1, 0), a_5=(1, –3, 3, –1).

Решение.

Действуем по описанной схеме.

$$\begin{pmatrix}1&3&0&5\\1&2&0&4\\1&1&1&3\\1&0&-1&0\\1&-3&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&-1&0&-1\\0&-2&1&-2\\0&-3&-1&-1\\0&-6&3&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&1\\0&2&-1&2\\0&3&1&1\\0&2&-1&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&0&5\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов равен трем (по количеству оставшихся ненулевых строк), один из базисов образуют векторы a_1, a_2, a_3.

Преобразования, которые применялись к матрицам, не изменяют их ранга, то есть все матрицы в примере имеют один и тот же ранг. Таким образом, ранг матрицы системы векторов равен двум, а это означает, что данная система векторов линейно зависима. В этой системе любые два вектора линейно независимы и образуют базис, а третий можно выразить в виде линейной комбинации через выбранные два вектора.

Линейная зависимость трех векторов означает, что существует три числа, одновременно не равные нулю, такие, что выполняется соотношение $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Если предположить, что $\lambda_1 \neq 0$, то $a_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} a_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} a_3$. Тем самым вектор a_1 выражен через a_2 и a_3. Найдем численные значения коэффициентов.

Сначала для краткости введем переобозначения

$$\alpha_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \alpha_3 = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}.$$

Тогда $a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Векторное равенство переносится на все компоненты векторов. Поэтому получаем систему уравнений относительно α_2, α_3

$$\left.\begin{array}{rcr} 3\alpha_2 + \alpha_3 & = & 2 \\ 2\alpha_2 + 0\alpha_3 & = & 1 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 & = & -1 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Очевидно, что $\alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $a_1 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3$. Из последнего равенства ясно, что можно a_2 выразить через a_1 и a_3: $a_2=2a_1-a_3$. Вектор a_3 через a_1 и a_2: $a_3 = 2a_1 - a_2$.

Пример 3. Дана система пяти трехмерных векторов. Требуется определить ранг системы векторов и разложить вектор a_1 по новому базису.

$$a_1 = (2{,}3{,}-4), a_2 = (1{,}0{,}3), a_3 = (2{,}-1{,}2), a_4 = (0{,}2{,}+1), a_5 = (4{,}0{,}3).$$

Решение.

Составим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & +1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определим ранг этой матрицы. Так как порядок самого большого минора, который можно составить из элементов матрицы А равен трем, то $r \leq 3$ равен трем и система векторов линейно зависима. По условию задачи требуется разложить вектор a_1 по линейно независимым векторам. Для определения множества линейно независимых векторов рассмотрим минор из элементов векторов, не содержащих вектор a_1. Например, рассмотрим минор:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & +1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 4 + 12 = 7 \neq 0.$$

Так как минор составлен из элементов векторов a_2, a_3, a_4, то эти векторы линейно независимы и образуют базис. Напомним, что базисом в трехмерном пространстве является любой набор из трех линейно независимых векторов. Любой другой вектор может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Поэтому вектор $a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3 + \gamma a_4$, где α ,β , γ- числа, которые требуется определить. Из векторного равенства получим соответствующие соотношения, связывающие компоненты векторов:

$$\left.\begin{array}{rcr} \alpha + 2\beta & = & 2 \\ --\beta + 2\gamma & = & 3 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma & = & -4 \end{array}\right\}.$$

Полученную систему уравнений можно решить любым известным способом. Предлагается этот этап выполнить самостоятельно, а в итоге получим

$$\alpha = -\tfrac{32}{7}, \quad \beta = \tfrac{23}{7}, \quad \gamma = \tfrac{22}{7}.$$

Замечание. Вектор a_5 не принял участия в решении, однако, если бы мы взяли в матрице А минор $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & +1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -18 \neq 0,$ то базисными были бы векторы a_2 ,a_4 , a_5 . Тогда вектор a_1 записали бы в виде $a_1 = \mu a_2 + \nu a_4 + \eta a_5$, числа μ ,ν ,η определились бы аналогичным способом.

Упражнения

1. Найти ранг и базис системы векторов и один из векторов, не входящий в базис, разложить по базису.

1. $a_1 = (5,-1,2), \quad a_2 = (-3,2,-1), \quad a_3 = (1,0,2), \; a_4 = (0,1,4), \quad a_5 = (-2,2,1).$

2. $a_1 = (0,1,-1,2), \quad a_2 = (-1,2,3,1), \quad a_3 = (3,0,-1,2), \quad a_4 = (2,3,1,5).$

3. $a_1 = (1,-2,1,1), \quad a_2 = (1,0,2,3), \quad a_3 = (-1,2,0,3), \quad a_4 = (2,-4,3,6), \quad a_5 = (1,-2,2,5).$

2. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$,б) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

с) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

3. Найти координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе $(\mathbf{e}_1', \ \mathbf{e}_2', \ \mathbf{e}_3')$, если он задан в базисе $(\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3)$.

а). $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{6, \quad -1, \quad 3\}.$

б) $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (3/2)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{1, \quad 2, \quad 4\}.$

с) $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = (4/3)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{1, \quad 3, \quad 6\}.$

д) $\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + (3/2)\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2' = 3\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_3' = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \end{cases}$ $\mathbf{x} = \{2, \quad 4, \quad 1\}.$

5.4. Пространство решений однородной системы уравнений

Однородной системой линейных алгебраических уравнений называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & = & 0 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 9 \end{cases}.$$

В общем случае $m \neq n.$ Эта система уравнений всегда совместна, так как имеет очевидное нулевое решение $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$ Поставим задачу отыскания ненулевых решений такой системы. В матричной форме система примет вид $A \cdot X = 0$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ матрица системы уравнений,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - матрица неизвестных.

Если матрица A квадратная ($m=n$), и ранг матрица $r=n$, то система уравнений имеет единственное нулевое решение. Поэтому для существования ненулевого решения предположим, что $r<m\leq n$. Тогда

существует минор M_r порядка *r* матрицы A, не равный нулю, пусть для определенности это будет минор

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & -a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r & = & -a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases}.$$

Данная система, очевидно, эквивалентна предыдущей. Назовем $x_1, x_2, ..., x_r$ – основными неизвестными, $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ – свободными неизвестными. Свободным неизвестным можно придавать любые числовые значения, кроме случая одновременного равенства всех свободных неизвестных нулю. Следовательно, последняя система имеет бесчисленное множество решений.

Множество решений однородной системы уравнений образует линейное векторное пространство. Действительно, если вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ является решением однородной системы уравнений, то вектор $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$ также является решением, что легко проверить, подставив компоненты вектора αx в систему.

Если векторы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ являются решениями, то их сумма $z = x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ является решением данной однородной системы уравнений, что проверяется подстановкой компонентов вектора z в систему уравнений.

Найдем теперь размерность и базис пространства решений однородной системы уравнений. Количество свободных неизвестных равно n-r, придавая поочередно каждой свободной неизвестной значение, равное единице, а остальные приравнивая нулю, можно получить n-r векторов решений: при $x_{r+1} = 1,\ \ x_{r+2}, = x_{r+3} = \ldots = x_n = 0,$ решая систему, получим вектор $e_1 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, 1, 0, ..., 0).$ При $x_{r+2} = 1,\ \ x_{r+1} = x_{r+3} = \ldots = x_n = 0$ получим вектор решения $e_2 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_r, 0, 1, 0, ..., 0)$ и так далее. Аналогично при $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_{n-1} = 0,\ \ x_n = 1$ решение будет $e_{n-r} = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_r, 0, 0, ..., 1).$

Векторы $e_1, e_2, ..., e_{n-1}$ линейно независимы, так как матрица С, составленная из компонентов этих векторов имеет ранг, равный *к=n-r,* то есть равен числу векторов. Матрица

$$C=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_r & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы e_1, e_2, .., e_k называются фундаментальной системой решений, они образуют базис пространства решений, размерность которого равна $k = n - r$. Любое другое решение будет линейной комбинацией базисных векторов. Поэтому можно записать общее решение однородной системы в виде $X_{00} = c_1e_1 + c_2e_2 + ... + c_\kappa e_\kappa$, где c_1, c_2, …, c_k - произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 & = & 0. \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Решение.

Сначала найдем ранг матрицы *A* системы уравнений:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку на два и вычтем из второй строки, затем умножим первую строку на три и вычтем из третьей строки, получим матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_1 вторую строку умножим на (-2) и прибавим к третьей строке, получим матрицу A_2, в которой элементы второй строки запишем с противоположным знаком. Получим матрицу

$$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

В матрице A_2 третью строку разделим на (-5) и запишем матрицу

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в A_3 базисный минор, составленный из элементов первого, второго и четвертого столбцов, третьего порядка и равен 1:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы А системы уравнений равен трем, ранг меньше числа неизвестных, что доказывает существование бесчисленного множества решений данной системы уравнений. За основные неизвестные возьмем x_1, x_2, x_4, а за свободные x_3, x_5. По последней матрице A_3 запишем систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 & = & -3x_3 - 5x_5 \\ x_2 + 3x_4 & = & -2x_3 - 9x_5 \\ x_4 & = & -x_5 \end{cases}.$$

1) Пусть x_3=1, x_5=0. Получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_4 & = & -3 \\ x_2 + 3x_4 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & -3 \\ x_2 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -2 \\ x_4 & = & 0 \end{array}$$

Вектор решения e_1=(1,-2,1,0,0).

2) Пусть x_3=0, x_5=1, тогда система уравнений примет вид

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 + 4x_4 & = & -5 \\ x_2 + 3x_4 & = & -9 \\ x_4 & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcr} x_1 + 2x_2 & = & -1 \\ x_2 & = & -6 \\ x_4 & = & -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcr} x_1 & = & 11 \\ x_2 & = & -6 \\ x_4 & = & -1 \end{array}$$

Вектор решения e_2=(11, -6, 0, -1,1). Векторы e_1, e_2 – фундаментальная система решений, образует базис пространства решений, размерность которого k=2. Пространство решений можно записать в виде общего решения $X_{00} = c_1e_1 + c_2e_2$, где c_1 и c_2 - произвольные числа, одновременно не равные нулю.

Упражнения

Найти фундаментальную систему решений и размерность пространства решений однородной системы уравнений:

$$1)\ \begin{matrix} x_1-3x_2+4x_3+2x_4 &=& 0 \\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4 &=& 0 \\ 4x_1-5x_2+5x_3+3x_4 &=& 0 \end{matrix} \quad 2)\ \begin{matrix} x_1+x_2-4x_3-2x_4+2x_5 &=& 0 \\ 3x_1-3x_2+2x_3-x_5 &=& 0 \\ 5x_1-x_2-6x_3-4x_4+x_5 &=& 0 \end{matrix} \quad 3)\ \begin{matrix} 4x_1+3x_2-2x_3-x_4+x_5 &=& 0 \\ 3x_1-x_2+x_3+2x_4+3x_5 &=& 0 \\ x_1+4x_2-3x_3-3x_4-2x_5 &=& 0 \\ -2x_1+5x_2-4x_3-5x_4-5x_5 &=& 0 \end{matrix}$$

5.5. Общее решение неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

Обозначим $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ - одно фиксированное решение системы $AX=B$. Легко доказать, что множество решений системы $AX=B$ является суммой частного решения X^* неоднородной системы и общего решения X_{00} однородной системы, то есть

$$X=X^*+X_{00}.$$

Действительно, подставим X в уравнение AX=B и, пользуясь свойствами матриц, получим $AX=A(X^*+X_{00})=AX^*+AX_{00}=B$, так как $AX^*=B,\ \ AX_{00}=0$. Любое решение неоднородной системы принадлежит своему множеству решений. Поэтому X называется общим решением линейной неоднородной системы уравнений, имеющей бесчисленное множество решений.

План построения общего решения неоднородной системы уравнений:

1. Исследовать систему уравнений на совместность по теореме Кронекера – Капелли.
2. Если ранг меньше числа неизвестных n, обозначить основные (базисные) и свободные неизвестные.
3. Выразить основные неизвестные через свободные.
4. Все свободные неизвестные приравнять нулю и, решая систему, найти вектор X^*.
5. Для соответствующей однородной системы уравнений найти фундаментальную систему решений e_1, e_2, .., $e_к$ и записать X_{00}.
6. Записать ответ в виде $X=X^*+X_{00}$.

Пример. Найти общее решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4 &=& 1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& 5 \end{cases}$$

Решение.

1. Запишем расширенную матрицу системы

C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Очевидно, ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы одинаковые, то есть r=2. Система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

2. Пусть базисный минор $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, следовательно, основными неизвестными будут x_1, x_2, а свободными – x_3, x_4 .

3. По преобразованной матрице запишем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 - x_3 + x_4 \\ 3x_2 = 4 - 2x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

4. Пусть x_3=0, x_4=0. Тогда имеем систему

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{7}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{matrix}.$$

Таким образом, $X^*=(\frac{7}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad 0, \quad 0)$

5. Запишем однородную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 \\ 3x_2 = -2x_3 - 5x_4 \end{cases}.$$

6. а) Пусть x_3=1, x_4=0, тогда $\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_2 = -2 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{matrix}$,

$e_1 = (-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \quad 1, \quad 0)$.

б) Пусть x_3=0, x_4=1, тогда

$$\left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_2 = -5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{-2}{3} \\ x_2 = \frac{-5}{3} \end{matrix}, \; e_2 = (\frac{-2}{3}, \quad \frac{-5}{3}, 0, 1)$$

Таким образом, $X_{00} = C_1 e_1 + C_2 e_2$.

$$X = X^* + X_{00}, \quad X^* = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0\right), \quad e_1 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0\right), \; e_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1\right)$$

5.6. Координаты вектора при переходе к новому базису

Пусть в линейном векторном пространстве R_n имеются два базиса $l = (l_1, l_2, \ldots l_n)$ и $l' = (l'_1, l'_2, \ldots, l'_n)$.

Первый называем «старым базисом», второй-«новым базисом».

Вектор x в старом базисе имел разложение

$$x = x_1 l_1 + x_2 l_2 + \ldots + x_n l_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

В новом базисе этот же вектор будет записываться следующим образом:

$$x = y_1 l_1' + y_2 l_2' + \ldots + y_n l_n' = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

Требуется установить правило вычисления координат $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если известны координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Очевидно, что каждый вектор нового базиса единственным образом раскладывается по векторам старого базиса:

$$l_1' = c_{11} l_1 + c_{21} l_2 + \ldots + c_{n1} l_n$$

$$l_2' = c_{12} l_1 + c_{22} l_2 + \ldots + c_{n2} l_n$$

$$l_n' = c_{1n} l_1 + c_{2n} l_2 + \ldots + c_{nn} l_n$$

Соотношения можно записать в матричной форме:

$$(l_1', l_2', \ldots, l_n') = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \cdot \begin{vmatrix} c_{11} c_{12} \ldots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \ldots c_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1} c_{n2} \ldots c_{nn} \end{vmatrix} = l \cdot C,$$

где C называется матрицей перехода от старого базиса к новому базису l.

Столбцами матрицы перехода являются координаты векторов нового базиса, записанные в старом базисе.

Определитель матрицы C не может равняться нулю, так как базисные векторы $l_1', l_2', \ldots, l_n'$ линейно независимы по определению. Поэтому существует обратная матрица C^{-1}.

Чтобы установить связь старых и новых координат вектора x, нужно разложение подставить и выполнить алгебраические преобразования и в силу единственности разложения вектора x получить равенства:

$$\begin{cases} x_1 = c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \ldots + c_{1n} y_n, \\ x_2 = c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \ldots + c_{2n} y_{n.}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = c_{n1} y_1 + c_{n2} y_2 + \ldots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

В матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathrm{C} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Старые координаты вектора x получаются из новых, если матрицу перехода C умножить на столбец новых компонент.

Если известны компоненты вектора в старом базисе, то новые координаты получатся, если равенство умножить слева на обратную матрицу C^{-1}.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти координаты вектора x=(-3;2) в базисе из векторов l_1'=(1;-1), l_2'=(5;3).

Решение.

Составим матрицу перехода из компонентов нового базиса l_1', l_2'**:**

$C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и найдем обратную матрицу $C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Имеем: $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -19 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow y_1 = -\frac{19}{8}, y_2 = -\frac{1}{8}$.

и в новом базисе вектор имеет разложение: $x = -\frac{19}{8}\ l_1' - \frac{1}{8} l_2'$.

Вектор в новом базисе имеет вид: $x = \left(-\frac{19}{8}, -\frac{1}{8}\right)$.

Пример 2. Составить матрицу перехода от базиса e_1, e_2, к базису e'_1, e'_2, где $e'_1=3e_1+e_2$, $e'_2=5e_1+2e_2$, и найти координаты вектора $a=2e'_1-4e'_2$ в старом базисе.

Решение.

Координатами новых базисных векторов относительно старого базиса являются строки (3, 1) и (5, 2), тогда матрица C примет вид $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Так как $[a]'=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, то $[a]=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Пример 3. Даны два базиса e_1, e_2 – старый базис, e'_1, e'_2 – новый базис, причем $e'_1=3e_1+e_2$, $e'_2=5e_1+2e_2$. Найти координаты вектора $a=2e_1-e_2$ в новом базисе.

Решение.

<u>1 способ</u>.

По условию даны координаты вектора a в старом базисе: $[a]=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу перехода от старого базиса e_1, e_2 к новому базису e'_1, e'_2. Получим матрицу $C=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ для нее найдем обратную матрицу $C^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда $[a]'=T^{-1}[a]=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$.

<u>2 способ.</u>

Так как e'_1, e'_2 базис, то вектор a раскладывается по базисным векторам следующим образом $a=k_1e'_1-k_2e'_2$. Найдем числа k_1 и k_2 – это и будут координаты вектора a в новом базисе.

$a=k_1e'_1-k_2e'_2=k_1(3e_1+e_2)-k_2(5e_1+2e_2)=e_1(3k_1+5k_2)+e_2(k_1+2k_2)=2e_1-e_2$.

Так как координаты одного и того же вектора в данном базисе определяется однозначно, то имеем систему: $\begin{cases} 3\alpha_1+5\alpha_2=2, \\ \alpha_1+2\alpha_2=-1. \end{cases}$ Решая данную систему, получим $\alpha_1=9$ и $\alpha_2=-5$, т.о. $[a]'=\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$.

5.7. Евклидово векторное пространство

Дано векторное пространство V над полем действительных чисел. Это пространство может быть как конечномерным векторным пространством размерности n, так и бесконечномерным.

Определение. Векторное пространство V называется *евклидовым векторным пространством*, если задано правило, по которому любой паре векторов ставится в соответствие единственное действительное число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением векторов* x и y (другими словами, задано отображение $V\times V\to\mathrm{R}$). При этом указанное правило подчинено 4 *аксиомам*:

1) $(x, y)=(y, x)$;
2) $(x+y, z)=(x, z)+(y, z)$;
3) $(\alpha x, y)=\alpha(x, y)$, где $\alpha\in\mathrm{R}$;

4) $(x, x)\geq 0$, причем $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=o$; при этом (x, x) называют *скалярным квадратом* элемента x.

Приведем примеры евклидовых пространств.

1. $V=R^n$ – арифметическое n-мерное векторное пространство. Если векторам $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ поставлено в соответствие число $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$, то аксиомы выполняются. Проверим последнюю из них. Найдем (x, x): $(x, x)=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Сумма квадратов во множестве действительных чисел неотрицательна. Полученное евклидово векторное пространство называется *стандартным евклидовым векторным пространством*.

2. V – пространство направленных отрезков с общим началом в начале координат. Скалярным произведением двух векторов назовем число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Все требуемые свойства выполняются, что известно еще из школы.

3. $V=R(a, b)$ – множество функций, заданных и непрерывных на промежутке $[a, b]$. Зададим скалярное умножение векторов из $R(a, b)$ следующим способом: $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$. Из свойств определенного интеграла получаются все свойства, требуемые в определении скалярного произведения.

В евклидовом векторном пространстве V размерности n задан базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Векторы x и y разложены по векторам базиса: $x=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$, $y=y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n$.

Найдем скалярное произведение этих векторов

$$(x,y)=(x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n)(y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n)=$$
$$=x_1\,y_1(e_1, e_1)+x_1\,y_2(e_1, e_2)+\ldots+x_1\,y_n(e_1, e_n)+\ldots+x_n\,y_n(e_n, e_n)=\sum_{i,j=1}^{n} x_iy_j(e_i,e_j).$$

Очевидно, что для задания скалярного произведения, необходимо задать матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij}=(e_i, e_j)$. Если $(x_1, x_2, \ldots,$

x_n) – строка координат вектора x, а $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – столбец координат вектора

y, то $(x,y)=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Матрица A не может быть произвольной, иначе не станут выполняться аксиомы евклидова векторного пространства. Эта матрица должна быть симметрической и должна задавать положительно определенную квадратичную форму. Простейшим примером такой матрицы является матрица E. При этом $(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$, то есть скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

В евклидовых векторных пространствах от введенного скалярного произведения можно перейти к понятиям нормы вектора и угла между векторами.

Определение. Нормой (*длиной, модулем*) вектора a называется число, равное корню из скалярного квадрата вектора a: $||a||=\sqrt{(a,a)}$.

Поскольку $(a, a)\geq 0$, то норма вектора определена.

Определение. Вектор a называется *нормированным*, если его норма равна единице, т.е. $||a||=1$.

Свойства нормы

1) $||a||=0\Leftrightarrow a=o$.
2) $||\lambda a||=|\lambda|\cdot||a||$, т.к. $||\lambda a||=\sqrt{(\lambda a,\lambda a)}=\sqrt{\lambda^2(a,a)}=|\lambda|\cdot||a||$.
3) Неравенство Коши – Буняковского: $|(a, b)|\leq||a||\cdot||b||$.

Доказательство.

Для любого числа λ и любых векторов a, $b\neq 0$ выполняется условие $(a-\lambda b, a-\lambda b)\geq 0 \Rightarrow (a, a)-2\lambda(a, b)+\lambda^2(b, b)\geq 0$. Квадратный трехчлен относительно λ неотрицателен при любом λ, если его дискриминант неположителен:

$D=4(a,b)^2-4(a,a)(b,b)\leq 0 \Rightarrow (a, b)^2\leq||a||^2\cdot||b||^2 \Rightarrow |(a, b)|\leq||a||\cdot||b||$.

4) Неравенство треугольника: $||a+b||\leq||a||+||b||$.

Пример1. Будем считать, что скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат. Найти норму вектора $a=(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$.

Решение.

Найдем (a, a):

$$(a, a)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=1 \Rightarrow \|a\|=1.$$

Пример 2. Нормировать вектор $b=(-4, 2, 2, -1)$.

Решение.

Найдем норму вектора $\|b\|$: $(b,b)=(-4)^2+2^2+2^2+(-1)^2=25 \Rightarrow \|b\|=\sqrt{(b,b)}=5$. Вектор $e=\frac{1}{\|b\|}\cdot b$ нормирован, это можно проверить, используя свойство 2, тогда $e=\frac{1}{5}\cdot b=(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$.

Определение. Углом между ненулевыми векторами a и b называется угол, меняющийся в пределах от 0 до π и определенный условием $\cos\varphi=\frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|}$.

В силу неравенства Коши – Буняковского $\cos\varphi$ принимает значения от (-1) до 1 и, следовательно, угол между ненулевыми векторами определен.

*Определение***.** Векторы a и b называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Обозначение: $a\perp b$.

Это определение согласуется с определением угла между векторами.

Определение. Нулевой вектор считается ортогональным любому вектору.

5.8. Ортонормированный базис евклидова векторного пространства. Процесс ортогонализации

Определение. Базис евклидова векторного пространства называется *ортогональным*, если векторы базиса попарно ортогональны, то есть если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – ортогональный базис пространства, то $(a_i,a_j)=0$ при $i\neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Определение. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если каждый вектор базиса нормирован, то есть если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис, то

$$(e_i e_j) = 0 \quad при \quad i \neq j \quad и \quad (e_i e_i) = 1 \quad при \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Докажем возможность существования ортонормированного базиса.

Теорема. *Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.*

Доказательство.

Пусть система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ненулевая и ортогональная, то есть $a_i \neq o$, $(a_i, a_j)=0$ при $i \neq j$, $i, j=1, 2, \ldots, k$. Покажем, что равенство $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k=o$ возможно лишь тогда, когда $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_k=0$. Умножим это равенство скалярно на a_1:

$(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_k a_k, a_1)=(o, a_1) \Rightarrow \alpha_1(a_1, a_1)+\alpha_2(a_2, a_1)+\ldots+\alpha_k(a_k, a_1)=0.$

В силу ортогональности системы (т.е. $(a_2, a_1)=0, \ldots, (a_k, a_1)=0$) получим $\alpha_1(a_1, a_1)=0$ и, так как $a_1 \neq o$ (т.е. $(a_1, a_1) \neq 0$), то $\alpha_1=0$. Аналогично доказывается, что $\alpha_2=0, \ldots, \alpha_k=0$ (умножая исходное равенство по очереди на $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$), следовательно, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима. ■

Теорема. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Доказательство.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольный базис евклидова пространства E. Доказательство заключатся в описании алгоритма построения ортогонального базиса по данному базису. Этот алгоритм называется процессом ортогонализации. Пусть $b_1=a_1$, $b_1 \neq 0$ (т.к. $a_1 \neq 0$). Положим $b_2=a_2+\alpha_1 b_1$. Подберем коэффициент α_1 так, чтобы $b_2 \neq 0$ стал ортогонален b_1;

$$(b_1,b_2)=0 \Rightarrow (b_1,a_2+\alpha_1 b_1)=0 \Rightarrow (a_2+\alpha_1 b_1,b_1)=0 \Rightarrow (a_2,b_1)+\alpha_1(b_1,b_1)=0,$$

т.к. $b_1 \neq 0$, то $(b_1,b_1) \neq 0 \Rightarrow \alpha_1=-\dfrac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)}$.

Вектор b_2 не равен нулю, поскольку он является ненулевой линейной комбинацией линейно независимых векторов a_1 и a_2.

Пример 1. Проверить, что векторы

$$e_1=(1,-1,0),\ e_2=(2,2,1),\ e_3=(1,1,-4)$$

образуют ортонормированный базис и для вектора x=(2,5,3) найти разложение по этому базису.

Решение.

Проверим, составляют ли векторы e_1, e_2, e_3 базис в R_3. Для этого составим определитель из компонентов векторов и вычислим его

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -18 \neq 0.$$

Следовательно, векторы составляют базис в пространстве R_3. Проверим ортогональность векторов с помощью скалярного произведения:

$$e_1e_2 = 2-2+0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \text{ ортогональны},$$

$$e_1e_3 = 1-1-0 = 0 \Rightarrow e_1,\ e_2 - \text{ ортогональны},$$

$$e_2e_3 = 2+2-4 = 0 \Rightarrow e_2,\ e_3 - \text{ ортогональны}.$$

Таким образом, векторы попарно ортогональны и составляют базис. Составим теперь ортонормированный базис:

$$e_1^* = \frac{e_1}{|e_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$e_2^* = \frac{e_2}{|e_2|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$e_3^* = \frac{e_3}{|e_3|} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right).$$

Векторы e_1^*, e_2^*, e_3^* ортогональны и имеют единичную длину, то есть составляют ортонормированный базис и координаты вектора x относительно этого базиса равны скалярным произведениям x на соответствующие базисные векторы.

$$xe_1^* = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$xe_2^* = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + 1 = \frac{17}{3}$$

$$xe_3^* = \frac{2}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{3\sqrt{2}} - \frac{12}{3\sqrt{2}} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

Вектор $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}e_1^* + \frac{17}{3}e_2^* - \frac{2}{3\sqrt{2}}e_3^*$.

Замечание. Если данный базис не является ортогональным, то разложение по нему осуществляется по правилу, которое изложено в пункте 5.4.

Процесс ортогонализации

Положим, далее $b_3=a_3+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2$. Подберем β_1 и β_2 так, чтобы $b_3\neq 0$ оказался ортогонален b_1 и b_2, для чего должны выполняться условия $(b_1,b_3)=0$, $(b_2,b_3)=0$. Выполняя преобразования, получим, что $\beta_1=-\dfrac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}$, $\beta_2=-\dfrac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}$. Вектор b_3 не равен нулю, поскольку он является ненулевой линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3.

Продолжая этот процесс, получим систему векторов b_1, b_2, …, b_n, и так как эти векторы ненулевые и попарно ортогональны, то по теореме они линейно независимы, а значит образуют ортогональный базис.

Нормируя ортогональный базис b_1, b_2, …, b_n, получим ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства:

$$e_1=\frac{1}{\|b_1\|}\cdot b_1,\ e_2=\frac{1}{\|b_2\|}\cdot b_2,\ \ldots,\ e_n=\frac{1}{\|b_n\|}\cdot b_n.$$

Пример 2. Применить процесс ортогонализации к векторам $a_1=(2,-2,-2,2)$, $a_2=(3,-1,-1,3)$, $a_3=(2,-2,0,4)$.

Решение.

Это задание можно сформулировать так: по данному базису подпространства построить ортогональный базис.

$b_1=a_1$, $b_1=(2,-2,-2,2)$;

$$b_2=a_2+\alpha_1 b_1,\quad \alpha_1=-\frac{(b_1,a_2)}{(b_1,b_1)}=-\frac{3\cdot 2-1\cdot(-2)+3\cdot 2}{2\cdot 2+(-2)\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2)+2\cdot 2}=-\frac{16}{16}=-1.$$

Тогда $b_2=a_2-b_1=(1,1,1,1)$.

$b_3=a_3+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2$, $\beta_1=-\dfrac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\dfrac{16}{16}=-1$, $\beta_2=-\dfrac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=-\dfrac{4}{4}=-1$. Тогда $b_3=a_3-b_1-b_2=(-1,-1,1,1)$.

Во всяком n-мерном евклидовом пространстве ортонормированный базис не единственный. Примером ортонормированного базиса может служить декартов прямоугольный базис евклидова пространства всех свободных векторов

$$e_1=(1,0,\ldots,0),\quad e_2=(0,1,\ldots,0),\quad \ldots,e_n=(0,0,\ldots,1).$$

Ортонормированный базис – это особо удобный базис пространства. Особая роль этих базисов в том, что если произвольные векторы пространства X и Y определены в таком базисе, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов $(xy)=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$.

Координаты произвольного вектора X относительно ортонормированного базиса равны скалярным произведениям этого вектора на соответствующие базисные векторы. Таким образом, в евклидовом пространстве ортонормированный базис обладает свойствами, аналогичными свойствам декартового прямоугольного базиса.

Упражнения

1. Исследовать на линейную зависимость систему векторов.

1.1. $\mathbf{a}=\{1,\quad 4,\quad 6\},\quad \mathbf{b}=\{1,\quad -1,\quad 1\},\quad \mathbf{c}=\{1,\quad 1,\quad 3\}.$

1.2. $\mathbf{a}=\{2,\quad -3,\quad 1\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad -1,\quad 5\},\quad \mathbf{c}=\{1,\quad -4,\quad 3\}.$

1.3. $\mathbf{a}=\{5,\quad 4,\quad 3\},\quad \mathbf{b}=\{3,\quad 3,\quad 2\},\quad \mathbf{c}=\{8,\quad 1,\quad 3\}.$

2. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы.

2.1. $\begin{cases}3x_1+x_2-8x_3+2x_4+x_5=0,\\ 2x_1-2x_2-3x_3-7x_4+2x_5=0,\\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4-5x_5=0.\end{cases}$

2.2. $\begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0,\\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0,\\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$

2.3. $\begin{cases}x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0,\\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0,\\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0.\end{cases}$

2.4. $\begin{cases}6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0,\\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0,\\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0.\end{cases}$

2.5. $\begin{cases}2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0,\\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0,\\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0.\end{cases}$

2.6. $\begin{cases}5x_1-2x_2+3x_3-4x_4-x_5=0,\\ x_1+4x_2-3x_3+2x_4-5x_5=0,\\ 6x_1+2x_2\qquad-2x_4-6x_5=0.\end{cases}$

2.7. $\begin{cases}12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0,\\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0,\\ x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=0.\end{cases}$

2.8. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0,\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0,\\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0.\end{cases}$

3. Найти какой-нибудь базис системы векторов:

3.1. $\begin{array}{l}a_1=(1,0,1),\\ a_2=(1,1,1),\\ a_3=(1,0,0),\\ a_4=(1,0,-1);\end{array}$

3.2. $\begin{array}{l}a_1=(0,2,-1),\\ a_2=(3,7,1),\\ a_3=(2,0,3),\\ a_4=(5,1,8).\end{array}$

4. Найти координаты вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе:

4.1. $\boldsymbol{e}_1=(2,2,-1),\ \boldsymbol{e}_2=(2,-1,2),\ \boldsymbol{e}_3=(-1,2,2),\ \boldsymbol{x}=(1,1,1);$

4.2. $\boldsymbol{e}_1=(1,5,3),\ \ \boldsymbol{e}_2=(2,7,3),\ \ \boldsymbol{e}_3=(3,9,4),\ \ \boldsymbol{x}=(2,1,1).$

5. Проверить составляют ли векторы ортогональный базис и разложить вектор X по этому базису:

5.1. $\begin{matrix} e_1 & = & (2,0,-2) \\ e_2 & = & (1,-2,1) \\ e_3 & = & (1,1,1) \\ x & = & (3,-2,5) \end{matrix}$, 5.2. $\begin{matrix} e_1 & = & (1,2,5) \\ e_2 & = & (2,-3,-1) \\ e_3 & = & (2,-3,-2) \\ x & = & (3,-1,1) \end{matrix}$

6. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом и найти матрицу перехода от старого базиса к новому.

а) $\boldsymbol{e}_1=(1,2,1),\ \ \boldsymbol{e}_2=(2,3,3),\ \ \boldsymbol{e}_3=(3,7,1),$

б) $\boldsymbol{e}_1=(1,1,1,1),\ \ \boldsymbol{e}_2=(1,2,1,1),\ \ \boldsymbol{e}_3=(1,1,2,1),\ \ \boldsymbol{e}_4=(1,3,2,3),$

в) $\boldsymbol{e}_1'=(1,0,3,3),\ \ \boldsymbol{e}_2'=(-2,-3,-5,-4),\ \ \boldsymbol{e}_3'=(2,2,5,4),\ \ \boldsymbol{e}_4'=(-2,-3,-4,-4).$

7. Найти координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\left(e_1',e_2',e_3'\right)$, если он задан в базисе (e_1,e_2,e_3):

а) $\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+2e_3 \\ e_2'=2e_1-e_2 \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3 \end{cases}$ б). $\begin{cases} e_1'=e_1+e_2+3e_3 \\ e_2'=\dfrac{3}{2}e_1-e_2 \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3 \end{cases}$

$\bar{x}$=(6,-1,3), $\bar{x}$=(1,2,4).

8. Проверить, что векторы следующих систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:

а) $\boldsymbol{a}=(1.-2,2,-3),\qquad \boldsymbol{b}=(2,-3.2,4),$

б) $\boldsymbol{a}=(1,1,1,2),\qquad \boldsymbol{b}=(1,2,3,-3).$

9. Найти векторы, дополняющие следующие системы векторов до ортонормированных базисов:

а) $\boldsymbol{e}_1=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right),\ \ \boldsymbol{e}_2=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right),$

б) $\boldsymbol{e}_1=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),\ \ \boldsymbol{e}_2=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right).$

10. Применяя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис подпространства $L(a_1,a_2,a_3)$:

а) $\begin{matrix} a_1=(1,2,2,-1), \\ a_2=(1,1,-5,3), \\ a_3=(3,2,8,-7); \end{matrix}$ б) $\begin{matrix} a_1=(1,1,-1,-2), \\ a_2=(5,8,-2,-3), \\ a_3=(3,9,3,8). \end{matrix}$

Глава 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

6.1. Основные понятия

Пусть дано множество L; его элементы будут обозначаться малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots$ Пусть, далее, в множестве L определены *операция сложения,* ставящая в соответствие всякой паре элементов a, b из L однозначно определенный элемент $a+b$ из L, называемый их *суммой,* и *операция умножения на действительное число,* причем *произведение* $\alpha \cdot a$ *элемента* a на число α, однозначно определено и принадлежит к L.

Два линейных пространства L и $L^/$ называются *изоморфными,* если существует биективное отображение $f : L \to L^/$, ставящее в соответствие каждому вектору x пространства L вектор $f(x)$ пространства $L^/$, такое что:

$$f(a+b) = f(a) + f(b);$$
$$f(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot f(a).$$

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис L и $x \in L$. Так как $e_1, \ldots, e_n$ – система порождающих, то найдутся числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что $x = \alpha_1 e_1 + .. + \alpha_n e_n$. Если также $x = \beta_1 e_1 + .. + \beta_n e_n$, то имеем $x - x = \theta = (\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)e_n$. Но $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимая система, откуда $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Значит $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Итак, представление вектора x в виде линейной комбинации базисных векторов возможно и единственно. Набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется *координатами* вектора x в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Отображение $\varphi : L \to L$ называется *линейным оператором*, если выполнены условия: для всех $x, y \in L$ и числа α:

а) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

б) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$,

которые можно заменить одним: для всех $x, y \in L$ и чисел $\alpha, \beta,$ верно $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$.

Отсюда следует равенство $\varphi(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 \varphi(a_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(a_n)$, широко используемое в дальнейшем.

Справедлива следующая

Теорема (о существовании и единственности φ). *Пусть* $e_1,\ldots,e_n$ *– базис* L *и* $a_1,\ldots,a_n$ *– произвольные векторы из* L. *Тогда существует единственный линейный оператор* φ *такой, что* $\varphi(e_1)=a_1,\ldots,\varphi(e_n)=a_n$.

Доказательство.

Если $x=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n$, то зададим $\varphi: L\to L$ так: $\varphi(x)=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$. Проверим, что φ– линейный оператор. Если $y=\beta_1 e_1+\ldots+\beta_n e_n$ и γ,δ – произвольные числа, то

$$\varphi(\gamma x+\delta y)=\varphi((\gamma\alpha_1 e_1+\ldots+\gamma\alpha_n e_n)+(\delta\beta_1 e_1+\ldots+\delta\beta_n e_n))=$$
$$=\varphi((\gamma\alpha_1+\delta\beta_1)e_1+\ldots+(\gamma\alpha_n+\delta\beta_n)e_n)=(\gamma\alpha_1+\delta\beta_1)a_1+\ldots+(\gamma\alpha_n+\delta\beta_n)a_n=$$
$$=(\gamma(\alpha_1 a_1)+\ldots+\gamma(\alpha_n a_n)+(\delta(\beta_1 a_1)+\ldots+\delta(\beta_n a_n))=\gamma\varphi(x)+\delta\varphi(y).$$

Предположим, что ψ также линейный оператор L, причем $\psi(e_1)=a_1,\ldots,\psi(e_n)=a_n$.

Имеем $\psi(\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n)=\alpha_1\psi(e_1)+..+\alpha_n\psi(e_n)=\alpha_1 a_1+\ldots+\alpha_n a_n$. Итак $\varphi(x)=\psi(x)$ для любого $x\in L$. Значит $\varphi=\psi$. □

Примеры.

1. Рассмотрим произвольное линейное пространство V и в нем два оператора.

$\varphi_1(x)=0\ \ \forall\, x\in V$. φ_1 называется нулевым оператором.

$\varphi_2(x)=x\ \ \forall\, x\in V$. φ_2 называется тождественным оператором и обозначается id.

Линейность этих операторов проверяется без труда.

2. Рассмотрим линейное пространство $V=\mathrm{R}^2$, т.е. множество всех векторов плоскости, и отображение φ – поворот плоскости на угол $\frac{\pi}{6}$. Это отображение является линейным оператором. Проверяем свойства:

$\varphi\,(x_1+x_2)=\varphi\,(x_1)+\varphi\,(x_2)$,

$\varphi\,(\lambda x_1)=\lambda\varphi(x_1)$.

3. Пусть $V=\mathrm{R}^3$ – множество всех векторов трехмерного пространства. Отображение φ – ортогональное проектирование на плоскость OXY.

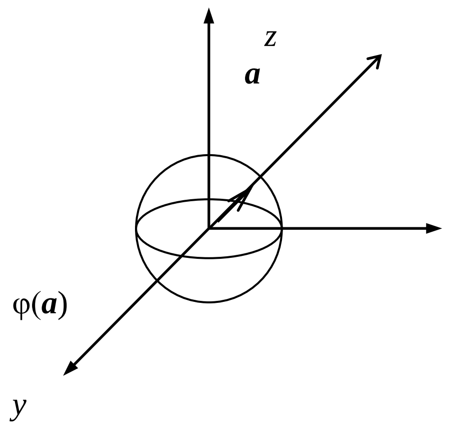
Для проверки линейности этого оператора воспользуемся известными свойствами проектирования.

$\varphi(a+b)=\text{пр}_{OXY}\,(a+b)=\text{пр}_{OXY}\,a+\text{пр}_{OXY}\,b=\varphi(a)+\varphi(b)$;

$\varphi(\lambda a) = \text{пр}_{OXY}(\lambda a) = \lambda\text{пр}_{OXY}\, a = \lambda\varphi(a)$.

φ – оператор проектирования на плоскость – линейный оператор (проектор).

4. Не все отображения являются линейными. В том же векторном пространстве $V = \mathrm{R}^3$ рассмотрим единичную сферу, задаваемую в декартовой системе координат уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, и отображение φ, переводящее вектор a в вектор $\varphi(a)$, сонаправленный вектору a и имеющий единичную длину.



Отображение φ не является линейным оператором, т.к. $\varphi(\lambda a) \neq \lambda\varphi(a)$ при $\lambda \neq 1$.

5. Рассмотрим $V = P_{\mathrm{n}}[x]$, т.е. линейное пространство всех многочленов степени не выше n:

$P_n[x] = \{p(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0,\ a_i \in P\}$, и φ – отображение дифференцирования: $\varphi(a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0) = na_nx^{n-1} + \ldots + a_1$.

Мы знаем свойства производной:

$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$ и $(\lambda p(x))' = \lambda p'(x)$;

следовательно, отображение дифференцирования является линейным оператором, который обозначается $\varphi = d$.

6. Пусть $V = M_n$ – линейное пространство квадратных матриц порядка n, A – фиксированная матрица, φ – отображение $M_n \to M_n$, действующее следующим образом: для произвольной матрицы $B \in M_n$ образ $\varphi(B) = A\cdot B$.

Проверим линейность этого отображения, используя известные свойства умножения матриц:

$\varphi(B + C) = A(B + C) = AB + AC = \varphi(B) + \varphi(C)$;

$\varphi(\lambda B) = A(\lambda B) = \lambda AB = \lambda\varphi(B)$.

Если $n = 2$, а матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то для любой матрицы $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\varphi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Упражнения

1. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие операторы (преобразования):

$Ax = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3,\quad -3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2x_3)$,
$Bx = (6 - 5x_2 - 4x_3,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2)$,
$Cx = (x_3^4,\quad 3x_1 - 2x_2 - x_3,\quad x_2 + 2x_3)$.

$Ax = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2)$,
$Bx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 0,\quad x_2^4 + 2x_3)$,
$Cx = (5x_1 - 4x_2 - 3x_3,\quad 2x_1 - x_2,\quad x_2 + 2x_3)$.

$Ax = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2^4 + 3x_3)$,
$Bx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3)$,
$Cx = (4x_1 - 3x_2 - 2x_3,\quad x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3)$.

$Ax = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4x_3)$,
$Bx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad 1,\quad 2x_1 - 3x_2 - 4)$,
$Cx = (3x_1 + 2x_2 + x_3,\quad x_3,\quad 2x_1^4 - 3x_2 - 4x_3)$.

$Ax = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6)$,
$Bx = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1^4 - 5x_2 - 6x_3)$,
$Cx = (x_1,\quad x_1 - 2x_2 - 3x_3,\quad 4x_1 - 5x_2 - 6x_3)$.

$Ax = (2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2^2 - 5x_3)$,
$Bx = (2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2x_3,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$,
$Cx = (2x_1 + x_2,\quad x_2 - 2,\quad 3x_1 - 4x_2 - 5)$.

$Ax = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$,
$Bx = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3,\quad 4x_1 + 5x_2 + 6)$,
$Cx = (x_1,\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3,\quad 4x_1^4 + 5x_2 + 6x_3)$.

2. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $Ax = \{x_2 - x_1, x_1, x_1 + x_3\}$, $Bx = \{x_2, 2x_2, x_1\}$. Найти:

1. ABx	2. A^2x	3. $(A^2 - B)x$
4. B^4x	5. B^2x	6. $(2A + 3B^2)x$
7. $(A^2 + B^2)x$	8. $(B^2 + A)x$	9. BAx
10. $B(2A - B)x$	11. $A(2B - A)x$	12. $2(AB + 2A)x$

6.2. Матрица линейного оператора в данном базисе

Доказанная ранее теорема показывает, что линейный оператор однозначно определяется в данном базисе $e_1, \dots, e_n$ своими значениями $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$.

Приходим к определению: *матрицей линейного оператора* φ *в базисе* $e_1, \dots, e_n$ называется такая матрица $A_\varphi = (a_{ij})$ $(i=\overline{1..n}; j=\overline{1..n})$, у которой $i-$*ый* столбец есть координаты вектора $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Т. е.,

$$(\varphi(e_1) \quad \varphi(e_2) \quad \dots \quad \varphi(e_n)) = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $[x]$ столбец из координат вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$, т.е. $[x] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. В частности, $[\varphi(x)]-$столбец из координат вектора $\varphi(x)$ в этом же базисе.

Имеет место следующее равенство $[\varphi(x)] = A_\varphi \cdot [x]$. Действительно,

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \varphi(e_1) + \dots + \alpha_n \varphi(e_n) = \alpha_1(\alpha_{11} e_1 + \dots + \alpha_{n1} e_n) + \dots +$$
$$+ \alpha_n(\alpha_{1n} e_1 + \dots + \alpha_{nn} e_n) = (\alpha_{11}\alpha_1 + \dots + \alpha_{1n}\alpha_n) e_1 + \dots + (\alpha_{n1}\alpha_1 + \dots + \alpha_{nn}\alpha_n) e_n$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1, \dots, e_n$ как раз есть координаты вектора $\varphi(x)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Из правила умножения матрицы A_φ на столбец $[x]$ получаем искомое равенство. □

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – некоторый базис линейного пространства V, т.е. линейно независимая система векторов, через которую линейно выражается любой вектор пространства V; φ – линейный оператор. Образы базисных векторов $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$, как и все векторы пространства V, линейно выражаются через базисные векторы $e_1, \dots, e_n$:

$$\varphi(e_1) = a_1^1 e_1 + \dots + a_n^1 e_n;$$
$$\varphi(e_2) = a_1^2 e_1 + \dots + a_n^2 e_n;$$
$$\dots$$
$$\varphi(e_n) = a_1^n e_1 + \dots + a_n^n e_n.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного оператора в данном базисе. В столбцах этой матрицы стоят координаты образов базисных векторов в рассматриваемом базисе.

Примеры.

1. Пусть $V = \mathbb{R}^3$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис.

Рассмотрим нулевой и тождественный операторы. В первом случае $\varphi(x) = 0 \ \ \forall\, x$ и, следовательно,

$\varphi(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$;

$\varphi(e_2) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$;

$\varphi(e_3) = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3$;

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица нулевого оператора.

Если $\varphi = \mathrm{id}$, то $\mathrm{id}\,(x) = x \ \ \forall\, x$ и, следовательно,

$\mathrm{id}(e_1) = e_1 = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3$;

$\mathrm{id}(e_2) = e_2 = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3$;

$\mathrm{id}(e_3) = e_3 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3$.

Следовательно, матрицей оператора id будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Заметим, что матрицами нулевого и тождественного оператора в любом базисе будут нулевая и единичная матрицы соответственно.

2. $V = \mathrm{R}^2$, $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства R^2. Оператор φ – поворот на угол $\frac{\pi}{6}$:

$\varphi(i) = (\cos\frac{\pi}{6})\, i + (\sin\frac{\pi}{6})\, j$;

$\varphi(j) = (-\sin\frac{\pi}{6})\, i + (\cos\frac{\pi}{6})\, j$.

Следовательно, матрицей поворота на угол $\frac{\pi}{6}$ будет матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом можно получить матрицу поворота на любой угол α:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

3. $V = \mathrm{R}^3$, φ – оператор проектирования на плоскость OXY. Найдем матрицу этого оператора в стандартном базисе $e_1 = i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_3 = k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Так как $\varphi(i) = i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varphi(j) = j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\varphi(k) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, то

$$A = = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В столбцах матрицы A стоят образы базисных векторов i, j, k в координатной форме.

4. $V = P_3[x]$ – линейное пространство многочленов степени не выше 3, $\varphi = d$ – оператор дифференцирования; $1, x, x^2, x^3$ – стандартный базис пространства V.

Напомним, что любой многочлен $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ в рассматриваемом базисе может быть записан в координатной форме как четырехмерный вектор $\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$; $d(1) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x) = 1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x^2) = 2x = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x^3) = =$ $3x^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$.Следовательно, матрица оператора d имеет вид: $A =$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. $V = \mathrm{R}^3$, φ_A – оператор умножения на матрицу A. Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ – стандартный базис пространства R^3; вектор $x = x_1i + x_2j + x_3k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Действие оператора φ_A описывается следующим образом:

$$\varphi(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем: $\varphi\,(i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(j) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\,(k) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Матрица оператора φ_A совпадает с исходной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Этот пример показывает, что любая матрица является матрицей некоторого оператора, а именно, оператора умножения на эту матрицу.

Каждый линейный оператор φ однозначно определяется своей матрицей. Действительно, пусть

$$A = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(\boldsymbol{e}_1) & \varphi(\boldsymbol{e}_2) & \ldots & \varphi(\boldsymbol{e}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} –$$

матрица оператора φ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$. Столбцы матрицы представляют собой координатную запись образов базисных векторов. Если известны векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)$, то известно, куда отображается любой вектор x. Действительно, пусть

$x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ – разложение вектора x по базису $e_1, \ldots, e_n$;

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) =$$

$$= x_1\begin{pmatrix} a_1^1 \\ \ldots \\ a_n^1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_1^2 \\ \ldots \\ a_n^2 \end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix} a_1^n \\ \ldots \\ a_n^n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

То есть каждый оператор является оператором умножения на свою матрицу A.

Так, рассмотренный нами в примере 4 оператор дифференцирования d имеет в стандартном базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если многочлен $p(x) \in P_3[x]$ имеет вид $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, то координатная запись этого многочлена в базисе 1, x, x^2, x^3 такова:

$$p(x) = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix};$$

$d(p(x)) = p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Координатная запись многочлена $p'(x)=\begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix}$. Этот вектор получается из вектора $\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$, как и утверждает теория, умножением на матрицу A:

$$\begin{pmatrix} c \\ 2b \\ 3a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти матрицу линейного преобразования, заданного в виде:

$x' = x + y$

$y' = y + z$

$z' = z + x$

Решение.

$x' = 1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$

$y' = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z$

$z' = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot z$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

На практике действия над линейными преобразованиями сводятся к действиям над их матрицами.

Определение: Если вектор $\bar{x}$ переводится в вектор $\bar{y}$ линейным преобразованием с матрицей А, а вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$ линейным преобразованием с матрицей В, то последовательное применение этих преобразований равносильно линейному преобразованию, переводящему вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$ (оно называется произведением составляющих преобразований).

$$C = B \cdot A$$

Пример. Задано линейное преобразование А, переводящее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ и линейное преобразование В, переводящее вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z}$. Найти матрицу линейного преобразования, переводящего вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$.

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 + 5x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 - x_3 \\ y_3 = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ z_2 = 5y_1 - y_2 - y_3 \\ z_3 = 3y_1 + 6y_2 + 7y_3 \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{A} y \xrightarrow{B} z$$

$$x \xrightarrow{C} z$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2+4+9 & -1+16-15 & 5-4+6 \\ 10-1-3 & -5-4+5 & 25+1-2 \\ 6+6+21 & -3+24-35 & 15-6+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 7 \\ 6 & -4 & 24 \\ 33 & -14 & 23 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} z_1 = 15x_1 + 7x_3 \\ z_2 = 6x_1 - 4x_2 + 24x_3 \\ z_3 = 33x_1 - 14x_2 + 23x_3 \end{cases}$$

6.3. Матрица оператора в различных базисах

Определение. Матрицы, задающие одно и то же линейное преобразование в разных базах, подобны между собой. При этом матрица линейного преобразования φ в базе е$^{/}$ получается трансформированием матрицы этого преобразования в базе е матрицей перехода от базы е$^{/}$ к базе е.

Пусть $e_1^{/},...,e_n^{/}$ – другой базис *L*. *Матрицей перехода от одного базиса* $e_1,...,e_n$ *к другому* $e_1^{/},...,e_n^{/}$ называется такая матрица $T = (\tau_{ij})$ $\left(i = \overline{1..n}\,; j = \overline{1..n}\right)$, у которой *i-ый* столбец есть координаты вектора $e_i^{/}$ в базисе $e_1,...,e_n$, т. е.

$$\begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots & e_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Фактически матрица T есть матрица линейного оператора, переводящего векторы $e_1,\dots,e_n$ в $e_1',\dots,e_n'$.

Пусть $[y] = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ – столбец из координат вектора x в базисе $e_1',\dots,e_n'$

Тогда имеет место следующее равенство $[x] = T \cdot [y]$

Действительно, имеем $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1' + \dots + \beta_n e_n'$.

Но $e_i' = \tau_{1i} e_1 + \dots + \tau_{ni} e_n$, откуда

$$x = \beta_1(\tau_{11}e_1 + \dots + \tau_{n1}e_n) + \dots + \beta_n(\tau_{1n}e_1 + \dots + \tau_{nn}e_n) =$$
$$= (\tau_{11}\beta_1 + \dots + \tau_{1n}\beta_n)e_1 + \dots + (\tau_{n1}\beta_1 + \dots + \tau_{nn}\beta_n)e_n.$$

Но в последней сумме коэффициенты при $e_1,\dots,e_n$ как раз и есть координаты вектора x в базисе $e_1,\dots,e_n$. Применяем правило умножения матрицы T на столбец $[y]$.

По следствию из теоремы о ранге матриц T – невырожденная матрица, т.к. её столбцы, будучи координатами базисных векторов линейно независимы. Поэтому T имеет обратную матрицу T^{-1}. Умножая обе части равенства слева на T^{-1}, получаем

$$[y] = T^{-1} \cdot [x].$$

Пример 1.

Векторы $e_1' = (1, 1, 1)$; $e_2' = (1, 1, 2)$; $e_3' = (1, 2, 3)$; $x = (6, 9, 14)$ заданы своими координатами в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Показать, что векторы e_1', e_2', e_3' сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе.

Решение.

Составим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к системе векторов e_1', e_2', e_3':

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

она невырожденная, значит векторы e_1', e_2', e_3' линейно независимы и могут образовывать базис трёхмерного пространства. Тогда

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Найдём координаты вектора x в базисе $e_1^/, e_2^/, e_3^/$:

$$\begin{pmatrix}x_1^/\\ x_2^/\\ x_3^/\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 9\\ 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Следующая теорема устанавливает связь между матрицами одного и того же линейного оператора, заданными в разных базисах.

Теорема (о связи матриц линейного оператора). *Пусть* A *и* B *– матрицы линейного оператора* φ *в базисах* $e_1,...,e_n$ *и* $e_1^/,...,e_n^/$ *соответственно и* T *– матрица перехода о первого базиса ко второму. Тогда* $B=T^{-1}\cdot A\cdot T$ *(матрицы* A *и* B *называются подобными).*

Доказательство.

Если $x\in L$, то обозначим через $[x]_1$ и $[x]_2$ столбцы из координат вектора x в первом и во втором базисах, а через $[\varphi(x)]_1$ и $[\varphi(x)]_2$ – координаты образа этого вектора в первом и во втором базисах. Из равенства имеем

$$T\cdot[\varphi(x)]_2=[\varphi(x)]_1.$$

Из равенства получаем $[\varphi(x)]_1=A\cdot[x]_1$ и $[\varphi(x)]_2=B\cdot[x]_2$.

Из этих трех равенств заключаем, что

$$T\cdot B\cdot[x]_2=A\cdot[x]_1 .$$

Но $[x]_1=T\cdot[x]_2$, откуда $T\cdot B\cdot[x]_2=A\cdot T\cdot[x]_2$. Домножая обе части этого равенства на T^{-1} слева, получаем равенство

$$B\cdot[x]_2=T^{-1}\cdot A\cdot T\cdot[x]_2,$$

Которое имеет место при любом векторе $x\in L$. Это означает равенство матриц B и $T^{-1}AT$. □

В доказательстве теоремы молчаливо использовался тот факт, что если для любого вектора x выполнено $A\cdot[x]=B\cdot[x]$, то $A=B$. Предлагается его доказать читателю.

Пример 2. Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Найти его матрицу B в базисе $\begin{matrix} e_1^/=(1,1,-1);\\ e_2^/=(1,-2,1);\\ e_3^/=(0,-1,1).\end{matrix}$

Решение.

Составим матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису $e_1^{/}, e_2^{/}, e_3^{/}$:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдём обратную матрицу для *T*:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -4 & -3 & -1 \\ 10 & 9 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -3 \\ -6 & 1 & 2 \\ 16 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Линейный оператор f пространства R^3 имеет в базисе $e_1 = (8, -6, 7)$, $e_2 = (-16, 7, -13)$, $e_3 = (9, -3, 7)$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу B того же преобразования в базисе:
$e_1' = (1, -2, 1)$, $e_2' = (3, -1, 2)$, $e_3' = (2, 1, 2)$.

Решение.

Находим матрицу перехода T от базиса e к базису e′. Получаем:
$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$,
$e_2' = e_1 + 2e_2 + 3e_3$,
$e_3' = -3e_1 - 5e_2 - 6e_3$.

Выпишем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

Матрица B находится по формуле $B = T^{-1}AT$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Упражнения.

Найти матрицу линейного оператора в базисе $(e_1', \quad e_2', \quad e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3,\ e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3,\ e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$,

если она задана в базисе $(e_1,\ e_2,\ e_3)$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. 11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 14. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 20. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 21. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6.4. Ранг, ядро и дефект линейного оператора

Для доказательства основной теоремы потребуется понятие прямой суммы подпространств.

Пусть L_1 и L_2 – два подпространства линейного пространства L. Их *суммой* $L_1 + L_2$ называется множество всех векторов $a+b$, где $a \in L_1$ и $b \in L_2$, т.е. $L_1 + L_2 = \{a+b : a \in L_1, b \in L_2\}$

Легко проверить, что $L_1 + L_2$ также будет подпространством L.

Сумма $L_1 + L_2$ называется *прямой*, если из того, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, где $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ следует, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Определим также и пересечение двух подпространств $L_1 \cap L_2$, которое также будет подпространством L. Именно $L_1 \cap L_2 = \{x : x \in L_1$ и $x \in L_2\}$

Теорема. (о прямых суммах подпространств). *Сумма подпространств L_1 и L_2 будет прямой тогда и только тогда, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$.*

Доказательство. Пусть $L_1 + L_2$– прямая сумма подпространств L_1 и L_2, но есть вектор $a \neq \theta$ такой, что $a \in L_1 \cap L_2$. Тогда, так как $L_1 \cap L_2$ – также является подпространством, то $(-a) \in L_1 \cap L_2$, и получается, что нулевой вектор можно представить двумя различными способами $\theta + \theta = a + (-a)$. Таким образом, приходим к противоречию определения прямой суммы.

Обратно, пусть $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, но сумма $L_1 + L_2$ не прямая. Значит найдется $a_1, a_2 \in L_1$ и $b_1, b_2 \in L_2$ такие, что $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, но $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$. Так как $a_1 - a_2 \in L_1$ и $b_2 - b_1 \in L_2$, то $L_1 \cap L_2$ содержит ненулевой вектор $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$. Опять приходим к противоречию. ■

Теорема (о размерности суммы двух подпространств). *Размерность суммы двух подпространств пространства L равна сумме их размерностей минус размерность их пересечения.*

Доказательство.

Пусть L_1 и L_2 – подпространства, r и s их размерности, а t– размерность их пересечения. Рассмотрим некоторый базис $L_1 \cap L_2$, скажем $c_1, \dots, c_t$, и дополним его до базисов $c_1, \dots, c_t, a_{t+1}, \dots, a_r$ и $c_1, \dots, c_t, b_{t+1}, \dots, b_s$ пространств L_1 и L_2.

Докажем, что система $c_1, \dots, c_t, a_{t+1}, \dots, a_r, b_{t+1}, \dots, b_s$, состоящая из $r+s-t$ векторов является базисом подпространства $L_1 + L_2$, тем самым будет доказана и теорема.

Ясно, что любой вектор $x \in L_1$ и $y \in L_2$, а значит и вектор $x + y \in L_1 + L_2$ линейно выражается через векторы системы, т.к. содержит базисы L_1 и L_2. Осталось проверить, что система линейно независима. Предположим, что

$$\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_t c_t + \alpha_{t+1} a_{t+1} + \ldots + \alpha_r a_r + \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s = \theta$$

Пусть $b = \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s$. Понятно, что $b \in L_2$. Но $b = -\gamma_1 c_1 - \ldots - \gamma_t c_t - \alpha_{t+1} a_{t+1} - \ldots - \alpha_r a_r$.

Правая часть этого равенства есть вектор из L_1, т.е. $b \in L_1$. Окончательно, $b \in L_1 \cap L_2$. Значит в выражении отсутствуют члены с $a_{t+1}, \ldots, a_r$, т.е. $\alpha_{t+1} = \ldots = \alpha_r = 0$. Отсюда заключаем, что

$$\gamma_1 c_1 + \ldots + \gamma_t c_t + \beta_{t+1} b_{t+1} + \ldots + \beta_s b_s = \theta.$$

Так как система $c_1, \ldots, c_t, b_{t+1}, \ldots, b_s$ является базисом L_2, то она линейно независима и поэтому $\gamma_1 = \ldots = \gamma_t = \beta_{t+1} = \ldots = \beta_s = 0$. □

Если сумма $L_1 + L_2$ прямая, то размерность $L_1 \cap L_2$ по теореме о прямых суммах равна 0, и поэтому получаем

Следствие. *Размерность прямой суммы двух подпространств равна сумме их размерностей.* ■

Пусть φ – линейный оператор L и

$R = \{\varphi(x) : x \in L\}$,

$K = \{x : \varphi(x) = \theta\}$.

Нетрудно проверить, что R и K подпространства L, называемые *областью значений* и *ядром* линейного оператора φ. Размерность R называется *рангом*, а размерность K – *дефектом* φ.

Теорема (о ранге и дефекте). *Сумма ранга и дефекта линейного оператора φ равна размерности пространства L.*

Доказательство.

Пусть r и d – ранг и дефект φ. Выберем в R базис $b_1, \ldots, b_r$ и обозначим через $a_1, \ldots, a_r$ векторы такие, что $\varphi(a_1) = b_1, \ldots, \varphi(a_r) = b_r$.

Они линейно независимы, т.к. из равенства $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r = \theta$ следует, что $\varphi(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n = \varphi(\theta) = \theta$, а поскольку $b_1, \ldots, b_r$ линейно независимы, то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Обозначим через A подпространство, порожденное векторами $a_1, \ldots, a_r$. Они образуют базис A и поэтому размерность подпространства A равна r. По предыдущему следствию достаточно теперь доказать, что L является прямой суммой A и K. покажем, что $A \cap K = \{\theta\}$. Любой вектор $a \in A$ имеет вид $a = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$. Если $a \in K$, то $\varphi(a) = 0$, т.е. $\varphi(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r) = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_r b_r = \theta$. Но векторы $b_1, \ldots, b_r$ линейно независимы и поэтому $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, откуда a=0.

Покажем теперь, что $L = A + K$. Возьмем вектор $x \in L$. Но $\varphi(x) \in R$ и поэтому $\varphi(x) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_r b_r$ Пусть $y = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r$ и $x - y = c$. Так как $\varphi(y) = \varphi(x)$, то $\varphi(c) = \varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) = \theta$. Следовательно $c \in K$. Имеем $x = y + c$, где $y \in A$ и $c \in K$, что и требовалось доказать. ■

С каждым оператором φ связаны два важных множества векторов из *V*. Первое, называемое *ядром* оператора (обозначается *Ker φ*), состоит из множества всех векторов, отображаемых в нулевой вектор 0:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{x : \varphi(x) = 0\}.$$

Второе, называемое *образом* оператора (обозначается *Im φ*), состоит из множества всех образов векторов пространства *V*:

$$Im\ \varphi = \{y : y = \varphi(x)\}.$$

Для любого линейного оператора φ ядро $Ker\ \varphi \neq \varnothing$, т.к. обязательно содержит нулевой вектор: $0 \in Ker\ \varphi$. Действительно, возьмем произвольный вектор $a \in V$ и запишем:

$0 = 0 \cdot a$; $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot a) = 0 \cdot \varphi(a) = 0$. Из равенства $\varphi(0) = 0$ следует, что и образ линейного оператора φ (*Im φ*) также непуст: $0 \in Im\ \varphi$.

Проверим, что ядро и образ являются линейными подпространствами *V*, т.е. подмножествами, замкнутыми относительно линейных операций в пространстве *V*.

Пусть $x, y \in Ker\ \varphi$, т.е $\varphi(x) = \varphi(y) = 0$; $\alpha x + \beta y$ – линейная комбинация рассматриваемых векторов.

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) = 0, \text{ т.е. } \alpha x + \beta y \in Ker\ \varphi.$$

Если же $x, y \in Im\ \varphi$, то $x = \varphi(a)$, $y = \varphi(b)$, т.е. x и y – образы каких-то векторов a и b. Рассмотрим вектор $\alpha a + \beta b$ – линейную комбинацию векторов a и b – и найдем его образ:

$$\varphi(\alpha a + \beta b) = \alpha\varphi(a) + \beta\varphi(b) = \alpha x + \beta y.$$

Вектор $\alpha x + \beta y$ является образом вектора $\alpha a + \beta b$ и, следовательно, принадлежит образу оператора *Im φ*.

Примеры.

1. φ – нулевой оператор в R^3.

$Ker\ \varphi = R^3$, $Im\ \varphi = \{0\}$.

2. φ = id.

$Ker\ \varphi = \{0\}$, $Im\ \varphi = R^3$.

3. Поворот на некоторый угол в R^2.

Ker $\varphi = \{0\}$, *Im* $\varphi = R^2$.

4. φ – проекция в R^3 на плоскость *OXY*.

Ker $\varphi = \{\lambda k\}$ – ось *OZ*, *Im* $\varphi = \langle i, j\rangle$ – линейная оболочка векторов i и j, т.е. плоскость *OXY*.

5. φ – дифференцирование в $P_3[x]$.

Ker φ = {const.} = $\langle 1\rangle$, *Im* $\varphi = \langle 1, x, x^2\rangle = P_2[x]$, т.е. множество многочленов степени не выше 2.

Найдем *Ker* φ и *Im* φ для произвольного оператора φ, который в фиксированном базисе есть оператор умножения на матрицу A.

Ker φ – это такие векторы $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, для которых

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1x_1 + & \ldots & + a_1^nx_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1x_1 + & \ldots & + a_n^nx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ядро оператора совпадает с $V(\hat{A})$ – множеством всех решений однородной системы

$$\begin{cases} a_1^1x_1 + & \ldots & + a_1^nx_n & = 0; \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1x_1 + & \ldots & + a_n^nx_n & = 0. \end{cases}$$

Для определения размерности ядра мы можем воспользоваться формулой: $\dim Ker\ \varphi = \dim V(\hat{A}) = n - r$, где n – размерность пространства V, а r – ранг матрицы A.

Если $V(\hat{A}) = \{0\}$, то *Ker* $\varphi = \{0\}$ и любой ненулевой вектор x переходит под действием оператора φ в ненулевой вектор. В этом случае, если $x_1 \neq x_2$, то $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Действительно, рассмотрим вектор $x = x_1 - x_2 \neq 0$. Из сказанного выше следует, что $\varphi(x) \neq 0$, но $\varphi(x) = \varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, т.е. $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Такие отображения φ, для которых образы различных векторов различны, называются *инъективными*.

Пример. Найти ядро и образ линейного оператора φ, заданного в некотором базисе пространства R^4 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Находим ранг матрицы линейного оператора:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & -1 \\ 0 & -10 & -14 & -2 \end{pmatrix},$$

$rank\, A = 2$.

Значит, размерность образа линейного оператора $Im\ \varphi$ равна 2, размерность ядра $Ker\ \varphi$ равна 4 – 2 = 2.

Базис образа можно, например, составить из векторов φe_1, φe_2, координаты которых записаны в первых двух столбцах матрицы A.

$$Im\ \varphi = <\varphi e_1, \varphi e_2>.$$

Для отыскания ядра решаем однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы: (-4α -2β, -7α –β, 5α, 5β). Базис ядра составляют, например, векторы (-4, -7, 1, 0) и (-2, -1, 0, 1).

6.5. Действия над линейными операторами

Пусть φ_1 и φ_2 – линейные операторы в векторном пространстве V. *Суммой* этих линейных операторов называется оператор φ, действующий следующим образом:

$$x \to \varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x).$$

Оператор φ обозначается $\varphi_1 + \varphi_2$.

Проверим, что φ – линейный оператор, т.е. $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$. Согласно нашему определению,

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi_1(\alpha x + \beta y) + \varphi_2(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_1(y) + \alpha\varphi_2(x) + \beta\varphi_2(y) = \alpha(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) + \beta(\varphi_1(y) + \varphi_2(y)) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Мы воспользовались линейностью операторов φ_1 и φ_2.

В фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ каждый оператор описывается своей матрицей. Пусть A – матрица оператора φ_1, B – оператора φ_2 и C – оператора $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Столбцы этих матриц – образы базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ в координатной записи:

$$A = \begin{pmatrix} \ldots \\ \varphi_1(e_i) \\ \ldots \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} \ldots \\ \varphi_2(e_i) \\ \ldots \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} \ldots \\ \varphi_1(e_i) + \varphi_2(e_i) \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C = A + B$, т.е. $c_i^j = a_i^j + b_i^j$. Мы видим, что при сложении операторов их матрицы складываются.

Пусть φ – произвольный линейный оператор, λ – число из рассматриваемого поля P. *Произведением* оператора φ на число λ называется оператор ψ, обозначаемый $\lambda\varphi$ и действующий следующим образом: $\psi(x) = \lambda\varphi(x)$. Несложно проверить, что если φ – линейный оператор, то ψ – также линейный оператор.

Если A – матрица оператора φ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, то B – матрица оператора ψ в этом же базисе – имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\varphi(e_1) & \ldots & \lambda\varphi(e_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} = \lambda A.$$

Таким образом, при умножении оператора на число его матрица умножается на это число.

Произведением операторов φ_1 и φ_2 называется оператор φ, действующий следующим образом:

$$\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)).$$

Оператор φ обозначается $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ и является композицией отображений φ_1 и φ_2.

Проверим линейность оператора φ:

$\varphi(\alpha x + \beta y) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha x + \beta y)) =$ (линейность φ_1) $= \varphi_2(\alpha\varphi_1(x) + \beta\varphi_1(y))$ $=$ (линейность φ_2) $= \alpha\varphi_2(\varphi_1(x)) + \beta\varphi_2(\varphi_1(y)) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$.

Пусть A – матрица оператора φ_1, B – матрица оператора φ_2, а C – матрица оператора $\varphi_1\varphi_2$ в фиксированном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Выясним, как связаны между собой эти матрицы. Воспользуемся матричной записью действия оператора.

Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; тогда $\varphi_1(x) = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi_2(x) = B\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = C\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Согласно определению произведения операторов,

$\varphi(x) = \varphi_2(\varphi_1(x)) = B\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi_1(x) = A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, т.е. $\varphi(x) = B\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

С другой стороны, $\varphi(x) = C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. Итак, мы имеем равенство $C\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = B\cdot A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, справедливое для любого вектора $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$. То есть, с одной стороны, φ – оператор умножения на матрицу C, а с другой стороны, φ – оператор умножения на $B\cdot A$.

Мы знаем, что матрица линейного оператора определена однозначно, т.к. ее столбцами являются столбцы $\varphi(e_1)$, …, $\varphi(e_n)$. Следовательно, $C = B\cdot A$. Таким образом, матрица оператора $\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ произведения линейных операторов φ_1 и φ_2 является произведением матриц этих операторов, взятых в обратном порядке.

Оператор ψ называется *обратным* к оператору φ, если

$$\psi\cdot\varphi = \varphi\cdot\psi = = \mathrm{id},$$

т.е. их произведение в любом порядке дает тождественный оператор.

Если φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц выполняется равенство:

$$A_\varphi\cdot A_\psi = A_\psi\cdot A_\varphi = E, \text{ т.е. } A_\psi = A_\varphi^{-1}.$$

Если оператор φ имеет обратный оператор ψ, то для их матриц A и B в произвольном фиксированном базисе e_1, …, e_n выполняется условие $A\cdot B = B\cdot A = E$. (E – матрица оператора id.)

Следовательно, $B = A^{-1}$ и оператор ψ однозначно определяется по оператору φ (если он, конечно, существует) и обозначается φ^{-1}. Для существования же оператора φ^{-1} необходимо и достаточно, чтобы матрица A оператора φ в каком-либо базисе (а следовательно, и в любом) была бы обратима, что равносильно, как мы знаем, условиям $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{rang}\, A=n$. В этом случае $\mathrm{Im}\,\varphi = V$, $\mathrm{Ker}\,\varphi =\{0\}$ и отображение φ является изоморфизмом.

Пример. Линейный оператор f в базисе $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, 1)$ имеет матрицу

$$A_a = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор g в базисе $b_1 = (5, 2)$, $b_2 = (1, 0)$ имеет матрицу

$$B_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & 3{,}5 \\ 4{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу линейного оператора $f + g$ в базисе b_1, b_2.

Решение.

Найдем сначала матрицу A_b линейного оператора f в базисе b_1, b_2. $A_b = T^{-1} A_a T$, где T – матрица перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Так как $b_1 = 3a_1 - a_2$, $b_2 = a_1 - a_2$, то

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \ T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \ A_b = \begin{pmatrix} 7{,}5 & -1{,}5 \\ -6{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица суммы линейных операторов имеет вид:

$$A_b + B_b = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6.6. Инвариантные подпространства. Собственные векторы

Пусть A - линейный оператор. Пусть $x \in \mathbb{E}_1$, где $\mathbb{E}_1$ некоторое подпространство пространства $\mathbb{E}^n$. Вектор $y = Ax$ может принадлежать подпространству $\mathbb{E}_1$, а может и не принадлежать.

Определение 1. Подпространство $\mathbb{E}_1$ называется инвариантным по отношению к оператору A, если $Ax \in \mathbb{E}_1$, $\forall x \in \mathbb{E}_1$.

Определение 2. Ненулевой вектор x называется собственным вектором линейного оператора A, если найдётся такое число λ, что будет выполняться *равенство*

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}.$$

При этом число λ называют собственным значением (собственным числом) оператора А, соответствующим вектору х. Множество всех собственных значений оператора Аназывается его спектром.

Пусть $A = (\alpha_{ij})-$ квадратная матрица порядка n с действительными элементами. Пусть, с другой стороны, $\lambda -$ некоторое неизвестное. Тогда матрица $(A - \lambda E)$, где $E -$ единичная матрица порядка n, называется *характеристической матрицей* матрицы A. Так как в матрице (λE) по главной диагонали стоит λ, все же остальные элементы равны нулю, то

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы $(A-\lambda E)$ будет многочленом от λ, притом степени n. В самом деле, произведение элементов, стоящих на главной диагонали, будет многочленом от λ, со старшим членом $(-1)^n\lambda^n$, все же остальные члены определителя не содержат по меньшей мере двух из числа элементов, стоящих на главной диагонали, и поэтому их степень относительно λ, не превосходит $n-2$. Коэффициенты этого многочлена можно было бы легко найти. Так, коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}(\alpha_{11}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{nn})$, а свободный член совпадает с определителем матрицы A.

Многочлен $n-ой$ степени $|A-\lambda E|$ называется *характеристическим многочленом* матрицы A, а его корни, которые могут быть как действительными, так и комплексными, называются *характеристическими корнями* этой матрицы.

Теорема (о характеристических многочленах). *Подобные матрицы обладают одинаковыми характеристическими многочленами и, следовательно, одинаковыми характеристическими корнями.*

Доказательство.

Пусть, в самом деле, $B=Q^{-1}\cdot A\cdot Q$. Тогда, учитывая, что матрица (λE) перестановочна с матрицей Q, а $|Q^{-1}|=|Q|^{-1}$ получаем:

$$|B-\lambda E|=\left|Q^{-1}AQ-\lambda E\right|=\left|Q^{-1}(A-\lambda E)Q\right|=|Q|^{-1}|A-\lambda E||Q|=|A-\lambda E|,$$

что и требовалось доказать. ■

Из этого результата вытекает, ввиду доказанной ранее теоремы о связи матриц линейного оператора в разных базисах:

Следствие. *Линейный оператор φ может задаваться в разных базисах различными матрицами, однако все эта матрицы имеют один и тот же набор характеристических корней.*

Эти корни можно называть поэтому *характеристическими корнями самого оператора φ*. Весь набор этих характеристических корней, причем каждый корень берется с той кратностью, какую он имеет в характеристическом многочлене, называется *спектром линейного оператора φ*.

Укажем одно из применений характеристических корней. Пусть в линейном пространстве L задан линейный оператор φ. Если вектор b, отличный от нуля, переводится оператором φ в вектор, пропорциональный самому b,

$$\varphi(b) = \lambda_0 b,$$

где λ_0 – некоторое действительное число, то вектор b называется *собственным вектором* оператора φ, а число λ_0 – *собственным значением* этого оператора, причем говорят, что собственный вектор b *относится*, к собственному значению λ_0.

Заметим, что так как $b \neq \theta$, то число λ_0, удовлетворяющее условию, определяется для вектора b однозначно. Подчеркнем, далее, что нулевой вектор не считается собственным вектором оператора φ, хотя он удовлетворяет условию, притом для любого λ_0.

Теорема (о собственных значениях). *Действительные характеристические корни линейного оператора φ, если они существуют, и только они служат собственными значениями этого оператора.*

Доказательство.

Пусть, в самом деле, оператор φ имеет в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ матрицу $A = (\alpha_{ij})$ и пусть вектор

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

является собственным вектором оператора φ,

$$\varphi(b) = \lambda_0 b.$$

Как доказано ранее, $[\varphi(b)] = A \cdot [b]$. Равенства приводят к системе равенств

$$\begin{cases} \beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \ldots + \beta_n\alpha_{1n} = \lambda_0\beta_1 \\ \beta_1\alpha_{21} + \beta_2\alpha_{22} + \ldots + \beta_n\alpha_{2n} = \lambda_0\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1\alpha_{n1} + \beta_2\alpha_{n2} + \ldots + \beta_n\alpha_{nn} = \lambda_0 b_n. \end{cases}$$

Так как $b \neq \theta$, то не все числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ равны нулю. Таким образом система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda_0)x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + (\alpha_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + (\alpha_{nn} - \lambda_0)x_n = 0. \end{cases}$$

обладает ненулевым решением, а поэтому ее определитель равен нулю,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda_0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda_0 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix} = 0,$$

или $|A-\lambda_0 E| = 0,$ т. е, собственное значение λ_0 на самом деле оказалось характеристическим корнем матрицы A и, следовательно, линейного оператора φ, притом, понятно, действительным.

Обратно, пусть λ_0 будет любым действительным характеристическим корнем оператора φ и, следовательно, матрицы A. Отсюда следует, что система линейных однородных уравнений обладает ненулевым решением, притом даже действительным, так как все коэффициенты этой системы действительны. Если это решение обозначим через

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

то имеют место исходные равенства. Обозначим через b вектор пространства L, имеющий в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ строку координат; ясно, что $b \neq 0$. Вектор b оказался, таким образом, собственным вектором оператора φ, относящимся к собственному значению λ_0. Теорема доказана. ■

В заключении отметим, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ, относящихся к собственному значению λ_0, совпадает с совокупностью ненулевых действительных решений системы линейных однородных уравнений. Отсюда следует, что совокупность собственных векторов линейного оператора φ ,относящихся к собственному значению λ_0, будет, после добавления к ней нулевого вектора, линейным подпространством пространства L.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

.

Раскрывая определитель, получим уравнение $-\lambda^3+\lambda^2=0$, корни которого $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=1$ являются собственными значениями линейного оператора φ.

Найдём собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2}=0$. Для этого решим систему считая $\lambda_0=0$.

$$\begin{cases} 4x_1-5x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-7x_2+3x_3=0 \\ 6x_1-9x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

После преобразования получим:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_2-2x_3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2=\dfrac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Собственный вектор $\overline{x}_{\lambda=0}=\alpha(1, 2, 3); \alpha\neq 0.$

Аналогично, для $\lambda_3=1$, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3=0 \\ 5x_1-8x_2+3x_3=0 \\ 6x_1-9x_2+3x_3=0, \end{cases}$$

фундаментальным решением которой будет:

$\overline{x}_{\lambda=1}=\beta(1, 1, 1); \beta\neq 0-$собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3=1$.

Упражнения.

1. Векторы e_1', e_2', e_3' и x заданы своими координатами в базисе e_1, e_2, e_3. Показать, что векторы e_1', e_2', e_3' сами образуют базис, и найти координаты вектора x в этом базисе:

$e_1'=(1,1,1), e_2'=(1,1,2), e_3'=(1,2,3);\quad x=(6,9,14).$

$e_1'=(2,1,-3), e_2'=(3,2,-5), e_3'=(1,-1,1);\quad x=(6,2,-7).$

$e_1'=(1,1,2), e_2'=(2,-1,0), e_3'=(-1,1,1);\quad x=(6,-1,3).$

$e_1'=(1,1,3), e_2'=\left(\dfrac{3}{2},-1,0\right), e_3'=(-1,1,1);\quad x=(1,2,4).$

$e_1'=(1,1,4), e_2'=\left(\dfrac{4}{3},-1,0\right), e_3'=(-1,1,1);\quad x=(1,3,6).$

$e_1' = (1, 2, -1, -2), e_2' = (2, 3, 0, -1), e_3' = (1, 2, 1, 4), e_4' = (1, 3, -1, 0);$
$x = (6, 9, 14).$

2. Доказать, что системы векторов e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' образуют базис и найти матрицу перехода от одного базиса к другому:

$e_1 = (1, 2, 1), e_2 = (2, 3, 3), e_3 = (3, 7, 1);$

$e_1' = (3, 1, 4), e_2' = (5, 2, 1), e_3' = (1, 1, -6).$

$e_1 = (1, 1, 1, 1), e_2 = (1, 2, 1, 1), e_3 = (1, 1, 2, 1), e_4 = (1, 3, 2, 3);$

$e_1' = (1, 0, 3, 3), e_2' = (-2, -3, -5, -4), e_3' = (2, 2, 5, 4), e_4' = (-2, -3, -4, -4).$

3. Линейный оператор φ в базисе $e_1, e_2, \ldots$ имеет матрицу A, найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1', e_2', \ldots$:

1) $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}; e_1' = (3, 1, 4), e_2' = (5, 2, 1), e_3' = (1, 1, -6).$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}; e_1' = (1, -2, 1), e_2' = (3, -1, 2), e_3' = (2, 1, 2).$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

а) $e_1' = (1, 0, 0, 0), e_2' = (0, 1, 0, 0), e_3' = (0, 0, 0, 1), e_4' = (0, 0, 1, 0);$

б) $e_1' = (1, 0, 0, 0), e_2' = (1, 1, 0, 0), e_3' = (1, 1, 1, 0), e_4' = (1, 1, 1, 1).$

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$

c) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

e) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$

g) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

h) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

j) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Глава 7. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

7.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Теория квадратичных форм берёт своё начало в аналитической геометрии, а именно в теории кривых второго порядка. Известно, что уравнение центральной кривой второго порядка на плоскости, после перенесения начала прямоугольных координат в центр этой кривой, имеет вид

$$Ax_1^2 + 2Bx_1x_2 + Cx_2^2 = D.$$

Известно, далее, что можно совершить такой поворот осей координат на некоторый угол α (величина которого зависит от коэффициентов A, B, C), т.е. такой переход от координат x_1, x_2 к координатам y_1, y_2:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1\cos\alpha - y_2\sin\alpha \\ x_2 &= y_1\sin\alpha + y_2\cos\alpha, \end{aligned}$$

что в новых координатах уравнение нашей кривой будет иметь «канонический» вид

$$A'{y_1}^2 + C'{y_2}^2 = D,$$

в этом уравнении коэффициент при произведении неизвестных y_1y_2 равен, следовательно, нулю. Преобразование координат можно толковать, очевидно, как линейное преобразование неизвестных, притом невырожденное, так как определитель из его коэффициентов равен единице. Это преобразование применяется к левой части уравнения, и поэтому можно сказать, что левая часть уравнения невырожденным линейным преобразованием превращается в левую часть уравнения.

Рассмотрим общий случай, когда число неизвестных вместо двух равно любому n, а коэффициенты являются или действительными, или же любыми комплексными числами.

Обобщая выражение, состоящее в левой части уравнения, приходим к следующему понятию.

Квадратичной формой n *переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, принимающих числовые значения , называется числовая функция вида*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \ldots$$

$$+ a_{2n}x_2x_n + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

где a_{ij} *- числа, называемые коэффициентами квадратичной формы.*

Считая, что в квадратичной форме f уже сделано приведение подобных слагаемых, введем следующие обозначения для коэффициентов этой формы: коэффициент при x_i^2 обозначим через a_{ii}, а коэффициент при произведении x_ix_j для $i \neq j -$ через $2a_{ij}$. Так как, однако, $x_ix_j = x_jx_i$, то коэффициент при этом произведении мог бы быть обозначен и через $2a_{ji}$, т.е. введенные нами обозначения предполагают справедливость равенства $a_{ji} = a_{ij}$.

Слагаемое $2a_{ij}x_ix_j$ можно записать теперь в виде $2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$, а всю квадратичную форму $f -$ в виде суммы всевозможных слагаемых $a_{ij}x_ix_j$, где i и j уже независимо друг от друга принимают значения от 1 до n:

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

в частности, при $i = j$ получается слагаемое $a_{ii}x_i^2$.

Из коэффициентов a_{ij} можно составить, очевидно, квадратную матрицу $A = (a_{ij})$ порядка n, она называется *матрицей квадратичной формы* f, а ее ранг $r -$ *рангом* этой квадратичной формы. Если, в частности, $r = n$, т.е. матрица – невырожденная, то и квадратичная форма f называется *невырожденной*. Ввиду равенства элементы матрицы A, симметричные относительно главной диагонали, равны между собой, т.е. матрица $A -$ *симметрическая*. Обратно, для любой симметрической матрицы A $n - го$ порядка можно указать вполне определенную квадратичную форму от n неизвестных, имеющую элементы матрицы A своими коэффициентами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Матрица, полученная транспонированием произведения, равна произведению матриц, получающихся транспонированием сомножителей, притом взятых в обратном порядке,* $(AB)' = B'A'$.

Доказательство.

Действительно, если произведение AB. определено, то будет определено, как легко проверить, и произведение $B'A'$: число столбцов матрицы B' равно числу строк матрицы A'. Элемент матрицы $(AB)'$, стоящий в ее $i-$ой строке и $j-$ом столбце, в матрице AB расположен в $j-$ой строке и $i-$ом столбце. Он равен, поэтому, сумме произведений соответственных элементов $j-$ой строки матрицы A и $i-$го столбца матрицы B, т.е. равен сумме произведений соответственных элементов $j-$го столбца матрицы A' и $i-$ой строки матрицы B'. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Матрица A тогда и только тогда будет симметрической, когда она совпадает со своей транспонированной, т.е.* $A' = A$.

Обозначим теперь через X столбец, составленный из неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Транспонируя эту матрицу, получим матрицу $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Квадратичная форма с матрицей $A = (a_{ij})$ может быть записана теперь в виде следующего произведения: $f = X'AX$

Действительно, произведение AX будет матрицей, состоящей из одного столбца:

$$AX = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \end{Bmatrix}.$$

Умножая эту матрицу слева на матрицу X', мы получим «матрицу», состоящую из одной строки и одного столбца, а именно правую часть равенства .

Рассмотрим, далее, линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, входящих в квадратичную форму f.

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k, \ i = \overline{1..n}.$$

Матрицей этого преобразования будет $Q = (q_{ik})$. Преобразование называется *невырожденным*, если матрица Q – невырожденная. При этом считаем, что если форма f – действительная, то и элементы матрицы Q должны быть действительными.

Обозначая через Y столбец из неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, запишем линейное преобразование в виде матричного равенства:

$$X = QY.$$

Теорема. *Квадратичная форма от n неизвестных, имеющая матрицу A, после выполнения линейного преобразования неизвестных с матрицей Q превращается в квадратичную форму от новых неизвестных, причем матрицей этой формы служит произведение $Q'AQ$.*

Доказательство.

Так как $X = QY$, то имеем: $X' = Y'Q'$. $f = Y'(Q'AQ)Y$, или $f = Y'BY$, где $B = Q'AQ$.

Матрица B будет симметрической, так как ввиду равенства, справедливого, очевидно, для любого числа множителей, и равенства $A' = A$, равносильного симметричности матрицы A, имеем:

$$B' = Q'A'Q = Q'AQ = B. \ \square$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Ранг квадратичной формы не меняется при выполнении невырожденного линейного преобразования.*

Доказательство.

Докажем вначале, что ранг произведения матриц не выше ранга сомножителей. Действительно, каждая строка произведения двух матриц X и Y является линейной комбинацией строк матрицы Y, а поэтому, ранг XY не выше ранга Y. Аналогично, столбцы матрицы XY являются линейными комбинациями столбцов матрицы X, значит, ранг XY не выше ранга X.

Пусть теперь $B = Q'AQ$, где Q – невырожденная матрица, тогда ранг B не выше ранга A. Аналогично, $A = (Q')^{-1} BQ^{-1}$, следовательно, ранг A не выше ранга B. $\square$

Рассмотрим теперь, по аналогии с указанной в начале параграфа геометрической задачей, вопрос о приведении произвольной квадратичной формы некоторым невырожденным линейным преобразованием к виду

Вид квадратичной формы называется *каноническим,* если коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть, если матрица квадратичной формы диагональная и ,следовательно $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$, где не все коэффициенты a_{ii} равны нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы равно рангу* r *формы* f.

Доказательство.

Пусть квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже приведена невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – новые неизвестные. Некоторые из коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ могут, конечно, быть нулями. Матрица этой квадратичной формы имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_n \end{pmatrix}.$$

По предложению 3 эта матрица имеет ранг r, что равносильно утверждению, что на ее главной диагонали стоит ровно r отличных от нуля элементов. ■

7.2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Теорема. (основная о квадратичных формах). *Всякая квадратичная форма может быть приведена некоторым невырожденным линейным преобразованием к каноническому виду. Если при этом рассматривается действительная квадратичная форма, то все коэффициенты указанного линейного преобразования можно считать действительными.*

Доказательство.

Эта теорема верна для случая квадратичных форм от одного неизвестного, так как всякая такая форма имеет вид ax^2, являющийся каноническим. Будем вести доказательство индукцией по числу неизвестных, т. е. доказывать теорему для квадратичных форм от n неизвестных, считая ее уже доказанной для форм с меньшим числом неизвестных.

Пусть дана квадратичная форма $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ от n неизвестных $x_1, x_2,\ldots,x_n$. Мы постараемся найти такое невырожденное линейное преобразование, которое выделило бы из f квадрат одного из неизвестных, т. е. привело бы f к виду суммы этого квадрата и некоторой квадратичной формы от остальных неизвестных. Эта цель легко достигается в том случае, если среди коэффициентов $a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn}$, стоящих в матрице формы f на главной диагонали, есть отличные от нуля, т. е. отличным от нуля коэффициентом квадрат хотя бы одного из неизвестных x_i.

Пусть, например, $a_{11}\neq 0$. Тогда, как легко проверить, выражение $a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right)^2$, являющееся квадратичной формой, содержит такие же члены с неизвестным x_1, как и наша форма f, а поэтому разность

$$f-a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2=g$$

будет квадратичной формой, содержащей лишь неизвестные $x_2, x_3,\ldots,x_n$, но не x_1. Отсюда

$$f=a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n)^2+g$$

Если введем обозначения

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n,\quad y_i=x_i \text{ при } i=2,3,\ldots,n,$$

то получим

$$f=a_{11}^{-1}y_1^2+g\,,$$

где g будет теперь квадратичной формой от неизвестных $y_2, y_3,\ldots,y_n$. Выражение есть искомое выражение для формы f, так как оно получено невырожденным линейным преобразованием, а именно преобразованием, обратным линейному преобразованию, которое имеет своим определителем a_{11} и поэтому не вырождено.

Если же имеют место равенства $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=0$, то предварительно нужно совершить вспомогательное линейное преобразование, приводящее к появлению в нашей форме f квадратов неизвестных. Так как среди коэффициентов этой формы должны быть отличные от нуля, иначе нечего было бы доказывать, то пусть, например, $a_{12}\neq 0$, т. е. f

является суммой слагаемого $2a_{12}x_1x_2$ и слагаемых, в каждый из которых входит хотя бы одно из неизвестных $x_3,\dots,x_n$. Совершим теперь линейное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2,\ x_2 = z_1 + z_2,\ x_i = z_i \text{ при } i = 3,\dots,n.$$

Оно будет невырожденным, так как имеет определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

В результате этого преобразования слагаемое $2a_{12}x_1x_2$ нашей формы примет вид

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2,$$

т. е. в форме f появятся, с отличными от нуля коэффициентами, квадраты сразу двух неизвестных, причем они не могут сократиться ни с одним из остальных членов, так как в каждый из этих последних входит хотя бы одно из неизвестных $z_3,\dots,z_n$.

Теперь мы находимся в условиях уже рассмотренного выше случая, т. е. еще одним невырожденным линейным преобразованием можем привести форму f к каноническому виду.

Для окончания доказательства остается отметить, что квадратичная форма g зависит от меньшего, чем n, числа неизвестных и поэтому, по предположению индукции, некоторым невырожденным преобразованием неизвестных $y_2, y_3,\dots,y_n$ приводится к каноническому виду. Это преобразование, рассматриваемое как (невырожденное, как легко видеть) преобразование всех n неизвестных, при котором y_1 остается без изменения, приводит, следовательно, к каноническому виду. Таким образом, квадратичная форма f двумя или тремя невырожденными линейными преобразованиями, которые можно заменить одним невырожденным преобразованием – их произведением, приводится к виду суммы квадратов неизвестных с некоторыми коэффициентами. Число этих квадратов равно, как мы знаем, рангу формы r. Если, сверх того, квадратичная форма f действительная, то коэффициенты как в каноническом виде формы f, так в линейном преобразовании, приводящем f к этому виду, будут действительными; в самом деле, и линейное преобразование, обратное, и линейное преобразование имеют действительные коэффициенты. □

Метод Лагранжа, использованный в этом доказательстве, может быть применен в конкретных примерах для действительного приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нужно лишь вместо индукции, которую мы использовали в доказательстве, последовательно выделять изложенным выше методом квадраты неизвестных.

Пример 1. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$f = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$$

Решение.

Ввиду отсутствия в этой форме квадратов неизвестных мы выполним сначала невырожденное линейное преобразование

$$x_1 = y_1 - y_2,\ x_2 = y_1 + y_2,\ x_3 = y_3$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

после чего получим:

$$f = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3.$$

Теперь коэффициент при y_1^2 отличен от нуля, и поэтому из нашей формы можно выделить квадрат одного неизвестного. Полагая

$$z_1 = y_1 + y_3,\ z_2 = y_2,\ z_3 = y_3,$$

т. е. совершая линейное преобразование, для которого обратное будет иметь матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

мы приведем f к каноническому виду

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Линейное преобразование, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, будет иметь своей матрицей произведение

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно и непосредственной подстановкой проверить, что невырожденное (так как определитель равен 2) линейное преобразование

$$x_1 = z_1 - z_2 - z_3,$$
$$x_2 = z_1 + z_2 - z_3,$$
$$x_3 = z_3$$

превращает исходную квадратичную форму к каноническому виду.

Пример 2. Привести форму к каноническому виду

$$f = 4\,x_1^2 + 2\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 4\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 + 4\,x_1x_4 + 4\,x_2x_3 - 4\,x_3x_4.$$

Решение.

$$\begin{aligned}
f &= 4\,(x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_4) + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 4x_3x_4 = \\
&= 4\left[\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2\right] + \\
&+ 2\,x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4\,x_2x_3 - 4\,x_3x_4 = \\
&= 4\,\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 + \\
&\quad + \left[\,(x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_3 + x_4)^2\,\right] - 2\,x_3x_4 = \\
&= 4\,\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\
&\quad - x_3^2 - 4\,x_3x_4 - x_4^2 = \\
&\quad 4\,\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - \\
&\quad - \left[\,(x_3 + 2\,x_4)^2 - 4\,x_4^2\right] - x_4^2 = \\
&= 4\,\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_3 + 2\,x_4)^2 + 3\,x_4^2
\end{aligned}$$

Ответ.

$$f \equiv 4\,\left(x_1 - \tfrac{1}{2}\,x_2 - \tfrac{1}{2}\,x_3 + \tfrac{1}{2}\,x_4\right)^2 + (x_2 + x_3 + x_4)^2 - (x_3 + 2\,x_4)^2 + 3\,x_4^2.$$

Пример 3. Привести форму к каноническому виду

$$f = x_1^2 + x_2^2 - 4\,x_3^2 + 2\,x_1x_2 + 6\,x_1x_3 + 4\,x_2x_3.$$

Решение.

$$f \equiv (x_1{+}x_2{+}3\,x_3)^2 - (x_2{+}3\,x_3)^2 + x_2^2 - 4\,x_3^2 + 4\,x_2x_3 \equiv (x_1{+}x_2{+}3\,x_3)^2 - 2\,x_2x_3 - 13\,x_3^2 \equiv$$

В соответствии с алгоритмом, на следующем шаге нужно выделять слагаемые, содержащие переменную x_2, но коэффициент при x_2^2в правой части формулы обратился в нуль. Поэтому — в соответствии с пунктом 2 метода — приходится выделять квадрат на основе переменной x_3:

$$(x_1 + x_2 + 3\,x_3)^2 - 13\,\left(x_3 - \frac{1}{13}x_2\right)^2 + 13 \cdot \frac{1}{13^2}x_2^2\ .$$

Ответ..

Пример 4. Привести форму к каноническому виду

$$f = x_1x_2 - 3\,x_1x_3 + 2\,x_2x_3.$$

Решение.

Коэффициенты при квадратах переменных все равны нулю. Действуем в соответствии с пунктом 3 метода Лагранжа. Поскольку коэффициент при x_1x_2отличен от нуля, делаем замену переменной $x_2 = X_2 - x_1$ при $X_2 = x_1+x_2$:

$$f = -x_1^2 + x_1x_2 - 5x_1x_3 + 2x_2x_3$$

Дальнейший ход решения — в соответствии с пунктом 1 метода Лагранжа:

$$-\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + 2\,X_2x_3 \equiv$$

$$\equiv -\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{4}X_2^2 - \frac{1}{2}X_2x_3 + \frac{25}{4}x_3^2 \equiv$$

$$\equiv -\left(x_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{5}{2}x_3\right)^2 + \frac{1}{4}\left(X_2 - x_3\right)^2 + 6\,x_3^2$$

Получили сумму квадратов форм от переменных x_1, x_2, x_3. Возвращаемся к переменной x_2:

Ответ. $-(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3)^2 + \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3)^2 + 6\,x_3^2$.

7.3. Приведение квадратичной формы к главным осям

Теория приведения квадратичной формы к каноническому виду, изложенная в предыдущем параграфе, построена по аналогии с геометрической теорией центральных кривых второго порядка, но не может считаться обобщением этой последней теории. В самом деле, в нашей теории допускается использование любых невырожденных линейных преобразований, в то время как приведение кривой второго порядка к каноническому виду достигается применением линейных преобразований весьма специального вида, являющихся вращениями плоскости. Эта геометрическая теория может быть, однако, обобщена на случай квадратичных форм от n неизвестных с действительными коэффициентами, если потребовать, чтобы матрица преобразования Q была ортогональной. Такое преобразование называется *ортогональным*, а сама процедура $-$ *приведением квадратичных форм к главным осям*.

Теорема. *Каждая квадратичная форма некоторым ортогональным преобразованием может быть приведена к каноническому виду.*

Доказательство.

Будем смотреть на матрицу квадратичной формы как на матрицу некоторого линейного оператора в евклидовом пространстве. Если $A-$ матрица квадратичной формы, то она симметрическая порядка n. Если

$e_1, e_2, \ldots, e_n -$ некоторый ортонормированный базис $n-$мерного евклидова пространства, то матрица A задаёт в этом базисе симметрический оператор φ. По основной теореме о симметрических операторах в евклидовом пространстве в подходящем ортонормированном базисе $f_1, f_2, \ldots, f_n$ его матрица B будет диагональной. Пусть $Q-$ матрица перехода от $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к $f_1, f_2, \ldots, f_n$, тогда $B = Q^{-1} A Q$.

Но матрица Q, как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, будет ортогональной, а значит, $Q^{-1} = Q'$. Поэтому $B = Q' A Q$. А именно так преобразуется матрица A квадратичной формы, подвергнутой линейному преобразованию неизвестных с матрицей Q.

Итак, преобразование неизвестных, имеющее матрицу $Q-$ ортогонально, а матрица B, будучи диагональной, соответствует квадратичной форме канонического вида. □

Тот факт, что матрица линейного оператора φ в базисе, составленном из собственных векторов, имеет диагональный вид (с собственными значениями по главной диагонали), даёт нам метод практического отыскания канонического вида квадратичной формы, а также самого этого ортогонального преобразования.

Пример 2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$$

Решение.

Матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

Найдём её характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2(\lambda-5).$$

Таким образом, матрица A имеет двукратный корень -1 и простой корень 5. Следовательно, канонический вид данной квадратичной формы будет

$$f = -y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2.$$

Найдём ортогональное преобразование, осуществляющее это приведение. Для этого найдём собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям $\lambda_{1,2} = -1$; $\lambda_3 = 5$, т. е. решим системы линейных однородных уравнений $\left(A - \lambda E \middle| 0\right)$ для каждого λ.

При $\lambda_{1,2} = -1$ имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда $x_1 = -x_2 - x_3$, т. е. имеются 2 независимые переменные, и фундаментальный набор решений будет:

$$b_1 = (-1, 1, 0),$$
$$b_2 = (-1, 0, 1).$$

Применив к ним процесс ортогонализации, получим:

$$c_1 = (-1, 1, 0),$$
$$c_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

При $\lambda_3 = 5$ имеем

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0. \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Данная система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

решением которой будет

$$c_3 = (1, 1, 1).$$

Остаётся нормировать систему c_1, c_2, c_3:

$$d_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$d_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),$$

$$d_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Таким образом искомое преобразование имеет вид:

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2,$$

$$y_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x_3, (*)$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3.$$

Для того чтобы найти матрицу преобразования Q, нужно выразить переменные x_1, x_2, x_3 через y_1, y_2, y_3, т. е. найти матрицу, обратную матрице преобразования $(*)$. А так как $Q^{-1} = Q'$, то достаточно транспонировать матрицу преобразования $(*)$. Окончательно имеем:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3, \ .$$

$$x_3 = \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3.$$

Пример 2. Найдем канонический вид в ортонормированном базисе квадратичной формы

$$f = 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_3 + 3x_2^{\ 2} + 3x_3^{\ 2}.$$

Решение.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Для определения канонических коэффициентов составим и решим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0.$$

Откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -2$, и канонический вид квадратичной формы

$$f = 4y_1^{\ 2} + 4y_2^{\ 2} - 2y_3^{\ 2}.$$

Найдем связь между старыми и новыми координатами вектора $\bar{x}$. Собственные векторы матрицы А при $\lambda = 4$ определяются уравнением $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$, линейно независимые решения которого, например, векторы

$$\bar{f}_1 = (0,1,-1)^T, \ \ \bar{f}_2 = (1,0,2)^T.$$

Координаты третьего собственного вектора определяются системой

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0,$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0,$$

которая имеет решение $\bar{f}_3 = (-2,1,1)^T$. Применяя к полученным векторам процесс ортогонализации Грама - Шмидта, получим искомый ортонормированный базис

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

и связь между старыми и новыми координатами вектора $\bar{x}$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3,$$
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3,$$
$$y_2 = \frac{-2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3.$$

7.4. Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду

Метод Якоби позволяет найти канонические коэффициенты невырожденной квадратичной формы по ее коэффициентам в произвольном базисе, не строя сам канонический базис.

Обозначим через Δ_k главный минор k-го порядка матрицы квадратичной формы $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, т. е.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad k = \overline{1,n}.$$

Если все главные миноры Δ_k матрицы квадратичной формы отличны от нуля, то существует канонический базис, в котором данная форма имеет вид $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$, где $\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k},\ k = \overline{1,n},\ \Delta_0 = 1$.

Пример. Приведем к каноническому виду методом Якоби квадратичную форму

$$f = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

Решение.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Главные миноры матрицы

$$\Delta_1 = 2, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1.5 & 2 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{17}{4}.$$

Поэтому $f = \frac{y_1^2}{2} - 8y_2^2 + \frac{y_3^2}{17}$, где y_1, y_2, y_3 - координаты вектора $\bar{x}$ в каноническом базисе.

7.5. Закон инерции действительных квадратичных форм

Канонический вид, к которому приводится данная квадратичная форма, определяется неоднозначно. Всякая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими различными способами. Возникает вопрос, что общего у тех различных канонических квадратичных форм, к которым приводится данная форма f? Этот вопрос тесно связан с другим вопросом: при каком условии одна из двух данных квадратичных форм может быть переведена в другую невырожденным линейным преобразованием? Ответ на эти вопросы, оказывается, зависит от того, рассматриваются ли комплексные или действительные квадратичные формы.

Рассмотрим вначале произвольные комплексные квадратичные формы, допуская употребление невырожденных линейных преобразований также с произвольными комплексными коэффициентами. Известно, что всякая квадратичная форма f от n неизвестных, имеющая ранг r, приводится к каноническому виду

$$f = c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + \ldots + c_ry_r^2,$$

где все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ отличны от нуля. Пользуясь тем, что из всякого комплексного числа извлекается квадратный корень, выполним следующее невырожденное линейное преобразование:

$$z_i = \sqrt{c_i}\,y_i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, r; \ z_j = y_j \text{ при } j = r+1, \ldots, n.$$

Оно приводит форму f к виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2,$$

называемому *нормальным*; это – просто сумма квадратов r неизвестных с коэффициентами, равными единице.

Из равенства видно, что нормальный вид зависит лишь от ранга r формы f. Тогда, если формы f и g от n неизвестных имеют одинаковый ранг r, то можно перевести f в g, т. к. преобразование, обратное невырожденному, также невырожденное. Таким образом, существует невырожденное линейное преобразование, переводящее f в g. Так как, с другой стороны, никакое невырожденное линейное преобразование не изменяет ранга формы, то мы приходим к следующему результату:

Теорема. *Две комплексные квадратичные формы от n неизвестных тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами, если эти формы имеют один и тот же ранг.*

СЛЕДСТВИЕ. *Каноническим видом комплексной квадратичной формы ранга r может служить всякая сумма квадратов r неизвестных с любыми отличными от нуля комплексными коэффициентами.*

Иная ситуация в том случае, когда рассматриваются действительные квадратичные формы и допускаются лишь линейные преобразования с действительными коэффициентами. В этом случае уже не всякую форму можно привести к виду, так как это могло бы потребовать извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Если, однако, мы назовем теперь нормальным видом квадратичной формы сумму квадратов нескольких неизвестных с коэффициентами +1 или –1, то легко показать, что всякую действительную квадратичную форму f можно привести невырожденным линейным преобразованием с действительными, коэффициентами к нормальному виду.

В самом деле, форма f ранга r от n неизвестных приводится к каноническому виду, который можно записать следующим образом (меняя, если нужно, нумерацию неизвестных):

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - c_r y_r^2,\ 0 \le k \le r,$$

где все числа $c_1, c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_r$ отличны от нуля и положительны. Тогда невырожденное линейное преобразование с действительными коэффициентами:

$$z_i = \sqrt{c_i}\, y_i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, r;\ z_j = y_j \text{ при } j = r+1, \ldots, n,$$

приводит f к нормальному виду

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

Общее число входящих сюда квадратов будет равно рангу формы.

Действительная квадратичная форма может быть приведена к нормальному виду многими различными преобразованиями, однако с точностью до нумерации неизвестных она приводится лишь к одному нормальному виду. Это показывает следующая:

Теорема (закон инерции действительных квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных квадратов в нормальном виде, к которому приводится данная квадратичная форма с действительными коэффициентами действительным невырожденным линейным преобразованием, не зависят от выбора этого преобразования.*

Доказательство.

Пусть квадратичная форма f ранга r от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ двумя способами приведена к нормальному виду:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_l^2 - z_{l+1}^2 - \ldots - z_r^2$$

Так как переход от неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ к неизвестным $y_1, y_2, \ldots, y_n$ был невырожденным линейным преобразованием, то обратное преобразование, выражающее $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ также будет невырожденным:

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = \overline{1..n}.$$

Аналогично

$$z_j = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} x_t, \quad j = \overline{1..n},$$

причем определители из коэффициентов отличны от нуля. Коэффициенты же $-$ действительные числа.

Предположим теперь, что $k < l$, и напишем систему равенств

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_k = 0, z_{l+1} = 0, \ldots, z_r = 0, \ldots, z_n = 0.$$

Если левые части этих равенств будут заменены их выражениями получим систему $n - l + k$ линейных однородных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, поэтому, как мы знаем система обладает ненулевым действительным решением $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Заменим теперь в равенстве все y и все z их выражениями, а затем подставим вместо неизвестных числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.Если для краткости через $y_i(\alpha)$и $z_j(\alpha)$ будут обозначены значения неизвестных y_i и z_j, получающиеся после такой подстановки, то получаем равенство

$$-y_{k+1}^2(\alpha)-\ldots-y_r^2(\alpha)=z_1^2(\alpha)+\ldots+z_l^2(\alpha).$$

Так как все коэффициенты действительные, то все квадраты, входящие в равенство, положительны, а поэтому оно влечет за собой равенство нулю всех этих квадратов; отсюда следуют равенства

$$z_1(\alpha)=0,\ldots,z_l(\alpha)=0.$$

С другой стороны, по самому выбору чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$

$$z_{l+1}(\alpha)=0,\ldots,z_r(\alpha)=0,\ldots,z_n(\alpha)=0.$$

Таким образом, система n линейных однородных уравнений

$$z_i=0,\quad i=\overline{1..n},$$

с n неизвестными $x_1,x_2,\ldots,x_n$ обладает ненулевым решением $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, т. е. определитель этой системы должен быть равен нулю. Это противоречит, однако, тому, что преобразование предполагалось невырожденным. К такому же противоречию мы придем при $l<k$. Отсюда следует равенство $k=l$. ■

Число положительных квадратов в той нормальной форме, к которой приводится данная действительная квадратичная форма f, называется *положительным индексом инерции* этой формы, число отрицательных квадратов – *отрицательным индексом инерции*. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции – *сигнатурой* формы f.

Понятно, что при заданном ранге формы задание любого из определенных сейчас трех чисел вполне определяет два других, и поэтому в дальнейших формулировках можно будет говорить о любом из этих трех чисел.

Теорема. *Две квадратичные формы от* n *неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда переводятся друг в друга невырожденными действительными линейными преобразованиями, если эти формы имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры.*

Доказательство.

Действительно, пусть форма f переводится в форму g невырожденным действительным преобразованием. Мы знаем, что это преобразование не меняет ранга формы. Оно не может менять и сигнатуры, так как в противном случае f и g приводились бы к различным нормальным видам, а тогда форма f приводилась бы, в противоречие с законом инерции, к этим обоим нормальным видам. Обратно, если формы f и g имеют одинаковые ранги и одинаковые сигнатуры, то они приводятся к одному и тому же нормальному виду и поэтому могут быть переведены друг в друга. ■

7.6. Положительно определенные формы

Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами называется *положительно определенной*, если она приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов, т. е. если и ранг, и положительный индекс инерции этой формы равны числу неизвестных.

Теорема. *Квадратичная форма f от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, когда при всяких действительных значениях этих неизвестных, хотя бы одно из которых отлично от нуля, эта форма получает положительные значения.*

Доказательство.

Пусть форма f положительно определенная, т. е. приводится к нормальному виду $f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_r^2$, причем

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = \overline{1..n}$$

с отличным от нуля определителем из действительных коэффициентов a_{ij}. Подставим в f произвольные действительные значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, хотя бы одно из которых отлично от нуля. Заметим, что значения, полученные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$, не могут все сразу равняться нулю, так как иначе мы получили бы, что система линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \quad i = \overline{1..n},$$

обладает ненулевым решением, хотя её определитель отличен от нуля. Подставляя найденные для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения, мы получим значение формы f, равное сумме квадратов n действительных чисел, которые не все равны нулю; это значение будет, следовательно, строго положительным.

Обратно, пусть форма f не является положительно определенной, т. е. или ее ранг, или положительный индекс инерции меньше n. Это означает, что в нормальном виде этой формы, к которому она приводится, скажем, невырожденным линейным преобразованием, квадрат хотя бы одного из новых неизвестных, например y_n, или отсутствует совсем, или же содержится со знаком минус.

Покажем, что в этом случае можно подобрать такие действительные значения для неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не все равны нулю, что значение формы f при этих значениях неизвестных равно нулю или даже отрицательно. Такими будут, например, те значения, для $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые мы получим, решая по правилу Крамера систему линейных уравнений, получающихся при $y_1 = y_2 = \ldots y_{n-1} = 0, \quad y_n = 1$. Действительно, при этих значениях неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ форма f равна нулю, если y_n^2 не входит в нормальный вид этой формы, и равна -1, если y_n^2 входит в нормальный вид со знаком минус. ■

С помощью доказанной теоремы нельзя, к сожалению, по коэффициентам формы установить, будет ли эта форма положительно определенной. Для этой цели служит другая теорема, которую мы сформулируем и докажем после того, как введем одно вспомогательное понятие.

Пусть дана квадратичная форма f от n неизвестных с матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$. Миноры порядка $1, 2, \ldots, n$ этой матрицы, расположенные в ее левом верхнем углу, т. е. миноры

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

из которых последний совпадает, очевидно, с определителем матрицы A, называются *главными минорами* формы f.

Лемма. *Если квадратичная форма f с действительными коэффициентами, составляющими матрицу A, подвергается невырожденному линейному преобразованию с действительной матрицей Q, то знак определителя формы (т. е. определителя ее матрицы) не меняется.*

Доказательство.

Действительно, после преобразования мы получаем квадратичную форму с матрицей $Q'AQ$, однако, ввиду $|Q'| = |Q|$, $|Q'AQ| = |Q'||A||Q| = |A||Q|^2$, т. е. определитель $|A|$ умножается на положительное число. □

Теорема (Критерий Сильвестра). *Квадратичная форма f от n неизвестных с действительными коэффициентами тогда и только тогда будет положительно определенной, если все ее главные миноры строго положительны.*

Доказательство.

Воспользуемся индукцией по количеству неизвестных. При $n=1$ теорема верна, так как форма имеет в этом случае вид ax^2 и поэтому положительно определена тогда и только тогда, если $a>0$. Будем, поэтому доказывать теорему для случая n неизвестных, предполагая, что для квадратичных форм от $n-1$ неизвестных она уже доказана.

Пусть дана квадратичная форма $f = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$. Ее можно записать в виде $f=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})+2\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{in}x_i x_n + a_{nn}x_n^2$, где φ будет квадратичной формой от $n-1$ неизвестных, составленной из тех слагаемых формы f, в которые не входит неизвестная x_n.

Главные миноры формы φ совпадают, очевидно, со всеми, кроме последнего, главными минорами формы f.

Пусть форма f положительно определена. Форма φ также будет в этом случае положительно определенной: если бы существовали такие значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не все равные нулю, при которых форма φ получает не строго положительное значение, то, полагая дополнительно $x_n=0$, мы получили бы также не строго положительное значение формы f, хотя не все значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ равны нулю. Поэтому, по индуктивному предположению, все главные миноры формы φ, т.е. все главные миноры формы f, кроме последнего, строго положительны. Что же касается последнего главного минора формы f, т.е. определителя самой матрицы A, то его положительность вытекает из следующих соображений: форма f, ввиду ее положительной определенности, невырожденным линейным преобразованием приводится к нормальному виду, состоящему из n положительных квадратов. Определитель этого нормального вида строго положителен, а поэтому ввиду сделанного выше замечания положителен и определитель самой формы f.

Пусть теперь строго положительны все главные миноры формы f. Отсюда вытекает положительность всех главных миноров формы φ, т.

е., по индуктивному предположению, положительная определенность этой формы. Существует, следовательно, такое невырожденное линейное преобразование неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, которое приводит форму φ к виду суммы $n-1$ положительных квадратов от новых неизвестных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Это линейное преобразование можно дополнить до (невырожденного) линейного преобразования всех неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полагая $x_n = y_n$. Форма f приводится указанным преобразованием к виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2$$

точные выражения коэффициентов b_{in} для нас несущественны. Так как

$$y_i^2 + 2b_{in} y_i y_n = \left(y_i + b_{in} y_n\right)^2 - b_{in}^2 y_n^2,$$

то невырожденное линейное преобразование

$$z_i = y_i + b_{in} y_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$z_n = y_n$$

приводит форму f к каноническому виду

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + c z_n^2$$

Для доказательства положительной определенности формы f остается доказать положительность числа c. Определитель формы, стоящей в правой части равенства, равен c. Этот определитель должен, однако, быть положительным, так как правая часть равенства получена из формы f двумя невырожденными линейными преобразованиями, а определитель формы f был, как последний из главных миноров этой формы, положительным. ■

Пример 3. Квадратичная форма

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

положительно определена, так как ее главные миноры

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

положительны.

Пример 4. Квадратичная форма

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

не будет положительно определенной, так как ее второй главный минор отрицателен:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

По аналогии с положительно определенными квадратичными формами можно ввести *отрицательно определенные* формы, т. е. такие невырожденные квадратичные формы с действительными коэффициентами, нормальный вид которых содержит лишь отрицательные квадраты неизвестных. Вырожденные квадратичные формы, нормальный вид которых состоит из квадратов одного знака, называются иногда *полуопределенными*. Наконец, *неопределенными* будут такие квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты неизвестных.

Упражнения

1. Записать матрицу квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если:

а) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$;

в) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$;

г) $f(x_1, x_2) = 3x_1x_2$;

д) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$;

ж) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2$;

з) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3$;

и) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2 - 2x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_3x_4$;

к) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_4^2 - x_1x_4$.

2. Записать квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ по заданной матрице A, если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}0 & 5 & 0\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$.

3. Определить ранг квадратичной формы $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, если:

а) $f(x_1, x_2)=x_1^2+4x_2^2+4x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2-6x_1x_2$;

в) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$;

г) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2-3x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-8x_2x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=2x_1^2-x_2^2+3x_3^2+x_4^2$.

4. Привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и найти выражение новых неизвестных через старые, если:

а) $f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$;

в) $f(x_1, x_2, x_3)=4x_1^2+2x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-6x_2x_3$;

г) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2-4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3)=x_2^2+x_3^2+x_1x_3-2x_2x_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_2-x_1x_3$.

5. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$ к каноническому виду (приведение к главным осям), и написать этот канонический вид, если:

а) $f(x_1, x_2)=2x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2$;

б) $f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_2^2+2\sqrt{6}x_1x_2$;

в) $f(x_1, x_2)=2x_1x_2$;

г) $f(x_1, x_2, x_3)=3x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

д) $f(x_1, x_2, x_3)=7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

е) $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3$;

ж) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

з) $f(x_1, x_2, x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$;

и) $f(x_1, x_2, x_3)=11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3$;

к) $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

л) $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

м) $f\left(x_1, x_2, x_3\right)=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

6. Исследовать на знакоопределённость каждую из данных квадратичных форм:

а) $x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2$;

б) $x_1^2+2x_2^2-6x_1x_2$;

в) $x_1^2-3x_2^2+3x_3^2-x_1x_2+2x_2x_3$;

г) $6x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

д) $-8x_1^2-5x_2^2-6x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3+2x_2x_3$;

е) $x_1^2-2x_2^2+3x_3^2-4x_4^2+x_1x_4+6x_2x_3$.

7. Исследовать, при каких значениях λ является знакоопределённой каждая из данных квадратичных форм:

а) $x_1^2+2x_2^2+\lambda x_3^2$;

б) $2x_1^2-3x_2^2+4x_3^2+\lambda x_1x_2+x_2x_3$;

в) $\lambda x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2$;

г) $-3x_1^2+\lambda x_2^2-4x_1x_2$;

д) $2x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2\lambda\, x_1x_3-4x_2x_3$;

е) $5x_1^2+6x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+6x_2x_3$;

ж) $\lambda x_1^2+\lambda x_2^2+\lambda x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.

9. Привести к каноническому виду методом Лагранжа следующие квадратичные формы:

1. $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$.
2. $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$.
3. $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.
4. $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_4+x_2x_4+x_3x_4$.
5. $x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$.

10. Привести к каноническому виду методом Якоби, если это возможно, следующие квадратичные формы:

1. $4x_1^2+x_2^2+x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.
2. $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_4+x_3x_4$.
3. $2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+4x_1x_3-3x_2x_3$.
4. $3x_1^2-2x_2^2+2x_3^2+4x_1x_2-3x_1x_3-x_2x_3$.
5. $3x_1^2+2x_2^2-x_3^2-2x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_4-4x_2x_3$.

Глава 8. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

8.1. Основные определения и простейшие свойства

Многочленом, или *полиномом*, называется выражение вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_i \in P$ (Р-числовое поле), а x – символ, называемый *независимой переменной,* величины a_i называются *коэффициентами* многочлена, а выражения a_ix^{n-i} – *членами или мономами* многочлена $f(x)$, при этом $n - i$ – *степенью* монома.

Если $a_0 \neq 0$, то n называется *степенью* многочлена и обозначается deg *f*, а a_0x^n – его *старшим членом*. Коэффициент a_n называется *свободным членом*.

Многочлен $f(x) = 0$ называется *нулевым*; его степень не определена. Многочлены *1*-, *2*-, *3*-й степеней называются линейными, квадратными и кубическими соответственно. Многочлены нулевой степени вместе с нулевым многочленом называют *константами*.

Многочлен, старший коэффициент которого равен единице, называется *нормированным.*

Два многочлена

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_0$ и

$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_0$

равны, если $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Множество всех многочленов с коэффициентами из множества А обозначим А[x]. Множество всех многочленов их Р[x] можно *складывать и умножать*. При этом снова получается многочлен из Р[x].

Сложение и умножение многочленов происходит по обычным правилам сложения и умножения алгебраических выражений. Для определения суммы многочленов *f(x)* и *g(x)* предположим, что $m = n$ (чтобы это предположение выполнялось припишем, если необходимо, к многочленам *f(x)* и *g(x)* нужное количество членов с нулевыми коэффициентами). Тогда *суммой* многочленов *f(x)* и *g(x)* называется многочлен.

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n)$$

Пример.

$f(x) = 3x^4 - 7x^2 + x - 3;\ g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$. Найти $f(x) + g(x)$

$f(x) + g(x) = 3x^4 + 2x^3 + (-7+5)x^2 + (1+3)x + (-3+(-2)) =$

$= \underline{3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 5}.$

Произведением многочленов *f(x)* и *g(x)* называется многочлен

$$f(x)g(x) = a_0b_0x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x + a_nb_m\ ,$$

т.е. $f(x)g(x) = c_0x^{n+m} + c_1x^{n+m-1} + \cdots + c_{n+m-1}x + c_{n+m}$, где $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j$, $\deg(f(x)g(x)) = degf(x) + degg(x)$.

Пример. $f(x) = 2x^2 - x + 1; g(x) = 3x - 1$. Найти $f(x) \cdot g(x)$.

$f(x) \cdot g(x) = (2x^2 - x + 1)(3x - 1) =$

$= 2x^2 \cdot 3x + (-x) \cdot 3x + 1 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-1) + (-x) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) =$

$= 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + x - 1 = \underline{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}.$

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ – коммутативность сложения;
2. $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ – коммутативность умножения;
3. $f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ –ассоциативность сложения;
4. $f(x)\big(g(x)h(x)\big) = (f(x)g(x))h(x)$ – ассоциативность умножения;
5. $f(x)\big(g(x) + h(x)\big) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$ – дистрибутивность.

Докажем, например, ассоциативность умножения многочленов. Если помимо многочленов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \text{ и } g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

дан еще многочлен $h(x) = c_0x^t + c_1x^{t-1} + \ldots + c_t$, $c_t \neq 0$, то коэффициентом при $x^{n+m+t-i}$, $i = \overline{0, n+m+t}$ в произведении $[f(x)g(x)]h(x)$ будет служить элемент $\sum\limits_{j+m=i}\left(\sum\limits_{k+i=j} a_kb_i\right)c_m = \sum\limits_{k+l+m=i} a_kb_lc_m$, а в произведении $f(x)[g(x)h(x)]$ - равное ему число $\sum\limits_{k+j=i} a_k\left(\sum\limits_{l+m=j} b_lc_m\right) = \sum\limits_{k+l+m=i} a_kb_lc_m$.

Легко видеть, что в $P[x]$ константа 0 (и только она) является нейтральным элементом относительно сложения, т.е. для любого $f(x) \in P[x]$ справедливо $f(x) + 0 = f(x)$. Для многочлена $f(x) \in P[x]$ противоположным называется такой многочлен $h(x)$, что $h(x) + f(x) = 0$. Нетрудно заметить, что таким многочленом будет только

$$-f(x) = (-a_0)x^n + (-a_1)x^{n-1} + (-a_2)x^{n-2} + \cdots + (-a_{n-1})x + (-a_n).$$

Операция вычитания выводится как операция, обратная к сложению, а именно разностью или многочленом, полученным в результате вычитания многочленов *f(x)* и *g(x)*, называется такой многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$, что $f(x) + h(x) = g(x)$.

В $P[x]$ константа 1 (и только она) является нейтральным элементом относительно умножения, т.е. для любого $f(x) \in P[x]$ справедливо $f(x) \cdot 1 = f(x)$. Для многочлена $f(x) \in P[x]$ обратным называется такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot f(x) = 1$. Обратный многочлен, если он существует, обозначается $\frac{1}{f(x)}$. Из утверждения вытекает, что $deg\,\frac{1}{f(x)} = degf(x)$, откуда получаем, что обратный многочлен существует тогда и только тогда, когда $degf(x) = 0$, т.е. $f(x)$ - нулевая константа. Операция деления вводится как операция, обратная операции умножения, а именно частным или многочленом, полученным в результате деления нацело $g(x)$ на $f(x)$, называется такой многочлен $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, что $f(x)h(x) = g(x)$.

Из определения суммы многочленов получаем, что либо $f(x) + g(x) = 0$, либо $\deg\big(f(x) + g(x)\big) \le \max\{deg\, f(x), degg(x)\}$. Из определения произведения многочленов получаем, что если $f(x) \ne 0$ и $g(x) \ne 0$, то $\deg\big(f(x)g(x)\big) = degf(x) + degg(x)$. Отсюда получаем, что в $P[x]$ нет делителей нуля, т.е. из равенства $f(x)g(x) = 0$, следует, что $f(x) = 0$ или $g(x) = 0$.

Лемма о сокращении. *Если* $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ *и* $h(x) \ne 0$, *то* $f(x) = g(x)$.

Доказательство.

Из равенства $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ получаем, что $(f(x) - g(x))h(x) = 0$. Так как в $P[x]$ нет делителей нуля, то $f(x) - g(x) = 0$. ■

Пример. Найти многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, если

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3.$$

Решение.

Для нахождения многочлена требуется определить его коэффициенты a_0, a_1, a_2. Из условия задачи для коэффициентов имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 = 2, \\ a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 = 3. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса. Для этого совершаем ряд последовательных исключений.

1) Из первого уравнения $a_0 = 1 - a_1 - a_2$ подставляем во второе:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_1 + 3\,a_2 = 1, \\ a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 = 3. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $a_1 = 1 - 3a_2$ подставляя в третье:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_1 + 3\,a_2 = 1, \\ 2\,a_2 = 0. \end{cases}$$

Двигаемся «обратным ходом» (находимся в поле действительных чисел):

3) из третьего уравнения находим $a_2 = 0$;

4) из второго уравнения находим $a_1 = 1$;

5) из первого уравнения находим $a_0 = 0$.

Составляем многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 = x$. Проверка очевидна. Искомый многочлен имеет вид $f(x) = x$.

Упражнения

1. Найти сумму, разность и произведение многочленов.

a) *f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x + 8 и g(x) = x^4 - 10x + 1* из кольца Z[x];

b) $f(x) = 12x^4 + 2x^3 - \bar{3}x - 1$ и $g(x) = x^5 - 6x^4 + 2$ из кольца Z[x];

c) $f(x) = (l-2i)x^3 + 2ix^2 - 4i+1$ и $g(x) = 5ix^2 + 2x-i$ из кольца C[x].

1. Определить степень суммы и произведения многочленов

a) $f(x) = 3x^7 + 2x^3 + x^3 + 5$ $g(x) = x^8 - 2x + 7$ в кольце Z[x];

b) $f(x) = 10x^{15} + x^5 - x^3 + \bar{1}$ $g(x) = 5x^2 - x + 3$ в кольце Z[x];

c) $f(x) = 3ix^7 + (2 - 6i)\,x^2 + 8$ $g(x) = 7ix^3 + 2ix + 1$ в кольце C[x].

2. Найти числа a и b из тождеств:

a) $x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + bx^2 + ax - 2)$;

b) $3x^5 - x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 27 = (x^2 + 3)(3x^3 - x^2 + ax + b)$;

c) $(x^2 - 1)(x^2 + ax + b) = x^4 + x^3 - x - 1.$

8.2. Деление многочлена с остатком

Теорема. *Для любого многочлена $f(x) \in P[x]$ и любого ненулевого многочлена $g(x) \in P[x]$ существуют и единственны многочлены $q(x)$и $r(x) \in P[x]$, такие, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, где $r(x) = 0$ или $deg r(x) < deg g(x)$. Многочлен $q(x)$ называется частным, а $r(x)$ – остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$.*

Доказательство.

Существование. Если $f(x) = 0$ или $n < m$, где $n = deg f(x), m = deg g(x)$, то положим $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. В противном случае положим

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x),$$

где a_0, b_0 – коэффициенты при старших членах многочленов $f(x), g(x)$ соответственно;

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{01}}{b_0}x^{n_1-m}g(x),$$

где $n_1 = degf_1(x)$, а a_{01} – коэффициент при старшем члене многочлена $f_1(x)$;

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{02}}{b_0}x^{n_2-m}g(x),$$

где $n_2 = degf_2(x)$, а a_{02} – коэффициент при старшем члене многочлена $f_2(x)$ и т.д.

Вычисления будем продолжать до тех пор, пока не будет получен многочлен $f_s(x) = f_{s-1}(x) - \frac{a_{0s-1}}{b_0}x^{n_{s-1}-m}g(x)$, такой что, $f_s(x) = 0$ или $n_s = degf_s(x) < m$. Суммируя все полученные выше равенства, получаем

$$f_s(x) = f(x) - \frac{1}{b_0}(a_0x^{n-m} + a_{01}x^{n_1-m} + \cdots + a_{0s-1}x^{n_{s-1}-m})g(x).$$

Пусть $r(x) = f_s(x), q(x) = \frac{1}{b_0}(a_0x^{n-m} + a_{01}x^{n_1-m} + a_{0s-1}x^{n_{s-1}-m})$. Легко видеть, что $r(x)$и $q(x)$ удовлетворяют требуемым свойствам.

Единственность. Предположим, что нашлись многочлены $r(x), r_1(x), q(x), q_1(x)$ такие, что

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

причем $degr(x) < degg(x)$, $degr_1(x) < degg(x)$. Получаем, что $\big(q(x) - q_1(x)\big)g(x) = r_1(x) - r(x)$.

Если $q(x) \neq q_1(x)$, то $deg(\big(q(x) - q_1(x)\big)g(x) \geq degg(x)$, что невозможно, так как $\deg\big(r_1(x) - r(x)\big) < degg(x)$.

Если же $q(x) = q_1(x)$, то и $r_1(x) = r(x)$. ■

Алгоритм деления многочлена на многочлен аналогичен алгоритму деления числа на число столбиком или уголком. Опишем шаги алгоритма.

1. Записать делимое в строчку, включая все степени переменной (те, которые отсутствуют, записать с коэффициентом 0).
2. Записать в «уголке» делимое, включая все степени переменной.
3. Чтобы найти первое слагаемое (одночлен) в неполном частном, нужно старший одночлен делимого разделить на старший одночлен делителя.
4. Полученное первое слагаемое частного умножить на весь делитель и результат записать под делимым, причем одинаковые степени переменной записать друг под другом.
5. Из делимого вычесть полученное произведение.
6. К полученному остатку применить алгоритм, начиная с пункта 1).
7. Алгоритм завершен, когда полученная разность будет иметь степень меньше степени делителя. Это – остаток.

Пример. Разделить многочлен $x^4 + 2x^3 + x - 1$ на $x^2 + 2$.

1. Записываем делимое и делитель

$$x^4 + 2x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1 \;\left|\, \underline{x^2 + 2}\right.$$

2. Находим старший одночлен частного, разделив x^4 на x^2 x^2. Умножаем его на делитель и вычитаем из делимого.

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4+2x^3+0\cdot x^2+x-1 \\ \underline{x^4+\qquad +2\cdot x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+2} \\ x^2 \end{array} \\
2x^3-2x^2+x-1 &
\end{array}
$$

3. Повторяем процедуру

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^4+2x^3+0\cdot x^2+x-1 \\ \underline{x^4+\qquad +2\cdot x^2} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+2} \\ \underline{x^2+2x-2} \end{array} \\
2x^3-2x^2+x-1 & \\
-\ \underline{2x^3+0\cdot x^2+4x} & \\
-2x^2-3x-1 & \\
-\ \underline{-2x^2+0\cdot x-4} & \\
-3x+3 &
\end{array}
$$

Степень -3x+3 меньше степени делителя. Значит, это – остаток. Результат деления запишется так:

$$x^4+2x^3+x-1=\left(x^2+2\right)\left(x^2+2x-2\right)-3x+3$$

Пример.

Разделить с остатком x^4+2x^3-2x+1 на $2x^2+x+1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+2x^3-2x+1 & 2x^2+x+1 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2} & \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{8} \\
\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1 & \\
\underline{\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x} & \\
\quad -\frac{5}{4}x^2-\frac{11}{4}x+1 & \\
\quad \underline{\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{8}x-\frac{5}{8}} & \\
\qquad\qquad -\frac{17}{8}x+\frac{13}{8} &
\end{array}
$$

Итак, получены частное $q(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$ и остаток $r(x)=-\frac{17}{8}x+\frac{13}{8}$.

Пример. Найти, при каких значениях a и b многочлен f(x) делится на многочлен $g(x)$, где $f(x)=2x^4+3x^3-2x^2+ax+b$, $g(x)=2x^2-3x+2$

Решение.

Делим *f(x)* на *g(x)*

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,2x^4+3x^3-2x^2+ax+b & 2x^2-3x+2 \\
\underline{2x^4-3x^3+2x^2} & \overline{x^2+3x+\frac{5}{2}} \\
\_\,6x^3-4x^2+ax+b & \\
\underline{6x^3-9x^2+6x} & \\
\_\,5x^2+(a-b)x+b & \\
\underline{5x^2-\frac{15}{2}x+5} & \\
(a+\frac{3}{2})x+(b-5)=r(x) &
\end{array}
$$

Приравниваем остаток к нулю, получим: (a + $\frac{3}{2}$)x + (b - 5) = 0 <=>

$$\begin{cases} a+\frac{3}{2}=0 \\ b-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=5 \end{cases}$$

Ответ: a = -3/2, b = 5

Упражнения

Найдите делитель, если известны делимое $f(x)$, неполное частное $q(x)$ и остаток $r(x)$:

a) $f(x)=2x^5+3x^4+2x^3+1, q(x)=x^2+3x+1, r(x)=63x+25;$

b) $f(x)=2x^5+3x^4+2x^3+1, q(x)=2x^3-3x^2+9x-24, r(x)=63x+25;$

c) $f(x)=x^4+3x^3-x^2+1, q(x)=x^2+(3-i)x-(4+3i),$

$r(x)=-3(3-2i)x+393+2i).$

8.3. Рациональные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно и $Q_m(x)\neq 0$.

Если для рациональной дроби выполняется $n\geq m$, то дробь называется *неправильной*, если $n<m$ – дробь называется *правильной*.

Среди рациональных дробей выделяют *4 типа простейших дробей:*

I. $\frac{A}{x-x_0}$; $A,\ x_0\in\mathbf{R}$;

II. $\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$; $k \ge 2,\ k \in \mathbf{N},\ A,\ x_0 \in \mathbf{R}$;

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+x+q}$; $A,\ B,\ p,\ q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D<0$;

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+x+q)^r}$; $r \ge 2,\ r \in \mathbf{N},\ A, B,\ p,\ q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D<0$.

Алгоритм разложения дроби на простейшие дроби

1. Если $n \ge m$, необходимо выделить целую часть делением многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен-частное (целая часть); $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

2. Разложить $Q_m(x)$ на множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^k (x-b)^s \ldots (x^2+px+q)^r, \text{ где } k, s, \ldots, r \in \mathbf{N}.$$

3. Если разложение знаменателя имеет такой вид, то дробь $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$
$$+ \frac{B_s}{(x-b)^s} + \ldots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+px+q)^r},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k; B_1, B_2, \ldots, B_s; C_1, \ldots, C_r; D_1, D_r$ – неопределенные коэффициенты, которые необходимо найти.

4. Для нахождения коэффициентов привести правую часть равенства к общему знаменателю, который будет равен знаменателю исходной дроби, т. е. $Q_m(x)$.

5. Приравнять числители дробей.

6. Вычислить значения неопределенных коэффициентов A_1; A_2; и т. д. Для вычисления данных коэффициентов используют следующие методы:

а) *метод неопределенных коэффициентов*: многочлены в левой и правой части равенства записать в стандартном виде и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях числителя;

б) *метод частных значений*: придать произвольные значения переменной *x* (удобнее использовать значения $x=a$; $x=b$ и т.д.) и получить равенства для исходных коэффициентов;

в) комбинирование методов а) и б).

7. Подставить полученные числовые значения коэффициентов в равенство, что и будет искомым разложением.

Рассмотрим $Q_n(x) = C_n(x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q)^{\beta_1}...(x^2+p_Sx+q_S)^{\beta_S}$, где $\sum_{m=1}^{k}\alpha_m + 2\sum_{j=1}^{S}\beta_j = n$, $Q_n(x)$ – многочлен n – степени от x, C_n – константа.

Теорема *(о разложении правильной рациональной дроби)*

Если $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m<n$ и коэффициенты этих многочленов действительные числа, то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_1^{(\alpha_1-1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + ... + \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + ... + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + ... + \frac{A_k^{(1)}}{x-a_k} +$$

$$+ \frac{B_1^{(\beta_1)}x + D_1^{(\beta_1)}}{(x^2+px+q_1)^{\beta_1}} + ... + \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+px+q_1} + ... + \frac{B_S^{(\beta_S)}x + D_S^{(\beta_S)}}{(x^2+p_Sx+q_S)^{\beta_S}} + ... + \frac{B_S^{(1)}x + D_S^{(1)}}{x^2+p_Sx+q_S})$$

Все коэффициенты разложения являются действительными числами и определяются однозначно.

Пример 1. Представить рациональную дробь $\frac{x^2}{x^4-16}$ в виде простейших дробей над полем вещественных чисел.

Решение.

$$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{0\cdot x^3 + 1\cdot x^2 + 0\cdot x + 0}{x^4-16} = \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)} = \frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$= \frac{Ax^3 + 2Ax^2 + 4Ax + 8A + Bx^3 - 2Bx^2 + 4Bx - 8B + Cx^3 + Dx^2 - 4Cx - 4D}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+B+C)x^3 + (2A-2B+D)x^2 + (4A+4B-4C)x + (8A-8B-4D)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ 2A-2B+D=1, \\ 4A+4B-4C=0, \\ 8A-8B-4D=0. \end{cases}$$

Решая систему получим: $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$. Имеем разложение

$$\frac{x^2}{x^4-16} = \frac{1}{8}\cdot\frac{A}{x-2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{B}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4}.$$

Разлагаем знаменатель дроби $\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}$ на множители:

$$\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\frac{x^2+9x+1}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}.$$

Записываем общий вид разложения

$$\frac{x^2+9x+1}{(x^2+2)\cdot(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)}=\frac{(Ax+B)\cdot\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}$$

$$x^2+9x+1=(A+C)\cdot x^3+(B+D)\cdot x^2+(4A+2B)\cdot x+(4B+2D).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях и решаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+c=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x & 4A+2C=9, \\ x^0 & 4B+2D=1, \end{array} \qquad \begin{cases} A=-C, \\ B=1-D, \\ 4(1-D)+2D=1, \\ 4(-C)+2C=9, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{9}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}, \\ D=\dfrac{3}{2}, \\ C=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Получаем $\dfrac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+2}+\dfrac{-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+4}=\dfrac{9x-1}{2\cdot\left(x^2+2\right)}-\dfrac{9x-3}{2\cdot\left(x^2+4\right)}.$

Знаменатель дроби уже разложен на множители. Записываем общий вид разложения на сумму простейших дробей:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+\left(B_1x+C_1\right)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+\left(B_2x+C_2\right)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)};$$

$$3-x=A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+\left(B_1x+C_1\right)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+\left(B_2x+C_2\right)\cdot(x-1).$$

При $x=1$ получаем $2=3A;\ A=\dfrac{2}{3}.$

$$3-x=\left(A+B_1\right)\cdot x^4+\left(2A+C_1\right)\cdot x^3+\left(3A+B_2\right)\cdot x^2+$$
$$+\left(2A-B_1+C_2-B_2\right)\cdot x+\left(A-C_1-C_2\right).$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{c|l} x^4 & A+B_1=0, \\ x^3 & 2A+C_1=0, \\ x^2 & 3A+B_2=0, \\ x^1 & 2A-B_1+C_2-B_2=1, \\ x^0 & A-C_1-C_2=3. \end{array}\right\}$$

При $A=\dfrac{2}{3}$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}+B_1=0, \\ 2\cdot\dfrac{2}{3}+C_1=0, \\ 3\cdot\dfrac{2}{3}+B_2=0, \\ 2\cdot\dfrac{2}{3}-B_1+C_2-B_2=1, \\ \dfrac{2}{3}-C_1-C_2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{2}{3}, \\ B_1=-\dfrac{2}{3}, \\ C_1=-\dfrac{4}{3}, \\ B_2=-2,- \\ C_2=-3.- \end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)}=\frac{2}{3\cdot(x-1)}-\frac{2x+4}{3\cdot\left(x^2+x+1\right)}-\frac{2x+3}{\left(x_2+x+1\right)^2}.$$

Пример 2. Разложить в сумму простейших над полем действительных чисел рациональную дробь

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Решение.

Знаменатель данной дроби разложен в произведение неприводимых многочленов над полем R $x+1$ и x^2+1.

Решим задачу методом неопределенных коэффициентов, основываясь на том, что знаменателями простейших дробей могут быть многочлены

$$x+1, \quad (x+1)^2, \quad (x^2+1)\ \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Здесь A,B,C,D- неизвестные коэффициенты числителей элементарных дробей. Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители обеих частей, будем иметь:

$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2.$$

Значение неизвестных коэффициентов можно найти из системы линейных уравнений, которую получим, дав неизвестному *x* четыре значения.

Например, положив последовательно $x=-1;\ 0;\ 1;\ -2$ будем иметь

$$1=2B, 1=A+B+D, 1=4A+2B+4C+4D, 1=-5A+5B-2C+D.$$

Откуда

$$B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=0,\ A=\frac{1}{2},\ \text{т.е.}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Упражнения

1. Выделить целую и дробную часть рациональной функции:

1. $\dfrac{x^6+3x^2-4}{x^4-1}$ ***; 2.*** $\dfrac{2x^4-x-1}{x^3-x^2-6x}$ ***;3.*** $\dfrac{x^5+5x^3-3}{x^4+1}$ ***; 4.*** $\dfrac{x^4+2x-2}{x^3-1}$ ***;***

5. $\dfrac{x^4+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$ ***; 6.*** $\dfrac{x^3+4x-3}{x^2-3x-2}$ ***;7.*** $\dfrac{x^7+3x^3}{x^3+6x^2+11x+6}$ ***;***

8. $\dfrac{x^5-x^2+1}{x^4-x^3-x^2-x-2}$ ***; 9.*** $\dfrac{x^5-7x^2+1}{x^2-x}$ ***; 10.*** $\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+6}$ ***;***

11. $\dfrac{x^3+4x^2-x}{2x^2+2x+1}$ ***; 12.*** $\dfrac{x^7-6x^2-x+1}{x^3+6x^2+6}$ ***; 13.*** $\dfrac{x^5+3x^2+3}{x^3+x+4}$ ***;***

14. $\dfrac{x^7-2x^3+3x+5}{x^3-3x^2+6x+4}$ ***;15.*** $\dfrac{x^4+3x^3-1}{x^3+6x^2-x+2}$ ***; 16.*** $\dfrac{x^5-x^3+2x-1}{6x^2-5}$ ***;***

17. $\dfrac{x^5-x^2+8}{x^3-1}$ ***; 18.*** $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+x+4}$ ***; 19.*** $\dfrac{x^5+3x^4+3x}{x^2+5x+6}$ ***;***

20. $\dfrac{x^5+x^2-2x+1}{x^4-2x^2-2x-3}$ ***;21.*** $\dfrac{x^3+4x^2-2x+6}{4x^2+x}$ ***; 22.*** $\dfrac{x^5-2x^4+3}{x^4-2x^2+4x-6}$ ***;***

23. $\dfrac{x^5-6x^2+x-2}{x^3+5x+2}$ ***; 24.*** $\dfrac{x^6+3x^4-4x-2}{x^2+4x-6}$ ***;25.*** $\dfrac{x^4+5x^2-x}{x^3+3x^2}$ ***;***

26. $\dfrac{x^7+2x^4}{x^5+5x+8}$ ***; 27.*** $\dfrac{x^5-4x^3+x^2}{x^3-x^2}$ ***; 28.*** $\dfrac{x^5-6x+1}{x^2+x}$ ***;***

2. Найдите коэффициенты A, B, C, D из равенства

$$\frac{7-6x^4}{2x^2+8}=A+Bx^2+\frac{Cx+D}{2x^2+8}.$$

3. Запишите общий вид разложения дроби на сумму простейших:

1) $\dfrac{x^2-x+1}{\left(x^2+x+5\right)^2\cdot\left(x-1\right)^3}$; 2) $\dfrac{2x^2-5}{x^4-6x^3-2x^2-30x-35}$;

3) $\dfrac{2x+1}{\left(x^4+64\right)^2}$; 4) $\dfrac{x^2+2x}{x^4+x^2+1}$.

4. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{4}{\left(x^3-8\right)\cdot\left(x+1\right)}$; 2) $\dfrac{1+x}{\left(x^4-16\right)\cdot\left(x^2+1\right)}$;

3) $\dfrac{x^2-3}{x^6+x^3+8}$; 4) $\dfrac{x^2-x-1}{\left(x^2+3\right)\cdot\left(x^4+5x^2+6\right)}$.

8.4. Делимость многочленов. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ многочлены из F[x], причем $g(x) \neq 0$. Многочлен $f(x)$ *делится* $g(x)$, если для некоторого $q(x) \in F[x]$ имеем $f(x) = q(x)g(x)$, т.е. остаток при делении $f(x)$ и $g(x)$ равен нулю.

<u>*Свойства*</u>:

1) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$.

2) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $h(x) \vdots g(x)$, то $(f(x) + h(x)) \vdots g(x)$.

3) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $f(x)h(x) \vdots g(x)$ для любого $h(x)$.

4) *Любой многочлен делится на произвольную ненулевую константу.*

5) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $f(x) \vdots cg(x)$ *для ненулевой константы с.*

6) *Для того, чтобы многочлен* $f(x)$ *делился на многочлен* $g(x)$ *той же степени, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) = cg(x)$ *для некоторой константы с.*

7) *Для того, чтобы* $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, *необходимо и достаточно, чтоб* $f(x) = cg(x)$ *для некоторой константы с.*

Многочлен $d(x)$ называется *общим делителем* $f(x)$ и $g(x)$, если $d(x) \vdots f(x)$ и $d(x) \vdots g(x)$. Общий делитель $d(x)$ называется *наибольшим* (НОД), если он делится на любой другой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема. *Для любых* $f(x), g(x) \in F[x]$, *одновременно не равных нулю, их наибольший общий делитель определен однозначно с точностью до множителя с, где с – произвольная ненулевая константа.*

Доказательство.

Докажем, что если НОД существует, то он определен с точностью до множителя c. Если $d(x), d_1(x)$ – наибольшие общие делители многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $d_1 \vdots d(x)$ и $d(x) \vdots d_1(x)$, поэтому по свойству 7 имеем $d(x) = cd_1(x)$ для некоторой константы c.

Для доказательства существования НОДа приведем *алгоритм Евклида* нахождения НОД. Если $f(x) \neq 0$, а $g(x) = 0$, то, очевидно, в качестве наибольшего общего делителя можно взять $f(x)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $g(x) \neq 0$.

Разделим $f(x)$ на $g(x)$, в частном получим $q_1(x)$, в остатке - $r_1(x)$. Если $r_1(x) \neq 0$, то разделим $g(x)$ на $r_1(x)$, в частном получим $q_2(x)$, в остатке - $r_2(x)$ и т.д. вычисления продолжаются до тех пор, пока на некотором шаге s вычисленный в результате очередного деления остаток $r_{s+1}(x)$ не будет нулевым. Докажем, что $r_s(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Имеем

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x), \qquad (1)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \qquad (2)$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x), \qquad (3)$$

...

$$r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x), \quad (s\text{-}1)$$

$$r_{s-2}(x) = q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x), \qquad (s)$$

$$r_{s-1}(x) = q_{s+1}(x)r_s(x). \qquad (s+1)$$

Из последнего равенства следует, что $r_{s-1}(x) \vdots r_s(x)$. Поэтому в правой части предпоследнего равенства первое слагаемое делится на $r_s(x)$. Так как второе слагаемое, очевидно, так же делится на $r_s(x)$, то и вся правая часть делится на $r_s(x)$, а потому на $r_s(x)$ делится и левая часть этого равенства, т.е. $r_{s-2}(x)$.

Рассматривая эти равенства снизу вверх, приходим к выводу, что на $r_s(x)$ делятся все правые и левые части всех равенств, т.е. $f(x) \vdots r_s(x)$ и $g(x) \vdots r_s(x)$, т.е. $r_s(x)$ – общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Покажем, что любой общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ является делителем многочлена $r_s(x)$. Так как $f(x) \vdots d(x)$ и $g(x) \vdots d(x)$, то получаем, что $r_1(x) \vdots d(x)$. Далее, так как $g(x) \vdots d(x)$ и $r_1(x) \vdots d(x)$, то и $r_2(x) \vdots d(x)$. Рассматривая далее эти равенства сверху вниз, приходим к выводу, что $r_s(x) \vdots d(x)$. ■

Теорема. *Пусть* $f(x)$, $g(x)$, $d(x)$ *– ненулевые многочлены из F[x] и* $d(x)$ *– НОД многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$. *Тогда найдутся такие* $u(x)$ *и* $v(x)$ *из F[x], что*

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x),$$

Причем $deg\, u(x) < deg\, g(x)$, *а* $deg\, v(x) < deg\, f(x)$. *Многочлены* $u(x)$ *и* $v(x)$ *называются коэффициентами Безу*.

Пример 1. Найти НОД и коэффициенты Безу многочленов

$$f(x) = x^4 - 3,\ g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

При делении $f(x)$ на $g(x)$ получаем частное и остаток

$$q_1(x) = x - 2, r_1(x) = 3x^2 + x - 1.$$

При делении $g(x)$ на $r_1(x)$ получаем

$$q_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}, r_2(x) = \frac{7}{9}x + \frac{14}{9}.$$

При делении $r_1(x)$ на $\frac{9}{7}\ r_2(x) = x + 2$ получаем

$$q_3(x) = 3x - 5, r_3(x) = 9.$$

Остаток от деления $r_2(x)$ на $r_3(x)$ равен нулю, следовательно, $c\ r_3(x)$, где с – произвольная ненулевая константа, является наибольшим делителем $f(x)$ и $g(x)$. НОД равен 1 с точностью до ненулевой константы.

Пример 2. В кольце R[x] многочленов с действительными коэффициентами найдем наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$.

Делим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 & 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x} & \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\
-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3 & \\
-\ \underline{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}} & \\
-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} &
\end{array}$$

Для удобства умножим полученный остаток на $\frac{9}{5}$. При этом последующие остатки также умножатся на некоторые числа, отличные от нуля, что несущественно при нахождении наибольшего общего делителя, так как он находится с точностью до константы.

Выполним второе деление:

$$\begin{array}{r|l}
3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^2 + 5x + 6 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{3x^3 + 15x^2 + 18x} & 3x - 5 \\
-5x^2 - 16x - 3 & \\
-\ \underline{-5x^2 - 25x - 30} & \\
9x + 27 &
\end{array}$$

Полученный остаток разделим на 9 и выполним третье деление:

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+5x+6 & x+3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^2+3x\quad} & x+2 \\
2x+6 & \\
\underline{2x+6} & \\
0 &
\end{array}
$$

Поскольку остаток равен нулю, то НОД = $x+3$.

Линейное представление наибольшего общего делителя многочленов можно находить двумя способами: с помощью алгоритма Евклида или методом неопределенных коэффициентов. Алгоритм Евклида дает также способ нахождения многочленов *u(x)* и *v(x)* из теоремы о линейном представлении НОД(f,g). Заметим, что

$$r_0 = u_0 f + v_0 g, u_0 = 1, v_0 = -q_0;$$

$$r_1 = u_1 f + v_1 g, u_1 = -q_1, v_1 = q_0 q_1 + 1;$$

$$r_2 = r_0 - r_1 q_2 = (u_0 f + v_0 g) - (u_1 f + v_1 g) q_2 = f(u_0 - u_1 q_2) + g(v_0 - v_1 q_2), \text{ т.е.}$$

$$r_2 = f u_2 + g v_2, \quad u_2 = -u_1 q_2 + u_0,\ v_2 = -v_1 q_2 + v_0;$$

$$r_3 = f u_3 + g v_3, u_3 = -u_2 q_3 + u_1, v_3 = -v_2 q_3 + v_1.$$

Продолжая, индуктивно получим для $k > 2$

$$r_k = f u_k + g v_k, u_k = -u_{k-1} q_k + u_{k-2}, v_k = -v_{k-1} q_k + v_{k-2}.$$

И, наконец, для $d = r_n$

$$d = f u_n + g v_n, u_n = -u_{n-1} q_n + u_{n-2}, v_n = -v_{n-1} q_n + v_{n-2}.$$

Пример 3. $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, g = x^4 - 1.$

Решение.

Последовательным делением получаем по алгоритму Евклида:

$$q_0 = x + 1, r_0 = x^3 + x^2 + 2x + 2;$$

$$q_1 = x - 1, r_1 = -x^2 + 1;$$

$$q_2 = -x - 1, r_2 = 3x + 3;$$

$$q_3 = -\frac{1}{3}(x-1), r_3 = 0.$$

Следовательно, $d = r_2$, или с точностью до числового множителя $d = x + 1$. Воспользуемся рекуррентными формулами $u_k = -q_k u_{k-1} + u_{k-2}, v_k = -q_k v_{k-1} + v_{k-2}$, начиная с k = -2.

k	$-q_k$	u_k	v_k
-2		1	0
-1		0	1
0	$-(x+1)$	1	$-(x+1)$
1	$-(x-1)$	$-(x-1)$	x^2
2	$x+1$	$-x^2+2$	x^3+x^2-x-1

Таким образом, $d = \left(-x^2+2\right)f + \left(x^3+x^2-x-1\right)g$.

Пример 4. Найдем линейное выражение наибольшего общего делителя $d(x)$многочленов $f(x)$ и $g(x)$из предыдущего примера.

Результаты делений с остатком, выполненных при решении примера, показывают, что

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)g(x) - \frac{5}{9}(x^2+5x+6),\quad g(x) = (3x-5)(x^2+5x+6) + 9(x+3).$$

Отсюда находим:

$$x^2+5x+6 = -\frac{9}{5}f(x) + \frac{1}{5}(3x-1)g(x),$$

$$x+3 = \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}(3x-5)(x^2+5x+6) =$$

$$= \frac{1}{5}(3x-5)f(x) + \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{45}(3x-5)(3x-1)g(x) = \frac{1}{5}(3x-5)f - \frac{1}{5}(x^2-2x)g(x).$$

Таким образом, $u(x) = \frac{1}{5}(3x-5)$, $v(x) = -\frac{1}{5}(x^2-2x)$.

На практике линейное выражение многочлена h удобнее искать не с помощью алгоритма Евклида, а ***методом неопределенных коэффициентов***. Запишем искомые многочлены u и v в общем виде с неопределенными (неизвестными) коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве $h = uf + vg$, получим систему уравнений для коэффициентов многочленов u и v. Легко видеть, что эти уравнения будут линейными.

Для применения этого метода необходимо заранее знать оценки степеней многочленов u и v (иначе мы не будем знать, в каком общем виде их записать).

Пример 5. Найдем линейное выражение многочлена $h = x - 2$ через многочлены $f = x^2 + 2$, $g = x^3 + x - 1$.

Решение.

Эти многочлены имеют различные корни (корни первого многочлена равны $\pm\sqrt{2}i$, эти корни не являются корнями второго многочлена, в чем можно убедиться непосредственной проверкой) и, следовательно, по теореме Безу имеют различные разложения на линейные множители вида $ax+b$. Поэтому они взаимно просты. Тогда искомое линейное выражение существует, причем многочлены u и v можно искать в виде $u = ax^2 + a_1x + a_2$, $v = b_0x + b_1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве $(a_0x^2 + a_1x + a_2)(x^2 + 2) + (b_0x + b_1)\cdot$ $(x^2 + x - 1) = x - 2$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_0 & & & +b_0 & & = & 0 \\ & a_1 & & & +b_1 & = & 0 \\ 2a_0 & & +a_2 & +b_0 & & = & 0 \\ & 2a_1 & & -b_0 & +b_1 & = & 1 \\ & & 2a_2 & & -b_1 & = & -2 \end{cases}.$$

Отсюда находим: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $b_0 = -1$, $b_1 = 0$, т.е. $u = x^2 - 1$, $v = -x$.

Иногда при составлении линейных уравнений для коэффициентов многочленов u, v удобнее не приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, а придавать x различные значения, решая затем полученную систему уравнений. Придавая x значения 0, $\pm 1, \pm 2$, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} & & 2a_2 & & -b_1 & = & -2 \\ 3a_0 & +3a_1 & +3a_2 & +b_0 & +b_1 & = & -1 \\ 3a_0 & -3a_1 & +3a_2 & +3b_0 & -3b_1 & = & -3 \\ 24a_0 & +12a_1 & +6a_2 & +18b_0 & +9b_1 & = & 0 \\ 24a_0 & -12a_1 & +6a_2 & +22b_0 & -11b_1 & = & -4 \end{cases}.$$

Пример 6. Найти линейное представление НОД$(f,g) = x+1$ для многочленов $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ и $g = x^4 - 1$.

Решение.

Будем искать из условия $fu + gv = d$ функции u и v в следующем виде:

$u = ax^2 + bx + c, v = ex^3 + kx^2 + lx + m.$

$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c) + (x^4 - 1)(ex^3 + kx^2 + lx + m) = x + 1.$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему

$$\left.\begin{array}{ll} \text{при } x^7 & a + e = 0, \\ \text{при } x^6 & a + b + k = 0, \\ \text{при } x^5 & a + b + c + l = 0, \\ \text{при } x^4 & a + b + c + m = 0, \\ \text{при } x^3 & a + b + c - e = 0, \\ \text{при } x^2 & a + b + c - k = 0, \\ \text{при } x & b + c - l = 1, \\ x = 0 & c - m = 1 \end{array}\right\}$$

Решение системы:

$a = -\frac{1}{3}, \quad b = 0, \quad c = \frac{2}{3},$

$e = \frac{1}{3}, \quad k = \frac{1}{3}, \quad l = -\frac{1}{3}, \quad m = -\frac{1}{3}.$

Ответ: $u(x)=\frac{1}{3}\left(-x^2+2\right), v(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2-x-1\right).$

Упражнения

1. Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

   a) $f(x)=x^4+2x^3+x^2-5x+1,\ g(x)=x^2+x+1;$

   b) $f(x)=3x^4-2x^2+4,\ g(x)=x^2+2x-1.$

2. Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из кольца R[x] и его линейное представление:

   a) $f(x)=x^4+4x^3-7x+2$, $g(x)=x^3+3x^2-4$;

   b) $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^5-1$;

   c) $f(x)=3x^5+6x^4+3x^3-x^2-2x-1,\ g(x)=x^4-2x^2+1$;

   d) $f(x)=x^6-x^4+3x^3-2x+2$, $g(x)=x^3+2$;

   e) $f(x)=3x^6-4x^4+2x^2-1$, $g(x)=3x^5+5x^3-4x-4$;

   f) $f(x)=2x^6-3x^4-x^2-4x-2$, $g(x)=-2x^6+3x^4-2x^3-3x^2-4x-4$;

   g) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

   h) $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$; $g(x)=x^4+2x^3+x+2$;

   i) $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$, $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;

   j) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$.

8.5. Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным многочленов $f_1, f_2,..., f_m \in R[x]$ над полем R называется многочлен h, обладающий следующими свойствами:

1) h делится на каждый из многочленов $f_1, f_2,..., f_m$, т.е. является их общим кратным;

2) h делит любое общее кратное многочленов $f_1, f_2,..., f_m$.

Теорема. *Наименьшее общее кратное многочленов* $f_1, f_2,..., f_m$ *существует. Оно равно пересечению главных идеалов, порождаемых этими многочленами. Наименьшее общее кратное единственно* (*с точностью до ассоциированности).*

Доказательство. Пересечение главных идеалов является идеалом, а так как R - поле, то оно является главным идеалом, т.е. идеал $I=\bigcap\limits_{i=1}^{m}(f_i)$ - главный идеал. Образующий многочлен h ($I=(h)$) этого идеала будет наименьшим общим кратным. В самом деле, он принадлежит этому идеалу и потому является общим кратным многочленов $f_1, f_2,..., f_m$. С другой стороны, всякое общее кратное, будучи элементом этого идеала, делится на него. Это доказывает существование наименьшего общего кратного.

Пусть h_1 и h_2 - два наименьших общих кратных многочленов $f_1, f_2,..., f_m$. Из свойства 2) следует, что $h_1 \vdots h_2$ и точно также $h_2 \vdots h_1$. Это означает, что h_1 и h_2 ассоциированы.

За исключением тривиального случая, когда один из многочленов $f_1, f_2,..., f_m$ равен нулю, идеал $I=\bigcap\limits_{i=1}^{m}(f_i)$ не является нулевым, так как содержит, например, многочлен $f_1 f_2 ... f_m$. Поэтому, если исключить упомянутый случай, можно утверждать, что среди наименьших общих кратных многочленов $f_1, f_2,..., f_m$ имеется ровно один нормированный (т.е. старший коэффициент которого равен единице) многочлен. Будем обозначать его через $[f_1, f_2,..., f_m]$. (Иногда используется обозначение $\text{нмж}\{f_1, f_2,..., f_m\}$.)

Теорема. *Для двух многочленов f и g наименьшее общее кратное* $[f, g]$ *связано с наибольшим общим делителем* (f, g) *соотношением*

$$[f,g](f,g)=cfg \quad (c\in R, c\neq 0).$$

Доказательство. Для доказательства формулы положим $d=(f,g)$, $h=[f,g]$, $f=f_1 d$, $g=g_1 d$ и рассмотрим многочлен $h'=\frac{fg}{d}=f_1 g=fg_1$. Многочлен h' является общим кратным многочленов f, g и, следовательно, делится на h. Теперь рассмотрим многочлен $d'=\frac{fg}{h}$. Равенства $f=\frac{h}{g}d'$, $g=\frac{h}{f}d'$ показывают, что d' - общий делитель многочленов f, g; следовательно, d' делит d, т.е. $d=qd'$, где q - некоторый многочлен.

Отсюда получаем: $h'=\frac{fg}{d}=\frac{fg}{qd'}=\frac{h}{q}$, т.е. $h=qh'$. Значит, h делится на h'. Таким образом, h и h' ассоциированы, т.е. $h=ch'$, где $c\in R$, $c\neq 0$. Тогда получаем, что $hd=cfg$, что и требовалось доказать.

Из формулы вытекает

Следствие. *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых многочленов равно их произведению.*

Упражнения

Найдите НОК многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из кольца R[x]:

1. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2$, $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$;
2. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$, $g(x) = x^5 - 1$;
3. $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$, $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
4. $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2$, $g(x) = x^3 + 2$;
5. $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 1$, $g(x) = 3x^5 + 5x^3 - 4x - 4$;
6. $f(x) = 2x^6 - 3x^4 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = -2x^6 + 3x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 4$;
7. $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
8. $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$; $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;
9. $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$, $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$;
10. $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$, $g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$;
11. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$, $g(x) = x^2 - x + 1$;
12. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

8.5. Дифференцирование многочленов. Отделение кратных множителей

Понятие многочлен введено алгебраически. Введем алгебраически, т.е. не прибегая к понятиям функции и предела, дифференцирование многочленов.

Пусть имеется многочлен $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. *Производным многочленом* от многочлена f называется многочлен

$$f' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + na_n x^{n-1}.$$

Если $f = 0$ или $c, c \in K$, то $f' = 0$.

Свойства дифференцирования нетрудно получить, пользуясь только этим определением:

$(\lambda f)' = \lambda f', \lambda \in K;$

$(f + g)' = f' + g';$

$(fg)' = f'g + g'f;$

$\left(f^k\right)' = kf^{k-1} f'.$

Будем полагать, что $f''=(f')',f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$ и называть f'' вторым, $f^{(k)}$, соответственно, *k*-тым производным многочленом от *f*, или производным многочленом *k*-го порядка, $k\geq 1$. Иногда принимают $f^{(0)}=f$ (производный многочлен порядка 0).

Отделим кратные множители у многочлена *f(x)*. Многочлен *f(x)* запишем в виде $f(x)=aF_1F_2^2...F_s^s$, где F_1 – произведение всех множителей в каноническом представлении *f*(*x*)кратности 1, F_2 – кратности 2, ..., F_s – кратности *s*. Тогда $f'=aF_1'F_2^2...F_s^s+aF_1\cdot 2F_2F_2'F_3^3...F_s^s+...+aF_1F_2^2...sF_s^{s-1}F_s'=aF_2F_3^2...F_s^{s-1}H$, где $H=F_1'F_2F_3...F_s+2F_1F_2'F_3...F_s+...+sF_1F_2...F_{s-1}F_s',(H,F_i)=1,i=1,...,s,$ т.е. в нормализованном виде

$$d_1=(f,f')=F_2F_3^2...F_s^{s-1}.$$

Аналогично получим

$$d_2=(d_1,d_1')=F_3F_4^2\dots F_s^{s-2},$$
$$d_3=(d_2,d_2')=F_4\dots F_s^{s-3},$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$d_{s-1}=(d_{s-2},d_{s-2}')=F_s,$$
$$d_s=(d_{s-1},d_{s-1}')=1.$$

Следовательно,

$$e_1=\frac{f}{d_1}=F_1F_2\dots F_s,$$
$$e_2=\frac{d_1}{d_2}=F_2F_3\dots F_s,$$
$$e_3=\frac{d_2}{d_3}=F_3F_4\dots F_s,$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$e_s=\frac{d_{s-1}}{d_s}=F_s.$$

Отсюда $\frac{e_1}{e_2}=F_1,\frac{e_2}{e_3}=F_2,...,\frac{e_{s-1}}{e_s}=F_{s-1},e_s=F_s.$

Таким образом, *алгоритм отделения кратных множителей* многочлена *f* (*x*)заключается в следующем:

1) Найти $f',d_1=(f,f')$.
2) Найти $d_1',d_2=(d_1,d_1'),...$
3) Процесс вычисления d_i прекращается при получении $d_s=1$.
4) Вычислить $\frac{f}{d_1}=e_1$.
5) Вычислить $\frac{d_1}{d_2}=e_2,...,\frac{d_{s-1}}{d_s}=e_s$.

6) Вычислить $F_1 = \frac{e_1}{e_2}, F_2 = \frac{e_2}{e_3}, ..., F_{s-1} = \frac{e_{s-1}}{e_s}, F_s = e_s$.

Упражнения

Отделить кратные множители:

1) $x^4 - 6x^2 - 8x + 24;$
2) $x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2;$
3) $x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 6x + 1;$
4) $x^8 + 2x^6 - 2x^2 - 1 = 0.$

8.6. Многочлены над числовыми кольцами и полями. Схема Горнера. Корни многочлена

В кольце многочленов деление в обычном смысле слова, как правило, невозможно. Например, в кольце $\mathbf{R}[x]$ многочлен x^2 нельзя разделить на $x + 1$, т.е. не существует такого многочлена $g(x)$, что $x^2 = g(x)(x + 1)$ (если бы такой многочлен существовал, то при $x = -1$ мы получили бы невозможное равенство $1 = g(-1) \cdot 0$).

Если для полиномов $f(x)$ и $g(x)$ из $K[x]$ существует такой полином $h(x) \in K[x]$, что $f(x) = g(x)h(x)$, то говорят, что полином $f(x)$ *делится* на полином $g(x)$.

Прежде всего установим, что всегда осуществимо так называемое *деление с остатком*: $f(x) = (x - c)h(x) + r$ при $r \in K$. Здесь полином $h(x)$ называется *неполным частным*, а r - *остатком*.

Теорема. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \in K[x]$ *и* $c \in K$. *Найдутся полином* $h(x) \in K[x]$ *и элемент* $r \in K$ *такие, что* $f(x) = (x - c)h(x) + r$. *При этом* $r = f(c)$.

Доказательство. Естественно искать $h(x)$ в форме $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$. Сравнение коэффициентов многочлена в левой части равенства $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = = (x - c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}) + r$ с коэффициентами многочлена, полученного после раскрытия скобок и приведения подобных, в правой части этого равенства приводит к цепочке равенств

$$a_0 = b_0,$$
$$a_1 = b_1 - cb_0,$$
$$a_2 = b_2 - cb_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2},$$
$$a_n = r - cb_{n-1},$$

откуда последовательно определяют коэффициенты $h(x)$ и остаток r:

$$b_0 = a_0,$$
$$b_1 = a_1 + cb_0,$$
$$b_2 = a_2 + cb_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2},$$
$$r = a_n + cb_{n-1}.$$

Равенство $r = f(c)$ непосредственно следует из равенства $f(x) = (x-c)h(x) + r$ после подстановки в последнее вместо x элемент c. ■

Получен удобный способ вычисления коэффициентов $h(x)$ и остатка r. Этот способ носит название ***схемы Горнера***. Вычисления располагают в виде таблицы:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	c

Элементы нижней строки вычисляются последовательно по формулам выше: $b_0 = a_0$, а каждый последующий элемент равен сумме элемента, находящегося над ним, и предыдущего элемента нижней строки, умноженного на x_0.

Рассмотрим алгоритм деления многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ на двучлен $(x - a)$.

3. Нарисовать таблицу с двумя строками и числом столбцов, равным степени делимого, увеличенной на единицу.
4. В первую строку таблицы вписать коэффициенты делимого, записанного в канонической форме, включая и нулевые коэффициенты для отсутствующих степеней x.
5. Перед началом второй строки вписать число a. В первую клетку второй строки вписать то число, которое стоит в первой клетке первой строки (старший коэффициент делимого будет и старшим коэффициентом делителя).
6. Каждая следующая клетка второй строки заполняется по правилу: предыдущее число второй строки умножается на число a**,** к результату прибавляется число из первой строки, стоящее в клетке с предыдущим номером.
7. В результате в клетках второй строки (кроме последней) получаем коэффициенты неполного частного, а в последней – остаток от деления. Если остаток получился 0, то исходный многочлен делится на двучлен $(x\text{-}a)$ без остатка.

Пример. Разделить по схеме Горнера многочлен Место для уравнения. $x^3 - 3x + 2$ на $x - 2$. В этом случае a=2. Выпишем по шагам результаты выполнения алгоритма

	1	0	-3	2
2	1	2	1	4

$$x^3-3x+2=(x-2)\left(x^2+2x+1\right)+4.$$

Замечание. Если необходимо выполнить деление на двучлен $g(x)=ax+b,$ то его преобразовывают к виду $g(x)=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$, тогда

$$f(x)=(ax+b)h(x)+r=a\left(x+\frac{b}{a}\right)h(x)+r.$$

Отсюда видно, что, разделив по схеме Горнера $f(x)$ на $\left(x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$, мы найдем $a\cdot h(x)$. Тогда искомое частное $h(x)$ получится делением найденного на a. Остаток остается таким же.

Элемент c кольца K называется *корнем* полинома $f(x)$, если $f(c)=0$.

Теорема Безу. *Многочлен $f(x)$ делится на линейный многочлен $x-c$ в кольце $K[x]$ тогда и только тогда, когда c - его корень.*

Доказательство.

Пусть $f(x)$ делится на $x-c$, т.е. $f(x)=(x-c)h(x)$. Тогда $f(c)=0$.

Пусть $f(c)=0$. Тогда в равенстве $f(x)=(x-c)h(x)+r$ будет $r=f(c)=0$, т.е. $f(x)=(x-c)h(x)$. ■

Теорема. *Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Доказательство.

Докажем это утверждение с помощью индукции по степени многочлена. Многочлен нулевой степени вообще не имеет корней, так что для него утверждение теоремы справедливо.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для всех многочленов степени $n-1$, и докажем его для любого многочлена $f(x)$ степени n. Предположим, рассуждая от противного, что $x_1, x_2, ..., x_m$ - корни многочлена $f(x)$, причем $m>n$. По теореме Безу, $f(x)$ делится на $x-x_1$, т.е. $f(x)=(x-x_1)g(x)$, где $g(x)$ - некоторый многочлен степени $n-1$. Элементы x_2, ..., x_m кольца K являются корнями многочлена $g(x)$. В самом деле, при $i=2,...,m$ имеем: $f(x_i)=(x_i-x_1)g(x_i)$. Так как $x_i-x_1\neq 0$, а кольцо K не имеет делителей нуля, то $g(x_i)=0$.

Таким образом, многочлен $g(x)$ имеет не менее чем $m-1$ корней, что противоречит предположению индукции, поскольку $\deg g(x)=n-1<m-1$. ■

Следствие. *Многочлен степени не выше* n *однозначно определяется своими значениями в* $n+1$ *точках*.

Иначе говоря, существует не более одного многочлена степени не выше n, принимающего в данных (различных) точках $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ данные значения $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$.

Доказательство.

Предположим, что $f(x)$, $g(x)$ - два многочлена степени не выше n, принимающие одинаковые значения в точках $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Степень этого многочлена также не выше, чем n. Так как $f(x_i) = g(x_i)$, то $h(x_i) = 0$ при $i = 1, 2, ..., n+1$, т.е. $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ - корни многочлена $h(x)$. Согласно предудущей теореме $h(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$.

Теорема. *Если кольцо K бесконечно, то равенство функций, определяемых двумя многочленами из кольца* $K[x]$, *влечет за собой равенство самих многочленов*.

Доказательство.

Пусть многочлены $f(x), g(x) \in K[x]$ определяют одинаковые функции. Это означает, что $f(x_0) = g(x_0)$ для любого $x_0 \in K$. Обозначим через n наивысшую из степеней многочленов $f(x)$, $g(x)$. Так как кольцо K бесконечно, то в нем найдутся $n+1$ различных элементов $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.

Согласно нашему предположению, многочлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в каждой из точек $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ (как и вообще в любой точке). Следствие из предыдущей теоремы позволяет сделать отсюда вывод, что $f(x) = g(x)$.

Для конечного кольца K утверждение теоремы неверно. Однако при некоторых дополнительных предположениях и в этом случае оказывается возможным из равенства функций, определяемых двумя многочленами, сделать вывод о равенстве самих многочленов.

Пусть, например, $K = \boldsymbol{Z}_p$ - кольцо вычетов по простому модулю p. Два многочлена $f(x), g(x) \in \boldsymbol{Z}_p[x]$ будем называть *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же функцию на $\boldsymbol{Z}_p$. Так как в кольце $\boldsymbol{Z}_p$ имеется p элементов, то из следствия теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение:

Теорема. *Если многочлены* $f(x), g(x) \in \boldsymbol{Z}_p[x]$, *имеющие степень не выше чем* $p-1$, *эквивалентны, то они равны*.

Пример. Разделить по схеме Горнера многочлен

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 11 \text{ на } x - \frac{1}{2}.$$

	1	0	-2	3	-5	11
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{31}{8}$	$-\frac{111}{10}$	$\frac{463}{32}$

Таким образом, $q(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{31}{8}x-\frac{111}{16}$, $r=\frac{463}{32}$.

Из сказанного выше вытекает, что число $\frac{1}{2}$ не является корнем многочлена $f(x)$. Более того, $f(-\frac{1}{2})=\frac{463}{32}$.

Пример. Вычислить $f(c)$, если $f=x^4-8x^3+24x^2-50x+90, c=2$.

Решение.:

	1	-8	24	-50	90
2	1	-6	12	-26	**38**

$f(2)=38$.

Схема Горнера позволяет многочлен $f(x)$, записанный по убыванию степени *x*, разложить по степеням бинома $x-c$, а также определить кратность корня.

Упражнения

1. Пользуясь схемой Горнера, разделите с остатком многочлен $f(x)\in \mathbf{R}[x]$ на $x-x_0$ и вычислите $f(x_0)$:

а) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16$, $x_0=4$;

б) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1$, $x_0=-1$;

в) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+\ +8$ $x_0=1$;

г) $f(x)=2x^5-5x^3+8x$, $x_0=-3$;

д) $f(x)=x^4+2x^2+20x+7$, $x_0=-3$;

е) $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+8x-3$, $x_0=4$.

2. Пользуясь схемой Горнера, найдите значение многочлена $f(x)\in \boldsymbol{C}[x]$ в точке x_0:

а) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$;

б) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0=-2-i$;

в) $f(x)=4x^3+x^2$, $x_0=-1-i$;

г) $f(x)=x^3-x^2-x$, $x_0=1-2i$;

д) $f(x)=x^6+(2-i)x^4+(i-1)x^3+(1+i)x^2-(1+i)x+3-i$, $x_0=i$;

е) $f(x)=x^3+x^2-7$, $x_0=-4-4i$;

ж) $f(x)=3x^5-x^4+2x^3-x-1$, $x_0=-1+i$; з) $f(x)=2x^5-2x^3+x$, $x_0=1+2i$.

3. Пользуясь схемой Горнера, составьте таблицу всех значений многочлена $f(x)\in \mathbf{Z}_p[x]$:

а) $f(x)=x^4-2x^3+x^2+2$, $p=5$;

б) $f(x)=3x^5+x^3-2x+1$, $p=7$.

4. Используя схему Горнера, выполните деление с остатком

а) $2x^5-3x^3+6x^2-7x-2$ на $x+2$;

б) $5x^4+3x^3-4x^2+6x-1$ на $x+3$.

5. Разделить многочлен *f(x)* на многочлен *x*-x_0 по схеме Горнера

a) $f(x)=(2+i)x^5+x^4-(4-i)x^2+2x-6$, $x_0=-2$;

b) $f(x)=ix^5-(2+3i)x^4+(3i-2)x^2-(i-1)x+3$, $x_0=1$;

c) $f(x)=(i+1)x^5+(4-i)x^3-(1-6i)x-1$, $x_0=-3$;

d) $f(x)=(2-i)x^5+(6-i)x^2+4i$, $x_0=2$;

e) $f(x)=2ix^5+(6-4i)x^3+(i-4)x^2+7x-3i$, $x_0=4$;

f) $f(x)=(i+3)x^5+3ix^3-(5-2i)x^2+(2-i)x-2$, $x_0=-1$;

g) $f(x)=(2+i)x^5+x^4-(4-i)x^2+2x-6$, $x_0=-2$;

h) $f(x)=3x^5+(i+3)x^4+(4-i)x-3$, $x_0=1$;

i) $f(x)=(i-1)x^5+(i-2)x^4-3ix^3+(4+i)x-3+i$, $x_0=-4$;

j) $f(x)=3ix^5-(2-3i)x^4+(3-i)x^2+2ix+2$, $x_0=2$;

k) $f(x)=(2-i)x^5+8ix^3-(2+3i)x^2+(i-1)x-5i$, $x_0=-3$;

l) $f(x)=(i+3)x^5-4x^4+(i-4)x^2+(6-i)x+5i$, $x_0=3$;

8. Разложить многочлен на множители, применяя схему Горнера, если известен один его корень:

$$a)\ x^3-3x^2-7x+12,\quad x_1=4;\ b)\ x^4+4x^3-2x^2-24x+24,\quad x_1=-2.$$

9. Выяснить, делится ли нацело многочлен

a) $x^{2012}+4x^{2011}+2x^{50}-x^{49}$ на *x*+1;

b) $x^6+2x^4-22x^3-2x+14$ на *x*-7.

10. Найти значения параметров *a* и *b*, при которых выполняется тождественное равенство

$a)\ x^5 + x^3 - 2 = (x-1)\left(x^4 - ax^3 + 2x^2 + 2x + b\right);$

$b)\ x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = (x+2)^2\left(x^3 + ax^2 + 3x + b\right).$

11. Найдите все пары значений a и b, при которых многочлен $f(x)$ делится нацело на многочлен $g(x)$.

$a)\ f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b;\quad g(x) = x^2 - 4;$

$b)\ f(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10;\quad g(x) = x^2 + x - 2.$

8.7. Неприводимые многочлены. Основная теорема алгебры

Как и во всяком кольце главных идеалов, в кольце $P[x]$ многочленов над полем P каждый необратимый элемент может быть разложен на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до перестановки множителей и замены их ассоциированными элементами.

Напомним, что ненулевой элемент области целостности называется простым, если он необратим и не может быть разложен в произведение двух необратимых элементов. Простые элементы кольца $P[x]$ по традиции называются *неприводимыми многочленами*. Поскольку необратимые элементы кольца $P[x]$, отличные от нуля, - это многочлены положительной степени, то неприводимый многочлен - это такой многочлен положительной степени, который не может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени.

Многочлен, который может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени, называется *приводимым*. Можно также сказать, что неприводимый многочлен - это такой многочлен положительной степени, который не может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени.

Неприводимость многочлена зависит от поля, над которым он рассматривается. Так, многочлен $(x^2 - 2)$ приводим над полем C и над полем R $f(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$, но неприводим над полем рациональных чисел Q.

Многочлен выше 1-й степени, неприводимый над полем P, не может иметь корней в поле P. Обратное неверно, т.е., из того, что многочлен не имеет корней в поле P, не следует, вообще говоря, что он неприводим над полем P. Например, $f(x) = (x^2+1)(x^2+2)$ не имеет рациональных корней, но является приводимым над Q.

Теорема. *Всякий многочлен $f \in P[x]$, не являющийся элементом поля P, может быть разложен в произведение неприводимых многочленов*:

$$f = p_1 p_2 \cdots p_m$$

причем если $f = q_1 q_2 \ldots q_l$ *- другое такое разложение, то* $l = m$ *и при подходящей нумерации множителей имеют место равенства* $q_i = c_i p_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, *где* $c_i \in P$, $c_i \neq 0$.

Если вынести за скобки старшие коэффициенты всех неприводимых множителей какого-либо разложения многочлена $f \in P[x]$, то многочлен *f* представится в виде:

$$f = ap_1 p_2 \ldots p_m \quad (a \in P,\ a \neq 0),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - нормированные неприводимые многочлены. Такое представление многочлена *f* будем называть его *нормированным разложением на неприводимые множители*.

Очевидно, что множитель *a* в формуле совпадает со старшим коэффициентом многочлена *f* и что нормированное разложение на неприводимые множители единственно с точностью до перестановки множителей.

Пусть *p* - какой-нибудь неприводимый делитель многочлена $f \in P[x]$. Может случиться, что *f* делится не только на *p*, но и на p^2 или даже на более высокую степень *p*. Наибольшее из таких чисел *k*, что *f* делится на p^k, называется *кратностью неприводимого делителя p* многочлена *f*. Иными словами, кратность равна *k*, если *f* делится на p^k, но не делится на p^{k+1}. Если *p* - неприводимый многочлен, не являющийся делителем многочлена *f*, то удобно считать, что *p* - неприводимый делитель кратности 0.

Заметим, что *любой многочлен первой степени неприводим*, так как произведение двух многочленов положительной степени всегда имеет степень ≥ 2. Следовательно, разложение на линейные множители является частным случаем разложения на неприводимые множители.

Из теоремы Безу следует, что *кратность корня* x_0 *многочлена* $f \in P[x]$ *есть не что иное, как кратность неприводимого делителя* $x - x_0$ *этого многочлена*.

Теорема. *Кратность неприводимого делителя p многочлена f равна числу множителей, ассоциированных с p, в любом разложении многочлена f на неприводимые множители.*

Неприводимые многочлены играют роль, аналогичную роли простых чисел в арифметики. Естественно поставить вопрос: какие же существуют неприводимые многочлены? Ответ на этот вопрос зависит от поля *P*, однако некоторые общие соображения все же можно высказать. Прежде всего, как ранее было замечено, любой многочлен первой степени неприводим. По теореме Безу многочлен, имеющий корень x_0, делится на $x - x_0$. Степень частного при этом, очевидно, будет на единицу меньше степени самого многочлена.

Поэтому *всякий многочлен степени* ≥ 2, *имеющий корень в поле* P, *приводим*. Если рассмотреть приводимые многочлены 2 и 3 степени, то они разлагаются в произведение двух сомножителей, один из которых должен быть первой степени и, значит, этот многочлен имеет корень. Таким образом, *многочлен степени* 2 *или* 3 *неприводим тогда и только тогда, когда он не имеет корней* (*в поле* P).

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен* $f(x) \in C[x]$ *степени не меньше 1 имеет по крайней мере один комплексный корень*.

Из основной теоремы алгебры следует приводимость любого многочлена степени ≥ 2 над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$.

Теорема. *В кольце* $\boldsymbol{R}[x]$ *многочленов с действительными коэффициентами неприводимы только многочлены первой степени и многочлены второй степени, не имеющие действительных корней*.

Доказательство.

Пусть многочлен с действительными коэффициентами $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ имеет комплексный корень α, т.е. $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Мы знаем из свойств комплексных чисел, что последнее равенство не нарушится, если в нем все числа заменить на сопряженные. Однако все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, а также число 0, стоящее справа, будучи действительными, останутся при этой замене без изменения, и мы приходим к равенству $a_0\bar{\alpha}^n + a_1\bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\bar{\alpha} + a_n = 0$, т.е. $f(\bar{\alpha}) = 0$. Таким образом, *если комплексное* (*но не действительное*) *число* α *служит корнем многочлена* $f(x)$ *с действительными коэффициентами, то корнем для* $f(x)$ *будет и сопряженное число* $\bar{\alpha}$.

Многочлен $f(x)$ будет делится, следовательно, на квадратный трехчлен $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \quad + \alpha\bar{\alpha}$, коэффициенты, как мы знаем из свойств комплексных чисел, действительны. Теперь докажем, что корни α и $\bar{\alpha}$ имеют в многочлене $f(x)$ одну и ту же кратность.

Пусть, в самом деле, эти корни имеют соответственно кратности k и l и пусть, например, $k > l$. Тогда $f(x)$ делится на l-ю степень многочлена $\varphi(x)$, $f(x) = \varphi^l(x)q(x)$. Многочлен $q(x)$, как частное двух многочленов с действительными коэффициентами, также имеет действительные коэффициенты, но, в противоречие с доказанным выше, он имеет число α своим $(k-l)$-кратным корнем, тогда как число $\bar{\alpha}$ не является для него корнем. Отсюда следует, что $k = l$.

Таким образом, *комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены*. Отсюда и из единственности разложения многочлена на множители вытекает справедливость доказываемой теоремы. Для кольца $\boldsymbol{Q}[x]$ ситуация совершенно иная: в этом кольце существуют неприводимые многочлены любой степени. Если поле P конечно, то для любого n существует лишь конечное число многочленов степени не выше n с коэффициентами из P, и поэтому неприводимые многочлены не выше любой заданной степени могут быть найдены путем перебора, аналогично тому, как находятся простые числа, не превосходящие заданного числа.

Так же, как доказывается бесконечность множества простых чисел, может быть доказана бесконечность множества нормированных неприводимых многочленов над любым полем P. Предположим, что таких многочленов имеется конечное число, и пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ - все эти многочлены.

Рассмотрим многочлен $f = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Всякий многочлен положительной степени должен делиться на какой-нибудь неприводимый многочлен, однако f не делится ни на один из многочленов $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Полученное противоречие показывает, что сделанное допущение о конечности множества неприводимых многочленов неверно.

Теорема. *Пусть* $f(x) \in P[x]$ *- многочлен над полем* P *и пусть* p *- неприводимый множитель кратности* $m \geq 1$ *многочлена* $f(x)$*. Тогда* p *является множителем кратности* $m-1$ *производной* $f'(x)$.

Доказательство.

Так как p есть m-кратный множитель многочлена f, значит, $f = p^m g,\ g \in P[x],\ g \not\vdots\, p$. Используя свойства производной, находим $f' = mp^{m-1}p'g + p^m g' = p^{m-1}(mp'g + pg')$.

Так как $\deg mp' < \deg p$, то $mp' \not\vdots\, p$. Также g и p взаимно просты, $g \not\vdots\, p$, поэтому $(mp')g \not\vdots\, p$. Значит $(mp'g + pg') \not\vdots\, p$.

Заключаем, что p является множителем кратности $m-1$ производной $f'(x)$. ■

Следствие 1. *Многочлен* $f(x) \in P[x]$ *имеет кратные неприводимые множители тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель многочленов* f *и* f' *имеет положительную степень.*

Следствие 2. *Пусть* $f(x) \in P[x]$*. Элемент* c *является кратным корнем многочлена* f *тогда и только тогда, когда* $f(c) = f'(c) = 0$.

Следствие 3. *Пусть* $f(x) \in P[x]$*. Элемент* c *является* m*-кратным корнем многочлена* f *тогда и только тогда, когда*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0,\ f^{(m)}(c) \neq 0.$$

Доказательство.

Элемент c тогда и только тогда будет m-кратным корнем многочлена f (т.е. $(x-c)$ - m-кратный множитель многочлена $f(x)$, когда $(x-c)$ делит $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$ и $f^{(m)} \not\vdots\, (x-c)$. В силу теоремы Безу условия равносильны.

Пример. Определим кратность корня 1 многочлена $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$. Для этого построим таблицу

	1	**-1**	**-1**	**2**	**-1**	**-1**	**1**
1	1	0	-1	1	0	-1	0
	1	1	0	1	1	0	
	1	2	2	3	4		

из которой следует, что кратность корня 1 равна 2.

Пример. Найти корни многочлена $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x - 7$ кратности выше первой и определить эту кратность.

Поскольку корни кратности больше 1 являются и корнями производной, то найдем: $f'(x) = 4(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$. Нетрудно заметить, что число 1 является корнем многочлена $f'(x)$. Проверим является ли 1 корнем многочлена $f(x)$ и если да, то какой кратности. Для этого делим на $x-1$ многочлен $f(x)$, потом частное и т.д.

	1	**4**	**-18**	**20**	**-7**
1	1	5	-13	7	**0**
1	1	6	-7	**0**	
1	1	7	**0**		
1	1	**8**			

Итак, $f(x) = (x-1)^3(x+7)$, т.е. число 1 есть корень многочлена $f(x)$ кратности 3.

Пример. Разложить на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ 1) над полем C; 2) над полем R.

Решение.

Задача сводится к отысканию корней этого многочлена. Корни этого многочлена равны $x_1 = -5, x_2 = -1 - i\sqrt{3}, x_3 = 1 + i\sqrt{3}$. А тогда $f(x) = (x+5)(x-1+i\sqrt{3})(x-1-i\sqrt{3})$ и есть разложение $f(x)$ на неприводимые множители над полем C $f(x) = (x+5)(x^2-2x+4)$ — разложение $f(x)$ на неприводимые множители над полем R.

Пример. Разложить на неприводимые множители над полем R многочлен $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5$.

Решение.

Корни $f(x)$ равны

$$x_1 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2},\quad x_2 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2},\quad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad x_4 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому $f(x) = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)(x^3 - 3x + 5)$ является разложением над R.

$$x^2-3x+5=\left(x-\frac{3+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x-\frac{3-i\sqrt{11}}{2}\right).$$

Упражнения

1) Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:

а) $f=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8, x_0=2;$

б) $f=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16, x_0=-2;$

в) $f=3x^5+2x^4+x^3-10x-8, x_0=-1;$

г) $f=x^5-6x^4+2x^3+36x^2-27x-54, x_0=-3.$

2) При каком значении a многочлен x^5-ax^2-ax+1 имеет корень -1 кратности не ниже второй?

8.8. Интерполяционный многочлен

Рассмотрим таблицу чисел

x_0	x_1	…	x_n
y_0	y_1	…	y_n

Многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям $f(x_j) = y_j (j = 0, 1,...,n)$ назовем *интерполяционным многочленом*, относящимся к интерполяционной таблице.

Теорема. *Для любой таблицы интерполяции интерполяционный многочлен существует и единственен.*

Доказательство.

Существование. Легко видеть, что многочлен

$$f(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\ldots\cdot(x-x_{j-1})\cdot(x-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_j-x_1)\cdot(x_j-x_2)\ldots\cdot(x_j-x_{j-1})\cdot(x_j-x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j-x_n)}$$

называемый *интерполяционным многочленом в форме Лагранжа*, является интерполяционным для таблицы.

Единственность. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — два интерполяционных многочлена, соответствующих одной таблице интерполяции. Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Имеем $h(x_j) = 0$ ($j = 0, 1, ..., n$). Таким образом, многочлен $h(x)$ степени, не превосходящей n, имеет не менее $n + 1$ корней. Получаем, что $h(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$.

Пример. Построим интерполяционный многочлен по таблице

x_j	1	2	3
y_j	−6	−6	−4

По форме Лагранжа имеем

$$f(x)=-6\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}-6\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)}-4\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}=x^2-3x-4.$$

Следствие. *Пусть F — некоторое подполе поля* **C**. *Для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из $F[x]$* $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall c \in F \quad f(c) = g(c)$.

Рассмотрим еще один способ нахождения интерполяционного многочлена – *метод Ньютона*. Интерполяционный многочлен для таблицы ищется в виде

$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$. Последовательно полагая $x = x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$), находим $c_0, c_1, \ldots c_n$.

Пример 1. Методом Ньютона построим интерполяционный многочлен по таблице интерполяции из примера выше. Ищем многочлен в виде $f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$.

Полагая $x = x_0$, получаем $-6 = c_0$.

Полагая $x = x_1$, получаем $-6 = -6 + c_1(2 - 1)$, откуда $c_1 = 0$.

Полагая $x = x_2$, получаем $-4 = -6 + 0 \cdot (2 - 1) + c_2(3 - 1)(3 - 2)$, откуда $c_2 = 1$.

Итак, $f(x) = -6 + (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x - 4$.

Для эффективного вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена $f(x)$ в форме Ньютона введем так называемые разделенные разности.

Пусть $f(x)$ — интерполяционный многочлен, построенный по таблице, а $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — некоторые числа из F. *Разделенной разностью первого порядка* называется величина

$$f(z_0, z_1) = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}$$

разделенной разностью второго порядка называется

$$f(z_0, z_1, z_2) = \frac{f(z_0, z_1) - f(z_1, z_2)}{z_0 - z_2}$$

и т.д. Вообще, *разделенная разность k-го порядка* определяется через разделенную разность $(k - 1)$-го порядка следующим образом:

$$f(z_0, z_1, \ldots\ldots, z_k) = \frac{f(z_0, z_1) - \cdots - f(z_{k-1}, z_k)}{z_0 - z_k}$$

Заметим, что так как $f(x_0) = y_0$, т.е. x_0 является корнем многочлена $f(x) - y_0$, то $f(x, x_0)$ представляет собой многочлен и степень этого многочлена на 1 меньше степени $f(x)$.

Аналогично, $f(x, x_0, x_1)$ также является многочленом и степень его на 1 меньше степени $f(x, x_0)$ и т.д. Наконец, $f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Из определения разделенных разностей получаем

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_1)$,

$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)f(x, x_0, x_1)$, $f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)f(x, x_0, x_1, x_2)$ и т.д., откуда $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \ldots\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

В силу единственности представления многочлена $f(x)$, получаем, что коэффициенты c_j суть разделенные разности, а именно:

$$c_j = f(x_0, x_1, \dots, x_j)(j = 0, 1, \dots, n).$$

Вычислять разделенные разности удобно в таблице

Пример 2. Построим интерполяционный многочлен $f(x)$ по таблице

x_j	-2	-1	0	1	2
y_j	3	8	17	24	47

Составим таблицу разделенных разностей:

-2	**3**				
		5			
-1	**8**		2		
		9		-1	
0	**17**		-1		1
		7		3	
1	**24**		8		
		23			
2	**47**				

Таким образом,

$f(x)=(x + 2)(x + 1)x(x - 1)-(x + 2)(x + 1)x +2(x + 2)(x + 1) + 5(x + 2) + 3.$

Упражнения

Построить интерполяционный многочлен для таблиц

x_j	-3	-1	4	1	5
y_j	3	6	17	34	21

x_j	-6	-7	3	1	2
y_j	5	2	17	15	41

x_j	4	-1	0	1	2
y_j	3	5	19	14	27

8.9. Целые и рациональные корни многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна

Хотя уравнения высоких степеней в общем случае неразрешимы в радикалах, да и формулы Кардано и Феррари для уравнений третьей и четвертой степеней в школе не проходят, в учебниках по алгебре, на вступительных экзаменах в институты иногда встречаются задачи, где требуется решить уравнения выше второй степени. Обычно их специально подбирают так, чтобы корни уравнений можно было найти с помощью некоторых элементарных приемов.

В основе одного из таких приемов лежит теорема о рациональных корнях многочлена:

Теорема. *Если несократимая дробь* p/q *является корнем многочлена* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ *с целыми коэффициентами, то ее числитель* p *является делителем свободного члена* a_0*, а знаменатель* q *- делителем старшего коэффициента* a_n.

Для доказательства достаточно подставить в уравнение $P(x) = 0$ $x = p/q$ и умножить уравнение на q^n. Получим $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Все слагаемые в левой части, кроме последнего, делятся на p, поэтому и $a_0 q^n$ делится на p, а поскольку q и p - взаимно простые числа, p является делителем a_0. Доказательство для q аналогично.

С помощью этой теоремы можно найти все рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами испытанием конечного числа "кандидатов".

Пример. Для многочлена $f(x) = 6x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 5x + 6$ найти рациональные корни.

Решение.

Данный многочлен имеет целые коэффициенты. Имеем $a_n = 6,\ a_0 = 6$. Так как необходимо $a_n \vdots q$, $a_0 \vdots p$, то 6⋮q и 6⋮p. Значит, q=1,2,3,6 и $p = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.

Поэтому $\frac{p}{q} \in \left\{ \frac{\pm1}{1}; \frac{\pm2}{1}; \frac{\pm3}{1}; \frac{\pm6}{1}; \frac{\pm1}{2}; \frac{\pm2}{2}; \frac{\pm3}{2}; \frac{\pm6}{2}; \frac{\pm1}{3}; \frac{\pm2}{3}; \frac{\pm3}{3}; \frac{\pm6}{3}; \frac{\pm1}{6}; \frac{\pm2}{6}; \frac{\pm3}{6}; \frac{\pm6}{6} \right\}$.

В этом множестве есть сократимые, т.е. не взаимно простые дроби. При решении их нужно исключить.

Решение оформляем в виде таблицы, в клеточках которой, соответствующих дроби $\frac{p}{q}$, ставим 0, если дробь является корнем $f(x)$, и – в противном случае. В нашей заготовке сразу исключим из рассмотрения сократимые дроби.

$\frac{p}{q}$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
1								
2			-	-			-	-
3					-	-	-	-
6			-	-	-	-	-	-

Теперь только дроби, соответствующие незаполненным клеточкам в таблице и только они, могут быть рациональными корнями многочлена $f(x)$. Вычисляем $f(1), f(-1)$ по схеме Горнера.

	6	5	-6	-6	-5	6
1	6	11	5	-1	-6	0
-1	6	-1	-5	-1	-4	10

Значит, *f(1)=0, f(-1)=10.* 1 – корень *f(x),* -1 не является корнем. Поэтому можно проверять лишь выполнение условия *f(-1)* ⋮(*p*+*q*) или 10⋮*(p+q).*

Заметим, что дробь $\frac{1}{6}$ не является корнем $f(x)$, так как для неё $p=1,\ q=6,\ p+q=7$ и 10 не делится на 7.

Аналогично исключаем дроби: $\frac{2}{1}=2;\ \frac{3}{1}=3;\ \frac{6}{1}=6;\ \frac{1}{2};\frac{1}{6}$.

Далее находим *f(*2*)*:

	6	5	-6	-6	-5	6
2	6	17	28	50	95	196

Итак, $f(2)=196$ и, используя свойство $f(2)\,\vdots\,(p-2q)$, исключаем дополнительно дроби: $\frac{-6}{1}=-6;\ \frac{-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{-2}{3};\ \frac{-1}{6};\ \frac{1}{6}$.

Оставшиеся дроби $\frac{-2}{1}=-2;\ \frac{-3}{1}=-3;\ \frac{-3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{-1}{3};\ \frac{2}{3}$ проверяем по схеме Горнера.

	6	5	-6	-6	-5	6
-2	6	-7	8	-22	-39	≠0
-3	6	-13	33	-105	310	≠0
$-\frac{3}{2}$	6	-4	0	-6	4	0
$\frac{3}{2}$	6	14	15	$\frac{33}{2}$		≠0
$-\frac{1}{3}$	6	3	-7			≠0
$\frac{2}{3}$	6	9	0	-6	-9	0

Итак, рациональными корнями данного многочлена *f(x)* являются числа 1;-$\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$.

Вопрос о приводимости многочлена над полем рациональных чисел сводится к вопросу о разложении на множители меньшей степени многочлена с целыми коэффициентами. В этом направлении имеется следующее достаточное условие неприводимости:

<u>Критерий Эйзенштейна</u>. Если для многочлена q с целыми коэффициентами q $=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ удается найти такое простое число p, что

1. НОД(p , a_n) = 1
2. $\forall(i=0,...n-1): p|a_i$
3. p^2 не делит a_0,

то этот многочлен неприводим.

Пример. Многочлен $2x^4-6x^3+15x^2+21$ неприводим над полем **Q**. Достаточно взять p = 3 и применить критерий Эйзенштейна.

Для всякого n>0 многочлен x^n-2 неприводим над **Q**. Достаточно взять p=2 в предыдущей теореме. Отсюда вытекает, что *над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любой степени*

Пример. Если $f(x)=5x^6-8x^5+2x^4-6x^3-2x^2-14$, то $f(x)$ неприводим по критерию Эйзенштейна p=2. Неприводимыми над Q являются также многочлены $g(x)=x^h+3\ (p=3), \forall h\in N$. Отсюда видно, что для всякого натурального h существует многочлен степени h неприводимый над Q, в отличие от полей C и R.

Пример. Найти рациональные корни многочлена $x^3+3x^2+x-2=0$.

Решение.

Старший коэффициент равен 1, "кандидатами" будут делители числа –2. Их всего четыре: 1, -1, 2 и –2. Проверка показывает, что корнем является только одно из этих чисел: $x_0=-2$.

Если один корень найден, можно понизить степень уравнения. Согласно теореме Безу, остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-c$ равен $P(c)$, т. е. $P(x)=(x-c)\cdot Q(x)+P(c)$.

Из теоремы непосредственно следует, что если c - корень многочлена $P(x)$, то многочлен делится на $x-c$, т. е. $P(x)=(x-c)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ - многочлен степени, на 1 меньшей, чем $P(x)$.

Продолжая наш пример, вынесем из многочлена $P(x)=x^3+3x^2+x-2$ множитель $x-x_0=x+2$. Чтобы найти частное $Q(x)$, можно выполнить деление "уголком":

Но есть и более простой способ. Он станет понятен из примера:

$$P(x)=x^3+3x^2+x-2=(x^3+2x^2)+(x^2+2x)-(x+2)=(x+2)\cdot(x^2+x-1).$$

Теперь остается решить квадратное уравнение $x^2+x-1=0$. Его корни: $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Пример. Найти рациональные корни многочлена $4x^4+8x^3+x^2-3x-1$.

Решение.

Здесь $a_n=4$, $a_0=-1$. Поэтому рациональные корни уравнения следует искать среди чисел: ± 1; ± 0,5; ± 0,25 (делители 4 есть ±1; ±2; ±4, делители (–

1) есть ± 1). Если $x = +1$, то $4 + 8 + 1 - 3 - 1 \neq 0$; если $x = -0,5$, то $4 / 16 - 8 / 8 + 1 / 4 + 3 / 2 - 1 = 0$, т.е. $x = -0,5$ корень уравнения. Делим $(4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1)$ на $(x + 0,5)$:

Данное уравнение можно представить в виде: $(x + 0,5)(4x^3 + 6x^2 - 2x - 2) = 0$.

Отсюда $x_1 = -0,5$ (решение, найденное подбором) и $4x^3 + 6x^2 - 2x - 2 = 0$, т.е. $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$. Аналогично находим корень этого уравнения: $x = -0,5$. Снова делим.

Имеем: $(x + 0,5)(2x^2 + 2x - 2) = 0$. Отсюда $x_2 = -0,5$ и $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Ответ: $x_1 = x_2 = -0,5$; $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Замечание: зная, что $x = -0,5$, можно не заниматься делением, а просто выделить за скобки множитель $(x + 0,5)$. Из $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ следует:

$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 2x - 1 = 2x^2(x + 0,5) + 2x(x + 0,5) - 2(x+0,5) = = (x +2)(2x^2 + 2x - 2) = 0$.

$x_1 = -0,5$; $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Упражнения

1. Разложить на неприводимые множители над кольцами Q, R, C многочлены:

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2$;
b) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$;
c) $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$;
d) $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2$;
e) $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 1$;
f) $f(x) = 2x^6 - 3x^4 - x^2 - 4x - 2$;
g) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$;
h) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$;
i) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$;
j) $f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$;
k) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$;
l) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$.

2. Разложить на линейные множители в C и неприводимые (линейные и квадратичные) множители в R. Сделать проверку.

a) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 28x$; $g(x) = x^3 + x^2 + 15x - 17$;
b) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 21x$; $g(x) = x^3 - x^2 + 15x + 17$;
c) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$; $g(x) = x^3 - 3x^2 + 19x - 17$;

d) $f(x)=x^4-x^3-3x^2-3x-18$; $g(x)=x^3+3x^2+19x+17$;

e) $f(x)=x^5+3x^3-28x$; $g(x)=x^3+3x^2+12x+10$;

f) $f(x)=x^5+7x^3-18x$; $g(x)=x^3+x^2+8x-10$;

g) $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+6x+4$; $g(x)=x^3-x^2+8x+10$;

h) $f(x)=x^4+x^3-2x^2+4x-24$; $g(x)=x^3-3x^2+12x-10$;

i) $f(x)=x^4+x^3+x^2+3x-6$; $g(x)=x^3+4x^2+6x+4$;

j) $f(x)=x^5+x^3-42x$; $g(x)=x^3-2x-4$;

k) $f(x)=x^5+3x^3-18x$; $g(x)=x^3-2x+4$;

l) $f(x)=x^5-5x^3-24x$; $g(x)=x^3-4x^2+6x-4$;

3. Найдите рациональные корни многочлена

a) $4x^4 + 8x^3 - 19x^2 - 23x + 30$;

b) $4x^4 + 8x^3 - 23x^2 - 25x + 42$;

c) $4x^4 - 8x^3 - 23x^2 + 67x - 42$;

d) $6x^4 - 9x^3 - 21x^2 + 36x - 12$;

e) $6x^4 - 3x^3 - 39x^2 + 48x - 12$;

f) $x^4 - 21x^3 - 11x^2 + 44x - 20$;

g) $9x^4 - 30x^3 - 8x^2 + 61x - 30$;

h) $9x^4 + 24x^3 - 26x^2 - 41x + 30$;

i) $9x^4 + 30x^3 - 12x^2 - 53x + 30$;

j) $9x^4 + 30x^3 - 3x^2 - 32x + 12$

8.10. Формула Тейлора. Разложение многочлена по степеням двучлена

В курсе математического анализа доказывается, что производная многочлена есть снова многочлен, причем если

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \text{ то } f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

В этом случае *производная многочлена степени* $n \geq 1$ *является многочленом степени* $n-1$. Может даже случиться, что производная многочлена положительной степени будет нулевым многочленом. Например, пусть $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbf{Z}_3[x]$. Тогда $f'(x) = 6x^5 + 3x^2 = 0$.

Производная от производной многочлена $f(x)$ называется его второй производной и обозначается через $f''(x)$. Производная от второй производной называется третьей производной и т.д. Для *n*-й производной используется обозначение $f^{(n)}(x)$. Так как при каждом дифференцировании степень многочлена понижается, то (n+1)-я производная любого многочлена степени n равна нулю.

Схема Горнера удобна при разложении данного многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ по степеням двучлена $x-c$. Пусть

$$\begin{aligned} f &= (x-c)q_1+r_0, \\ q_1 &= (x-c)q_2+r_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-2} &= (x-c)q_{n-1}+r_{n-2}, \\ q_{n-1} &= (x-c)a_0+r_{n-1}, \end{aligned}$$

где $q_k\in K[x]$ и $r_k\in K$. Если последнее выражение для q_{n-1} подставить в предыдущее равенство, а затем то, что при этом получится, подставить вместо q_{n-2} и т.д., то придем к равенству

$$f=r_0+r_1(x-c)+r_2(x-c)^2+\ldots+r_{n-1}(x-c)^{n-1}+a_0(x-c)^n.$$

Это есть разложение данного полинома f по степеням (x - c). Пусть K - поле P. Дифференцируя обе части равенства и полагая $x=c$, получим $f(c)=r_0$, $f'(c)=r_1$, $f''(c)=2!r_2$, ..., $f^{(n)}(c)=n!a_0$. Поэтому равенство можно записать в виде

$$f=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

если только f - полином над полем нулевой характеристики. Это и есть ***формула Тейлора*** для полиномов. Все вычисления удобно расположить в одну таблицу:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	b_{n-1}	$r_0=f(c)$
	c_0	c_1	...	$r_1=f'(c)$	
	d_0	d_1	...	$r_2=f''(c)$	
	...	...	...	...	
	a_0	$r_{n-1}=\dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}$			

Пример 1. Разложим полином $f(x)=x^6-5x^5+3x^3-1$ по степеням $x-1$. Для этого построим таблицу

	1	-5	0	3	0	0	-1
1	1	-4	-4	-1	-1	-1	$-2=r_0$
	1	-3	-7	-8	-9	$-10=r_1$	
	1	-2	-9	-17	$-26=r_2$		
	1	-1	-10	$-27=r_3$			
	1	0	$-10=r_4$				
	1	$1=r_5$					

Отсюда

$$x^6-5x^5+3x^3-1=-2-10(x-1)-26(x-1)^2-27(x-1)^3-10(x-1)^4+\quad+(x-1)^5+(x-1)^6.$$

Пример 2. Разложить многочлен $f(x)=x^5-3x^3+x^2-2x+1$ по степеням двучлена $x-1$.

Речь идет о представлении данного многочлена в виде

$$f(x)=c_5(x-1)^5+c_4(x-1)^4+...+c_1(x\ \ -1)+c_0.$$

Известно, что $c_i=\frac{f^{(i)}(1)}{i!}, i=1,...,5, c_0=f(1)$ но коэффициенты $c_0, c_1, ...$ удобно находить, вычисляя последовательно остатки от деления *f(x)* на *x*-1, полученного частного на *x*-1, нового частного на *x*-1 и т.д.

	1	0	-3	1	-2	1
1	1	1	-2	-1	-3	-2
1	1	2	0	-1	-4	
1	1	3	3	2		
1	1	4	7			
1	1	5				
1	1					

Таким образом,

$$f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+7(x-1)^3+2(x-1)^2-4(x-1)-2.$$

Заметим, что

$$-2=f(1),\ -4=\frac{f'(1)}{1!},\ 2=\frac{f''(1)}{2!},\ 7=\frac{f'''(1)}{3!},\ 5=\frac{f^{IV}(1)}{4!},\ 1=\frac{f^{V}(1)}{5!},$$

откуда легко найти значение $f(x)$ и всех его производных при $x=1$

Отметим, что с помощью схемы Горнера можно решать такие типы задач:

1. Найти *q(x)* и *r* при делении *f*(*x*) на (*x* – *a*);
2. Вычислить значение многочлена *f*(*x*) при *x* = *a*;
3. Выяснить, будет ли *x* = *a* корнем многочлена *f*(*x*), $a\in F$;
4. Определить кратность корня;
5. Разложить многочлен по степеням (*x* – *a*).
6. Вычислить значение *f*(*x*) и всех его производных при *x* = *a*.

Пример. Пусть $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$ и $a = 5$.

Составим схему Горнера:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	$0 = c_0$
5	1	-5	1	-5	$0 = c_1$	
5	1	0	1	$0 = c_2$		
5	1	5	$26 = c_3$			
5	1	$10 = c_4$				
5	$1 = c_5$					

1. Вычислим неполное частное $q(x)$ и остаток r при делении $f(x)$ на $(x-5)$.

Во второй строке таблицы видим, что коэффициенты частного $q(x)$ равны: 1, – 10, 26, – 10, 25, поэтому $q(x) = 1x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 25$, а остаток r равен 0.

2. Вычислим значение многочлена $f(x)$ при $x = 5$. Воспользуемся теоремой Безу: $f(5) = r = 0$.

3. Выясним, будет ли $x = 5$ корнем многочлена $f(x)$. По определению a – корень $f(x)$, если $f(a) = 0$. Так как $f(5) = r = 0$, то 5 – корень $f(x)$.

4. Из второй, третьей и четвертой строк таблицы мы видим, что $f(x)$ делится на $(x-5)^3$, но $f(x)$ не делится на $(x-5)^4$. Следовательно, число корень 5 имеет кратность 3.

5. Разложим многочлен $f(x)$ по степеням $(x–5)$, коэффициенты разложения c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 получаются в последних клетках второй, третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой строки схемы Горнера:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-5) + c_2(x-5)^2 + c_3(x-5)^3 + c_4(x-5)^4 + c_5(x-5)^5 \text{ или}$$

$$f(x) = 26(x-5)^3 + 10(x-5)^4 + (x-5)^5.$$

6. Вычислим значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при x=5.

$c_0 = f(5) = 0$, $c_1 = f'(5) = 0$, $c_2 = \dfrac{f''(5)}{2!} = 0 \to f''(5) = 0$,

$c_3 = \dfrac{f'''(5)}{3!} = 26 \to f'''(5) = 26 \cdot 3! = 156$, $c_4 = \dfrac{f^{IV}(5)}{4!} = 10 \to f'(5) = 10\ 4! = 240$,

$c_5 = \dfrac{f^{V}(5)}{5!} = 1 \to f^{V}(5) = 1 \cdot 5! = 120$.

Упражнения

1. Разложить многочлен *f(x)* по степеням $(x-c)$:

a) $f(x) = x^4 - x^3 - x + 1$, $c = 2$;

b) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 2$, $c = -2$;

c) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4$, $c = 1$;

d) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$, $c = -1$;

e) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 30x + 18$, $c = 2$;

f) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 27$, $c = -2$;

g) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 8x + 16$, $c = 3$;

h) $f(x) = x^4 + 9x^3 + 26x^2 + 32x + 32$, $c = -3$;

i) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3$, $c = 2$;

j) $f(x)=x^4-x^2+2x+2$, $c=1$;

k) $f(x)=x^4-5x^3+10x^2-12x+8$, $c=1$;

l) $f(x)=x^4+3x^3+x^2+4$, $c=-1$;

m) $f(x)=x^4-5x^3+5x^2-3x+18$, $c=2$;

n) $f(x)=x^4+7x^3+16x^2+15x+9$, $c=-2$.

8.11. Формулы Виета

Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов многочлена по его корням. Пусть

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n).$$

Раскрывая скобки в правой части и собирая коэффициенты при каждой степени, получаем ***формулы Виета:***

$$a_1=-(c_1+c_2+\cdots+c_n),$$
$$a_2=c_1c_2+c_1c_3+\cdots+c_{n-1}c_n,$$
$$a_3=-(c_1c_2c_3+c_1c_2c_4+\cdots+c_{n-2}c_{n-1}c_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..,$$
$$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(c_1c_2\dots c_{n-1}+c_{1\dots}c_{n-2}c_n+\cdots+c_2c_3\dots c_n),$$
$$a_n=(-1)^nc_1c_2\dots c_n.$$

Пример. Найти многочлен $f(x)$ минимальной степени со старшим коэффициентом 1, у которого 1, 2 –простые корни, а 3 – корень кратности 2. Заметим что таким многочленом является

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2.$$

По формулам Виета получаем

$$a_1=-(1+2+3+3)=-9,$$
$$a_2=1\cdot2+1\cdot3+1\cdot3+2\cdot3+2\cdot3+3\cdot3=29,$$
$$a_3=-(1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3+1\cdot3\cdot3+2\cdot3\cdot3)=-39,$$
$$a_4=1\cdot2\cdot3\cdot3=18.$$

Следовательно $f(x)=x^4-9x^3+29x^2-39x+18$.

Упражнения

1. Найти многочлен наименьшей степени, имеющий:

a) простые корни 1 и -1, двукратный корень 1+*i*;

b) простой корень –*i*, двукратный 2;

c) тройной корень 1, простые корни 2,3, 1+*i*;

d) двойной корень i, простой корень -1-i.

2. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

3. Сумма двух корней уравнения $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \alpha$ равна 1. Найти α.

4. Определить α так, чтобы один из корней многочлена $f(x) = x^3 - 7x + \alpha$ равнялся удвоенному другому.

5. Найти сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочленов $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1, g(x) = x^4 - x^2 - x - 1$.

6. Найти зависимость между p, q и r, при которой корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ образуют геометрическую прогрессию

8.12. Многочлены с действительными коэффициентами

Теорема. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]$. *Если* $c \in C$ *– корень многочлена* $f(x)$*, то* $\bar{c}$ *так же является корнем этого многочлена и имеет ту же кратность.*

Доказательство. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Так как $f(c) = 0$, то

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n = 0,$$

откуда

$$\overline{a_0c^n + a_1c^{n-1} + \cdots + a_{n-1}c + a_n} = \bar{0},$$

поэтому

$$\bar{a}_0\bar{c}^n + \bar{a}_1\bar{c}^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}\bar{c} + \bar{a}_n = 0.$$

Но $a_j \in \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$**,** следовательно $\bar{a}_j = a_j$, поэтому

$$a_0\bar{c}^n + a_1\bar{c}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\bar{c} + a_n = 0,$$

т.е. $f(\overline{c}) = 0$.

Следствие. *Произвольный многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.*

Пример. Зная, что многочлен $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ имеет корень -2+i, найти его остальные корни.

Решение.

Так как $f(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем -2+i он имеет корень -2-i. Следовательно, многочлен делится на двучлены $x + 2 - i$ и $x + 2 + i$. Применяя схему Горнера деления многочлена на двучлен, получаем

$$f(x) = (x + 2 - i\ )\ (x + 2 + i\ )(x^2 - x + 1).$$

В результате получаем остальные корни многочлена : $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Пример 2. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий своими корня и числа 1, i, 2+3i.

Решение.

Из свойства выше известно, что корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами попарно сопряжены. Следовательно, корнями искомого многочлена $f(x)$ должны быть также числа -i, 2-3i. С помощью формул Виета или собирая произведение соответствующих множителей, находим

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$$

Пример 3. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами по данным корням: 1 — корень кратности 3; 1-2i, *4, 5* — корни кратности 2; -7 — простой корень.

Решение.

$$f(x)=(x-1)^3(x-4)^2(x-5)^2(x-1+2i)^2(x+7).$$

Пример. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами по данным корням: 2 — корень кратности 2; i, $1+i$ — простые корни.

Решение.

$$f(x)=(x-2)^2\left[(x-i)(x+i)\right]\left[(x-1-i)(x-1+i)\right]=(x-2)^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+2\right).$$

Упражнения

1. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, имеющий:

   a) простые корни 1 и -1, двукратный корень 1+i;

   b) простой корень –i, двукратный 2;

   c) тройной корень 1, простые корни 2,3, 1+i;

   d) двойной корень i, простой корень -1-i.

2. Отделить вещественные корни уравнений:

   а) $x^3-12x+5=0$;

   б) $x^3-27x+17=0$.

8.13. Уравнения третьей и четвертой степени

Кубические уравнения

Если квадратные уравнения умели решать еще математики Вавилонии и Древней Индии, то кубические, т.е. уравнения вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \text{ где } a\neq 0,$$

оказались "крепким орешком". В конце XV в. профессор математики в университетах Рима и Милана Лука Пачоли в своем знаменитом учебнике "Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности" задачу о нахождении общего метода для решения кубических уравнений ставил в один ряд с задачей о квадратуре круга. И все же усилиями итальянских алгебраистов такой метод вскоре был найден.

Если кубическое уравнение общего вида $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$, разделить на a, то коэффициент при x^3 станет равен 1. Поэтому в дальнейшем будем исходить из уравнения

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

Так же как в основе решения квадратного уравнения лежит формула квадрата суммы, решение кубического уравнения опирается на формулу куба суммы:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Чтобы не путаться в коэффициентах, заменим здесь a на x и перегруппируем слагаемые:

$$(x+b)^3 = x^3 + 3bx^2 + 3xb^2 + b^3.$$

Мы видим, что надлежащим выбором b, а именно взяв $b = P/3$, можно добиться того, что правая часть этой формулы будет отличаться от левой части уравнения только коэффициентом при x и свободным членом. Сложим уравнения и приведем подобные:

$$(x+b)^3 + (Q - 3b^2)x + R - b^3 = 0.$$

Если здесь сделать замену $y = x + b$, получим кубическое уравнение относительно y без члена с y^2: $y^3 + py + q = 0$.

Итак, мы показали, что в кубическом уравнении с помощью подходящей подстановки можно избавиться от члена, содержащего квадрат неизвестного. Поэтому теперь будем решать уравнение вида

$$x^3 + px + q = 0.$$

Формула Кардано

Давайте еще раз обратимся к формуле куба суммы, но запишем ее иначе:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Сравните эту запись с уравнением и попробуйте установить связь между ними. Даже с подсказкой это непросто. Надо отдать должное математикам эпохи Возрождения, решившим кубическое уравнение, не владея буквенной символикой. Подставим в нашу формулу $x = a + b$:

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx, \text{ или } x^3 - 3abx - (a^3 + b^3) = 0.$$

Теперь уже ясно: для того, чтобы найти корень уравнения, достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^3+b^3=-q\,, \\ 3ab=-p\,, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a^3+b^3=-q\,, \\ a^3b^3=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

и взять в качестве x сумму a и b. Заменой $u=a^3$, $v=b^3$ эта система приводится к совсем простому виду:

$$\begin{cases} u+v=-q\,, \\ uv=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Дальше можно действовать по-разному, но все "дороги" приведут к одному и тому же квадратному уравнению. Например, согласно теореме Виета, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при x со знаком минус, а произведение – свободному члену. Отсюда следует, что u и v - корни уравнения

$$t^2+qt-(p/3)^3=0.$$

Выпишем эти корни: $t_{1,2}=-\dfrac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{q}{3}\right)^3}$.

Переменные a и b равны кубическим корням из t_1 и t_2, а искомое решение кубического уравнения (13) – сумма этих корней:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

Эта формула известная как *формула Кардано*.

Пример. Найти корни многочлена $x^3+3x^2-6x+20$.

Решение.

Разложим многочлен $x^3+3x^2-6x+20$ по степеням $x+1$. Полагая $x+1=y$, получим уравнение $y^3-9y+28=0$. Его корни находятся по формуле $y=\alpha+\beta$, где $\alpha=\sqrt[3]{-14+\sqrt{196-27}}$, $\beta=\sqrt[3]{-14-\sqrt{196-27}}$ или $\alpha=\sqrt[3]{-1}$, $\beta=\sqrt[3]{-27}$. Значениями корня $\alpha=\sqrt[3]{-1}$ являются числа $\alpha_1=-1,\quad \alpha_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Соответствующие им значения второго корня $\beta_1=-\dfrac{-9}{3\alpha_1}=-3,\quad \beta_2=-\dfrac{-9}{3\alpha_2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,\quad \beta_3=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i.$ Отсюда $y_1=\alpha_1+\beta_1=-4,\quad y_2=\alpha_2+\beta_2=2-i\sqrt{3},\quad y_3=\alpha_3+\beta_3=2+i\sqrt{3}$. Корни многочлена $x_1=-5$, $x_2=1-i\sqrt{3},\quad x=1+i\sqrt{3}$.

Тригонометрическое решение

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

подстановкой $x=y-a/3$ приводится к "неполному" виду $y^3+py+q=0$,

$$p=-\frac{a^2}{3}+b\,,\ q=2\left(\frac{a}{3}\right)^3-\frac{ab}{3}+c\,.$$

Корни y_1, y_2, y_3 "неполного" кубичного уравнения равны

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}, \text{ где}$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Пусть "неполное" кубичное уравнение действительно.

а) Если $Q < 0$ ("неприводимый" случай), то $p < 0$ и

$$y_1 = 2\sqrt{-p/3}\cos\frac{\alpha}{3},$$

$$y_{2,3} = -2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right), \text{ где } \cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}.$$

b) Если $Q \geq 0$, $p > 0$, то

$$y_1 = -2\sqrt{p/3}\, ctg\, 2\alpha, \; y_{2,3} = \sqrt{p/3}\left(ctg\, 2\alpha \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\alpha\right), \text{ где}$$

$$tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}} \quad \left(|\alpha| \leq \frac{\pi}{4}\right), \qquad tg\,\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \left(|\beta| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

c) Если $Q \geq 0$, $p < 0$, то

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cosec} 2\alpha, \; y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{cosec} 2\alpha \pm i\sqrt{3}\, ctg\, 2\alpha\right), \text{ где}$$

$$tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}} \quad \left(|\alpha| \leq \frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \quad \left(|\beta| \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Во всех случаях берется действительное значение кубичного корня.

Уравнения четвертой степени

Метод решения уравнений четвертой степени нашел в XVI в. Лудовико Феррари, ученик Джероламо Кардано. Он так и называется – метод *Феррари*.

Как и при решении кубического и квадратного уравнений, в уравнении четвертой степени

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

можно избавиться от члена px^3 подстановкой $x = y - p/4$. Поэтому будем считать, что коэффициент при кубе неизвестного равен нулю:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Идея Феррари состояла в том, чтобы представить уравнение в виде $A^2 = B^2$, где левая часть – квадрат выражения $A = x^2 + s$, а правая часть – квадрат линейного уравнения B от x, коэффициенты которого зависят от s. После этого останется решить два квадратных уравнения: $A = B$ и $A = -B$. Конечно, такое представление возможно только при специальном выборе параметра s. Удобно взять s в виде $a/2 + t$, тогда уравнение перепишется так:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right).$$

Правая часть этого уравнения – квадратный трехчлен от x. Полным квадратом он будет тогда, когда его дискриминант равен нулю, т.е.

$$D = b^2 - 4 \cdot 2t \cdot \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0, \text{ или } b^2 = 2t\left(4t^2 + 4at + a^2 - 4c\right).$$

Это уравнение называется *резольвентным* (т.е. "разрешающим"). Относительно t оно кубическое, и формула Кардано позволяет найти какой-нибудь его корень t_0. При $t = t_0$ правая часть уравнения принимает вид

$$2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2,$$

а само уравнение сводится к двум квадратным:

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right).$$

Их корни и дают все решения исходного уравнения.

Пример 1. Решим уравнение $x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$.

Решение.

Здесь удобнее будет воспользоваться не готовыми формулами, а самой идеей решения. Перепишем уравнение в виде

$$x^4 = 10x^2 + 8x - 5$$

и добавим к обеим частям выражение $2sx^2 + s^2$, чтобы в левой части образовался полный квадрат:

$$\left(x^2 + s\right)^2 = (10 + 2s) \cdot x^2 + 8x + s^2 - 5.$$

Теперь приравняем к нулю дискриминант правой части уравнения:

$$16 - (10 + 2s) \cdot \left(s^2 - 5\right) = 0,$$

или, после упрощения,

$$s^3 + 5s^2 - 5s - 33 = 0.$$

Один из корней полученного уравнения можно угадать, перебрав делители свободного члена: $s_0 = -3$. После подстановки этого значения получим уравнение

$$\left(x^2 - 3\right)^2 = 4x^2 + 8x + 4 = 4 \cdot (x+1)^2,$$

откуда $x^2 - 3 = \pm 2 \cdot (x+1)$. Корни образовавшихся квадратных уравнений - $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$. Разумеется, в общем случае могут получиться и комплексные корни.

Пример 2. Найти корни многочлена $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5$.

Решение.

Составим уравнение $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5 = 0$

Представим левую часть в виде

$$\left(x^2 - 2x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[(\lambda - 3)x^2 + (2 - 2\lambda)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} + 5\right)\right]$$

Подберем λ так, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в квадратных скобках был равен нулю:

$$(2-2\lambda)^2-4(\lambda-3)\left(\frac{\lambda^2}{4}+5\right)=0$$

или

$$-\lambda^3+7\lambda^2-28\lambda+64=0.$$

Можно заметить, что 4 — один из корней этого уравнения. Тогда подставим $\lambda=4$ в (8) и уравнение (7) примет вид:

$$\left(x^2-2x+2\right)^2-\left(x-3\right)^2=0$$

или

$$\left(x^2-3x+5\right)\left(x^2-x-1\right)=0.$$

Отсюда, решая уравнения $x^2-3x+5=0$ и $x^2-x-1=0$, получим корни нашего многочлена

$$x_1\frac{3-i\sqrt{11}}{2};\quad x_2=\frac{3+i\sqrt{11}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2};\quad x_4=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Решение Декарта-Эйлера

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

подстановкой $x=y-a/4$ приводится к "неполному" виду

$$y^4+py^2+qy+r=0.$$

Корни y_1, y_2, y_3, y_4 "неполного" уравнения четвертой степени равны одному из выражений

$$\pm\sqrt{z_1}\pm\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3},$$

в которых сочетания знаков выбираются так, чтобы удовлетворялось условие

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8},$$

причем z_1, z_2 и z_3 - корни кубичного уравнения

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Если у многочлена с целыми коэффициентами рациональных корней не оказалось, можно попробовать разложить его на множители меньшей степени с целыми коэффициентами.

Пример 3. Решить уравнение $x^4-2x^2-8x-3=0$.

Решение.

Представим левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

$$x^4-2x^2-8x-3=\left(x^2+ax+b\right)\cdot\left(x^2+px+q\right).$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные:

$$x^4-2x^2-8x-3=x^4+(a+p)\cdot x^3+(b+ap+q)\cdot x^2+(aq+bp)\cdot x+bq$$ Теперь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a+p=0, \\ b+ap+q=-2, \\ aq+bp=-8, \\ bq=-3. \end{cases}$$

Попытка решить эту систему в общем виде вернула бы нас назад, к решению исходного уравнения. Но целые корни, если они существуют, нетрудно найти и подбором. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \geq q$, тогда последнее уравнение показывает, что надо рассмотреть лишь два варианта: $b=3$, $q=-1$ и $b=1$ $q=-3$. Подставляя эти пары значений в остальные уравнения, убеждаемся, что первая из них дает искомое разложение:

$$x^4-2x^2-8x-3=(x^2+2x+3)\cdot(x^2-2x-1).$$

Этот способ решения называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Упражнения

1. Решить уравнения:

a) $x^3+6x^2-12x+32=0$
b) $x^3+9x^2-18x+44=0$
c) $x^3-3x^2-6x+36=0$
d) $x^3-12x^2+24x-40=0$
e) $x^3-6ix+4(1-i)=0$
f) $x^3+(3-3i\sqrt{3})x-9=0$

2. Решить уравнения:

a) $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$

b) $x^4+3x^3+2x^2+x-1=0$

c) $x^4+x^3-4x^2-x+1=0$

d) $x^4-6x^3+15x^2-18x+10=0$

8.14. Границы для комплексных и вещественных корней многочленов

Теорема. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \boldsymbol{C}[x]$, $a_0 \neq 0, A = \max\limits_{j=1,2,\dots,n}|a_j|$ *и* $f(\alpha) = 0, \alpha \in \boldsymbol{C}$, *тогда*

$$|\alpha| < \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

Доказательство.

Покажем, что если

$$|\alpha| \geq \frac{A}{|a_0|} + 1,$$

то α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Действительно,

$$f(\alpha) \geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - |a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n| \geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot |\alpha^{n-1} + \cdots + 1|$$
$$= |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} > |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \frac{|\alpha|^n}{A} \cdot |a_0| = 0$$

Итак, $f(\alpha) > 0$, т.е. α не является корнем. ■

Теорема. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \boldsymbol{R}[x]$, $a_0 > 0$, k- *минимальное, такое, что* $a_k < 0$, $B = \max\limits_{a_j<0}|a_j|$.

Тогда для любого положительного вещественного корня α *справедливо неравенство*

$$\alpha \leq \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1.$$

Доказательство.

Пусть $\alpha > \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1$, откуда $(x-1)^k > \frac{B}{a_0}$.

Покажем тогда, что α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Имеем

$$f(\alpha) \geq a_0\alpha^n - B(\alpha^{n-k} + \alpha^{n-k-1} + \cdots + \alpha + 1) = a_0\alpha^n - B \cdot \frac{\alpha^{n-k+1} - 1}{\alpha - 1}$$
$$> a_0\alpha^n - B \cdot \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1} = \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1}(a_0\alpha^{k-1}(\alpha - 1) - B)$$
$$> \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1}(a_0(\alpha - 1)^k - B) > 0.$$

Итак, $f(\alpha) > 0$, т.е. α не является корнем. ■

Замечание 1. *Если* $a_j \geq 0$ $(j = 0,1,2,\dots,n)$, *то положительных корней у многочлена нет.*

Замечание 2. *Для нахождения нижней оценки отрицательных корней многочлена* $f(x)$ *достаточно применить теорему к многочлену*

$$f(-x) = a_0(-1)^nx^n + a_1(-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Для нахождения нижней оценки положительных корней достаточно применить теорему к многочлену

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Для нахождения верхней оценки отрицательных корней достаточно применить теорему к многочлену

$$x^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_0 - a_1 x + \cdots + a_{n-1}(-1)^{n-1}x^{n-1} + a_n(-1)^n x^n.$$

Пример. Найти границы действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 5x - 3.$$

Решение.

Найти границы действительных корней многочлена – значит найти такие числа M_1 и M_2, что для любого действительного корня αмногочлена $f(x)$ выполняется условие

$$M_1 < \alpha < M_2.$$

M_1 называется нижней границей (НГ), а M_2 верхней границей (ВГ) действительных корней многочлена $f(x)$.

<u>*Первый способ.*</u>

$$\text{ВГ} = 1 + \frac{A}{|a_0|}, \text{НГ} = -\left(1 + \frac{A}{|a_0|}\right),$$

где А- наибольшая из абсолютных величин коэффициентов, а a_0 – старший коэффициент многочлена $f(x)$. В результате для данного многочлена получаем А=10, $a_0 = 1$.

ВГ=11, НГ=-11,

т.е. действительные корни заключены на интервале (-11;11).

<u>*Второй способ*</u>.

$\text{ВГ} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, где k – индекс первого отрицательного коэффициента многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, В – наибольшая из абсолютных величин его отрицательных коэффициентов (при условии, что $a_0 > 0$).

В задании k=4, B=5, $a_0 = 1$. Значит $\text{ВГ} = 1 + \sqrt[4]{\frac{5}{1}} < 3$.

Для нахождения НГ этим способом достаточно в $f(x)$ вместо x подставить *(-x)* и воспользоваться следующим правилом: нижняя граница действительных корней многочлена $f(x)$ равна верхней границе действительных корне многочлена $f(-x)$, взятой с противоположным знаком.

$$f(-x) = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 5x - 3.$$

Так как здесь $a_0 < 0$, то умножим $f(-x)$ на (-1). Очевидно, что от этого корни многочлена $f(-x)$ не изменяться и, следовательно, не изменятся границы корней.

$$-f(-x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x + 3.$$

В результате получаем: k=1, B=5, $a_0 = 1$. Значит ВГ $= 1 + \sqrt[1]{\frac{5}{1}} = 6$.

А потому для данного многочлена $f(x)$ НГ=-6. Корни многочлена $f(x)$ заключены в интервале (-6;3).

Сравнивая рассмотренные способы, можно сказать, что второй способ несколько сложнее первого. Однако он зачастую позволяет значительно сузить границы корней, найденные первым способом. На практике же важно иметь более узкие границы корней.

Пример. Найти границы действительных корней многочлена $f(x)$, если:

a) $f(x) = 2x^6 - x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4$;

b) $f(x) = 2x^6 - 8x^3 + 15x^2 + 16x - 7$.

Решение.

a) Применим формулу

$$\text{ВГ} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}},$$

Подставляя значения k=1, B=5, $a_0 = 2$, получим: ВГ=1+2,5=3,5. Для нахождения НГ делаем подстановку —x вместо x:

$$f(-x) = 2x^6 + x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4.$$

Замечаем, что все коэффициенты многочлена положительны. В этом случае формула не применима, ибо не существует индекса первого отрицательного коэффициента. Однако в этом случае в применении какой-либо формулы нет никакой необходимости, ибо ясно, что многочлен, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней и, следовательно, ВГ=0. Отсюда следует, что для многочлена $f(x)$ НГ=0. Итак, действительные корни многочлена $f(x)$заключены в промежутке (0; 3,5).

b) Применяя формулу ВГ $= 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, получим:

$$\text{ВГ} = 1 + \sqrt[3]{\frac{8}{2} < 3}.$$

Далее, $f(x) = 2x^6 + 8x^3 + 15x^2 - 16x - 7$. Здесь снова, как и в случае a), можно обойтись без формулы. Глядя на коэффициенты многочлена, легко заметить, что $f(x) > 0$ при $x \geq 1$. Следовательно, ВГ = 1 для $f(-x)$и действительные корни многочлена $f(x)$ находятся в интервале (-1;3).

Упражнения

Найти границы действительных корней многочлена двумя способами

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$;

b) $f(x) = x^5 + 7x^3 - 3$;

c) $f(x) = 5x^4 - 10x^3 - 8x^2 + 21x + 20$;

d) $f(x) = 3x^6 + 5x^3 - 7x^2 - 15x + 20$;

e) $f(x) = x^7 - 1084x^5 - 445x^3 + 900x^2 801$;

f) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x - 14$;

g) $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 7x + 12$;

h) $f(x) = x^8 + 12x^3 - x + 3$;

8.15. Результант и дискриминант многочленов

Алгоритм Евклида позволяет найти наибольший общий делитель любых двух *конкретных* многочленов и, в частности, выяснить, являются ли они взаимно простыми. Однако он не дает в явном виде условия, которому должны удовлетворять коэффициенты двух многочленов для того, чтобы эти многочлены были (или, наоборот, не были) взаимно просты.

Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ - два многочлена с коэффициентами из поля R, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, так что $\deg f = n$, $\deg g = m$.

Из следствия к теореме следует, что многочлены f и g не являются взаимно простыми тогда и только тогда их наименьшее общее кратное имеет степень, меньшую, чем их произведение. Наименьшее общее кратное h многочленов f и g представляется в виде $h = fu$ и одновременно в виде $h = gv$, где u и v - некоторые многочлены. Имеем: $\deg h = \deg f + \deg u = \deg g + \deg v$. Так как $\deg fg = \deg f + \deg g$, то из условия $\deg h < \deg fg$, следует, что $\deg u < \deg g = m$, $\deg v < \deg f = n$. Таким образом, *если многочлены f и g не взаимно просты, то существуют такие многочлены u и v, что*

$$fu = gv,\ \deg u < m,\ \deg v < n.$$

Обратно, если существуют многочлены u и v, удовлетворяющие условиям , то многочлен $fu = gv$, являющийся общим кратным многочленов f и g, имеет степень, меньшую, чем степень произведения fg. Степень наименьшего общего кратного в этом случае тем более меньше степени fg, и, значит, многочлены f и g не являются взаимно простыми.

Итак, вопрос о взаимной простоте многочленов f и g сводится к вопросу о существовании многочленов u и v, удовлетворяющих условиям. Выясним, когда такие многочлены существуют. Запишем их в общем виде: $u = u_1x^{m-1} + u_2x^{m-2} + \ldots + u_m$, $v = v_1x^{n-1} + v_2x^{n-2} + \ldots + v_n$. Предположим для определенности, что $m \leq n$. Каждое из произведений fu, gv представляет собой многочлен степени не выше $n + m - 1$. Коэффициенты многочлена fu, записанные в столбец, имеют вид

$$
\begin{array}{llll}
a_0u_1, & & & \\
a_1u_1 & +a_0u_2, & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{m-1}u_1 & +a_{m-2}u_2+\dots & +a_1u_{m-1} & +a_0u_m, \\
a_mu_1 & +a_{m-1}u_2+\dots & +a_2u_{m-1} & +a_1u_m, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_nu_1 & +a_{n-1}u_2+\dots & +a_{n-m+2}u_{m-1} & +a_{n-m+1}u_m, \\
 & a_nu_2+\dots & +a_{n-m+3}u_{m-1} & +a_{n-m+2}u_m, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & a_nu_{m-1} & +a_{n-1}u_m, \\
 & & & a_nu_m.
\end{array}
$$

Коэффициенты многочлена gv имеют вид

$$
\begin{array}{llllll}
b_0v_1, & & & & & \\
b_1v_1 & +b_0v_2, & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
b_mv_1 & +b_{m-1}v_2+\dots & & +b_0v_{m+1}, & & \\
 & b_mv_2+\dots & & & +b_0v_{m+2}, & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\
 & & b_mv_{n-m}+\dots & & +b_0v_n, & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
 & & & b_mv_{n-1} & +b_{m+1}v_n, & \\
 & & & & b_mv_n. &
\end{array}
$$

Приравнивая коэффициенты многочленов fu и gv при одинаковых степенях x, получаем систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных $u_1,u_2,\dots,u_m,v_1,v_2,\dots,v_n$. Число уравнений этой системы равно $n+m$, т.е. числу неизвестных. Если перенести все члены с $v_1,v_2,\dots,v_n$ в левую часть, то получится следующая матрица коэффициентов при неизвестных:

$$
\begin{pmatrix}
a_0 & & \dots & & b_0 & & & & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\
a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_0 & -b_{m-1} & -b_{m-2} & \dots & -b_0 & & & \\
a_m & a_{m-1} & \dots & a_1 & -b_m & -b_{m-1} & \dots & -b_1 & -b_0 & & \\
a_{m+1} & a_m & \dots & a_2 & & -b_m & \dots & -b_2 & -b_1 & -b_0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-m+1} & & & & -b_m & \dots & \dots & -b_0 \\
 & a_n & \dots & a_{n-m+2} & & & & & -b_m & \dots & -b_1 \\
 & & a_n & a_{n-1} & & & & & & -b_m & -b_{m-1} \\
 & & & a_n & & & & & & & -b_m
\end{pmatrix}
$$

Рассматриваемая система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю. При его вычислении можно для удобства умножить на -1 последние n столбцов и транспонировать матрицу. Полученный определитель

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_n & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & \dots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_m & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ строк} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ строк} \end{matrix}$$

называется результантом многочленов f и g.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Многочлены* $f, g \in R[x]$ *не являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда их результант* $R(f,g)$ *равен нулю.*

Замечание. Если не предполагать, что коэффициенты a_0, b_0 отличны от нуля, то обращение в нуль определителя (26) остается *необходимым* условием того, чтобы многочлены f и g не были взаимно просты. В самом деле, если f и g не взаимно просты, то существуют такие ненулевые многочлены u и v, что $fu = gv$, $\deg u < \deg g$, $\deg v < \deg f$.

Поскольку мы не предполагаем, что $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$, нельзя утверждать, что $\deg f = n$ и $\deg g = m$, но, во всяком случае, $\deg f \le n$, $\deg g \le m$. Поэтому многочлены u и v тем более удовлетворяют условиям, а из существования таких многочленов так же, как и выше, следует, что определитель равен нулю.

Пример 1. Вычислим результант многочленов $f = 2x^4 - 5x^2 - x - 1$, $g = x^3 - 3x^2 + 1$ (с действительными коэффициентами) и выясним, являются ли они взаимно простыми.

Решение.

Искомый результант имеет вид

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычисляя этот определитель, находим, что $R(f,g) = 543 \neq 0$; следовательно, многочлены f и g взаимно просты.

Пример 2. Вычислить, при каких значениях λ многочлены $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + \lambda x - 1$ и $g(x) = x^2 + \lambda$ имеют общие корни.

Решение.

Вычисляем результант:

$$R\left(f(x),g(x)\right)=\begin{vmatrix}1 & -\lambda & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & -1\\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\left(\lambda^2-1\right)^2.$$

$f(x)$ и $g(x)$ имеют общие корни лишь в случае, когда $R\left(f(x),g(x)\right)=0$, то есть при $\lambda=\pm1$. При $\lambda=1$ общими корнями являются i и $-i$, а при $\lambda=-1$: 1 и -1.

Дискриминантом многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n, a_0\neq 0$, имеющего корнями числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, называется произведение

$$D(f)=a_0^{2n-2}\prod_{1\le j<i\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2.$$

Дискриминант тогда и только тогда равен нулю, когда среди корней многочлена имеются равные, то есть когда многочлен имеет хотя бы один кратный корень. Дискриминант связан с результантом многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ равенством

$$R\left(f,f'\right)=\left(-1\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot a_0\cdot D(f),$$

позволяющей выразить дискриминант через его коэффициенты.

Пример 3. Найти дискриминант многочлена $f(x)=x^3-3x+7$.

Решение.

$f'(x)=3x^2-3$.

$$(-1)^3\cdot 1\cdot D(f)=R(f,f')=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7\\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=1215.$$

$D(f)=-1215$, $f(x)$ кратных корней не имеет.

Упражнения

При каком значении a многочлены имеют общий корень:

1. x^3+ax+3 и x^2+ax+3.
2. x^3+x^2+ax-4 и x^2+x-a.
3. $x^3+(2a-1)x+4$ и x^2-ax-3.
4. $2x^3+ax+1$ и x^2+ax+2.
5. x^3+ax^2+8 и x^2+ax+8.
6. x^2+ax+1 и x^2-ax+1.
7. x^2+ax+1 и x^2+x+a.
8. x^3+ax^2-9 и x^2+ax-3.

9. x^3+ax-1 и $x^2+(a+1)x-2$.

10. x^4+ax^2+1 и x^3+ax+1.

11. $a^2(x+1)+2$ и $ax^2+x-a-1$.

12. $ax^2-2ax-1$ и a^2x+a.

13. x^2-3x+a^2-a и $-x^2+(7-6a)x+a^2+11a-12$.

14. $4x^2+(13-7a)x+a^2-2a-3$ и $9x^2+(28-14a)x+a^2-4a-5$.

8.16. Распределение корней многочлена на действительной оси

Системой Штурма многочлена $f(x)$ называется конечная последовательность многочленов $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_s(x)$ такая, что

1. многочлены $f_j(x)$, $f_{j+1}(x)$ не имеют общих вещественных корней (j = 0,1,...,$s-1$);
2. если $f_0(\alpha)=0$, то функция $f_0(x)f_1(x)$ возрастает в окрестности α, меняя знак с − на +;
3. если $f_j(\alpha)=0$, то $f_{j-1}(\alpha)f_{j+1}(\alpha)<0$ ($j=1,2,...,s-1$);
4. $f_s(x)$ не имеет вещественных корней.

Пусть $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$ и $f_j(x)$ — взятый с противоположным знаком остаток при делении $f_{j-2}(x)$ на $f_{j-1}(x)$ ($j=2,3,...,s$). Вычисления заканчиваются, когда при делении $f_{s-1}(x)$ на $f_s(x)$ в остатке не будет получен нулевой многочлен (так как степени многочленов $f_j(x)$ убывают, то процесс завершится). Итак,

$$f(x) = q_1(x)f'(x) - f_2(x), \qquad (\delta_1)$$

$$f'(x) = q_2(x)f_2(x) - f_3(x), \qquad (\delta_2)$$

$$f_{j-1}(x) = q_j(x)f_j(x) - f_{j+1}(x), \qquad (\delta_j)$$

$$fs-2(x) = qs-1(x)fs-1(x) - fs(x), \qquad (\delta s-1)$$

$$f_{s-1}(x) = q_s(x)f_s(x). \qquad (\delta_s)$$

Таким образом, многочлены $f_j(x)$ лишь множителями отличаются от многочленов, получаемых в алгоритме Евклида, следовательно, $f_s(x)$ есть НОД $f(x)$ и $f^0(x)$ и, в частности, по теореме $f_s(x)$ — константа тогда и только тогда, когда $f(x)$ не имеет кратных корней.

Теорема. *Для произвольного многочлена* $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, *не имеющего кратных корней, система Штурма существует. В частности, системой Штурма многочлена* $f(x)$ *является последовательность* $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$, $f_2(x)$,..., $f_s(x)$, *построенная согласно* (δ_0)–(δ_s).

Доказательство.

Для системы, построенной согласно (δ_1) – (δ_s), докажем выполнение свойств 1) –4) в определении системы Штурма.

1. Если $f_j(\alpha) = f_{j+1}(\alpha) = 0$, то согласно ($\gamma_j$) $f_{j-1}(\alpha) = 0$. Из рассмотрения (γ_{j-1}) получаем $f_{j-2}(\alpha) = 0$ и т.д. Из рассмотрения (γ_2) и (γ_1) получаем $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, что не возможно, так как $f(x)$ не имеет кратных корней.
2. Если $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) > 0$, то $f(x)$ возрастает в окрестности α, следовательно, $f(x)\,f'(x)$ возрастает. Если $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) < 0$, то $f(x)$ убывает в окрестности α, и следовательно, $f(x)\,f'(x)$ возрастает.
3. Пусть $f_j(\alpha) = 0$. Подставляя α в левую и правую части равенства (δ_j), получаем $f_{j-1}(\alpha) = -f_{j+1}(\alpha)$, поэтому $f_{j-1}(\alpha) = -f_{j+1}(\alpha) <0$.
4. Как уже отмечалось, $f_s(x)$ есть НОД многочленов $f(x)$ и $f_0(x)$. Так как $f(x)$ не имеет кратных корней, то по теореме $f_s(x)$ — ненулевая константа, следовательно, $f_s(x)$ корней не имеет. ■

Замечание. При построении системы Штурма по формулам (δ_0) –(δ_s) многочлены $f_j(x)$ ($j = 0, 1, ..., s$) можно умножать на произвольные положительные константы. Легко видеть, что доказательство теоремы распространяется и на такую систему.

Если в конечной последовательности вещественных чисел $\alpha_0, \alpha_1,...,\alpha_s$ имеется k переходов от одного знака к другому (нулевые числа пропускаем), то говорят, что последовательность содержит k *перемен знака*.

Теорема (Штурма). *Пусть многочлен $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ не содержит кратных корней и $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, где $a < b$, $a,b \in \mathbf{R}$. Тогда число действительных корней многочлена $f(x)$, принадлежащих отрезку $[a,b]$, равно $W(a) - W(b)$, где через $W(\alpha)$ обозначено число перемен знака в последовательности значений многочленов системы Штурма $f_0(\alpha), f_1(\alpha),..., f_s(\alpha)$.*

Доказательство.

Пусть x движется от a к b. Проследим, как при этом меняется $W(x)$. Очевидно, $W(x)$ не меняется, когда x проходит через интервал, на котором нет корней ни одного из многочленов системы Штурма. Покажем, во-первых, что $W(x)$ уменьшается на 1, т.е. теряется одна перемена знака, если x проходит через корень многочлена $f(x)$. Во-вторых, покажем, что $W(x)$ не меняется, когда x проходит через корень одного из многочленов $f_j(x)$ ($j = 1,2,...,s$). Это докажет, что число корней на отрезке $[a,b]$ равно $W(a) - W(b)$.

Пусть x проходит через корень α многочлена $f(x)$. Согласно свойству 2) в определении системы Штурма $f(x)f_1(x)$ в окрестности α возрастает и, следовательно, при прохождении x через α меняет знак с $-$ на $+$. Это означает, что если в окрестности α многочлен $f(x)$ возрастает, то $f_1(x) > 0$:

	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f(x)$	$-$	$+$
$f_1(x)$	$+$	$+$
$f_2(x)$	$*$	$*$
...	...	...
$f_s(x)$	$*$	$*$

Таким образом, в приведенной таблице число перемен знака в столбце, соответствующем $x < \alpha$, на 1 больше, чем в столбце, соответствующем $x > \alpha$, т.е. теряется одна перемена знака. Если же в окрестности α многочлен $f(x)$ убывает, то $f_1(x) < 0$:

	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f(x)$	$+$	$-$
$f_1(x)$	$-$	$-$
$f_2(x)$	$*$	$*$
...	...	...
$f_s(x)$	$*$	$*$

Аналогично приходим к выводу, что теряется одна перемена знака.

Пусть теперь x проходит через корень α одного из многочленов $f_j(x)$ ($j = 1,2,...,s$). Согласно свойству 3) в определении системы Штурма $f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) < 0$. Это возможно в следующих 4 случаях (два из них соответствуют возрастающей в окрестности α функции $f_j(x)$, а два — убывающей):

В каждом случае число перемен знака в столбце, соответствующем $x < \alpha$, совпадает с числом перемен знака в столбце, соответствующем $x > \alpha$. Итак, если x проходит через корень многочлена $f_j(x)$ ($j = 1,2,...,s$), то $W(x)$ не изменяется. ■

Локализовать вещественные корни многочлена $f(x)$ — значит найти интервалы на вещественной оси, на каждом из которых содержится ровно один корень и других вещественных корней нет. После того, как корни локализованы, для их уточнения используют различные численные методы (деления пополам, секущих, касательных Ньютона и др.).

	I.		II.		III.		IV.	
	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f_{j-1}(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f_j(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f_{j+1}(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$

Пример. С помощью теоремы Штурма локализуем вещественные корни многочлена $f(x) = x^5 - 4x - 2$. Получаем следующую верхнюю оценку на положительные корни: $\alpha < 2$. Применяя тот же способ к многочлену $-f(-x) = x^5$ -4x + 2, получаем нижнюю оценку на величину отрицательных корней: $\alpha > -2$. Итак, все вещественные корни многочлена $f(x)$ лежат на интервале $(-2, 2)$.

Построим систему Штурма.

$$f_0(x) = f(x),\ f_1(x) = f'(x) = 5x^4 - 4.$$

При делении $f_0(x)$ на $f_1(x)$ получаем в остатке $r_2(x) = -(16/5)x-2$. Меняем знак у $r_2(x)$ и домножаем на 5/2, получаем $f_2(x) = 8x + 5$.

При делении $f_1(x)$ на $f_2(x)$ получаем в остатке $r_3(x) = -13259/4096$, поэтому $f_3(x) = 1$.

Полученный многочлен $f_3(x)$ является наибольшим общим делителем $f(x)$ и $f'(x)$. Таким образом, $f(x)$ и $f'(x)$ взаимно просты, поэтому $f(x)$ кратных корней не имеет.

Вычислим значения многочленов системы Штурма на концах интервала $(-2, 2)$. Число перемен знаков составит $W(-2) = 3$, $W(2) = 0$ (см. таблицу ниже). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет $W(-2) - W(2) = 3$ вещественных корня. Вычислим значения многочленов системы Штурма в середине интервала $(-2, 2)$. Число перемен знака в точке 0 составит $W(0) = 1$. Следовательно, имеется $W(0) - W(2) = 1$ положительный корень и $W(-2) - W(0) = 2$ отрицательных корня. Для локализации отрицательных корней вычислим значения многочленов системы Штурма в точке -1. Приходим к выводу, что корни локализованы на интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, 2)$.

Знаки значений многочленов системы Штурма в рассматриваемых точках сведены в таблицу.

	-2	-1	0	2
$f_0(x) = f(x) = x^5 - 4x - 2$	$-$	+	$-$	+
$f_1(x) = f'(x) = 5x^4 - 4$	+	+	$-$	+
$f_2(x) = 8x + 5$	$-$	$-$	+	+
$f_3(x) = 1$	+	+	+	+
$W(x)$	3	2	1	0

Теорема была сформулирована и доказана для случая многочлена $f(x)$ без кратных корней. Если $f(x)$ имеет кратные корни, то НОД многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ имеет положительную степень, поэтому $f_s(x)$ в системе, построенной согласно (γ_1)–(γ_s), может не удовлетворять свойству 4) в определении системы Штурма. Тем не менее, справедлив результат, обобщающий теорему. на случай многочлена с корнями произвольной кратности.

Теорема. *Пусть* $f(x)$ *— многочлен из* $\mathbf{R}[x]$, *такой, что* $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, *где* $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}$. *Пусть также* $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ *— система, построен-*

ная согласно (γ_1)–(γ_s). *Тогда число действительных корней* (*без учета их кратности*) *многочлена* $f(x)$, *принадлежащих отрезку* $[a, b]$, *равно* $W(a) - W(b)$, *где через* $W(\alpha)$ *обозначено число перемен знака в последовательности* $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$.

Доказательство.

Многочлен $f_s(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $f_s(x)$. Из (γ_1)–(γ_s) получаем, что каждый из многочленов $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ делится на $f_s(x)$. Пусть $g_j(x) = f_j(x)/f_s(x)$ ($j = 0, 1, \ldots, s$). Легко видеть, что система $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_s(x)$ является системой Штурма для многочлена $g(x) = f(x)/f_s(x)$, все корни которого по следствию совпадают с корнями многочлена $f(x)$, но имеют кратность 1. Поэтому число корней (без учета кратности) многочлена $f(x)$ совпадает с разностью в числе перемен знака в последовательностях значений $g_0(a), g_1(a), \ldots, g_s(a)$ и $g_0(b), g_1(b), \ldots, g_s(b)$. Но при заданном α последовательность $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$ получается из последовательности $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)$ умножением на константу $f_s(\alpha)$. Так как $f_s(a) \neq 0$, $f_s(b) \neq 0$ (иначе было бы $f_s(b) = 0$ или $f_s(b) = 0$), то число перемен знака в этих последовательностях одно и то же. ■

Правило знаков Декарта. *Число положительных корней ненулевого многочлена* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbf{R}[x]$ *с учетом их кратностей равно или на четное число меньше числа перемен знака в последовательности коэффициентов* $a_0, a_1, \ldots, a_n$. *В частности, если число перемен знака равно* 0 *или* 1, *то* $f(x)$ *соответственно либо не имеет положительных корней, либо имеет ровно один положительный корень*.

8.17. Алгебраическое расширение полей. Освобождение от иррациональности в знаменателе

Пусть $f(x) \in F[x]$ — неприводимый над полем F многочлен и α — некоторый его корень, не принадлежащий F. Минимальное по включению поле, включающее F и содержащее α назовем алгебраическим расширением поля F и обозначим F(α). Будем также говорить, что F(α) получено в результате присоединения к F элемента α.

Пусть в F[x] нашелся многочлен $f(x)$, для которого $f(\alpha) = 0$. Мы можем считать, что $f(x)$ неприводим над F, так как в противном случае $f(x)$ можно заменить на тот неприводимый множитель в его разложении, для которого α является корнем.

Теорема. Все элементы поля F(α), где α — иррациональный корень неприводимого над F многочлена f(x) степени n, имеют вид

$\beta = \gamma_0 + \gamma_1\alpha + \gamma_2\alpha^2 + \ldots + \gamma_{n-1}\alpha^{n-1}$

для произвольных $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1} \in F$. По любому $\beta \in F(\alpha)$ величины $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ определяются единственным образом.

Иными словами, для любого $\beta \in F(\alpha)$ найдется единственный $g(x) \in F[x]$, либо равный 0, либо степени меньшей n, такой, что $\beta = g(\alpha)$. Для любого $g(x) \in F[x]$ величина $f(\alpha)$ принадлежит $F(\alpha)$.

Доказательство.

Так как $F \subseteq F(\alpha)$ и $\alpha \in F(\alpha)$, то в силу замкнутости поля $F(\alpha)$ относительно операций сложения, вычитания и умножения каждое число такого вида принадлежит $F(\alpha)$.

Прежде чем показывать, что других чисел в $F(\alpha)$ нет, докажем что многочлен $g(x)$, такой, что $\beta = g(\alpha)$ и $\deg g(x) < n$ или $g(x) = 0$, по величине $\beta \in F(\alpha)$ определяется единственным образом. Пусть $g(\alpha) = g_e(\alpha)$, где $g_e(x) \in F[x]$ и $\deg g_e(x) < n$ или $g_e(x) = 0$. Тогда α является корнем многочлена $h(x) = g(x) - g_e(x)$. Так как α является также корнем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ и $h(x)$ имеют нетривиальный делитель в $\mathbf{C}[x]$ и в $F[x]$. Но $\deg h(x) < \deg f(x)$ или $h(x) = 0$.

Первое невозможно, так как $f(x)$ неприводим над F, следовательно, $h(x) = 0$, т.е. $g(x) = g_e(x)$.

Покажем, что других элементов, кроме таких чисел в $F(\alpha)$ нет. Для этого проверим замкнутость множества всех таких чисел относительно операций сложения, вычитания и умножения и замкнутость множества ненулевых чисел такого вида относительно деления. Замкнутость относительно сложения и вычитания очевидна. Для доказательства замкнутости относительно умножения рассмотрим произведение $g(\alpha)\, g_e(\alpha)$

Разделив $h(x) = g(x)g_e(x)$ на $f(x)$ получим в остатке многочлен $r(x)$, такой, что $\deg r(x) < n$ или $r(x) = 0$. Легко видеть, что $h(\alpha) = r(\alpha)$. Замкнутость относительно умножения доказана.

Для доказательства замкнутости множества ненулевых элементов относительно деления достаточно показать, что для любого ненулевого $g(x) \in F[x]$, степени меньше n, величина $1/g(\alpha)$ может быть представлена в виде представления, освобожденного от иррациональности в знаменателе. Так как $f(x)$ неприводим над $\mathbf{Q}$, то $f(x)$ и $g(x)$ взаимно просты и, следовательно, существуют коэффициенты Безу $u(x) \in F[x]$ и $v(x) \in F[x]$, такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ и $\deg v(x) < \deg f(x) = n$. Подставляя в последнее равенство вместо x иррациональность α, получаем $v(\alpha)g(\alpha) = 1$, откуда $1/g(\alpha) = v(\alpha)$. Число $v(\alpha)$ имеет нужный вид

Определение. Элемент α называется *алгебраическим над полем* P, если α является корнем какого-нибудь ненулевого многочлена с коэффициентами из поля P. Если при этом $\alpha \notin P$, то α - *алгебраический иррациональный над полем* P.

Примеры.

1) Любой элемент α из поля P является алгебраическим над P, т.к. является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x - \alpha \in P[x]$.

2) Элемент $\alpha = \sqrt{5}$ является алгебраическим над полем Q, т.к. α является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x^2 - 5$.

3) Найдём ненулевой многочлен $f(x)$, корнем которого является элемент $\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Найдём равенство, в котором линейная комбинация целых неотрицательных степеней α равна 0.

Имеем

$\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} = 1 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (1-\alpha)^2 \Rightarrow 5 - 2\sqrt{6} = 1 - 2\alpha + \alpha^2 \Rightarrow (4 + 2\alpha - \alpha^2)^2 = (2\sqrt{6})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha - 8 = 0$. Таким образом, α является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$. Тем самым, дополнительно доказано, что элемент $\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ является алгебраическим над полем Q.

Пусть α - алгебраический иррациональный элемент над полем P; $f, h \in P[x]$ и $f(\alpha), h(\alpha) \neq 0$. Требуется элемент $\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}$ представить в виде линейной комбинации неотрицательных степеней α с коэффициентами из поля P, т.е. исключить элемент α из знаменателя дроби. Достаточно научиться решать данную задачу для выражения $\frac{1}{h(\alpha)}$.

Ищем многочлен $g(x) \in P[x]$ такой, что $\big((g(x), h(x)\big) = 1$ и $g(\alpha) = 0$. Достаточно найти произвольный многочлен $g_1(x)$ такой, что $g_1(\alpha) = 0$. Тогда можно взять многочлен $g(x) = \frac{g_1(x)}{(g_1(x), h(x))}$.

Поскольку *(g,h)*=1, то существуют многочлены $h, v \in P[x]$: $h \cdot u + g \cdot v$=1. Но $g(\alpha) = 0$. Тогда из равенства $h(\alpha) \cdot u(\alpha) + g(\alpha) \cdot v(\alpha) = 1$ получаем $\frac{1}{h(\alpha)} = v(\alpha)$, что и требуется.

Пример. Освободиться от алгебраической над полем Q иррациональности в выражении $\frac{63}{\sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1}$.

Решение.

В данном примере можно взять $\alpha = \sqrt[4]{2}$. Или $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2} - 1$. Но мы возьмём $\alpha = \sqrt{2} + 2\sqrt[4]{2}$. Тогда $h(\alpha) = \alpha - 1$ и $h(x) = x - 1$. Ищем многочлен из *P[x]*, корнем которого является α:

$\alpha - \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{2} \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2} \cdot \alpha + 2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 2\sqrt{2} \cdot (2 + \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^4 + 4\alpha^2 + 4 = 8 \cdot (4 + 4\alpha + \alpha^2) \Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 - 32\alpha - 28 = 0$.

Возьмём многочлен $g(x)=x^4-4x^2-32x-28$. Так как $g(1)\neq 0$, то (g,h)=1. Найдём нужные многочлены $u,v\in Q[x]$. Для этого делим $g(x)$ на $h(x)$ (можно по схеме Горнера):

	1	0	-4	-32	-28
1	1	1	-3	-35	-63

Значит, $g(x)=h(x)\cdot(x^3+x^2-3x-35)-63$. Тогда

$g(\alpha)=0=h(\alpha)\cdot(\alpha^3+\alpha^2-3\alpha-35)-63$ или $\dfrac{63}{h(\alpha)}=\alpha^3+\alpha^2-3\alpha-35$.

Поэтому $\dfrac{63}{\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}-1}=(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})^3+(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})^2-3(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})-35.$

Продолжая вычисления дальше, получим:

$$\frac{63}{\sqrt{2}+2\sqrt[2]{2}-1}=2\sqrt{2}+12\sqrt[4]{2}+24+8\sqrt[4]{8}+2+4\sqrt[4]{8}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6\sqrt[4]{2}-35=$$

$=3\sqrt{2}+6\sqrt[4]{2}+12\sqrt[4]{8}-9$.

Пример. Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Поиски минимального многочлена для знаменателя приводят к громоздким выкладкам. Будем искать множитель, рационализующий знаменатель, с помощью метода неприводимых коэффициентов. Так как $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in Q\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)$ и базис $Q\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\right)$ над Q состоит из чисел $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$, то этот множитель будем искать в виде $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где a, b, c, d є Q.

Из условия $(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\ (a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6})=f$, где f – некоторое (отличное от нуля) рациональное число, получаем систему

$$\begin{cases} a+2b+3c+3d=0; \\ a+2b+2c+2d=0; \\ a+b+c+2d=0; \\ 2a+2b+3c+6d=f. \end{cases}$$

Найдем какое – нибудь рациональное решение первых трех уравнений системы и, подставив в четвертое, определим f. При d=1 будем иметь c=-1, b=1, a=-2 и f=1.

Поэтому $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$

Пример. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2}$, где $\alpha^3-3\alpha+3=0$.

Решение.

Число α есть корень многочлена $\varphi(x) = x^3 - 3x + 3$. В знаменателе дроби стоит значение $f(\alpha)$, где $f(x) = x^2 - x + 2$. Найдем НОД(φ, f) и его линейное представление, как в примере 2.1. Получим

$$\text{НОД}(\varphi, f) = 35 = (4x + 3)\varphi - (4x^2 + 7x - 13)f.$$

(нет необходимости делать НОД(φ, f) = 1). Подставив значение $x = \alpha$ и воспользовавшись тем, что $\varphi(\alpha) = 0$, получим $35 = -(4\alpha^2 + 7\alpha - 13)f(\alpha)$. Значит, чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе, достаточно умножить его на $4\alpha^2 + 7\alpha - 13$. На это же выражение умножаем числитель и получаем

$$\frac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2} = \frac{(\alpha+2)(4\alpha^2+7\alpha-13)}{(\alpha^2-\alpha+2)(4\alpha^2+7\alpha-13)} = \frac{4\alpha^3+15\alpha^2-5\alpha-26}{-35}.$$

В числителе степень α следует понизить, сделав ее меньше, чем у φ. Для этого разделим с остатком $h(x) = 4x^3 + 15x^2 - 5x - 26$ на $\varphi(x)$. Получим $h(x) = 4\varphi(x) + 15x^2 + 7x - 38$, откуда $h(\alpha) = 15\alpha^2 + 7\alpha - 38$.

Окончательно получаем

$$\frac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2} = \frac{15\alpha^2+7\alpha-38}{-35}.$$

Упражнения

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{2\alpha-3}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

б) $\dfrac{\alpha+3}{2\alpha^2-\alpha+3}$, где $\alpha^3 + 4\alpha + 2 = 0$;

в) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+3}{2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+2}$.

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

a) $\dfrac{\alpha+2}{\alpha^2-2\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

b) $\dfrac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$;

c) $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2-\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

d) $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha-2}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

e) $\dfrac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha+2}$, где $\alpha^3 + 2\alpha - 2 = 0$;

f) $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

g) $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 4\alpha + 2 = 0$;

h) $\dfrac{\alpha+3}{\alpha^2-\alpha+3}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

i) $\dfrac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha-1}$, где $\alpha^3 + 2\alpha + 2 = 0$;

j) $\dfrac{\alpha+4}{\alpha^2-2\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 6\alpha + 3 = 0$.

Глава 9. КОЛЬЦО МНОГОЧЛЕНОВ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

9.1. Многочлены от нескольких переменных

По аналоги с тем как было построено кольцо многочленов от одной переменной можно построить от любого числа переменных.

Пусть K областью целостности с единицей. *Многочленом от нескольких переменных* $x_1, x_2 \dots x_n$ *с коэффициентами из K назовем выражение вида:*

$$\sum_{(k1,k2\dots kn)} a_{k_1,k_2\dots k_n} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \dots x_n{}^{k_n} (1), \qquad a_{k_1,k_2\dots k_n} \in K$$

Пример 1. Многочлен от 3 переменных x_1, x_2, x_3 с коэффициентами из кольца Z:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3^2 + (-2) x_1{}^2 x_2{}^2 x_3{}^2 + 3x_1 x_2 x_3 + (-4)$$

$$A_{3,1,2} = 5, \qquad A_{2,2,2} = -2, \qquad A_{1,1,1} = 3, \qquad A_{0,0,0} = -4$$

Слагаемые называются одночленами а, элементы $a_{k_1,k_2,\dots} \epsilon K$- коэффициенты многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$.

Многочлены $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ *и* $j(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ *назовем равными если для любых значений совокупности индексов коэффициент при* $x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \dots x_n{}^{k_n}$ *многочлена* $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ *равен коэффициенту из* $g(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ *и пишут* $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = g(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$.

Определим сложение и умножение:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{(k_1,k_2\dots k_n)} a_{k_1,k_2\dots k_n} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \dots x_n{}^{k_n}$$

$$g(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{(k_1,k_2\dots k_n)} b_{k_1,k_2\dots k_n} x_1{}^{k_1} x_2{}^{k_2} \dots x_n{}^{k_n}$$

Суммой многочленов от n *переменных с коэффициентами из кольца* K *назовем многочлен вида:*

$$f(x_1,x_2,\dots x_n)+g(x_1,x_2,\dots x_{mn})=\sum_{(k_1,k_2\dots k_n)}(a_{k_1,k_2\dots k_n}+b_{k_1,k_2\dots k_n})x_1{}^{k_1}x_2{}^{k_2}\dots x_n{}^{k_n}$$

Произведением многочленов $f(x_1,x_2,\dots x_n)$ *и* $g(x_1,x_2,\dots x_n)$ *от* n *переменных назовем многочлен вида:*

$$\mathrm{f}(x_1,x_2,\dots x_n)\mathrm{g}(x_1,x_2,\dots x_n)=\sum_{(k_1,k_2\dots k_n)}C_{k_1,k_2\dots k_n}x_1{}^{k_1}x_2{}^{k_2}\dots x_n{}^{k_n}$$

где

$$c_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2\dots\mathrm{k}_n}=\sum\nolimits_{\substack{\mathrm{l}_1,\mathrm{l}_2\dots\mathrm{l}_n\\ 0\le l_i\le k_i}} a_{\mathrm{k}_1,\mathrm{k}_2\dots\mathrm{k}_n}\,b_{\mathrm{k}_1-\mathrm{l}_1,\mathrm{k}_2-\mathrm{l}_2\dots\mathrm{k}_n-\mathrm{l}_n}$$

Пример.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^2+(-2)x_1^2x_2^3x_3^4$$
$$g(x_1,x_2,x_3)=(-1)x_1^2x_2x_3^2+x_1^3x_2^2x_3^4$$
$$a_{1,2,2}=1,\qquad b_{2,1,2}=-1$$

$a_{2,3,4}=-2,\qquad b_{3,2,4}=1$

$F(x_1,x_2,x_3)+g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^2x_3^2+(-2)x_1^2x_2^3x_3^4+(-1)x_1^2x_2x_3^2+x_1^3x_2^2x_3^4$

$a_{1,2,2}b_{2,1,2}=c_{3,3,4}=-1,\qquad a_{1,2,2}b_{3,2,4}=c_{4,4,6}=1,$

$a_{2,3,4}b_{2,1,2}=c_{4,4,6}=2,\qquad a_{2,3,4}b_{3,2,4}=c_{5,5,8}=-2$

$F(x_1,x_2,x_3)g(x_1,x_2,x_3)=x_1^3x_2^3x_3^4+3x_1^4x_2^4x_3^6+(-2)x_1^5x_2^5x_3^8$

Операции над многочленами от n *переменных обладают следующими свойствами:*

1) коммутативность сложения – вытекает из определения сложения многочленов и коммутативности сложения в кольце K.
2) Ассоциативность сложения: свойство вытекает из определения сложения многочленов и из ассоциативности сложения в кольце K.
3) Существование нуля роль нейтрального элемента относительно сложения играет нулевой многочлен –коэффициенты которого есть нули.
4) Существование противоположного элемента многочленом противоположным многочлену f будет многочлен –f коэффициенты которого противоположны соответствующим коэффициентам из f.
5) Ассоциативность умножения свойство вытекает из определения операции умножения и ассоциативности умножения в кольце K.
6) Дистрибутивность умножения относительно сложения.

Множество многочленов от n переменных с коэффициентами из кольца K является кольцом обозначают $K[x_1,x_2,\dots x_n]$.

Многочлены не содержащие переменных то есть состоящие из одного свободного члена отождествляют с элементами кольца K которое является под кольцом кольца многочленов.

7) Коммутативность умножения: коммутативность умножения в кольце многочленов следует из коммутативности умножения одночленов которое вытекает из коммутативности умножения в кольце K.
8) Существование единице роль единице кольца многочленов $K[x_1, x_2, \dots x_n]$ играет многочлен отождествляемый с единицей кольца K.

В результате получаем коммутативное кольцо с единицей.

9.1. Степень многочлена. Лексикографическое упорядочение членов многочлена

Рассматривая многочлены от 1 переменной можно располагать их одночлены в порядке возрастания или убывания степеней x и такое представление единственно можно ли упорядочить члены многочлена от n переменных. *Степенью* одночлена $a_{k_1,k_2,k_3,\dots,k_n} x^{k_1} x^{k_2} \dots x^{k_n}$ назовем число равное $k_1 + k_2 + \cdots k_n$, $\text{ст}(3{x_1}^2 x_2 x_3^4) = 7$

Степенью ненулевого многочлена называется наибольшая степень его одночленов. Многочлен называется *однородным* если все его члены имеют степень m. Сумма однородных многочленов одной степени будет однородным. Произведение однородных многочленов снова однородный многочлен.

Для упорядочения членов многочлена f используют лексикографическое упорядочение которым пользуются при составлении словарей: из двух слов в словаре раньше помещают то у которого первая буква раньше стоит в алфавите а, если первые буквы одинаковы то слово размещают по второй букве и так далее. Пусть даны два одночлена:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = b x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$$

Говорят что, одночлен u старше одночлена v если: $k_1 > l_1$ либо $k_1 = l_1,\ k_2 > l_2$ и так далее и обозначают: $u(x_1, x_2, \dots, x_n) \propto v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - отношение лексикографического упорядочивания.

Пример.

$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = 3x_1^2 x_2^3 x_3^5$

$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 5{x_1}^2 {x_2}^2 x_3^9$

$v(x_1, x_2, \dots, x_n) \propto u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Отношение лексикографического упорядочивания обладает свойствами транзитивности, антисимметричности антирефлективности - отношение строго порядка. Применив лексикографическое упорядочивание к членам от n переменных можно единственным образом расположить так, чтобы лексикографически старшие члены предшествовали младших. Например, лексикографически упорядоченным является

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^3 x_2^2 x_3 - -5x_1^3 x_2 x_3^2 + 4x_1^2 x_2^5 x_3^1 - x_1 {x_2}^{10} x_3 + 5$$

Свойства лексикографического упорядочения:

1) Если $u(x_1,x_2,\dots,x_n) = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$
$v(x_1,x_2,\dots,x_n) = bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$
$w(x_1,x_2,\dots,x_n) = cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$ – не нуливой
$v(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)$
То: $v(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Доказательство. $v(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ то для $x_i \Longrightarrow\ k_i > l_i$
Тогда в произведениях:

$$\left.\begin{array}{r} v \propto w(x_1,x_2,\dots,x_n) \text{ при } k_i \Longrightarrow l_i + m_i \\ u(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n) \text{ при } k_i \Longrightarrow k_i + m_i \end{array}\right\} k_i + m_i > l_i + m_i$$

то по определению лексикографического упорядочения получаем:
$v(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n)$.■

2) Если $v(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и $t(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto w(x_1,x_2,\dots,x_n)$ то $v(x_1,x_2,\dots,x_n)t(x_1,x_2,\dots,x_n) \propto u(x_1,x_2,\dots,x_n)w(x_1,x_2,\dots,x_n)$

Доказательство.

$v \propto u \Longrightarrow vw \propto w$.
По условию
$t \propto w \Longrightarrow$ (по свойству 1), $tv \propto wv \Longrightarrow$ (на основании свойст транзетивности) $vt \propto uw$ ■

Теорема. *Кольцо многочленов* $K[x1,x2..]$ *над областью целостности K само является областью целостности.*

Доказательство.

Докажем что, в кольце $K[x_1 \dots k_n]$ отсутствуют делители нуля. Пусть f , g два многочлена из кольца $K[x_1 \dots k_n]$ и они не нулевые и их старшие члены u v произведение fg равно сумме всевозможных произведений членов f и g в эту сумму войдет произведение ставших членов причем это произведение будет ненулевым произведением, так как коэффициенте у uv из области целостности. Все другие произведения будут младше чем uv. \...\

Итак мы получили среди произведений членов многочленов не будет одночленов подобных uw по этому произведение fg будет содержать лексикографически старший член uv ≠ 0 , fg≠0, $K[x_1 \dots k_n]$ область целостности.■

В процессе доказательства установили: лексикографически старший член произведения равен произведению их лексикографически старших ленов. Степень произведения одночленов равна сумме их степеней.

9.2. Разложение многочлена от n переменных в произведение неприводимых множителей

Рассматривая делимость в кольце многочленов от n переменных будем считать взятыми из поля $P[x_1,\dots,x_n]$.

Многочлен $f \in P[x_1,\dots,x_n]$ *делится на не нулевой многочлен* $g \in P[x_1,\dots,x_n]$ *если существует такой многочлен* $s \in P[x_1,\dots,x_n]$, *что* $f=gs$, $f \vdots g$

Многочлен f $\in P[x_1,\dots,x_n]$ *называется не приводимым над P если ст f ≥1 f=gs, ст g=0 или ст s=0 и делятся на f.*

Многочлен f $\in P[x_1,\dots,x_n]$ *называется приводимым или составным над полем P если ст f≥1 и существуют* $g, s \in P[x_1,\dots,x_n]$, ст $s \geq 1$ и ст $g \geq 1$

Отметим свойства не приводимых многочленов

1) Если $f \in P[x_1,\dots,x_n]$ не приводим над P то и всякий ассоциированный с ним многочлен также не приводим над P.
2) Если *f* и *g* не приводимые над полем P и *f⋮g*, то *f* и *g* ассоциированные.
3) Всякий многочлен *f* из кольца $P[x_1,\dots,x_n]$ степени 1 не приводим над P.

Указанные свойства аналогичны рассмотренных для многочленов от 1 переменной. Основной результат теории делимости заключается в возможности и единственности разложения многочленов на неприводимые множители, остается в силе и в кольце $P[x_1,\dots,x_n]$.

Теорема. Любой многочлен f $\in P[x_1,\dots,x_n]$ ст f≥1 представим произведением не приводимых множителей и это представление единственно с точностью до нулевого члена.

Доказательство.

Доказательство будем вести методом математической индукции.

1) Если ст *f*=1 то f не приводим и разложение представимо всевали одним множителем с точность до постоянного множителя.
2) Пусть теорема верна для любого многочлена *f* такова что ст *f≥1<m*.
3) Докажем истинность утверждения для любого многочлена ст *f =m*.

Если *f* не приводим над P то разложение будет представлено одним множителем, если f приводимый то существуют *g*,*s* $\in P[x_1,\dots,x_n]$ такие, что *f=gs*, ст *g*≥1, ст *s*≥1 и учтем что, ст *g*<ст *f*, ст s<ст *f* по предположению пункта 2 теоремы, для многочленов *g* и *s*, теорема верна. Таким образом мы *f=gs* - представление *f* в виде произведения не приводимых множителей.

Единственность такого разложения доказывается методом от противного.

■

9.3. Симметрические многочлены

Будем рассматривать многочлены над произвольной областью целостности.

$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \in K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ называется симметрическим, если он не меняется при любой перестановке входящих в него переменных $f(x_1,x_2,..x_n) = f(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_n})$ где $(i_1,i_2 \dots i_n)$ –перестановка

Пример.

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$ – симметрический

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$- не симметрический

Структура симметрических многочленов такова, что если сам симметрический многочлен содержит элемент $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, то он также должен содержать многочлен вида $ax_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}\dots,x_{i_n}^{k_n}$ у которых выполнена замена иксов, а индексы образуют перестановку $(i_1,i_2\dots i_n)$ из номеров переменных x. Обозначим сумм различных одночленов, которые получаются из одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}..x_n^{k_n}$, $S(x_1^{k_1}x_2^{k_2}..x_n^{k_n})$. В частности каждый симметрический многочлен является суммой однородных многочленов

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+\cdots$$

Особую роль среди симметрических многочленов играют элементарные симметрические многочлены.

$\sigma_1(x_1,x_2\dots x_n)=x_1+x_2+\cdots+x_n$

$\sigma_2(x_1,x_2\dots x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_nx_1+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$

$\sigma_3(x_1,x_2\dots x_n)=x_1x_2x_3+\cdots$

$\sigma_n(x_1,x_2\dots x_n)=x_1x_2\dots x_n.$

По определению k-ый элементарный симметрический многочлен есть сумм всевозможных произведений по k различных переменных.

Другую важную серию симметрических многочленов составляют степенные суммы:

$$S_k(x_1,x_2\dots x_n)=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$$

Можно показать что, сумма разность и произведение симметрических многочленов также являются симметрическими

Пример.

$f(x_1,x_2\dots x_n),g(x_1,x_2\dots x_n)$–симметрические, $h(x_1,x_2\dots x_n)$ их произведение. Надо показать что он тоже симметрический.

$h(x_1,x_2\dots x_n)=f(x_1,x_2\dots x_n)g(x_1,x_2\dots x_n)=f(x_{i_1},x_{i_2}\dots x_{i_n})g(x_{i_1},x_{i_2}\dots x_{i_n})=$
$h(x_{i_1},x_{i_2}\dots x_{i_n})$

$h(x_1,x_2\dots x_n)$ - симметрический.

Рассмотрим ряд утверждений относительно симметрических многочленов.

Лемма. *Если* $U=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\dots x_n^{k_n}$ *лексико-старший член симметрического многочлена* $f(x_1,x_2\dots x_n)$, *то для последовательности степеней* k_i *выполняется* $k_1\geq k_2\geq\cdots\geq k_n$.

Доказательство.

Пусть u лексикографически старший член. Предположим $\exists k_i\leq k_{i+1}$. По условию f симметрический, тогда по определению симметрического многочлена он вместе с одночленом U содержит одночлен $U`=ax_1^{k_1}\dots.x_{i+1}^{k_i}x_i^{k_{i+1}}\dots x_n^{k_n}$. Исходя из предположения $U\propto U`$, но по условию U старший, т.е. наше предположение привело к противоречию условия леммы. Следовательно наше предположение неверно.■

Лемма. *Для любого одночлена* $\mathrm{U} = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\dots x^{k_n}$ *где* $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_n$, *a≠0 суш шествует многочлен* $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}\dots\sigma_n^{l_n}$ *лексикографически старший член которого совпадает с* U.

Доказательство.

$a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}\dots\sigma_n^{l_n} = a(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{l_1}(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)^{L_2}\dots(x_1x_2\dots x_n)^{L_n}$

Лексикографически старший член многочлена $a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}\dots\sigma_n^{l_n}$ является произведением старших членов элементарных симметричных многочленов с учетом их степеней:

$ax_1^{l_1}(x_1x_2)^{l_2}\dots(x_1x_2\dots x_n)^{l_n} = ax_1^{l_1+l_2+\dots+l_n}x_2^{l_2+l_3+\dots+l_n}x_3^{l_3+l_4+\dots+l_n}\dots x_3^{l_n}$

Найденный лексикографически старший член должен быть равен одночлену U, если

$$\begin{cases} l_1 + l_2 + \dots + l_n = k_1 \\ l_2 + l_3 + \dots + l_n = k_2 \\ \dots \\ l_n = k_n \end{cases}$$

Решение системы получаем в результате вычитания из i-го уравнения i+1 уравнение:

$$\begin{cases} l_1 = k_1 - k_2 \\ l_2 = k_2 - k_3 \\ \dots \\ l_{n-1} = k_{n-1} - k_n \\ l_n = k_n \end{cases}$$

Такое решение единственно и учитывая что, $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_n$, $L_1 \dots l_n$ - целые не отрицательные числа а, следовательно могут быть показателями степеней. И так симметрический многочлен:

$$a\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}\dots\sigma_n^{l_n} = a\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\sigma_3^{k_3-k_4}\dots\sigma_n^{k_n} = h(x_{i_1}, x_{i_2}\dots x_{i_n})$$

и лексикографически старший член ее совпадает с U(он единственен, что идет из единственности решения системы). ■

Доказанные леммы позволяют рассмотреть основную теорему о симметрических многочленах.

9.4. Основная теорема о симметрических многочленах

Теорема. *Любой симметрический многочлен* $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ *может быть представлен в виде многочлена от элементарных симметрических.* $f(x_1, x_2, \dots x_n) = F(\sigma_1, \dots \sigma_n)$.

Доказательство.

Пусть *f* произвольный симметрический многочлен, если *f* =0, то *F*=0, если *f*≠0, то ⇒ он содержит лексикографически старший член $\mathrm{U} = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}\dots x_n^{k_n}$, для которого выполняются условия лемм. Составим разность $f(x_1, x_2\dots x_n) - h_1(\sigma_1, \dots \sigma_n) = f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$,если $f_1 = 0$, то $f = h_1$,если $f_1 \ne 0$, то его лексикографически старший член U_1 такой, что $U_1 \propto U$. Для члена U_1 выполняются условия лемм, а следовательно, существует h_2, лексикографически старший член которого совпадает с U_1.

Рассмотрим разность:

$f_1(x_1,..x_n) - h_2(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = f(x_1,..x_n) - h_1(\sigma_1,\dots,\sigma_n) - h_2(\sigma_1,\dots,\sigma_n) = f_2(x_1,..x_n)$

Если ,$f_2 = 0$ то $f = h_1 + h_2$

После конечного числа шагов построим многочлены $f_1\ f_2\ f_3 \dots f_n$ старшие, члены которых удовлетворяют условию $U_n \propto \dots \propto U_3 \propto U_2 \propto U_3 \propto U_1$.Описанный процесс конечен, потому что на конечном шаге получится нулевой, из этого соотношения следует, что показатели степеней переменной x_1 в одночленах $U, U_1, U_2, \dots$, образуют невозрастающую последовательность. Так как все они неотрицательны, то найдется такой номер m_1, что для всех $m \geq m_1$ показатель степени переменной x_1 в одночлене U_m один и тоже и при лексикографическом сравнение показатель степени x_1 уже не будет играть роли и нужно сравнивать показатели переменной x_2. А показатели степеней x_2 в этих одночленах также образуют невозрастающую последовательность и, начиная с некоторого номера m_2, для всех $m \geq m_2$ показатели x_2 также будут равны между собой.

Таким образом, продолжая это рассуждение, найдем такой номер m_n для x_n,что для всех $m \geq m_n$ все соответствующее показатели одночленов равны и при этом условии лексикографически старший член $U_{m+1} \propto U_m$ выразится не может, а это значит $f_{m+1} = 0$. По построению многочленов мы будем иметь

$$f_{m+1} = f - h_1 - h_2 - \dots - h_{m+1} = 0,\ f = h_1 + h_2 + \dots + h_{m+1} = F(\sigma_1, \dots \sigma_n). \qquad \blacksquare$$

Пример.

Представить симметрический многочлен

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$ в виде многочлена $F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$.

Лексикографически старший член многочлена f - x_1^3 составим всевозможные наборы показателей $k_1\ k_2\ k_3$ которые удовлетворяют следующим условиям

1) $k_1 \geq k_2 \geq k_3$

2) $K_1 + k_2 + k_3 \leq 3$

3) $Cx_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3} \propto x_1^3$

K_1	K_2	K_3	$\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\sigma_3^{k_3}$
3	0	0	$\sigma_1^{3-0}\sigma_2^{0-0}\sigma_3^0 = \sigma_1^3$
2	1	0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0 = \sigma_1\sigma_2$
1	1	1	σ_3

x_1	x_2	x_3	f	$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$	$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$	$\sigma_3 = x_1x_2x_3$	F
1	1	1	0	3	3	1	27+9 a +1b
1	1	0	2	2	1	0	8+2a+0b

$F(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \sigma_1^3 + a\sigma_1\sigma_2 + b\sigma_3$

$$\begin{cases} 9a + b + 27 = 0 \\ 2a + 8 = 2 \end{cases}$$

$a = -3$
$b = 0$
$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$
Проверка:
$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

Теорема единственности. Пусть $U(\sigma_1, \dots \dots \sigma_m) = a\sigma_1 \dots \sigma_n^{L_n}$,
$V(\sigma_1, \dots \dots \sigma_m) = b\sigma_1 \dots \sigma_n^{m_n}$

Если старшие члены U и V пропорциональны то соответствующие показатели степеней $l_i = m_i$.

Доказательство.

Пусть лексикографически старший член U имеет вид $ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots . x_n^{k_n}$,тогда по Л2§4 $l_1 = k_1 - k_2, l_2 = k_2 - k_3, \dots, l_n = k_n(1)$. Так как многочлен V ассоциирован с U то их старшие члены отличаются только числовыми коэффициентами $\Rightarrow m_1 = k_1 - k_2, \dots, M_n = k_n \Rightarrow l_1 = m_1 \dots . l_N = m_n$. ■

Теорема. Всякий симметрический многочлен $f(x_1,x_2, \dots x_n)$ единственным образом представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

Доказательство.

Пусть для многочлена $f(x_1,x_2, \dots x_n)$ существует 2 различных многочлена $F(\sigma_1 \dots \sigma_n), G(\sigma_1 \dots \sigma_n)$
$f(x_1,x_2, \dots x_n)$ $=F(\sigma_1 \dots \sigma_n)$
$f(\sigma_1 \dots \sigma_n)=G(\sigma_1 \dots \sigma_n)$
$F \neq G$

Рассмотрим многочлен $H(\sigma_1 \dots \sigma_n)=F(\sigma_1 \dots \sigma_n)-G(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ $H(\sigma_1 \dots \sigma_n) \neq 0$
Пусть $U_1, \dots, U_s$ все члены многочлена H. Где $u_1 \dots, u_s$-старшие члены $U_1, \dots, U_s$ соответственно, среди них ассоциированных не будет. Выберем из $u_1 \dots, u_s$ лексикографически старший пусть например им будет u_1. После приведения подобных членов в сумме $U_1(\sigma_1 \dots \sigma_n) + \dots + U_s(\sigma_1 \dots \sigma_n)$, если u_1 сохранится, то эта сумма равна нулю быть не может, таким образом, с одной стороны H равен 0, а, с другой стороны, не равен, пришли к противоречию.■

9.5. Результант двух многочленов

Алгоритм Евклида позволяет найти НОД и НОК двух многочленов и в частности выяснить, являются ли они взаимно простыми. Однако в явном виде алгоритм Евклида не дает условия, которому должны удовлетворять коэффициенты многочленов, чтобы они были (не были) взаимно простыми. Поставим задачу, найти соотношение между коэффициентами многочленов, выполнение которого было необходимо и достаточно, чтобы многочлены не были взаимно простыми.

Пусть $f(x), g(x) \epsilon P[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x^1 + a_n$
$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x^1 + b_m$, $a_i, b_j \epsilon P \neq 0$, $\quad i = \overline{0,n}\ j = \overline{0,m}$

Найдем $[f,g] = \frac{f(x)g(x)}{(f(x)g(x))}$. Если они взаимно простыми, то их НОД= 1и ст $[f,g] =$ ст $fg = n + m$. Если они не взаимно просты, то НОД$\neq$ 1 и ст$[f,g]$<ст fg. Введем обозначения $h(x)=[f,g]$ тогда

$h(x) \vdots f(x) \to \exists u(x) \to h(x) = f(x)u(x) \to$
ст $h(x) =$ ст $f(x) +$ ст $u(x) = n +$ ст $u(x) < n + m \to$ ст $u(x) < m =$ ст $g(x)$
$h(x) \vdots g(x) \to \exists v(x) \to h(x) = g(x)v(x) \to$
ст $h(x) =$ ст $g(x) +$ ст $v(x) = m +$ ст $v(x) < n + m \to$ ст $v(x) < n =$ ст $f(x)$

f g не являются взаимно простыми → существуют многочлен $U(x), V(x)$, что ст $U(x) <$ ст $g(x)$ и ст $V(x) <$ ст $f(x)$. Выясним, когда такие многочлены существуют. Запишем многочлены:

$U(x) = U_1x^{M-1} + \cdots + U_{m-1}x + U_m$
$V(x) = V_1x^{n-1} + \cdots + V_{N-1}x + V_n$

Подставим многочлены в равенство $fU = gV$, получим:

$$a_0U_1x^{n+m-1} + (a_0U_2 + a_1U_1)x^{n+m-2} + (a_2U_1 + a_1U_2 + a_0U_3)x^{n+m-3} + \cdots + a_nU_m$$
$$= b_0V_1x^{n+m-1} + (b_0V_2 + b_1V_1)x^{n+m-2} + \cdots + b_mV_n$$

На основании определения равенства многочленов приравниваем их соответствующие коэффициенты (таких равенств будет m+n).

$$\begin{cases} U_0\ U_1 = b_0V_1 \\ a_1U_1 + a_0U_2 = b_1V_1 + b_0V_2 \\ \dots \\ a_nU_m = b_mV_n \end{cases} \left| \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & -b_1 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_m \end{pmatrix} \right.$$

Эта система имеет ненулевое решение если определитель равен 0. Для удобства умножим на -1 и транспонируем и его. Этот определитель называют результантом 2 многочленов.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{vmatrix}$$

Теорема. Многочлены $f,g \in P[x]$ не являются взаимно простыми, когда их результант равен 0.

Результант многочленов может быть применен не только для установления взаимной простоты многочленов, но и для решения других задач, например, для исключения переменной из системы 2 алгебраических уравнений с 2 неизвестными.

Системой из m алгебраических уровней с n переменными называется система:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2 \dots x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2 \dots x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2 \dots x_n) = 0 \end{cases}; f_1, \dots f_n \epsilon P[x_1, \dots x_n] (1)$$

Системой 2 алгебраических уравнений с 2 неизвестными называют:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}; \ f, \varphi \epsilon P[x, y] (2)$$

Запишем систему (2) в развернутом виде представив f и φ как многочлены от одной переменной x из кольца P[y]

$$\begin{cases} a_0(y)x^n + a_1(y)x^{k-1} + \dots + a_{n-1}(y)x + a_n(y) = 0 \\ b_0(y)x^n + b_1(y)x^{k-1} + \dots + b_{n-1}(y)x + b_n(y) = 0 \end{cases}; (2`)$$

Положив $y = y_0$ получим, что левые части уравнений будут обычными многочленами одной переменной x с коэффициентами из поля P. Эти многочлены не будут взаимно простыми, т.е. они будут иметь общие корни, а, следовательно, и система будет иметь решение, если их результант =0: $\mathrm{R(F, \varphi)} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_0(y_0) & a_1(y_0) & a_2(y_0) & \dots & a_{n-1}(y_0) & a_n(y_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0(y_0) & a_1(y_0) & \dots & a_{n-2}(y_0) & a_{n-1}(y_0) & a_n(y_0) & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0(y_0) & a_1(y_0) & a_2(y_0) & \dots & a_n(y_0) \\ b_0(y_0) & b_1(y_0) & b_2(y_0) & \dots & b_{m-1}(y_0) & b_m(y_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0(y_0) & b_1(y_0) & \dots & b_{m-2}(y_0) & b_{m-1}(y_0) & b_m(y_0) & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0(y_0) & b_1(y_0) & b_2(y_0) & \dots & b_m(y_0) \end{vmatrix} = 0$$

Подставив $\mathrm{y_0}$ в (2’), получаем решение $\mathrm{x_0}$ и общее решение $(\mathrm{x_0, y_0})$ такие, что при их подстановке наши 2 уравнения системы (2) обращаются в 0. Применение результанта позволило исключит одну неизвестную.

Пример. Исключить переменную x и найти решение:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases}, \begin{cases} x^2 + (-y)x + (y^2 - 3) = 0 \\ (y)x^2(y^2)x + (-6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -y & (y^2-3) & 0 \\ 0 & 1 & -y & (y^2-3) \\ y & y^2 & -6 & 0 \\ 0 & y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -y & (y^2-3) & 0 \\ 0 & 1 & -y & (y^2-3) \\ 0 & 2y^2 & (-y^3+3y-6) & 0 \\ 0 & y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -y & (y^2-3) \\ 2y^2 & (-y^3+3y-6) & 0 \\ y & y^2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$y^6 - 4y^4 + 3y^2 - 12y + 12 = 0$

$y_0 = 1$

$$\begin{cases} x^2 + (-1)x + (-2) = 0 \\ x^2 + x + (-6) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-3\end{array}\right.\end{cases};x=2$$

(2,1)

Упражнения

1. Являются ли симметрическими многочлены:

   а) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3+x_2^2x_3+x_2x_3^2+x_3x_1$;

   б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_1$?

2. Выразить данные симметрические многочлены через элементарные симметрические многочлены:

а) $x_1^4+x_2^4+x_3^4-x_2^2x_3^2-x_2^2x_3^2-x_1^2x_2^2$;

б) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

в) $(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)$.

2. Вычислить значение $S(x_1^3x_2^3)$ от корней уравнения $x^4-2x^3-2x^2-2x-2=0$.

3. Вычислить результант многочленов:

$$a)\ 3x^2-x-2,\quad x^2-2x-2;\quad b)\ x^3-3x+6,\quad x^3+x^2-x-1.$$

4. С помощью результанта найти значение параметра p, с которым многочлены x^3+px+1 и x^2+px+1 имеют общий корень.

5. Найти дискриминант многочлена:

$a)x^3-2x^2-4x+6;\quad b)x^4+px+q.$

6. Исключить x из системы уравнений: $\begin{cases}x^2-3xy+y^2=2,\\2x^2-xy+3y^2=1.\end{cases}$

7. С помощью результанта решить системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases}2x^2+10xy+13y^2-2x-4y+1=0;\\x^2+2xy-y^2-4x-8y-1=0;\end{cases}\quad b)\ \begin{cases}x^3-4x^2+6x-3xy^2+4y^2-4=0;\\y^3-3x^2y+8xy-6y=0.\end{cases}$$

Индивидуальные задания

1. Вычислить, используя свойства определителя.

Вар	Определитель	Вар	Определитель	Вар	Определитель
1	$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & -4 & -8 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 10 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 6 & -8 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 7 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & -6 & 2 & -6 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 10 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 7 & 4 & -2 & 10 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & 2 & 1 & 9 \\ -5 & 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 7 & -2 & -3 & 3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -0 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -7 & -8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -9 & 1 & -15 \\ -2 & 4 & -8 & 5 \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & -4 & -3 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -4 & -2 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & -6 & 1 & -3 \\ -7 & 2 & -5 & -9 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 & 1 \\ -5 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & -6 & 1 & -1 \\ -7 & 2 & -4 & -9 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 & 15 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 3 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 4 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -2 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -10 & 3 & 1 & -6 \\ -5 & -5 & 3 & -6 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 0 & -7 \\ -6 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -8 & 0 & -9 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 9 & 16 \\ -7 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & 8 & -1 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 6 & -6 & -4 & -3 \\ -7 & 1 & 0 & -6 \\ -11 & -8 & 1 & -18 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 10 & 1 & 0 & -9 \\ 7 & 4 & 1 & -2 \\ 6 & -2 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 & 8 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -7 & 4 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -4 & -4 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 & 1 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -9 & 5 & 1 & -3 \\ -8 & -7 & 3 & -11 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} -1 & -3 & 8 & 5 \\ -12 & 1 & 0 & -11 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ -9 & -7 & 7 & -8 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 7 & 21 \\ -10 & 1 & 0 & -9 \\ -8 & 8 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 7 & 12 \\ -17 & 1 & 0 & -16 \\ -5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 15 \\ -16 & 1 & 0 & -15 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 7 & -1 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 10 & 18 \\ -13 & 1 & 0 & -12 \\ -7 & 7 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 9 & 0 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 8 & 20 \\ -20 & 1 & 0 & -19 \\ -11 & 9 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы

Вар	Система уравнений	Вар	Система уравнений
1	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$	2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$	8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = 3 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

19	$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3 = 1 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = -5 \end{cases}$	20	$\begin{cases} 4x_1+7x_2+3x_3 = 1 \\ x_1-2x_2-x_3 = 2 \\ 2x_1+x_2-x_3 = 3 \end{cases}$
21	$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3 = 0 \\ x_1-3x_2+x_3 = 3 \\ 3x_1-x_2-5x_3 = 1 \end{cases}$	22	$\begin{cases} 5x_1-2x_2-x_3 = -4 \\ 2x_1+3x_2-x_3 = 1 \\ x_1-4x_2+2x_3 = 0 \end{cases}$
23	$\begin{cases} x_2-x_3 = 2 \\ 3x_1-x_2-2x_3 = 1 \\ x_1+2x_2-5x_3 = 3 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3 = 4 \\ x_1-x_2+5x_3 = 0 \\ 3x_1-2x_2+x_3 = 1 \end{cases}$
25	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3 = 0 \\ 5x_1-2x_2+x_3 = 2 \\ 3x_1+x_2-4x_3 = 1 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1-x_2+7x_3 = 0 \\ x_1+3x_2-5x_3 = 7 \\ x_1-x_2+4x_3 = -1 \end{cases}$
27	$\begin{cases} 7x_1-2x_2-3x_3 = 1 \\ x_1+3x_2+x_3 = 3 \\ 2x_1-x_2-x_3 = 0 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3x_1-x_2-5x_3 = 0 \\ x_1+2x_2+2x_3 = -1 \\ 2x_1+x_2+x_3 = 1 \end{cases}$
29	$\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 = 3 \\ x_1+x_2+4x_3 = -1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3 = 0 \\ 5x_1-x_2-14x_3 = 1 \\ x_1+5x_2-2x_3 = 1 \end{cases}$

3. Выбрать пары матриц, которые можно перемножить, и выполнить умножение.

Вар.	Матрицы
1	$A=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4	$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$
6	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
8	$A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$
10	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$
12	$A=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$
14	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

15	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$
16	$A=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&3&1&6\\0&1&6&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&2&0&6\end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix}0&1\\7&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&0&1&7\\0&2&7&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-1&1\\7&7\end{pmatrix}$
18	$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&8\\-1&1&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0&8\\0&2&0&9\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&\text{ë}1\\-1&8\\-8&1\end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix}1&0&9&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&9&1&9\\0&2&0&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}9\\-9\\0\\1\end{pmatrix}$
20	$A=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2&0&1\\2&0&1&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-3&3&0&2\end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2&1&0\\2&1&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&2\end{pmatrix}$
22	$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&1&1\\-2&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&2\\-2&2\\0&-1\end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix}3&2&1&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&3&2&3\\0&2&3&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\\2\end{pmatrix}$
24	$A=\begin{pmatrix}2\\4\\0\\2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3&4&0&-4\\2&2&4&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&4&0&2\end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix}0&2\\5&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&2&5&5\\0&-2&0&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&2\\5&5\end{pmatrix}$

26	$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\0&2&6\\-6&6&-1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2&0&6\\2&6&2&6\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&1\\-2&6\\6&2\end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix}1&0&2&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\1\end{pmatrix}$
28	$A=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\8\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2&0&8\\2&8&0&8\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&3&0&8\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}2&9\\1&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&2&9&0\\2&9&9&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-9\end{pmatrix}$
30	$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&0\\0&3&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&-3\\0&3&0&3\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&3\\-3&0\\0&1\end{pmatrix}$

4. Решить матричное уравнение.

Вар.	Уравнение
1	$X\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$
2	$2\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}6&5\\-1&-1\end{pmatrix}\cdot X$
3	$\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2&1\\1&1.\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}2&2\\-1&1\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}6&5\\-1&1\end{pmatrix}$
5	$X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}1&7\\4&2\end{pmatrix}$
6	$X\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\2&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\1&-1\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$

7	$6\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&7\\5&-5\end{pmatrix}\cdot X=5\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}4&5\\-2&-2\end{pmatrix}\cdot X$
8	$6\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}3&3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&4\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\5&7\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}7&6\\6&6\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3&3\\-2&2\end{pmatrix}^T-4\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}8&7\\-3&3\end{pmatrix}$
10	$X\cdot\begin{pmatrix}0&7\\0&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\-4&-4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2&2\\-3&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&7\\4&2\end{pmatrix}$
11	$X\cdot\begin{pmatrix}9&-8\\1&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&5\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\5&-5\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}2&2\\0&-1\end{pmatrix}$
12	$5\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&9\\8&7\end{pmatrix}\cdot X=5\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}5&6\\1&1\end{pmatrix}\cdot X$
13	$5\begin{pmatrix}2&2\\0&-2\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}7&7\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-5\\5&9\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\10&-9\end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix}6&5\\5&5\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3&3\\-4&4\end{pmatrix}^T-5\begin{pmatrix}10&9\\6&0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}9&8\\7&-7\end{pmatrix}$
15	$X\cdot\begin{pmatrix}0&6\\0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3\\-4&-4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}5&5\\-5&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&9\\6&4\end{pmatrix}$
16	$X\cdot\begin{pmatrix}10&-9\\7&8\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&6\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&2\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}4&4\\0&-4\end{pmatrix}$
17	$7\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&5\\1&-1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}4&0\\4&-4\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}9&8\\-7&-7\end{pmatrix}\cdot X$
18	$6\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}5&-5\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-6\\6&9\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0&0\\8&9\end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}6&6\\-7&7\end{pmatrix}^T-4\begin{pmatrix}8&8\\8&7\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1&1\\-6&5\end{pmatrix}$
20	$X\cdot\begin{pmatrix}0&5\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&6\\-5&-5\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}2&7\\9&8\end{pmatrix}$
21	$X\cdot\begin{pmatrix}10&-9\\9&7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&8\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}^T+3X\cdot\begin{pmatrix}0&2\\2&-3\end{pmatrix}$

22	$3\begin{pmatrix}4 & 0\\ 5 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & -6\end{pmatrix}\cdot X=4\begin{pmatrix}5 & 0\\ 5 & -5\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}6 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}\cdot X$
23	$4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}6 & 6\\ -5 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0 & 0\\ 5 & 4\end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}^T-6\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 7 & 6\end{pmatrix}$
25	$X\cdot\begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}7 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}$
26	$X\cdot\begin{pmatrix}6 & -5\\ 5 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 6\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}^T+2X\cdot\begin{pmatrix}3 & 3\\ 0 & -3\end{pmatrix}$
27	$4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot X=3\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}^T-\begin{pmatrix}17 & 5\\ -11 & -11\end{pmatrix}\cdot X$
28	$5\begin{pmatrix}0 & 12\\ 0 & -12\end{pmatrix}^T-X\cdot\begin{pmatrix}10 & 11\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}^T+X\begin{pmatrix}0 & 0\\ 21 & 22\end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix}12 & 9\\ 9 & 9\end{pmatrix}\cdot X\cdot(\begin{pmatrix}10 & 10\\ -1 & -1\end{pmatrix}^T-3\begin{pmatrix}6 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}16 & 51\\ -1 & 1\end{pmatrix}$
30	$X\cdot\begin{pmatrix}0 & 11\\ 0 & 21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}10 & 7\\ -7 & 0\end{pmatrix}-X\begin{pmatrix}21 & 7\\ 42 & 12\end{pmatrix}$

5.Найти ранг матрицы

Вар.	Матрица	Вар.	Матрица
1	$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 5\\ 4 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}0 & 4 & 10 & 1\\ 4 & -1 & 2 & 0\\ 10 & -3 & 7 & 1\\ 1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 1 & 0 & 3\\ -3 & 1 & 4 & 2 & 5\\ 1 & 5 & 8 & 6 & 9\end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 5\\ 4 & 1 & 4\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5\\ -1 & 0 & -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix}4 & 1 & 0 & -3 & 2\\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 5 & 3\\ 3 & -1 & -5\end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 & 2 \\ -7 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ -7 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

29	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$

6. Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

№	Система уравнений	№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} 8x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 47 \\ 5x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 51 \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 48 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 15 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 35 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 9x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 8 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 7x_3 = -47 \\ 4x_1 + x_2 - 8x_3 = -49 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 = -20 \end{cases}$	5	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 15 \\ 8x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 65 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = 30 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 11 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 9x_3 = -33 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 65 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 21 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 44 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 27 \\ 7x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 28 \end{cases}$

7. Проверить, образуют ли векторы e_1, e_2, e_3 ортогональный базис, и найти разложение вектора *X* по этому базису.

Вар	Векторы	Вар	Векторы
1	e_1=(1, 1, 0), e_2=(3, -3, 4), e_3=(-2, 2, 3), X=(1, 2, 3).	2	e_1=(1, -1, 1), e_2=(3, 3, 0), e_3=(1, -1, -2), X=(-1, -2, -3).
3	e_1=(2, 1, -2), e_2=(-1, 4, 1), e_3=(1, 0, 1), X=(1, 2, 3).	4	e_1=(1, -2, 0), e_2=(0, 0, 4), e_3=(2, 1, 0), X=(-1, -2, 0).
5	e_1=(2, 3, 5), e_2=(2, -3, 1), e_3=(-9, -4, 6), X=(1, 2, 3).	6	e_1=(1, 4, 3), e_2=(2, 1, 5), e_3=(3, 4, 2), X=(6, 9, 10).
7	e_1=(3, 1, 2), e_2=(4, 5, 3), e_3=(2, 2, 4), X=(1, 2, 3).	8	e_1=(1, 3, 2), e_2=(1, 1, 1), e_3=(2, 5, 2), X=(2, 14, 5).
9	e_1=(1, 2, 4), e_2=(1, -1, 1), e_3=(1, 1, 4), X=(1, -5, -2).	10	e_1=(1, 2, 4), e_2=(3, 6, 8), e_3=(2, 1, -1), X=(4, 2, 2).
11	e_1=(2, 3, 4), e_2=(4, 6, -1), e_3=(1, 2, -3), X=(4, 4, 1).	12	e_1=(2, 3, 4), e_2=(4, 6, -1), e_3=(1, 2, -3), X=(4, 4, 1).
13	e_1=(-1, 2, -3), e_2=(2, -1, 2), e_3=(-1, 2, -2), X=(4, 1, 4).	14	e_1=(2, -2, 1), e_2=(-1, 3, 1), e_3=(4, -1, -2), X=(-1, 11, 7).
15	e_1=(-3, 2, 1), e_2=(3, -2, 1), e_3=(-3, 2, -1), X=(-6, 12, -4).	16	e_1=(-2, 1, 0), e_2=(2, -2, 3), e_3=(1, 4, 2), X=(13, 4, 15).
17	e_1=(-1, 2, -3), e_2=(2, -1, 2), e_3=(3, 4, -2), X=(4, 1, 4).	18	e_1=(2, -2, 1), e_2=(-1, 3, 1), e_3=(4, -1, -2), X=(-1, 11, 7).

19	$e_1=(-1, 1, 3)$, $e_2=(-1, 2, 4)$, $e_3=(-1, 4, -1)$, $X=(-8, 14, 9)$.	20	$e_1=(1, 3, 4)$, $e_2=(-2, 2, -3)$, $e_3=(3, -1, 2)$, $X=(2, -6, -7)$.
21	$e_1=(1, 1, -2)$, $e_2=(3, -1, 1)$, $e_3=(1, -1, 2)$, $X=(9, 1, -5)$.	22	$e_1=(0, -2, 1)$, $e_2=(2, -2, -1)$, $e_3=(-2, 3, 2)$, $X=(-4, -23, 1)$.
23	$e_1=(3, 2, -1)$, $e_2=(1, -1, 1)$, $e_3=(2, 4, 1)$, $X=(-4, -3, 1)$.	24	$e_1=(4, -2, 0)$, $e_2=(-1, 2, -2)$, $e_3=(2, 3, 1)$, $X=(10, 14, 0)$.
25	$e_1=(3, -2, -1)$, $e_2=(4, 2, 1)$, $e_3=(1, -1, 3)$, $X=(9, 4, -5)$.	26	$e_1=(2, 0, -3)$, $e_2=(5, -1, 2)$, $e_3=(1, -1, 2)$, $X=(-1, 3, -9)$.
27	$E_1=(-6, -3, -2)$, $e_2=(5, -1, 2)$, $e_3=(1, 2, -1)$, $X=(-8, -1, 3)$.	28	$e_1=(2, 1, 1)$, $e_2=(-2, 3, 2)$, $e_3=(1, 1, -2)$, $X=(14, 0, 7)$.
29	$e_1=(1, 1,-2)$, $e_2=(3, -1, 1)$, $e_3=(1, -1, 2)$, $X=(9, 1, -5)$.	30	$e_1=(1, 3, 4)$, $e_2=(-2, 2, -3)$, $e_3=(3, -1, 2)$, $X=(2, -6, -7)$.

8. Определить, является ли система векторов линейно зависимой.

Вар.	Векторы	Вар	Векторы
1	$X_1=(-1, 1,1)$, $X_2=(4, 1,-2)$, $X_3=(0, -1, 2)$.	2	$X_1=(1,-1, 2)$, $X_2=(3, -1, -8)$, $X_3=(-1, 0,5)$.
3	$X_1=(2, 1,0)$, $X_2=(-5, 0, 5)$, $X_3=(1, 4, 3)$	4	$X_1=(5, 3, 0)$, $X_2=(-1, -6, -1)$, $X_3=(0,-1, 1)$
5	$X_1=(5, -6,1)$, $X_2=(3,-5, -3)$, $X_3=(0, -1, 3)$	6	$X_1=(6, 3, 1)$, $X_2=(0, -3, 0)$, $X_3=(-3, -2, 0)$
7	$X_1=(-6\ -2, 1)$, $X_2=(3, -2, 1)$, $X_3=(0, 0, 3)$	8	$X_1=(3,-1 ,2)$, $X_2=(-2,2 ,-3)$, $X_3=(1,3,4)$.
9	$X_1=(5,-1 ,1)$, $X_2=(5,3 ,2)$, $X_3=(9,-1 ,2)$.	10	$X_1=(2,5 ,2)$, $X_2=(1,1 ,1)$, $X_3=(1,3 ,2)$.
11	$X_1=(1,1 ,0)$, $X_2=(-1,2 ,0)$, $X_3=(0,3 ,-3)$.	12	$X_1=(-1,2 ,-1)$, $X_2=(0,2 ,-1)$, $X_3=(1,2 ,2)$.
13	$X_1=(2,0 ,-1)$, $X_2=(3,1,-3)$, $X_3=(1,-1 ,0)$.	14	$X_1=(0,2 ,-1)$, $X_2=(3,1 ,2)$, $X_3=(1,2 ,1)$.
15	$X_1=(-2,-7,6)$, $X_2=(-4,4 ,4)$, $X_3=(0,-2 ,3)$	16	$X_1=(1,-2 ,3)$, $X_2=(5,-3 ,4)$, $X_3=(2,1 ,-2)$
17	$X_1=(-7,0 ,7)$, $X_2=(1,3 ,1)$, $X_3=(-2,1 ,-1)$	18	$X_1=(1,-1 ,0)$, $X_2=(0,2 ,-1)$, $X_3=(0,2 ,0)$.
19	$X_1=(8,0,-3)$, $X_2=(-1,-1 ,2)$, $X_3=(7,-1,-1)$	20	$X_1=(1,-1 ,2)$, $X_2=(4,-7 ,12)$, $X_3=(-1,3,1)$
21	$X_1=(1,2 ,1)$, $X_2=(2,-1 ,-1)$, $X_3=(1,1 ,2)$.	22	$X_1=(-3,-1 ,3)$, $X_2=(1,1 ,-1)$, $X_3=(-2,-1,2)$
23	$X_1=(1,-1 ,4)$, $X_2=(3,3 ,-6)$, $X_3=(2,1 ,-1)$	24	$X_1=(-1,-2 ,1)$, $X_2=(4,-1 ,1)$, $X_3=(2,0 ,2)$
25	$X_1=(-3,-4 ,-7)$, $X_2=(1,-2 ,3)$, $X_3=(2,2 ,2)$	26	$X_1=(0,-2 ,8)$, $X_2=(-1,2 ,-1)$, $X_3=(3,2 ,-1)$
27	$X_1=(1,3 ,3)$, $X_2=(2,3 ,-2)$, $X_3=(0,-8 ,-1)$	28	$X_1=(10,15 ,2)$, $X_2=(9,10 ,12)$, $X_3=(2,4,4)$

29	$X_1=(2,3\ \ ,2\ \ ),\ X_2=(2,2\ \ ,3\ \ ),$ $X_3=(-4,-3\ ,-7)$	30	$X_1=(1,3\ \ ,3\ \ ),\ X_2=(2,4\ \ ,1\ \ ),$ $X_3=(1,2\ ,3\ )$.

9. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

№	Система уравнений	№	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1+7x_2+2x_3+24x_4+17x_5=0 \\ 3x_1+6x_2+3x_3+24x_4+30x_5=0 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+15x_4+23x_5=0 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 3x_1+6x_2+7x_3+48x_4+53x_5=0 \\ 6x_1+3x_2+2x_3+42x_4+28x_5=0 \\ 3x_1+4x_2+2x_3+29x_4+31x_5=0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 8x_1+7x_2+x_3+73x_4+70x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+5x_3+43x_4+28x_5=0 \\ x_1+5x_2+x_3+30x_4+27x_5=0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 6x_1+8x_2+2x_3+68x_4+56x_5=0 \\ 6x_1+3x_2+x_3+42x_4+40x_5=0 \\ 7x_1+4x_2+8x_3+92x_4+55x_5=0 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 6x_1+2x_2+2x_3+18x_4+42x_5=0 \\ 8x_1+7x_2+5x_3+46x_4+65x_5=0 \\ 7x_1+6x_2+3x_3+37x_4+54x_5=0 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3+15x_4+15x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+32x_4+24x_5=0 \\ 2x_1+5x_2+6x_3+21x_4+37x_5=0 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 4x_1+6x_2+4x_3+36x_4+40x_5=0 \\ 3x_1+7x_2+7x_3+52x_4+48x_5=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+9x_4+10x_5=0 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x_1+6x_2+6x_3+60x_4+72x_5=0 \\ 8x_1+3x_2+4x_3+59x_4+68x_5=0 \\ 3x_1+7x_2+6x_3+65x_4+76x_5=0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3+31x_4+27x_5=0 \\ 5x_1+6x_2+x_3+47x_4+47x_5=0 \\ 8x_1+7x_2+6x_3+92x_4+85x_5=0 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 3x_1+2x_2+8x_3+21x_4+50x_5=0 \\ 3x_1+x_2+x_3+9x_4+16x_5=0 \\ 7x_1+5x_2+6x_3+38x_4+68x_5=0 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 3x_1+3x_2+4x_3+33x_4+37x_5=0, \\ x_1+7x_2+7x_3+64x_4+65x_5=0 \\ 2x_1+8x_2+4x_3+62x_4+60x_5=0 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3+43x_4+35x_5=0 \\ 2x_1+2x_2+6x_3+40x_4+42x_5=0 \\ 8x_1+6x_2+6x_3+68x_4+56x_5=0 \end{cases}$

10. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

№	Матрица A	№	Матрица A	№	Матрица A
1	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

10	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. Привести квадратичную форму L(x,y) к каноническому виду.

№	Уравнение
1	$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2+\left(32-8\sqrt{3}\right)x-\left(8+32\sqrt{3}\right)y+64=0$
2	$x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+\left(32+8\sqrt{3}\right)x+\left(8-32\sqrt{3}\right)y+64=0$
3	$x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(8-8\sqrt{3}\right)x-\left(8+8\sqrt{3}\right)y+48=0$
4	$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2+\left(32\sqrt{3}-8\right)x-\left(8\sqrt{3}+32\right)y+64=0$
5	$11x^2-10\sqrt{3}xy+y^2+\left(32\sqrt{3}+8\right)x+\left(8\sqrt{3}-32\right)y+64=0$
6	$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+\left(8\sqrt{3}-8\right)x-\left(8\sqrt{3}+8\right)y+48=0$
7	$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2+\left(32+8\sqrt{3}\right)x+\left(8-32\sqrt{3}\right)y+64=0$
8	$x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+\left(32-8\sqrt{3}\right)x-\left(8+32\sqrt{3}\right)y+64=0$
9	$x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(8+8\sqrt{3}\right)x+\left(8-8\sqrt{3}\right)y+48=0$
10	$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2+\left(32\sqrt{3}+8\right)x+\left(8\sqrt{3}-32\right)y+64=0$
11	$11x^2-10\sqrt{3}xy+y^2+\left(32\sqrt{3}-8\right)x-\left(8\sqrt{3}+32\right)y+64=0$

12	$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+\left(8\sqrt{3}+8\right)x+\left(8\sqrt{3}-8\right)y+48=0$
13	$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2+\left(8\sqrt{3}-32\right)x+\left(8+32\sqrt{3}\right)y+64=0$
14	$x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2-\left(8\sqrt{3}+32\right)x+\left(32\sqrt{3}-8\right)y+64=0$
15	$x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2+\left(8\sqrt{3}-8\right)x+\left(8\sqrt{3}+8\right)y+48=0$
16	$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2+\left(8-32\sqrt{3}\right)x+\left(32+8\sqrt{3}\right)y+64=0$
17	$11x^2-10\sqrt{3}xy+y^2-\left(8+32\sqrt{3}\right)x+\left(32-8\sqrt{3}\right)y+64=0$
18	$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2+\left(8-8\sqrt{3}\right)x+\left(8+8\sqrt{3}\right)y+48=0$
19	$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2-\left(8\sqrt{3}+32\right)x+\left(32\sqrt{3}-8\right)y+64=0$
20	$x^2-10\sqrt{3}xy+11y^2+\left(8\sqrt{3}-32\right)x+\left(8+32\sqrt{3}\right)y+64=0$
21	$x^2-2\sqrt{3}xy+3y^2-\left(8\sqrt{3}+8\right)x+\left(8\sqrt{3}-8\right)y+48=0$
22	$13x^2-6\sqrt{3}xy+7y^2-\left(8+32\sqrt{3}\right)x+\left(32-8\sqrt{3}\right)y+64=0$
23	$11x^2-10\sqrt{3}xy+y^2+\left(8-32\sqrt{3}\right)x+\left(32+8\sqrt{3}\right)y+64=0$
24	$3x^2-2\sqrt{3}xy+y^2-\left(8+8\sqrt{3}\right)x+\left(8-8\sqrt{3}\right)y+48=0$
25	$7x^2-6\sqrt{3}xy+13y^2+\left(16-4\sqrt{3}\right)x-\left(4+16\sqrt{3}\right)y-44=0$

12. Даны в алгебраической форме два числа a и b:

а) Найти алгебраическую форму числа $\alpha=\frac{a}{b}$;

б) Найти тригонометрическую форму числа α;

в) Решить уравнение $z^3+\alpha=0$

г) Изобразить числа α, $-\alpha$ и полученные корни для уравнения $z^3+\alpha=0$ точками на комплексной плоскости.

1.	a = $(4+8\sqrt{3})+(4\sqrt{3}-8)i$, b = $1-2i$	15.	a = $9\sqrt{3}-15i$, b = $2\sqrt{3}+i$
2.	a = $-8\sqrt{3}$, b = $\sqrt{3}-3i$	16.	a = $(4-8\sqrt{3})+(8+4\sqrt{3})i$, b = $2-i$
3.	a = $(3\sqrt{3}-6)+(6\sqrt{3}+3)i$, b = $1+2i$	17.	a = $(6+2\sqrt{3})+(2-6\sqrt{3})i$, b = $3+i$
4.	a = $(4\sqrt{3}-12)+(-4-12\sqrt{3})i$, b = $1-3i$	18.	a = $(6\sqrt{3}+3)+(3\sqrt{3}-6)i$, b = $2+i$
5.	a = $6\sqrt{3}+2i$, b = $\sqrt{3}-2i$	19.	a = $(-12+4\sqrt{3})+(4+12\sqrt{3})i$, b = $3-i$
6.	a = $(-6+3\sqrt{3})+(3+6\sqrt{3})i$, b = $2-i$	20.	a = $(8\sqrt{3}-2)+(-8-2\sqrt{3})i$, b = $4-i$

7.	a = $(4\sqrt{3}-8)+(8\sqrt{3}+4)i$, b = $1+2i$	21.	a = $9-3i$, b = $1-2i$
8.	a = $6\sqrt{3}-2i$, b = $\sqrt{3}+2i$	22.	a = $-12\sqrt{3}+4i$, b = $2-\sqrt{3}i$
9.	a = $-15+3\sqrt{3}i$, b = $\sqrt{3}-2i$	23.	a = $2-6\sqrt{3}i$, b = $-\sqrt{3}+2i$
10	a = $20-4\sqrt{3}i$, b = $2+\sqrt{3}i$	24.	a = $-15-3\sqrt{3}i$, b = $\sqrt{3}+2i$
11	a = $2+6\sqrt{3}i$, b = $-\sqrt{3}-2i$	25.	a = $20+4\sqrt{3}i$, b = $-2+\sqrt{3}i$
12	a = $-3\sqrt{3}-21i$, b = $2\sqrt{3}+i$	26.	a = $14+2\sqrt{3}i$, b = $2\sqrt{3}-i$
13	a = $(-4-8\sqrt{3})+(4-8\sqrt{3})i$, b = $1+2\sqrt{3}i$	27.	a = $21-3\sqrt{3}i$, b = $1-2\sqrt{3}i$
14	a = $(2-4\sqrt{3})+(-2-4\sqrt{3})i$, b = $-1+2\sqrt{3}i$	28.	a = $6\sqrt{3}+2i$, b = $\sqrt{3}-2i$

13. Указать на комплексной плоскости все точки z, для которых выполняется неравенство. Сделать чертёж.

1.	$\left\lvert z-\sqrt{3}+i\right\rvert \geq 3$	15.	$\lvert z+1+2i\rvert \geq 3$
2.	$1\langle\lvert -z-2-i\rvert\langle 2$	16.	$\frac{1}{2}\langle\lvert z-1\rvert\langle 1$
3.	$2\leq\lvert 2z+2+i\rvert\langle 4$	17.	$\lvert -z+3+2i\rvert\rangle 2$
4.	$2\langle\lvert z-2+i\rvert\langle 3$	18.	$\frac{1}{2}\langle\lvert z-2i\rvert\langle 2$
5.	$1\leq\lvert -z+i\rvert\leq 2$	19.	$2\leq\lvert z+1+i\rvert\langle 3$
6.	$\lvert 2z-2-3i\rvert\geq 2$	20.	$1\leq\lvert z+4+i\rvert\langle 3$
7.	$3\langle\lvert 3z+5+i\rvert\leq 6$	21.	$\frac{1}{3}\leq\lvert z+1+i\rvert\leq 1$
8.	$2\langle\lvert z-3-2i\rvert\leq 4$	22.	$1\langle\lvert z+1-i\rvert\leq 2$
9.	$\lvert 2z+1\rvert\leq 1$	23.	$\lvert -z-i\rvert\rangle 1$
10.	$1\langle\lvert z+2-2i\rvert\langle 5$	24.	$\lvert z+1-3i\rvert\rangle 5$
11.	$\lvert -z-2-4i\rvert\geq 2$	25.	$\frac{1}{2}\langle\left\lvert \frac{z}{2}-i\right\rvert\langle 1$
12.	$\lvert -z+i\rvert\geq 3$	26.	$\lvert z+4-2i\rvert\rangle 1$
13.	$2\langle\lvert 12z+1-i\rvert\leq 4$	27.	$\lvert -z+2+2i\rvert\geq 1$
14.	$1\leq\lvert z-2-4i\rvert\leq 3$	28.	$\frac{1}{2}\langle\lvert z+1-2i\rvert\leq 2$

14. Найти сумму, разность, произведение и частное чисел a и b в алгебраической форме. Найти тригонометрическую форму этих чисел. Найти их произведение и частное в тригонометрической форме.

1.	$a=-1+i\sqrt{3};\, b=\sqrt{3}+i$	15.	$a=1-i\sqrt{3};\, b=-(\sqrt{3}+i)$
2.	$a=\sqrt{3}+i;\, b=1-i\sqrt{3}$	16.	$a=-(\sqrt{3}+i;\, b=-1/(1-i\sqrt{3})$
3.	$a=-1/(1-i\sqrt{3})\,;\, b=-1/(1+i)$	17.	$a=-1/(1+i);\, b=-1+i$
4.	$a=-1+i\,;\, b=-(32+32i)$	18.	$a=-(32+32i);\, b=1/(-1+i)$
5.	$a=-1/(-1+i);\, b=243-243i$	19.	$a=243-243i\,;\, b=1/(1-i)$
6.	$a=-1/(1-i);\, b=1+i\sqrt{3}$	20.	$a=1+i\sqrt{3};\, b=-(\sqrt{3}-i)$
7.	$a=-(\sqrt{3}-i)\,;\, b=-(1+i\sqrt{3})$	21.	$a=-(1+i\sqrt{3});\, b=1/(1+i\sqrt{3})$
8.	$a=1/(1+i\sqrt{3});\, b=-i$	22.	$a=-i;\, b=1/(1-i\sqrt{3})$
9.	$a=1/(1-i\sqrt{3});\, b=1$	23.	$a=1;\, b=\sqrt{3}-i$
10.	$a=\sqrt{3}-i;\, b=i$	24.	$a=i;\, b=1/(1+i)$
11.	$a=1/(1+i)\,;\, b=-1/(1+i\sqrt{3})$	25.	$a=-1/(1+i\sqrt{3})\,;\, b=32-32i$
12.	$a=32-32i\,;\, b=i/(1+i)$	26.	$a=i/(1+i);\, b=1+i$
13.	$a=1+i;\, b=-i/(1-i)$	27.	$a=-i/(1+i);\, b=1-i$
14.	$a=1-i;\, b=-1+i\sqrt{3}$	28.	$a=1+i\sqrt{3};\, b=-1/(1-i)$

Итоговый тест по курсу алгебры

ДЕ1: Системы линейных уравнений. (критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Найдите решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-y+z=2, \\ 3x+2y+2z=-2, \\ x-2y+z=1. \end{cases}$$

А) (-2;1;3);
Б) (-1;3;2);
В) (2;-1;-3);
Г) (2;3;-1).

2. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Тогда общее решение системы линейных уравнений содержит:
А) 3 главных и 1 свободное неизвестное;
Б) 2 главных и 2 свободных неизвестных;
В) 1 главное и 3 свободных неизвестных;
Г) не содержит свободных неизвестных.

3. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & a & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & a-1 & a-2 \end{array}\right)$$

Тогда система несовместна при:
А) a = 0;
Б) a = 1;
В) a = 2;
Г) при любом значении a.

4. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Тогда система линейных уравнений:
А) определенная;
Б) неопределенная;
В) несовместная
Г) имеет 3 решения.

ДЕ2: Определители.
критерий освоения: не менее 3 правильно выполненных заданий)

1. Корень уравнения $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$=0 равен…

А) 1,5;
Б) $-\frac{2}{3}$;
В) 3;
Г) –1,5.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \ldots$

А) –21;
Б) 47;
В) –28;
Г) 20.

3. Определитель d = $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

А) 0;
Б) $2\cdot5\cdot6\cdot1 = 60$;
В) $2\cdot4\cdot5\cdot6 = 240$;
Г) $3\cdot5\cdot6\cdot4 = 360$.

4. Коэффициент при a в определителе $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \text{€} \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ равен:

А) 10;
Б) 2;
В) -10;
Г) -2.

5. Если в определителе d четвертого порядка все элементы умножить на 2, а затем определитель транспонировать, то полученный определитель будет равен:

А) 2d;
Б) -2d;
В) 16d;
Г) -16d.

6. Если в определителе d третью строку умножить на 3 и к ней прибавить пятую строку, умноженную на 5, то полученный определитель будет равен:

А) 15d;
Б) 3d;
В) d;
Г) 5d.

ДЕ 3: Поле комплексных чисел.
(критерий освоения: не менее 4 правильно выполненных заданий)

1. Значение i^{127} равно:

А) i;
Б) -i;
В) 1;
Г) -1.

2. Алгебраическая форма числа $\frac{1+3i}{2+i}$ имеет вид:

А) 1 + i;
Б) 1 – i;
В) -1 + i;
Г) -1 – i .

3. Модуль комплексного числа z = 3 – 4i равен:

А) 25;
Б) 5;
В) 7;
Г) $\sqrt{7}$.

4. Произведение (1 – 2i)(2 + i) равно:

А) 4 – 3i;
Б) 4 + 3i;
В) -4 – 3i;
Г) -4 + 3i.

5. Значение i^{1320} равно:

А) i;
Б) -i;
В) 1;
Г) -1.

6. Тригонометрическая форма числа z = $\sqrt{3}$ + i имеет вид:

А) $2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$;
Б) $2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$;
В) $2(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3})$;
Г) $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$.

7. Тригонометрическая форма числа z = -1 + i имеет вид:

А) $\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$;
Б) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;
В) $2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$;
Г) $\sqrt{2}(\sin\frac{3\pi}{4} + i\cos\frac{3\pi}{4})$.

8. Значение $(1 + i)^{20}$ равно (использовать формулу Муавра):

А) -2^{10};
Б) 2^{10};
В) -2^{10} i ;
Г) 2^{10} i

ДЕ4: Алгебра матриц.
(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Дано матричное уравнение ABX = C^{-1}, где A, B, C – невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Тогда:
   А) $X = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$;
   Б) $X = A^{-1}C^{-1}B^{-1}$;
   В) $X = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$;
   Г) $X = B^{-1}A^{-1}C^{-1}$.
2. В верном равенстве $A_{52}B_{mn}C_{34} = D_{pq}$ значения m, n, p, q равны:
   А) m = 5, n = 3, p = 4, q = 2;
   Б) m = 2, n = 3, p = 5, q = 4;
   В) m = 5, n = 2, p = 2, q = 4;
   Г) m = 2, n = 4, p = 5, q = 4.
3. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица, обратная матрице A, равна:
   А) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$;
   Б) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$;
   В) $-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$;
   Г) $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Дано матричное уравнение AXB = C, где A, B, C – невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Тогда:

А) $X = CA^{-1}B^{-1}$;
Б) $X = A^{-1}CB^{-1}$;
В) $X = A^{-1}B^{-1}C$;
Г) $X = B^{-1}A^{-1}C$.

ДЕ5: Векторные пространства. Евклидовы пространства
(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Система векторов линейно независима, если:

А) существует линейная комбинация этой системы, равная нулевому вектору;
Б) ни один вектор этой системы линейно не выражается через остальные векторы этой же системы;
В) хотя бы один вектор этой системы линейно не выражается через остальные векторы этой системы;
Г) любой линейно выражающийся через систему вектор выражается не единственным образом.

2. Система векторов линейно зависима, если:

А) существует ее линейная комбинация, равная нулевому вектору;
Б) ее линейная комбинация, равная нулевому вектору, может быть получена только с помощью нулевых коэффициентов;
В) хотя бы один вектор этой системы линейно выражается через остальные векторы этой же системы;
Г) любой линейно выражающийся через систему вектор выражается единственным образом.

3. В пространстве L_4 базис состоит из:

А) 2 векторов;
Б) 3 векторов;
В) 4 векторов;
Г) 5 векторов.

4. Если к системе векторов добавить вектор, не являющийся линейной комбинацией векторов данной системы, то ранг данной системы векторов:

А) увеличится на 1;
Б) уменьшится на 1;
В) останется без изменения;
Г) станет равным нулю.

ДЕ6: Кольцо многочленов от одной переменной над полем. Теория делимости.
(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ на двучлен $x - 1$ равен:

А) 0;
Б) 1;
В) -1;
Г) 2.

2. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 4-й степени с корнями $x_1 = 2$ – кратности 2, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ имеет вид:

А) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$;
Б) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 12$;
В) $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$;
Г) $x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 4x - 12$.

3. Рациональные корни $\frac{p}{q}$ многочлена

$f(x) = 3x^3 - 11x - 2$ находятся среди чисел:

А) $\frac{p}{q} = \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}$;
Б) $\frac{p}{q} = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 2$;

В) $\frac{p}{q}=\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$;

Г) $\frac{p}{q}=\pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}$.

4. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена $f(x) = x^4 – 2x^2 + 2x - 12$ на двучлен $x – 2$ равен:
   - А) 0;
   - Б) 6;
   - В) -6;
   - Г) -8.

ДЕ7: Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Неприводимые над полем действительных чисел многочлены.
(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Разложение на неприводимые множители над полем R многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями $x_1 = 1 + i$ и $x_2 = 2$ имеет вид:
   - А) $f(x) = (x^2 – 2x + 2)(x – 2)$;
   - Б) $f(x) = (x^2 – 2x + 1)(x – 2)$;
   - В) $f(x) = (x^2 – 2x –1)(x – 2)$;
   - Г) $f(x) = (x^2 – 2x – 2)(x – 2)$.
2. Разложение на неприводимые множители над полем R многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями $x_1 = 2i$ и $x_2 = 3$ имеет вид:
   - А) $f(x) = (x^2 – 4)(x – 3)$;
   - Б) $f(x) = (x^2 + 4)(x – 3)$;
   - В) $f(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$;
   - Г) $f(x) = (x^2 – 4)(x + 3)$.
3. Значения $\sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi}$ равны:

А) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $z_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$; $z_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$; $z_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}$;

Б) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}$; $z_3=\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}$; $z_4=\cos\frac{13\pi}{4}+i\sin\frac{13\pi}{4}$;

В) $z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; $z_2=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $z_3=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$; $z_4=\cos\pi+i\sin\pi$;

Г) $z_1=\cos 4\pi+i\sin 4\pi$; $z_2=-\cos 4\pi-i\sin 4\pi$; $z_3=\cos\pi+i\sin\pi$; $z_4=-\cos\pi-i\sin\pi$.

4. Если многочлен 5 степени имеет ровно 1 действительный корень, есть ли у многочлена еще корни (если да, то сколько еще)

А) других корней нет
Б) 2
В) 3
Г) 4

ДЕ 8: Линейные преобразования и их матрицы. Собственные векторы и собственные значения линейных операторов (критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Матрица линейного преобразования имеет ранг 4, сколько у линейного оператора собственных значений

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 4

2. Линейный оператор имеет 2 собственных значения, каждый из которых имеет кратность 2. Сколько данный линейный оператор имеет собственных векторов?

А) 1

Б) 2

В) 3

Г) 4

3. Дана матрица А= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ линейного оператора. Найти собственные значения из характеристического уравнения $|A - lE| = 0$, где l-собственное значение

А)-1

Б)2

В)-2

Г)1

4. Определить кратность собственного значения из задачи 3.

А)1

Б)2

ДЕ 9: Понятия группы, кольца, поля. Алгебры, алгебраические системы. Кольца классов вычетов.

(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Найти множество, которое является полем

А) множество целых чисел

Б) множество положительных действительных чисел

В) множество комплексных чисел

Г) множество четных чисел

2. Полную систему вычетов по модулю 6 (в кольце классов вычетов) образует следующий набор:

А) $\bar{0}, \overline{-1}, \bar{2}, \overline{-3}, \bar{4}, \overline{-5}$;

Б) $\overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$;

В) $\overline{18}, \overline{17}, \overline{16}, \overline{15}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{25}$;

Г) $\bar{1}, \bar{7}, \bar{2}, \bar{8}, \bar{3}, \bar{9}$.

3. Сколько алгебраических операций определено в кольце

А)1

Б)2

В)3

Г)4

4. Группа симметрий правильного треугольника изоморфна

А) циклической группе

Б) группе подстановок порядка 6

В) группе векторов

Г) ничему

ДЕ10: Подгруппы. Смежные классы по подгруппе, фактор-группы.

(критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Найти подгруппы циклической группы 6 порядка

$$a_0 = 1, a_1 = a^1, a_2 = a^2, a_3 = a^3, a_4 = a^4, a_5 = a^5$$

А) a_0 , a_0, a_1, a_2

Б) a_0 , a_0, a_2, a_4 , a_0, a_3 , $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$

В) a_0 , a_0, a_1, a_3

Г) a_0 , a_0, a_1, a_2, a_3

2. Фактор-группа группы G - это

А) группа, составленная из всех смежных классов по нормальной подгруппе группы G

Б) все смежные классы группы G

В) множество всех нормальных делителей группы G

3. Дана группа G={1,-1,i,-i}, найти ее подгруппу

А) H={1}

Б) H={1,2}

В) H={1,i}

Г) H={0,1}

4. Порядок группы G равен 6. Перечислите всевозможные значения порядков, которые имеют ее подгруппы

А) 1,2,3,6

Б)1,4

В)2,6

Г)1,6

ДЕ11: Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены. (критерий освоения: не менее 1 правильно выполненных заданий)

1. Сколько основных симметрических многочленов от 4 переменных можно составить

А) 1

Б) 2

В) 4

2. Является ли многочлен $f(x)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^3$ симметрическим?

А) да

Б) нет

3. Результант многочлена равен 0, что этот факт означает для корней многочлена?

А) корней нет

Б) есть кратные корни

В) все корни комплексные

ДЕ12. Расширения полей, алгебраические и конечные расширения. (критерий освоения: не менее 2 правильно выполненных заданий)

1. Какое из приведенных чисел является алгебраическим?

А) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Б) π

В) e

2. Найти минимальный многочлен для $1-\sqrt{2}$ над полем Q

А) x^2-2x-1

Б) x^2-2x+2

В) x^2-2x+3

Г) x^2-2x

3. Найти расширение поля рациональных чисел Q

А) P={$a+b\sqrt{3}$, где a и b –рациональные}

Б) P={$1-\sqrt{2}$}

В) P={a+b, где a и b – рациональные}

4. Какую степень может иметь конечное расширение поля рациональных чисел

А) 2

Б) любую

В) 1

№ задания	Правильный ответ
ДЕ 1	
1	В
2	А
3	Б
4	В
ДЕ 2	
1	Г
2	А
3	В
4	В
5	В
6	Б
ДЕ 3	
1	Б
2	А
3	Б
4	А
5	В
6	Б
7	А
8	А
ДЕ 4	
1	Г
2	Б
3	Б
4	Б
ДЕ 5	
1	Б
2	В
3	В
4	А
ДЕ 6	
1	В
2	А
3	В
4	А
ДЕ 7	
1	А
2	Б
3	А
4	Г
ДЕ 8	
1	Г
2	Г
3	Б
4	Б
ДЕ 9	
1	В
2	А
3	Б
4	Б
ДЕ 10	
1	Б
2	А
3	А
4	А
ДЕ 11	
1	В
2	Б
3	Б
ДЕ 12	
1	А
2	А
3	А
4	Б

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие включает в себя достаточный теоретический материал, а также примеры и задачи по курсу высшей алгебры, программа которого предусмотрена подготовкой дипломированных специалистов ВлГУ, изучающих дисциплины «Алгебра», «Алгебра и теория чисел», «Высшая математика».

Рассмотренные примеры и задачи призваны помочь студентам в овладении важными вопросами упомянутого раздела алгебры, а также организовать самостоятельную работу при выполнении домашних и расчётно-графических заданий, подготовке к контрольным работам и экзаменам.

Пособие направлено на формирование основных понятий высшей алгебры, а также умений и навыков работы с математическим аппаратом, что поможет студенту освоить существующие методы, а также разработать новые методы и решать новые профессиональные задачи.

С точки зрения полноты представленного материала издание не претендует на то, чтобы заменить учебники по алгебре. Однако студентам математических специальностей оно будет интересно тем, что в нем изложен не только теоретический материал, но и приведены решения многочисленных примеров и задач, в том числе повышенного уровня сложности, поэтому пособие может быть полезно при самостоятельном изучении алгебры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. – М. : Наука, 1966.

2. Сушкевич А. К. Основы высшей алгебры. – Изд. 4. – М. : Гостехиздат, 1941.

3. Ляпин Е. С. Курс высшей алгебры. – Изд. 2. – М. : Учпедгиз, 1955.

4. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М. : Наука, 1966.

5. Галицкий М. А., Мошкович М. М., Шварцбурд С. И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. – М. : Просвещение, 1991.

6. Глухов М. М., Солодовников А. С. Задачник-практикум по высшей алгебре для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – М. : Просвещение, 1969.

7. Фадеев Д. К., Соминский И. С. Алгебра для самообразования. – М. : Наука, 1966.

8. Гордиенко Н. А., Беляева Э. С., Фирстов В. Е., Серебрякова И. В. Комплексные числа и их приложения : учеб. пособие. – Воронеж : ВГПУ, 2004.

Учебное электронное издание

КУРАНОВА Наталья Юрьевна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт, кафедра ФМОиИТ
natali_math@mail.ru