

Владимирский государственный университет

**ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Электронное издание



Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1659-0

© Родина Л. И.,
Егорова А. В., 2022

УДК 517.9
ББК 22.193

Авторы-составители: Л. И. Родина, А. В. Егорова

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. М. Аракелян

Доктор физико-математических наук, доцент
профессор кафедры математической кибернетики
Московского авиационного института (национальный исследователь-
ский университет)
А. С. Бортакровский

Применение дифференциальных уравнений для решения при-
кладных задач [Электронный ресурс] : учеб. пособие / авт.-сост.:
Л. И. Родина, А. В. Егорова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Сто-
летовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 83 с. – ISBN 978-5-9984-
1659-0. – Электрон. дан. (1,13 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). –
Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe
Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Содержит теоретический материал по курсам «Дифференциальные уравнения» и «Математическое моделирование», необходимый для решения задач; разобраны типичные примеры, представлены задачи для аудиторной и домашней работы. Основное внимание уделяется прикладным задачам из различных областей знаний, которые можно решить при помощи теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предназначено для математических факультетов классических и технических университетов, готовящих студентов по математическим направлениям подготовки (бакалавриат и магистратура).

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 11. Библиогр.: 18 назв.

ISBN 978-5-9984-1659-0

© Родина Л. И.,
Егорова А. В., 2022

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются дифференциальные уравнения, которые могут описывать биологические, химические, физические или экономические процессы. Приведены наиболее известные модели динамики популяции, исследуются вопросы устойчивости решений. Анализируются системы дифференциальных уравнений, описаны типы особых точек, исследуется устойчивость решений линейных и нелинейных систем, приведены примеры триггерных систем. Обсуждаются дискретно-непрерывные модели, построенные на основе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, а также вопросы оптимальной добычи возобновляемого ресурса.

В издании использован материал учебных пособий [2; 6; 10; 12; 13; 15] и статей [5; 7; 11]. Здесь также приведены новые задачи, решение которых описано подробно и доступно для студентов.

Представленный материал по курсам «Дифференциальные уравнения» и «Математическое моделирование» можно рассматривать как дополнение к классическим учебникам и учебным пособиям [8; 9; 14; 16].

1. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫЕ ОДНИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Рассмотрим простейшие непрерывные модели, заданные автономным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Решением уравнения (1.1) называется функция $x = x(t)$, определенная на некотором интервале (или отрезке) и удовлетворяющая этому уравнению, то есть при подстановке ее в уравнение обращающая его в тождество на этом интервале. Таких функций, вообще говоря, бесконечно много. Если же в задаче, которая привела к дифференциальному уравнению, ищется единственное решение, то должно быть задано начальное условие x_0 , то есть значение искомой функции при некотором значении $t = t_0$. Решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, будем обозначать $x(t, x_0)$.

Предполагаем, что уравнение (1.1) описывает процессы, происходящие в биологии, химии, физике или экономике, поэтому решением данного уравнения $x(t)$ может быть размер некоторой популяции, концентрация вещества, цена продукции и множество других величин. Следовательно, под x_0 мы понимаем начальный размер популяции, начальную концентрацию вещества или начальную цену, поэтому значение x_0 во многих прикладных задачах удовлетворяет неравенству $x_0 \geq 0$. Приведем примеры наиболее известных моделей, заданных одним дифференциальным уравнением.

Модель неограниченного роста (модель Мальтуса).

Пусть за промежуток времени Δt прирост численности некоторой популяции равен $\Delta x = R - S$, где R — число родившихся и S — число умерших за время Δt особей, пропорциональные этому промежутку времени:

$$R = R(x)\Delta t, \quad S = S(x)\Delta t,$$

тогда $\Delta x = (R(x) - S(x))\Delta t$. Разделив это равенство на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} = R(x) - S(x).$$

Рассмотрим случай, когда рождаемость и смертность пропорциональны численности популяции, то есть $R(x) = \alpha x$, $S(x) = \beta x$. Пусть $r = \alpha - \beta$, тогда получим модель неограниченного роста или модель Мальтуса в непрерывном случае:

$$\frac{dx}{dt} = rx. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является уравнением с разделяющимися переменными, найдем его решение:

$$\frac{dx}{x} = rdt, \quad \int \frac{dx}{x} = \int rdt, \quad \ln x = rt + C,$$

следовательно, $x(t) = e^{rt+C} = e^C e^{rt}$. Учитывая начальное условие $x(0) = x_0$, получаем $e^C = x_0$, поэтому $x(t) = x_0 e^{rt}$.

Эта модель описывает изолированную популяцию, которая развивается в условиях неограниченных ресурсов. Такие условия в природе встречаются крайне редко. Примером может служить размножение видов, завезенных в места, где имеется много пищи, отсутствуют конкурирующие виды и хищники (кролики в Австралии).

Модель ограниченного роста.

Впервые эту модель описал Ферхюльст в 1838 г. в уравнении логистического роста:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad K > 0. \quad (1.3)$$

Логистическое уравнение обладает следующими важными свойствами — при малых значениях переменной x размер популяции возрастает экспоненциально, как и в модели неограниченного роста; при больших —

приближается к пределу K . Величина K называется *емкостью экологической ниши популяции* и определяется ограниченностью пищевых ресурсов, мест для проживания и многими другими факторами, которые могут быть разными для разных видов.

Найдем решение уравнения (1.3). Отметим сначала, что решениями являются прямые $x = 0$ и $x = K$. Если $x \neq 0$ и $x \neq K$, разделим обе части уравнения (1.3) на $x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$ и домножим на dt :

$$\frac{Kdx}{x(K-x)} = rdt. \quad (1.4)$$

Представим дробь в левой части в виде суммы двух слагаемых

$$\frac{K}{x(K-x)} = \frac{(K-x) + x}{x(K-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{K-x}$$

и проинтегрируем обе части уравнения (1.4):

$$\ln x - \ln(K-x) = rt + \ln C.$$

Переходя от логарифмов к переменным, получим:

$$\frac{x}{K-x} = Ce^{rt}.$$

Здесь $C > 0$ — произвольная постоянная, которая определяется начальным значением $x(0) = x_0$. Значение постоянной C можно найти из последнего уравнения, подставляя туда $t = 0$, тогда

$$C = \frac{x_0}{K-x_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{K-x} = \frac{x_0}{K-x_0} e^{rt}.$$

Выражая переменную x из этого уравнения, находим:

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{K - x_0 + x_0 K e^{rt}}. \quad (1.5)$$

В случае, когда для начального размера популяции x_0 выполнено неравенство $x_0 < \frac{K}{2}$, кривая $y = x(t)$ имеет точку перегиба с координатами

$$\left(\frac{1}{r}, \ln \frac{K - x_0}{x_0} \right).$$

Модель организации рекламной кампании.

Рассмотрим модель кампании по рекламе некоторого нового товара или услуги (см. [2]). Обозначим через t время, прошедшее с начала рекламной кампании; через $x(t)$ — число информированных клиентов; X — общее число потенциальных покупателей; $\frac{dx}{dt}$ — скорость изменения числа потребителей, узнавших о товаре; $\alpha_1(t) > 0$ — затраты на рекламу в данный момент; $\alpha_2(t) > 0$ — степень общения покупателей между собой.

Отметим, что $\frac{dx}{dt}$ пропорционально числу покупателей, еще не знающих о товаре, то есть $\alpha_1(t)(X - x(t))$. Дополнительно предполагаем, что узнавшие о товаре потребители распространяют информацию среди неосведомленных. Их вклад равен

$$\alpha_2(t)x(t)(X - x(t)).$$

Таким образом, число информированных клиентов $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)x(t))(X - x(t)). \quad (1.6)$$

Отметим, что если $\alpha_1(t)$ намного больше, чем $\alpha_2(t)x(t)$, модель (1.6) превращается в модель Мальтуса, если $\alpha_1(t)$ намного меньше $\alpha_2(t)x(t)$ — в логистическое уравнение.

В частном случае, когда $\alpha_1(t) \equiv \alpha_1 > 0$, $\alpha_2(t) \equiv \alpha_2 > 0$, уравнение (1.6) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_2 \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + x(t) \right) (X - x(t)). \quad (1.7)$$

Пусть $x(0) = 0$, то есть в начале рекламной кампании никто из покупателей не имеет информации о товаре. Для решения (1.7) сделаем замену

$$z = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + x$$

и обозначим $K = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + X$. Тогда

$$\frac{dz}{dt} = \alpha_2 z (K - z) = \alpha_2 K z \left(1 - \frac{z}{K} \right).$$

Из (1.5) получаем, что

$$z(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{K - z_0 + z_0 e^{\alpha_2 K t}},$$

где $z_0 = z(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + x(0) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Следовательно,

$$z(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{X + z_0 e^{\alpha_2 K t}}$$

и решением (1.7), удовлетворяющим начальному условию $x(0) = 0$, является функция

$$x(t) = \frac{z_0 K e^{\alpha_2 K t}}{X + z_0 e^{\alpha_2 K t}} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Рассмотрим также одну из моделей, заданную дифференциальным уравнением второго порядка. С теоретическим материалом, описывающим свойства линейных уравнений высших порядков, можно ознакомиться в [8, 9, 16].

Модель движения маятника.

Известно, что уравнение упругих колебаний маятника под действием синусоидальной внешней силы имеет вид

$$y'' + a^2y = b \sin \omega x, \quad a > 0, b > 0, \omega > 0. \quad (1.8)$$

Выпишем однородное уравнение $y'' + a^2y = 0$, соответствующее неоднородному уравнению (1.8). Составим для него характеристическое уравнение

$$k^2 + a^2 = 0$$

и найдем его корни $k_{1,2} = \pm ia$. Тогда *общее решение* однородного уравнения $y'' + a^2y = 0$ имеет вид

$$\tilde{y} = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax.$$

Получили колебания при отсутствии внешней силы, они называются собственными колебаниями.

Частное решение y^* уравнения (1.8) ищем в виде

$$y^* = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_\ell(x) \cos \beta x + N_\ell(x) \sin \beta x),$$

где r — число, равное кратности $\alpha + i\beta = i\omega$ как корня характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, $M_\ell(x)$ и $N_\ell(x)$ — многочлены степени $\ell = \max(m, n)$ с неопределенными коэффициентами.

Нерезонансный случай $\omega \neq a$. Здесь частное решение имеет вид

$$y^* = A \cos \omega x + B \sin \omega x.$$

Найдем производные

$$\begin{aligned}(y^*)' &= -\omega A \sin \omega x + \omega B \cos \omega x, \\ (y^*)'' &= -\omega^2 A \cos \omega x - \omega^2 B \sin \omega x.\end{aligned}$$

Подставляя y^* и ее производные в (1.8), получаем

$$y'' + a^2 y = (a^2 - \omega^2)A \cos \omega x + (a^2 - \omega^2)B \sin \omega x = b \sin \omega x.$$

Найдем $A = 0$, $B = \frac{b}{a^2 - \omega^2}$. Таким образом, *общее решение* уравнения (1.8) имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{b}{a^2 - \omega^2} \sin \omega x.$$

Резонансный случай $\omega = a$. В этом случае частота внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний. Частное решение нужно искать в виде

$$y^* = x(A \cos \omega x + B \sin \omega x).$$

Тогда

$$\begin{aligned}(y^*)' &= A \cos \omega x + B \sin \omega x + x\omega(-A \sin \omega x + B \cos \omega x), \\ (y^*)'' &= -2A\omega \sin \omega x + 2B\omega \cos \omega x + x\omega^2(-A \cos \omega x - B \sin \omega x).\end{aligned}$$

Подставим y^* , $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в (1.8):

$$(y^*)'' + \omega^2 y^* = -2A\omega \sin \omega x + 2B\omega \cos \omega x = b \sin \omega x.$$

Следовательно, $A = -\frac{b}{2\omega}$, $B = 0$. *Общее решение* уравнения (1.8) имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{bx}{2\omega} \cos \omega x.$$

Таким образом, в резонансном случае мы получили колебания с неограниченно возрастающей амплитудой.

Устойчивость решений дифференциальных уравнений.

При изучении более сложных уравнений не всегда возможно найти решение $x(t)$ в явном виде, поэтому будем исследовать устойчивость их неподвижных точек. Приведем необходимые определения.

Решение уравнения (1.1) вида $x(t) = x^*$ для всех $t \geq t_0$ называется *стационарным*. Точку x^* на фазовой прямой называют *положением равновесия или неподвижной точкой* для уравнения (1.1). Все неподвижные точки являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

Определение 1.1. Положение равновесия x^* уравнения (1.1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|x(t_0) - x^*| < \delta$, то $|x(t, x_0) - x^*| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Другими словами, положение равновесия устойчиво, если малые отклонения от положения равновесия не выводят траекторию решения $x(t, x_0)$ из его малой окрестности.

Определение 1.2. Положение равновесия x^* уравнения (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и найдется такое $\Delta > 0$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x^*) = 0,$$

если $|x(t_0) - x^*| < \Delta$, то есть малые отклонения затухают с течением времени.

Утверждение 1.1. Устойчивость положения равновесия x^* определяется по знаку производной функции $f(x)$ в точке x^* . Если $f'(x^*) < 0$, то x^* — асимптотически устойчиво, если $f'(x^*) \geq 0$, то x^* — неустойчиво.

Пример 1.1. Найдите положения равновесия для логистического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad K > 0.$$

и исследуйте их на устойчивость.

Решение. Здесь $f(x) = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right)$, поэтому неподвижными точками являются решения уравнения $f(x) = 0$, то есть точки $x_1^* = 0$ и $x_2^* = K$. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = r - \frac{2rx}{K},$$

тогда $f'(0) = r > 0$, $f'(K) = -r < 0$, поэтому положение равновесия $x_1^* = 0$ неустойчиво, а $x_2^* = K$ — устойчиво.

Модель популяции с наименьшей критической численностью.

В рассмотренных выше моделях прирост численности (биомассы) популяции представлен выражением rx , пропорциональным численности x . Заметим, что это соответствует только тем популяциям, размножение которых происходит путем деления или самооплодотворения (микроорганизмы). Если же в основе размножения лежит скрещивание, предполагающее встречи между особями разных полов, то прирост популяции будет тем выше, чем больше количество встреч между особями, которое пропорционально x^2 . Таким образом, для разнополой популяции в условиях неограниченных ресурсов получаем уравнение

$$\dot{x} = rx^2, \quad r > 0.$$

Данное уравнение хорошо описывает тот факт, что при низких плотностях популяции скорость размножения резко падает, так как вероятность встречи двух особей разных полов уменьшается. Однако при больших плотностях популяций скорость размножения ограничена уже не числом встреч особей противоположного пола, а числом самок в популяции. Уравнение, учитывающее оба эти эффекта, имеет вид

$$\dot{x} = \alpha \frac{\beta x^2}{\beta + cx}.$$

Кроме того, в последнее уравнение нужно ввести слагаемое, пропорциональное размеру популяции и описывающее смертность, тогда

$$\dot{x} = \alpha \frac{\beta x^2}{\beta + cx} - dx. \quad (1.9)$$

Найдем положения равновесия уравнения (1.9) — это точки

$$x_1^* = 0 \quad \text{и} \quad x_2^* = \frac{d\beta}{\alpha\beta - cd} = L.$$

Для исследования на устойчивость найдем производную функции $f(x) = \alpha \frac{\beta x^2}{\beta + cx} - dx$:

$$f'(x) = \alpha\beta \frac{2x(\beta + cx) - cx^2}{(\beta + cx)^2} - d = \alpha\beta \frac{x(2\beta + cx)}{(\beta + cx)^2} - d.$$

Поскольку $f'(0) = -d < 0$, то положение равновесия $x_1^* = 0$ устойчиво. Далее,

$$f'(L) = \frac{d(\alpha\beta - cd)}{\alpha\beta} > 0,$$

поэтому $x_2^* = L$ неустойчиво.

Величина нижней критической плотности L различна для разных видов. По наблюдениям биологов, для ондатры это всего лишь одна пара особей на тысячу квадратных километров, а для американского голубя — сотни тысяч особей.

Наиболее общее уравнение, учитывающее как нижнюю границу численности, так и внутривидовую конкуренцию, имеет вид:

$$\dot{x} = a \frac{\beta x^2}{\beta + cx} - dx - \delta x^2.$$

2. МОДЕЛИ, ЗАДАННЫЕ СИСТЕМАМИ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим модели процессов, заданные системой двух автономных дифференциальных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — непрерывные функции, определенные в некоторой области G евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 и имеющие в этой плоскости непрерывные производные не ниже первого порядка.

Область G может быть как ограниченной, так и неограниченной. Если переменные x и y имеют прикладное значение (численность популяций, концентрация веществ, цена продукции), то чаще всего область G является положительным квадрантом евклидовой плоскости, то есть

$$G = \mathbb{R}_+^2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Размеры популяций и концентрации веществ также могут быть ограничены сверху площадью ареала обитания или объемом сосуда, тогда область значений переменных является прямоугольником:

$$G = \mathbb{R}_+^2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, x_0], y \in [0, y_0]\}.$$

Множество G в \mathbb{R}^2 , на котором определены координаты (x, y) и задана автономная система (2.1), называется фазовой плоскостью данной системы. Каждое решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (2.1) определяет на фазовой плоскости линию (или точку, если функции $x(t)$ и $y(t)$ постоянны). Эта линия или точка называется траекторией или фазовой траекторией системы. Точка $x = x_0$, $y = y_0$ является траекторией тогда и только тогда, когда

$$P(x^*, y^*) = 0 \text{ и } Q(x^*, y^*) = 0.$$

Такая точка называется *особой* или *стационарной* или *положением равновесия*.

Совокупность всех траекторий при различных начальных значениях переменных называется *фазовым портретом* системы. Построение фазового портрета позволяет сделать вывод о характере изменений переменных x , y без знания аналитических решений этой системы. Для изображения фазового портрета необходимо построить *векторное поле*, то есть совокупность векторов

$$v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

в каждой точке (x, y) фазовой плоскости. Траектории системы (2.1) во всех точках, где $v(x, y) \neq (0, 0)$, касаются векторов этого поля.

Векторное поле помогает построить *метод изоклин*. Изоклиной (линией равного наклона) для системы (2.1) называется геометрическое место точек, где

$$f(x, y) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = k, \quad k = \text{const.}$$

Для нескольких k из множества значений функции $f(x, y)$ строим изоклины $f(x, y) = k$, затем через многие точки каждой изоклины проводим короткие отрезки под углом α ($\text{tg} \alpha = k$) к оси Ox . По данному векторному полю строим траектории системы, которые в точках пересечения с каждой изоклиной должны иметь касательные, параллельные отрезкам, построенным на этой изоклине. Особое внимание уделяем построению *главных изоклин*: $k = 0$ или $P(x, y) = 0$ — изоклина вертикальных касательных, $k = \infty$ или $Q(x, y) = 0$ — изоклина горизонтальных касательных. Отметим, что при пересечении главных изоклин получим точку (x^*, y^*) , координаты которой удовлетворяют условиям $P(x^*, y^*) = 0$ и $Q(x^*, y^*) = 0$, то есть особую точку системы.

Для большого класса систем, которые называются *грубыми* системами (это означает, что характер поведения системы не меняется при малом изменении вида уравнения) информацию о типе поведения вблизи особой точки можно получить, исследуя не исходную систему, а систему линейного приближения.

Особые точки линейных систем.

Изучается поведение траекторий линейной системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy, \end{cases} \quad (2.2)$$

в окрестности особой точки $(0, 0)$. Для исследования системы сначала нужно найти собственные значения λ_1, λ_2 и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Возможны следующие случаи:

1. **Собственные значения λ_1, λ_2 вещественны, различны и одного знака.** Из курса линейной алгебры известно, что в этом случае систему (2.2) при помощи линейного преобразования

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y$$

можно привести к каноническому виду

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda_1 \xi, \\ \dot{\eta} = \lambda_2 \eta. \end{cases} \quad (2.3)$$

Система (2.3) имеет общее решение $\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $\eta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Исключая t , получаем уравнение траекторий:

$$\eta = C_2 \left(\frac{\xi}{C_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad \text{при} \quad C_1 \neq 0 \quad (2.4)$$

и $\eta = 0$ при $C_1 = 0$. Если $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то траектории похожи на дуги парабол, касающихся оси $O\xi$, если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, то траектории касаются оси $O\eta$. Координатные полуоси также являются траекториями. Особая точка называется *узлом*. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то по каждой траектории происходит движение к точке $(0, 0)$ (устойчивый узел); если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то по каждой траектории точка $(\xi(t), \eta(t))$ удаляется от начала координат (неустойчивый узел). Направление движения указывается стрелками на траекториях (рис. 1).

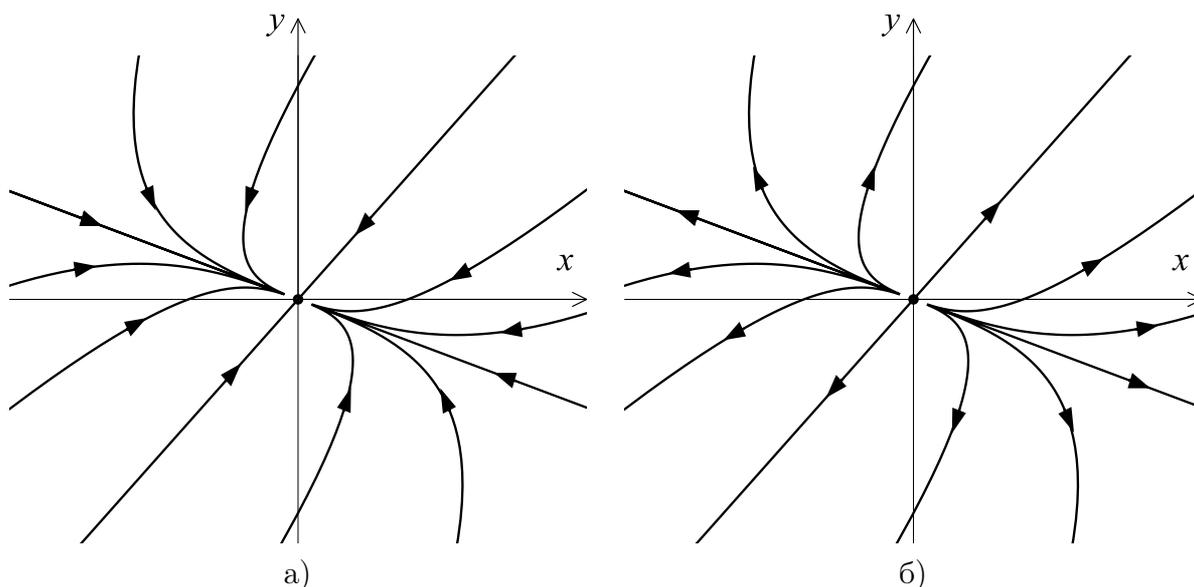


Рис. 1. Фазовый портрет системы (2.2): а) устойчивый узел; б) неустойчивый узел

2. Собственные значения λ_1, λ_2 вещественны и разных знаков. В этом случае в формуле (2.4) степень $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ отрицательная, поэтому траектории (кроме идущих по координатным полуосям) похожи на гиперболы. Особая точка называется *седлом* (рис. 2). Седло всегда неустойчиво, так как одно из собственных значений $\lambda_i > 0$. Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, то $\xi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, поэтому по обеим половинам оси $O\xi$ движение направлено к началу координат. Далее, $\eta(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, значит по обеим половинам оси $O\eta$ движение направлено от начала координат.

3. $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. Если матрица A имеет два линейно-независимых собственных вектора (то есть два вектора h_1, h_2 таких, что $h_1 \neq Ch_2$), то система (2.2) приводится к каноническому виду (2.3). В этом случае

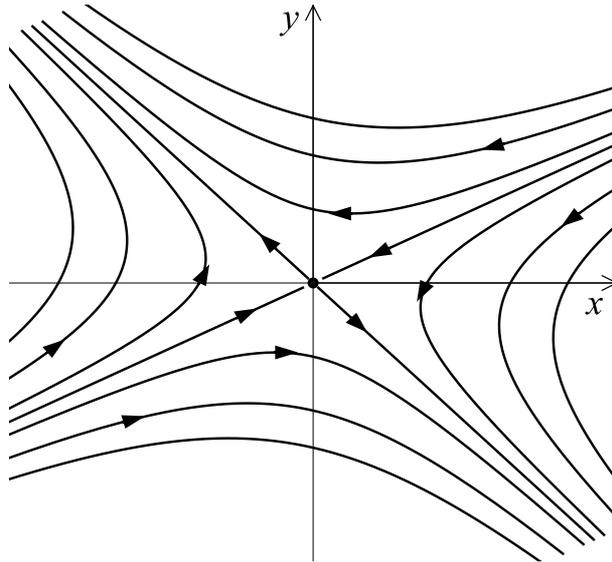


Рис. 2. Фазовый портрет системы (2.2): седло

из формулы (2.4) получаем, что $\eta = C\xi$, то есть траекториями системы являются полупрямые с концом в начале координат (если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$). Если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, движение по полупрямым удаляется от начала координат. Особая точка называется *дискритическим узлом* (рис. 3).

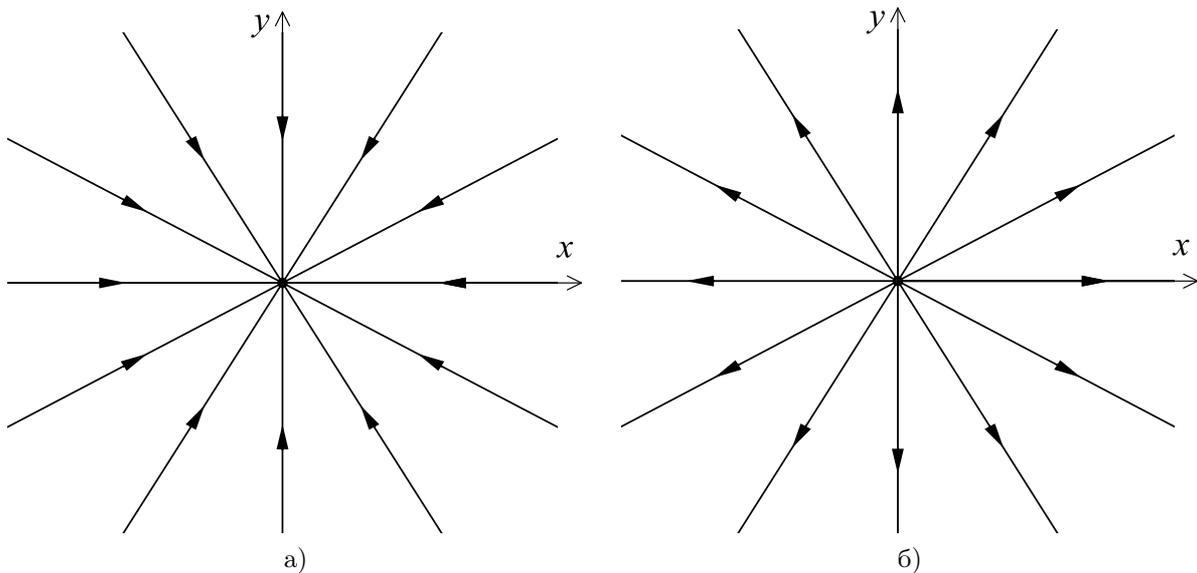


Рис. 3. Фазовый портрет системы (2.2): а) устойчивый дискритический узел; б) неустойчивый дискритический узел

Если же матрица A имеет только один собственный вектор, то система (2.2) приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi + \eta, \\ \dot{\eta} = \lambda\eta \end{cases} \quad (2.5)$$

Общее решение $y_2 = C_2 e^{\lambda t}$, $y_1 = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$. Уравнение траекторий

$$y_1 = \frac{C_1}{C_2} y_2 + \frac{1}{\lambda} y_2 \ln y_2 C_2, \quad y_2 = 0.$$

Особая точка называется *вырожденным узлом*. Узлы двух последних типов являются устойчивыми, если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ и неустойчивыми, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (рис. 4).

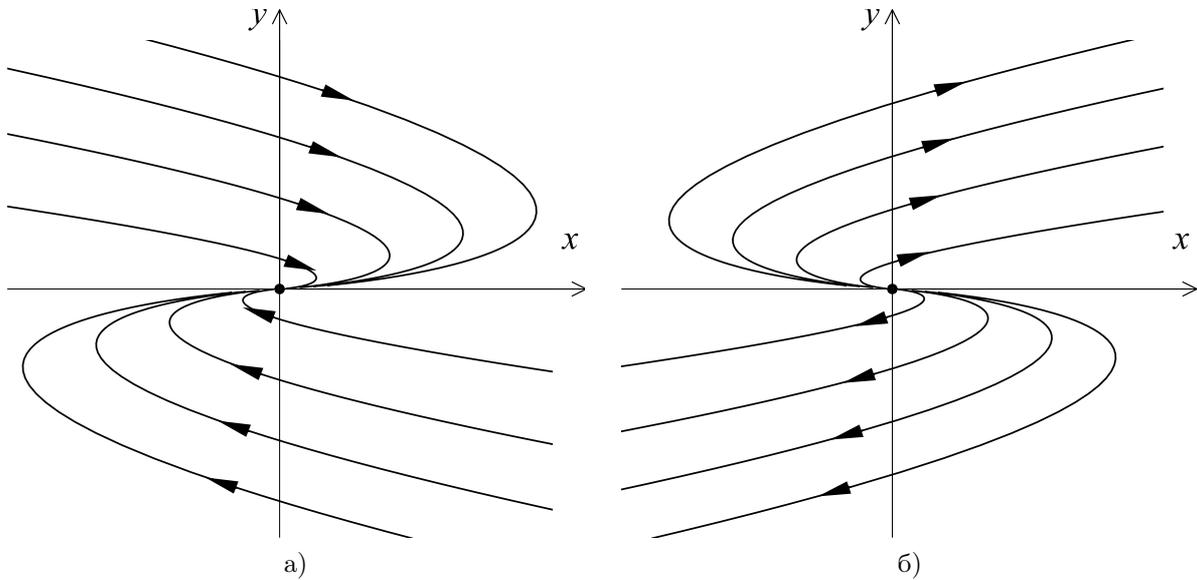


Рис. 4. Фазовый портрет системы (2.2): а) устойчивый вырожденный узел; б) неустойчивый вырожденный узел

4. Собственные значения λ_1, λ_2 — комплексно-сопряженные.

Пусть $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$. Можно показать (см. [10], [16]), что системе (2.2) можно привести к следующему уравнению в полярной системе координат (r, φ) : $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\alpha r}{\beta}$. Последнее уравнение имеет решение

$$r = C e^{\frac{\alpha}{\beta} \varphi}, \quad (2.6)$$

где C — произвольная постоянная. В случае $\alpha = 0$, то есть $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ из (2.6) следует, что траекториями системы являются окружности с центром в начале координат $r = \text{const}$. Особая точка называется *центром* (рис. 5).

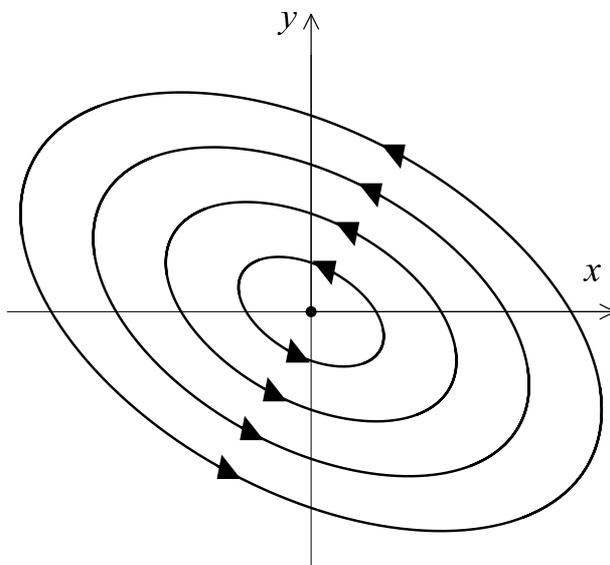


Рис. 5. Фазовый портрет системы (2.2): центр

Если $\alpha \neq 0$, то траектории системы (2.2) являются логарифмическими спиралями, которые делают бесконечно много оборотов вокруг начала координат. Особая точка называется *фокусом*. Если $\alpha < 0$, фокус устойчивый и если $\alpha > 0$, то неустойчивый (рис. 6).

5. Матрица A имеет одно или два собственных значения, равных нулю. В этом случае у системы бесконечно много особых точек и систему с такой матрицей легко решить. Различные типы всех точек описаны в [9]. Здесь мы не приводим это описание, поскольку данная система не является грубой, то есть добавление в систему слагаемых, малых по сравнению с линейными, приводит к резкому изменению картины траекторий.

Отметим, что состояние равновесия центр также является негрубым. При малом изменении параметров правой части системы он переходит в устойчивый или неустойчивый фокус. Всего существует пять типов грубых состояний равновесия: устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый фокус, неустойчивый фокус и седло.

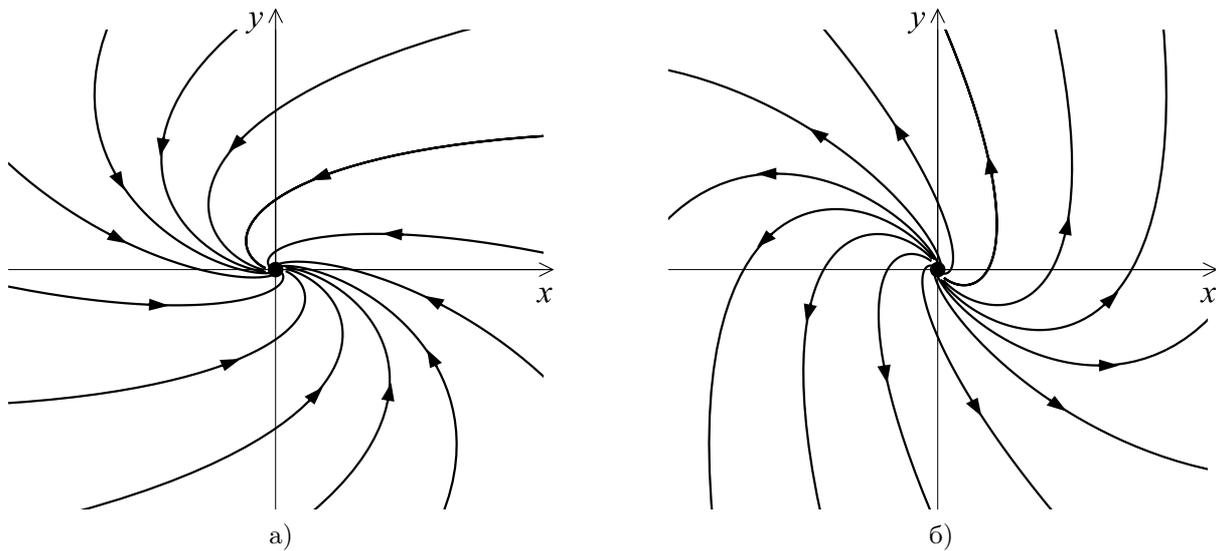


Рис. 6. Фазовый портрет системы (2.2): а) устойчивый фокус;
б) неустойчивый фокус

Чтобы выяснить расположение траекторий в исходных координатах (x, y) , не нужно находить линейное преобразование, связывающее эти координаты с новыми координатами (ξ, η) . Тип особой точки и ее устойчивость или неустойчивость определяются по собственным значениям матрицы A . Для узла и седла прямолинейные траектории всегда располагаются по направлениям собственных векторов. В случае узла с $\lambda_1 \neq \lambda_2$ кривые касаются в точке $(0, 0)$ того собственного вектора, у которого $|\lambda|$ меньше. Для построения фокуса нужно в точке $x = 1, y = 0$ (или в точке $x = 0, y = 1$) построить вектор скорости (\dot{x}, \dot{y}) , тогда траектория системы, проходящая через данную точку, касается в этой точке построенного вектора. Далее она делает обороты вокруг особой точки, приближаясь к ней в случае устойчивости и удаляясь в случае неустойчивости.

Пример 2.1. Определить тип особой точки и построить траектории системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases} \quad (2.7)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем

$$(2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0.$$

Корнями уравнения являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 5$, то есть собственные значения вещественные, различные и одного знака. Поэтому особая точка — узел. Найдем собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$ — это вектор $h_1 = (1, -1)^*$, собственному значению $\lambda_2 = 5$ отвечает собственный вектор $h_2 = (1, 3)^*$. На плоскости (x, y) строим прямые, направленные вдоль этих векторов и после этого строим траектории системы, касающиеся в начале координат первой из этих прямых, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Так как $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то по каждой траектории точка $(x(t), y(t))$ удаляется от начала координат, то есть узел неустойчивый (рис. 7).

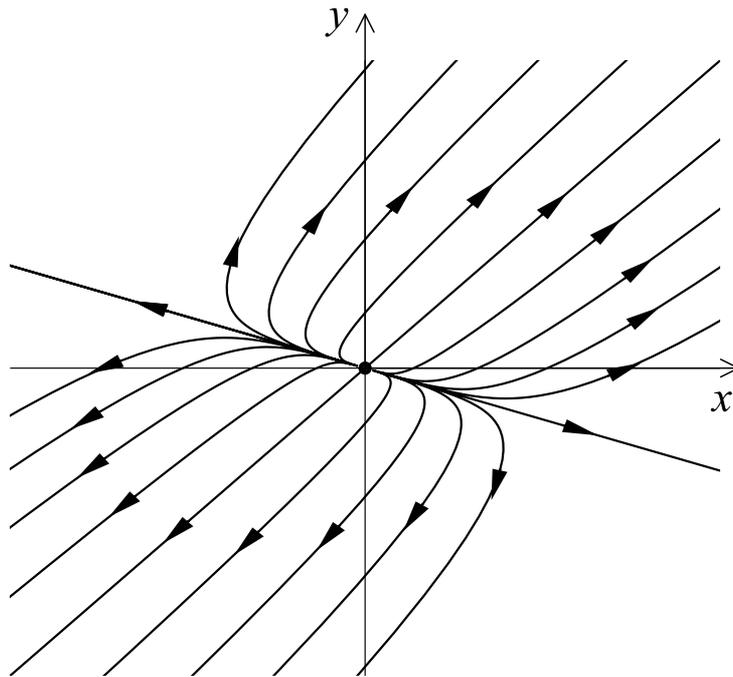


Рис. 7. Фазовый портрет системы (2.7): узел (неустойчивый)

Пример 2.2. Определить тип особой точки и построить траектории системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 3x. \end{cases} \quad (2.8)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Решениями уравнения являются числа $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$, то есть собственные значения вещественные, различные и разных знаков. Особая точка — седло (рис. 8). Собственному значению $\lambda_1 = -2$ отвечает собственный вектор $h_1 = (4, 3)^*$, а значению $\lambda_2 = 5$ — собственный вектор $h_2 = (1, -1)^*$. На плоскости (x, y) построим прямые, направленные вдоль этих векторов — это прямые $y = \frac{3}{4}x$ и $y = -x$. Так как собственное значение $\lambda_1 = -2$ отрицательное, то движение по прямой $y = \frac{3}{4}x$ направлено к началу координат, движение по прямой $y = -x$ — от начала координат.

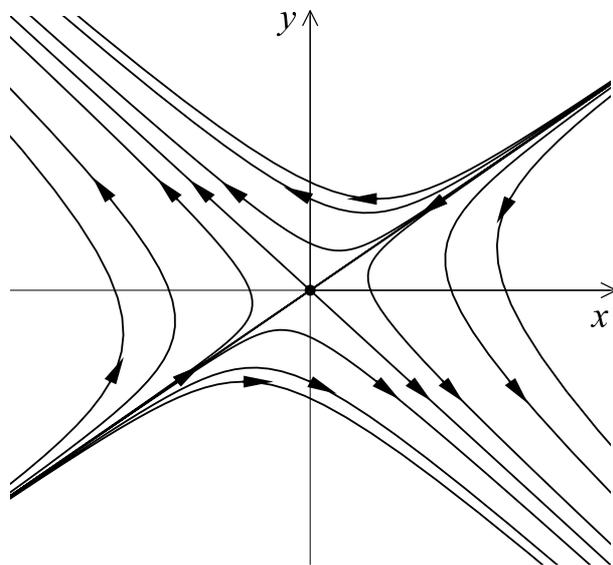


Рис. 8. Фазовый портрет системы (2.8): седло

Метод линеаризации системы в окрестности стационарного состояния.

Вернемся к рассмотрению биологических моделей, заданных системой двух автономных дифференциальных уравнений общего вида:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Пусть функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывные, определены в некоторой области G евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 и имеют в этой области непрерывные производные не ниже первого порядка. Так же, как и для линейных систем, координаты особых точек определяются из уравнений

$$P(x^*, y^*) = 0, \quad Q(x^*, y^*) = 0.$$

Поведение траекторий системы (2.1) на фазовой плоскости исследовано в работах французского математика Анри Пуанкаре (1854–1912 гг.) и русского математика и механика Александра Михайловича Ляпунова (1857–1918 гг.).

А. М. Ляпунов показал, что в большинстве случаев анализ устойчивости стационарных состояний нелинейной системы можно заменить анализом устойчивости системы линейного приближения, то есть линейной системы с матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где

$$a = P'_x(x^*, y^*), \quad b = P'_y(x^*, y^*), \quad c = Q'_x(x^*, y^*), \quad d = Q'_y(x^*, y^*).$$

Если для матрицы A оба собственных значения имеют отличные от нуля вещественные части, то есть $\operatorname{Re} \lambda_1 \neq 0$, $\operatorname{Re} \lambda_2 \neq 0$, то систему (2.1) называют *грубой системой*.

Теорема 2.1. *Если система (2.1) грубая и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то особая точка (x^*, y^*) системы (2.1) имеет тот же тип, что и для линейной системы (2.2) с матрицей A . При этом сохраняются направления*

подхода траекторий к особой точке (но прямолинейные траектории могут замениться кривыми), направления закручивания и устойчивости.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то, чтобы теорема была верна, нужно дополнительно потребовать, чтобы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имели в области G непрерывные производные не ниже второго порядка.

Следствие 2.1. 1. Если оба собственных значения имеют отрицательную вещественную часть, то состояние равновесия (x^*, y^*) системы (2.1) устойчиво.

2. Если хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть, то состояние равновесия (x^*, y^*) системы (2.1) неустойчиво.

Пример 2.3. Найти и исследовать особые точки данных систем. Нарисовать приблизительное расположение интегральных кривых на плоскости (x, y) .

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases} \quad (2.9)$$

Решение. Чтобы найти особые точки системы (2.9), решим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим y и подставим в первое: $2x^2 - 2 = 0$. Следовательно, $x = y = \pm 1$. Получили две особые точки системы: $M_1 = (1, 1)$, $M_2 = (-1, -1)$.

Найдем производные функций

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 2 \quad \text{и} \quad Q(x, y) = x - y$$

по переменным x и y (при дифференцировании по x считаем, что y — фиксированная постоянная и наоборот):

$$P'_x(x, y) = 2x, \quad P'_y(x, y) = 2y, \quad Q'_x(x, y) = 1, \quad Q'_y(x, y) = -1.$$

Найдем значения этих производных в точке $M_1 = (1, 1)$ составим из них матрицу A_1 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения A_1 находим из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 &= 0, \\ \lambda^2 - \lambda - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ вещественны и разных знаков, поэтому особая точка $M_1 = (1, 1)$ — седло (рис. 9 а)). Собственные векторы, отвечающие этим значениям, равны

$$h_1 = \left(1, \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\right), \quad h_2 = \left(1, \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}\right).$$

Матрицу A_2 составим из производных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в точке $M_2 = (-1, -1)$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ (-2 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2 &= 0, \quad \lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0. \end{aligned}$$

Находим $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{2}$, то есть собственные значения — комплексно-сопряженные, поэтому особая точка $M_2 = (-1, -1)$ — фокус. Вещественная часть $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} < 0$, поэтому фокус устойчивый (рис. 9 б)).

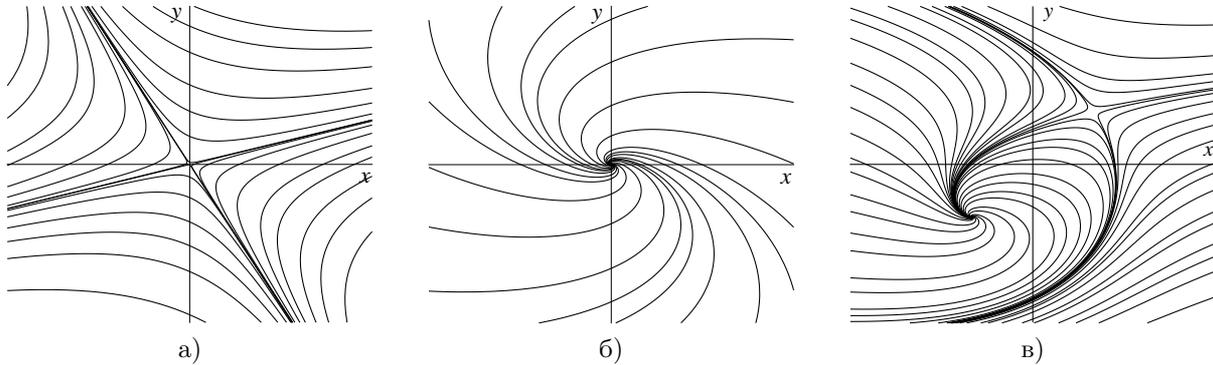


Рис. 9. Фазовый портрет системы (2.9): а) точка $M_1 = (1, 1)$ — седло; б) точка $M_2 = (-1, -1)$ — устойчивый фокус; в) общий вид

Ответ: В точке $M_1 = (1, 1)$ — седло, в точке $M_2 = (-1, -1)$ — фокус.

Модель Лотки–Вольтерра.

Рассмотрим классическую модель взаимодействия видов «хищник–жертва», которую независимо друг от друга предложили американский математик и демограф Альфред Джеймс Лотка (1925 г.) и итальянский математик и механик Вито Вольтерра (1926 г.).

Пусть в некотором замкнутом районе живут хищники и жертвы, например, зайцы и волки. Зайцы могут питаться только растительной пищей, которая имеется всегда в достаточном количестве. Волки могут питаться только зайцами. Обозначим число зайцев через x и число волков через y . У зайцев количество пищи неограничено, поэтому можно предположить, что они размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству, то есть со скоростью αx . Будем предполагать, что рождаемость зайцев превышает из смертность, тогда $\alpha > 0$. Также предполагаем, что убыль зайцев пропорционально количеству встреч зайцев и волков, то есть произведению xy . В свою очередь, число волков растет тем быстрее, чем чаще происходят их встречи с зайцами, то есть оно также пропорционально xy . Также имеет место процесс естественной смертности волков со скоростью, пропорциональной их количеству.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y. \end{cases} \quad (2.10)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.10) к нулю, найдем координаты неподвижных точек системы: $M_1 = (0, 0)$, $M_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Поскольку все коэффициенты системы предполагаются положительными, точка M_2 расположена в положительном квадранте фазовой плоскости. Составим матрицу A из частных производных функций

$$P(x, y) = (\alpha - \beta y)x, \quad Q(x, y) = (-\gamma + \delta x)y :$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & -\gamma + \delta x \end{pmatrix}.$$

В точке $M_1 = (0, 0)$ матрица A диагональна и имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Собственные значения A_1 равны $\lambda_1 = \alpha > 0$ и $\lambda_2 = -\gamma < 0$ — вещественны и разных знаков, поэтому особая точка $M_1 = (0, 0)$ — седло (рис. 10 а)). Собственные векторы $h_1 = (1, 0)^*$, $h_2 = (0, 1)^*$.

Найдем матрицу из частных производных в точке $M_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \frac{\gamma}{\delta} \\ \delta \frac{\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

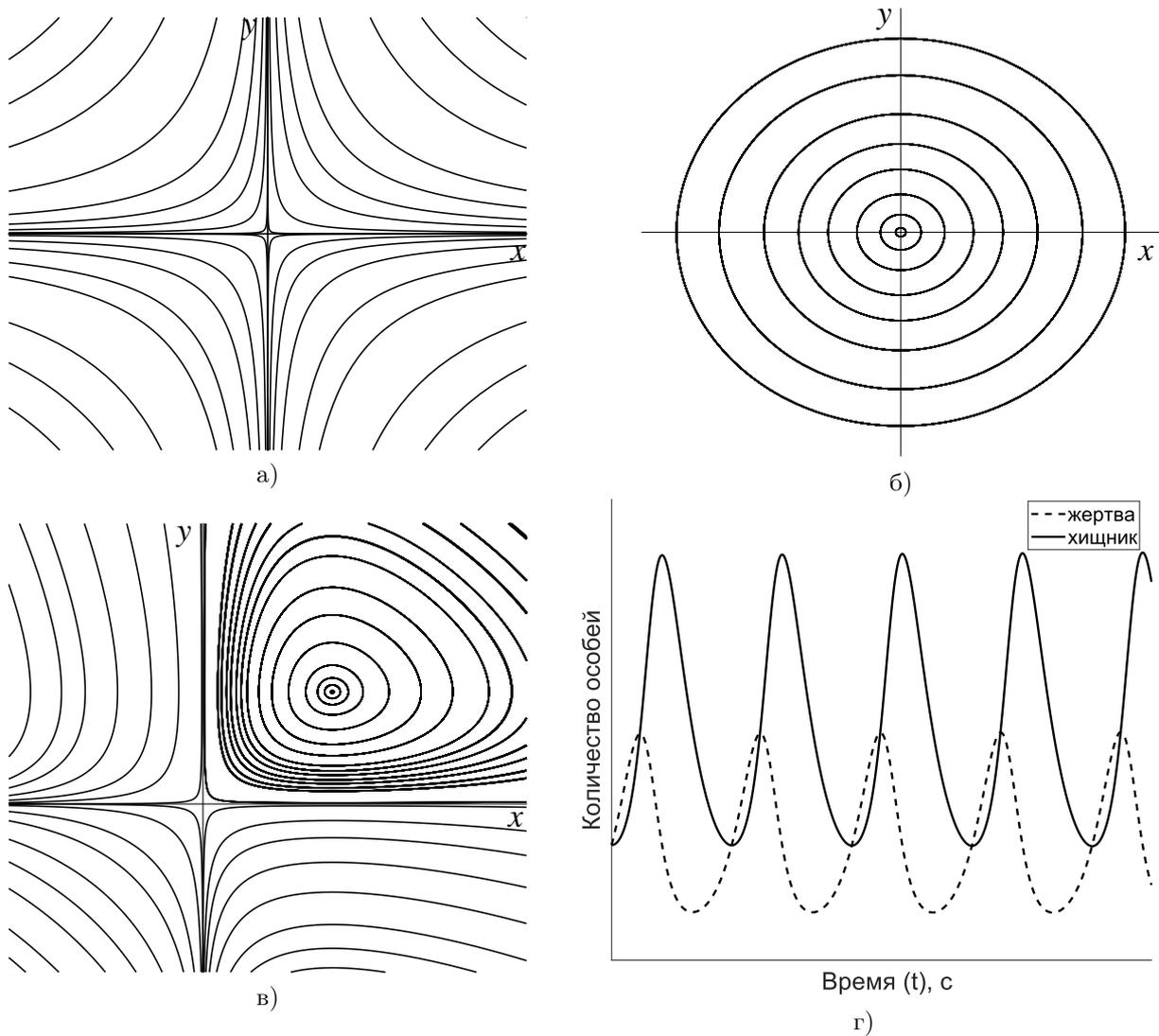


Рис. 10. Фазовый портрет системы (2.10): а) точка $M_1 = (0, 0)$ — седло;
 б) точка $M_2 = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ — центр; в) общий вид;
 г) динамика численности популяций

Характеристическое уравнение для A_2 имеет вид

$$\lambda^2 + \alpha\gamma = 0,$$

его корни $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\gamma}i$ имеют нулевую вещественную часть, поэтому особая точка — центр (рис. 10 б)).

Недостатком рассмотренной модели является неустойчивость решений по отношению к малым случайным воздействиям. Следующая модификация данной системы лишена этого недостатка.

Модель «хищник–жертва», учитывающая самоограничение в росте обеих популяций.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y - cx)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x - dy)y, \end{cases} \quad (2.11)$$

которая отличается от системы (2.11) наличием в правой части слагаемых $-cx^2$, $-dy^2$. Такие слагаемые появляются в силу того, что популяция жертв не может расти неограниченно даже при отсутствии хищников из-за ограниченности пищевых ресурсов и ареала существования. Подобные «самоограничения» накладываются и на популяцию хищников.

Пример 2.4. Исследовать особые точки системы, задающей модель отбора одного из двух равноправных видов

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \gamma xy, \\ \frac{dy}{dt} = ay - \gamma xy. \end{cases} \quad (2.12)$$

Здесь a — коэффициент репродукции, γ — вероятность гибели в результате встречи. Нарисовать фазовый портрет системы и показать, что стационарные решения зависят не только от параметров, но и от начальных условий системы.

Решение. Чтобы найти особые точки системы (2.12), приравняем к нулю правые части:

$$ax - \gamma xy = 0, \quad ay - \gamma xy = 0.$$

Имеем две особые точки:

$$M_1 = (0, 0) \quad \text{и} \quad M_2 = (a/\gamma, a/\gamma).$$

Характеристическое уравнение системы (2.12) в точке $M_1 = (0, 0)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & a - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ и особая точка $M_1 = (0, 0)$ — неустойчивый узел. Для $M_2 = (a/\gamma, a/\gamma)$ имеем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -a \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = \pm a$ (корни вещественны и разных знаков) и особая точка M_2 — седло.

Триггерные системы. Отбор одного из двух равноправных.

Слово *триггер* означает *переключатель*. Под триггерными системами дифференциальных уравнений будем понимать системы, в которых поведение решений во времени и стационарные решения зависят не только от параметров, но и от начальных условий.

Рассмотрим простейший вариант триггерной системы на примере модели конкуренции двух равноправных объектов x и y (см. [10], [13])

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \gamma xy, \\ \dot{y} = ay - \gamma xy. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь $a > 0$ — эффективный коэффициент репродукции, $\gamma > 0$ — вероятность гибели в результате встречи. Величины a и γ считаются одинаковыми у всех объектов, что означает равноправие разных типов. Эта модель представляет, кроме методического, самостоятельный интерес, поскольку на ее основе можно рассмотреть вопрос о происхождении оптической активности биологических веществ.

Хорошо известно, что во всех организмах используются левые сахара и правые аминокислоты. Противоположные изомеры не только не встречаются в организмах, но и не усваиваются ими и даже часто являются ядами. С другой стороны, ясно, что «зеркальные» организмы

не лучше и не хуже существующих и поэтому имеют равное право на существование. В неживой природе оптически активные вещества встречаются в виде рацемических смесей, содержащих одинаковое количество зеркальных изомеров. В этой связи следует думать, что и первичное вещество во вселенной также было рацемической смесью. Поэтому в момент зарождения жизни «левые» и «правые» организмы имели равное право на возникновение.

Для описания процесса выживания одних и исчезновения других можно использовать модель (2.13). При этом под x и y следует понимать концентрации оптически активных веществ в соответствующих популяциях: x — левых и y — правых. Члены γxy описывают гибель обоих организмов при взаимодействии и отравлении. В системе имеются два стационарных состояния — точки

$$M_1(0, 0) \text{ и } M_2\left(\frac{a}{\gamma}, \frac{a}{\gamma}\right).$$

Обе они неустойчивы. Точка M_1 является неустойчивым узлом (рис. 11 а)), M_2 — седлом (рис. 11 б)). Через эти точки проходит сепаратриса, из-за симметрии системы она совпадает с биссектрисой первого координатного угла.

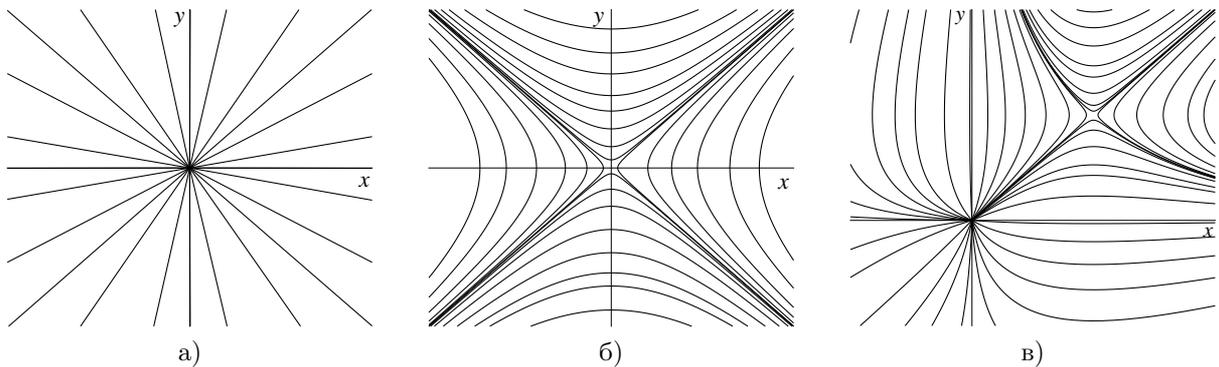


Рис. 11. Фазовый портрет системы (2.13): а) точка $M_1 = (0, 0)$ — неустойчивый узел; б) точка $M_2 = \left(\frac{a}{\gamma}, \frac{a}{\gamma}\right)$ — седло; в) общий вид

Построив фазовый портрет системы, можно убедиться, что рассматриваемая система является триггерной — в зависимости от начальных условий траектории устремляются либо к одной, либо к другой стационарной точке, но эти точки удалены на бесконечность. Смысл этого

результата следующий — поскольку развитие популяций в модели не лимитируется, рост числа особей одного из видов происходит неограниченно. Очень важен тот факт, что точка M_2 является седлом.

Это означает, что рацемическая смесь популяций неустойчива и под влиянием сколь угодно малого возмущения переходит либо в режим возрастания x и вымирания y , либо в противоположный режим. Таким образом, неустойчивость симметричного стационарного состояния является основной причиной биологической асимметрии.

Вопросы и задания.

1. Модель (2.13) демонстрирует биологический смысл отбора одного из двух равноправных видов. Проиллюстрируйте это на примере таких видов, как рыжие муравьи и черные муравьи.

2. Покажите, что для системы (2.13) точка $M_1(0, 0)$ является неустойчивым узлом, а точка $M_2\left(\frac{a}{\gamma}, \frac{a}{\gamma}\right)$ — седлом.

3. Найдите аналитическое решение системы (2.13). Для этого можно использовать то, что уравнением фазовых траекторий данной системы является

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(1 - \gamma x)}{x(1 - \gamma y)}$$

и система имеет очевидный интеграл $y - x = Ce^{at}$.

3. ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ

Для описания динамики некоторых видов растений и животных модели, построенные на основании систем дифференциальных уравнений, оказываются малопригодными по причинам сезонного характера размножения или моментального изменения численности популяции в результате добавления или изъятия некоторого количества биомассы. Для таких видов более приемлемы математические модели с непрерывно-дискретным поведением траекторий, построенные на основе систем дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \quad \Delta x|_{t=\tau_k} = g(x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Примеры таких моделей приведены в [2, с. 183–229], [6, с. 68–76], [7].

Пример 3.1. Модель популяции, подверженной промыслу (задача о ловле карасей). Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок фиксированы, а размеры этих заготовок пропорциональны количеству биомассы, имеющейся перед моментом заготовки. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением

$$\dot{x} = x(1 - x)$$

и в моменты времени $\tau_k = kh$ некоторая доля биомассы Cx изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = x(1 - x), \quad t \neq kh, \quad \Delta x|_{t=kh} = -Cx, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (3.1)$$

где $C \in (0, 1)$, $h > 0$. Найти периодическое решение уравнения (3.1), исследовать устойчивость периодического решения и нулевого решения.

Решение. Если $t \neq kh$, то решением логистического уравнения $\dot{x} = x(1 - x)$, удовлетворяющим начальному условию $x(t, x_0) = x_0$, является функция

$$x(t, x_0) = \frac{x_0 e^t}{1 - x_0 + x_0 e^t}.$$

(это решение получено в первой главе для модели ограниченного роста, в формуле (1.5) нужно положить $K = r = 1$). Следовательно, перед первым моментом изъятия h размер популяции равен

$$x(h - 0, x_0) = \frac{x_0 e^h}{1 - x_0 + x_0 e^h}.$$

В момент h из популяции извлекается часть биомассы $Cx(h - 0, x_0)$, поэтому после изъятия останется

$$x(h, x_0) = x(h - 0, x_0) - Cx(h - 0, x_0) = \frac{(1 - C)x_0 e^h}{1 - x_0 + x_0 e^h}.$$

Решение системы (3.1) будет периодическим, если размер популяции $x(h, x_0)$ в момент времени h будет совпадать с начальным размером x_0 (тогда $x(2h, x_0)$ будет совпадать с $x(h, x_0)$ и так далее). Поэтому для нахождения x_0 решим уравнение $x(h, x_0) = x_0$:

$$\begin{aligned} \frac{(1 - C)x_0 e^h}{1 - x_0 + x_0 e^h} &= x_0, \\ \frac{(1 - C)x_0 e^h}{1 - x_0 + x_0 e^h} - x_0 &= 0, \\ \frac{(1 - C)x_0 e^h - x_0(1 - x_0 + x_0 e^h)}{1 - x_0 + x_0 e^h} &= 0, \\ x_0((1 - C)e^h - 1 + x_0 - x_0 e^h) &= 0, \end{aligned}$$

следовательно, $x_0 = x_1^* = 0$ или

$$x_0 = x_2^* = \frac{(1 - C)e^h - 1}{e^h - 1}.$$

Если $x_0 = 0$, получаем нулевое решение: $x(t) = 0$ для всех $t \geq 0$. При $x_0 = x_2^*$ имеем периодическое решение уравнения (3.1) с периодом h , которое на промежутке $[0, h)$ задается равенством

$$x(t, x_2^*) = \frac{x_2^* e^t}{1 + x_2^* (e^t - 1)} = \frac{((1 - C)e^h - 1)e^t}{e^{h+t}(1 - C) + Ce^h - e^t}.$$

Отметим, что данное периодическое решение существует только если

$$(1 - C)e^h - 1 > 0,$$

то есть $C < 1 - e^{-h}$. Последнее неравенство означает, какую долю биомассы можно вылавливать через промежутки времени h , чтобы у популяции существовало ненулевое периодическое решение.

Пусть $y_n = x(nh, x_0)$, тогда

$$y_{n+1} = f(y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2)$$

где $f(y) = \frac{(1 - C)ye^h}{1 - y + ye^h}$. Точки $x_1^* = 0$ и x_2^* являются неподвижными точками уравнения (3.2). Найдем

$$f'(y) = \frac{(1 - C)e^h}{(1 - y + ye^h)^2}.$$

Тогда

$$f'(0) = (1 - C)e^h, \quad f'(x_2^*) = \frac{1}{(1 - C)e^h}.$$

Нулевое решение устойчиво, если $f'(0) < 1$, то есть $C \geq 1 - e^{-h}$ и неустойчиво, если $f'(0) > 1$, то есть $C < 1 - e^{-h}$. Периодическое решение устойчиво, если $C < 1 - e^{-h}$; если же $C \geq 1 - e^{-h}$, то периодическое решение не существует.

Пример 3.2. Дискретно-непрерывная модель динамики двуполой популяции.

В рамках модели предполагается, что рождаемость особей некоторой популяции носит дискретный характер и появление особей новых поколений происходит в фиксированные моменты времени $t_k = kh$, где $h > 0$, $k = 1, 2, \dots$, а смертность имеет непрерывный характер (свойства данной модели более полно описаны в [7]). Будем предполагать, что на каждом промежутке $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, 2, \dots$ происходит монотонное снижение численности обоих полов в результате естественной гибели и

действия процессов саморегуляции. Тогда динамика популяции задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -\alpha_1 x - \beta_1 x(x + \gamma y), \quad \dot{y} = -\alpha_2 y - \beta_2 y(x + \gamma y), \quad (3.3)$$

где $x(t)$ — количество мужских и $y(t)$ — количество женских особей в момент времени t , α_1, α_2 — коэффициенты естественной гибели особей, β_1, β_2 — коэффициенты саморегуляции. Коэффициент γ отражает неравнозначность вклада особей различных полов в процесс саморегуляции, все коэффициенты положительные.

Обозначим через $x(t_k - 0), y(t_k - 0)$ численности особей соответствующих полов, выживших к моменту размножения t_k , через f — численность оплодотворенных самок. В наиболее простом случае

$$f = \min\{x(t_k - 0), y(t_k - 0)\}.$$

Пусть $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$ — среднее число потомков мужского и женского полов, порождаемых одной самкой, тогда в момент t_k появления особей новых генераций выполняются соотношения

$$x(t_k) = m_1 f, \quad y(t_k) = m_2 f. \quad (3.4)$$

Будем считать, что в начальный момент времени численности обоих полов положительные: $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$ и $h = 1$.

4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧИ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА

Предположим, что при отсутствии эксплуатации развитие некоторой популяции задано дифференциальным уравнением $\dot{x} = f(x)$. В данном пособии изучаем популяцию, заданную логистическим уравнением

$$\dot{x} = (a - bx)x, \quad (4.1)$$

где коэффициенты a и b являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно, а в моменты времени $\tau_k = kd$ из популяции извлекается некоторая доля ресурса u_k , $k = 1, 2, \dots$. Задачи оптимальной добычи ресурса для других моделей однородных и структурированных популяций рассмотрены в [3]. С обзором современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций можно познакомиться в [17].

Таким образом, мы исследуем модель популяции, подверженной промыслу, в которой в моменты времени $\tau_k = kd$ из популяции изымается некоторая доля ресурса u_k :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (a - bx)x, \quad t \neq kd, \\ \Delta x \Big|_{t=kd} &= -u_k x, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим задачу — как нужно регулировать доли заготовок

$$u = (u_1, u_2, \dots),$$

чтобы величина ресурса, извлеченного за конечное число сборов или средняя временная выгода за бесконечное число сборов

$$H(\bar{u}, x_0) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(u_1, \dots, u_{k-1}, x_0) u_k$$

были максимальными? Здесь x_0 — начальное количество ресурса, $X_k = X_k(u_1, \dots, u_{k-1}, x_0)$ — количество ресурса до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$

Оптимизация величины ресурса, извлеченного за конечное число сборов.

Предположим, что можно производить заготовки в моменты времени kd , $k = 1, 2, \dots, m$, где $m \geq 2$, $d > 0$. Найдем u_1, \dots, u_m , при которых количество ресурса за m изъятий

$$h(u_1, \dots, u_m, x_0) \doteq \sum_{k=1}^m X_k(u_1, \dots, u_{k-1}, x_0) u_k$$

при фиксированном $x_0 > 0$ является максимальным. Отметим, что $h(u_1, \dots, u_m, 0) = 0$ при любых $(u_1, \dots, u_m) \in [0, 1]^m$. Обозначим через $x_k = x_k(u_1, \dots, u_k, x_0)$ количество ресурса после сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots, m$, тогда $x_k = X_k(1 - u_k)$. Решая уравнение (4.1), находим, что

$$X_{k+1} = \frac{ae^T x_k}{bx_k(e^T - 1) + a}, \quad \text{где } T = ad, \quad k = 0, 1, \dots$$

Следовательно,

$$X_{k+1} = \frac{ae^T X_k(1 - u_k)}{bX_k(1 - u_k)(e^T - 1) + a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Найдем $(u_1^*, \dots, u_m^*) \in [0, 1]^m$, при которых достигается максимальное значение функции $(u_1, \dots, u_m) \mapsto h(u_1, \dots, u_m, x_0)$. Поскольку $h'_{u_m} = X_m \geq 0$, то $u_m^* = 1$. Далее,

$$h'_{u_{m-1}} = X_{m-1} + (X_m)'_{u_{m-1}}.$$

Из (4.3) получаем, что уравнение $h'_{u_{m-1}} = 0$ имеет вид

$$X_{m-1} + \left(\frac{ae^T X_{m-1}(1 - u_{m-1})}{bX_{m-1}(1 - u_{m-1})(e^T - 1) + a} \right)'_{u_{m-1}} = 0.$$

Так как $X_{m-1} > 0$ при $x_0 > 0$, то

$$\frac{a^2 e^T}{(bX_{m-1}(1 - u_{m-1})(e^T - 1) + a)^2} = 1;$$

тогда

$$u_{m-1}^* = \max\left\{1 - \frac{a}{b(e^{T/2} + 1)X_{m-1}(u_1^*, \dots, u_{m-2}^*, x_0)}, 0\right\}.$$

Аналогично,

$$u_k^* = \max\left\{1 - \frac{a}{b(e^{T/2} + 1)X_k(u_1^*, \dots, u_{k-1}^*, x_0)}, 0\right\}$$

для любого $k = 1, \dots, m - 1$.

Покажем, что если $u_k^* > 0$, то $u_{k+1}^* > 0$. Действительно, если $u_k^* > 0$, то из (4.3) следует, что

$$X_{k+1}(u_1^*, \dots, u_k^*, x_0) = \frac{ae^{T/2}}{b(e^{T/2} + 1)},$$

тогда $u_{k+1}^* = 1 - e^{-T/2} > 0$. Таким образом, найдется $k_0 \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $u_k^* > 0$ для всех $k = k_0, \dots, m$ и $u_k^* = 0$ для всех $k = 1, \dots, k_0 - 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} X_{k_0} &= X_{k_0}(u_1^*, \dots, u_{k_0-1}^*, x_0) = \frac{ax_0e^{k_0T}}{bx_0(e^{k_0T} - 1) + a}, \\ u_{k_0}^* &= 1 - \frac{a}{b(e^{T/2} + 1)X_{k_0}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее,

$$X_k = \frac{ae^{T/2}}{b(e^{T/2} + 1)} \quad \text{для всех } k = k_0 + 1, \dots, m$$

и $u_k^* = 1 - e^{-T/2}$ для всех $k = k_0 + 1, \dots, m - 1$. Напомним, что $u_m^* = 1$. Таким образом,

$$h(u_1^*, \dots, u_m^*, x_0) = X_{k_0} + (m - k_0) \frac{a(e^{T/2} - 1)}{b(e^{T/2} + 1)} \quad (4.5)$$

для любого $k_0 = 1, \dots, m$.

Оптимизация средней временной выгоды.

Пусть $k_0 = k_0(x_0)$ — наименьшее натуральное число, такое, что $u_{k_0}^* > 0$. Тогда максимальная средняя временная выгода равна

$$H(\bar{u}^*, x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h(u_1^*, \dots, u_n^*, x_0),$$

где $u_k^* = 0$ для всех $k = 1, \dots, k_0 - 1$, $u_{k_0}^*$ удовлетворяет (4.4) и

$$u_k^* = 1 - e^{-T/2} \quad \text{для всех } k > k_0.$$

Из (4.5) получаем, что предел $H(\bar{u}^*, x_0)$ существует, не зависит от x_0 (если $x_0 > 0$) и

$$H(\bar{u}^*, x_0) = \frac{a(e^{T/2} - 1)}{b(e^{T/2} + 1)}.$$

5. ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧЕ РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ

Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Предполагаем, что в моменты времени $\tau(k) = kd$, $d > 0$ из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса

$$u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

что приводит к мгновенному уменьшению его количества. Если $n \geq 2$, то ресурс $x \in \mathbb{R}_+^n$ является неоднородным, то есть либо состоит из отдельных видов x_1, \dots, x_n , либо разделен на n возрастных групп. В частности, можно предполагать, что мы рассматриваем добычу n различных видов рыб, между которыми существуют отношения конкуренции за пищу или места обитания, или среди этих видов могут быть хищные. Отметим, что в данной работе в скобках мы обозначаем временные, а нижними индексами — пространственные параметры; например, через $u_i(k)$ обозначается доля ресурса i -го вида, извлеченного из популяции в момент kd .

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана управляемой системой с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x), \quad t \neq kd, \\ x_i(kd) &= (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $x_i(kd - 0)$ и $x_i(kd)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент kd соответственно, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots$. Предполагаем, что решения данной системы непрерывны справа, функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы для всех $x \in \mathbb{R}_+^n$.

Всюду в данном параграфе предполагаем, что решение

$$\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$$

системы $\dot{x} = f(x)$ (без импульсного воздействия) является неотрицательным при любых неотрицательных начальных условиях. Чтобы данное условие выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ удовлетворяли *условию квазиположительности* (см. [4, с. 34]):

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Из равенств

$$x_i(kd) = (1 - u_i(k)) \cdot x_i(kd - 0)$$

в (5.1) следует, что решение системы (5.1) при выполнении условия квазиположительности также неотрицательное при любых неотрицательных начальных условиях.

Пусть $X_i(k) = x_i(kd - 0)$ — количество ресурса i -го вида до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$, зависящее от долей ресурса $u(1), \dots, u(k-1)$, собранного в предыдущие моменты времени и начального количества $x(0)$. Обозначим через $C_i \geq 0$ стоимость ресурса i -го вида (в предположении, что C_i одновременно не равны нулю). Тогда общая стоимость собранного ресурса в момент kd равна

$$Y(k) = \sum_{i=1}^n C_i X_i(k) u_i(k).$$

Определение 5.1. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса называется функция

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j). \quad (5.2)$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*(\bar{u}, x(0))$ и, если выполнено равенство

$$H_*(\bar{u}, x(0)) = H^*(\bar{u}, x(0)),$$

то определим предел

$$H(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y(j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j).$$

Приведем оценки функции (5.2) для однородной популяции ($n = 1$) и структурированной популяции, разделенной на $n \geq 2$ групп. Опишем способ добычи ресурса для режима сбора в долгосрочной перспективе, при котором постоянно сохраняется некоторая часть популяции, необходимая для ее дальнейшего восстановления и достигается максимальная средняя временная выгода. Результаты исследования будут проиллюстрированы на примерах моделей взаимодействия двух видов, таких как конкуренция и симбиоз. Для этих моделей получены оценки функции $H_*(\bar{u}, x(0))$, в некоторых случаях для модели конкуренции получены точные значения $H_*(\bar{u}, x(0))$.

Вычисление средней временной выгоды в случае $n = 1$

В предыдущем параграфе исследуется средняя временная выгода для эксплуатируемой популяции (5.1), заданной логистическим уравнением $\dot{x} = (a - bx)x$. Описан способ добычи ресурса $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \dots)$, при котором достигается наибольшее значение функции $H_*(\bar{u}, x(0))$. В данном разделе подобные результаты получены для автономного дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \in \mathbb{R}_+ \doteq [0, +\infty)$. Предполагаем также, что $f(x)$ удовлетворяет условию квазиположительности, которое при $n = 1$ имеет вид $f(0) \geq 0$. Без ограничения общности будем полагать $C_1 = 1$, тогда

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X(j) u(j).$$

Пусть $\bar{u}(k) \doteq (u(1), \dots, u(k)) \in [0, 1]^k$. Сначала докажем утверждение об оптимальном режиме эксплуатации $\bar{u}^*(k) = (u^*(1), \dots, u^*(k))$ на конечном промежутке времени, для этого введем в рассмотрение функцию

$$h(\bar{u}(k), x(0)) \doteq \sum_{j=1}^k X(j) u(j). \quad (5.3)$$

Обозначим через $\varphi(t, x)$ решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(x),$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Утверждения данного параграфа получены в работе [1].

Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \varphi(d, x) - x.$$

Теорема 5.1. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0) \geq 0$, такого, что $X(1) = \varphi(d, x(0)) \geq x^*$, функция $h(\bar{u}(k), x(0))$ достигает наибольшего значения

$$h(\bar{u}^*(k), x(0)) = (k - 1) \cdot D(x^*) + X(1) \quad (5.4)$$

на множестве $[0, 1]^k$ при следующем режиме эксплуатации:

- (1) если $k = 1$, то $\bar{u}^*(1) = u^*(1) = 1$;
- (2) если $k = 2$, то $\bar{u}^*(2) = (u^*(1), u^*(2))$, где $u^*(1) = 1 - \frac{x^*}{X(1)}$, $u^*(2) = 1$;
- (3) если $k \geq 3$, то $\bar{u}^*(k) = (u^*(1), \dots, u^*(k))$, где $u^*(1) = 1 - \frac{x^*}{X(1)}$;
 $u^*(j) = 1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)}$ при $j = 2, \dots, k - 1$; $u^*(k) = 1$.

Доказательство. Отметим, что $\varphi(d, x(0)) \geq x^* > 0$, поэтому

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*}{X(1)} \in [0, 1).$$

В силу условия квазиположительности $D(0) = \varphi(d, 0) \geq 0$, тогда

$$D(x^*) > D(0) \geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно $\varphi(d, x^*) > x^*$, откуда получаем $u^*(j) = 1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} > 0$; кроме того, $x^* > 0$, поэтому $0 < u^*(j) < 1$ при $j = 2, \dots, k - 1$.

Если $k = 1$, то максимальное значение функции

$$h(\bar{u}(1), x(0)) = X(1)u(1)$$

достигается при $\bar{u}^*(1) = u^*(1) = 1$ и равно $h(\bar{u}^*(1), x(0)) = X(1)$.

Далее рассматриваем $k \geq 2$. При режиме эксплуатации

$$\bar{u}^*(k) = (u^*(1), \dots, u^*(k)),$$

указанном в условии теоремы, найдем

$$\begin{aligned} x(1) &= (1 - u^*(1))X(1) = (1 - u^*(1))\varphi(d, x(0)) = \\ &= \frac{x^*}{\varphi(d, x(0))} \varphi(d, x(0)) = x^*. \end{aligned} \quad (5.5)$$

тогда $X(2) = \varphi(d, x(1)) = \varphi(d, x^*)$ и

$$x(j) = (1 - u^*(j))X(j) = \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} \varphi(d, x^*) = x^*, \quad j = 2, \dots, k. \quad (5.6)$$

Подставляя данные значения $x(1), \dots, x(k)$ и $\bar{u}^*(k)$ в (5.3), получаем равенство (5.4).

Возьмем $x(0)$ такое, что $\varphi(d, x(0)) \geq x^*$. Докажем, что

$$h(\bar{u}(k), x(0)) \leq h(\bar{u}^*(k), x(0)) = (k - 1) \cdot D(x^*) + \varphi(d, x(0)) \quad (5.7)$$

для любых $\bar{u}(k) \in [0, 1]^k$. Отметим, что $D(x)$ достигает наибольшего значения в точке $x^* > 0$, поэтому для всех Δx , таких, что $x^* + \Delta x \geq 0$, выполнено неравенство $D(x^* + \Delta x) \leq D(x^*)$, которое равносильно

$$\varphi(d, x^* + \Delta x) - x^* - \Delta x \leq \varphi(d, x^*) - x^*.$$

Из последнего неравенства получаем

$$\varphi(d, x^* + \Delta x) \leq \varphi(d, x^*) + \Delta x. \quad (5.8)$$

Представим управление $u(j) \in [0, 1]$ в виде $u(j) = u^*(j) + \Delta u(j)$, $j = 1, \dots, k$. Найдем

$$\begin{aligned} h(\bar{u}(k), x(0)) &\doteq \sum_{j=1}^k X(j)u(j) = \sum_{j=1}^k X(j)(u^*(j) + \Delta u(j)) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} X(j)(u^*(j) + \Delta u(j)) + X(k)(1 + \Delta u(k)). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Оценим последнее слагаемое в (5.9). Так как $u^*(k) = 1$, то $\Delta u(k) \leq 0$ и

$$X(k)(1 + \Delta u(k)) \leq X(k). \quad (5.10)$$

Пусть $k = 2$, тогда из (5.10) следует

$$\begin{aligned} h(\bar{u}(2), x(0)) &\doteq \sum_{j=1}^2 X(j)u(j) \leq X(1)(u^*(1) + \Delta u(1)) + X(2) = \\ &= X(1)\left(1 - \frac{x^*}{X(1)} + \Delta u(1)\right) + X(2) = \\ &= X(1) - x^* + X(1)\Delta u(1) + X(2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Учитывая (5.8), получаем неравенство

$$\begin{aligned} X(2) &= \varphi(d, (1 - u(1))X(1)) = \varphi\left(d, \left(\frac{x^*}{X(1)} - \Delta u(1)\right)X(1)\right) = \\ &= \varphi(d, x^* - \Delta u(1)X(1)) \leq \varphi(d, x^*) - \Delta u(1)X(1). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Таким образом, из (5.11) и (5.12) имеем

$$\begin{aligned} h(\bar{u}(2), x(0)) &\leq X(1) - x^* + X(1)\Delta u(1) + \varphi(d, x^*) - \Delta u(1)X(1) = \\ &= X(1) + \varphi(d, x^*) - x^* = X(1) + D(x^*), \end{aligned} \quad (5.13)$$

то есть при $k = 2$ утверждение теоремы выполнено.

Далее, если $k \geq 3$, то

$$\begin{aligned}
u(k-1) &= u^*(k-1) + \Delta u(k-1) = 1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} + \Delta u(k-1), \\
X(k) &= \varphi(d, (1 - u(k-1))X(k-1)) = \\
&= \varphi\left(d, \left(\frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} - \Delta u(k-1)\right)X(k-1)\right).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\Delta x(k-1) \doteq \left(\frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} - \Delta u(k-1)\right)X(k-1) - x^*;$$

тогда $X(k) = \varphi(d, x^* + \Delta x(k-1))$. Учитывая (5.8), получаем

$$\begin{aligned}
X(k) &= \varphi(d, x^* + \Delta x(k-1)) \leq \varphi(d, x^*) + \Delta x(k-1) = \\
&= \varphi(d, x^*) + \left(\frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} - \Delta u(k-1)\right)X(k-1) - x^* = \\
&= D(x^*) + \left(\frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} - \Delta u(k-1)\right)X(k-1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k-1} X(j)u(j) + X(k) \leq \sum_{j=1}^{k-2} X(j)u(j) + D(x^*) + \\
&+ X(k-1)\left(1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} + \Delta u(k-1)\right) + \left(\frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} - \Delta u(k-1)\right)X(k-1) = \\
&= \sum_{j=1}^{k-2} X(j)u(j) + X(k-1) + D(x^*). \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Далее, из (5.10), (5.13) и (5.14) (при $k \geq 3$) следуют неравенства

$$\begin{aligned}
h(\bar{u}(k), x(0)) &\doteq \sum_{j=1}^k X(j)u(j) \leq \sum_{j=1}^{k-1} X(j)u(j) + X(k) \leq \\
&\leq D(x^*) + \sum_{j=1}^{k-2} X(j)u(j) + X(k-1) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2D(x^*) + \sum_{j=1}^{k-3} X(j)u(j) + X(k-2) \leq \dots \leq \\
&\leq (k-2)D(x^*) + X(1)u(1) + X(2) \leq \\
&\leq (k-1)D(x^*) + X(1) = h(\bar{u}^*(k), x(0)).
\end{aligned}$$

Таким образом, $h(\bar{u}(k), x(0)) \leq h(\bar{u}^*(k), x(0))$ для всех $\bar{u}(k) \in [0, 1]^k$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. Пусть функция $D(x) = \varphi(d, x) - x$ достигает максимального значения в точке $x^* > 0$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+$, такого, что $X(1) = \varphi(d, x(0)) \geq x^*$, функция $H_*(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*)$$

на множестве U при режиме эксплуатации \bar{u}^* , где $u^*(1) = 1 - \frac{x^*}{X(1)}$; $u^*(k) = 1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)}$ при всех $k \geq 2$.

Доказательство. Пусть $X(1) \geq x^*$. Разделим (5.7) на k и перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
H(\bar{u}, x(0)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\bar{u}(k), x(0))}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\bar{u}^*(k), x(0))}{k} = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(\bar{u}^*(k), x(0))}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k} D(x^*) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{X(1)}{k} = D(x^*).
\end{aligned}$$

Покажем, что при способе эксплуатации \bar{u}^* , приведенном в условии теоремы, выполнено равенство

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*).$$

Для этого аналогично (), (5.35) получаем, что при данных управлениях $x(j) = x^*$ для всех $j \geq 1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
H(\bar{u}^*, x(0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} h(\bar{u}^*(k), x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X(j) u^*(j) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(X(1) \left(1 - \frac{x^*}{X(1)} \right) + (k-1) \varphi(d, x^*) \left(1 - \frac{x^*}{\varphi(d, x^*)} \right) \right) = \\
&= 0 + \varphi(d, x^*) - x^* = D(x^*).
\end{aligned}$$

Следовательно, $H(\bar{u}, x(0)) \leq D(x^*) = H(\bar{u}^*, x(0))$ для всех $\bar{u} \in U$.

Принцип построения управления и оценка средней временной выгоды в многомерном случае

Вернемся к исследованию популяции, динамика которой задана системой (5.1). Здесь также обозначаем через

$$\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$$

решение системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}_+^n$. Отметим, что $X(1) = \varphi(d, x(0))$, поэтому $X_i(1) = \varphi_i(d, x(0))$, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\bar{u}(k) \doteq (u(1), \dots, u(k))$, где

$$u(j) = (u_1(j), \dots, u_n(j)) \in [0, 1]^n, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Для любого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$h(\bar{u}(k), x(0)) \doteq \sum_{j=1}^k Y(j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j),$$

равную стоимости ресурса, полученного за k изъятий. Предположим, что для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ решения $\varphi(t, x)$ системы $\dot{x} = f(x)$ существуют при $t \in [0, d]$, где $d > 0$. Введем в рассмотрение функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i).$$

Теорема 5.3. Пусть функция $D(x)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*)$ для любого

$i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, функция $h(\bar{u}(k), x(0))$ достигает наибольшего значения

$$h(\bar{u}^*(k), x(0)) = (k - 1) \cdot D(x^*) + \sum_{i=1}^n C_i x_i(0) \quad (5.15)$$

на множестве $[0, 1]^{kn}$ при следующем режиме эксплуатации:

- (1) если $k = 1$, то $u^*(1) = (1, \dots, 1)$;
- (2) если $k = 2$, то $\bar{u}^*(2) = (u^*(1), u^*(2))$,
 $u^*(1) = \left(1 - \frac{x_1^*}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{X_n(1)}\right)$, $u^*(2) = (1, \dots, 1)$;
- (3) если $k \geq 3$, то $\bar{u}^*(k) = (u^*(1), \dots, u^*(k))$, где
 $u^*(1) = \left(1 - \frac{x_1^*}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{X_n(1)}\right)$;
 $u^*(j) = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x^*)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x^*)}\right)$ при $j = 2, \dots, k - 1$;
 $u^*(k) = (1, \dots, 1)$.

Замечание. Предположим, что существует номер $\ell \in \{1, \dots, n\}$ (или несколько таких номеров), что в точке x^* выполнены равенства $x_\ell^* = 0$ и $\varphi_\ell(d, x^*) = 0$. Тогда $u_\ell^*(1) = 1$, $u_\ell^*(j) = 0$ при $j = 2, \dots, k$ и если $i \neq \ell$, то

$$u_i^*(1) = 1 - \frac{x_i^*}{X_i(1)}, \quad u_i^*(j) = 1 - \frac{x_i^*}{\varphi_i(d, x^*)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

При данных управлениях функция $h(\bar{u}(k), x(0))$ достигает наибольшего значения (5.15), где $D(x^*) = \sum_{i \neq \ell} C_i (\varphi_i(d, x^*) - x_i^*)$.

Теорема 5.4. Предположим, что функция $D(x)$ достигает максимального значения в единственной точке $x^* \in \mathbb{R}_+^n$ и $x_i^* \leq \varphi_i(d, x^*) \neq 0$ для любого $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq x_i^*$, $i = 1, \dots, n$, функция $H_*(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(x^*) = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x^*) - x_i^*)$$

на множестве U при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(1) = \left(1 - \frac{x_1^*}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{X_n(1)}\right);$$

$$u^*(k) = \left(1 - \frac{x_1^*}{\varphi_1(d, x^*)}, \dots, 1 - \frac{x_n^*}{\varphi_n(d, x^*)}\right), \quad k \geq 2.$$

Доказательства последних теорем аналогичны доказательствам в случае $n = 1$, только более громоздкие, поэтому мы здесь их не приводим.

Введем в рассмотрение функцию

$$L(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i f_i(x).$$

Предложение 5.1. Пусть $d > 0$ фиксировано. Тогда

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} D(x) \leq d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x). \quad (5.16)$$

Доказательство. Перейдем от системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ к интегральным уравнениям

$$\varphi_i(t, x) = x_i + \int_0^t f_i(\varphi(s, x)) ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i) = \sum_{i=1}^n C_i \int_0^d f_i(\varphi(s, x)) ds = \\ &= \int_0^d \sum_{i=1}^n C_i f_i(\varphi(s, x)) ds. \end{aligned}$$

Далее, в силу условия квазиположительности, $\varphi(s, x) \in \mathbb{R}_+^n$, поэтому для любых $x \in \mathbb{R}_+^n$, $s \in [0, d]$ имеет место

$$\sum_{i=1}^n C_i f_i(\varphi(s, x)) \leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^n C_i f_i(x) = \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x).$$

Следовательно,

$$D(x) \leq \int_0^d \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x) = d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x). \quad (5.17)$$

Поскольку (5.17) верно для любого $x \in \mathbb{R}_+^n$, из него следует неравенство (5.16).

Вычисление и оценка средней временной выгоды для некоторых моделей взаимодействия двух видов

Модели взаимодействия видов, их классификация, типы стационарных состояний и поведение фазовых траекторий систем подробно описаны в книге Г. Ю. Ризниченко [10, с. 143-157]. Здесь мы приводим оценки средней временной выгоды для моделей конкуренции и симбиоза двух видов. Для модели конкуренции в случае $a \leq b$ получено точное значение средней временной выгоды и описан способ эксплуатации популяции, при котором это значение максимальное.

Пример 5.1. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \quad (5.18)$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a > b$. Отметим, что в этом случае выполнено условие сосуществования двух видов и одна из особых точек системы (5.36) является устойчивым узлом [10, с. 147]. Найти оценки средней временной выгоды для модели конкуренции (5.36).

Решение. Для данной системы аналитически можно найти только решения с определенными начальными условиями. Так, если начальный размер первой популяции $x_1 = 0$, то первое уравнение системы (5.36) имеет решение $\varphi_1(t, (0, x_2)) \equiv 0$, а второе уравнение является логистическим: $\dot{x}_2 = (c - ax_2)x_2$, найдем его решение

$$\varphi_2(d, (0, x_2)) = \frac{ce^{cd}x_2}{c + ax_2(e^{cd} - 1)}.$$

В данном случае функция

$$D(0, x_2) = C_2 \left(\frac{ce^{cd}x_2}{c + ax_2(e^{cd} - 1)} - x_2 \right)$$

достигает наибольшего значения

$$D(0, x_2^*) = \frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

при $x_2^* = \frac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$. Аналогично, если $x_2 = 0$, то наибольшее значение функции $D(x_1, 0)$ равно

$$\frac{cC_1(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Далее, если начальные размеры двух популяций совпадают: $x_1 = x_2$, то система (5.36) имеет решение

$$\varphi_1(d, (x_1, x_1)) = \varphi_2(d, (x_1, x_1)) = \frac{ce^{cd}x_1}{c + (a + b)x_1(e^{cd} - 1)}.$$

В этом случае наибольшее значение функции $D(x) = D(x_1, x_1)$ равно

$$\frac{c(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a + b)(e^{cd/2} + 1)}.$$

Несложно сделать вывод, что если выполнено неравенство

$$a(C_1 + C_2) \geq (a + b) \max(C_1, C_2),$$

которое равносильно

$$a \min(C_1, C_2) \geq b \max(C_1, C_2),$$

то целесообразно извлекать одновременно одинаковое количество особей каждого из видов. Если же

$$a \min(C_1, C_2) < b \max(C_1, C_2),$$

то стоит производить извлечение особей только того вида, который имеет большую стоимость.

Для оценки $D(x)$ сверху применим предложение 5.1, в силу которого нужно найти максимум функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^2 C_i f_i(x) = C_1(c - ax_1 - bx_2)x_1 + C_2(c - ax_2 - bx_1)x_2. \quad (5.19)$$

Найдем стационарную точку $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ функции $L(x)$:

$$x_1^* = \frac{c C_2 (2aC_1 - b(C_1 + C_2))}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{c C_1 (2aC_2 - b(C_1 + C_2))}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

Возможны следующие случаи:

1. $x_1^* > 0, x_2^* > 0$ и x^* является точкой максимума. Применяя критерий Сильвестра, получаем, что данные условия выполнены, если

$$4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2 > 0 \quad \text{и} \quad b(C_1 + C_2) < 2a \min(C_1, C_2). \quad (5.20)$$

Здесь наибольшее значение $L(x)$ равно

$$L(x^*) = \frac{c^2 C_1 C_2 (C_1 + C_2) (a - b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

2. Если не выполнено хотя бы одно из неравенств (5.20), то наибольшее значение $L(x)$ на множестве \mathbb{R}_+^2 достигается в одной из точек $(0, \frac{c}{2a})$ или $(\frac{c}{2a}, 0)$ и равно $\max(C_1, C_2) \frac{c^2}{4a}$.

Таким образом, для системы (5.36) при условии $a > b$ имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{C_1}{a}, \frac{C_2}{a}, \frac{C_1 + C_2}{a + b}\right\} \frac{c(e^{cd/2} - 1)}{e^{cd/2} + 1} &\leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^2} D(x) \leq \\ &\leq \max\left\{\frac{c^2 C_1 C_2 d (C_1 + C_2)(a - b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}, \frac{\max(C_1, C_2) c^2 d}{4a}\right\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Кроме того, могут существовать более оптимальные способы эксплуатации, которые можно найти численными методами. Так, при $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$, $C_1 = 10$, $C_2 = 20$ наибольшее значение функции $D(x_1, x_2)$ достигается в точке $(x_1^*, x_2^*) \approx (0,095; 0,16)$ и приближенно равно 7,039 (значения получены при программировании на языке Python). Для сравнения отметим, что при данных значениях параметров описанные выше способы эксплуатации популяций дают максимальное значение дохода, равное приближенно 6,931. Несложно посчитать, что

$$d \cdot \max_{x \in \mathbb{R}_+^2} L(x) = \frac{160}{21} \approx 7,619.$$

Пример 5.2. Рассмотрим модель конкуренции двух видов (5.36) при условии $a \leq b$. Найти оценки средней временной выгоды. Показать, что здесь можно найти точную формулу для $\max_{x \in \mathbb{R}_+^2} D(x)$.

Решение. Из $a \leq b$ получаем $aC_2 \leq bC_2 \leq b \max(C_1, C_2)$; кроме того, имеем $aC_1 \leq a \max(C_1, C_2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a(C_1 + C_2) &\leq (a + b) \max(C_1, C_2), \\ \frac{C_1 + C_2}{a + b} &\leq \frac{\max(C_1, C_2)}{a}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что при $a \leq b$ наибольшее значение функции $L(x)$ (см. (5.19)) на множестве \mathbb{R}_+^2 равно $\max(C_1, C_2) \frac{c^2}{4a}$. Поэтому, учитывая (5.21), имеем

$$\max(C_1, C_2) \frac{c(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)} \leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^2} D(x) \leq \max(C_1, C_2) \frac{c^2 d}{4a}.$$

Сделаем вывод, что в этом случае предпочтительнее извлекать только один вид ресурса — тот, который имеет большую стоимость. Следующее

утверждение сформулируем при $C_1 \leq C_2$, случай $C_1 > C_2$ рассматривается аналогично.

Утверждение 5.1. Пусть в системе (5.36) $a \leq b$ и $C_1 \leq C_2$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^2$ такого, что $\varphi_2(d, x(0)) \geq x_2^* = \frac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$, функция $H_*(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения

$$H(\bar{u}^*, x(0)) = D(0, x_2^*) = \frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

на множестве U при следующем режиме эксплуатации:

$$u^*(1) = \left(0, 1 - \frac{x_2^*}{\varphi_2(d, x(0))}\right); \quad u^*(k) = (0, 1 - e^{-cd/2}), \quad k \geq 2. \quad (5.22)$$

Доказательство. Докажем, что для системы (5.36) при условиях $a \leq b$, $C_1 \leq C_2$ выполнено равенство

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^2} D(x) = \frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}. \quad (5.23)$$

Напомним, что через

$$\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x_1, x_2), \varphi_2(t, x_1, x_2))$$

мы обозначаем решение системы (5.36), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x = (x_1, x_2)$. Обозначим через $z(t, z(0))$ скалярное произведение векторов (C_1, C_2) и $\varphi(t, x)$, тогда

$$z(t, z(0)) \doteq C_1\varphi_1(t, x_1, x_2) + C_2\varphi_2(t, x_1, x_2),$$

где $z(0) = C_1x_1 + C_2x_2$. Найдем

$$\begin{aligned} \dot{z} &= C_1(c - a\varphi_1 - b\varphi_2)\varphi_1 + C_2(c - a\varphi_2 - b\varphi_1)\varphi_2 = \\ &= c(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) - a(C_1\varphi_1^2 + C_2\varphi_2^2) - b(C_1 + C_2)\varphi_1\varphi_2 = \\ &= cz - \frac{a}{C_2}(C_1C_2\varphi_1^2 + C_2^2\varphi_2^2) - b(C_1 + C_2)\varphi_1\varphi_2. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая $C_1 \leq C_2$, получаем

$$\begin{aligned} \dot{z} &\leq cz - \frac{a}{C_2}(C_1^2\varphi_1^2 + 2C_1C_2\varphi_1\varphi_2 + C_2^2\varphi_2^2) + 2aC_1\varphi_1\varphi_2 - b(C_1 + C_2)\varphi_1\varphi_2 \leq \\ &\leq cz - \frac{a}{C_2}z^2 + (2aC_1 - b(C_1 + C_2))\varphi_1\varphi_2. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Далее, поскольку $a \leq b$, $C_1 \leq C_2$, то $2aC_1 - b(C_1 + C_2) \leq 0$, поэтому из (5.24) следует

$$\dot{z} \leq cz - \frac{a}{C_2}z^2.$$

В силу теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве функция $z(t, z(0))$ не превосходит решения дифференциального уравнения

$$\dot{z} = cz - \frac{a}{C_2}z^2,$$

удовлетворяющего начальному условию $z(0)$, поэтому при $t = d$ справедливо неравенство

$$z(d, z(0)) \leq \frac{ce^{cd}z(0)}{c + \frac{a}{C_2}z(0)(e^{cd} - 1)}. \quad (5.25)$$

Заметим, что функция

$$z \mapsto \frac{ce^{cd}z}{c + \frac{a}{C_2}z(e^{cd} - 1)} - z$$

достигает наибольшего значения, равного $\frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$, в точке

$$z^* = \frac{cC_2}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Поэтому из (5.25) следует

$$z(d, z(0)) - z(0) \leq \frac{ce^{cd}z(0)}{c + \frac{a}{C_2}z(0)(e^{cd} - 1)} - z(0) \leq \frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Из определения функций $D(x)$ и $z(t, z(0))$ получаем

$$D(x) = z(d, z(0)) - z(0) \leq \frac{c C_2 (e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}. \quad (5.26)$$

Отметим, что если $C_1 \leq C_2$, то наибольшее значение $D(x)$ достигается в точке $(0, x_2^*)$, где $x_2^* = \frac{c}{a(e^{cd/2} + 1)}$ и

$$D(x^*) = \frac{c C_2 (e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

Равенство (5.23) теперь следует из (5.26).

Таким образом, если $\varphi_2(d, x(0)) \geq x_2^*$, то функция $H_*(\bar{u}, x(0))$ достигает наибольшего значения

$$\frac{c C_2 (e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}$$

на множестве U при режиме эксплуатации (5.22), указанном в условии предложения.

Пример 5.3. Получим оценку средней временной выгоды для модели симбиоза двух видов

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 + bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 + bx_1)x_2. \end{cases} \quad (5.27)$$

Здесь предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a > b$.

Решение. В результате стандартных вычислений получаем, что если $4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2 > 0$, то максимум функции

$$L(x) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(x) = C_1 (c - ax_1 + bx_2)x_1 + C_2 (c - ax_2 + bx_1)x_2$$

достигается в точке $x^* = (x_1^*, x_2^*)$, где

$$x_1^* = \frac{c C_2 (2a C_1 + b(C_1 + C_2))}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2},$$

$$x_2^* = \frac{c C_1 (2a C_2 + b(C_1 + C_2))}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

В данном случае

$$L(x^*) = \frac{c^2 C_1 C_2 (C_1 + C_2)(a + b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}.$$

Если $4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2 \leq 0$, то наибольшее значение $L(x)$ на множестве \mathbb{R}_+^2 достигается в одной из точек $(0, \frac{c}{2a})$ или $(\frac{c}{2a}, 0)$ и равно

$$\max(C_1, C_2) \frac{c^2}{4a}.$$

Аналогично примеру 5.1 получаем, что при $a > b$ для системы (5.27) выполнены следующие оценки:

$$\frac{c(C_1 + C_2)(e^{cd/2} - 1)}{(a - b)(e^{cd/2} + 1)} \leq \max_{x \in \mathbb{R}_+^2} D(x) \leq$$

$$\leq \max \left\{ \frac{c^2 C_1 C_2 d (C_1 + C_2)(a + b)}{4a^2 C_1 C_2 - b^2 (C_1 + C_2)^2}, \max(C_1, C_2) \frac{c^2 d}{4a} \right\}.$$

Построение управления для достижения бесконечной средней временной выгоды

Исследуем популяцию, динамика которой задана системой (5.1). Рассматриваем введенную ранее функцию

$$D(x) \doteq \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i).$$

Теорема 5.5. *Предположим, что существует $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, такое, что*

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \dots, n$ возрастают;

(3) $D(\varphi(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнены неравенства

$$\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.28)$$

то существует режим эксплуатации \bar{u} , при котором

$$H(\bar{u}, x(0)) = +\infty.$$

Доказательство. Укажем один из способов эксплуатации популяции \bar{u} , при котором можно достичь бесконечной средней временной выгоды. При $k = 1$ выберем управление

$$u(1) = (u_1(1), \dots, u_n(1)) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{\varphi_n(d, x(0))}\right).$$

Из условия квазиположительности и (5.28) следует, что $u(1) \in [0, 1]^n$. Тогда в момент времени $t = d$ количество собранного ресурса каждого вида равно

$$X_i(1)u_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}\right) = \varphi_i(d, x(0)) - \hat{x}_i, \quad (5.29)$$

а количество оставшегося ресурса равно

$$x_i(d) = (1 - u_i(1))\varphi_i(d, x(0)) = \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, $x(d) = \hat{x}$. Найдем $X(2) = \varphi(d, x(d)) = \varphi(d, \hat{x})$.

Дальнейшие управления полагаем равными $u(2k) = (0, \dots, 0)$,

$$u(2k+1) = \left(1 - \frac{\varphi_1(kd, \hat{x})}{\varphi_1((k+1)d, \hat{x})}, \dots, 1 - \frac{\varphi_n(kd, \hat{x})}{\varphi_n((k+1)d, \hat{x})}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Из условия квазиположительности и условия (2) теоремы следует, что $u(2k+1) \in [0, 1]^n$. Найдем

$$x(2d) = X(2) = \varphi(d, \hat{x}),$$

$$X(3) = \varphi(d, x(2d)) = \varphi(2d, \hat{x}),$$

$$x(3d) = (1 - u(3))X(3) = \frac{\varphi(d, \hat{x})}{\varphi(2d, \hat{x})}X(3) = \varphi(d, \hat{x}).$$

Аналогично находим, что $x(2kd) = x((2k + 1)d) = \varphi(kd, \hat{x})$,

$$X(2k) = \varphi(kd, \hat{x}), \quad X(2k + 1) = \varphi((k + 1)d, \hat{x}), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что при данном способе эксплуатации в моменты времени $t = 2kd$, $k = 1, 2, \dots$ ресурс не извлекался; количество ресурса, извлеченного в момент $t = d$, определено в (5.29); а количество ресурса, добытого в момент $t = (2k + 1)d$, $k = 1, 2, \dots$, составляет

$$X(2k + 1)u(2k + 1) =$$

$$= (\varphi_1((k + 1)d, \hat{x}) - \varphi_1(kd, \hat{x}), \dots, \varphi_n((k + 1)d, \hat{x}) - \varphi_n(kd, \hat{x})).$$

Стоимость ресурса, собранного в момент времени $t = d$, равна

$$\sum_{i=1}^n C_i (X_i(1) - \hat{x}_i),$$

и для $t = (2k + 1)d$, $k = 1, 2, \dots$, данная стоимость равна

$$\sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i((k + 1)d, \hat{x}) - \varphi_i(kd, \hat{x})) = D(\varphi(kd, \hat{x})). \quad (5.30)$$

Поэтому общая стоимость ресурса, извлеченного в моменты $t = d, 3d, \dots, (2k - 1)d$, равна

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(2j - 1)u_i(2j - 1) = \sum_{i=1}^n C_i (X_i(1) - \hat{x}_i) + \sum_{j=2}^k D(\varphi(jd, \hat{x})).$$

Найдем среднюю временную выгоду

$$\begin{aligned}
H(\bar{u}, x(0)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=1}^{2k} \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(2\ell - 1) u_i(2\ell - 1) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n C_i (X_i(1) - \hat{x}_i) + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) = \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})). \quad (5.31)
\end{aligned}$$

По свойству предела от среднего арифметического, из условия (3) теоремы следует, что $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Предположим, что существует $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$, такое, что*

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i = 1, \dots, n$ возрастают;
- (3) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(kd, \hat{x}) = +\infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнено (5.28), то существует режим эксплуатации \bar{u} , при котором $H(\bar{u}, x(0)) = +\infty$.

Доказательство. Режим эксплуатации \bar{u} выберем так же, как в доказательстве теоремы 5.5. Тогда из (5.30) следует, что суммарная стоимость ресурса, извлеченного в моменты времени

$$t = 3d, \dots, (2k - 1)d,$$

равна

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) &= \sum_{\ell=2}^k \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i((\ell + 1)d, \hat{x}) - \varphi_i(\ell d, \hat{x})) = \\
&= \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i((k + 1)d, \hat{x}) - \varphi_i(2d, \hat{x})).
\end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие (3) следствия, то

$$H(\bar{u}, x(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{\ell=2}^k D(\varphi(\ell d, \hat{x})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i((k+1)d, \hat{x}) = +\infty.$$

Теорема доказана.

Теорема 5.6. Пусть существуют $\hat{x} \in \mathbb{R}_n^+$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ такие, что:

- (1) $\varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i \in I$;
- (2) последовательности $\{\varphi_i(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$, $i \in I$ возрастают;
- (3) $\varphi_i(kd, \hat{x}) = 0$ для всех $i \notin I$, $k = 1, 2, \dots$;
- (4) $D(\varphi(kd, \hat{x})) = \sum_{i \in I} C_i (\varphi_i((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при

$k \rightarrow \infty$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_n^+$ выполнены неравенства

$$\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, x(0)), \quad i = 1, \dots, n; \quad \varphi_i(d, x(0)) \neq 0, \quad i \in I, \quad (5.32)$$

то существует режим эксплуатации \bar{u} , при котором

$$H(\bar{u}, x(0)) = +\infty.$$

Доказательство. Отметим сначала, что если множество

$$J \doteq \{1, \dots, n\} \setminus I$$

пустое, то доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 5.5.

Далее будем предполагать, что множество J непусто. Для всех $i \in J$ положим $u_i(k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Для $i \in I$ определим $u_i(k)$, как в теореме 5.5, то есть

$$u_i(1) = 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))};$$

$$u_i(2k) = 0, \quad u_i(2k+1) = 1 - \frac{\varphi_i(kd, \hat{x})}{\varphi_i((k+1)d, \hat{x})}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Аналогично (5.31) получаем, что

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, x(0)) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=2}^k D(\varphi(jd, \hat{x})) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k} \sum_{j=2}^k \sum_{i \in I} C_i (\varphi_i((j+1)d, \hat{x}) - \varphi_i(jd, \hat{x})). \end{aligned}$$

Таким образом, если $D(\varphi(kd, \hat{x})) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$H(\bar{u}, x(0)) = +\infty.$$

Теорема доказана.

Пример 5.4. Показать, что для модели «хищник-жертва» средняя временная выгода может быть бесконечной и найти управления, при которых она достигается. Рассматривается модель, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (-\gamma + \delta x_1)x_2. \end{cases} \quad (5.33)$$

Здесь x_1 и x_2 — размеры популяций жертв и хищников соответственно, все коэффициенты системы положительные (свойства решений системы описаны в [10]).

Решение. Пусть \hat{x}_1 — произвольное положительное число,

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, 0), \quad I = \{1\}.$$

Найдем $\varphi_1(kd, \hat{x}) = \hat{x}_1 e^{\alpha kd}$, $\varphi_2(kd, \hat{x}) = 0$, где $k = 1, 2, \dots$. Очевидно, что последовательность $\{\varphi_1(kd, \hat{x})\}_{k=1}^{+\infty}$ возрастает и

$$\begin{aligned} D(\varphi(kd, \hat{x})) &= C_1 (\varphi_1((k+1)d, \hat{x}) - \varphi_1(kd, \hat{x})) = \\ &= C_1 \hat{x}_1 (e^{\alpha d} - 1) e^{\alpha kd} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 5.6, поэтому

$$H(\bar{u}, x(0)) = +\infty.$$

Укажем один из способов управления, при котором $H(\bar{u}, x(0))$ достигает значения $+\infty$. Из доказательства теоремы 5.6 следует, что для начальной точки $x(0)$, такой, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i$, $i = 1, 2$, можно выбрать следующие управления:

$$u(1) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, x(0))}, 1\right),$$

$$u(2k) = (0, 0), \quad u(2k + 1) = (1 - e^{-\alpha d}, 0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь в момент $t = d$ производится отлов части «жертв» и всех «хищников», что создает благоприятные условия для «жертв». Бесконечное значение $H(\bar{u}, x(0))$ достигается только за счет популяции «жертв».

Построение управления для достижения фиксированной средней временной выгоды

Достижение бесконечной средней временной выгоды не всегда экономически оправдано и, как показано в примере 5.4, может привести к уничтожению одного из видов. Рассмотрим задачу построение управления для достижения фиксированной средней временной выгоды, которая будет ограничена максимальным значением функции

$$D(x) = \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, x) - x_i)$$

или может равняться любому положительному числу, если $D(x)$ не ограничена сверху.

Обозначим через $E(D)$ множество значений функции $D(x)$.

Теорема 5.7. Пусть $h \in E(D) \cap [0, +\infty)$ фиксировано и существует точка $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ такая, что $D(\hat{x}) = h$ и $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ такого, что $\varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i$, $i = 1, \dots, n$, функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:

$$u(1) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{X_1(1)}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{X_n(1)}\right);$$

$$u(k) = \left(1 - \frac{\hat{x}_1}{\varphi_1(d, \hat{x})}, \dots, 1 - \frac{\hat{x}_n}{\varphi_n(d, \hat{x})}\right), \quad k \geq 2. \quad (5.34)$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_i(d, x(0)) \geq 0$ и

$$X_i(1) = \varphi_i(d, x(0)) \geq \hat{x}_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

то $u(1) \in [0, 1]^n$. Из условия $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0, i = 1, \dots, n$ следует, что $u(k) \in [0, 1]^n, k \geq 2$. При управлениях $\bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)$, указанных в (5.34), найдем

$$\begin{aligned} x(d) &= (1 - u(1))X(1) = \frac{\hat{x}}{X(1)}X(1) = \hat{x}, \\ X(2) &= \varphi(d, x(1)) = \varphi(d, \hat{x}), \\ x(2d) &= (1 - u(2))X(2) = \frac{\hat{x}}{\varphi(d, \hat{x})}\varphi(d, \hat{x}) = \hat{x}. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$x(kd) = \hat{x}, \quad X(k) = \varphi(d, \hat{x}), \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (5.35)$$

Далее, из (5.35) следует, что

$$\begin{aligned} H(\bar{u}, x(0)) &\doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n C_i X_i(1) u_i(1) + \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(d, \hat{x}) \left(1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, \hat{x})} \right) \right) = \\ &= 0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=2}^k \sum_{i=1}^n C_i (\varphi_i(d, \hat{x}) - \hat{x}_i) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k-1}{k} \cdot D(\hat{x}) = h. \end{aligned}$$

Таким образом, при режиме эксплуатации (5.34) выполнено

$$H(\bar{u}, x(0)) = h.$$

Теорема доказана.

Отметим, что при некоторых значениях h точку \hat{x} можно выбрать только так, что у нее будет равна нулю одна из координат. Управления, при которых $H(\bar{u}, x(0))$ достигает данного значения h , приведены в следующем утверждении, которое доказывается аналогично теореме 5.7.

Теорема 5.8. Пусть $h \in E(D) \cap [0, +\infty)$ фиксировано. Предположим, что существуют точка $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ и непустое подмножество $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ такие, что:

- (1) $D(\hat{x}) = h$;
- (2) $\hat{x}_i \leq \varphi_i(d, \hat{x}) \neq 0$ для всех $i \in I$;
- (3) $\varphi_i(kd, \hat{x}) = 0$ для всех $i \notin I, k = 1, 2, \dots$.

Тогда, если для $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнены неравенства (5.32), то функция $H(\bar{u}, x(0))$ достигает значения h при следующем режиме эксплуатации:

если $i \in I$, то $u_i(1) = 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, x(0))}$ и $u_i(k) = 1 - \frac{\hat{x}_i}{\varphi_i(d, \hat{x})}$ при $k \geq 2$;

если $i \notin I$, то $u_i(1) = 1$ и $u_i(k) = 0$ при $k \geq 2$.

Пример 5.5. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 , которая описана в [10, с. 147]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (c - ax_1 - bx_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (c - ax_2 - bx_1)x_2. \end{cases} \quad (5.36)$$

Предполагаем, что все коэффициенты системы положительные и $a \leq b$. Найти все значения h , которые при определенном управлении может принимать средняя временная выгода $H(\bar{u}, x(0))$.

Решение. Из теоремы 5.8 и предложения 5.1 получаем, что для модели (5.36) можно достичь фиксированной средней временной выгоды

$$H(\bar{u}, x(0)) = h \in [0, D(0, x_2^*)]$$

и нельзя добиться значения $H(\bar{u}, x(0))$, большего, чем

$$D(0, x_2^*) = \frac{cC_2(e^{cd/2} - 1)}{a(e^{cd/2} + 1)}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите решение уравнения

$$\dot{x} = rx^2, \quad r > 0,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0 \geq 0$. Постройте интегральные кривые данного уравнения. Найдите положение равновесия и исследуйте его на устойчивость.

2. Найдите решение уравнения

$$\dot{x} = \alpha \frac{\beta x^2}{\beta + cx},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0 \geq 0$. Найдите положение равновесия и исследуйте его на устойчивость.

3. Найдите решение уравнения Гомпертца (1825 г.)

$$\dot{x} = -\frac{\varepsilon x}{\ln K} \ln \frac{x}{K}, \quad \varepsilon > 0, K > 1,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0 \geq 0$. Найдите, в какой момент времени будет наблюдаться максимальный прирост численности популяции (при $x_0 < \frac{K}{e}$, где e — основание натурального логарифма). Найдите положения равновесия и исследуйте их на устойчивость.

4. Пусть динамика популяции задана уравнением

$$\dot{x} = \frac{ax}{K}(x - L)(K - x), \quad a > 0, K > L > 0, \quad (5.1)$$

где L — нижняя критическая плотность популяции (при начальном размере популяции $x_0 < L$ популяция обречена на вымирание), K — стационарная плотность, аналогичная емкости среды в логистической модели.

Исследуйте устойчивость положений равновесия уравнения (5.1) и постройте интегральные кривые.

5. Пусть динамика некоторой популяции задана уравнением

$$\dot{x} = \frac{ax^2}{b+x} - dx,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $d > 0$. Найдите стационарные решения уравнения и исследуйте их на устойчивость. Постройте приближенно интегральные кривые для этого уравнения.

6. Пусть динамика популяции задана уравнением

$$\dot{x} = \frac{6x^2}{1+x} - 2x - x^2.$$

Найдите стационарные решения уравнения и исследуйте их на устойчивость. Постройте приближенно интегральные кривые для этого уравнения.

7. (Задача о «ловле карасей».) Пусть динамика карасей в пруду в отсутствие антропогенного вмешательства описывается при помощи логистического уравнения

$$\dot{x} = (1-x)x,$$

где $x = x(t)$ — численность популяции в пруду в момент времени t (в условных единицах). Предположим, что идет отлов карасей, скорость отлова постоянная и равна c . Запишите уравнение отлова. Найдите стационарные решения уравнения и исследуйте их на устойчивость. Постройте приближенно интегральные кривые для этого уравнения.

8. Пусть $x(t)$ — численность рыбной популяции в момент времени t , $\lambda x(t)$ — численность нерестового стада, $\lambda = \text{const}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Известно, что ежегодный прирост популяции за счет естественного воспроизводства вычисляется по формуле Риккера:

$$\alpha \lambda x e^{-\beta x},$$

где постоянные $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha e^{-\beta x}$ — плотностно зависимый коэффициент рождаемости. Будем предполагать, что естественная смертность пропорциональна численности популяции, обозначив через $c = \text{const} > 0$ коэффициент смертности. Тогда развитие популяции задается уравнением

$$\dot{x} = \alpha \lambda x e^{-\beta x} - cx. \quad (5.2)$$

Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda = 0,5$; $c = 4$. Выяснить возможность существования стационарных режимов и характер их устойчивости.

9. Пусть развитие рыбной популяции задается уравнением (5.2), где $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\lambda = 0,5$; $c = e^{-2}$. Найти стационарные режимы существования популяции и исследовать их на устойчивость.

10. Дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор, имеет вид

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\gamma > 0$ — постоянная затухания, $\omega_0 > 0$ — собственная частота системы. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, при малом трении, то есть при $\gamma < \omega_0$. Постройте график этого решения.

11. Дифференциальное уравнение, описывающее затухающий осциллятор, имеет вид

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0,$$

где $\gamma > 0$ — постоянная затухания, $\omega_0 > 0$ — собственная частота системы. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, при сильном трении, то есть при $\gamma > \omega_0$ и в критическом случае при $\gamma = \omega_0$. Постройте график этого решения.

12. Уравнение упругих колебаний маятника (без сопротивления) под действием синусоидальной внешней силы имеет вид

$$y'' + y = 3 \sin 2x.$$

Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, постройте график этого решения.

13. Уравнение упругих колебаний маятника (без сопротивления) под действием синусоидальной внешней силы имеет вид

$$y'' + 4y = \sin 2x.$$

Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, постройте график этого решения.

14. Пусть динамика популяции задана уравнением

$$\dot{x} = \frac{x}{4}(x - 1)(4 - x).$$

Найдите решения уравнения $x(t)$, удовлетворяющие начальным условиям $x(0) = 0, 5$; $x(0) = 2$; $x(0) = 5$. Найдите $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$. Постройте графики этих решений.

15. Показать, что система (2.11) имеет два состояния равновесия — нулевое и ненулевое, причем нулевое состояние представляет собой неустойчивый узел. Доказать, что при выполнении неравенства

$$\left(\alpha d(c - d) + \gamma c(\beta + d) \right)^2 < 4\beta\delta(\alpha d + \gamma\beta)(\alpha\delta - \gamma d)$$

система имеет ненулевую особую точку — устойчивый фокус, а при изменении знака неравенства на обратный точка становится устойчивым узлом.

16. Методом изоклин начертить на плоскости (x, y) траектории данных систем вблизи точки $(0, 0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

1) $\dot{x} = -x, \dot{y} = -2y.$

- 2) $\dot{x} = x, \dot{y} = 2y$.
 3) $\dot{x} = -x, \dot{y} = y$.
 4) $\dot{x} = -y, \dot{y} = 2x^3$.
 5) $\dot{x} = y, \dot{y} = x^3(1 + y^2)$.

В задачах 17 – 18 исследовать особые точки систем. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) .

17. $\dot{x} = 3x, \dot{y} = 2x + y$.
 18. $\dot{x} = 2x - y, \dot{y} = x$.
 19. $\dot{x} = x + 3y, \dot{y} = -6x - 5y$.
 20. $\dot{x} = x, \dot{y} = 2x - y$.
 21. $\dot{x} = -2x - 5y, \dot{y} = 2x + 2y$.
 22. $\dot{x} = 3x + y, \dot{y} = y - x$.

В задачах 23 – 27 найти и исследовать особые точки данных систем. Нарисовать приблизительное расположение интегральных кривых на плоскости (x, y) .

23. $\dot{x} = 4y^2 - x^2, \dot{y} = 2xy - 4y - 8$.
 24. $\dot{x} = 2y, \dot{y} = x^2 - y^2 - 1$.
 25. $\dot{x} = y + \sqrt{1 + 2x^2}, \dot{y} = x + y + 1$.
 26. $\dot{x} = x^2 - y, \dot{y} = \ln(1 - x + x^2) - \ln 3$.
 27. $\dot{x} = (2x - y)(x - 2), \dot{y} = xy - 2$.

28. Найти и исследовать особые точки и нарисовать фазовый портрет системы «хищник–жертва»

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (4 - 0,5y)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-1 + x)y. \end{cases}$$

29. Найти и исследовать особые точки и нарисовать фазовый портрет системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2 - 18y - x)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-3 + 5x - y)y. \end{cases}$$

30. Найти и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (2 - y - x)x, \\ \frac{dy}{dt} = (-3 + x - y)y. \end{cases}$$

Нарисовать фазовый портрет.

31. Исследовать особые точки системы, описывающей явление конкуренции между двумя видами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1x_2 - 2x_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1x_2 - x_2^2. \end{cases}$$

Нарисовать фазовый портрет системы. Зависят ли решения от начальных условий системы?

32. Исследовать особые точки триггерной системы, описывающей явление конкуренции между двумя одинаковыми видами ($a > 0$)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1x_2 - ax_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1x_2 - ax_2^2. \end{cases}$$

Нарисовать фазовый портрет системы и показать, что стационарные решения зависят не только от параметров, но и от начальных условий системы.

33. Найти периодическое решение системы

$$\dot{x} = -x, \quad t \neq kh, \quad \Delta x|_{t=kh} = C, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

и доказать, что оно устойчиво при любых $C > 0$.

34. Обозначим через $\tau_k = kh$, $h > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$ моменты появления особей новой генерации. Предполагаем, что между этими моментами времени на интервалах $[\tau_k, \tau_{k+1})$ происходит монотонное снижение численности популяции $x(t)$ в результате естественной гибели и действия процессов саморегуляции, что описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -\alpha x - \beta x^2.$$

Здесь $\alpha > 0$ — коэффициент естественной гибели особей, $\beta > 0$ — коэффициент саморегуляции. Обозначим через $x(\tau_k - 0)$ численность особей, выживших к моменту размножения τ_k , через m — среднее число потомков, появившихся в момент τ_k от одной особи, тогда

$$\dot{x} = -\alpha x - \beta x^2, \quad t \neq kh, \quad \Delta x|_{t=kh} = mx, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Доказать, что решением уравнения $\dot{x} = -\alpha x - \beta x^2$, удовлетворяющим начальному условию $x(0) = x_0 \geq 0$, является функция

$$x(t) = \frac{\alpha x_0}{(\alpha + \beta x_0)e^{\alpha t} - \beta x_0}.$$

2) Доказать, что уравнение () имеет периодическое решение, отличное от нулевого, если $x_0 = \frac{\alpha(m - e^{\alpha h})}{\beta(e^{\alpha h} - 1)}$ и $m > e^{\alpha h}$.

3) Исследовать устойчивость периодического решения и нулевого решения.

35. Модель биологического контроля популяции. Рассматривается задача о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля [10, с. 157]. Пусть $x_1(t)$ характеризует размер популяции вредителей в момент времени t , $x_2(t)$ — численность биоагентов (природных врагов рассматриваемых вредителей) в момент t . С учетом влияния биоагентов на популяцию вредителей, динамика популяции вредителей и биоагентов описывается следующей системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ell x_1 \left(1 - \frac{x_1}{K}\right) - L(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = kL(x_1)x_2 - \mu x_2, \end{cases} \quad (5.37)$$

где ℓ — естественный темп прироста популяции вредителей при отсутствии внутривидовой конкуренции,

K — емкость среды, то есть некоторое стабильное значение числа особей, способных обитать на одной единице территории,

$L(x_1)$ — трофическая функция, которая характеризует количество вредителей, потребляемых в среднем одним биоагентом за единицу времени, причем k -я часть полученной с этой биомассой энергии расходуется на воспроизводство, а остальная энергия тратится на поддержание основного обмена,

μ — коэффициент естественной смертности биоагентов.

Пусть $L(x_1) = ax_1$ — трофическая функция Вольтерра. Все указанные выше коэффициенты положительные.

Иногда для достижения результата биоконтроля требуются дополнительные вбросы биоагентов в определенные моменты времени

$$t_i = ih, \quad h > 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

В этом случае математическая модель дополнится соотношением, отражающим скачкообразное увеличение численности биоагентов:

$$x_2(t_i) = x_2(t_i-) + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где коэффициент управления γ_i равен количеству биоагентов, распространяемых в момент t_i . Предполагаем, что $t_0 = 0$, $x_2(0) \geq \gamma_-$ и $\gamma_i \in [\gamma_-, \gamma_+]$, где $0 < \gamma_- < \gamma_+$, $i = 1, 2, \dots$

Исследовать особые точки системы без импульсного воздействия. Нарисовать фазовый портрет. При каких значениях параметров системы целесообразно применять импульсное управление для уничтожения вредителей?

36. Рассмотрим задачу о динамике численности популяции вредителей при наличии биологического контроля. Пусть $x_1(t)$ характеризует размер популяции вредителей в момент времени t , $x_2(t)$ — численность биоагентов (природных врагов рассматриваемых вредителей) в момент

t. Предполагаем, что трофическая функция $L(y_1)$ является функцией Холлинга типа II, то есть

$$L(y_1) = \frac{cy_1}{1 + cdy_1},$$

где c — коэффициент эффективности поиска вредителей биоагентом, количественно характеризующий интенсивность его атак, d — величина, обратная максимальному индивидуальному рациону. Все указанные выше коэффициенты положительные. Исследовать особые точки системы без импульсного воздействия

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(1 - x_1) - L(x_1)x_2, \\ \dot{x}_2 = 2L(x_1)x_2 - x_2, \end{cases}$$

если в функции Холлинга $c = 2$, $d = 1$. Нарисовать фазовый портрет.

37. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 - 2x_1 - x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (2 - 2x_2 - x_1)x_2. \end{cases} \quad (5.38)$$

Исследовать особые точки системы и нарисовать фазовый портрет. Показать, что для данной системы выполнено условие сосуществования двух видов и одна из особых точек является устойчивым узлом [10, с. 147]. Найти оценки средней временной выгоды для модели конкуренции (5.38), если стоимости каждого из видов равны $C_1 = 5$, $C_2 = 2$.

38. Рассмотрим модель конкуренции двух видов x_1 и x_2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (2 - x_1 - 3x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 = (2 - x_2 - 3x_1)x_2. \end{cases}$$

Исследовать особые точки системы и нарисовать фазовый портрет. Найти точную формулу для средней временной выгоды, если стоимости каждого из видов равны $C_1 = 5$, $C_2 = 2$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

17. Узел.

18. Вырожденный узел.

19. Фокус.

20. Седло.

21. Центр.

22. Вырожденный узел.

23. Точка (4,2) узел, (-2,-1) фокус.

24. (1,0) дикритический узел, (-1,0) седло.

25. (0,-1) вырожденный узел, (2,-3) седло.

26. (2,4) узел, (-1,1) седло.

27. (2,1) узел, (1,2) седло, (-1,-2) фокус.

31. $M_1 = (0, 0)$ — неустойчивый узел, $M_2 = (1/1 + a, 1/1 + a)$ — седло, $M_3 = (1/a, 0)$ и $M_4 = (0, 1/a)$ — устойчивые узлы.

33. Нулевое решение устойчиво, если $m \leq e^{\alpha h}$ и неустойчиво, если $m > e^{\alpha h}$. Периодическое решение устойчиво, если $m > e^{\alpha h}$, если $m \leq e^{\alpha h}$, периодическое решение не существует.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дифференциальные уравнения имеют огромное прикладное значение. С их помощью описываются многие процессы, происходящие в биологии, химии, экономике и других областях.

Цель учебного пособия – формирование у читателей основных понятий и положений теории дифференциальных уравнений, а также навыков их применения к решению различных задач естествознания и техники. В пособии описаны известные модели процессов, заданные одним дифференциальным уравнением (модель Мальтуса, модель организации рекламной кампании, модель движения маятника и другие). Для систем линейных дифференциальных уравнений приводится классификация особых точек с иллюстрациями фазовых портретов. Кроме того, представлены дискретно-непрерывные модели, описывающие динамику популяции, подверженной промышленному изъятию.

Пособие содержит большое количество разобранных примеров, что может быть полезно студентам при изучении дисциплин «Дифференциальные уравнения», «Математическое моделирование» и «Математические методы в биологии». Представленные задачи для самостоятельного решения необходимы не только обучающимся, но также могут пригодиться преподавателям при проведении занятий и подготовке контрольных работ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Волдеаб М.С., Родина Л.И. О способах добычи биологического ресурса, обеспечивающих максимальную среднюю временную выгоду // Известия высших учебных заведений. Математика. 2022. Т. 1. С. 12–24.
2. Дыхта В.А., Самсонок О.Н. Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
3. Егорова А.В., Родина Л.И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29. Вып. 4. С. 501–517.
4. Кузенков О.А., Рябова Е.А. Математическое моделирование процессов отбора. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та, 2007.
5. Ларина Я.Ю., Родина Л.И. Асимптотически устойчивые множества управляемых систем с импульсным воздействием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Вып. 4. С. 490–502.
6. Недорезов Л.В. Курс лекций по математической экологии. Новосибирск: Сибирский хронограф, 1997. 161 с.
7. Недорезов Л.В., Утюпин Ю.В. Дискретно-непрерывная модель динамики численности двуполой популяции // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 3. С. 650–659.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения (4-е изд.). М.: Наука, 1974. 331 с.
10. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 232 с.
11. Родина Л.И. Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28. Вып. 1. С. 48–58.
12. Родина Л.И., Соловьева Н.А., Федоров Д.Л. Математическое моделирование в биологии: теория, примеры, задачи. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2018. 76 с.

13. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
14. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
15. Свирежев Ю.М., Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
16. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 176 с.
17. Фрисман Е.Я., Кулаков М.П., Ревуцкая О.Л., Жданова О.Л., Неверова Г.П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11. № 1. С. 119–151.
18. Ревуцкая О.Л., Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Влияние изъятия на динамику численности сообщества «хищник-жертва» с учетом возрастной структуры жертвы // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13. № 4. С. 823–844.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
1. МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ, ЗАДАННЫЕ ОДНИМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ	4
2. МОДЕЛИ, ЗАДАННЫЕ СИСТЕМАМИ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	14
3. ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫЕ МОДЕЛИ	34
4. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧИ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА	38
5. ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОБЫЧЕ РЕСУРСА ИЗ СТРУКТУРИРОВАННОЙ ПОПУЛЯЦИИ	42
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ	69
ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ	78
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	79
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	80

Учебное электронное издание

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Учебное пособие

Авторы-составители:

РОДИНА Людмила Ивановна
ЕГОРОВА Анастасия Владимировна

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10;
Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Кафедра функционального анализа и его приложений
faip@vlsu.ru