Владимирский государственный университет

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Владимир 2022

УДК 51(09)
ББК 221г
И90

Автор-составитель Ю. К. Кокурина

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Т. В. Прохорова

Кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
(Владимирский филиал)
С. В. Никифорова

И90 **История** и методология математики : учеб. пособие / авт.-сост. Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2022. – 196 с.
ISBN 978-5-9984-1506-7

Пособие содержит материал, относящийся к развитию математики от античных времён до XXI века включительно. Издание может быть полезно студентам, изучающим дисциплину «Математика», а также преподавателям и всем, кто интересуется историей математики.

Предназначено для студентов очной формы обучения направления подготовки 02.03.01 – Математика и компьютерные науки.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 21 назв.

УДК 51(09)
ББК 221г

ISBN 978-5-9984-1506-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5

Тема 1. ПРЕДМЕТ И МЕТОД ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ 7

Тема 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДОВ 14

Тема 3. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ВОСТОКА 18
- 3.1. Математика Древнего Египта 18
- 3.2. Математика Древнего Вавилона 21
- 3.3. Математика Древнего Китая 23
- 3.4. Математика Древней Индии 30

Тема 4. ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ 34

Тема 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА 40

Тема 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ПОЗДНЕЙ АНТИЧНОСТИ 46

Тема 7. МАТЕМАТИКА НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА 49

Тема 8. МАТЕМАТИКА В ЕВРОПЕ В СРЕДНИЕ ВЕКА И ЭПОХУ ВОЗРОЖДЕНИЯ 54

Тема 9. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVII ВЕКЕ 63

Тема 10. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVIII ВЕКЕ 77

Тема 11. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XIX ВЕКЕ 89

Тема 12. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XX ВЕКЕ 125

Тема 13. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XXI ВЕКЕ 139

Тема 14. МАТЕМАТИКА В РОССИИ
(НАЧАЛО XIX – КОНЕЦ XX ВЕКА) 140
14.1. Состояние научных исследований по математике
к началу XIX века 140
14.2. Возникновение московской математической школы 170

Тема 15. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ 185

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА 192

ЗАКЛЮЧЕНИЕ... 194

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.. 194

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 195

Высшее назначение математики <…> находить порядок в хаосе, который нас окружает.
Норберт Винер

Математика – царица наук, арифметика – царица математики.
К. Ф. Гаусс

ВВЕДЕНИЕ

Развитие математики началось с создания практического счёта измерения линий, поверхностей и объёмов.

Понятие о натуральных числах формировалось постепенно и осложнялось неумением первобытного человека отделять числа от конкретного представления. Вследствие этого счёт долгое время оставался только вещественным – использовались пальцы, камешки, пометки и т. п. С распространением счёта на крупные количества появилась идея считать не только единицами, но и десятками. Эта идея немедленно отразилась в языке, а затем и письменности. При образовании числительных у большинства народов число 10 занимает особое положение, поэтому счёт по пальцам был широко распространён. Отсюда происходит известная десятичная система счисления. Шумеры и ацтеки, судя по языку, первоначально считали пятёрками. Есть и более экзотичные варианты. Вавилоняне в научных расчётах использовали шестидесятеричную систему Научные достижения индийской математики были широки и многообразны. Они изобрели привычную нам десятичную позиционную систему записи чисел, предложили символы для 10 цифр, которые с некоторыми изменениями используются повсеместно в наши дни, заложили основы десятичной арифметики.

Цель пособия – расширить знания обучающихся по истории развития математики при изучении дополнительной литературы по данной теме.

Вопросы, освещённые в пособии, актуальны до сих пор, так как история математики приобщает нас к мировой культуре. Изучая историю, начинаешь гордиться тем, что наши русские ученые также внесли вклад в развитие математики. Изучая темы пособия, вы узнаете, как развивалась математика в древние времена, в каких странах начинала своё развитие, как появились цифры, а также, что в теории математики есть еще неизученные вопросы, которые решают современные ученые всего мира.

Материал пособия оказался очень объемным, вопросы методологии математики освещены в заключительной теме. Охватить все вопросы в издании не представляется возможным, поэтому студентам рекомендуется самостоятельно изучить издания, представленные в рекомендательном библиографическом списке.

Тема 1. ПРЕДМЕТ И МЕТОД ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

История математики – не только история развития понятий, но одна из частей истории человеческой деятельности, в которой отражается борьба человека с природой, притом не абстрактного человека, а человека как члена общества. Однако большинство историков математики рассматривают её почти исключительно как историю идей, понятий, переходящих от одного математика к другому, который их далее развивает. Галилей повлиял на Кавальери, Кавальери – на Торричелли, Торричелли – на Паскаля, Паскаль – на Лейбница, а Лейбниц – на братьев Бернулли. Эти историки лишь при случае упоминают о том или ином важном политическом или религиозном событии, таком как завоевания Александра Македонского или распространение ислама, влияние которого на развитие математики столь велико, что игнорировать его нельзя. Такой метод односторонен, но не ошибочен – он выявляет важные этапы в истории математики. Но при этом не выясняется, что существует тесная зависимость между математикой и общекультурными устремлениями эпохи, устремлениями, которые сами отражают, непосредственно или опосредованно, преобладающие общественные и экономические условия.

Все отрасли математики, какими бы разными они ни казались, объединены общностью предмета. Этим предметом являются, по определению Ф. Энгельса, количественные отношения и пространственные формы действительного мира. Различные математические науки имеют дело с частными, отдельными видами этих количественных отношений и пространственных форм или же выделяются своеобразием своих методов.

В состав математики, как и всякой другой науки, входят:

а) ***факты***, накопленные в ходе её развития;

б) ***гипотезы***, т. е. основанные на фактах научные предположения, подвергающиеся в дальнейшем проверке опытом;

в) результаты обобщения фактического материала, выраженные в математических в данном случае ***теориях*** и ***законах***;

г) ***методология*** математики, т. е. общетеоретические истолкования математических законов и теорий, характеризующие общий подход к изучению предмета математики.

Все эти элементы взаимосвязаны и постоянно находятся в развитии. Выяснение того, как происходит это развитие в изучаемый исторический период и куда оно ведёт, и является предметом истории математики – одной из математических дисциплин.

История математики есть наука об объективных законах развития математики. В соответствии с этим на историю математики возлагается решение большого круга задач.

Во-первых, в работах историко-математического характера воссоздается богатство фактического содержания исторического развития математики. В них освещается, как возникли математические методы, понятия и идеи, как исторически складывались отдельные математические теории. Выясняются характер и особенности развития математики у отдельных народов в определенные исторические периоды, вклад, внесенный в математику великими учеными прошлого, и в первую очередь отечественными учеными.

Во-вторых, историко-математические работы раскрывают многообразные связи математики. Среди них: связи математики с практическими потребностями и деятельностью людей, с развитием других наук, влияние экономической и социальной структуры общества и классовой борьбы (особенно в области идеологии) на содержание и характер развития математики, роль народа, личности ученых и коллективов ученых и т. п.

В-третьих, историко-математические исследования вскрывают историческую обусловленность логической структуры современной математики, диалектику ее развития, помогают правильно понять соотношение частей математики и до известной степени ее перспективы.

История математики, как это следует из данного выше определения ее предмета, имеет дело со всем составом данной науки, со всеми областями математики и с большим количеством других наук. Это обстоятельство подчёркивает трудность задач истории математики и своеобразие методов историко-научного исследования.

Знание истории науки способствует выработке материалистического мировоззрения ученых. История показывает, что главным, определяющим в развитии даже такой абстрактной науки, как математика, являются запросы материальной действительности. Абстрактность предмета математики лишь затушевывает происхождение (зачастую сложное, многоступенчатое, опосредованное) всех понятий математики из материальной действительности, но ни в коем случае не отменяет его. История показывает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, постоянно расширяется в неразрывной связи с запросами техники и естествознания, наполняя всё более богатым содержанием общее определение математики.

Математика – одна из самых древних наук. Люди приобретали математические познания уже на самой ранней стадии развития под влиянием даже самой несовершенной трудовой деятельности. По мере ее усложнения изменялась и разрасталась совокупность факторов, влияющих на развитие математики.

Со времени возникновения математики как особой науки со своим собственным предметом наибольшее влияние на формирование новых понятий и методов оказывало математическое естествознание. Под математическим естествознанием автор понимает комплекс наук о природе, для которых на данной ступени развития оказывается возможным приложение математических методов. На прогресс математики ранее других наук оказали влияние астрономия, механика, физика.

Непосредственное воздействие задач математического естествознания на развитие математики можно проследить на протяжении всей ее истории. Так, например, дифференциальное и интегральное исчисление в его наиболее ранней форме исчисления флюксий возникло как наиболее общий в то время метод решения задач механики, в том числе и небесной механики. Теория полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, была разработана русским академиком П. Л. Чебышевым в связи с исследованием паровой машины. Метод наименьших квадратов возник в связи с большими геодезическими работами, проводившимися под руководством К. Ф. Гаусса. В настоящее время под непосредственным влиянием запросов новых областей техники получают бурное развитие многие области математики: комбинаторный анализ, методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений, теория конечных групп и т. д.

Примеры подобного рода можно продолжать неограниченно в отношении любой области математики. Все они показывают, что математика возникла из трудовой деятельности людей и формулировала новые понятия и методы в основном под влиянием математического естествознания.

Область приложений математики постоянно расширяется. Этому расширению невозможно установить предел. Рост приложений есть одно из свидетельств наличия и укрепления связей математики с другими науками.

Математика не только развивается под воздействием других наук. Она в свою очередь внедряет в другие науки математические методы исследования. Это обстоятельство дало повод некоторым иностранным учёным называть математику «королевой и служанкой всех наук», оттеняя тем самым ее своеобразное положение среди других наук.

Наиболее полно математические методы применяются в механике и небесной механике – науках, предмет которых абстрагирован от совокупности факторов, определяющих изучаемое явление. Широко используют математические методы и в физике, где нередко большие трудности вызывают правильная постановка задачи и интерпретация полученных результатов. Биологические науки еще существенно ограничивают возможности приложения математических методов из-за большого качественного своеобразия и невыясненности объектов изучения. Меньше всего методы математики сейчас используются в общественных науках, где в основном, кроме элементарных, применяют вероятностно-статистические методы.

За последние годы достигнуты значительные успехи в развитии кибернетики, вычислительной техники и в служащей для них теоретической основой дискретной математике. Вследствие этого возросла роль математики в экономике, системах управления, психологии и во многих других областях науки, традиционно считавшихся далекими от математики.

С каждым годом расширяется область применения математических методов в науке и практической деятельности людей.

Развитие математики не есть плавный процесс постепенного и непрерывного развития математических истин; развитие в действительности происходит в ожесточенной борьбе нового со старым. История математики изобилует примерами, когда эта борьба проявляется особенно сильно, когда новое неодолимо побеждает, несмотря на неудачи и даже гибель творцов науки.

Приведем несколько примеров. Наука о природе, в том числе математика, всегда испытывала противодействие религиозно настроенных кругов. Иногда оно было настолько сильным, что значительно затрудняло и задерживало рост науки, которая многим обязана героизму известных и безвестных ученых времен Римской империи и Средних веков, продвигавших науку вперед ценой собственной жизни.

В XVII в. анализ бесконечно малых, едва появившись в трудах Лейбница и Ньютона и их последователей, подвергся ожесточенной критике, тон которой задал известный епископ Беркли. Борьба вокруг основных понятий математического анализа, в частности вокруг понятия предела, происходила в течение всей истории этой научной дисциплины. Эта борьба не утихла, как принято думать, с появлением работ Коши в первой трети XIX в., а разгорелась с новой силой. Построение основ анализа на базе теории пределов получило всеобщее признание только в самом конце прошлого века.

Основы неевклидовой геометрии стали известны с 1826 г. Благодаря трудам гениального русского ученого Н. И. Лобачевского. Однако признание и дальнейшее развитие эта наука получила лишь к концу XIX в. После длительной борьбы. По существу, созданные неевклидовы геометрии смогли развиваться лишь тогда, когда после возникновения теории относительности они сделались частью математической основы физических исследований о реальной природе пространственно-временного континуума.

В истории математики можно различить отдельные периоды, отличающиеся друг от друга рядом характерных особенностей. Периодизация необходима, чтобы легче было разобраться во всем богатстве фактов исторического развития математики. Существует много попыток периодизации истории математики. Периодизация проводится по странам, по социально-экономическим формациям, по выдающимся открытиям, определившим на известное время характер развития математики, и т. п. Споры о периодизации нескончаемы.

Автор придерживается периодизации, установленной А. Н. Колмогоровым (Математика. БСЭ, т.26). Эта периодизация представляется нам наиболее точной потому, что в ее основу положена оценка содержания математики: ее важнейших методов, идей и результатов. В истории математики А. Н. Колмогоров различает следующие периоды:

1. *Зарождение математики*. Этот период продолжается до VI – V вв. до н. э., т. е. до того времени, когда математика становится самостоятельной наукой, имеющей собственный предмет и методы. Начало периода теряется в глубине истории первобытного человека. Характерным для этого периода является накопление фактического материала математики в рамках общей неразделенной науки.

2. *Период элементарной математики* продолжается от VI – V вв. до н. э. до XVI в. н. э. включительно. В этот период были достигнуты успехи в изучении постоянных величин. Некоторое представление об этих достижениях может дать математика, изучаемая ныне в средней школе. Период заканчивается, когда главным объектом задач математики становятся процессы, движения и начинают развиваться аналитическая геометрия и анализ бесконечно малых. Понятие элементарной математики спорно, и в настоящее время не существует его общепризнанного определения, однако выделение во времени такого периода представляется вполне оправданным.

3. *Период создания математики переменных величин.* Начало этого периода ознаменовано введением переменных величин в аналитической геометрии Декарта и созданием дифференциального и интегрального исчисления в трудах И. Ньютона и Г.В. Лейбница. Конец периода относится к середине XIX в., когда в математике произошли коренные изменения. В течение этого бурного и богатого событиями периода сложились почти все научные дисциплины, известные сейчас как классические основы современной математики.

4. *Период современной математики.* Понятие современности в математике, очевидно, постоянно смещается. Вероятно, между периодом создания математики переменных величин и современностью уже можно выделить новый период (или периоды). В историко-математических работах этого еще не сделано, хотя необходимость в этом уже назрела.

В XIX и XX вв. объем пространственных форм и количественных отношений, охватываемых методами математики, чрезвычайно расширился. Появилось много новых математических теорий, невиданно расширились приложения математики. Содержание предмета математики настолько обогатилось, что это привело к перестройке и замене совокупности ее важнейших проблем.

В XIX и XX вв. объем пространственных форм и количественных отношений, охватываемых методами математики, чрезвычайно расширился. Появилось много новых математических теорий, невиданно расширились приложения математики. Содержание предмета математики настолько обогатилось, что это привело к перестройке и замене ее важнейших проблем.

Одним из элементов, характеризующих начало научной зрелости, является стремление охватить изучаемую науку в целом, понять логическую структуру и взаимосвязанность отдельных математических дисциплин – стремление дополнить знание усвоенных научных фактов знанием законов развития науки и, насколько возможно, ее перспектив.

Осознание неразделимости логического и исторического в математике вызывает потребность в знании основных фактов истории математики и классических работ, в понимании законов развития математических наук и исторически сложившегося соответствия отдельных математических дисциплин. Эту потребность возбуждает и поддерживает также пример ведущих ученых математиков. Их деятельность в конкретных областях математики, как правило, сочетается с исследованиями исторических проблем.

В качестве примера можно указать статью А. Н. Колмогорова «Математика» в 26-м томе Большой Советской Энциклопедии, где самый предмет математики рассматривается в историческом плане. Ценные исследования по истории математики опубликовали многие советские ученые: П. С. Александров, А. Д. Александров, Б. В. Гнеденко, В. В. Голубев, А. И. Маркушевич и др. По существу нет ни одного творчески работающего ученого, который не занимался бы историей своей науки.

Большое внимание уделяется истории математики за рубежом. Ей посвящено множество книг и статей.

Таким образом, изучение истории математики представляется автору важнейшей частью подготовки математиков-специалистов, необходимой для правильного понимания сущности данной науки и верного выбора направления и форм своей личной деятельности.

Опыт, в частности опыт Московского университета, показывает, что преподавание истории науки, ее методологических основ не может быть пущено на самотек. Оно должно быть хорошо организовано как часть воспитания студенчества и научных работников.

Тема 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРВЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ И МЕТОДОВ

Процесс формирования математических понятий и регулярных приемов решения определенных классов элементарных задач занимает много времени. Его начало, по всей вероятности, относится к далекому времени, когда человек перешел к использованию орудий для добывания средств существования, а затем и к обмену продуктов труда. Завершается этот период с появлением качественно новых форм математического мышления, т. е. тогда, когда совокупность этих понятий и методов и их содержание становятся достаточно богатыми, чтобы образовать логически связанные системы – начальные формы математических теорий. Последние возникают в математике около VI – V вв. до н. э.

Материальные свидетельства, по которым можно изучать этот самый ранний период в истории математики, немногочисленны и неполны. Исследователю приходится привлекать факты общей истории культуры человечества, по преимуществу археологические материалы и историю языка. История математики периода ее зарождения практически неотделима от общей истории человечества.

Формы и пути развития математических знаний у различных народов весьма разнообразны. Однако при всем своеобразии путей развития общим для всех народов является то, что все основные понятия математики – понятие числа, фигуры, площади, бесконечно продолжающегося натурального ряда и т. д. – возникли из практики и прошли длинный путь совершенствования. Например, понятие числа возникло вследствие практической необходимости пересчета предметов. Вначале считали с помощью подручных средств: пальцев, камней, еловых шишек и т. д. Следы этого сохранились в названии математических исчислений: например, *calculus* в переводе с латинского означает «счет камешками». Запас чисел на ранних ступенях весьма ограничен. Ряд известных и используемых натуральных чисел был конечен и удлинялся лишь постепенно.

Вот примеры счета некоторых австралийских племён:

Племя реки Муррей: 1 = энэа, 2 = петчевал, 3 = петчевал-энэа, 4 = петчевал-петчевал.

Камиларои: 1 = мал, 2 = булан, 3 = гулиба, 4 = булан-булан, 5 = булан-гулиба, 6 = гулиба-гулиба.

Развитие ремесла и торговли содействовало кристаллизации понятия числа. Числа группировали и объединяли в большие единицы, обычно пользуясь пальцами одной руки или обеих рук, – обычный в торговле прием. Это вело к счету сначала с основанием 5, потом с основанием 10, который дополнялся сложением, а иногда вычитанием, так что 12 воспринималось как 10 + 2, а 9 – как 10 – 1[2]). Иногда за основу принимали 20 – число пальцев на руках и ногах. В наиболее характерной форме система с основанием 20 существовала у майя в Мексике и у кельтов в Европе. Числовые записи велись с помощью пучков, зарубок на палках, узлов на веревках, камешков или ракушек, сложенных по 5 в кучки.

Любопытно, что люди увлекались очень большими числами, к чему, может быть, побуждало общечеловеческое желание преувеличить численность стада или убитых врагов; пережитки такого уклона заметны в Библии и в других религиозных книгах.

Наряду с употреблением все больших и больших чисел возникали и развивались их символы, а сами числа образовывали системы. Для ранних периодов истории материальной культуры характерно разнообразие числовых систем. Постепенно совершенствовались и унифицировались системы счисления. Употребляемая ныне во всех странах десятичная позиционная система нумерации – итог длительного исторического развития. Ей предшествовали:

1. Различные иероглифические непозиционные системы. В каждой из них строится система так называемых узловых чисел (чаще всего 1, 10, 100, 1000, ...). Каждое такое число имеет индивидуальный символ – иероглиф. Остальные числа (их называют алгоритмическими) образуются приписыванием с той или другой стороны узлового числа других узловых чисел и повторением их. Примерами таких систем являются египетская, финикийская, пальмирская, критская, сирийская, аттическая (или геродианова), старокитайская, староиндусская (карошти), ацтекская, римская. Последняя имеет систему узловых чисел: I, V, X, L, C, D, M, построенную по десятичному признаку с заметным влиянием пятеричной системы.

2. Алфавитные системы счисления. В этих системах буквы алфавита, взятые по 9, используются соответственно для обозначения единиц, десятков, сотен. Каждой букве при этом дается отличительный знак, указывающий, что она используется как число. В слу-

чае, если букв алфавита недостаточно, привлекаются дополнительные буквы и знаки. Типичный пример алфавитной системы – греческая ионическая (древнейшая сохранившаяся запись, сделанная по этой системе, относится к V в. до н. э.):

$\bar{\alpha}$	$\bar{\beta}$	$\bar{\gamma}$	$\bar{\delta}$	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varsigma}$	$\bar{\zeta}$	$\bar{\eta}$	$\bar{\theta}$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	(дигамма)
$\bar{\iota}$	$\bar{æ}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}$	$\bar{\nu}$	$\bar{\xi}$	$\bar{o}$	$\bar{\pi}$	$\bar{q}$	
10	20	30	40	50	60	70	80	90	(коппа)
$\bar{\rho}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\tau}$	$\bar{\upsilon}$	$\bar{\varphi}$	$\bar{\chi}$	$\bar{\psi}$	$\bar{\omega}$	$\bar{э}$	
100	200	300	400	500	600	700	800	900	(сампи)

Запись чисел по этой системе ясна из примера: $\bar{\upsilon}\ \bar{\mu}\ \bar{\delta} = 444$. Для того чтобы записать числа больше тысячи, необходимо усложнять знаки, например: $\bar{\alpha} = 1000$, $\bar{\beta} = 2000$ и т. д.

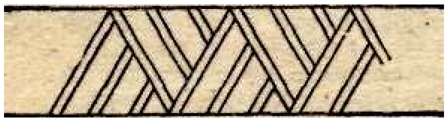
Алфавитные системы удобнее из-за краткости записи, однако они малопригодны для оперирования большими числами и требуют больших усилий для запоминания. Примерами алфавитной системы кроме приведённой являются древнеславянская (кириллица и глаголица), еврейская, арабская, грузинская, армянская и др.

3. Позиционные недесятичные системы, а затем десятичная система. К позиционным недесятичным относятся вавилонская, индейская (племени майя на полуострове Юкатан), индийская, современная двоичная системы.

Записи в позиционной десятичной системе с нулем впервые появились около 500 г. до н. э. в Индии.

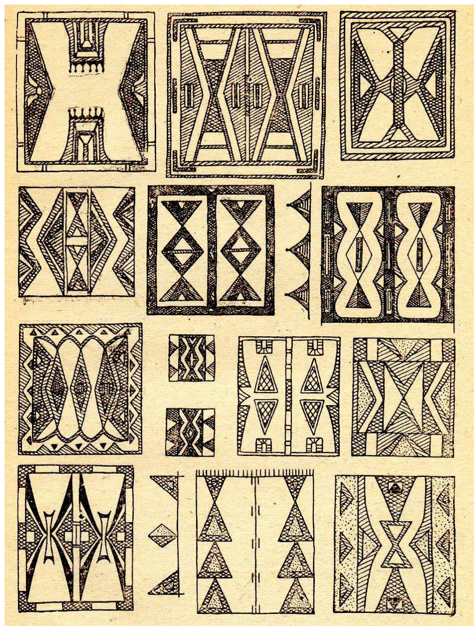
Возникла и необходимость измерять длину и емкость предметов. Единицы измерения были грубы, и при этом часто исходили из размеров человеческого тела. Об этом нам напоминают такие единицы, как *палец, фут* (то есть ступня), *локоть.* Когда начали строить дома, такие как у земледельцев Индии или обитателей свайных построек Центральной Европы, стали вырабатываться правила, как строить по прямым линиям и под прямым углом. Английское слово *straight* («прямой») родственно глаголу *stretch* («натягивать»), что указывает на использование веревки (во многих странах людей, занимавшихся межеванием, называли «натягивателями верёвки»). Английское слово *line* («линия») родственно слову *linen* («полотно»), что указывает на связь между ткацким ремеслом и зарождением геометрии. Таков был один из путей, по которому шло развитие математических интересов.

Человек неолита обладал также острым чувством геометрической формы. Обжиг и раскраска глиняных сосудов, изготовление камышовых циновок, корзин и тканей, позже – обработка металлов вырабатывали представление о плоскостных и пространственных соотношениях.



Орнамент, встречающийся на неолитической керамике из Боснии и на предметах искусства древней Месопотамии

Неолитические орнаменты радовали глаз, выявляя равенство, симметрию и подобие фигур. В этих фигурах проявлялись и числовые соотношения, как в некоторых доисторических орнаментах, изображающих треугольные числа; в других орнаментах можно обнаружить «священные» числа. Такого рода орнаменты оставались в ходу и позднее. Прекрасные образцы мы видим на дипилоновых вазах минойского и раннегреческого периодов, позже – в византийской и арабской мозаике, на персидских и китайских коврах. Первоначально ранние орнаменты, возможно, имели религиозное или магическое значение, но постепенно преобладающим стало их эстетическое назначение.



Орнаменты, популярные у жителей свайных построек близ Любляны (Югославия) Гальштатского периода (Центральная Европа, 1000 – 500 гг. до н. э.)

В религии каменного века можно уловить первые попытки вступить в борьбу с силами природы.

Религиозные обряды были насквозь пронизаны магией; магический элемент входил в состав существовавших тогда числовых и геометрических представлений, проявляясь также в скульптуре, музыке, рисунке. Существовали магические числа (такие как 3, 4, 7) и магические фигуры (например, пятиконечная звезда и свастика); некоторые авторы даже считают, что эта сторона математики была решающей в её развитии, но, хотя общественные корни математики в новейшие времена, быть может, стали менее заметны, они вполне очевидны в раннем периоде истории человечества. Современная «нумерология» – пережиток магических обрядов, восходящих к неолитической, а может быть, даже к палеолитической эпохе.

Даже у самых отсталых племен был какой-то отсчет времени и, следовательно, какие-то сведения о движении Солнца, Луны и звезд. Сведения этого рода впервые приобрели более научный характер, когда стали развиваться земледелие и торговля.

Древнеегипетский глиняный сосуд (додинастический период)

Пользование лунным календарем относится к очень давней эпохе в истории человечества, так как изменения роста растений связывали с фазами Луны. Примитивные народы обратили внимание и на солнцестояние, и на восход Плеяд в сумерках. Самые древние цивилизованные народы относили астрономические сведения к наиболее отдаленному, доисторическому периоду своего существования. Другие первобытные народы пользовались при плавании созвездиями как ориентирами. Эта астрономия дала некоторые сведения о свойствах сферы, окружностей, об углах.

Тема 3. МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ВОСТОКА

3.1. Математика Древнего Египта

Наши познания о древнеегипетской математике основаны главным образом на двух больших папирусах математического характера и на нескольких небольших отрывках. Один из больших папирусов называется *математическим папирусом Ринда* (или Райнда) (по имени обнаружившего его ученого) и находится в Лондоне. Его длина приблизительно 5,5 м, ширина – 0,32 м. Другой большой папирус, почти такой же длины и 8 см ширины, находится в Москве. Содержащиеся в них математические сведения относятся примерно к 2000 г. до н. э.

Папирус Ринда содержит 84 задачи прикладного характера. При их решении производят действия с дробями, вычисляют площади прямоугольника, треугольника, трапеции и круга, объемы параллелепипеда, цилиндра, размеры пирамид. Имеются также задачи на пропорциональное деление, а при решении одной задачи находят сумму геометрической прогрессии.

В московском папирусе собраны решения 25 задач. Большинство из них – такого же типа, как и в папирусе Ринда. Кроме того, в одной из задач (№ 14) правильно вычисляется объем усеченной пирамиды с квадратным основанием. В другой задаче (№ 10) содержится самый ранний в математике пример определения площади кривой поверхности: вычисляется боковая поверхность корзины, т. е. полуцилиндра, высота которого равна диаметру основания.

Египтяне построили арифметику преимущественно аддитивного характера, ее суть – сведение всех умножений к повторным сложениям. Например, умножение на 13 получается умножением сначала на 2, затем на 4, затем на 8 и сложением результатов умножения на 4 и на 8 с первоначальным числом:

Например, для вычисления 13 · 11 писали:

1	*11
2	22
4	*44
8	*88

и складывали все числа, отмеченные звездочкой, что дает 143.

Самой замечательной чертой египетской арифметики являются действия с дробями. Все дроби сводятся к суммам так называемых основных дробей (аликвотных, вида $\frac{1}{n}$), т. е. дробей, имеющих числителем единицу. Единственное исключение составляла дробь $\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$, для которой существовал специальный символ. Сведение к суммам основных дробей производилось с помощью таблиц, которые давали разложение дробей вида $\frac{2}{n}$ (n = 3, …, 101) – единственное необходимое разложение, так как умножение было двоичным. Папирус Ринда дает таблицу, в которой приведены разложения на основные дроби для всех нечетных n от 5 до 331, например

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}, \qquad \frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

Из чего исходили при таком сведении к основным дробям – не ясно (например, почему $\frac{2}{19}$ заменяется суммой $\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$, а не суммой $\frac{1}{12}+\frac{1}{57}+\frac{1}{228}$?).

Такие действия с дробями придавали египетской математике тяжеловесность и растянутость, однако разложение на сумму основных дробей применялось в течение тысячелетий, не только в эпоху эллинизма, но и в Средние века.

При делении также используется процедура удвоения и последовательного деления пополам. Деление, по-видимому, было самой трудной математической операцией для египтян. Его характеризует большое разнообразие приёмов. Так, иногда в качестве промежуточного действия применялось нахождение двух третей или одной десятой доли числа и т. п.:

(19 : 8)	1	8
	*2	16
	1/2	4
	*1/4	2
	*1/8	1

т. е. 19 : 8 = 2 1/4 1/8

(16 : 3)	*1	3
	2	6
	*4	12
	2/3	2
	*1/3	1

т. е. 16 : 3 = 5 1/3

Многие задачи очень просты и сводятся к линейному уравнению с одним неизвестным: «Некое количество, его $\frac{2}{3}$, его $\frac{1}{2}$ и его $\frac{1}{7}$, сложенные вместе, дают 33. Каково это количество?».

Для неизвестного в уравнении существовал иероглиф, обозначавший «кучу» и произносившийся «хау» или «аха». Поэтому египетскую алгебру иногда называют «хау-исчислением».

В задачах речь идет о количестве хлеба и различных сортов пива, о кормлении животных и хранении зерна, и это указывает на практическое происхождение такой запутанной арифметики и примитивной алгебры. В некоторых задачах проявляется теоретический интерес, например в задаче, в которой требуется разделить сто хлебов между пятью людьми так, чтобы их доли составляли арифметическую прогрессию и чтобы одна седьмая суммы трех больших долей была равна сумме двух меньших. Геометрическая прогрессия встречается даже в задаче о семи домах, в каждом из которых есть семь кошек, каждая из которых поедает семь мышей и т.д., что выявляет знание формулы для суммы членов геометрической прогрессии.

Некоторые задачи имеют геометрическую природу и касаются преимущественно измерений. Можно встретить также некоторые формулы для объемов тел, таких как куб, параллелепипед и круговой цилиндр, причем все они рассматриваются конкретно как сосуды, в основном для зерна. Самый замечательный результат в египетских измерениях – формула для объема усеченной пирамиды с квадратным основанием: $V=\frac{h}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$, где h – высота; a и b – длины сторон квадратов. Эта формула, аналогов которой нет ни в какой другой древней математике, примечательна тем, что нет указаний на то, чтобы египтяне имели какое-либо представление даже о теореме Пифагора, вопреки некоторым необоснованным рассказам о гарпедонафтах, которые якобы строили прямые углы с помощью веревки, имевшей 12 узлов (3 + 4 + 5).

За двадцать веков до нашей эры в Египте начали складываться элементы математики как науки. Техника вычислений ещё примитивна, методы решения задач не единообразны. Однако материалов, которые позволяют вообще судить о развитии математики в Египте, недостаточно.

3.2. Математика Древнего Вавилона

Другим примером того же рода может служить математическое наследие древнего Вавилона. Это название обычно распространяется на совокупность государств, располагавшихся в междуречье Тигра и Евфрата и существовавших в период от 2000 до 200 г. до н. э. Здесь мы оказываемся на гораздо более высоком уровне, чем тот, которого когда-либо достигала египетская математика. До нас дошло около ста тысяч глиняных табличек с клинописными записями. Однако табличек с текстами математического содержания известно только около 50, а математических таблиц без текста – около 200.

В вавилонской системе математических символов есть два основных элемента: *клин* с числовым значением 1 и *крючок* с числовым значением 10. Повторением этих знаков можно записать числа от 1 до 59. Любое число записывается слева направо по принципу $N = \alpha_0\, 60^0 + \alpha_1\, 60^1 + \alpha_2\, 60^2 + ...$ Таким образом система счисления оказывается позиционной 60-ричной. Однако эта система не имеет нуля, а один и тот же знак «клина» может обозначать не только единицу, но любое число вида $60^{\pm k}$ (k – натуральное число).

Содержание табличек доказывает, что на основе этой системы были созданы многие единообразные правила арифметических действий как с целыми числами, так и с дробями. Для облегчения действий существовали таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $60 \cdot 60$).

Как шестидесятичная система, так и позиционность системы счисления оказались прочным достоянием человечества. Наше современное деление часа на 60 минут и 3600 секунд восходит к шумерам, равно как и наше деление окружности на 360 градусов, каждого градуса на 60 минут и каждой минуты на 60 секунд. Есть основания полагать, что выбор в качестве основы 60 вместо 10 появился при попытке унифицировать системы измерения, хотя то обстоятельство, что 60 имеет много делителей, тоже могло иметь значение.

Следующая группа клинописных текстов относится ко времени первой вавилонской династии, когда в Вавилоне правил царь Хаммурапи (около 1950 г. до н. э.) и семитское население подчинило себе исконных жителей– шумеров. В этих текстах мы видим, что арифметика развилась в хорошо разработанную алгебру. Египтяне того же периода были в состоянии решать только простые линейные уравнения, а вавилоняне времен Хаммурапи полностью владели техникой решения квадратных уравнений. ОНи решали линейные и квадратные уравнения с двумя неизвестными, решали даже задачи, сводящиеся к кубическим и к биквадратным уравнениям.

Геометрические знания вавилонян, по-видимому, превышали египетские, так как в текстах помимо общих типов задач встречаются начатки измерения углов и тригонометрических соотношений. В основном, впрочем, они тоже состояли из вычислений площадей и объёмов прямолинейных фигур, обычных для элементарной геометрии. Площадь круга вычислялась по формуле $S = \frac{c^2}{12}$ (c – длина окружности), откуда получалось плохое ещё приближение: $\pi = 3$.

Резко выраженный арифметико-алгебраический характер вавилонской математики проявляется и в геометрии. Как и в Египте, геометрия развивалась на основе практических задач измерения, но геометрическая форма задачи обычно является только средством для того, чтобы поставить алгебраический вопрос. Тексты показывают, что вавилонская геометрия семитского периода располагала формулами для площадей простых прямолинейных фигур и для объёмов простых тел, хотя объём усечённой пирамиды ещё не был найден. Основной чертой этой геометрии был всё же её алгебраический характер. Это в равной мере относится и ко всем поздним текстам, особенно к текстам третьего периода, от которого до нас дошло немалое их число, – эпохи нововавилонской, персидской и эпохи Селевкидов (примерно от 600 г. до н. э. до 300 г. н. э.).

Тексты этого периода обнаруживают значительное влияние вавилонской астрономии, которая в это время приобретает характер настоящей науки.

В клинописных текстах есть задачи и на сложные проценты. Например, ставится вопрос, за какое время удвоится сумма денег, ссуженная под 20 (годовых) процентов.

Вавилонские математические традиции распространились на сопредельные государства Ближнего Востока и могут быть прослежены в них вплоть до эпохи эллинизма (ок. 330 г. – ок. 30 г. до н. э.).

3.3. Математика Древнего Китая

Развитие научных знаний в Китае имеет многовековую богатую историю.

При изучении древнекитайской математики значительным препятствием является отсутствие переводов, хотя мы благодаря книгам Миками и Нидхема хорошо осведомлены о положении математики в Древнем Китае.

По утверждению китайского историка математика Ли Яня, математические познания китайцев восходят к XIV в. До н.э. В истории математики древнего Китая имеются сведения о десятичной системе счёта, специальной иероглифической символике чисел, об оперировании большими числами, наличии вспомогательных счётных устройств (узелки, счётная доска), об оперировании циркулем, линейкой и угольником и т.д.

Развитие научных знаний в Китае имеет богатую многовековую историю.

При изучении древнекитайской математики значительным препятствием является отсутствие переводов, хотя книги Миками и Нидхема дают наглядное представление о положении математики в Древнем Китае.

По утверждению китайского историка математика Ли Яня, математические познания китайцев восходят к XIV в. до н.э. В истории математики Древнего Китая имеются сведения о десятичной системе счёта, специальной иероглифической символике чисел, об оперировании большими числами, наличии вспомогательных счётных устройств (узелков, счётных досок), об оперировании циркулем, линейкой и угольником и т. д.

Самым ранним математическим сочинением, если не считать трактата о чжоу-би (солнечных часах), является «Математика в девяти книгах», иногда называемая «Математика в девяти главах», или разделах. Это сочинение появилось как своеобразный итог математических достижений Китая к началу нашей эры. Есть сведения, что оно было составлено выдающимся государственным деятелем и ученым Чжан Цаном (152 г. до н. э.), собравшим и систематизировавшим все известные к его времени математические знания. **«*Математика в девяти книгах*»** неоднократно подвергалась переработкам и дополнениям: в I в. до н. э. (Гэн Чоу-чан), в III в. н. э. (Лю Хуэй), в VI в. (Чжень Луань), в VII в. (Ли Чунь-фен) и др. Этот текст стал известен в СССР сравнительно недавно; в 1957 г. Э.И. Березкина сделала первый перевод «Математики в девяти книгах» на русский язык с обстоятельными комментариями.

Книги, составляющие это сочинение, имеют вид отдельных свитков. Они посвящены различным темам, преимущественно практического характера. Различие обусловлено, по-видимому, тем, что различные книги предназначались для чиновников различных ведомств: землемеров, инженеров, астрономов, сборщиков налогов и т. п.

Изложение – догматическое: формулируются условия задач (всего 246 задач) и даются ответы к ним. После группы однотипных задач формулируется алгоритм их решения.

Книга I называется «Измерение полей». Единицей измерения служит прямоугольник со сторонами 15 и 16 *бу* (т. е. шагов, приблизительно равных 133 *см).* Площади прямолинейных фигур вычисляются верно. При вычислении площадей круга, сектора и кольца принимается, что $\pi = 3$.

Используемая при этом система счисления – десятичная иероглифическая. Числа делятся на классы по четыре разряда в каждом. Особого знака, нуля при такой системе записи, очевидно, не требуется. Нуль, действительно, появился значительно позднее, только в XII в., и был, видимо, заимствован из математики Индии.

Книга 2 «Соотношение между различными видами зерновых культур» отражает старинную практику взимания налогов зерном, измеряемых в объемных мерах, и расчетов при переработке этого зерна. Математические задачи, возникающие при этом, – это задачи на тройное правило и пропорциональное деление. Ко второй книге была позднее добавлена группа задач на определение стоимости предметов, число которых может быть как целым, так и дробным.

Задачи на пропорциональное деление, деление пропорционально обратным значениям чисел, а также простое и сложное тройное правило составляют содержание и следующей, третьей, книги «Деление по ступеням». Правил суммирования арифметических прогрессий здесь еще нет; они встречаются, по-видимому, впервые в математическом трактате Чжан Цяю-цзяня (VI в.).

В четвертой книге «Шао-гуан» вначале речь идет об определении стороны прямоугольника по данным значениям площади и другой стороны. Затем излагаются правила извлечения квадратных и кубических корней, нахождения радиуса круга по его площади. Правила сформулированы специально для счетной доски; подкоренное число делится на разряды соответственно по 2 или 3 знака, затем последовательно подбирается очередное значение корня и даётся правило перестройки палочек на счётной доске.

В книге 5 «Оценка работ» собраны задачи, связанные с расчетами при строительстве крепостных стен, валов, плотин, башен, ям, рвов и других сооружений. При этом вычисляются как объемы различных тел, так и потребности в рабочей силе, материале, транспортных средствах при различных условиях.

Книга 6 «Пропорциональное распределение» начинается группой задач о справедливом (пропорциональном) распределении налогов. Кроме того, в шестую книгу входит серия задач на суммирование отдельных арифметических прогрессий и задач на совместную работу с разной производительностью.

«Избыток-недостаток» – так называется седьмая книга. В ней подобраны задачи, приводившиеся к линейным уравнениям и их системам.

Усовершенствование складывающихся в седьмой книге правил решения систем линейных уравнений и распространение их на системы с большим числом неизвестных изложены в правиле «фан-чэн», которому посвящена вся восьмая книга. Задачи этой книги приводят к системам до пяти линейных уравнений с положительными корнями. Для всех систем установлен единый алгоритм вычисления корней.

Китайские ученые ввели отрицательные числа. Для их сложения и вычитания было введено специальное правило «чжэн-фу», которое можно перевести как правило «плюс-минус».

Практическую основу последней книги «Математики в девяти главах» составляют задачи определения недоступных расстояний и высот с помощью теоремы Пифагора и свойств подобных треугольников. С точки зрения математики эта книга особенно интересна общей, алгебраической формулировкой правил. Помимо элементарных способов применения теоремы Пифагора в ней указан способ нахождения пифагорейских троек, т. е. целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$:

$$x = \alpha\beta, \quad y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}, \quad z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

Некоторые задачи приводят к полным квадратным уравнениям.

Мы остановились на обзоре содержания «Математики в девяти книгах», так как это сочинение является самым значительным и, пожалуй, единственным крупным памятником древней китайской математики, имеющим к тому же энциклопедический характер. Оно показывает, что в течение многих веков математика Китая развивалась по преимуществу в вычислительно-алгоритмическом направлении и создала существенные элементы алгебраического подхода к решению задач.

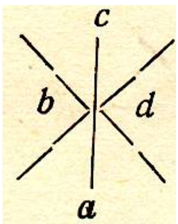
Причины того, что математика Китая (а как мы увидим ниже, и Индии) приобрела такие особенности, коренятся в общественно-экономических условиях жизни общества. Основными функциями являются организация общественных работ в области ирригации, транспорта и оборонительных сооружений. Феодальный гнёт и давление религии определили медленный, застойный характер развития всех наук, в том числе и математики.

Очень стары также некоторые диаграммы из книг периода династии Хань, например из «Книги перемен» (И цзинь, VIII – VII вв. до н. э.). В числе их следующий, связанный со многими легендами, магический квадрат (ло шу):

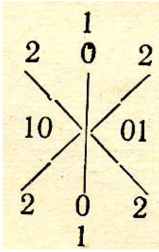
$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

В средние века в математике Китая все больше выявлялись и формировались алгебраические элементы как в области создания общих алгебраических методов, так и в формировании и усовершенствовании символики. В «Драгоценном зеркале четырех элементов» (1303 г.; четыре элемента – это четыре неизвестных, образно называемые: небеса, земли, мужчины, вещи) Чжу Ши-цзе решал задачи, приводящиеся к системам четырех уравнений с четырьмя неизвестными путем последовательного исключения неизвестных. Обращает на себя внимание оригинальная символика этого автора.

Так, например, у него $ax + by + cz + du$ обозначается



Полином $x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2zu + u^2 + 2ux$ обозначается фигурой



Свободный член размещается в центре этой фигуры.

Другим крупным достижением математиков средневекового Китая было регулярно применяемое суммирование прогрессий $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, известное из сочинений Шэнь Ко (XI в.) и Ян Хуэя (XIII в.). Своеобразие приемов вычисления сумм прогрессий данного вида можно проиллюстрировать на задаче вычисления числа ядер, сложенных в пирамиду с квадратным основанием. Пусть для определенности в пирамиде насчитывается 5 слоев:

0 0 0 0 0 + 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 + 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 + 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 + 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 + 0 0 0 0 0
0 0 0 0 + + + 0 0 0 0
0 0 0 0 + + + 0 0 0 0
0 0 0 0 + + + 0 0 0 0
0 0 0 0 + + + 0 0 0 0
0 0 0 + + + + + 0 0 0
0 0 0 + + + + + 0 0 0
0 0 0 + + + + + 0 0 0
0 0 + + + + + + + 0 0
0 0 + + + + + + + 0 0
0 + + + + + + + + + 0

Тогда количество ядер: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

Из соотношений: $1^2 = 1$,

$2^2 = 1 + 3$,

$3^2 = 1 + 3 + 5$,

$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$,

$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

следует, что $5 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 1 \cdot 9$, или в общем виде

$$S = n \cdot 1 + (n - 1) \cdot 3 + (n - 2) \cdot 5 + ... + 1 \cdot (2n - 1),$$

что иллюстрируется частью фигуры, отмеченной крестиками.

Прибавив еще $2S = 2n^2 + 2(n - 1)^2 + 2(n - 2)^2 + ... + 2 \cdot 1^2$, получим

$$3S = (2n + 1)n + (2n+1)(n - 1) + \ldots + (2n + 1) \cdot 1 = (2n + 1) \cdot n \cdot (n + 1)/2.$$

Наконец, $S = (1/6) \cdot n \cdot (n + 1)(2n + 1)$.

Наряду с арифметико-алгебраическими задачами в Китае развивались элементы комбинаторики; был найден треугольник биномиальных коэффициентов, известный теперь под названием треугольник Паскаля.

Все известные нам источники утверждают, что с XIV в. В Китае начинается длительный период застоя в развитии наук. Добытые ранее знания не развиваются и даже забываются; математика развивается преимущественно за счет усвоения иностранных знаний. В 1583 г. В Китай проник иезуит-миссионер М. Риччи, вслед за которым Китай наводнила целая армия священнослужителей и монахов. Видимо, не без их содействия в 1606 г. В Китае впервые появились издания «Начал» Евклида, в 1650 г. – таблицы логарифмов Влакка. Китайские математики-специалисты подготавливались к научной деятельности за границей, в большинстве там же и работали.

Математика в Китае получила новый стимул к развитию только в XX в. Под влиянием народно-освободительного движения, а затем народной революции и руководства Коммунистической партии Китая. В 1928 г. В Нанкине была образована центральная научно-исследовательская академия, среди 13 институтов которой был и институт математики. Собравшиеся в этом институте ученые вели работу по многим направлениям одновременно. Они получили результаты в области рядов Фурье, аналитической теории чисел, топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей и математической статистики, алгебры, теории конечных групп. После 1949 г. В Китае началось быстрое развитие математики в тесном содружестве с математиками СССР. Особенно тесно ученые сотрудничали в области аналитической теории чисел, где Хуа Ло-кэн и другие вели работы методом тригонометрических сумм, изобретенным академиком И. М. Виноградовым. К работам Д. Е. Меньшова об ортогональных рядах примыкают работы Чень Цзян-гуана и Ван Фу-чуна. Исследования Су Бо-цина и других связаны с работами советских математиков школы С. П. Финикова по линейным комплексам. Даже в теории вероятностей, где особенно сильное влияние оказывали английские и американские математики, сказалось сближение с советскими специалистами школы А. Н. Колмогорова. Сотрудничество китайских математиков с советскими коллегами всегда было плодотворным, обогащало их в научном отношении и способствовало развитию прогрессивного мировоззрения и практических успехов в приложениях математики.

3.4. Математика Древней Индии

В древней и средневековой математике народов Индии много общего с китайской математикой. В Индии математика тоже является очень древней наукой, издавна составляющей часть культуры. В ней тоже преобладали вычислительно-алгоритмические методы и отсутствовали попытки построения дедуктивных систем; геометрия индийцев – также практическая.

Эта общность характера науки и путей ее развития не случайна и отражает сходность путей исторического развития обеих великих стран и давние экономические и культурные связи между ними. В Индии к началу нашей эры уже сложилась развитая феодальная система организации общества. Длительная консервация феодальных отношений усугублялась кастовым расслоением социальных групп населения, что определило, несмотря на бурное временами течение политических событий, весьма медленный темп развития производства и науки.

Английские, французские, португальские колонизаторы в течение нескольких столетий насильственно задерживали естественное развитие производства, науки и культуры индийского народа.

Самыми ранними памятниками математической культуры индийцев являются религиозные книги: сутры и веды. Их происхождение относят к VIII – VII вв. до н. э. Написаны они на давно уже умершем языке – санскритском. В них мы находим геометрические построения, составляющие важную часть ритуалов при постройке культовых сооружений: храмов, алтарей и т. д. В них можно найти первые способы квадрирования кругов, применение теоремы Пифагора.

Числовая система с древних времен определилась как десятичная. Столь же рано определилась склонность к оперированию большими числами, нашедшая отражение в легендах. Будда, например, отличался феноменальным умением считать; он строил числовые десятичные системы до 10^{54}, давая наименования каждому разряду. Женихи прекрасной богини Земли, добиваясь ее руки, обязаны были соревноваться в письме, арифметике, борьбе и стрельбе из лука. Победитель соревнования Сарватасидда придумал, в частности, шкалу чисел, идущих в геометрической прогрессии со знаменателем 100, до $10^{7 + 9 \cdot 46}$, т. е. до числа с 421 нулем. Пристрастие к операциям с большими числами сохранялось в течение всей истории математики в Индии.

Наиболее яркий период развития, оставивший самые значительные образцы математической литературы, – это V – XII вв. н. э. В это время трудились выдающиеся индийские ученые – математики и астрономы: Ариабхатта (конец V в.), Брахмагупта (род.598 г.), Бхаскара Акарья (род.1114 г.).

От Ариабхатты, жившего в северо-восточной Индии, осталось сочинение в стихах астрономического и математического содержания. В нем сформулированы правила элементарной математики: арифметики, геометрии и тригонометрии. Брахмагупта также в стихотворной форме написал огромное сочинение в 20 книгах «Усовершенствованная наука Брамы», в котором 12-я книга посвящена арифметике и геометрии, а 18-я – алгебре и неопределенным уравнениям. Значительное математическое содержание имеют две книги Бхаскары: «Лилавати» и «Виджаганита». «Лилавати» (что значит «прекрасная») Бхаскара посвятил своей дочери. В поэтической манере в 13 отделах книги излагаются: 1) метрология; 2) действия над целыми числами и дробями и извлечение корней; 3) способ обращения, способ ложного положения и другие частные приемы решения задач; 4) задачи на бассейны и смеси; 5) суммирование рядов; 6) планиметрия; 7 – 11) вычисление различных объемов; 12) задачи неопределенного анализа; 13) задачи комбинаторики.

Другое сочинение Бхаскары – «Виджаганита» – состоит из восьми отделов: 1) действия над положительными и отрицательными числами; 2 – 3) неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени; 4) линейные алгебраические уравнения; 5) квадратные уравнения; 6) системы линейных уравнений; 7 – 8) неопределенные уравнения 2-й степени.

Индийские математики ввели и правильно трактовали и понятие отрицательного числа. Так, Брахмагупта разъясняет, что числа могут трактоваться либо как имущество, либо как долг. Правила операций с числами тогда таковы: сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов – долг, имущества и долга – их разность, а если они равны – нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля – имущество. Произведение двух имуществ или двух неимуществ есть имущество; результат произведения имущества на долг представляет убыток. То же правило справедливо и при делении. Квадрат имущества или долга есть имущество; имущество имеет два корня: один составляет прибыль, другой – долг. Корня убытка не существует, ибо таковой не может быть квадратом. Однако, вводя отрицательные числа, индийские математики не использовали их как равноправные элементы математики, считая их только чем-то вроде логических возможностей, потому что, по выражению Бхаскары, люди с ними не согласны.

Кроме правил и задач арифметики в индийскую математику входили также решения ряда задач алгебры, неопределенного анализа, комбинаторных задач. К алгебре относятся в первую очередь правила решения линейных уравнений, их систем и квадратных уравнений.

Например, Ариабхата формулирует задачу: капитал 100 (обозначим его p) отдан в рост. Прирост за месяц (= x) отдан снова в рост на 6 (= t) месяцев. Общий прирост 16 (= q). Каков прирост за месяц?

Соответствующего уравнения ($tx^2 + px = qp$) Ариабхата, разумеется, не пишет, но правило, даваемое им для решения этой задачи, есть не что иное, как общее правило для квадратного уравнения. В самом деле, он дает предписание: умножь сумму прироста и прироста прироста (т.е. q) на время (t) и капитал (p), прибавь квадрат половины капитала ($p^2/4$), извлеки квадратный корень, затем вычти половину капитала и раздели остаток на время. Соответствующая формула, очевидно, будет иметь следующий вид:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}}{t}.$$

Индийская геометрия носит все черты прикладной науки. Есть чертежи, есть правила, иногда даже правил нет, под чертежом только написано: «Смотри!». Некоторый интерес представляют тригонометрические таблицы, в которых хорды заменены полухордами. При этом вводятся тригонометрические функции: синусы, косинусы и синусы-версусы (sinvers $\alpha = 1 - \cos \alpha$).

В истории Индии имеется достаточно фактов, свидетельствующих о наличии экономических и политических связей с греческими, египетскими, арабскими государствами и с Китаем. В математике считается бесспорным индийское происхождение десятичной системы счисления с нулем и правил счета. Можно проследить заимствование индусами у греков некоторых геометрических сведений и т. д. Но количество этих фактов невелико.

В заключение еще раз отметим, что относительно математики в Китае и в Индии мы располагаем очень ограниченным запасом сведений. Либо исчезли, либо еще не найдены многие материальные свидетельства возникновения и накопления математических знаний как части древних культур. Помимо разрушительного влияния времени, в этом виноваты колонизаторы, которые уничтожили целые народы.

История учит, что развитие всех форм деятельности человеческого общества происходит под влиянием единых мотивов экономического развития. Это влияние сказывается, в частности, в области математики во множественности источников ее возникновения. Математика возникла и формировалась как наука во многих местах, нередко весьма удаленных друг от друга и между собой, казалось бы, не связанных.

При этом всегда действовали и проявлялись общие закономерности: происхождение математики из практической деятельности людей, выделение числовых и геометрических абстракций в качестве отдельной области человеческих знаний, образование логически последовательной системы этих абстракций, применение последних к практическим задачам и т. п.

Тема 4. ПЕРВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Бронзовый век сменился веком железа – это было смутное время переселений и войн. Вытеснение бронзы железом означало не только переворот в военном деле, но и ускорение роста экономики благодаря удешевлению средств производства. В период VI – IV вв. до н. э. Греция представляла собой совокупность рабовладельческих государств-полисов (городов), ведущих оживлённую торговлю как между собой, так и с другими государствами Средиземноморского бассейна: Египтом, Финикией, Персией и т. д.

В Древней Греции сложились основные типы мировоззрений, действовали различные естественно-научные школы. Ведущее место среди греческих натурфилософских школ последовательно занимали: ионийская (VII – VI вв. до н.э.), пифагорейская (VI – V вв. до н.э.) и афинская (со второй половины V в. до н.э.). В этих школах с большой полнотой и обстоятельностью разрабатывались и математические вопросы.

Современная математика родилась в атмосфере ионийского рационализма – математика, которая ставила не только восточный вопрос «как?», но и современный, научный вопрос «почему?». Согласно преданию отцом греческой математики является милетский купец Фалес, в первой половине VI в. посетивший Вавилон и Египет. Математика помогла найти порядок в хаосе, связать идеи в логические цепочки, обнаружить основные принципы. Она была наиболее теоретической из всех наук.

Одна из причин создания математических теорий – открытие иррациональности. Едва ли не первой открытой иррациональностью явился $\sqrt{2}$. Древним грекам очень рано стало известно логически строгое доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ путём сведения к противоречию. Вслед за иррациональностью $\sqrt{2}$ были открыты многие другие иррациональности. Так, Архит (конец V в. до н. э.) доказал иррациональность чисел вида $\sqrt{n(n+1)}$. Теодор из Кирены установил иррациональность квадратного корня из чисел 3, 5, 6, … , 17. Теэтет (начало IV в. до н. э.) дал одну из первых классификаций иррациональностей.

В обстановке общественной и политической борьбы философы и наставники излагали свои теории и заодно новую математику. Впервые в истории группа критически мыслящих, «софистов», менее скованная традицией, чем какая-либо иная предшествовавшая ей группа учёных, стала рассматривать проблемы математического характера скорее с целью уяснения их сути, чем ради пользы.

Так как такой подход позволил софистам дойти до основ точного мышления вообще, было бы чрезвычайно поучительно познакомиться с их рассуждениями. К несчастью, от этого периода дошел лишь один цельный математический фрагмент, принадлежащий ионийскому философу Гиппократу из Хиоса. Математические рассуждения в этом фрагменте на весьма высоком уровне.

Гиппократ исследовал площади плоских фигур, ограниченных как прямыми линиями, так и дугами окружности. Он учит, что площади подобных круговых сегментов относятся, как квадраты стягивающих их хорд. Он знает теорему Пифагора, а также соответствующее неравенство для непрямоугольных треугольников. Весь его трактат уже мог бы быть отнесён к евклидовой традиции, если бы он не был старше Евклида более чем на столетие.

Проблема квадратуры круга – одна из «трех знаменитых математических проблем античности», которые в этот период стали предметом исследования. Эти проблемы таковы:

1. Квадратура круга, то есть нахождение такого квадрата, площадь которого была бы равна площади данного круга.

2. Удвоение куба, то есть определение ребра такого куба, который имел бы объем, вдвое больший объема заданного куба (так называемая делийская задача).

3. Трисекция угла, то есть разделение любого заданного угла на три части.

Значение этих проблем в том, что их нельзя точно решать геометрически с помощью конечного числа построений прямых линий и окружностей, - это можно сделать только приближённо, - вследствие чего эти проблемы стали средством для проникновения в новые области математики. В связи с этими проблемами были открыты конические сечения, некоторые кривые третьего и четвёртого порядка и трансцендентная кривая, названная квадратриссой.

Задача об удвоении куба была чрезвычайно популярной, о чем говорит дошедшая до нас легенда о требовании оракула на острове Делос увеличить вдвое объём стоящего перед ним кубического жертвенника. Многочисленные попытки решить эту задачу с помощью вычислений в поле рациональных чисел или средствами геометрической алгебры оказались, разумеется, неудачными.

Первого успеха в решении этой задачи добился Гиппократ Хиосский (середина V в. до н. э.). Он свел ее (точнее говоря, несколько более общую задачу преобразования параллелепипеда в куб) к задаче о нахождении двух средних пропорциональных.

Эратосфен, например, построил прибор (мезолабий), удобный для приближённого удвоения куба.

Может ли операция извлечения кубического корня из рационального числа быть сведена к конечному числу извлечений квадратного корня? Сомнение в возможности такого решения задачи высказал впервые в 1637 г. Декарт. Но только ещё через 200 лет задача удвоения куба получила окончательное разрешение. В 1837 г. Ванцель доказал, что кубические иррациональности не принадлежат ни полю рациональных чисел, ни его расширению посредством присоединения квадратичных иррациональностей.

Третьей знаменитой задачей античной древности, не поддававшейся решению средствами геометрической алгебры, была задача о трисекции угла, т.е. о разделении произвольного угла на три равные части.

Уже в V в. до н. э. Гиппий из Элиды применил для решения этой задачи трансцендентную кривую – квадратрису. Трисекция угла имеет столь же долгую историю, как и удвоение куба. Сведение её к кубическому уравнению было осознано только к IX – X вв. н. э. Строгое же доказательство невозможности точной трисекции угла циркулем и линейкой есть простое следствие из результата Ванцеля.

Вероятно, от группы софистов, которые в некоторой степени были связаны с демократическим движенцем, отмежевалась другая группа философов с математическими интересами, примыкавшая к аристократическим объединениям. Они называли себя пифагорейцами в честь основателя этой школы Пифагора, который, предположительно, был мистиком, ученым и государственным деятелем аристократического толка. Софисты в большинстве подчеркивали реальность изменений, пифагорейцы стремились найти в природе и обществе неизменное. В поисках вечных законов вселенной они изучали геометрию, арифметику, астрономию и музыку («квадри-вий»). Самым выдающимся их представителем был Архит из Тарента, который жил около 400 г. до н. э. и школе которого, если мы примем гипотезу Франка (E. Frank), следует приписать большую часть «пифагорейской» математики. Арифметика пифагорейцев была в высшей степени спекулятивной наукой и имела мало общего с современной ей вычислительной техникой Вавилона. Числа разбивались на классы: чётные, нечётные, чётно-чётные, нечётно-нечётные, простые и составные, совершенные, дружеские, треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. Некоторые из наиболее интересных результатов, получены для «треугольных чисел», связывающих арифметику и геометрию:

•
•   • •
•   • •   • • •
• 1,   • • 3,   • • • 6,   • • • • 10 и т. д.

Наш термин «квадратные числа» идет от построений пифагорейцев:

• • •
• •   • • •
• 1,   • • 4,   • • • 9 и т. д.

Сами фигуры значительно старше, ведь некоторые из них мы находим в неолитической керамике. Пифагорейцы же исследовали их свойства, внесли сюда налёт своего числового мистицизма и сделали числа основой своей философии вселенной, пытаясь свести все соотношения к числовым» («все есть число»).

Пифагорейцам были известны некоторые свойства правильных многоугольников и правильных многогранников.

Они показали, как заполнить плоскость системой правильных треугольников, или квадратов, или правильных шестиугольников, а пространство – системой кубов. Возможно, что пифагорейцы знали правильный октаэдр и додекаэдр – последнюю фигуру потому, что находимые в Италии кристаллы пирита имеют форму додекаэдра, а изображения таких фигур в орнаментах или как магический символ относится ещё ко временам этрусков. Они восходят к кельтским племенам Центральной Европы начала эпохи железного века (ок. 900. г до н. э.) и позже (пирит был источником железа).

Что касается теоремы Пифагора, пифагорейцы, приписывали её своему наставнику и передавали, что он принёс в жертву богам сто быков в знак благодарности.

Наиболее важным среди приписываемых пифагорейцам открытий было открытие иррационального в виде несоизмеримых отрезков прямой линии.

Одна из концепций античной общей теории отношений связана с именем Евдокса (ок. 408 г. – ок. 355 г. до н. э.). Ему же приписывается создание теории пропорций. В теории отношений Евдокса:

1) произведено обобщение понятия величины посредством подчинения его системе пяти аксиом:

а) если $a = b$ и $c = b$, то $a = c$; а если $a = c$, то б) $a + b = c + b$; в) $a - b = c -$ b; г) совмещающиеся равны; д) целое больше части;

2) введена аксиома однородности: a и b могут иметь отношение, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга, т. е. для любых конечных a и b существуют m и n такие, что $na > b$ и $mb > a$. Эта аксиома была введена для того, чтобы исключить так называемые неархимедовы величины, например роговидные углы.

Наибольшее основание для аналогий даёт теория сечений Дедекинда. Каждая пара архимедовых величин a и b, участвующих в отношении $a : b$, по теории Евдокса, производит разбиение пар целых чисел m, n на классы. Те пары, для которых справедливо $ma > nb$, могут быть включены в один класс, те же, для которых справедливо обратное $ma < nb$ – в другой класс. Пару m, n, осуществляющую $m_0a = n_0b$, можно отнести в один из предыдущих классов. Дедекинд указывал на то, что в теории Евдокса не учтён фактор непрерывности.

У Дедекинда предварительно определены все четыре действия арифметики, тогда как у Евдокса введена только одна операция, а множество пар целых чисел осталось неупорядоченным. Иначе говоря, вещественные числа Дедекинда образуют поле, тогда как отношения Евдокса образуют группу.

При построении математических теорий в античной Греции рано выделился специфический класс проблем, для решения которых оказалось необходимым исследовать предельные переходы, бесконечные процессы, непрерывность и т. п.

Некоторые группы античных ученых искали выход из этих затруднений в применении к математике атомистических философских воззрений. Наиболее ярким примером является натурфилософская школа Демокрита (ок. 460 – 370 гг. до н. э.). Демокрит считал, что все тела состоят из малых атомов – первовеличин. Тела различаются между собой по форме, положению и способу соединения составляющих их атомов. Однако о математической стороне подобных исследований известно слишком мало. Гораздо больше известно о возражениях их научных противников. Мы имеем в виду апории Зенона (р. ок. 500 г. до н. э.), т. е. логические парадоксы, к которым приводят попытки получать непрерывные величины из бесконечного множества бесконечно малых частиц.

Среди апорий наиболее известны:

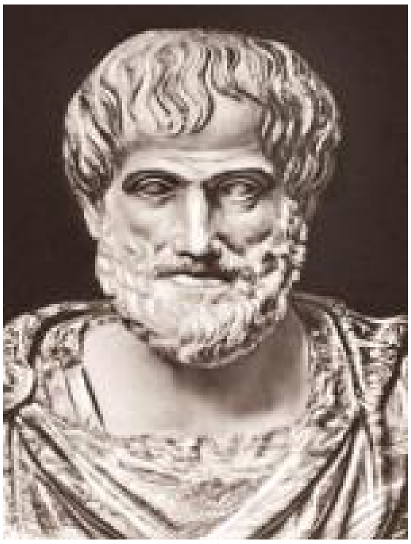
а) *дихотомия,* т. е. невозможность осуществить движение, так как путь может быть делим до бесконечности (пополам, еще раз пополам и т. д.) и поэтому надо последовательно преодолевать бесконечное множество участков пути;

б) *Ахиллес,* который не может догнать черепаху, так как ему надо последовательно достигать тех мест, где только что находилась черепаха, т. е. исчерпывать бесконечную последовательность отрезков пути;

в) *полет стрелы* делается невозможным, если время считать суммой дискретных мгновений, а пространство – суммой дискретных точек.

Апории Зенона убедительно показали, что если искать точные доказательства и логически исчерпывающие решения задач, нельзя пользоваться бесконечностью, опираясь на наивные атомистические соображения. Для подобных целей необходимо разрабатывать и привлекать методы, содержащие наряду с разновидностями суждений о бесконечно малых элементы предельного перехода.

Одним из самых ранних методов такого рода является метод исчерпывания. Изобретение его приписывают Евдоксу. Примеры его употребления приведены в двенадцатой книге «Начал» Евклида и в ряде сочинений Архимеда. Метод исчерпывания применялся при вычислении площадей фигур, объемов тел, длин кривых линий, нахождении подкасательных к кривым и т.п.



Аристотель

В античной математике процесс систематизации и обобщения дал значительные результаты к IV в. до н. э. Этот процесс по существу являлся частью аналогичного процесса, происходившего во всей системе естественнонаучных знаний и нашедшего яркое выражение в философских взглядах Аристотеля (384 – 322 гг. до н. э.). Огромное влияние на математику того времени оказали и успехи логики. Сложившиеся основные формы мышления уже были систематизированы и исследованы, были выдвинуты принципы построения дедуктивной науки. Последняя стала рассматриваться как логическая усложняющаяся система, покоящаяся на первых началах – аксиомах.

Тема 5. АКСИОМАТИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В ЭПОХУ ЭЛЛИНИЗМА

К сожалению, у нас нет первоисточников, описывающий ранний период развития греческой математики. Уцелевшие рукописи относятся к эпохе христианства и ислама и их только в малой мере дополняют заметки в египетских папирусах несколько более раннего периода. Всё же классическая филология дала возможность восстановить тексты, которые восходят к четвёртому столетию до н.э. и далее, и мы благодаря этому располагаем надёжными изданиями Евклида, Архимеда, Аполлония и других великих математиков античности.

Сочинения, в которых в то время излагались первые системы математики, назывались «Началами».

Первые «Начала», о которых дошли до нас сведения, были написаны Гиппократом Хиосским. Встречаются упоминания и о «Началах», принадлежащих другим авторам. Однако все эти сочинения забыты и утеряны практически с тех пор, как появились «Начала» Евклида. Последние получили всеобщее признание как система математических знаний, логическая строгость которой оставалась непревзойденной в течение свыше двадцати веков. Все это время люди изучали геометрию по Евклиду. Его «Начала» до сих пор лежат в основе всех систематических школьных курсов геометрии.

Об авторе «Начал» Евклиде сохранилось очень мало сведений. Известно, что он жил около 300 г. До н.э. в Александрии, входившей в то время в состав египетского царства. Последнее образовалось в результате распада мировой державы Александра Македонского. В Музейоне (организация научно-учебного центра) было собрано свыше 500 тысяч рукописей научного характера. Научную работу в Музейоне вели почти все крупнейшие ученые эллинистической эпохи, в том числе Евклид, Архимед, Аполлоний, Эратосфен и др.

При написании «Начал» Евклид, по-видимому, не руководствовался целью составить энциклопедию математических знаний своего времени. Он, вероятно, стремился изложить только основы математики в виде логически совершенной математической теории, исходящей из минимума исходных положений.

«Начала» состоят из тринадцати книг, каждая из которых состоит из последовательности теорем. Иногда к этим книгам добавляют книги 14 и 15, принадлежащие другим авторам и близкие по содержанию к последним книгам Евклида. Первой книге предпосланы определения, аксиомы и постулаты. Определения имеются и в некоторых других книгах (2 – 7, 10, 11). Аксиом и постулатов в других книгах «Начал» нет.

Определения – это предложения, с помощью которых автор вводит математические понятия, поясняя их.

Аксиомы, или общие понятия, у Евклида – это предложения, вводящие отношения равенства или неравенства величин. Аксиом в «Началах» пять:

1. Равные одному и тому же, равны и между собой;
2. Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны;
3. Если от равных отнять равные, то и остатки будут равны;
4. Совмещающиеся друг с другом равны между собой;
5. Целое больше части.

В число исходных положений «Начал» входят постулаты, т. е. утверждения о возможности геометрических построений. С их помощью Евклид обосновывает все геометрические построения и алгоритмические операции. Постулатов тоже пять:

1. Через две точки можно провести прямую;

2. Отрезок прямой можно продолжить неограниченно;

3. Из всякого центра любым расстоянием можно описать окружность;

4. Все прямые углы равны между собой;

5. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей и если сумма внутренних односторонних углов меньше двух прямых, то прямые пересекутся с той стороны, где это имеет место.

Перейдём к обзору содержания евклидовых «Начал». Первые шесть книг – планиметрические, из них 1 – 4 содержат ту часть планиметрии, которая не требует применения теории пропорций. Первая книга вводит основные построения, действия над отрезками и углами, свойства треугольников, прямоугольников и параллелограммов, сравнение площадей этих фигур. Завершают первую книгу теорема Пифагора и обратная ей теорема.

Во второй книге рассматриваются соотношения между площадями прямоугольников и квадратов, подобранные таким образом, что они образуют геометрический аппарат для интерпретации алгебраических тождеств и для решения задач, сводящихся к квадратным уравнениям, т. е. геометрическая алгебра. Третья книга трактует свойства круга и окружности, хорд и касательных, центральных и вписанных углов. Четвертая книга посвящена свойствам правильных многоугольников: вписанных и описанных, а также построению правильных 3-, 4-, 5-, 6- и 15-угольников.

В пятой книге «Начал» развивается общая теория отношений величин, являющаяся прообразом теории действительного числа в форме, соответствующей дедекиндовым сечениям.

Геометрические приложения теории отношений включены в шестую книгу. В ней, например, доказаны теоремы об отношении площадей прямоугольников и параллелограммов, имеющих общую высоту, о пропорциональности отрезков, отсекаемых на сторонах угла парой параллельных прямых, о подобии фигур и отношении площадей подобных фигур и т.п. Здесь же находится группа теорем об эллиптическом и гиперболическом приложении площадей, обобщённом на параллелограммы.

Книги 7 – 9 посвящены теории чисел, но не технике вычислений, а таким «пифагорейским» вопросам, как делимость целых чисел, суммирование геометрических прогрессий, и некоторым свойствам простых чисел. Тут мы встречаем и «алгоритм Евклида» для определения наибольшего общего делителя заданной системы чисел, и «теорему Евклида», что простых чисел бесконечно много. Доказательство проводится тем же способом, что и сейчас: предположение конечности числа простых чисел опровергается построением еще одного числа, на единицу превышающего произведение всех простых чисел. В ряде теорем рассматриваются свойства чётности и нечётности чисел.

Десятая книга «Начал» интересна в первую очередь громоздкой и сложной классификацией всех 25 возможных видов биквадратичных иррациональностей (т. е. выражений вида $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, где a и b – соизмеримые отрезки). Кроме того, в десятой книге даны: способ нахождения неограниченного числа «пифагоровых троек» целых чисел, критерий соизмеримости двух величин, основанный на алгоритме попеременного вычитания, отыскание общей наибольшей меры двух и трех рациональных чисел (соизмеримых величин) и др.

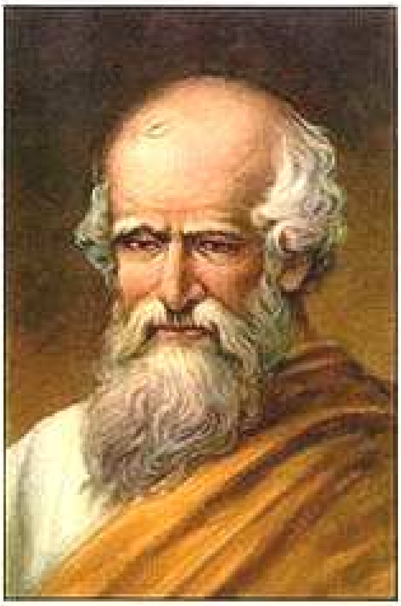
Последние три книги (11 – 13) «Начал» – стереометрические. Первая из них открывается большим числом определений, что вполне естественно, так как в предыдущих книгах вопросы стереометрии не рассматривались. Затем следует ряд теорем о взаимных расположениях прямых и плоскостей в пространстве и теоремы о многогранных углах. Последнюю треть книги составляет рассмотрение отношений объемов параллелепипедов и призм.

Последняя, тринадцатая книга «Начал» содержит построение пяти правильных многогранников: тетраэдра (4-гранника), гексаэдра (6-гранника), октаэдра (8-гранника), додекаэдра (12-гранника), икосаэдра (20-гранника); там же находятся отношения объёмов шаров. В заключение доказывается, что других правильных многогранников не существует.

Обзор содержания «Начал» показывает, что это сочинение представляет собой систему основ античной математики. В неё входят: элементарная геометрия, основы теории рациональных чисел, общая теория отношений величин и опирающиеся на неё теория пропорций и теория квадратичных и биквадратичных иррациональностей, элементы алгебры в геометрической форме и метод исчерпывания.

Мы уже упоминали, что «Начала» Евклида оставили неизгладимый след в истории математики и в течение многих веков служили классическим образцом математической строгости и последовательности.

В течение всей многовековой истории математики «Начала» являются фундаментом всех геометрических изысканий. «Начала» Евклида до нашего времени составляют основу школьных учебников геометрии, число их изданий огромно.



Архимед

Величайшим математиком эпохи эллинизма и всего древнего мира был Архимед (ок. 287 – 212 гг. до н.э.).

Этот замечательный ученый был уроженцем Сиракуз (южная часть Сицилии), сыном астронома и математика Фидия. Для усовершенствования своих знаний он некоторое время работал в Александрии в сотрудничестве с другими крупнейшими математиками. Возвратившись в Сиракузы, Архимед продолжал усиленные научные занятия. В последний период жизни он участвовал в обороне родного города от римских завоевателей, руководя постройкой сложных технических сооружений и изобретая военные орудия. Во время штурма и взятия Сиракуз Архимед был убит, а его библиотека и инструменты разграблены.

Сочинения Архимеда написаны преимущественно в виде писем. До нас дошли десять крупных и несколько более мелких сочинений математического характера. Основной особенностью математических сочинений Архимеда является применение строгих математических методов в механике и физике.

Такая особенность делает труды Архимеда едва ли не наиболее ярким образцом развития прикладных математических знаний, техники вычислений и новых математических методов, в особенности инфинитезимальных, в эпоху поздней античности. Многочисленные механические изобретения и открытия Архимеда широко известны. Ему принадлежат: архимедов винт, системы рычагов, блоков и винтов для поднятия и передвижения больших тяжестей, планетарий, метательные машины и т.д. Имя Архимеда связано также с его теоремой о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Эта теорема находится в трактате по гидростатике «О плавающих телах».

Наиболее важный вклад Архимеда в математику относится к той области, которую теперь мы называем интегральным исчислением: теоремы о площадях плоских фигур и об объёмах тел. В «Измерении круга» он нашёл приближённое выражение для окружности, пользуясь вписанными и описанными правильными многоугольниками. В книге Архимеда «О сфере и цилиндре» мы находим выражение для поверхности сферы и для объёма сферы. В своей книге «Квадратура параболы» Архимед дал выражение для площади параболического сегмента. В книге о «Спиралях» мы находим «спираль Архимеда» и вычисление площадей, а в книге «О коноидах и сфероидах» – объём некоторых тел, образованных вращением кривых второго порядка.

Обилие вычислений у Архимеда отличает его от большинства творческих математиков Греции. Это придаёт его трудам, при всех их типично греческих особенностях, восточный оттенок. Лейбниц, один из основателей математического анализа, по этому поводу писал о том, что, изучая труды Архимеда, перестаёшь удивляться успехам современных математиков.

Третий великий математик эллинизма – Аполлоний (ок. 260 – 170 гг. до н.э.) – младший современник и научный соперник Архимеда. Продолжительное время он жил и работал в Александрии. Затем возвратился на родину в г. Пергам (в Малой Азии), где был главой математической школы. Из многочисленных математических сочинений Аполлония до нас дошли в основном только 7 из 8 книг «Конических сечений». Первые четыре книги дошли до нас на греческом языке – на языке оригинала, книги 5–7 сохранились только в переводе на арабский язык; предполагаемое содержание восьмой книги восстановил английский астроном и физик Э. Галлей (1656–1742) исходя из содержания первых семи книг и сведений, сообщенных комментаторами Аполлония.

В качестве примера стиля рассуждения Аполлония приведём его определение параболы $y^2=2px$: «Если конус пересечён плоскостью по оси и пересечён также другой плоскостью, которая пересекает основание конуса по прямой, перпендикулярной к основанию треугольника по оси, и если, кроме того, диаметр сечения параллелен той или другой из двух сторон треугольника по оси, то всякая прямая, которая проводится от сечения конуса параллельно общему сечению текущей плоскости и основанию конуса до диаметра, взятая в квадрате, будет равна прямоугольнику, заключённому прямо из диаметра, отрезанного от неё до вершины сечения и некоторой другой прямой, которая имеет к прямой, взятой между углом конуса и вершиной сечения, такое отношение, какое квадрат основания треугольника по оси к прямоугольнику, заключенному остальными двумя сторонами треугольника. Такое сечение называется «параболой».

Книги 1–4 часто характеризуют как содержащие изложение основных свойств конических сечений. Следующие же книги считают относящимися к специальным вопросам теории конических сечений.

В пятой книге впервые решаются экстремальные задачи вроде задачи о кратчайшем расстоянии от данной точки до конического сечения. Здесь появляются элементы теории разверток в виде определения геометрического места центров кривизны.

Шестая книга содержит разбор проблемы подобия конических: сечений и обобщения задачи о построении семейства конусов, проходящих через данное коническое сечение. В последней из известных, седьмой, книге исследуются вопросы, связанные с функциями, длин сопряженных диаметров, параметров и т. п.

Тема 6. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДЫ ПОЗДНЕЙ АНТИЧНОСТИ

Последний период античного общества – период господства Рима. Рим завоевал Сиракузы в 212 г. до н. э., Карфаген – в 146 г. до н. э., Грецию – в 146 г. до н. э., Месопотамию – в 64 г. до н. э., Египет – в 30 г. до н. э. Всё, чем римляне овладели на Востоке, включая Грецию, было низведено до положения колонии, управляемой римскими администраторами.

Александрия оставалась центром античной математики. Велись оригинальные исследования, хотя компилирование и комментирование всё более становилось основным видом научной деятельности.

Одним из самых ранних александрийских математиков римского периода был Никомах из Герасы (ок. 100 г.), чьё «Арифметическое введение» - наиболее полное из сохранившихся изложений пифагорейской арифметики. Там рассматриваются большей частью те же вопросы, что и в арифметических книгах Евклида.

Одно из крупнейших произведений александрийского периода – «Великое собрание» Птолемея, более известное под арабизированным названием «Альмагест» (ок. 150 г.). В нём есть и тригонометрия с таблицей хорд для углов от 0° до 180°, соответствующая таблице синусов для углов от 0° до 90° через полградуса.

В «Альмагесте» мы находим формулу для синуса и косинуса суммы и разности двух углов и зачатки сферической тригонометрии. Теоремы формулируются геометрически – наши современные тригонометрические обозначения идут лишь от Эйлера (восемнадцатый век).

Несколько старше Птолемея Менелай (ок. 100 г.). В его «Сферике» содержится геометрия сферы и рассматриваются сферические треугольники – предмет, которого нет у Евклида. Здесь мы находим «теорему Менелая» для треугольника в обобщённом для сферы виде. В астрономии Птолемея немало вычислений в шестидесятичных дробях, а трактат Менелая геометричен строго в духе евклидовой традиции.

В эпоху Менелая, возможно, творил и Герон, – во всяком случае мы знаем, что он точно описал лунное затмение 62 г.). Герон был энциклопедистом, он писал на геометрические, вычислительные и механические темы, его произведения – любопытная смесь греческого и восточного. В своей «Метрике» он выводит «формулу Герона» для площади треугольника $\left(\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right)$ чисто геометрическим образом; сам результат приписывается Архимеду. В той же «Метрике» описаны типично египетские «основные» дроби, например в приближении для $\sqrt{63}$ = (7 + 1/2 +1/4 +1/8 + 1/16).

Формулу Герона для объёма усечённой пирамиды с квадратным основанием без труда можно свести к формуле, имеющейся в Московском папирусе. Напротив, определение объёма пяти правильных многогранников у Герона – в духе Евклида.

Ещё сильнее восточный колорит в «Арифметике» Диофанта (ок. 250 г.). Уцелели только шесть книг оригинала, общее их число – предмет догадок. В собрание Диофанта входят весьма разнообразные задачи, а их решения часто в высшей степени остроумны. «Диофантов анализ» состоит в нахождении решений неопределенных уравнений вида $Ax^2 + Bx + C = y^2$, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$ или систем таких уравнений. Типично для Диофанта то, что его интересуют только положительные рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными». У Диофанта мы впервые встречаем систематическое использование алгебраических символов. У него есть особые знаки для неизвестного, для минуса, для обратной величины. Для каждой степени неизвестного был тоже особый символ.

К основным характерным чертам математики поздней античности относится также большое распространение сочинений, являющихся комментариями классических сочинений. Преобладание комментариев является, несомненно, признаком упадка математического творчества. Однако сочинения комментаторов принесли большую пользу истории математики, сохранив в отрывках или в пересказе многие классические и важные сочинения.

Один из ранних комментаторов – Гемин Родосский (ок. 100 г. до н. э.). По свидетельству Прокла (V в. н. э.), Гемин излагал историю высших кривых: спирали, конхоиды, циссоиды и др. Ему принадлежит также одно из первых делений наук на теоретические (геометрия и арифметика) и практические (астрономия, механика, оптика, геодезия, правила счёта).

Другой крупный комментатор – Теон из Александрии (IV в.) – составил комментарии к «Началам» Евклида и к астрономическому трактату «Альмагест» Птолемея. Его дочь Гипатия комментировала произведения Архимеда, Аполлония и Диофанта.

Особое место в ряду комментаторов занимает Папп из Александрии (IV в. н. э.). Кроме комментариев к сочинениям Евклида и Птолемея, он написал большое сочинение «Математические коллекции», в котором подробно и со знанием дела изложил, со своими замечаниями, многие замечательные открытия своих предшественников. Из восьми книг «Математической коллекции» до нас дошли только шесть (книги 3 – 8). Пропавшие книги, по-видимому, содержали обзор греческой арифметики, на что указывают сохранившиеся отрывки.

Последние из наиболее значительных комментаторов – Прокл (V в.) и Евтокий (VI в.) – принадлежат к афинской школе, существовавшей некоторое время после разгрома научного центра в Александрии. Прокл интересен тем, что в сочинениях нематематического (комментарии к сочинениям Платона) и математического (комментарии к «Началам» Евклида) характера воспроизвел много фактов из истории античной математики. Евтокий написал обстоятельные комментарии к сочинениям Архимеда и Аполлония.

Деятельность комментаторов прекратилась в VI в., после закрытия афинской школы. В бассейне Средиземноморья в развитии математики наступил длительный перерыв.

Тема 7. МАТЕМАТИКА НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ И БЛИЖНЕГО ВОСТОКА

На обширных территориях, от северо-запада Индийского полуострова до северного побережья Африки и юга Испании, с давних времен существовали многочисленные восточные империи. Начиная с VII в. По всем этим землям прокатилась волна завоевательных войн, начатых племенами, населявшими Аравийский полуостров, под давлением острого хозяйственного кризиса. Эти войны приняли форму борьбы за господство новой религии – ислама (или, как ее иначе называют, магометанства). В течение ряда веков образовалась колоссальная область торгового обмена и экономических связей. Возникли большие города – центры торговли, ремесел и административного управления. Арабский язык стал официальным языком.

Сложившиеся условия хозяйственной и политической жизни благоприятствовали развитию математики. Знания математики требовали нужды государственного управления. В аппарате государственного управления появились специально оплачиваемые учёные. В результате сложилась своеобразная система математических знаний. Преобладающее место в ней заняло создание разнообразных вычислительных методов и измерительных средств для нужд торговли, административного управления, землемерных работ, картографии, астрономии, для составления календаря и т.д.

В вычислительной практике арабоязычных народов равноправно действовали обе системы счисления: десятичная абсолютная и 60-ричная. Первая была заимствована из Индии не позднее VII в. н. э. и быстро получила широкое распространение. Параллельно с десятичной сохранялась и регулярно употреблялась в астрономических обсерваториях унаследованная от вавилонян 60-ричная система счисления. В духе математиков Древнего Вавилона составлялись и использовались вспомогательные таблицы наподобие таблицы умножения (от $1 \cdot 1$ до $59 \cdot 59$).

С упадком Римской империи центр математических исследований постепенно перемещался в Индию, а позже – в обратном направлении, в Месопотамию. Первые хорошо сохранившиеся индийские тексты в области точных наук – это «Сиддханты», часть которых, «Сурья», дошла до нас, вероятно, в достаточно точно соответствующей оригиналу (примерно между 300 и 400 годами н. э.) форме. В этих книгах содержится в основном астрономия.

Наиболее известными математиками Индии были Ари-абхата (прозванный «первым», около 500 г.) и Брахмагупта (около 625 г.). Для их работ характерны арифметическо-алгебраические разделы. В их склонности к неопределённым уравнениям проявляется некоторое родство с Диофантом.

Современником Брахмагупты был Бхаскара I, автор комментария к трактату Ариабхаты и астрономического сочинения «Маха-Бхаскария», содержащего математические разделы (неопределённые линейные уравнения, элементы тригонометрии и пр.). За этими учёными последовали другие, работавшие в тех же областях. Они занимались также измерениями и тригонометрией. Ариабхата I использовал для π значение 3,1416. Любимым предметом было нахождение рациональных треугольников и четырёхугольников. Особенно успешно над этим работал Магавира из Майсорской школы (ок. 850 г.). До нас дошли также трактаты Шридхары (IX – X вв.), Ариабхаты II (ок. 950 г.), Шрипати (XI в.) и др. Около 1150 г. в Удджайне, где работал Брахмагупта, жил другой выдающийся математик, Бхаскара II. Первое общее решение неопределённого уравнения первой степени $ax + by = c$ (a, b, c – целые числа) встречается у Брахмагупты. Поэтому, строго говоря, нет оснований называть неопределённые линейные уравнения диофантовыми. Диофант допускал ещё и дробные решения, индийские математики интересовались только целочисленными. Они пошли дальше Диофанта и в том отношении, что допускали отрицательные корни уравнений.

Наиболее известным достижением индийской математики является наша современная десятичная позиционная система.

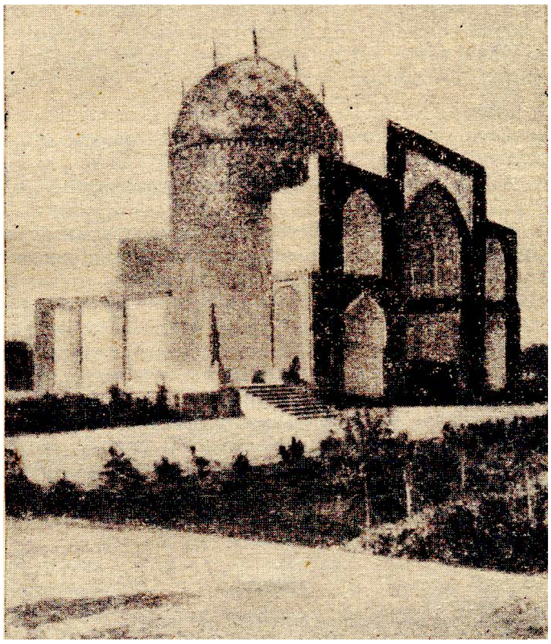
Интересна так называемая Бахшалийская рукопись – семьдесят полос из березовой коры, неизвестной даты и неизвестного происхождения, – её относят и к третьему, и к двенадцатому столетию. Она содержит традиционный индийский материал о неопределённых и о квадратных уравнениях, а также о приближениях, и в ней для обозначения нуля применяется точка. Самый древний письменный документ со значком для нуля относится к девятому столетию. Все это значительно более позднего происхождения, чем знак для нуля в вавилонских текстах. Быть может, знак 0 для нуля возник под греческим влиянием («ouden» – греческое слово, означающее ничто); в то время как вавилонскую точку писали только между цифрами, индийский нуль появляется также на последнем месте, и таким образом 0, 1, 2, …, 9 становятся равноправными цифрами).

Месопотамия, которая при греческих и римских правителях стала форпостом Римской империи, при Сасанидах вернула себе положение центра торговых путей. Персия Сасанидов, находясь между Константинополем, Александрией, Индией и Китаем, была страной, в которой сошлись многие культуры. Вавилон исчез, но его сменил Ктесифон-Селевкия, который в свою очередь после арабского завоевания в 641 г. Уступил место Багдаду.

В математике периода ислама мы видим такое смешение различных влияний, какое мы уже встречали в Александрии и в Индии. Халифы Аббасиды, особенно ал-Мансур (754 – 775), Харун-ал-Рашид (786 – 809) и ал-Мамун (813 – 833), покровительствовали астрономии и математике; ал-Мамун даже соорудил в Багдаде «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. Исламские работы в области точных наук, которые начались с перевода «Оиддхант» ал-Фазари, достигли своей первой вершины в деятельности уроженца Хивы Мухаммеда ибн Муса ал-Хорезми, творчество которого приходится на время около 825 г. Мухаммед написал много книг по математике и астрономии. В своей арифметике он разъясняет индийскую систему записи чисел.

Источником сведений об алгебре явилось сочинение «Китаб аль-Джебр Валь-Мукабала». Название в переводе означает: книга об операциях джебр (восстановления) и кабала (приведения). Первая из операций, имя которой послужило названием для алгебры и служит до настоящего времени, состоит в переносе членов уравнения из одной стороны в другую. Вторая – операция приведения подобных членов уравнения.

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (ал-Хорезми) в латинизированном виде: алгоритм. Вначале это слово обозначало фамилию, затем нумерацию по позиционной системе, а теперь – всякую систему вычислений, производимых по строго определенным правилам и заведомо приводящих к решению поставленной задачи.



Могила Омара Хайяма в Нишапуре

Вообще работы ал-Хорезми больше выявляют восточное, чем греческое влияние. Его труды в целом сыграли важную роль в истории математики как один из главных источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с индийскими цифрами и с арабской алгеброй.

Около 1000 г. н. э. в Северной Персии появились новые правители, турки-сельджуки, государство которых процветало в районе, прилегающем к центру оросительной системы Мерву. Здесь жил Омар Хайям (ок. 1038/48–1123/24), который стал известен на Западе как автор «Рубайят» (в переводе Фицджеральда, 1859 г.). Он был астрономом и философом:

Я рассчитал – твердит людей молва –
Весь ход времен. Но дней ведь только два
Изъял навек я из календаря:
Тот, что не знаем – завтра, не вернём – вчера.

По-видимому, Омар имеет здесь в виду свою реформу старого персидского календаря, после чего календарь давал ошибку в один день за 5000 лет, тогда как наш нынешний грегорианский календарь даёт ошибку в один день за 3330 лет. Его реформа была осуществлена в 1079 г., но позже его календарь был заменен мусульманским лунным календарем. Омар написал «Алгебру» (полное название: «Трактат о доказательствах алгебры и алмукабалы») – выдающееся достижение, так как в ней содержится систематическое исследование уравнений третьей степени. Он определял корни этих уравнений как общие точки двух конических сечений. В другой книге, в которой рассматриваются трудности у Евклида, Омар заменил аксиому параллельных целым рядом других допущений. Здесь он строил фигуры, которые можно связать с «гипотезами тупого, острого и прямого угла», как они сейчас используются в неевклидовой геометрии. Он заменил также евклидову теорию пропорций числовой теорией, причем он пришёл к численному приближению иррациональностей и к общему понятию действительного числа.

В Египте выдающейся личностью был Ибн ал-Хайсам (Алхазен, ок. 965–1039), крупнейший мусульманский физик, «Оптика» которого имела большое влияние на Западе. Он решил «Задачу Алхазепа», в которой требуется из двух точек па площади круга провести прямые так, чтобы они встретились в точке окружности и в этой точке образовали равные углы с нормалью. Эта задача приводит к уравнению четвертой степени, она была решена в греческом духе с помощью пересечения гиперболы с окружностью. Алхазеп примерял также метод исчерпывания для вычисления объёмов тел, которые получаются при вращении параболы вокруг какого-либо её диаметра или ординаты.

Другой центр учёности существовал в Испании. В Кордове жил один из самых выдающихся астрономов ал-Заркали (Арзахел, ок. 1029 г.– до примерно 1087 г.), наилучший наблюдатель своего времени и составитель так называемых Толедских планетных таблиц. Тригонометрические таблицы этого труда, который был переведен на латинский язык, оказали определенное влияние па развитие тригонометрии в эпоху Возрождения.

Стройную систему тригонометрии как плоской, так и сферической, представляет сочинение Насирэддина (1201 – 1274) «Трактат о полном четырёхстороннике», где: 1) развита теория отношений;

2) изложена теория фигур, состоящих из четырёх попарно пересекающихся прямых; 3) собраны способы решения плоских и сферических треугольников; 4) решена задача об определении сторон сферического треугольника по трём углам.

Насирэддин отделил от астрономии тригонометрию как самостоятельную науку. Его попытки доказать аксиому о параллельных Евклида, причём он следовал ходу мыслей Омара Хайяма, показывают, что он ценил теоретический метод греков. Его влияние ощутимо в Европе эпохи Возрождения. Он был продолжателем традиций Омара и в своей теории пропорций, и в новых численных приближениях иррациональных чисел.

Другой персидский математик, ал-Каши (первая половина пятнадцатого столетия) проявляет большое искусство при выполнении вычислений, вполне сравнимое с тем, чего достигли европейцы в конце шестнадцатого века. Он решал уравнения третьей степени с помощью итерации и тригонометрическим методом, знал тот метод решения общих алгебраических уравнений высших степеней, который теперь носит имя схемы Горнера и обобщает метод извлечения корней более высокого порядка из обычных чисел (тут вероятно китайское влияние). В его трудах мы находим формулу бинома для любых положительных целых показателей. Число π было известно Каши с 16 десятичными знаками.

Тема 8. МАТЕМАТИКА В ЕВРОПЕ В СРЕДНИЕ ВЕКА И ЭПОХУ ВОЗРОЖДЕНИЯ

На европейском континенте математика имеет не столь древнее происхождение, как во многих странах Ближнего и Дальнего Востока. Заметных успехов в Европе математика достигла только в эпоху развитого средневековья и особенно Возрождения. Наступление эпохи Средних веков в Европе, или эпохи феодализма, относят к V в. н. э., к тому времени, когда пала Западная Римская империя. В Европе, раздробленной на множество владений, в течение V – X вв. происходит длительный процесс становления феодальных отношений. Экономика этих владений носила натуральный характер, обмен был весьма слаб. На XI – XIV вв. приходится расцвет феодализма. В это время происходит разделение труда между городом и деревней, ремеслом и земледелием. Растут города, и развиваются товарно-денежные отношения. В XII – XV вв. в борьбе и войнах складываются национальные государства. В XIV в. феодальный мир потрясают крестьянские войны, за религиозной окраской которых нетрудно разглядеть их антифеодальную сущность. В XV – XVIII вв. в недрах феодализма созревают капиталистические отношения, и феодальный уклад постепенно исчезает. Начало этого последнего периода, т. е. XV и XVI вв., в культурном и идеологическом развитии ряда стран Западной и Центральной Европы известно как эпоха Возрождения.

В V – XI вв. уровень математических знаний в Европе был весьма низким. Сколько-нибудь крупных математических открытий или сочинений не обнаружено. Даже образованные люди редки. Основной организационной предпосылкой развития математики в Европе было открытие учебных заведений. Одно из первых подобных заведений организовал в г. Реймсе (Франция) Герберт (940 – 1003), позднее ставший римским папой под именем Сильвестра II.

В школе Герберта кроме прочих наук учили счёту с применением счётной доски – абака. В то время существовало много способов счёта. Среди приверженцев сложившихся разнообразных традиций счёта основное место занимали две враждующие партии: абакистов и алгоритмиков. Первые в основном отличались требованием обязательного использования абака и 12-ричной римской нумерации. Алгоритмики пользовались письменным обозначением индусских цифр, некоторые из них вводили знак нуля, счёт вели на бумаге, применяли 60-ричные дроби.

Через столетие, в XII – XIII вв., появились в Европе первые университеты. Самыми первыми университетами были итальянские в Болонье, Салерно и других городах. Вслед за ними были открыты университеты в Оксфорде и Париже (1167), Кембридже (1209), Неаполе (1224), Праге (1347), Вене (1367) и т. д. Это были учебные заведения, безраздельно подчинённые церкви. Во главе университетов стояли отцы-настоятели (ректоры), во главе факультетов – деканы. Студенты сначала обучались на подготовительном факультете искусств (артистическом), затем переходили на один из основных факультетов: богословский, юридический или медицинский. Математика входила составной частью в семь свободных искусств (artis liberalis), изучавшийся на факультете искусств.

Уровень математических познаний выпускников университетов был низок; во многих европейских университетах вплоть до XVI в. От лиц, претендовавших на звание магистра, по математике требовалась только… клятва, что он знает шесть книг евклидовых «Начал».

Некоторое оживление в математике наступило в XIII в. В связи с двумя факторами: борьбой против схоластики и богословия, начатой Роджером Бэконом (1214 – 1294), и математическими трудами Леонардо Пизанского (ок. 1200 г.), которого называли также Фибоначчи («сын Боначчо»). Первый из них в своей резкой критике противопоставлял догматам, основанным на вере, опыт как единственный источник научного познания. Все науки основаны на математике и их истины имеют ценность лишь постольку, поскольку они выражены числом и мерой, т. е. в математической форме.

Заслуги Леонардо в математике были совсем другого рода. Он получил хорошее математическое образование в Алжире, где жил его отец – один из торговых представителей богатого и сильного итальянского города Пизы. По торговым делам Леонардо объездил Сирию, Северную Африку, Испанию, Сицилию, пополняя свои знания при любой возможности. Около 1202 г. Он написал «Книгу об абаке». В ней 15 отделов.

Другое сочинение Леонардо «Практическая геометрия», написанное около 1220 г., посвящено измерению площадей многоугольников и объёмов тел вплоть до объёма шара.

Известно ещё одно сочинение Леонардо – по теории чисел. Наконец, сохранились сведения об его участии в публичных состязаниях по математике и о решении им трудных задач. Время, протекшее после работ Леонардо вплоть до эпохи Возрождения (XV – XVI вв.), в историю математики не внесло ярких идей, больших открытий, коренных преобразований.

Профессор Парижского университета Николай Орезм (1328 – 1382) обобщил понятие степени, введя дробные показатели степени, правила производства операций над ними и специальную символику, предваряя фактически идею логарифма.

В конце XV в. Бакалавр Парижского университета Н. Шюке помимо дробного показателя степени ввел также отрицательные и нулевые показатели, отрицательные числа, а также внес усовершенствования в алгебраическую символику.

В итальянских городах и после эпохи Леонардо математика занимала второе место.

Лука Пачоли (1450 – 1520) с юным герцогом из Урбине справа

Мастера счёта нашли своего истолкователя в лице францисканского монаха Луки Пачоли (Pacioli), чья книга «Сумма арифметики», одна из первых печатных математических книг, появилась в 1494 г. Написанная на итальянском языке, притом на не слишком изящном, она содержала все, что тогда знали по арифметике, алгебре и тригонометрии. Отныне пользование индийско-арабскими цифрами стало общепринятым, а арифметические обозначения в этой книге не слишком отличаются от наших.

Успехи тригонометрии явились следствием развития астрономии. Тригонометрия по существу почти все средние века являлась частью астрономии. В XV в., когда дальние плавания стали возможны, резко возрос интерес к астрономии. Это была пора, непосредственно предшествующая открытию Америки (1492), первому плаванию вокруг Африки (1498), первому кругосветному плаванию (1519), открытию и доказательству гелиоцентрической теории Коперника (1473–11543). Для тригонометрии наступили счастливые времена. И вот, наконец, в 1461 г. Появилось сочинение «Пять книг о треугольниках всякого рода», в котором впервые тригонометрия была отделена от астрономии и трактована как самостоятельная часть математики. Написал его немецкий математик Иоганн Мюллер (1436–1476), более известный под именем Региомонтан (латинизированная производная от названия города Кенигсберга, где он родился).

Региомонтан продолжил ранее начатую другими учеными работу по составлению таблиц тригонометрических функций. Он ввёл в практику тригонометрические функции, получившие в XVII в. Названия тангенса и котангенса, составив таблицу их значений.

Своеобразная линия развития научных знаний сложилась на территории Восточной Европы, особенно в средневековой Руси. Термином средневековая Русь мы здесь будем обозначать весь комплекс русских княжеств, ведущую роль в котором играли: Киевская Русь (X – XII вв.), Владимиро-Суздальское княжество (XII – XIII вв.), Новгород (XIII – XV вв.). Тяжёлая историческая судьба русского народа привела к тому, что число непосредственных свидетельств состояния наук в эти времена на Руси резко уменьшилось.

Уже в начале X в. На Руси существовала письменность. Тесные связи с Византией способствовали ускоренному приобретению знаний. Математическое, в частности, образование было на уровне европейского. При дворе киевского князя Владимира Святославича (род. 1015) было налажено обязательное книжное учение его приближённых. При Ярославе Мудром (978–1054) действовала школа. Математические сведения и расчёты записывались с помощью десятичной алфавитной системы нумерации, сходной с греческой алфавитной системой.

Древнейшей сохранившейся специально математической рукописью являются записи Кирика, новгородского дьякона, датируемые точно 1134 г. Примерами таких задач, собранных из разных рукописей, являются:

а) вычисление, сколько месяцев, недель, дней и часов протекло от сотворения мира (по православным верованиям, к 1134 г. Истекло 6642 года);

б) задачи на вычисление прогрессий, образуемых с помощью соображений о прогрессирующем приплоде стад;

в) вычисление размеров Земли, Солнца и Луны по данным измерений Эратосфена (III в. до н. э.) и связанное с этим приближённое вычисление числа $\pi = 3{,}125$;

г) трудная теоретико-числовая задача о вычислении дат религиозного праздника пасхи.

Общий со всеми государствами ход развития науки и культуры на Руси был насильственно прерван в первой половине XIII в. Из-за нашествия монголов (Батый – 1240) и крестоносцев (1242– битва на Чудском озере). Русский народ истекал кровью, но отстоял свою государственную и национальную самостоятельность. Битва на Куликовом поле в 1380 г. Была началом конца татаро-монгольского ига; оно окончательно было свергнуто к 1480 г. Однако нападения иностранных интервентов и болезненный процесс ломки феодального уклада и становления многонационального государства в период с XVI до XVIII в., т. е. до времени царствования Петра I, ещё сильно задерживали рост хозяйства, культуры и науки. Определилось длительное отставание России от европейских стран и в области математики.

Ход событий, связанных с открытием (решений в радикалах уравнений 3-й и 4-й степеней), освещается в литературе по-разному. В основном он был таков: профессор (с 1496 по 1526 г.) университета в Болонье (Италия) Сципион дель Ферро нашел формулу для нахождения положительного корня конкретных уравнений вида $x^3+px = q$ ($p > 0$, $q > 0$). Он держал её втайне, приберегая как оружие против своих противников в научных диспутах. К концу своих дней он сообщил эту тайну своему родственнику и преемнику по должности Аннибалу делла Наве и своему ученику Фиоре.

В начале 1535 г. Должен был состояться научный поединок Фиоре с Николо Тарталья (1500–1557). Последний был талантливым учёным, выходцем из бедной семьи, зарабатывавшим себе на жизнь преподаванием математики и механики в городах Северной Италии. Узнав, что Фиоре владеет формулой Ферро и готовит своему противнику задачи на решение кубических уравнений, Тарталья сумел заново открыть эту формулу, что обеспечило ему победу в диспуте, состоявшемся 12 февраля 1535 г.

Метод Тартальи, как, по-видимому, и метод Ферро, состоял в подборе подходящей формы алгебраической иррациональности для выражения корня уравнений указанного выше вида $x^3+px = q$ ($p > 0$, $q > 0$).

Вскоре Тарталья смог решать уравнения вида $x^3 = px + q$ ($p > 0$, $q > 0$). Наконец, он сообщил, что уравнения вида $x^3 + q = px$ сводятся к предыдущему виду, но не дал способа сведения. Тарталья долго не публиковал свои результаты.

С 1539 г. Кубическими уравнениями начинает заниматься Иеронимо Кардано (1501 – 1576). Человек странной и бурной судьбы, наполненной противоречивыми и нередко трудно объяснимыми поступками, богатый, образованный и талантливый, он страстно любил научные занятия. Философия и математика, медицина и астрология являлись предметом необузданных увлечений Кардано. Услышав об открытии Тартальи, он приложил много усилий, чтобы выманить тайну у осторожного и недоверчивого Тартальи и украсить этим результатом задуманную книгу «Ars magna…», т. е. «Великое искусство, или о правилах алгебры». В конце концов это удалось. Кардано ввёл регулярный способ сведения полного кубического уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ к виду, в котором отсутствует член с квадратом неизвестного, и распространил его на уравнения 4-й степени. Кардано включил в свою книгу и метод решения уравнений 4-й степени путем сведения задачи к кубической резольвенте, открытый его учеником Людовиком Феррари (1522 – 1565).

Кардано упоминает о мнимых корнях, именуя их софистическими.

Плодотворная и смелая попытка справиться с неприводимым случаем принадлежит итальянскому математику и инженеру Рафаэлю Бомбелли из Болоньи. В сочинении «Алгебра» (1572) он ввёл формально правила действий над мнимыми и комплексными числами. Он установил, что все выражения, содержащие «софистические минусы» Кардано, преобразуются к виду $a+bi$.

Единую систему алгебраических символов, последовательно проведённую, первым дал Виет.

Франсуа Виет

Франсуа Виет (1540 – 1603) – французский математик, юрист по образованию и роду деятельности. Во время педагогических занятий в одной влиятельной семье у него возник план новой астрономической системы, долженствующей заменить неточную, по его мнению, систему Коперника. В связи с этим замыслом Виет положил много сил на усовершенствование тригонометрии и достиг замечательных успехов. Блестяще образованный, Виет быстро продвигался по служебной лестнице и наконец сделался близким советником и придворным учёным французских королей Генрихов III и IV. Главный труд своей жизни «Введение в искусство анализа» - огромное и чрезвычайно обстоятельно написанного сочинения по новой алгебре.

Труд этот выходил с 1591 г. Частями, в значительной части после смерти автора и не был полностью завершён.

Исчисление Виета распадается на *зететику* – искусство решения уравнений; *пористику* – искусство доказательства правильности полученных решений; *экзегетику* – общую теорию уравнений. Все величины обозначены буквами: неизвестные – гласными, известные – согласными. Числа – безразмерны, положительны, рациональны (в случаях иррациональностей Виет переходит на язык геометрии), величины же имеют размерность. Это геометрическое влияние на концепцию величины усиливается специальной терминологией: первая степень величины называется *latis* (сторона), вторая – *planum* (площадь), третья – *so-lidum* (тело). Далее следуют плоско-плоские, плоско-объёмные, объёмно-объёмные и т. д. величины. Сложение и вычитание производятся над одноразмерными величинами. Умножение и деление вызывают изменение размерности. Эти идеи Виета в его время отражали наличие непреодолённого еще разрыва между числами и величинами.

Символика Виета тяжела, не всегда понятна. Вот пример:

A cubus + B planum in A_3 aequatur D solido ($A^3 + 3BA = D$, или $x^3 + 3Bx = D$). Символы Виета были вскоре усовершенствованы его младшими современниками, особенно Гэрриотом (1560 – 1621).

В сочинениях Виета подводится своеобразный итог математики эпохи Возрождения. На примере его работ в европейской точной науке к концу XVI в. сформировалась алгебра как наука о решении уравнений.

Дальнейшее развитие элементарной математики

Математика развивается широким фронтом. При этом подвергаются изменению все элементы её структуры: развиваются новые теории, выдвигаются и проверяются новые гипотезы, накапливаются факты, пополняющие состав уже сформировавшихся математических наук, расширяется сфера применения математических методов, меняются общие взгляды на природу математики и её возможности. Между элементарной и высшей математикой нет определённого разграничения. Арифметические средства вычислений ограничивались операциями с целыми числами и простыми дробями; десятичные дроби только пробивали себе дорогу.

Отыскивались приближённые значения числа π с большой точностью. Так, в это время голландский математик и фортификатор Лудольф Ван Цейлен (1539 – 1610) определил сначала 20, а затем 35 десятичных знаков числа π, первым превзойдя результаты среднеазиатского математика Каши.

Логарифмы были изобретены в начале XVII в. Их теоретические основы стали формироваться очень давно. Речь идет об идее сравнения двух прогрессий – геометрической и арифметической, и о достаточном обобщении понятия степени.

Одна из первых таблиц логарифмов была составлена И. Бюрги.

И. Бюрги (1552 – 1632) родился в Швейцарии. Он был мастером по ремонту часов и астрономических инструментов; вначале работал в Касселе, а затем в Праге на астрономической обсерватории вместе с И. Кеплером и помогал ему в наблюдениях и вычислениях.

Бюрги долго не решался публиковать таблицы, несмотря на очевидную их полезность при вычислениях. Только в 1620 г., по настоянию Кеплера, он издал книгу «Таблица арифметической и геометрической прогрессии с обстоятельным наставлением, как пользоваться ими при всякого рода вычислениях».

Джон Непер

Медлительность Бюрги стоила ему приоритетного положения среди ученых. В 1614 г., на шесть лет раньше его книги, в Англии появилось «Описание удивительных таблиц логарифмов» («Canonis mirifici logarithmorum descriptio»). Автором этого сочинения был Джон Непер (1550 – 1617), шотландский барон, занимавшийся различными науками, в особенности астрономией и математикой, а таблицы были 8-значными таблицами логарифмов тригонометрических функций для значений аргументов от 0 до 90° через 1'.

Непер пришёл к идее десятичных логарифмов, т. е. к тому, чтобы первоначально полагать $\log 1 = 0$, $\log 10 = 10^{10}$.

Та же идея десятичной системы возникла после ознакомления с таблицами Непера у профессора лондонского колледжа Генри Брига (1561 – 1630), с 1619 г. Профессора математики в Оксфорде, а затем в Лондоне.

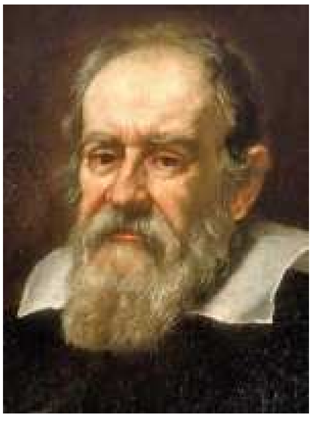
В 1628 г. Голландец А. Влакк, книготорговец по роду занятий, закончил труд Брига, составил и издал 10-значные таблицы десятичных логарифмов чисел $1 – 10^5$.

Английский преподаватель математики Джон Спейдель вычислил к 1620 г. Таблицы натуральных логарифмов, сразу завоевавшие громадную популярность. В то же время (1620) лондонский профессор Эдмунд Гюнтер разработал логарифмическую шкалу, явившуюся первым вариантом широко распространённой логарифмической линейки.

В разных городах Европы стали возникать счётные машины. Самой ранней машиной была машина немецкого профессора Вильгельма Шиккарда (1623), преподававшего в г. Тюбингене математику и астрономию. Сведения об этой машине появились только в 1958 г. Машина Шиккарда была изобретена и построена в 1623 г. О ней ничего не было известно никому, кроме Кеплера и узкого круга друзей изобретателя. Поэтому до последнего времени считалось, что первый арифмометр изобрёл в 1642 г. Блез Паскаль (1623 – 1662). Арифмометр Паскаля, построенный на принципе десятичных зубчатых передач, позднее (1673 – 1674) был усовершенствован Лейбницем.

Тема 9. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVII ВЕКЕ

В истории математики XVII в. занимает особое, весьма значительное место, это новый период – период математики переменных величин. В течение XVII в. математические методы продолжали весьма энергично внедряться в естествознание, прежде всего в механику.



Галилео Галилей

Галилео Галилей (1564 – 1642) подарил миру новую механику свободно падающих тел, был основателем теории упругости и вдохновенным защитником системы Коперника. В своих «Беседах» (1638) Галилей пришёл к математическому изучению движения, к зависимости между расстоянием, скоростью и ускорением.

Галилей занимает видное место в истории математики. Уже в начале своей научной деятельности он глубоко изучил доступные ему произведения Архимеда и, состоя много лет профессором университетов (в Пизе и Падуе), содействовал распространению методов великого греческого математика. Вообще Галилей всячески пропагандировал применение математических методов при изучении явлений природы и предложил превосходные образцы такого применения. Но Галилей не только применял то готовое, что нашёл в математике. Он искал новые математические методы, необходимые ему для развития его новых физических теорий и его деятельности в этом направлении. Свои собственные выводы и представления Галилей не считал окончательными, он привлекал других учёных к проблемам, которые тогда были основными для развития математических методов, в которых нуждалось новое естествознание.

Галилей ни разу не изложил систематические идеи относительно анализа, предоставив это своим ученикам Торричелли и Кавальери.

Эванджелиста Торричелли

Бонавентура Кавальери

Бонавентура Кавальери (1598 – 1647), ученик Г. Галилея, происходил из знатного рода. Он сочетал монашескую карьеру с научной и преподавательской деятельностью по математике. С 1629 г., по рекомендации Галилея, он занял кафедру математики в Болонье, будучи одновременно настоятелем католического монастыря.

В 1632 г. он опубликовал 11-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций. Но делом его жизни, самым значительным для развития математики, был метод неделимых, задуманный как универсальный метод геометрии.

Идея общего метода неделимых была впервые высказана Б. Кавальери в 1621 г. Итогом многолетнего усовершенствования метода неделимых явилась книга «Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного» (1635). Этому же предмету была посвящена книга Кавальери «Шесть геометрических опытов» (1647).

Метод неделимых был изобретен для определения размеров – плоских фигур и тел. У него появились горячие приверженцы. Один из них, Э. Торричелли, писал, что новая геометрия неделимых переходит из рук одних учёных к другим как чудо науки; она, по мнению Торричелли, убедила мир, что века Архимеда и Евклида были годами детства ныне взрослой геометрической науки. Торричелли, активно работавший методами Кавальери, первый сумел определить объём тела, образованного вращением ветви гиперболы вокруг одной из своих осей.

Иоганн Кеплер (1571 – 1630), уроженец Вюртемберга – одного из многочисленных в ту пору немецких государств, – выдающийся астроном и математик. Он посвятил практически всю свою жизнь изучению, развитию и пропаганде гелиоцентрической системы Коперника. Анализируя огромный материал астрономических наблюдений, он в 1609 – 1619 гг. открыл законы движения планет, носящие его имя: 1) планеты движутся по эллипсам; Солнце находится в одном из его фокусов; 2) радиусы-векторы планет проходят за равные промежутки времени равные секториальные площади; 3) квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний до Солнца.

Иоганн Кеплер

Кеплер отказался от архимедовой строгости; у него площадь круга состоит из бесконечно большого числа треугольников с общей вершиной в центре, а его сфера состоит из бесконечно большого числа утончающихся пирамид. Ученик Виета шотландец А. Андерсон даже выпустил специальное сочинение «В защиту Архимеда» (1616, через год после выхода в свет сочинения Кеплера), где обвинял Кеплера в оскорблении памяти Архимеда.

Отметим глубокую мысль Ф. Энгельса о том, что поворотным пунктом в математике XVII в. была декартова переменная величина.

Рене Декарт

Рене Декарт (1596 – 1650) был выдающимся французским учёным: философом, физиком, математиком, физиологом. Образование он получил в иезуитском колледже, славившемся качественным обучением. Всю жизнь Декарт продолжал совершенствоваться в науках.

Рационализм идей Декарта, признававшего прежде всего разум, строгую дедукцию, был направлен против церковной схоластики. Напряженные отношения с католической церковью заставили его в 1629 г. переехать в Нидерланды. Враждебное отношение протестантских богословов побудило Декарта в 1649 г. предпринять новый переезд в Швецию, где через год он скончался.

Декарт утверждал, что математика не может быть либо численной, либо геометрической. Она должна быть наукой, в которую входит всё, относящееся к порядку и мере. Он предложил назвать её универсальной математикой (Mathesis universalis).

В 1637 г. Декарт опубликовал свою «Геометрию», объединив в ней алгебру и геометрию. Согласно общепринятой точке зрения заслуга книги Декарта состоит главным образом в создании так называемой аналитической геометрии.

«Геометрия» состоит из трёх книг. Первая книга – «О задачах, которые можно построить, пользуясь только кругами и прямыми линиями», вторая – «О природе кривых линий», третья – «О построении телесных, или превосходящих телесные, задач».

Алгебраическая символика Декарта уже несущественно отличается от современной.

«Геометрия» Декарта – первое сочинение по аналитической геометрии, сыгравшее огромную роль в дальнейшем развитии математики XVII в. Хотя аналитическая геометрия Декарта ещё имела много недостатков.

Переворот во взаимоотношении алгебры и геометрии и взаимное проникновение их методов с помощью метода координат были в математике явлением революционным. Подобные перевороты в истории никогда не делаются одним человеком. Одновременно с Декартом аналогичную систему взглядов развил в специальном сочинении французский математик *П. Ферма* (1601 – 1665).

Пьер Ферма

Ферма происходил из семьи торговца, проживавшей на юге Франции. Окончил университет в г. Тулузе по юридическому факультету. С 1631 г. до конца жизни занимался в Тулузе юридической деятельностью, будучи советником местных органов управления. Математикой занимался в свободное время. Был знатоком современной математики и классических сочинений древних. Получил выдающиеся результаты в теории чисел, геометрии, методах оперирования с бесконечно малыми, оптике. Ферма не любил печатать свои сочинения, а сообщал о своих достижениях в научной переписке и при личном общении и дискуссиях со многими выдающимися учеными. Поэтому подавляющее число работ Ферма было опубликовано лишь после его смерти в 1679 г. и позднее.

Сочинение Ферма «Введение в теорию плоских и пространственных мест» стало известным с 1636 г. Исходными пунктами этой работы явились сочинения древних, особенно Аполлония, по изучению геометрических мест. Задачей Ферма было показать, что уравнениям 1-й степени соответствуют прямые, а коническим сечениям – уравнения 2-й степени. Метод координат вводится так же, как у Декарта.

Ферма понимал, что он находится только в самом начале исследований новой математической дисциплины. Аналитическая геометрия вошла в систему математических дисциплин, не поглотив алгебру. Последняя продолжала самостоятельное развитие, превращаясь в общую теорию уравнений.

Джон Валлис

Джон Валлис (1616 – 1703), английский математик, профессор Оксфордского университета (с 1649 г.), один из основателей (с 1663 г.) Лондонского королевского общества. В 1655 г. им была издана «Арифметика бесконечности» (Arithmetica infinitorum). Уже название книги показывает, что Валлис хотел пойти дальше, чем Кавальери с его «геометрией неделимых»: Он хотел применить не геометрию древних, а новую «арифметику» (алгебру). Валлис был первым математиком, у которого алгебра по-настоящему переросла в анализ.

Английский математик впервые раскрыл широкие возможности применения неполной индукции в математике как достаточно надёжного средства творчества, и в этом за ним последовали Ньютон, Эйлер и другие крупнейшие учёные.

Христиан Гюйгенс

Валлис был только одним из целого ряда блестящих представителей этого периода, обогативших математику многими открытиями.

В поисках новых изобретений иногда приходили непосредственно к математическим открытиям. Знаменитым примером является работа «Маятниковые часы» (Horologium Oscillatorium, 1673) *Христиана Гюйгенса.* В ней в поисках лучшего способа измерения времени рассмотрены не только маятниковые часы, но изучаются также эволюты и эвольвенты плоской кривой.

Гюйгенс был голландцем, человеком зажиточным, в течение ряда лет жил в Париже. Он был столь же выдающимся физиком, как и астрономом, создал волновую теорию света и выяснил, что у Сатурна есть кольцо. Письма и книги Гюйгенса изобилуют новыми открытиями: спрямлениями кривых, квадратурами, построением обверток. Гюйгенс исследовал трактрису, логарифмическую кривую, цепную линию и установил, что циклоида – таутохронная кривая. Это был один из немногих среди больших математиков XVII в., кто заботился о строгости: его методы всегда были вполне архимедовыми.

Хр. Гюйгенс одним из первых приступил к обоснованию теории вероятностей. Это подтверждается в его книге «О расчётах в азартной игре».

Блез Паскаль был сыном Этьена Паскаля, который был корреспондентом Мерсенна; кривая «улитка Паскаля» названа именно в его честь. Блез быстро развивался под присмотром своего отца, и уже в шестнадцатилетнем возрасте он открыл «теорему Паскаля» о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение. Эта теорема была опубликована в 1641 г. на одном листе бумаги и повлияла на Дезарга. Через несколько лет Паскаль изобрел счётную машину. Когда ему было двадцать пять лет, он решил поселиться как янсенист в монастыре Пор-Рояль и вести жизнь аскета, но продолжал при этом уделять время науке и литературе. Его трактат об «арифметическом треугольнике», образованном биномиальными коэффициентами и применяющемся в теории вероятностей, вышел посмертно в 1664 г.

Блез Паскаль

Паскаль сумел решить много задач на определение площадей, объёмов, статических моментов и т. д. Он опубликовал ряд работ по арифметике, алгебре, теории чисел и теории вероятностей, первым предложил метод математической индукции и применил его для доказательства теорем. Паскаль – один из предшественников Ньютона и Лейбница, создавших дифференциальное и интегральное исчисление.

Исаак Ньютон

Исаак Ньютон (1642 – 1727) родился в семье фермера в местечке Вулсторп близ г. Кембриджа (Англия). В 1665 г. он окончил Кембриджский университет со степенью бакалавра. Учителем его был И. Барроу. В 1668 г. И. Ньютон получил степень магистра, а через год, в 1669 г., Барроу, будучи в расцвете сил, уступил Ньютону свою кафедру в знак уважения к талантам и научным достижениям своего ученика. Профессором в Кембридже Ньютон был до 1701 г. В 1672 г. он был избран членом, а с 1703 г. – президентом Лондонского королевского общества. Наиболее значительные работы по математике Ньютон написал во время пребывания в Кембридже.

Основными направлениями научной деятельности Ньютона были физика, механика, астрономия и математика. В этих областях науки ему принадлежат важные достижения, в том числе: вывод и формулировка основных законов классической механики, открытие закона всемирного тяготения, законов спектрального разложения света, разработка дифференциального и интегрального исчисления в форме метода флюксий. В качестве математического аппарата механики, который учитывал бы движение и охватывал связанные с ним понятия скорости и ускорения, Ньютон разработал метод, названный им методом, или теорией, флюксий.

В методе флюксий изучаются переменные величины, вводимые как абстракции различных видов непрерывного механического движения. Называются они флюентами, т. е. текущими, от латинского слова fluere – «течь». Все флюенты являются зависимыми переменными; они имеют общий аргумент – время. Далее вводятся скорости течения флюент, т. е. производные по времени. Названы они флюксиями. Так как флюксия представляет собой переменную, то можно находить флюксию от флюксии и т. д. Символы первой, второй и другой флюксий, если флюенту обозначить y, будут: $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$ и т. д.

Символы Ньютона не так удобны, как символы дифференциалов, ведущие свое происхождение от Лейбница и распространённые в наше время. Однако они ещё сохранились, например, в механике.

Исключительный авторитет Исаака Ньютона в первую очередь основан на его труде «Математические принципы натуральной философии» (Philosophiae naturalis principia mathematica, 1687) – огромном томе, содержащем аксиоматическое построение механики и закон тяготения – закон, управляющий падением яблока на землю и движением Луны вокруг Земли. Ньютон дал динамическое объяснение приливов и многих явлений при движении небесных тел. Он заложил основы теории движения Луны, а также основы теории потенциала.

Ньютон писал также о конических сечениях и о плоских кривых третьего порядка. В «Перечислении линий третьего порядка» («Enumeratio linearum tertii ordinis, 1704) он дал классификацию плоских кривых третьей степени на 72 вида.

Ньютону принадлежит также метод получения приближённых значений корней численных уравнений.

Трудно оценить влияние Ньютона на его современников из-за того, что он постоянно колебался, публиковать ли ему свои открытия.

Анализ бесконечно малых возник почти одновременно в двух разных, не зависимых друг от друга формах. Первой по времени изобретения была ньютонова теория флюксий. Однако первые публикации по математическому анализу были посвящены другому виду исчисления – исчислению дифференциалов.


Г. В. Лейбниц

Автор нового исчисления *Г. В. Лейбниц* (1646 – 1716) родился в Лейпциге в семье профессора кафедры философии и морали местного университета. Образование получил в университетах Лейпцига и Йены. Всю жизнь состоял на службе у германских государей: майнцского курфюрста, а затем ганноверского герцога. Выполняя дипломатические поручения, Лейбниц посетил Париж и Лондон, где смог пообщаться с виднейшими учёными. За научные заслуги он был избран членом Лондонского королевского общества (1673) и Парижской академии наук (1700). Лейбниц основал Берлинскую академию, а также оказал положительное влияние на развитие науки в России: он был знаком с Петром I, переписывался и беседовал с ним, обсуждал проекты организации Академии наук в Петербурге, развертывания научных исследований в России.

Деятельность Лейбница весьма многообразна: он был видным дипломатом, политиком и ученым. Разнообразны его научные интересы: естественные науки, физика, философия, право, литература, языкознание, история, теология, лингвистика, биология, геология, дипломатия и математика были объектами его исследований, нередко весьма замечательных и предвосхитивших многие последующие открытия.

Лейбниц одним из первых после Паскаля изобрёл счётную машину, пришёл к идее парового двигателя, интересовался китайской философией и старался содействовать объединению Германии.

Лейбниц углубился в изучение современной ему математики уже в 26-летнем возрасте, осенью 1672 г., главным образом под влиянием бесед с Хр. Гюйгенсом. Лейбниц открыл новое исчисление между 1673 и 1676 гг. под личным влиянием Гюйгенса и в ходе изучения теорий Декарта и Паскаля. Его подстёгивало то, что Ньютон обладал подобным методом. Подход Ньютона был в основном кинематическим; подход Лейбница – геометрическим. В чисто математическом плане лейбницево исчисление складывалось в общих чертах из следующих посылок:

а) задачи суммирования рядов (с 1673 г.) и привлечение систем конечных разностей;

б) решение задач о касательных, характеристический треугольник Паскаля и постепенный перенос соотношений между конечными элементами на произвольно, а затем бесконечно малые;

в) обратные задачи на касательные, суммирование бесконечно малых разностей, открытие взаимообратности дифференциальных и интеграционных задач (примерно к 1676 г.).

Только в 1684 г. в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» Лейбниц опубликовал первый мемуар* об анализе бесконечно малых «Новый метод максимумов, минимумов, а также касательных, для ко-

---

* *Мемуар* (франц. *memoria* – память) – название многих научных работ и изданий в области математики, естествознания и др.

торого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины и особый для этого род исчисления».

Мемуар этот невелик, менее 10 страниц. В нем нет доказательств, это трактат о дифференциальном исчислении. Через два года, в 1686 г., вышло в свет другое сочинение Лейбница – «О глубокой геометрии», в котором сосредоточены правила интегрирования многих элементарных функций. Для обозначения операции интегрирования введен символ $\int$, истолковываемый как сумма дифференциалов, а также подчеркнута его взаимообратность с операцией дифференцирования. В том же году Лейбниц разрабатывает основы теории соприкосновения кривых, вводит соприкасающийся круг и применяет его к измерению кривизны.

Поток новых открытий Лейбница не иссякал. В 1693 г. он распространил новое исчисление на трансцендентные функции путем разложения их в ряды с помощью метода неопределенных коэффициентов. Полученные результаты он изложил в статье с характерным для публикаций XVII и XVIII вв. длинным заголовком: «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов». Ряды $\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, $\operatorname{arctg}-x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$ носят имя Лейбница, хотя не он первый их открыл. (По-видимому, это сделал Джеймс Грегори, шотландский математик.)

В 1695 г. Лейбниц опубликовал правило дифференцирования общей показательной функции и формулу многократного дифференцирования произведения. В течение 1702 – 1703 гг. им были разработаны приёмы интегрирования рациональных дробей.

Лейбниц – один из самых плодовитых изобретателей математических символов. Символика и термины Лейбница оказались очень хорошо продуманы; они были несложными и отражали существо дела, помогали пониманию и позволяли оперировать ими по сравнительно простым правилам. Многие из них дошли до наших дней. Лейбниц ввёл термины: дифференциал, дифференциальное исчисление, функция, координаты, дифференциальное уравнение, алгоритм (в смысле, аналогичном современному пониманию) и многие другие, а также большую часть символов.

Практическая ценность исчисления Лейбница, оперативная простота привлекали к нему внимание учёных. Оно быстро сделалось центром всей математики, основным орудием исследования в руках ученых.

Большое место в сочинениях по истории математики этого времени занимает спор между последователями И. Ньютона и Г.В. Лейбница о приоритете открытия дифференциального и интегрального исчисления. По-видимому, Ньютон и Лейбниц открыли свои формы исчисления независимо друг от друга. Оба опирались на опыт многочисленных предшественников. Оба отразили, исходя из разных посылок, общую потребность науки в анализе бесконечно малых. Ньютон, видимо, добился успеха раньше, Лейбниц – несколько позже.

Доказано правило вычисления определённого интеграла через разность значений первообразной функции при верхнем и нижнем пределах, которое мы называем правилом Ньютона – Лейбница.

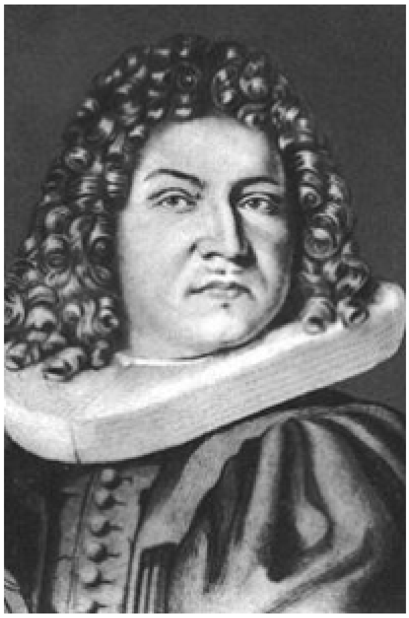
В Швейцарии Базель, свободный имперский город с 1263 г., уже долгое время был средоточием науки. Еще во времена Эразма его университет был важным научным центром. К этому базельскому патрициату принадлежала купеческая семья *Бернулли*, которая переехала сюда в XII в. из Антверпена, когда город был захвачен испанцами. С конца XVII в. до настоящего времени эта семья в каждом поколении давала учёных. Воистину во всей истории науки трудно найти семью, поставившую более внушительный рекорд.

Иоганн Бернулли

Родоначальниками этой династии были два математика, Якоб и Иоганн Бернулли. Якоб изучал теологию, Иоганн – медицину, но когда в лейпцигском журнале «Acta Eruditorum» появились статьи Лейбница, оба они решили стать математиками. Они стали первыми выдающимися учениками Лейбница. В 1687 г. Якоб занял кафедру математики в Базельском университете, где он преподавал до своей смерти в 1705 г. Иоганн в 1697 г. стал профессором в Гронингене

(Голландия), а после смерти брата перешёл на его кафедру в Базеле, где преподавал сорок три года.

Якоб начал переписываться с Лейбницем в 1687 г. Оба брата постоянно обменивались мыслями с Лейбницем и между собой, не раз вступая в ожесточённое соперничество друг с другом. Список их результатов содержит не только многое из того, что сейчас входит в современные элементарные учебники дифференциального и интегрального исчисления, но и интегрирование ряда обыкновенных дифференциальных уравнений. Якобу принадлежат способы применения полярных координат, исследование цепной линии (уже рассмотренной Гюйгенсом и другими), лемнискаты (1694) и логарифмической спирали. В 1690 г. он нашел так называемую изохрону, которую Лейбниц в 1687 г. определил как кривую, вдоль которой тело падает с постоянной скоростью, – оказалось, что это полукубическая парабола. Якоб также исследовал изопериметрические фигуры (1701), что привело его к задаче вариационного исчисления. Логарифмическая спираль, которая обладает свойством воспроизводиться при различных преобразованиях (её эволюта – тоже логарифмическая спираль, и они обе по отношению к полюсу являются подошвенной кривой и каустикой), настолько обрадовала Якоба, что он пожелал, чтобы эту кривую вырезали на его могильном камне с надписью «eadem mutata resurgo»).



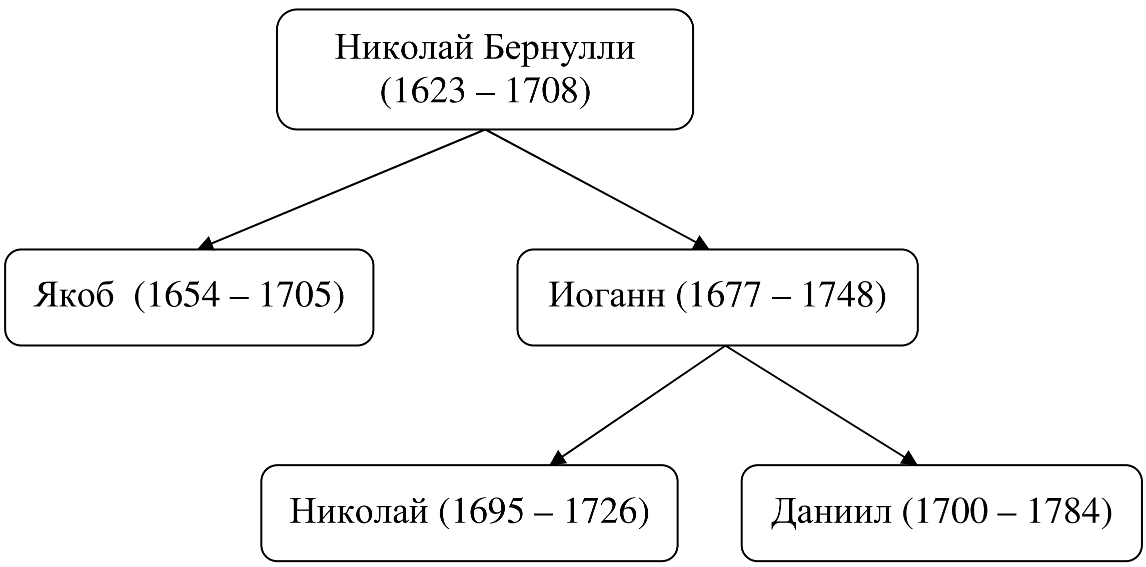
Якоб Бернулли

Якоб Бернулли был также одним из первых исследователей теории вероятностей, и по этому предмету он написал «Искусство предположения» (Ars conjectandi) – книгу, опубликованную посмертно, в 1713 г.

Работы Иоганна Бернулли тесно связаны с работами его старшего брата, и не всегда легко различить их результаты. Иоганна часто рассматривают как изобретателя вариационного исчисления вследствие его вклада в задачу о брахистохроне – это кривая быстрейшего спуска для материальной точки, которая движется в поле тяготения от заданной начальной к заданной конечной точке, кривая, которую исследовали Лейбниц и оба Бернулли в 1697 г. и в последующие годы. В это время они открыли уравнение геодезических линий на поверхности. Решением задачи о брахистохроне является циклоида.

В числе других Бернулли, повлиявших на развитие математики, есть два сына Иоганна: Николай и, особенно, Даниил. Николай, как и Даниил, был приглашён в Петербург, незадолго до того основанный Петром Великим; там он пробыл недолго. Задача по теории вероятностей, которую он предложил, находясь в этом городе, известна как Петербургская задача (или, более выразительно, Петербургский парадокс). Этот сын Иоганна умер молодым, но другой – Даниил – дожил до глубокой старости. До 1777 г. он был профессором Базельского университета. Его исследования были посвящены главным образом астрономии, физике и гидродинамике. Сочинение «Гидродинамика» появилось в 1738 г., и одна из теорем этой книги – о гидравлическом давлении – носит его имя. В том же году Даниил Бернулли заложил основы кинетической теории газов; вместе с Даламбером и Эйлером он изучал теорию колебаний струн. Его отец и дядя развивали теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, Даниил же был пионером в области уравнений в частных производных.

В различных поколениях Бернулли математиками были: Якоб (1654 – 1705), Иоганн (1667 – 1748), Николай (1687 – 1759), Николай (1695 – 1726), Даниил (1700 – 1782), Иоганн (1744 – 1807), Якоб (1759 – 1789).



Тема 10. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XVIII ВЕКЕ

Ведущим английским, вернее пользовавшимся английским языком, математиком XVIII в. был *Колин Маклорен*, профессор Эдинбургского университета, последователь Ньютона, с которым он был лично знаком. Его работы по кривым второго и более высокого порядка и по притяжению эллипсоидов шли параллельно с исследованиями Клеро и Эйлера. Некоторые из теорем Маклорена вошли в современные теорию плоских кривых и проективную геометрию.

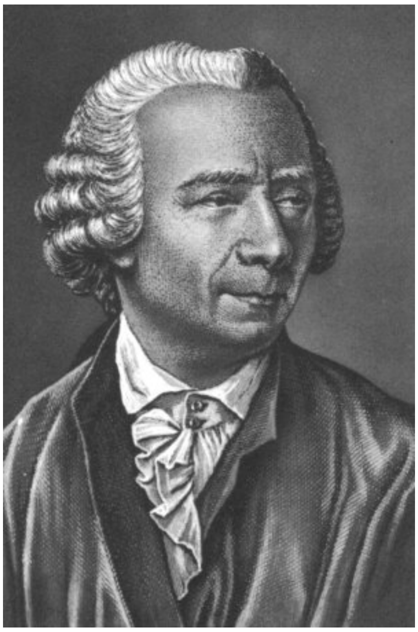
Маклорен обычно стремился к строгости Архимеда. В книге «Трактат о флюксиях» (Treatise of fluxions в 2 т., 1742) содержатся исследования Маклорена о притяжении эллипсоидов вращения и его теорема о том, что два таких конфокальных эллипсоида притягивают частицу на оси или на экваторе силами, пропорциональными их объёмам. В этом трактате Маклорен оперирует также со знаменитым «рядом Маклорена». Впрочем, этот ряд не был новым открытием, так как он появился в «Методе приращений» (Method us incrementorum, 1715), написанном Бруком Тейлором, в то время секретарем Королевского общества, а открыт он был еще раньше И. Бернулли и по сути был известен Лейбницу. Маклорен признает то, что он полностью обязан Тейлору.

Брук Тейлор

Тейлор явно приводит этот ряд для $x = 0$, что многие учебники ещё упорно называют рядом Маклорена. В выводе Тейлора нет соображений относительно сходимости ряда, но Маклорен положил начало таким исследованиям и даже владел так называемым интегральным признаком сходимости бесконечных рядов. Полностью важность ряда Тейлора была признана лишь после того, как Эйлер использовал его в своем сочинении «Дифференциальное исчисление» (1755). Лагранж добавил к нему остаточный член и положил его в основу своей теории функций. Сам Тейлор использовал свой ряд для интегрирования некоторых дифференциальных уравнений. Он начал исследование колебаний струны, что затем было предметом работ Даламбера и др.

Славой и гордостью нашей отечественной науки в области математики в XVIII в. являлся Л. Эйлер. Он напечатал множество книг и статей, воспитал большое число учеников, ставших позднее академиками. Его значение в истории математики велико.

Леонард Эйлер (1707 – 1783) – уроженец г. Базеля (Швейцария). Его отец, Пауль Эйлер, был небогатым пастором. В молодые годы он увлекся математикой, изучал ее под руководством Я. Бернулли. Своему сыну он прочил тоже духовную карьеру. Однако в Базельском университете Леонард увлекся математикой, слушал лекции И. Бернулли и регулярно занимался с ним. Он блестяще окончил университет, получил учёную степень магистра, но работы найти не мог.



Леонард Эйлер

Его друзья, сыновья И. Бернулли – Даниил и Николай – уехали в 1725 г. в Петербург. По их рекомендации получил приглашение работать в Петербургской академии наук и Л. Эйлер. Вакантным, правда, было место на кафедре физиологии, но это не смущало молодого учёного. В мае 1727 г. он приехал в Россию и прожил здесь 14 лет (до 1741 г.).

Физиологией заниматься не пришлось. Эйлеру предоставили возможность вести исследования в области физико-математических наук. Он с большим рвением принялся за научную и педагогическую работу. За это время ученый опубликовал свыше 50 и подготовил к печати 80 научных работ по анализу, теории чисел, дифференциальным уравнениям, астрономии. В том числе в 1736 г. появилась двухтомная «Механика», включающая механику точки. Эйлер выполнял многочисленные государственные задания. В 1738 г., во время напряженной работы над составлением географических карт России, он частично потерял зрение. Но научная деятельность его разрасталась. У него появились талантливые ученики: С.К. Котельников, С.Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин, Сафронов и др. Авторитет Эйлера быстро рос, рос авторитет и Петербургской академии.

Однако в Петербурге работать было неспокойно. Тревожная политическая обстановка пугала Эйлера. В 1741 г. он принял предложение переехать в Берлин во вновь организуемую Академию наук. В Берлине он проработал до 1766 г. в должности вице-президента и директора математического отделения. За это время он написал около 300 научных работ, книг и статей. Примерно половину он отправлял для публикования в Петербург, где по-прежнему числился почетным академиком и откуда получал деньги. Эйлера тянуло обратно в Россию. Он вёл оживлённую переписку с русскими учеными, поддерживал Ломоносова. В 1766 г. со всей семьёй Эйлер переехал в Петербург. Его необычайная научная активность продолжалась. Академия не успевала публиковать его труды.

Л. Эйлер был дважды женат и имел тринадцать детей. Жизнь этого академика восемнадцатого столетия была почти целиком посвящена работе в различных областях чистой и прикладной математики. Хотя он потерял в 1735 г. один глаз, а в 1766 г. – второй, ничто не могло ослабить его научную деятельность. Слепой Эйлер, пользуясь своей феноменальной памятью, продолжал диктовать свои открытия. В течение его жизни увидели свет 530 книг и статей; умирая, он оставил много рукописей. Они публиковались в изданиях Академии в течение 80 лет после его смерти (до 1862 г.).

Научные работы Эйлера охватывают практически всю современную ему математику, в области которой он сделал выдающиеся открытия, которые поставили его на первое место в мире. Научная деятельность Эйлера в основном имела алгоритмическую направленность. К построению общей теории он приходил, отправляясь от конкретных задач, имеющих практическое значение. В его научном наследии исключительно велик удельный вес практики. Примерно 40 % его работ посвящено прикладной математике, физике, механике, в том числе небесной механике, гидромеханике, теории упругости, баллистике, кораблестроению, теории машин, оптике и др.

Нет возможности перечислить все главные открытия и научные достижения Эйлера – их слишком много.

Современная тригонометрия с её определением тригонометрических величин как отношений и с принятыми в ней обозначениями восходит к «Введению в анализ бесконечных» (Introductio in analysin infinitorum, 1748) Эйлера. Колоссальный авторитет его руководств привёл к упрочению ряда его обозначений в алгебре и анализе; Лагранж, Лаплас и Гаусс знали Эйлера и следовали за ним в своей деятельности.

Другим большим и богатым по содержанию руководством Эйлера было «Дифференциальное исчисление» (Institutiones calculi differentialis, 1755), за которым последовали три тома «Интегрального исчисления» (Institutiones calculi integralis, 1768 – 1774).

«Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (1736) Эйлера была первым учебником, в котором ньютоновская динамика материальной точки была развита аналитическими методами. За ней последовала «Теория движения твердых тел» (1765), в которой таким же образом трактуется механика твердых тел. «Полное введение в алгебру» (1770), написанное по-немецки и продиктованное слуге, стало образцом для многих позднейших учебников по алгебре.

В 1744 г. появилось сочинение Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума» (Methodus inveniendi lineas cnrvas maximi minimivi proprietate gaudentes).

Несколько статей посвящены занимательной математике (семь кёнигсбергских мостов, задача о шахматном коне).

Деятельность Эйлера в значительной мере была посвящена астрономии. Его трактат «Теория движения планет и комет» (Theoria mo-tus planetarum et cometarum, 1774) посвящён небесной механике. С этим трудом Эйлера связаны его исследования о притяжении эллипсоидов (1768).

У Эйлера есть книги по гидравлике, кораблестроению, артиллерии. В 1739 г. появилась его новая теория музыки, о которой говорили, что она слишком музыкальна для математиков и слишком математична для музыкантов. Философское изложение Эйлера наиболее важных проблем естествознания в его «Письмах к одной немецкой принцессе» (написаны в 1760 – 1761 гг.) остается образцом популяризации. В 1769 – 1771 гг. появились три тома его «Диоптрики» (Dioptrica) с теорией преломления лучей в системе линз.

Латынь Эйлера очень проста и его обозначения почти современны – пожалуй, было бы лучше сказать, что современные обозначения почти эйлеровы!

«Читайте Эйлера, – обычно говорил молодым математикам Лаплас, – читайте Эйлера, это наш общий учитель». А Гаусс выразился еще более определенно: «Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить».

В России печатались и трактаты Эйлера, и его учебники элементарного содержания, значительно повысившие уровень математического просвещения: «Руководство к арифметике» Эйлера вышло на русском языке двумя изданиями (1740, 1760), «Универсальная арифметика» по-русски была издана раньше (1768 – 1769), чем её немецкий оригинал – «Полное введение в алгебру» (1770), и выдержала три издания. У Эйлера учились первые русские академики по математике (С.К. Котельников, 1723 – 1806) и по астрономии (С.Я. Румовский, 1734 – 1812, известный также и как автор нескольких математических работ). Во второй петербургский период Эйлер становится центром целой группы учёных, в которую входят, кроме названных: его сын, И. А. Эйлер, чьи заслуги, впрочем, сводятся к тому, что он был «техническим» помощником отца; племянник Эйлера Н.И. Фусс (1755 – 1826), тоже помогавший почти слепому Эйлеру, автор многих оригинальных исследований, преимущественно по дифференциальной геометрии; А.И. Лексель (1740 – 1784), известный своими работами по полигонометрии; астроном и геометр Ф.И. Шуберт (1758 – 1825).

Трудно перечислить все доныне употребительные теоремы и методы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в учебной литературе под его именем: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровские постоянные, функции, углы, интегралы, формулы, уравнения, подстановки и т. д. В трудах Эйлера многие математические формулы и символика получили современный вид. Ему принадлежат обозначения: e, π (постоянные), i (мнимая единица), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ (тригонометрические функции), Δx (разность, приращение), Σ (знак суммы), $f(x)$ – обозначение функции и др.

Среди математиков, побывавших в Лапландии, был *Алекси Клод Клеро* (1713 – 1765). Клеро восемнадцати лет от роду опубликовал «Изыскания о кривых двоякой кривизны» (Recherches sur les courbes ă double courbure) – первый опыт в области аналитической и дифференциальной геометрии пространственных кривых. По возвращении из Лапландии Клеро издал свою «Теорию фигуры Земли» (Théorie de la figure de la Terre, 1743) – образцовое произведение по гидростатике и притяжению эллипсоидов вращения. В числе главных результатов этой работы – условие полноты дифференциала $Mdx + Ndy$. За этой книгой последовала «Теория Луны» (Théorie de la lune, 1752), содержавшая дополнения к эйлеровой теории движения Луны и к общей задаче трёх тел. Клеро принадлежат также результаты в теории криволинейных интегралов и дифференциальных уравнений. Один из типов рассмотренных им дифференциальных уравнений известен под его именем, и с этим связан один из первых примеров особых решений.

Жан Лерон Даламбер

Ведущим математиком энциклопедистом был *Жан Лерон Даламбер*, внебрачный сын аристократической дамы, подкинутый вблизи церкви святого Жана ле Рона в Париже. Его ранние и блестящие успехи облегчили его карьеру. В 1754 г. он стал «непременным секретарем» Французской академии и потому наиболее влиятельным учёным Франции. В 1743 г. появился его «Трактат по динамике» (Traité de la dynamique), который содержал метод сведения динамики твёрдых тел к статике, известный как «принцип Даламбера». Он продолжал писать по многим прикладным вопросам, в частности по гидродинамике, аэродинамике и задаче трёх тел. В 1747 г. он опубликовал теорию колебания струн.

Даламбер без труда писал по многим вопросам, включая даже вопросы обоснования математики. Он ввёл понятие предела. «Основную теорему алгебры» иной раз называют теоремой Даламбера, так как он пытался её доказать (1746), а «парадокс Даламбера» в теории вероятностей показывает, что он, хотя и не очень успешно, размышлял об основах этой теории.

Было открыто также много фактов, полезных для будущей теории функций комплексного переменного. Например, Даламбер и Эйлер в работах по гидродинамике показали, что функции имеют вид $w = u + iv$ и что действительная и мнимая части таких функций удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Даламбер в 1752 г., а Эйлер в 1755 г. показали, что эти условия достаточны для аналитичности функции w. Позднее (в 1777 г.) Эйлер доказал и необходимость этих условий, ныне в некоторых книгах ошибочно носящих название условий Коши – Римана.

Жозеф Луи Лагранж родился в Турине в итало-французской семье. Девятнадцати лет от роду он стал профессором математики артиллерийской школы в Турине (1755). В 1766 г., когда Эйлер уехал из Берлина в Петербург, Фридрих II пригласил Лагранжа в Берлин, и в этом скромном приглашении было сказано, что «необходимо, чтобы величайший геометр Европы проживал вблизи величайшего из королей». Лагранж оставался в Берлине до смерти Фридриха (1786), после чего переехал в Париж. Во время революции он участвовал в реформе мер и весов, а позже стал профессором сначала Нормальной школы (1795), а затем Политехнической школы (1797).

Жозеф Луи Лагранж

Исследования по вариационному исчислению относятся к раннему периоду деятельности Лагранжа. Мемуар Эйлера по этому вопросу появился в 1755 г. Лагранж заметил, что метод Эйлера не обладает «всей той простотой, которая желательна в вопросе чистого анализа». В результате появилось чисто аналитическое вариационное исчисление Лагранжа (1760 – 1761), в котором не только много оригинальных открытий, но и отлично упорядочен и переработан накопленный исторический материал – то, что характерно для всего творчества Лагранжа. Он сразу применил свою теорию к задачам динамики. Многие из основных идей трактата «Аналитическая механика» (Mécanique analytique, 1788) восходят к туринскому периоду жизни Лагранжа. Он принял участие также в разработке одной из основных проблем своего времени – теории движения Луны и дал первые частные решения задачи трёх тел. Теорема Лагранжа утверждает, что можно найти такое начальное положение трёх тел, при котором их орбитами будут подобные эллипсы, описываемые за одно и то же время (1772). В 1767 г. появился его мемуар «О решении численных уравнений» (Sur la résolution des équations numériques), в котором он изложил методы отделения вещественных корней алгебраического уравнения и их приближенного вычисления с помощью непрерывных дробей. За этим в 1770 г. последовала публикация труда «Размышления об алгебраическом решении уравнений» (Réflexions sur la résolution algébrique des équations), в котором рассматривается, почему те методы, которые позволяют решать уравнения не выше четвертой степени, ничего не дают для степени, большей четырёх. Это привело Лагранжа к рациональным функциям от корней и к исследованию их поведения при перестановках корней. Такой метод не только был стимулом для Руффини и Абеля в их работах относительно случая $n > 4$, но он привёл Галуа к его теории групп. Лагранж также продвинул теорию чисел, в которой он исследовал квадратичные вычеты, и среди ряда других теорем доказал то, что каждое целое число есть сумма четырёх или меньшего числа квадратов.

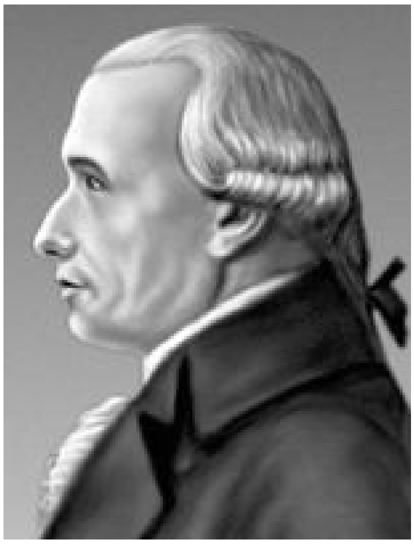
Во второй части своей жизни Лагранж создал большие труды, среди которых: «Аналитическая механика» (1788). «Теория аналитических функций» (Théorie des fonctions analytiques, 1797) и её продолжение – «Лекции по исчислению функций» (Lecons sur le calcul des fonctions, 1801). Обе книги по теории функций являются попыткой подвести надёжный фундамент под анализ, сведя его к алгебре. Лагранж отбросил теорию пределов в том виде, как она была указана Ньютоном и сформулирована Даламбером.

Метод Лагранжа отличается от метода его предшественников. Он начинает с ряда Тейлора, который выводится вместе с остаточным членом. Впервые выступает на сцену теория функций вещественного переменного с применениями к разнообразным задачам алгебры и геометрии.

«Аналитическая механика» Лагранжа – это, может быть, наиболее ценный его труд, который все ещё заслуживает тщательного изучения. Был полностью отброшен геометрический подход Ньютона; книга Лагранжа была триумфом чистого анализа, и её автор зашёл настолько далеко, что подчёркивал в предисловии: «В этой работе вовсе нет чертежей, в ней только алгебраические операции» (важно слово «алгебраический» вместо «аналитический»). Это характеризует Лагранжа как первого чистого аналитика.

Лагранжу принадлежат выдающиеся исследования по математическому анализу, где его именем названы: форма остаточного члена ряда Тейлора, формула конечных приращений, функция и множители для определения условного экстремума, интерполяционная формула; исследования по различным вопросам дифференциальных уравнений (теория особых решений, метод вариации произвольных постоянных и др.), по алгебре и теории чисел, механике, астрономии, математической картографии и др. Лагранж впервые ввёл в рассмотрение тройные интегралы, предложил обозначения для производной (y', $f'(x)$) и для функции арксинус (arcsin). Парижская академия наук дважды присуждала премии Лагранжу за его научные работы.

Гаспар Монж (1746 – 1818), выходец из крестьянско-буржуазной семьи, был, как и многие другие математики, активным деятелем Великой французской буржуазной революции. Неоднократно он занимал большие государственные посты (морской министр, организатор военной промышленности Франции и т. п.), с честью выполняя свои обязанности.



Гаспар Монж

Монж добился крупных успехов в математике, физике, химии и технике и в 1780 г. был избран членом Парижской академии наук. Он был также одним из основателей Политехнической школы в Париже (1794) и её профессором.

Его карьера началась в военной академии в Мезьере (1768 – 1789), где на лекциях по фортификации он имел возможность развивать начертательную геометрию как особую область геометрии. Он опубликовал свои лекции в книге «Начертательная геометрия» (Géométrie descriptive, 1795 – 1799). В Мезьере Г. Монж начал также применять анализ к исследованию пространственных кривых и поверхностей. Эти его работы позже были опубликованы в трактате «Приложение анализа к геометрии» (Application de l'analyse a la géométrie, 1809). Это первая книга по дифференциальной геометрии, хотя ещё не вполне современная по форме изложения. Монж – один из первых математиков нового времени, кого мы считаем специалистом:

он геометр, и даже его подход к уравнениям в частных производных носит отчётливо выраженный геометрический характер.

Геометрия начала процветать в Политехнической школе благодаря влиянию Монжа. В его начертательной геометрии содержался зародыш проективной геометрии, а мастерство в применении алгебраических и аналитических методов в теории кривых и поверхностей во многом содействовало развитию аналитической и дифференциальной геометрии.

В конце XVIII в. исследование одной инженерной проблемы дало дифференциальной геометрии основы теории линейных конгруэнций, стоявшей некоторое время особняком. Речь идёт о задаче, рассмотренной Монжем в «Мемуаре по теории выемок и насыпей», опубликованном в 1784 г.

Хотя Монж был человеком твёрдых демократических убеждений, он относился лояльно к Наполеону, в котором видел человека, способного воплотить идеалы революции в жизнь. В 1815 г., когда к власти вернулись Бурбоны, Монж был снят со своего поста и вскоре после этого умер. Но всё же Политехническая школа продолжала развиваться в духе Монжа.

Жан Ашетт и Жан Батист Био развивали аналитическую геометрию конических сечений и поверхностей второго порядка. В трактате «Опыт аналитической геометрии» (Essai de géométrie analytique, 1802) Био мы, наконец, можем распознать современный учебник аналитической геометрии. Ученик Монжа Шарль Дюпен (во времена Наполеона – молодой инженер-кораблестроитель) применял методы своего учителя в теории поверхностей, где он нашел асимптотические и сопряженные линии. Дюпен стал профессором геометрии в Париже. За свою долгую жизнь он достиг видного положения и в области политики, и в области промышленности. «Индикатриса Дюпена» и «циклиды Дюпена» напоминают нам о его ранних интересах. В его книгах «Развитие геометрии» (Développements de géométrie, 1813) и «Применения геометрии» (Applications de géométrie, 1825) много интересных соображений.

Самым своеобразным учеником Монжа был Жан Виктор Понселе. Он размышлял над методами своего учителя в 1813 г., когда жил в России как военнопленный после поражения «великой армии» Наполеона. Понселе привлекала чисто синтетическая сторона геометрии

Монжа. Его «Трактат о проективных свойствах фигур» (Traité des propriétés projectives des figures) появился в 1822 г. Этого ученого считают основателем проективной геометрии.

Пьер Симон Лаплас – последний из ведущих математиков восемнадцатого века. Сын скромного землевладельца в Нормандии, он учился в Бомоне и Кане, с помощью Даламбера стал профессором математики военной школы в Париже. Он занимал и несколько других преподавательских и административных должностей, во время революции принимал участие в организации как Нормальной, так и Политехнической школы. Наполеон удостоил его многих почестей (в 1799 г. Лаплас был министром внутренних дел), но то же делал и Людовик XVIII. В противоположность Монжу и Карно Лаплас легко менял свои политические привязанности, и при всём том в нём было коечто от сноба. Впрочем, такая неустойчивость позволила ему продолжать свою чисто математическую деятельность при всех политических изменениях во Франции.

Пьер Симон Лаплас

Самые известные труды Лапласа, в которых дана сводка не только его исследований, но и всех предыдущих работ в соответствующих областях, – «Аналитическая теория вероятностей» (Tléorie analytique des probabilités, 1812) и «Небесная механика» (Mécanique céleste, в 5 т. 1799 – 1825). Этим монументальным произведениям сопутствовали развёрнутые популярные изложения – «Философский опыт относительно вероятностей» (Essai philosophique sur les probabilités, 1814) и «Изложение системы мира» (Exposition du systéme du monde, 1796). Последнее содержит гипотезу о происхождении Солнечной системы из туманности, предложенную до того Кантом в 1755 г. «Небесная механика» – своеобразное завершение трудов Ньютона, Клеро, Даламбера, Эйлера, Лагранжа и Лапласа по теории фигуры Земли, теории Луны, по задаче трёх тел и теории возмущений планет, включая основную проблему об устойчивости Солнечной системы. Термин «уравнение Лапласа»

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$

напоминает нам о том, что одной из частей «Небесной механики» является теория потенциала.

С пятью томами «Небесной механики» связано немало анекдотов. Хорошо известен предполагаемый ответ Лапласа Наполеону, который попытался упрекнуть его, заявив, что в его книге нет упоминаний о боге: «Государь, я не нуждался в этой гипотезе». А Натаниел Боудич из Бостона, который перевёл четыре тома труда Лапласа на английский язык, как-то сказал: «Всегда, когда я встречал у Лапласа заявление «Итак, легко видеть...», я был уверен, что мне потребуются часы напряжённой работы, пока я заполню пробел, догадаюсь и покажу, как это легко видеть». Математическая карьера Гамильтона началась с того, что он нашёл ошибку в «Небесной механике» Лапласа. Грин пришел к мысли о математической теории электричества при чтении Лапласа.

Вводится «преобразование Лапласа», которое позже стало основой операционного исчисления Хевисайда.

Многие позднейшие открытия теории вероятностей можно обнаружить в трактате Лапласа «Аналитическая теория вероятностей». В этом внушительном томе подробно рассмотрены азартные игры, геометрические вероятности, теорема Бернулли и её связь с интегралом нормального распределения, теория наименьших квадратов, изобретенная Лежандром. Лаплас также спас от забвения и заново сформулировал ту теорию, набросок которой дал Томас Байес – малоизвестный английский священник, работы которого были опубликованы посмертно в 1763 – 1764 гг. Эта теория стала известна как теория вероятностей a posteriori. В XVIII в. сфера ее приложений была расширена. Её методы проникли в статистику (в частности, в демографию), страховое дело, теорию ошибок наблюдений, теорию стрельбы.

Наиболее ранним теоретическим результатом в области теории вероятностей было, по-видимому, доказательство Муавром (1730) локальной предельной теоремы. Позднее Лаплас обобщил эту теорему. Распространение получила теорема Муавра – Лапласа.

Тема 11. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XIX ВЕКЕ

В истории математики девятнадцатое столетие знаменует начало нового периода – периода современной математики. Система дисциплин, составляющих математический анализ, подверглась глубокой перестройке на основе создаваемой теории пределов и теории действительного числа.

Наряду с развитием аппарата классического математического анализа и его приложений из него выделились самостоятельные математические дисциплины – прежде всего, это огромные области дифференциальных уравнений, а также теорий функций действительного и соответственно комплексного переменного.

Отметим три черты, имеющие общий для большинства математических наук характер. Имеется в виду, во-первых, расширение содержания предмета математики. Оно обусловлено тем, что во всех математических науках происходил процесс обобщения основных понятий, замены одних понятий другими, более общими.

Среди исследований, возникших в результате запросов математической теории, в те времена было особенно много таких, которые отражали усиление внимания к обоснованию математики, это вторая характерная черта математики XIX в.

Третьей характерной особенностью развития математики в XIX в. является значительное расширение области приложений, в основном обусловленное увеличением возможностей аппарата математического анализа. В математическое естествознание вслед за механикой и оптикой вошли задачи термодинамики и электромагнитных явлений. Резко возросли математические запросы техники: баллистики, машиностроения и др.

Наряду с приложениями математического анализа к электромагнитным явлениям получила развитие другая область этой науки. Речь идёт о создании математической теории теплопроводности, позднее развившейся в термодинамику – общую науку о закономерностях теплового движения. Побудительной причиной этого процесса было изобретение паровых машин.

Требования, предъявляемые в связи с этим к математике, отразились в условиях конкурса, объявленного в 1811 г. Парижской академией наук: создать математическую теорию законов распределения тепла и сравнить результаты этой теории с данными опытов. Победителем конкурса оказался парижский академик (с 1817 г.) *Ж.Б. Фурье* (1768 – 1830). Подобно многим учёным – его современникам, Фурье был выходцем из небогатой семьи портного, окончил военную школу, преподавал в ней. Вскоре после организации Политехнической школы он стал одним из ее профессоров (1796 – 1798). Однако в 1798 г. он был включен в число участников экспедиции Наполеона в Египет, а затем занялся организационно-административной деятельностью в качестве префекта департамента Изеры (главный город Гренобль). Лишь в 1817 г. Фурье смог переехать в Париж и целиком посвятить себя научной деятельности.

Жозеф Фурье

Основные научные заслуги Фурье связаны с решением задачи распределения тепла. Еще в 1807 г. он представил Академии мемуар, посвящённый теории распространения тепла в твёрдом теле. В 1811 г. последовал второй мемуар на эту тему. Через 11 лет, в 1822 г., Фурье опубликовал свой труд «Аналитическая теория тепла», оказавший огромное влияние на развитие математики.

Фурье разделял убеждение о всеобщей значимости и всемогуществе анализа бесконечно малых. В его представлении анализ столь же обширен, как сама природа; он отражает её главные законы, выделяясь ясностью и определенностью, а главное – возможностью доведения до численных приложений.

Распределение тепла, как и света, Фурье представлял в виде потока элементарных частиц, свободно проникающих через среду. Для решения уравнения теплопроводности в приграничных условиях Фурье разработал метод разделения переменных, известный теперь как метод Фурье. Ему удалось решить задачи распространения тепла для частных случаев шара, кольца, куба, цилиндра. Характерной чертой метода Фурье является, как известно, разложение функций по найденным собственным функциям. Он систематически применял разложение функций в тригонометрические ряды вида

$$f(x) \sim \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Хотя ряды такого вида были известны и ранее, но после появления «Аналитической теории тепла» они получили название рядов Фурье, сохранив его до сих пор. Фурье практически мог разложить в ряд любую из функций, которую ему могли в то время предложить. Метод Фурье был усовершенствован Пуассоном, Дирихле и особенно Остроградским.

Карл Фридрих Гаусс родился в 1777 г. в немецком городе Брауншвейге, был сыном поденщика. Брауншвейгский герцог соизволил обратить внимание на молодого Гаусса-вундеркинда и позаботился о его обучении. В 1795 – 1798 гг. юный гений учился в Гёттингене, в 1799 г. в Хельмштедте он получил степень доктора. С 1807 г. до своей смерти в 1855 г. он без тревог и забот спокойно работал в качестве директора астрономической обсерватории и профессора родного университета.

Карл Фридрих Гаусс

Дневники Гаусса свидетельствуют, что уже на семнадцатом году жизни он начал делать поразительные открытия. Например, в 1795 г. он независимо от Эйлера открыл закон квадратичной взаимности теории чисел. Некоторые из результатов его ранних исследований изложены в его хельмштедтской диссертации 1799 г. и в его внушительном труде «Арифметические исследования» (Disquisitiones arithmeticae, 1801).

В диссертации дано первое строгое доказательство так называемой «основной теоремы алгебры» – теоремы о том, что каждое алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один корень и, следовательно, столько корней, сколько единиц в показателе его степени. Даламбер пытался дать её доказательство в 1746 г. Гауссу нравилась эта теорема и позже он вывел еще два доказательства, а в 1846 г. снова вернулся к своему первому доказательству. В третьем доказательстве (1816) использованы комплексные интегралы, и это показывает, как рано Гаусс овладел теорией комплексных чисел.

В «Арифметических исследованиях» собраны все достижения предшественников Гаусса в области теории чисел, и вместе с тем теория чисел настолько обогащена, что опубликование этой книги иной раз считают началом современной теории чисел. Центральное место в книге занимает теория квадратичных форм, вычетов и сравнений второй степени; высшим достижением является закон квадратичной взаимности, «золотая теорема» (theorema aurum), первое полное доказательство которой дал Гаусс. Он был увлечён этой теоремой не менее, чем основной теоремой алгебры, и позже опубликовал еще пять доказательств, и ещё одно было найдено после смерти Гаусса в его бумагах. В «Арифметических исследованиях» содержатся также результаты Гаусса о делении круга, иными словами, о корнях уравнения $x^n = 1$; получена замечательная теорема о том, что с помощью только циркуля и линейки можно построить правильный семнадцатиугольник (в общем случае – правильный n-угольник при $n = 2^p + 1$, $p = 2^k$, где n – простое число, $k = 0,1, 2, 3,...$), – удивительное геометрическое обобщение в греческом духе.

Гаусс заинтересовался астрономией после того, как в первый день нового столетия, 1 января 1801 г., Пиацци в Палермо открыл первую малую планету, названную Церерой. Из-за того что не удалось достаточно долго наблюдать новую планету, возникла проблема расчета орбиты планеты по малому числу наблюдений. Гаусс полностью решил эту проблему; при этом получилось уравнение восьмой степени. Когда в 1802 г. был открыт второй астероид, Паллада, Гаусс заинтересовался проблемой вековых возмущений планет. Так возникла его «Теория движения небесных тел» (Theoria motus corporum coelestium, 1809), работа о притяжении произвольных эллипсоидов (1813), его исследования о механических квадратурах (1814) и о вековых возмущениях (1818). В 1812 г. появилась также статья Гаусса о гипергеометрических рядах, которая дала возможность с единой точки зрения рассмотреть большое число функций. Это было первое систематическое исследование сходимости рядов.

После 1820 г. Гаусс начал живо интересоваться геодезией. Здесь он вёл и теоретические исследования, и обширную работу по триангуляции. Одним из результатов было его изложение метода наименьших квадратов (1821, 1823). Но самым важным достижением этого периода жизни Гаусса была теория поверхностей в «Общих исследованиях относительно кривых поверхностей» (Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827).

В 1825 и 1831 гг. появились его работы по биквадратичным вычетам. Он использовал новый метод – теорию комплексных чисел. В работе 1831 г. дана не только алгебра комплексных чисел, но и их арифметика.

Гаусс навсегда изгнал ту таинственность, которая окружала комплексные числа, введя их представление с помощью точек плоскости.

Статуя в Гёттингене изображает Гаусса и его младшего коллегу, физика Вильгельма Вебера, работающими над изобретением электрического телеграфа. Это событие относится к 1833 – 1834 гг., когда Гаусс начал интересоваться физикой. В этот период он выполнил большую экспериментальную работу по земному магнетизму. Но у него нашлось время и для теоретического исследования первостепенной важности – «Общих теорем (Allgemiene Lehrsätze...) о силах, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния» (1839, 1840). Это было началом теории потенциала как отдельной ветви математики.

В последние годы жизни Гаусс все свои силы отдавал прикладной математике. Впрочем, его публикации не дают полной картины всего его величия. Когда были напечатаны его дневники и частично письма, выяснилось, что некоторыми из наиболее глубоких своих мыслей Гаусс не поделился. По-видимому, ему не хотелось публично затрагивать какой-либо спорный вопрос.

В своей истории математики девятнадцатого века Феликс Клейн сравнивает Гаусса и французского математика *Адриена Мари Лежандра,* который был старше Гаусса на двадцать лет. Быть может, не вполне уместно сравнивать Гаусса с каким-либо математиком, за исключением самых великих, однако именно это сравнение показывает, что идеи Гаусса как бы носились в воздухе, потому что Лежандр, идя своим путем, работал над многими вопросами, которыми занимался Гаусс. С 1775 по 1780 г. Лежандр преподавал в военной школе в Париже, а позже занимал различные официальные должности: профессора Нормальной школы, экзаменатора Политехнической школы и инспектора геодезических работ.

Адриен Лежандр

Как и Гаусс, Лежандр – автор фундаментальных работ по теории чисел («Опыт теории чисел» (Essai sur les nombres, 1798), «Теория чисел» (Théorie des nombres, 1830)), в которых сформулирован закон квадратичной взаимности. Он оставил потомкам важные работы по геодезии и теоретической астрономии был столь же усердным вычислителем таблиц, как и Гаусс. В 1806 г. Лежандр изложил метод наименьших квадратов; он изучал притяжение эллипсоидов, даже таких, которые не являются поверхностями вращения, причем им введены «функции Лежандра». Как и Гаусс, он интересовался эллиптическими и эйлеровыми интегралами, равно как и основами и методами евклидовой геометрии.

Хотя Гаусс глубже проник в сущность всех этих различных областей математики, перу Лежандра принадлежат важные и выдающиеся работы. Его обширные руководства в течение долгого времени были в большом почёте, особенно его «Упражнения по интегральному исчислению» (Exercices du calcul intégral, в трёх томах, 1811 – 1819) и «Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (Traité des fonctions elliptiques et des intégrales euleriennes, 1827 – 1832), которые поныне остаются образцовыми произведениями. В своих «Основах геометрии» (Eléments de géometrie, 1794) он отошёл от платоновских идеалов Евклида и написал учебник элементарной геометрии, исходя из требований современной педагогики. Эта книга выдержала много изданий и была переведена на ряд языков, она повлияла на многие исследования.

Главные заслуги в области теории множеств и теории функций действительного переменного (о чём стало известно позднее) принадлежат *Бернарду Больцано* (1781 – 1848), выдающемуся чешскому учёному. С 1805 по 1820 г. он преподавал богословские дисциплины в Пражском университете. Но за выступления в пользу национальной самостоятельности чешского народа и против владычества австрийской монархии он был отстранён от преподавания. Ему было запрещено поступать на государственную службу, выступать устно и в печати. Без средств к существованию Больцано прожил остаток жизни в деревне у друзей, продолжая любимые с юношеских лет занятия математикой и философией.

Бернард Больцано

Обратим внимание на логический анализ содержания основных понятий и методов доказательств, далеко продвинутую формализацию суждений, которые позволили Больцано в области анализа сделать ряд важных открытий, опередив современную ему науку. Исключительно неблагоприятные условия, в которых жил и работал Больцано, были причиной того, что почти все его работы увидели свет лишь после его смерти. Основные результаты его исследований стали известны лишь в 1870-х гг., а признание начали получать с 1880-х гг. Рукопись его важнейшего сочинения – «Учения о функциях» – была обнаружена лишь в 1920 г., а опубликована, с примечаниями К. Рыхлика, лишь в 1930 г., т. е. ровно через сто лет со времени её написания. Об этом обстоятельстве можно лишь пожалеть. Больцано в области обоснования анализа сделал многое раньше Коши и тем более Вейерштрасса. Будь его работы опубликованы, ход событий в этой области был бы, видимо, ускорен.

В самом деле, ещё в 1817 г. Больцано сформулировал и доказал теорему о том, что если множество вещественных чисел ограничено сверху (соответственно, снизу), то оно имеет точную верхнюю (соответственно, нижнюю) грань. Тем самым он опередил Вейерштрасса, сформулировавшего эту теорему после 1860 г. Тогда же, за несколько лет до Коши, Больцано вывел критерий сходимости последовательностей и дал строгое определение непрерывности функций.

Позднее возобновилась публикация материалов из научного наследия Больцано, что дало возможность полнее охарактеризовать его научные достижения.

Огюстен Луи Коши (1789 – 1857) окончил Политехническую школу в Париже в 1807 г.

Огюстен Луи Коши

В течение двух лет студенты Политехнической школы получали основательную подготовку по математике, механике и черчению. Затем их направляли для приобретения специальных инженерных знаний на два года в одно из четырех учебных заведений: Институт путей сообщения, Горный институт и в высшие военные училища: инженерное и артиллерийское. Лучшие ученики имели право выбора. Как правило, они выбирали первый из упомянутых институтов, так как он имел хорошую репутацию. Дальнейшее распределение по институтам также происходило в соответствии с учебными успехами. Коши учился в Институте путей сообщения, а затем (до 1813 г.) работал инженером.

В 1816 г. Коши был назначен членом Академии и профессором Политехнической школы, где работал вместе с другими лучшими математиками Франции. В Политехнической школе он читал лекции по математическому анализу. Весь курс лекций был опубликован в трёх книгах: «Курс анализа» (1821), «Резюме лекций по исчислению бесконечно малых» (1823), «Лекции по приложениям анализа к геометрии» (2 т., 1826, 1828). Однако с 1830 до 1838 г. Коши был вынужден находиться в эмиграции из-за своих религиозно-монархических убеждений и оппозиции республиканскому строю. По возвращении во Францию он преподавал в иезуитском колледже и только в 1848 г. стал профессором Сорбонны – Парижского университета.

Научная продуктивность Коши была исключительной. Биографы насчитывают 789 опубликованных им работ.

Достижения Коши в работах по математическому анализу отодвинули в тень его многочисленные труды по оптике и механике, но мы не должны забывать, что он вместе с Навье принадлежит к основателям математической теории упругости. Больше всего славы принесли ему теория функций комплексного переменного и то, что он настаивал на строгости математического анализа. Функции комплексного переменного были введены ещё раньше, в частности Даламбером, который в одной из работ о сопротивлении жидкостей (1752) получил даже то, что мы теперь называем уравнениями Коши – Римана. Но в руках Коши теория функций комплексного переменного превратилась из полезного для гидродинамики и аэродинамики орудия в новую и самостоятельную область математических исследований. Работы Коши в этой области начиная с 1814 г. появляются непрерывно. Одной из наиболее важных является его «Мемуар об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами» (Mémoire sur les integrals définies, prises entre des limites imaginaires, 1825). В этой работе доказана интегральная теорема Коши.

Коши дал то обоснование анализа, которое сейчас является общепринятым в современных учебниках. Он пользовался и обозначениями Лагранжа, и многими его результатами в теории вещественных функций, ничего не заимствуя из алгебраического обоснования по Лагранжу. Исследование ряда велось с должным учётом его сходимости. Несколько признаков сходимости в теории бесконечных рядов носят имя Коши.

Коши дал также первое доказательство существования решения дифференциального уравнения и системы таких уравнений (1836). Таким образом, Коши наконец заложил основы для ответа на тот ряд проблем и парадоксов, которые были бичом математиков со времен Зенона.

Продуктивность ученого была настолько велика, что Парижская академия должна была ограничить объём всех статей, публикуемых в её «Comptes Rendus» (отчётах). Рассказывают, что он так взволновал Лапласа, когда прочёл свою первую работу о сходимости рядов в Парижской академии, что этот великий учёный поспешил домой, для того чтобы проверить ряды в своей «Небесной механике». Кажется, он установил, что там нет грубых ошибок.

В 1826 г. появилась первая работа Штейнера, в 1827 г. – «Барицентрическое исчисление» (Der Barycentrische Calcül) Мёбиуса, в 1828 г. – первый том «Аналитико-геометрических изысканий» Плюккера (Analytischgeometrische Entwicklungen). В 1831 г. появился второй том этого сочинения, за которым в 1832 г. последовало «Систематическое исследование взаимозависимости геометрических образов» (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten voneinander) Штейнера. Последняя из больших основополагающих немецких работ по геометрии такого рода появилась в 1847 г. – это аксиоматическая «Геометрия положения» (Geometrie der Lage) фон Штаудта.

Якоб Штейнер

У немецких геометров был представлен как синтетический, так и алгебраический подход к геометрии. Типичным представителем синтетической (или «чистой») школы был *Якоб Штейнер*, сын швейцарского крестьянина, «пастушок», который увлекся геометрией, когда познакомился с идеями Песталоцци. Он решил учиться в Гейдельберге, потом преподавал в Берлине, где с 1834 г. до своей смерти в 1863 г. занимал университетскую кафедру. Штейнер был исключительно геометром, он настолько не терпел применения алгебры и анализа, что отвергал даже рисунки. По его мнению, лучше всего изучать геометрию, напряженно размышляя. Он говорил, что вычисление заменяет мышление, тогда как геометрия стимулирует его.

Мы обязаны ему открытием поверхности Штейнера с двойной бесконечностью конических сечений на ней (её называют также римской поверхностью). Он часто опускал доказательства своих теорем, что делает его собрание сочинений сокровищницей для геометров, которые ищут требующих решения задач.

Штейнер строил свою проективную геометрию строго систематически, переходя от перспективности к проективности, а затем к коническим сечениям. Он решил также ряд изопериметрических задач типичными для него геометрическими приемами. Его доказательство того, что круг – это фигура наибольшей площади из всех замкнутых кривых заданного периметра (1836), основано на преобразовании каждой фигуры заданного периметра, которая не является кругом, в другую фигуру того же периметра, по большей площади. Но вывод Штейнера, что в силу этого круг соответствует максимуму, содержит одно упущение: он не доказал, что максимум действительно существует. Дирихле пытался указать на это Штейнеру, строгое же доказательство было позже дано Вейерштрассом.

Петер Густав Лежен Дирихле (1805 – 1859) был тесно связан как с Гауссом и Якоби, так и с французскими математиками. В 1822 – 1827 гг. он жил в Париже как частный учитель и встречался с Фурье, чью книгу он изучил; он хорошо познакомился также и с «Арифметическими исследованиями» Гаусса. Потом он преподавал в университете в Бреслау (ныне Вроцлав), а в 1855 г. стал преемником Гаусса в Гёттингене. Его личное знакомство как с французскими, так и с немецкими математиками и с математикой обеих стран позволило ему стать истолкователем Гаусса и вместе с тем подвергнуть глубокому анализу ряды Фурье. Его прекрасные «Лекции по теории чисел» (Vorlesungen über die Theorie der Zahlen, опубликованы в 1863 г.) всё ещё остаются одним из лучших введений в исследования Гаусса по теории чисел. Они содержат также много новых результатов. В работе 1840 г. Дирихле показал, как использовать всю мощь теории аналитических функций в задачах теории чисел, и в этих исследованиях он ввёл «ряды Дирихле». Ему принадлежит также обобщение понятия квадратичной иррациональности на общие алгебраические области рациональности (поля).

Петер Дирихле

Дирихле дал первое строгое доказательство сходимости рядов Фурье – таким образом он содействовал уточнению понятия функции. В вариационном исчислении он ввёл так называемый принцип Дирихле.

В 1820 г. *Карл Густав Якоб Якоби* (1804 – 1851) опубликовал свои «Новые основы теории эллиптических функций» (Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum). Автор был тогда молодым профессором Кёнигсбергского университета. Якоби, сын берлинского банкира, принадлежал к видной семье; его брат Мориц жил в Петербурге и был одним из первых русских учёных, занимавшихся экспериментальным исследованием электрических явлений. После нескольких лет занятий в Берлине Якоби преподавал в Кёнигсберге (с 1826 по 1843 г.). Затем он пробыл некоторое время в Италии, пытаясь восстановить своё здоровье, и закончил свой жизненный путь в должности профессора Берлинского университета в 1851 г. в возрасте сорока шести лет. Это был остроумный и либеральный мыслитель, вдохновляющий преподаватель и учёный огромной энергии, с большой ясностью мысли, что позволило ему затронуть почти все области математики.

Карл Якоби

В 1832 г. К. Якоби опубликовал свои результаты. Они стали основой теории абелевых функций от *p* переменных, которая стала важной ветвью математики девятнадцатого столетия.

Джеймс Сильвестр назвал якобианом известный функциональный определитель, чтобы воздать должное трудам Якоби по алгебре и по теории исключения. Самой известной из работ Якоби в этой области является статья «О построении и свойствах определителей» (De formatione et proprietatibus determinantium, 1841), которая сделала теорию определителей общим достоянием математиков. Сама идея определителя значительно старше – она восходит в основном к Лейбницу (1693), швейцарскому математику Габриелю Крамеру (1750) и Лагранжу (1770), а название принадлежит Коши (1812).

С Якоби, быть может, лучше всего познакомиться по его прекрасным «Лекциям по динамике» (Vorlesungen über Dynamik), опубликованным в 1866 г. по записям 1842 – 1843 гг. Они написаны в духе французской школы Лагранжа и Пуассона, но содержат множество новых мыслей. Мы находим здесь исследования Якоби по уравнениям в частных производных первого порядка и их применению к дифференциальным уравнениям динамики.

Именно К. Г. Якоби в 1841 г. ввёл в употребление круглые ∂ для обозначения частных производных.

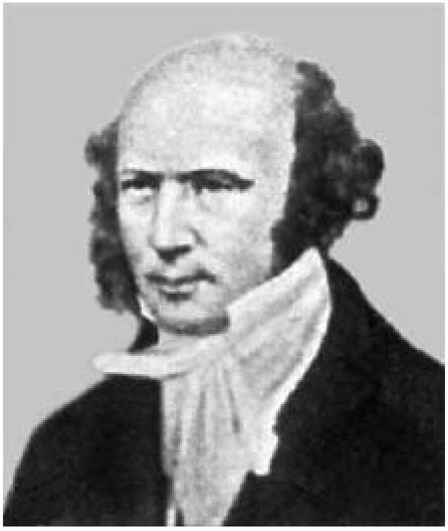
Важные результаты были получены математиками, которые самостоятельно изучали достижения континентальной науки. Среди таких математиков наиболее выдающимся был *Джордж Грин* (1793 – 1841).

Джордж Грин

Грин, сын мельника из Нотингема, самоучка, весьма внимательно следил за новыми открытиями в области электричества. В то время (около 1825 г.) почти не было математической теории, учитывавшей электрические явления. Пуассон в 1812 г. делал только первые шаги в математике. Грин еще только изучал труды Лапласа.

Результатом исследования стала книга Грина «Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма» (Essay on the Application of Mathematical Analysis to Theories of Electricity and Magnetism, 1828) – первая попытка создать математическую теорию электромагнетизма. Это стало началом современной математической физики в Англии и вместе с работой Гаусса 1839 г. придало теории потенциала положение независимой ветви математики. Гаусс и Грин оказались настолько близки, что тогда как Грин выбрал термин «потенциальная функция», Гаусс выбрал почти такой же термин – «потенциал» для обозначения решения уравнения Лапласа. Два тесно связанных тождества между интегралами по поверхности и криволинейными носят название формулы Грина и формулы Гаусса. Термин «функция Грина» в теории дифференциальных уравнений тоже взят в честь сына мельника, изучавшего Лапласа в свои часы досуга. Дальнейшее развитие математической физики в Англии и Германии связано с именами Стокса, Релея, Кельвина и Максвелла, Кирхгофа и Гельмгольца, Гиббса и многих других. Теория Максвелла стала господствующей математической теорией электричества, а позже она вдохновляла Лоренца в его теории электрона и Эйнштейна в теории относительности.

От «Лекций по динамике» Якоби естественно перейти к математику, чьё имя часто связывают с именем Якоби, – *Уильяму Роуану Гамильтону* (1805 – 1865). Не следует путать его с его современником, эдинбургским философом Вильямом Гамильтоном). Он родился и провел всю свою жизнь в Дублине. В 1827 г. он поступил в Тринитиколледж (Trinity college – «колледж Троицы»), двадцати одного года от роду он стал королевским астрономом Ирландии и оставался в этой должности до своей смерти в 1865 г. Мальчиком он изучал континентальную математику, что было ещё новостью в Великобритании, по работам Клеро и Лапласа и в своих исключительно оригинальных исследованиях по оптике и динамике показал, что овладел новыми методами. Его теория световых лучей (1824) – это не только дифференциальная геометрия прямолинейных конгруэнций, это и теория оптических инструментов, что позволило Гамильтону предсказать коническую рефракцию в двуосных кристаллах. Появляется его «характеристическая функция», что стало руководящей идеей в «Общем методе динамики» (General Method in Dynamics), напечатанном в 1834 – 1835 гг. Замысел Гамильтона состоял в том, чтобы из одного общего принципа вывести как оптику, так и динамику. Гамильтон сделал оптику и динамику двумя видами применения вариационного исчисления.



Уильям Роуан Гамильтон

Одно из уравнений, которое обычно записывается в виде $\frac{\partial s}{\partial i} = \mathrm{H}(\frac{\partial s}{\partial q}, q)$, Якоби особо выделил в своих лекциях по динамике, и теперь оно известно как уравнение Гамильтона – Якоби.

Другая идея Гамильтона – это вывод законов физики и механики из вариации некоторого интеграла. Современная теория относительности, равно как и квантовая механика, использует «гамильтонову функцию».

Переломным в жизни Гамильтона стал 1843 г. Именно тогда он открыл кватернионы, изучению которых посвятил остальную часть своей жизни.

Скромный молодой норвежский математик, сын сельского священника, *Нильс Хенрик Абель* (1802 – 1829) за время своей короткой жизни успел сделать так много открытий в математике, что по праву может считаться одним из наиболее выдающихся математиков XIX в. Начав с доказательства невозможности решения в радикалах уравнения пятой степени, Абель произвел вслед за тем основополагающие исследования в области теорий аналитических функций. Он также исследовал ряд классов специальных функций, в первую очередь эллиптических и гиперэллиптических.

Нильс Абель

Еще в школе (ок. 1820 г.) Абель заинтересовался проблемой разрешимости уравнений в радикалах. Одно время ему казалось, что он дал доказательство разрешимости в радикалах уравнения пятой степени. Вскоре выяснилось, что это доказательство содержало ошибку. Но ошибочное доказательство сослужило хорошую службу. Абель получил государственную стипендию и возможность поехать в Европу для усовершенствования в математике.

Исправленное доказательство появилось в 1824 г. в «Мемуаре об алгебраических уравнениях, где доказывается невозможность разрешимости общего уравнения пятой степени». В нём Абель, по-видимому, независимо от Руффини, шёл тем же путём.

Наконец, в 1826 г. в работе Абеля «Доказательство невозможности алгебраической разрешимости уравнений, степень которых превышает четвёртую» многовековая проблема получила удовлетворительное разрешение. Доказательства Абеля – Руффини не дают возможности выделить классы уравнений, разрешимых в радикалах.

Абель в «Мемуаре об одном особом классе алгебраически разрешимых уравнений» (1829) исследовал циклические уравнения, отыскав для них явные выражения корней через коэффициенты. Кроме того, он рассмотрел ещё один класс разрешимых уравнений, которые по существу являются нормальными уравнениями с коммутативной (абелевой) группой Галуа.

Как в этой, так и в другой (оставшейся незаконченной и опубликованной лишь в 1839 г.) работе Абеля «Об алгебраической разрешимости уравнений» доказан ряд теорем, относящихся к теории Галуа. Фактически Абель исследовал структуру коммутативных групп. Он показал, что эти группы являются произведениями циклических групп. Однако понятие группы у него ещё не было выделено.

Эварист Галуа

Парижская среда с её напряженной математической деятельностью породила гения первой величины, который, подобно комете, исчез так же внезапно, как и появился. *Эварист Галуа* (1811 – 1832), сын мэра маленького городка вблизи Парижа, дважды не был принят в Политехническую школу и лишь затем он поступил в Нормальную школу, но был оттуда исключен. Он старался просуществовать, обучая математике и одновременно стараясь как-нибудь совместить свою страстную любовь к науке и приверженность к демократическим идеям. Галуа как республиканец участвовал в революции 1830 г., несколько месяцев провел в тюрьме и вскоре после этого, двадцати одного года от роду, был убит на дуэли. Две статьи, которые он послал в печать, пропали в редакторских ящиках, несколько других статей были напечатаны спустя много лет после его смерти. Накануне дуэли он написал одному из друзей резюме своих открытий в теории уравнений. Этот драматический документ, в котором он просит своего друга сообщить о его открытиях ведущим математикам, заканчивался такими словами:

«Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать всю эту галиматью».

Эта «галиматья» («ce gachis») содержала ни много ни мало теорию групп – ключ к современной алгебре и современной геометрии. Галуа имел уже полное представление о теории групп. Он нашёл основные свойства группы преобразований, связанной с корнями алгебраического уравнения, и показал, что область рациональности этих корней определяется такой группой. Галуа указал на то центральное положение, которое занимают инвариантные подгруппы. В теории Галуа нашли свое естественное место старые проблемы: трисекция угла, удвоение куба, решение кубических и биквадратных уравнений, равно как решение алгебраического уравнения любой степени. Насколько нам известно, письмо Галуа не попало ни к Гауссу, ни к Якоби. Математическая общественность не знала об этом письме до того, как Лиувилль напечатал большую часть работ Галуа в своем журнале в 1846 г., когда Коши уже начал печатать свои работы по теории групп (1844 – 1846). Лишь тогда некоторые математики заинтересовались теориями Галуа. Полное понимание значения исследований Галуа было достигнуто лишь благодаря «Трактату о подстановках» (Traité des substitutions, 1870) Камилла Жордана и последовавшим за этим работам Клейна и Ли. Теперь объединяющий подход Галуа признается одним из самых выдающихся достижений математики девятнадцатого столетия.

Георг Фридрих Бернгард Риман (1826 – 1866), преемник Дирихле в Гёттингене, человек, больше чем кто-либо другой повлиявший на развитие современной математики. Риман был сыном деревенского священника, учился в Гёттингенском университете, где в 1851 г. получил степень доктора. В том же университете в 1854 г. он стал приват-доцентом, а в 1859 г. – профессором. Болезненный, как и Абель, он провёл последние месяцы жизни в Италии, где умер в 1866 г. в сорокалетнем возрасте. За свою короткую жизнь он опубликовал сравнительно небольшое число работ, но каждая из них была и остается важной, а некоторые из них раскрыли совершенно новые и области.

Георг Риман

В 1851 г. появилась докторская диссертация Римана по теории функций комплексного переменного $u + iv = = f(x + iy)$. Как и Даламбер и Коши, Риман исходил из гидродинамических соображений. Он конформно отображал плоскость (x, y) на плоскость (u, v) и устанавливал существование функции, преобразующей любую односвязную область одной плоскости на любую односвязную область другой плоскости. Это привело к понятию римановой поверхности, что ввело в анализ топологические представления. В то время топология была ещё почти незатронутым предметом, по которому была опубликована только одна работа Листинга в журнале «Göttinger Studien» за 1847 г. Риман показал существенное значение топологии для теории функций комплексного переменного. В этой диссертации разъясняется и риманово определение комплексной функции: её действительная и мнимая части должны удовлетворять «уравнениям Коши – Римана» ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$,) в заданной области, а кроме того – некоторым условиям на границе и в особых точках.

Риман применил свои идеи к гипергеометрическим и абелевым функциям (1857), широко пользуясь принципом Дирихле (это его же термин). Среди его результатов – открытие рода римановой поверхности как топологического инварианта и как средства классификации абелевых функций. В статье, опубликованной посмертно, эти идеи применяются к минимальным поверхностям (1867). К этому направлению деятельности Римана относится и его исследование по эллиптическим модулярным функциям и тэта-рядам с p независимыми переменными, а также работы по линейным дифференциальным уравнениям с алгебраическими коэффициентами.

В 1854 г. Риман стал приват-доцентом, представив сразу две фундаментальные работы: одну по тригонометрическим рядам и основам анализа, другую – по основам геометрии. В первом трактате рассмотрены условия Дирихле разложимости функций в ряд Фурье.

Понятие функции стало по-настоящему освобождаться от эйлерова представления о «любой кривой, произвольно начерченной от руки». В своих лекциях Риман приводил пример непрерывной функции, не имеющей производной. Математики не хотели вполне серьезно относиться к этим функциям и называли их «патологическими», но современный анализ показал, насколько такие функции естественны.

Во второй работе 1854 г. рассмотрены гипотезы, на которых основана геометрия. Пространство вводится как топологическое многообразие произвольного числа измерений, метрика в таком многообразии определяется с помощью квадратичной дифференциальной формы.

Позже некоторые формулы были приведены Риманом в премированной работе о распределении теплоты в твёрдом теле, которую он представил в Парижскую академию (1861). Это был своеобразный набросок теории преобразования квадратичных форм.

Наконец, необходимо упомянуть работу Римана, в которой исследуется количество $F(x)$ простых чисел, меньших заданного числа x (1859). Эта работа знаменита тем, что в ней содержится так называемая гипотеза Римана о дзета-функции Эйлера $\zeta(s)$ (это обозначение принадлежит Риману) для комплексных $s = x + iy$: все не действительные нули этой функции находятся на прямой x=1/2. Эта гипотеза до сих пор и не доказана, и не опровергнута.

Риманово определение функции комплексного переменного часто сравнивают с аналогичным определением Вейерштрасса. *Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс* (1815 – 1897) в течение многих лет был учителем одной из прусских гимназий, в 1856 г. он стал профессором математики Берлинского университета, где преподавал в течение тридцати лет. Слава его лекций, всегда тщательно подготовленных, всё возрастала; главным образом благодаря этим лекциям идеи Вейерштрасса стали общим достоянием математиков. С 1856 г. К. Вейерштрасс читал лекции о представлении функций сходящимися рядами, а с 1861 г. – об общей теории функций. Наконец, появились специальные сочинения К. Вейерштрасса: «К теории однозначных аналитических функций» (1876) и «К учению о функциях» (1880), в которых его теория аналитических функций приобрела известную завершённость.

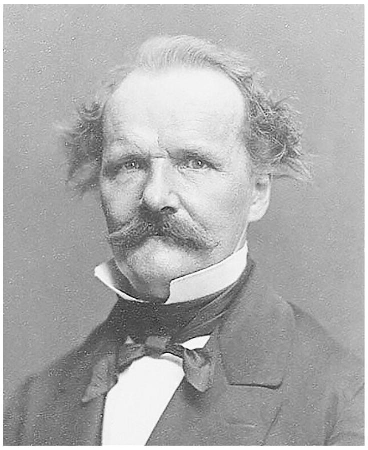
Карл Вейерштрасс

За время работы в гимназии Вейерштрасс написал несколько статей о гиперэллиптических интегралах, абелевых функциях и алгебраических дифференциальных уравнениях. Более всего известно его обоснование теории функций комплексного переменного с помощью степенных рядов.

Своей славой Вейерштрасс обязан исключительной тщательности рассуждений, «вейерштрассовой строгости», что проявилось не только в его теории функций, но и в его вариационном исчислении. Он разъяснил понятия минимума, функции, производной, и таким образом устранил те неясности выражений, которые оставались в формулировке основных понятий анализа. Вейерштрасс был воплощением математической скрупулезности как методологически, так и логически. Другой пример скрупулезности его рассуждений даёт нам его открытие равномерной сходимости. С него начинается то сведение принципов математического анализа к простейшим арифметическим понятиям, которое мы называем арифметизацией математики.

Вслед за работами К. Вейерштрасса в течение последней четверти XIX в. появилось большое количество работ по аналитической теории функций комплексного переменного. Среди них видное место занимают работы учеников Вейерштрасса – С.В. Ковалевской и М.Г. Миттаг-Леффлера, а также Ш. Эрмита, Э. Пикара, Э. Лагерра, А. Пуанкаре и др. Лекции Вейерштрасса послужили на много лет прообразом учебников по теории функций комплексного переменного, которые начали появляться с тех пор довольно часто.

Арифметизация характерна для так называемой Берлинской школы и, в частности, для деятельности Леопольда Кронекера. К этой школе принадлежали такие выдающиеся, плодотворные в области алгебры и теории алгебраических чисел математики, как Кронекер, Куммер и Фробениус, Дедекинд и Кантор.



Эрнст Эдуард Куммер

Эрнст Эдуард Куммер (1810 – 1893) был приглашён в Берлин в 1855 г., чтобы заменить Дирихле. Он преподавал там до 1883 г. – до тех пор, когда сам решил прекратить математическую деятельность, так как почувствовал, что его творческая продуктивность падает. Куммер развивал дифференциальную геометрию конгруэнции. При этих исследованиях он открыл поверхность четвёртого порядка с шестнадцатью угловыми точками, названную его именем. Славу ему принесло прежде всего то, что он ввёл идеальные числа в теорию алгебраических областей рациональности (1846).

Леопольд Кронекер (1823 – 1891), человек зажиточный, поселился в Берлине в 1855 г., где в течение многих лет преподавал в университете, не занимая формально профессорской кафедры, которую он принял лишь после отставки Куммера в 1883 г. Главные результаты Кронекера относятся к теории эллиптических функций, к теории идеалов и к арифметике квадратичных форм. Его опубликованные лекции по теории чисел содержат тщательное изложение его собственных и более ранних открытий; в них ясно видна уверенность ученого в необходимости арифметизации математики. В основе этой уверенности лежало стремление к строгости: Кронекер полагал, что главным в математике должно быть число, а основой всех чисел – натуральное число. Например, число π надо определять не обычным геометрическим путем, а рядом $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$, т. е. в виде комбинации целых чисел; для той же цели могут служить некоторые непрерывные дроби для π. Стремление Кронекера заключить всё математическое в рамки теории чисел показывает хорошо известное его заявление на съезде в Берлине в 1886 г.: «Целые числа сотворил господь бог, а всё прочее – дело людских рук». Он допускал только такое определение математического понятия, для которого требовалось лишь конечное число шагов. Таким образом он преодолевал трудности актуально бесконечного, отказываясь принимать это понятие. В школе Кронекера лозунг Платона, что бог всегда «геометризует», был заменён лозунгом, что бог всегда «арифметизирует».

Леопольд Кронекер

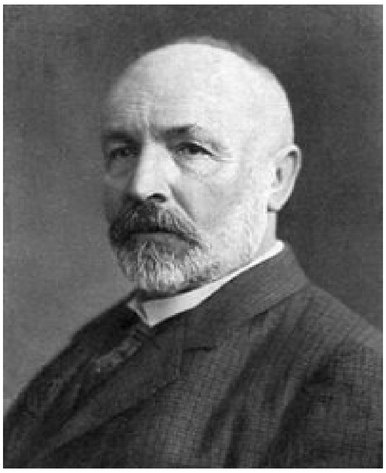
Учение Кронекера об актуальной бесконечности резко противоречило теориям Дедекинда и Кантора.

Рихард Дедекинд (1831 – 1916), в течение тридцати одного года состоявший профессором Высшей технической школы в Брауншвейге, построил строгую теорию иррационального числа. В двух небольших книжках – «Непрерывность и иррациональные числа» (Stetjgkeit und irrationale Zahlen, 1872) и «Что такое числа и для чего они служат» (Was sind und was sollen die Zahlen, 1882) – он проделал для

Рихард Дедекинд

современной математики то, что сделал Евдокс для греческой. Существует большое сходство между дедекиндовым сечением, с помощью которого современные математики (исключая школу Кронекера) определяют иррациональные числа, и античной теорией Евдокса, как она изложена в пятой книге «Начал» Евклида. Кантор и Вейерштрасс дали арифметическое определение иррационального числа, несколько отличающееся от теории Дедекинда, но основанное на сходных соображениях.

Однако в глазах Кронекера самым большим еретиком был *Георг Кантор* (1845 – 1918), который преподавал в Галле с 1869 по 1905 г., Он был известен не только благодаря своей теории иррационального числа, но и благодаря теории множеств. Благодаря ей Кантор создал совершенно новую область математических исследований, которая удовлетворяет самым суровым требованиям к строгости, если только принять её исходные посылки. Он начал публиковать результаты своих исследований в 1870 г., его статья 1874 г., «Űber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen» занимает важное место в истории теории множеств. В этой работе было сформулировано и доказано, что мощность континуума превосходит мощность множества алгебраических действительных чисел. Тем самым впервые было установлено, что существуют бесконечные множества различной мощности.



Георг Кантор

Кантор ещё не употребляет термин «множество» («menge»), который, впрочем, применял в случае точечных множеств ранее (1872); вместо него он использует термины «gesamtheit» и «inbegriff» (совокупность и собрание). Нет терминов «мощность» (появляется в статье 1878 г.) и «счётный» (появляется в статье 1882 г.).

В 1883 г. Г. Кантор напечатал свои «Основы общего учения о многообразиях» (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre). В этом труде он построил теорию трансфинитных кардинальных чисел, основанную на систематическом использовании математически актуальной бесконечности. Низшее кардинальное число он приписал счётному множеству, континууму – более высокое трансфинитное число, и это дало возможность создать арифметику трансфинитных чисел, подобную обычной арифметике. Этот немецкий математик также дал определение порядковых трансфинитных чисел, показывающих, как упорядочены бесконечные множества.

Кантор должен был опровергать возражения многих математиков, которые отказывались принять бесконечное иначе, как процесс, выражаемый значком ∞. Главным оппонентом Кантора был Кронекер – представитель совершенно противоположного направления в том же процессе арифметизации математики. Кантор в конце концов добился полного признания тогда, когда всё более очевидным становилось огромное значение его теории для обоснования теории действительных функций и топологии, особенно после того, как Лебег в 1901 г. обогатил теорию множеств своей теорией меры.

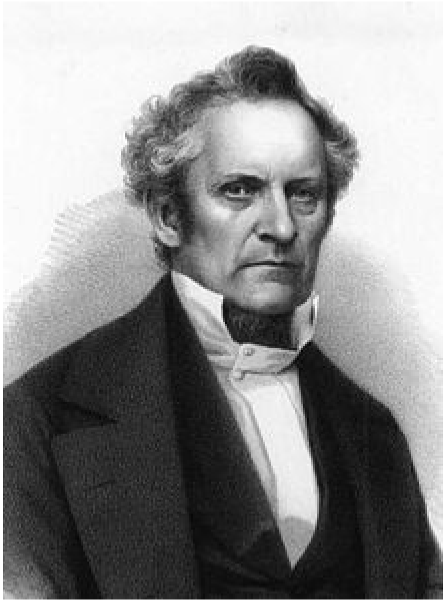
Расхождения между формалистами и интуиционистами двадцатого века были продолжением на новом уровне спора между Кантором и Кронекером.

Представителями алгебраической геометрии были в Германии А. Мёбиус и Ю. Плюккер, во Франции – М. Шаль, в Англии – А. Кели.

Август Фердинанд Мёбиус (1790 – 1868), в течение более чем пятидесяти лет наблюдатель, а потом директор Лейпцигской астрономической обсерватории, был разносторонним учёным. В книге «Барицентрическое исчисление» он первым ввёл однородные координаты и показал, что такие координаты удобны для описания проективных и аффинных свойств на плоскости. С этого времени однородные координаты стали общепринятым средством при алгебраической трактовке проективной геометрии. Работая в уединении, Мёбиус сделал много других интересных открытий. Одним из примеров может быть нулевая система теории прямолинейных конгруэнций, которую он ввёл в своём руководстве по статике (1837). Лист Мёбиуса – первый пример неориентируемой поверхности – напоминает о том, что Мёбиус является также одним из основателей современной топологии.

Август Мёбиус

Юлиус Плюккер (1801 – 1868), который много лет преподавал в Бонне, был как геометром, так и физиком-экспериментатором. Ему принадлежит ряд открытий в области магнетизма кристаллов, электропроводности газов и спектроскопии. В ряде статей и книг, особенно в «Новой геометрии пространства» (Neue Geometrie des Raumes, 1868 – 1869), он перестроил аналитическую геометрию, внеся в неё множество новых идей.



Юлиус Плюккер

Плюккер вводит однородные координаты уже как проективные координаты, исходя из основного тетраэдра; он вводит здесь также то фундаментальное положение, что основным элементом в геометрии могут быть не только точки. Геометрия может основываться и на таких элементах, как прямые, плоскости, окружности, сферы. Число измерений в геометрии того или другого вида теперь уже могло быть любым положительным целым числом, в зависимости от числа параметров, необходимых для того, чтобы определить «элемент». Плюккер опубликовал также общую теорию алгебраических кривых на плоскости, причём он вывел «плюккеровы зависимости» между числами особенностей различного рода (1834, 1839).

Мишель Шаль

Мишель Шаль (1793 – 1880), в течение многих лет ведущий представитель геометрии во Франции, был студентом Политехнической школы в последние дни деятельности Монжа, а в 1841 г. он стал профессором этого учреждения. В 1846 г. он занял кафедру высшей геометрии в Сорбонне, специально для него учреждённую, и здесь он преподавал многие годы. Труды Шаля имеют много общего с работами Плюккера, в частности в том, с каким искусством он из своих уравнений извлекает максимум геометрических сведений. Идя по этому пути, он искусно пользовался изотропными прямыми и циклическими точками на бесконечности. Шаль был последователем Понселе в использовании «исчислительных методов», которые благодаря ему развились в новую область геометрии, так называемую исчислительную («энумеративную») геометрию. Шаль был тонким ценителем истории математики, особенно истории геометрии. Его хорошо известный «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов» (Aperçu historique sur I'origine et le développement des méthodes en géométrie, 1837) стоит у порога современной истории математики. Это хорошо написанное изложение греческой и современной геометрии и хороший пример истории математики, написанной творческим деятелем науки.

Вопрос о том, является ли постулат о параллельных Евклида независимой аксиомой или же он может быть выведен из других аксиом, занимал математиков в течение двух тысяч лет. В древности найти ответ на этот вопрос пытался Птолемей, в Средние века – Насирэддин, в восемнадцатом веке – Ламберт и Лежандр. Все они пытались доказать аксиому и потерпели неудачу. Гаусс был первым человеком, который считал постулат о параллельных независимой аксиомой, откуда вытекало, что логически возможны другие геометрии, основанные на другом выборе аксиом. Гаусс никогда не публиковал своих соображений по этому вопросу. Первыми, кто открыто бросил вызов авторитету двух тысячелетий и построил неевклидову геометрию, были русский – Николай Иванович Лобачевский, и венгр – Янош Бояи.

Янош Бояи

Янош (Иоганн) Бояи (1802 – 1860) был сыном учителя математики в провинциальном венгерском городе. Его отец, Фаркаш (Вольфганг) Бояи (1775 – 1856), учился в Гёттингенском университете в те же годы, что и Гаусс. Он и Гаусс изредка обменивались письмами. Фаркаш потратил много времени на попытки доказать пятый постулат Евклида, но не пришёл ни к каким определённым выводам. Его сын унаследовал его страсть и тоже начал работать над доказательством, несмотря на просьбы отца заниматься чем-либо другим: «Ты должен отвергнуть это подобно самой гнусной связи, это может лишить тебя всего твоего досуга, здоровья, покоя, всех радостей жизни. Эта чёрная пропасть в состоянии, быть может, поглотить тысячу таких титанов, как Ньютон, на земле это никогда не прояснится...» (письмо от 1820 г.).

Янош Бояи поступил на военную службу и заслужил репутацию отличного офицера. В это время он стал рассматривать постулат Евклида как независимую аксиому и открыл, что можно построить геометрию, основанную на другой аксиоме, согласно которой через, точку на плоскости можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данную прямую плоскости. Это была та самая идея, которая уже возникала у Гаусса и Лобачевского. Его соображения были напечатаны в 1832 г. в виде приложения к книге его отца под названием «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве» (Appendix Scientiam Spatii absolute veram exhibens). Озабоченный отец написал Гауссу, прося совета относительно неортодоксальных взглядов сына. Полученный из Гёттингена ответ содержал восторженное одобрение работы младшего Бояи. Вдобавок к этому Гаусс заметил, что он не может хвалить Бояи, так как это было бы самопохвалой, поскольку идеи «Приложения» отражают его мысли.

Молодой Янош был глубоко разочарован этим одобрительным письмом, которое возводило его в ранг большого учёного, но лишало приоритета. Его разочарование усилилось, когда в дальнейшем он не встретил признания. Ещё более он был потрясён тогда, когда книга Лобачевского была опубликована на немецком языке (1840), и он больше никогда ничего не напечатал по математике. В отличие от Бояи Лобачевский до конца боролся за признание своих идей.

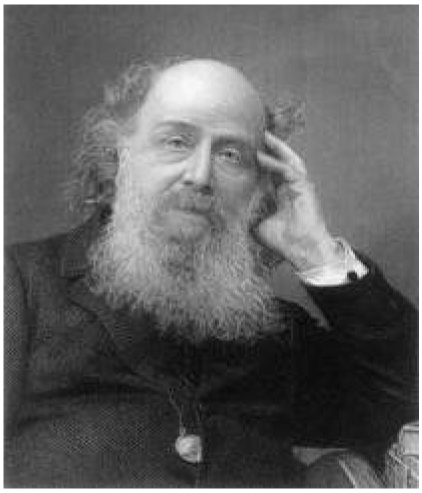
Чистая математика девятнадцатого века в Англии – это, прежде всего, алгебра с применениями преимущественно к геометрии, а ведущими учеными в этой области были А. Кели, Дж. Сильвестр и Дж. Салмон.

Артур Кели (1821 – 1895) в молодости посвятил себя изучению права и практической деятельности юриста, но в 1863 г. он принял предложение занять новую математическую кафедру в Кембридже, где преподавал в течение тридцати лет. В сороковые годы, работая юристом в Лондоне, Кели познакомился с Сильвестром, в то время работником по страхованию. Именно тогда у них зародился общий интерес к алгебре форм, или квантик, как их называл Кели. Сотрудничество Кели и Сильвестра означало зарождение теории алгебраических инвариантов.

Артур Кели

Она как бы носилась в воздухе уже многие годы, особенно после того, как стали изучать определители. В своих ранних работах Кели и Сильвестр обходятся без определителей.

Многочисленные работы Кели посвящены самым разнообразным вопросам в области конечных групп, алгебраических кривых, определителей и инвариантов алгебраических форм. Одними из наиболее известных его работ являются девять «Мемуаров о квантиках» (1854 – 1878). Шестая работа в этой серии (1859) содержит проективное определение метрики относительно конического сечения. Это открытие привело Кели к проективному определению евклидовой метрики – так он получил возможность ввести метрическую геометрию в систему проективной геометрии. Связь этой проективной метрики с неевклидовой геометрией ускользнула от внимания Кели и была открыта позже Феликсом Клейном.



Джеймс Сильвестр

Джеймс Джозеф Сильвестр (1814 – 1897) был не только математиком, но и поэтом, остряком и, наряду с Лейбницем, наиболее выдающимся создателем новых терминов за всю историю математики. С 1855 до 1869 г. он преподавал в военной академии в Вулвиче. Он дважды был в Америке: в первый раз в качестве профессора университета в Виргинии (1841 – 42), второй раз – как профессор университета в Балтиморе (1877 – 1883). Во время второго пребывания в США Сильвестр вошел в число тех, кто заложил основы научной работы в области математики в американских университетах. Его преподавательская деятельность была началом расцвета математики в Соединенных Штатах.

Из многочисленных результатов Сильвестра в алгебре два стали классическими: теория элементарных делителей (1851; вновь открыта Вейерштрассом в 1868 г.) и закон инерции квадратичных форм (1852; был известен Якоби и Риману, но не опубликован ими). Мы обязаны Сильвестру и многими теперь общепринятыми терминами, такими как инвариант, ковариант, контравариантный, когредиентный и сизигия. С ним связано много анекдотов, некоторые из них – из разряда рассказов о рассеянных профессорах.

Третьим английским алгебраистом-геометром был ***Джордж Салмон***, который в течение своей долгой жизни был связан с родным для Гамильтона Тринити-колледжем в Дублине, где он обучал и математике, и богословию. Его заслуга – создание хорошо известных превосходных руководств, ясных и привлекательных. Несколько поколений студентов во многих странах изучали по этим книгам аналитическую геометрию и теорию инвариантов – это «Конические сечения» (Conic Sections, 1848), «Высшие плоские кривые» (Higher Plane Curves, 1852), «Современная высшая алгебра» (Modern Higher Algebra, 1859) и «Аналитическая геометрия трёх измерений» (Analytic Geometry of Three Dimensions, 1862). Эти книги и сейчас вполне можно рекомендовать всем интересующимся геометрией.

Работы Кели и Сильвестра по теории инвариантов обратили на себя внимание в Германии, где несколько математиков развили эту теорию в науку, основанную на законченном алгоритме. Здесь главные фигуры – Гессе, Аронгольд, Клебш и Гордан.

Отто Гессе (1811 – 1874), который был профессором в Кёнигсберге, позже в Гейдельберге и Мюнхене, показал, как и Плюккер, силу метода сокращённых обозначений в аналитической геометрии. Он предпочитал пользоваться однородными координатами и определителями.

Зигфрид Генрих Аронгольд (1819 – 1884), преподававший в Высшей технической школе в Берлине, в 1858 г. написал работу, в которой развил последовательную символику, теории инвариантов с помощью так называемых «идеальных» множителей (что не имеет отношения к идеальным множителям Куммера). Эта символика разрабатывалась в дальнейшем Клебшем (1861). Так, «символика Клебша – Аронгольда» стала почти повсеместно принятым методом систематического исследования алгебраических инвариантов. Сейчас мы видим в этой символике, так же, как и в векторах Гамильтона, внешних произведениях Грассмана и диадах Гиббса, частный случай тензорной алгебры.

Пауль Гордан (1837 – 1912) из Эрлангенского университета обогатил теорию инвариантов следующей теоремой (1868 – 1869): каждая бинарная форма обладает конечной системой рациональных инвариантов и ковариантов, с помощью которых можно в рациональном виде представить все остальные рациональные инварианты и ковarианты. В 1890 г. Гильберт распространил теорему Гордана («теорему конечности») на алгебраические формы с любым числом переменных.

Альфред Клебш (1833 – 1872) был профессором в Карлсруэ, Гиссене и Гёттингене. Он умер в возрасте тридцати девяти лет. Его жизнь – это пример замечательных достижений. В 1862 г. он опубликовал книгу по теории упругости, следуя за французскими учеными Ламе и Сен-Венаном. Клебш применил свою теорию инвариантов к проективной геометрии. Он был одним из первых, кто понял Римана, и стал основателем той ветви алгебраической геометрии, в которой риманова теория функций и многосвязных поверхностей применяется к действительным алгебраическим кривым. Эти идеи нашли отражение в трактате Клебша и Гордана «Теория абелевых функций» (Theorie der Abelschen Functionen, 1866) Клебш также основал «Математические анналы» (Mathematische Annalen) – математический журнал, который был ведущим в течение более чем шестидесяти лет. Его лекции по геометрии, опубликованные Ф. Линдеманом, остаются образцовым курсом проективной геометрии.

Уильям Клиффорд

Уильям Кингдон Клиффорд (1845 – 1879) умер на тридцать четвёртом году жизни. Он преподавал в колледже Троицы (Тринити-колледж) в Кембридже и в Университетском колледже в Лондоне. Клиффорд был одним из первых англичан, понявших Римана и разделявших его глубокий интерес к происхождению наших пространственных представлений. Он разрабатывал геометрию движения, и для этих исследований обобщил кватернионы Гамильтона, построив так называемые бикватернионы (1873 – 1876).

Это были кватернионы с коэффициентами, взятыми из системы комплексных чисел $a + b\varepsilon$, где ε^2 может быть +1, –1 или 0; их можно использовать и для изучения движения в неевклидовых пространствах. Книга Клиффорда «Здравый смысл в точных науках» (Common Sense in the Exact Sciences) и сейчас ещё хороша; в ней видно родство его мышления и мышления Феликса Клейна. На это родство указывает и термин «пространства Клиффорда – Клейна», обозначающий некоторые замкнутые евклидовы многообразия в неевклидовой геометрии. Проживи Клиффорд дольше, идеи Римана могли бы оказать влияние на британских математиков на поколение раньше, чем это произошло в действительности.

Феликс Клейн (1849 – 1925) был ассистентом Плюккера в Бонне в конце 1860-х гг., именно там он изучил геометрию. В 1870 г., когда ему было двадцать два года, он побывал в Париже. Здесь он встретился с Софусом Ли, норвежцем, который был на шесть лет старше его, но заинтересовался математикой лишь незадолго до их встречи. Молодые люди встречались с французскими математиками, в том числе с Камиллом Жорданом, работавшим в Политехнической школе, и изучали их труды. Как раз в 1870 г. Жордан написал «Трактат о подстановках» – книгу о группах подстановок и о теории уравнений Галуа. Клейн и Ли начали осознавать основное значение теории групп, позднее они разбили математику примерно на две части: Клейн в основном сосредоточился на дискретных, а Ли – на непрерывных группах.

Феликс Клейн

В 1872 г. Клейн стал профессором в Эрлангене. В своей вступительной лекции он разъяснял важность понятия группы для классификации различных областей математики. В этой лекции, которая стала известна под именем «Эрлангенская программа», любая геометрия объявлялась теорией инвариантов особой группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. Евклидова геометрия изучает инварианты метрической группы, проективная геометрия – инварианты проективной группы. Классификация групп преобразований даёт нам классификацию геометрий, а теория алгебраических и дифференциальных инвариантов каждой группы – аналитическую структуру соответствующей геометрии.

Клейн дал важный пример применения своего подхода, показав, что неевклидовы геометрии можно истолковать как проективные геометрии с метрикой Кели. Это, наконец, привело к полному признанию непризнанных теорий Бояи и Лобачевского. Теперь они были логически обоснованны.

Теория групп сделала возможным синтез геометрических и алгебраических трудов Монжа, Понселе, Гаусса, Кели, Клебша, Грассмана и Римана. Риманова теория пространства, которая дала так много для построения Эрлангенской программы, вдохновляла не только Клейна, но и Гельмгольца и Ли.

Герман Гельмгольц (1821 – 1894) в 1868 и 1884 гг. изучал риманово понятие пространства, отчасти в поисках геометрического образа для его теории цветов, отчасти в поисках происхождения наших зрительных оценок расстояния. Это привело его к исследованию природы геометрических аксиом, в частности римановой квадратичной метрики. Ли усовершенствовал рассуждения Гельмгольца относительно характера римановой метрики, проанализировав природу лежащих в основе этого групп преобразований (1890). Эта проблема «пространства Ли – Гельмгольца» имела значение не только для теории относительности и теории групп, но и для физиологии.

Клейн изложил риманову концепцию теории комплексных функций в своей книге «О римановой теории алгебраических функций» (Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen, 1882), в которой он подчёркивал, что физические соображения могут оказывать влияние даже на самые тонкие части математики. В «Лекциях об икосаэдре» (Vorlesungen über das Ikosaeder, 1884) он показал, что современная алгебра может научить многим новым и удивительным вещам и относительно древних платоновых тел. Клейн применил понятие группы к линейным дифференциальным уравнениям, к эллиптическим и модулярным функциям, к абелевым и новым «автоморфным» функциям (к последним – в интересном и дружеском соревновании с Пуанкаре). Под вдохновляющим руководством Клейна Гёттинген стал мировым центром математических исследований, куда молодые мужчины и женщины многих национальностей съезжались для изучения своих частных предметов в качестве неотъемлемой части математики в целом. Лекции Клейна воодушевляли слушателей, записи этих лекций, размноженные на стеклографе, были источником многих специальных сведений для целых поколений математиков. После смерти Клейна в 1925 г. некоторые из курсов лекций появились в виде книг.

Тем временем в Париже *Мариус Софус Ли* (1842 – 1899) открыл контактные преобразования и тем самым дал ключ ко всей гамильтоновой динамике как части теории групп. После своего возвращения в Норвегию он стал профессором в Христиании (ныне Осло), позже, с 1886 по 1898 г., он преподавал в Лейпциге. Всю жизнь Ли посвятил систематическому изучению групп непрерывных преобразований и их инвариантов, выявляя их основное значение в качестве классификационного принципа в геометрии, механике, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Результаты этих трудов были сведены воедино в ряде томов, изданных с помощью учеников Ли Шефферса и Энгеля («Группы преобразований», 1888 – 1893; «Дифференциальные уравнения», 1891; «Непрерывные группы», 1893; «Касательные преобразования», 1896). Позже к трудам Ли многое было добавлено в работах французского математика Эли Картана.

Мариус Ли

Жозеф Лиувилль

Во Франции, одновременно с развитием математики в Германии, также появились замечательные учёные. Интересно сравнить французских и немецких математиков: Эрмита с Вейерштрассом, Дарбу с Клейном, Адамара с Гильбертом, Поля Таннери с Морицом Кантором. В 1840 – 1860-е гг. ведущим математиком Франции был *Жозеф Лиувилль* (1809 – 1882), профессор Французского коллежа в Париже, хороший преподаватель, организатор и издатель в течение многих лет французского «Журнала чистой и прикладной математики» (Journal de Mathématiques pures et appliquées). Он подверг систематическому исследованию арифметическую теорию квадратичных форм от двух и более переменных, но «теорема Лиувилля» в статистической механике показывает, что он творчески работал в совсем иных областях. Он доказал существование трансцендентных чисел и в 1844 г. доказал, что ни e, ни e^2 не могут быть корнями квадратного уравнения с рациональными коэффициентами. Это было одним из звеньев цепи доказательств, ведущих от результата Ламберта в 1761 г., что π иррационально, к доказательству Эрмита, что e трансцендентно (1873), и к окончательному результату Ф. Линдемана, ученика Вейерштрасса, что π – трансцендентное число (1882).

Шарль Эрмит, профессор Сорбонны и Политехнической школы, стал ведущим представителем анализа во Франции после смерти Коши в 1857 г. Эллиптические функции, модулярные функции, тэта-функции, теория чисел и теория инвариантов были предметом его работ, о чем свидетельствуют термины «эрмитовы числа», «эрмитовы формы», «многочлены Эрмита». Его дружба с голландским математиком Стилтьесом повлияла на открытие «интеграла Стилтьеса» и применение непрерывных дробей в теории моментов. Оба высоко ценили друг друга; Эрмит однажды писал своему другу: «Вы всегда правы, а я всегда ошибаюсь». Четырёхтомная «Переписка» (Correspondence, 1905) Эрмита и Стилтьеса содержит богатый материал, преимущественно о функциях комплексного переменного.

Гастон Дарбу

Французские геометрические традиции нашли блестящее продолжение в книгах и статьях *Гастона Дарбу* (1842 – 1917). Дарбу был геометром в духе Монжа, он подходил к геометрическим задачам, полностью владея теорией групп и теорией дифференциальных уравнений, а проблемы механики он исследовал, опираясь на живую пространственную интуицию. Дарбу был профессором Французского коллежа и в течение полувека активно участвовал в преподавании. Наибольшее влияние из его трудов оказали образцовые «Лекции по общей теории поверхностей» (Leçons sur la théorie générale des surfaces, в 4 т., 1887 – 1896), в которых изложены результаты исследований по дифференциальной геометрии кривых и поверхностей за сто лет.

Вторая часть девятнадцатого столетия была временем появления больших французских руководств по анализу и его применениям, которые часто издавались под названием «Курс анализа» и создавались ведущими математиками. Наиболее известными являются «Курс анализа» (Cours d'analyse) Камилла Жордана (в 3 т., 1882 – 1887) и «Трактат по анализу» (Traité d' analyse) Эмиля Пикара (в 3 т., 1891 – 1896), к ним надо ещё добавить «Курс математического анализа» (Cours d'analyse mathématique) Эдуарда Гурса (в 3 т., 1902 – 1905).

Анри Пуанкаре

Величайшим французским математиком второй половины девятнадцатого века был *Анри Пуанкаре* (1854 – 1912), профессор Сорбонны с 1881 г. до своей смерти (1912). Никто из математиков этого периода не владел таким количеством дисциплин и не был в состоянии их все обогатить. Каждый год он читал лекции по новому предмету. Они были изданы слушателями и охватывали различные области науки: теорию потенциала, оптику, электричество, теплопроводность, капиллярность, электромагнетизм, гидродинамику, небесную механику, термодинамику, теорию вероятностей. Каждый из этих курсов по-своему замечателен.

Пуанкаре написал ряд популярных книг, которые помогали понять проблемы современной математики, среди них «Ценность науки» (La valeur de la science, 1905) и «Наука и гипотеза» (La science et l'hypothèse, 1906). Кроме этих курсов, Пуанкаре опубликовал большое число работ по так называемым автоморфным и фуксовым функциям, по дифференциальным уравнениям, по топологии и по основаниям математики, исследуя области чистой и прикладной математики.

Пуанкаре исследовал расходящиеся ряды и построил свою теорию асимптотических разложений, разрабатывал теорию интегральных инвариантов, исследовал устойчивость орбит и форму небесных тел.

Пуанкаре подобен Эйлеру и Гауссу – всякий раз, когда мы обращаемся к нему, мы чувствуем обаяние оригинальности. Труды Пуанкаре существенно повлияли на наши современные представления в области космогонии, топологии, теории вероятностей, теории относительности.

В 1871 г. в Берлине появился реферативный журнал по математике «Книга успехов математики за год» (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik), изданный по образцу аналогичного библиографического журнала по физике (Fortschritte der Physik).

В первом томе этого ежегодника охвачены работы по математике и её приложениям в механике, математической физике, астрономии и геодезии за 1868 г. Всего там учтено немногим меньше 900 работ, число их авторов – около 650. Работы сгруппированы в двенадцать разделов: 1) история и философия; 2) алгебра; 3) теория чисел; 4) теория вероятностей; 5) ряды; 6) дифференциальное и интегральное исчисление (включая дифференциальные уравнения и вариационное исчисление); 7) теория функций; 8) аналитическая геометрия (в том числе дифференциальная геометрия); 9) синтетическая геометрия (т. е. в основном проективная); 10) механика; 11) математическая физика; 12) геодезия и астрономия.

Соответствующие данные к концу столетия показывают значительность происшедших изменений. В 1897 г. на первом международном конгрессе математиков в Цюрихе было озвучено, что за последнее десятилетие выпускалось около 2000 публикаций в год. Вся научная математическая литература (с начала книгопечатания в Европе до конца XIX в.) составляла, по оценке библиографов, примерно 125 тыс. названий (примерно 95 000 статей, 30 000 книг; переиздания и переводы при этом не учитывались), из них около половины было опубликовано во второй половине XIX в. Если обратиться к указанному выше ежегоднику, то в томе за 1900 г. (т. 31, издан в 1902 г.) можно найти следующие данные: число учтённых в нём работ – свыше 2600, число авторов – немногим меньше 1500. Таким образом, за треть века произошло почти утроение годовой продукции математиков и в 2,5 раза выросло число авторов, выступающих в печати в течение года.

В середине XIX в. организуются специальные математические общества, но они первоначально связаны с определёнными городами. Таковы, например, основанные почти одновременно Московское математическое (1864) и Лондонское математическое (1865) общества. Оба они довольно скоро начинают играть роль общенациональных, в известной мере благодаря своим журналам. Позже возникают национальные математические ассоциации, выделяющиеся из соответствующих общенаучных объединений (например, Французское математическое общество, организованное в 1872 г., Немецкое математическое объединение, организованное в 1891 г.). По всей стране проводятся математические съезды. Однако и этого мало, возникает необходимость создания международной организации. Первая попытка была сделана в 1893 г., когда в Чикаго проводилась международная выставка. В её программе было и проведение математического конгресса. Остался том подготовленных для него докладов (всего 39, из них 13 принадлежат американским авторам, 16 – немецким, по 3 – французским и итальянским), ставший первым томом серии, издаваемой Американским математическим обществом. В Цюрихе в 1897 г. состоялся первый международный математический конгресс. Он длился 3 дня, собрал немногим более 200 участников (приглашений было разослано, главным образом в адрес национальных организаций, около 2000). Официальными языками конгресса были немецкий и французский. В качестве важнейших задач были признаны составление отчётов о состоянии различных математических дисциплин, содействие изданию сочинений, важных для всех математиков, участие в выработке классификации математических наук и в библиографических работах общего научного значения, содействие личному общению учёных.

Почти единодушное признание получила теория множеств (заодно – и заслуги Г. Кантора). Едва ли не самое видное место среди математических исследований занимала тогда теория аналитических функций – её развитие в предыдущие годы было темой обширного доклада Адольфа Гурвица (1859 – 1919, Швейцария). Математическая логика вошла в список математических дисциплин; о её состоянии докладывали на секционном заседании Э. Шрёдер (1841 – 1902, Германия) и Дж. Пеано. Большое место заняли на первом международном конгрессе математиков вопросы, связанные с её преподаванием, применением в технике. Анри Пуанкаре прислал доклад на тему об отношениях между чистым анализом и математической физикой.

Феликс Клейн в своем выступлении говорил, что считает «ведущими» в математике три дисциплины: новую геометрию, теорию функций комплексного переменного и теорию групп. Оставаясь при этом убеждении, теперь он добавил бы еще общее учение о величинах (что в наше время называют «основами математики») и теорию чисел. Ещё одно характерное для конца XIX в. событие заслуживает упоминания: начало издания большой «Энциклопедии математических наук» (на немецком языке). Одним из инициаторов в этом деле был тот же Ф. Клейн.

Организация международных конгрессов, издание математической энциклопедии, реферирование многообразной научной продукции, организованное во всемирном масштабе, – всё это, помимо непосредственного назначения, служило одной общей цели: сохранению, так сказать, организационного единства всё более разветвляющейся математики.

Тема 12. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XX ВЕКЕ

Разумеется, первый день нового века – 1 января 1901 г. – не был ознаменован никаким переворотом или поворотом в математических науках, как, впрочем, ничем особенным не был отмечен и в других областях человеческой деятельности. Нет никакой явственной грани, которая отделяла бы математику XX в. от науки XIX в. Начало XX столетия (до Первой мировой войны) в математике ознаменовано продолжением работы предыдущих десятилетий, дальнейшим развитием и усилением тех сдвигов и тенденций, которые достаточно ясно обозначились в течение, скажем, последней четверти XIX в. Будет полезно ещё раз оглянуться на конец XIX в.

Следует сперва представить себе географию математики этого периода. Наука в те времена была ещё преимущественно европейской. Азиатские, африканские, южноамериканские страны не принимали тогда почти никакого участия в её развитии. Вне Европы заметная группа учёных-математиков сформировалась только в Соединённых Штатах Америки, но и они, как принято было говорить, еще «сидели у ног своих европейских учителей». В самой Европе распределение математических центров по странам было весьма неравномерным. На первом месте по числу активно работающих учёных, по количеству печатных изданий разного рода и назначения, по организованности и значению в культурной и общественной жизни своей страны стояли математики Германии и Франции. На подъёме, после объединения страны, была итальянская математика. В России в расцвете была «могучая кучка» математиков чебышевской школы. В Англии после смерти Кели и Сильвестра (ещё раньше молодым умер Клиффорд) «чистая математика» уже не имела столь блестящих представителей, и репутация математических наук поддерживалась главным образом за счёт работ по теоретической механике и математической физике. Учёные-математики из раздробленной Польши, славянских народов, живших в пределах тогдашней Австро-Венгрии, Балканских стран отставали от своих коллег из Испании и Португалии. Напротив, более высоко развитые в техническом и экономическом отношении Голландия, Бельгия, Скандинавские страны уже внесли весомый вклад в математические науки не столько за счет отдельных крупных талантов, сколько благодаря систематической работе групп учёных.

Одно из наиболее важных событий начала XX века – выдвижение на первый план теории функций действительного переменного (ТФДП). Её формированию содействовали работы математиков разных стран, например П. Дюбуа-Реймона (1831 – 1889, Германия), К. Жордана (1838 – 1922, Франция; главным образом его курс анализа), У. Дини (1845 – 1918, Италия).

Для времени становления ТФДП *характерны работы Джузеппе Пеано* (1858 – 1922) – если не самого крупного, *то* заведомо самого оригинального итальянского математика своего времени. Он оставил заметный след в анализе, геометрии, механике и математической логике, занимался историей математики, методами её преподавания, сравнительной филологией, созданием международного языка.

Напомним, например, о «кривой Пеано», заполняющей двумерную фигуру (квадрат), и о замечании, что предел отношения $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, когда и x_1, и x_2 одновременно стремятся к одному и тому же значению x, может отличаться от $f'(x)$, хотя производная $f'(x)$

везде существует и конечна. Сила и точность критической мысли Пеано нашли своё выражение и в работах по основам математики и по математической логике.

Среди математиков французской школы роль инициатора и организатора играл *Эмиль Борель* (1871 – 1956). Он был основателем серии монографий по теории функций и её приложениям, издававшейся в течение нескольких десятилетий и оказавшей немалое влияние на формирование молодых математиков во Франции и в других странах. Борелю принадлежат также значительные работы по теории вероятностей. Борель был также выдающимся популяризатором математики.

Эмиль Борель

Блестяще начатая творческая деятельность *Рене Бэра* (1879 – 1932) продолжалась недолго. Образцовыми по ясности изложения и по законченности результатов остаются его «Лекции о разрывных функциях».

Анри Лебег

Анри Лебег (1875 – 1941, Франция) – сын рабочего-печатника, один из немногих в его время учёных пролетарского происхождения. Ранняя смерть отца сделала очень трудными для него школьные годы, но благодаря настойчивости и блестящим способностям юноше удалось закончить среднюю школу и поступить в 1894 г. в парижскую Высшую нормальную школу. Окончить её – значило обеспечить себе скромный заработок учителя средней школы, и в 1897 г., получив диплом, Лебег начинает преподавать математику в одном из лицеев Нанси. Большая педагогическая нагрузка не помешала ему подготовить за три года замечательную диссертацию, опубликованную под названием «Интеграл – длина – площадь». В ней содержится теория меры точечных множеств и интеграла, за которыми закреплено имя автора. Его идеи казались слишком смелыми некоторым карифеям французской математики того времени, к защите работа была допущена не сразу, в 1902 г. После этого Лебег начинает преподавать в высшей школе, но до 1910 г. – в провинциальных университетах. В эти годы он очень активен творчески: появляется его большой мемуар о функциях, представимых аналитически, содержащий доказательство существования функций любого класса Бэра, работы по теории размерности, о принципе Дирихле и другие. С 1910 г. начинается парижский период жизни Лебега. Его заслуги теперь признаны, он занимает кафедру во Французском коллеже (с 1921 г.), в следующем году избирается в Академию наук. Последние двадцать лет своей жизни Лебег посвятил только педагогическим вопросам (ряд статей, книга «Об измерений величин» в русском переводе) и истории науки.

За пределами Франции новыми проблемами теории функций начинают заниматься Н.Н. Лузин (его замечательная диссертация «Интеграл и тригонометрический ряд» появилась в 1915 г.), В. Серпиньский (1882 – 1969, Польша), В.Х. Юнг (1863 – 1942, Англия), ряд немецких и итальянских математиков.

Наряду с теорий функций действительного переменного продолжала развиваться «ведущая» математическая дисциплина – теория аналитических функций. В теории целых и мероморфных функций после фундаментальных работ А. Пуанкаре и Э. Пикара (1858 – 1941) 1880-х гг. важные результаты были получены Ж. Адамаром (1865 – 1963, Франция), применившим свои методы в аналитической теории чисел (в 1896 г. им и одновременно с ним Ш. ла Валле Пуссеном (1866 – 1962, Бельгия)), Э. Борелем и другими учёными.

Д. Помпей (1873 – 1954, Румыния) обобщил понятие моногенности, введя так называемую ареолярную производную (производную по площади) функции комплексного переменного. Пуанкаре (и независимо П. Кёбе, 1882 – 1945, Германия) решил проблему униформизации.

Значительные результаты получены в аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений Полем Пенлеве (1863 – 1933, Франция) и рядом других учёных.

Одной из новых областей математики была топология. Комбинаторная топология стала самостоятельной дисциплиной после знаменитой серии работ А. Пуанкаре «Analysis situs» (т. е. «Анализ положения») и пяти «Дополнений» к этому первому мемуару (1895 – 1904), и это было только начало.

В это время алгебра начинает превращаться из «науки о решении алгебраических уравнений» в ту «абстрактную», или «современную», алгебру, какой она остается в наши дни.

Вполне отчётливо новую постановку алгебраических проблем можно найти у Э. Штейница (1871 – 1928, Германия). В 1910 г. во введении к своей капитальной работе «Алгебраическая теория полей» он писал: «В настоящей статье понятие «поле» рассматривается в том же абстрактном и общем виде, как и в работе Г. Вебера «Исследования по общим основам теории уравнений Галуа», а именно как система элементов с двумя операциями, сложением и умножением, подчиняющимися ассоциативному и коммутативному законам, связанными дистрибутивным законом и допускающими неограниченное обращение…».

Теорема немецкого ученого *Эрнста Цермело* (1871 – 1953) вызвала самые острые математические коллизии начала века. Речь шла о математическом рассуждении, о доказательстве, которое одними математиками принималось, другими отвергалось. Цермело в 1904 г. опубликовал доказательство теоремы, что всякое множество можно вполне упорядочить, опираясь при этом на «аксиому выбора». Согласно этой аксиоме, в любом подмножестве заданного множества можно зафиксировать некоторый его элемент («отмеченный элемент»). Многие математики, среди них Пуанкаре, отвергали аксиому Цермело и выводы, полученные на её основании; другие, среди них Гильберт, её приняли.

Это дало мощный стимул для исследований по аксиоматике теории множеств (Цермело принадлежит и первая система аксиом этой теории) и по математической логике. В частности, голландский математик *Л. Брауэр* (1881 –1966), автор значительных работ по топологии, предложил так называемую интуиционистскую логику, согласно которой «принцип исключённого третьего» неприменим к бесконечным множествам. Борель высказывался за использование в математике только «конструктивных определений» – определений, использующих или подразумевающих только конечное или счётное множестве операций. Аксиоматика теории множеств, направленная на устранение парадоксов «наивной теории множеств», была предложена Бертраном Расселом (1872 – 1970) и А.Н. Уайтхедом (1861 – 1947) в их трёхтомном труде «Principia Mathematica» (1910 – 1913).

Новый метод – метод интегральных уравнений – позволил создать стройную теорию краевых задач математической физики. Он получил широкое распространение после замечательной работы 1903 г. норвежского математика *Эрика Ивара Фредгольма* (1866 – 1927), который в общем виде дал решение линейного интегрального уравнения, получившего его имя. Однако Гильберт не был «ослеплён внешностью» результатов Фредгольма и выявил их более глубокую сущность. Он усмотрел возможность как бы непосредственно оперировать с $n = \infty$. Таким образом, дальнейшее развитие пошло в двух направлениях. Первое, более традиционное, связано с именами Фредгольма, Вольтера («уравнения Вольтера»), Пикара, много сделавшего в трудной теории однородных интегральных уравнений с особенностями, и др. Второе направление, представленное Гильбертом и его учениками и последователями, естественно влилось впоследствии в более широкое русло функционального анализа.

Давид Гильберт

Давид Гильберт родился в 1862 г. в Кёнигсберге (ныне Калининград), там же учился в университете, защитил диссертацию в 1885 г., был доцентом (с 1886 по 1892 г.) и профессором (по 1895 г.). С 1896 г. и до своей кончины Гильберт – профессор Гёттингенского университета, славу которого он поддержал и умножил. В последние годы своей жизни Гильберт (умер в 1943 г.) тщетно пытался оградить Гёттингенский университет от фашистских и фашиствующих мракобесов.

В 1888 г. Гильберту удалось получить первые крупные результаты в области популярной тогда теории инвариантов. Для многочисленных работ того времени по теории инвариантов характерны громоздкие алгебраические выкладки. Гильберт доказал общие положения, почти не прибегая к вычислениям. Неудивительно, что один из авторитетов того времени Пауль Гордан (1837 – 1912), познакомившись с работой Гильберта, воскликнул: «Это не математика, это теология!».

В последующие годы Гильберт занимался как алгеброй, так и теорией чисел. В классическом обзоре по теории алгебраических чисел, представленном Немецкому математическому обществу в 1895 г., он дал стройное изложение этой восходящей к Гауссу теории. Её разрабатывали главным образом в Германии. Усилиями Дирихле, Куммера, Кронекера, Дедекинда, позже Минковского была создана законченная теория делимости для числовых полей, основанная на понятиях идеала, простого идеала.

С конца 1890-х гг. Гильберт углубляется в анализ, геометрию. В анализе ему, кроме работ по теории интегральных уравнений, принадлежат капитальные исследования по вариационному исчислению – доказательство так называемого «принципа Дирихле» и некоторые другие первоклассные результаты. В последние двадцать лет своей жизни он больше всего занимался математической логикой.

Гильберт решил ряд трудных более частных задач. Например, в теории чисел ему принадлежит первое общее доказательство теоремы Варинга, сформулированной ещё в XVIII в.: каждое целое число можно представить суммой не более чем n ($n > 0$) κ-х ($\kappa > 0$) степеней целых чисел, где n зависит только от (целого) κ.

В дифференциальной геометрии Гильберт доказал трудную и на первый взгляд неожиданную теорему: в трёхмерном пространстве всякая поверхность постоянной отрицательной кривизны имеет особенности. Во второй половине своей жизни он много занимался и проблемами теоретической физики. Так, он указал физические применения своей теории интегральных уравнений и в одной из своих работ близко подошёл к основным положениям общей теории относительности Эйнштейна.

Гильберт известен и как ученый, сделавший немало открытий и в геометрии. Он начал «Основания геометрии» фразой: «Будем мыслить три системы предметов, которые назовем точками, прямыми и плоскостями», а в беседах он не раз, шутя, говорил, что в геометрии вместо точек, прямых, плоскостей можно было бы говорить о столах, стульях и кружках пива.

Наибольшей заслугой Гильберта является то, что он сумел должным образом ввести в изученное им пространство («пространстве Гильберта») топологические соотношения. Это, в частности, позволило в новой области анализа, открытой Гильбертом, воспользоваться языком и образами геометрии.

В рассматриваемый период новые главы были вписаны и в такую традиционную дисциплину, как теория чисел (помимо уже упоминавшихся в связи с Гильбертом исследований). Ещё в 1890-е гг. Г.Ф. Вороной (1868 – 1908) и Г. Минковский (1864 – 1909, Германия) заложили основы «геометрии чисел», тесно связанной с кристаллографическими исследованиями (правильные разбиения пространства). Выдающиеся результаты были получены в аналитической теории чисел ближайшим учеником Гильберта Германом Вейлем (1885 – 1955), Эдмундом Ландау (1877 – 1938, Германия), Харди Годфри Харолдом (1877 – 1947, Англия) и Джоном Литлвудом (1885 – 1977, Англия). Недолго продолжалось творчество поразительно одарённого Сринивасы Рамануджана (1887 – 1920), первого крупного учёного, которого дала Индия современной математике.

В обзоре математики начала XX в. необходимо сказать о теории вероятностей и о математической статистике. Центром теоретической мысли в области теории вероятностей оставалась Россия: на эти годы приходятся классические исследования А.М. Ляпунова и А.А. Маркова.

Влияние новых методов теории функции действительного переменного прежде всего сказалось на работах французской школы, которую представляют, кроме Эмиля Бореля, Поль Леви (1886 – 1971), М. Фреше (1878 – 1973) и др. Сильная школа математической статистики формируется в Англии (Карл Пирсон, 1857 – 1936, Р. Фишер, 1890 – 1962 и др.), в Скандинавских странах, затем в США. Значительно разнообразнее становятся проблемы, которые ставятся перед теорией вероятностей и статистикой со стороны физики, техники, экономики.

Империалистическая война, начавшаяся в 1914 г., вызвала взрыв национализма и среди учёных, особенно в Германии, и разорвала многие международные научные связи. Это в полной мере относится и к наиболее абстрактной науке – математике. Некоторые работы международного характера не удалось возобновить и после войны.

Международный математический союз (ММС) в 1919 г. был организован в Брюсселе, а в 1920 г. – в Страсбурге – городе, отторгнутом Германией у Франции в 1871 г. и теперь возвращенном Франции.

Этот конгресс собрал около 200 участников. А следующий, состоявшийся в 1924 г. в Канаде (Торонто), – около 400. Международный математический союз становится в это время скорее разъединяющим, чем объединяющим органом. Положение не становится лучше и ко времени международного математического конгресса (ММК) в Болонье в 1928 г. Наконец, в 1932 г. в Цюрихе число участников очередного ММК заметно превышает довоенный уровень (667 участников, представлено 40 стран); там же принимается решение ликвидировать Международный математический союз. В Германии к власти приходит Гитлер, приближается новая война. В 1936 г. на международном конгрессе в Осло участников только 487, они представляют уже не 40, а 27 стран. Следующий международный математический конгресс состоялся лишь в 1950 г.

В 1920 – 1930-е гг. быстро развивается математика в ряде стран, получивших самостоятельность после войны 1914 – 1918 гг., прежде всего в Польше и Венгрии. Одновременно (с 1920-х гг.) ослабевает математическая активность в Италии под режимом Муссолини, а в 1930-е гг. фашизм в Германии отбрасывает науку далеко назад. Эмигранты из Германии, затем из Австрии, Венгрии и других стран Центральной Европы оседают главным образом в США, значительно повышая их математический потенциал. Французская математика, потерявшая немало молодежи во время войны 1914 – 1918 гг., тоже лишается своего первенствующего положения, английская едва сохраняет свои позиции. Таким образом, к концу 1930-х гг. существенно меняется расстановка математических сил: два основных центра находятся теперь в СССР и США, Западная Европа на втором плане, продолжается медленный подъём в Японии, Индии, некоторых странах Южной Америки, в Канаде.

Университетские кафедры оставались основным видом объединения математиков для научной работы, но постепенно начинают появляться более широкие объединения – математические институты при университетах, например Институт имени Пуанкаре в Париже. В значительной мере математическим является известный исследовательский институт при Принстонском университете (США). В штатах университетов и некоторых технических вузов начинают предусматривать вакансии для математиков и механиков, освобождённых от педагогических обязанностей.

В начале 1920-х гг. Х. Бором (1887 – 1951, Дания) была создана теория по обобщению почти периодических функций. В теории целых и мероморфных функций известная законченность была достигнута благодаря работам финских математиков: Р. Неванлинны (1895 – 1980) и Л. Альфорса (1907 – 1996). Главным образом трудами немецких математиков была продвинута теория однолистных функций. Многолистные функции и соответствующие им поверхности Римана были предметом исследования советских и финских математиков. П. Монтель (1876 – 1975, Франция) ввел и широко использовал «нормальные семейства» функций.

Алгебра в новом понимании, т. е. то, что стали называть в 1920-е гг. современной алгеброй, а теперь уже снова называют просто алгеброй, стала самостоятельной дисциплиной в течение нескольких лет. В 1910 г. Штейниц выполнил работу по теории полей. В том же духе *Э. Нётер* (1882 – 1935) совместно со своими учениками в Гёттингене строит общую теорию коммутативных колец, теорию идеалов и модулей над кольцами, подвергает систематическому изучению основные проблемы некоммутативной алгебры.

Эмми Нётер

Э. Нётер принадлежат работы «Абстрактное построение теории идеалов в алгебраических числовых полях» (1923), «Некоммутативная алгебра» (1933) и др. В этом направлении интенсивно развиваются исследования советских алгебраистов, группирующихся в 1920-е гг. вокруг О.Ю. Шмидта (1891 – 1956), известного также как полярный исследователь и геофизик, молодых голландских, американских, французских математиков. Новую алгебру поддерживает Гильберт, участие в разработке её проблем принимают Г. Вейль и другие математики одного поколения с Нётер, но она до своей кончины остаётся признанной главой алгебраистов.

Биография Э. Нётер, самой известной женщины-математика XX в., которую вообще надо признать одним из самых видных математиков столетия, не лишена трагизма и даёт поучительный материал для изучения социального аспекта истории математики. Эмми Нётер была дочерью Макса Нётера (1844 – 1921) – видного математика, известного своими работами по теории алгебраических функций. Она родилась в небольшом университетском городе Эрлангене, где её отец занимал кафедру, работая бок о бок с представителем теории инвариантов Паулем Горданом, мастером алгебраической выкладки. Гордан был её первым руководителем, и диссертация, защищенная ею в 1907 г., называется «О полных системах инвариантов тернарных биквадратных форм». Но Нётер умела не только вычислять, но и мыслить понятиями, и в Гёттингене, в общении с Гильбертом, Ф. Клейном и Г. Вейлем, она постепенно вырастает в самостоятельного мыслителя-математика, систематически работает над построением абстрактной алгебры и становится главой небольшого, но сильного кружка своих последователей и учеников. Однако её замечательные работы не изменили её более чем скромного академического положения. Только в 1919 г., после падения немецкой монархии, она получила право читать лекции (в качестве приват-доцента) в Гёттингенском университете, что раньше было ей, как женщине, недоступно. В 1922 г. она достигает высшей точки своей академической карьеры в Гёттингене – становится сверхштатным профессором с весьма скромной оплатой. Большинство университетского сената не хотело включать в состав женщину, к тому же еврейского происхождения и известную своими левыми убеждениями (ее называли «красной»).

В 1915 – 1916 гг. А. Эйнштейн при построении общей теории относительности ввёл в физику риманову дифференциальную геометрию, пользуясь исчислением, которое он назвал тензорным. Тензорное исчисление, оно же абсолютное дифференциальное исчисление Риччи-Курбастро (1853 – 1925, Италия) и Т. Леви-Чивита (1873 – 1941, Италия, потом США), было разработано математиками ещё в XIX веке, но только успех теории Эйнштейна сделал его популярным. Заодно значительно оживился интерес к изучению римановых многообразий и «в себе», и путем рассмотрения их как вложенных в евклидово пространство соответствующего (большего) числа измерений.

Так была открыта новая глава в истории геометрии. Леви-Чивита ввёл в римановы геометрии простое и важное понятие параллельного переноса. Г. Вейль в связи со своими физическими концепциями разрабатывал так называемую аффинную риманову геометрию. Развитие и применение тензорного исчисления было делом геометров голландской, московской, американской школ. Велик вклад в эту область замечательного ученого Э. Картана (1869 – 1951, Франция). Он ввёл так называемые группы голономии и построил на этой основе классификацию геометрии, включающую геометрии Клейна и геометрии Римана как частный случай, обогатил математику новыми важными понятиями и многочисленными конкретными результатами.

Скрещение идей и методов алгебры, геометрии, топологии и анализа дало новую отрасль – функциональный анализ. Его старейшим разделом следует считать вариационное исчисление, которое является дифференциальным исчислением над функционалами. Построение «общего анализа» в метрических пространствах как программу, как цель мы находим в работах М. Фреше (1878 – 1973), начатых им в первом десятилетии XX в. В 1918 г. Ф. Рисс (1880 – 1956, Венгрия) показал, что все основные результаты Фредгольма по интегральным уравнениям остаются в силе для широкого класса уравнений в линейных операторах. В этой работе Рисса уже налицо то сочетание топологических, алгебраических и аналитических представлений, которое мы видим и в теории полных нормированных пространств, развитой в 1920-е гг. Стефаном Банахом (1892 – 1945, Польша) и его школой, – теории пространств Банаха.

В самых различных направлениях развивалась в рассматриваемый период и теория чисел. В арифметике алгебраических кривых, связанной с решением диофантовых уравнений, значительные успехи были достигнуты благодаря работам А. Вейля (1906 – 1998, Франция) и К.Л. Зигеля 1896 – 1981), работам, которые можно рассматривать как продолжение замечательных исследований А. Туэ (1863 – 1922, Норвегия), опубликованных в 1900-е гг. Много внимания уделяется общей теории динамических систем, которая была предметом исследования известной монографии Джорджа Дэвида Биркгофа (1884 – 1944, США), появившейся в 1927 г., доказательству «теоремы эргодичности» в различных её вариантах.

Систематизация и анализ различных типов уравнений второго порядка были перенесены на системы уравнений в основном благодаря работам Ж. Лере (1906 – 1998, Франция) и Ю.П. Шаудер (1899 – 1942 или 1943, Польша), которые начинают успешно применять топологические методы.

Ведётся работа по математической статистике и по теории вероятностей. Кроме советской школы формируется французская школа теории вероятностей, возглавляемая Э. Борелем, М. Фреше, П. Леви. В Англии и США традиционно на первом месте стоит математическая статистика (Р. Фишер, А. Вальд (1902 – 1950) и др.), теория вероятностей – на втором. Живо обсуждались принципиальные проблемы теории вероятностей, больше всего – предложенный Р. Мизесом (1883 – 1953, Германия, потом США) новый вариант частотного толкования понятия вероятности.

В годы Второй мировой войны научная деятельность математиков не прекращалась, но потери были велики. В оккупированных гитлеровцами странах почти прекратилась научная жизнь, а в Польше, Чехословакии, Югославии учёным, в том числе математикам, грозило физическое уничтожение, и погибли многие. Международное общение математиков, даже между учёными нейтральных стран, фактически прекратилось. Молодое поколение математиков в СССР, в меньшей мере – в других странах антигитлеровской коалиции, понесло значительные потери. Из-за установления фашистского режима в Германии и Италии прекратились математические исследования.

В 1950 г. собрался первый послевоенный международный математический конгресс в Гарварде (США), на котором было достигнуто соглашение о возобновлении деятельности Международного математического союза. С тех пор ММК собирались регулярно: в 1954 г. в Амстердаме, в 1958 г. в Эдинбурге, в 1960 г. в Стокгольме, в 1966 г. в Москве, в 1970 г. в Ницце, в 1978 г. в Хельсинки. Число участников уже в Гарварде превысило прежний рекорд, в Москве оно составило около 4000. Число математических публикаций в мире, начиная с 1946 г., продолжало расти по экспоненциальному закону.

Не меньшую роль, чем общие математические конгрессы, стали играть международные конференции и симпозиумы по отдельным дисциплинам и областям.

Быстрый рост математики и числа математиков связан с расширением и углублением применений математики. Процесс «математизации» различных наук и прикладных областей, достаточно чётко обозначившихся в предвоенный период, идет в нарастающем темпе. Помимо традиционных для математики областей её применения – физики, механики, астрономии, баллистики – можно указать на химию, биологию, лингвистику, психологию, целый ряд экономических и технических дисциплин. Все эти новые области применения математики означают новые взаимодействия между математикой и другими науками, приводят к новым проблемам и требуют создания новых методов. Появляются математики-инженеры, математики-экономисты и это не одиночки, как бывало в прошлом, а большие группы, активно участвующие в решении теоретических проблем.

В значительной мере восстановила свою былую славу французская математика, медленнее повышается потенциал итальянской и немецкой науки. Но продолжается процесс деевропеизации: заметным стал вклад японских учёных, укрепились математические центры Индии, Канады, Южной Америки, Китая (до «культурной революции»). Университеты Австралии и Африки тоже имеют в своем составе учёных-математиков, так что впервые в истории наука развивается на всех пяти обитаемых континентах.

Многие области математики стали самостоятельными. К их числу можно отнести кибернетику. Насколько могущественнее стала математика благодаря современной технике! К кибернетике можно отнести и тесно связанную с теорией вероятностей и математической статистикой теорию информации. Она становилась самостоятельной дисциплиной в меру выработки достаточно общих понятий (например, единица информации, информация, энтропия, негэнтропия, случайный шум и т. д.) и упрощений, сделавших возможным математизацию проблем.

Теория игр («стратегических игр»), которой занимался Э. Борель, стала развиваться после появления монографии Дж. фон Неймана и экономиста О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (1944). И эти теории находятся в прямой связи с теорией вероятностей и математической статистикой. Математическая логика тоже привлекается к исследованию этих проблем, которые ставят перед ней задачу развития многозначных и бесконечнозначных логик. Всё более расширяются связи математики с другими науками. Если раньше они ограничивались в основном механикой, астрономией, физикой, то теперь математические методы всё глубже проникают в химию, геологию, биологию, медицину, экономику, языкознание. Общеизвестна роль математики в создании новых направлений техники – радиоэлектроники, атомной энергетики, космонавтики. Старинное утверждение о том, что «математика является царицей наук», приобрело таким образом гораздо более глубокое содержание.

Тема 13. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В XXI ВЕКЕ

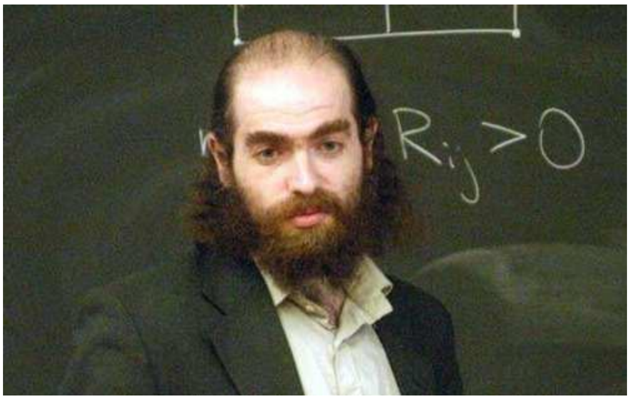
Математика способна наделять Числовой Мерой все явления жизни и по мнению академика Владимира Игоревича Арнольда – мировую математику породили три направления в науке:

Криптография – привела к созданию теории чисел, алгебры и алгебраической геометрии над конечными полями, комбинаторики и компьютеров.

Гидродинамика – комплексный анализ, уравнения в частных производных, теория групп и алгебр Ли, теория когомологий и методы вычислений.

Небесная механика – дала начало теории динамических систем, линейной алгебре, топологии, вариационному исчислению, симплектической геометрии.

Самое большое открытие в математике XXI века.



Григорий Яковлевич Перельман

Очевидно, что история пойдет о Григории Перельмане и гипотезе Пуанкаре, которая благодаря усилиям выдающегося математика стала теперь теоремой. Гипотеза Пуанкаре являлась одной из самых трудноразрешимых задач современности, с которой не могли справиться лучшие математики мира. Многие из них потратили целую жизнь на то, чтобы решить эту задачу. Но сделать это не удавалось никому. Справился с этим вопросом российский ученый.

Григорий Перельман работал в Санкт-Петербургском отделении физико-математического института имени Стеклова. Кроме того, он занимался преподаванием в американских университетах. Но в 2003 году он прекратил свою общественную деятельность и исчез из поля зрения знакомых. В этом же году он разместил на одном из американских сайтов решение загадки Пуанкаре. Нужно отметить, что эта задача является чрезвычайно сложной. И даже на понимание решения, которое привел Перельман, было затрачено довольно значительное время.

Премия и признание

За свое достижение ученому была предложена премия в один миллион долларов от математического института Клэя. Но он от нее отказался, чем вызвал сильное недоумение у общественности. Также математик был награжден медалью Филдса, которая является аналогом Нобелевской премии, которая не присуждается за математические открытия.

Открытие Перельмана является чрезвычайно важным, поскольку оно может способствовать развитию нанотехнологий. Кроме того, благодаря решению задачи Пуанкаре подтверждается гипотеза Большого Взрыва, в результате которого и произошла Вселенная.

Тема 14. МАТЕМАТИКА В РОССИИ (НАЧАЛО XIX – КОНЕЦ XX ВЕКА)

14.1. Состояние научных исследований по математике к началу XIX века

В XVIII в. в России существовало только два учебно-научных центра: Петербургская академия наук (основана в 1725 г.) и Московский университет (открыт в 1755 г.). Научную деятельность в области математики и смежных дисциплин вели Л. Эйлер и его немногочисленные ученики. В России образованных людей было ещё немного. Также не нашли непосредственного развития многие замечательные мысли М.В. Ломоносова о математике, её значении и характере её методов.

Начало XIX в. было ознаменовано ***появлением университетов***: Тартусского (1802), Вильнюсского (1803), Казанского (1804), Харьковского (1805), Петербургского (1819) и Киевского (1834). Во второй половине XIX в. были открыты ещё три университета: Одесский (1865), Варшавский (1869) и Томский (1888). Ко времени Великой Октябрьской социалистической революции в России насчитывалось всего 11 университетов (в 1909 г. был открыт Саратовский университет).

В каждом из университетов с момента его организации учреждались физико-математические факультеты и кафедры математики (в Саратовском университете это произошло лишь в 1918 г.). К середине XIX в. в университетах начала разворачиваться серьёзная научная деятельность.

Н. И. Лобачевский и открытие неевклидовой геометрии

Величайший геометр XIX в. Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде в семье мелкого чиновника. В 1802 г. он был принят в Казанскую гимназию, а в феврале 1807 г. в пятнадцатилетнем возрасте поступил в незадолго перед тем открывшийся Казанский университет.

Николай Лобачевский

В гимназии и университете у Лобачевского были хорошие наставники. Математике его первоначально обучал воспитанник Московского университета Григорий Иванович Карташевский (29 сентября 1779 – 24 августа 1840), человек большой культуры и выдающегося педагогического таланта, а с 1808 г. – профессор М.Ф. Бартельс, который привлёк молодого Лобачевского к изучению классических трудов Эйлера, Лагранжа, Монжа, Лапласа, Гаусса.

Успехи Лобачевского в занятиях были блестящие, и в 1811 г. он был произведён, минуя степень кандидата, в магистры. В 1814 г. он был назначен адъюнктом по математике в родном университете и приступил к чтению лекций. Ещё через два года ему было присвоено звание профессора. В течение 30 с лишним лет, до 1846 г., он читал все основные курсы по математике, а иногда механику, астрономию, физику.

Ряд лет Н.И. Лобачевский был деканом физико-математического факультета, с 1827 по 1846 г. – ректором университета, а затем, до своей смерти, помощником попечителя Казанского учебного округа.

Казанский университет в 1840-е гг.

Около четверти века Лобачевский стоял во главе всей учебной жизни обширного Казанского округа. Он посещал занятия в школах, вёл переписку с директорами низших и средних учебных заведений. Для учителей математики он написал «Наставление». Многим обязан Лобачевскому Казанский университет. Лобачевский поднял на новую высоту преподавание математики и естественных наук; он руководил университетским строительством: при нём были построены анатомический театр, химическая лаборатория с физическим кабинетом и библиотекой, астрономическая и магнитная обсерватории и т.д.

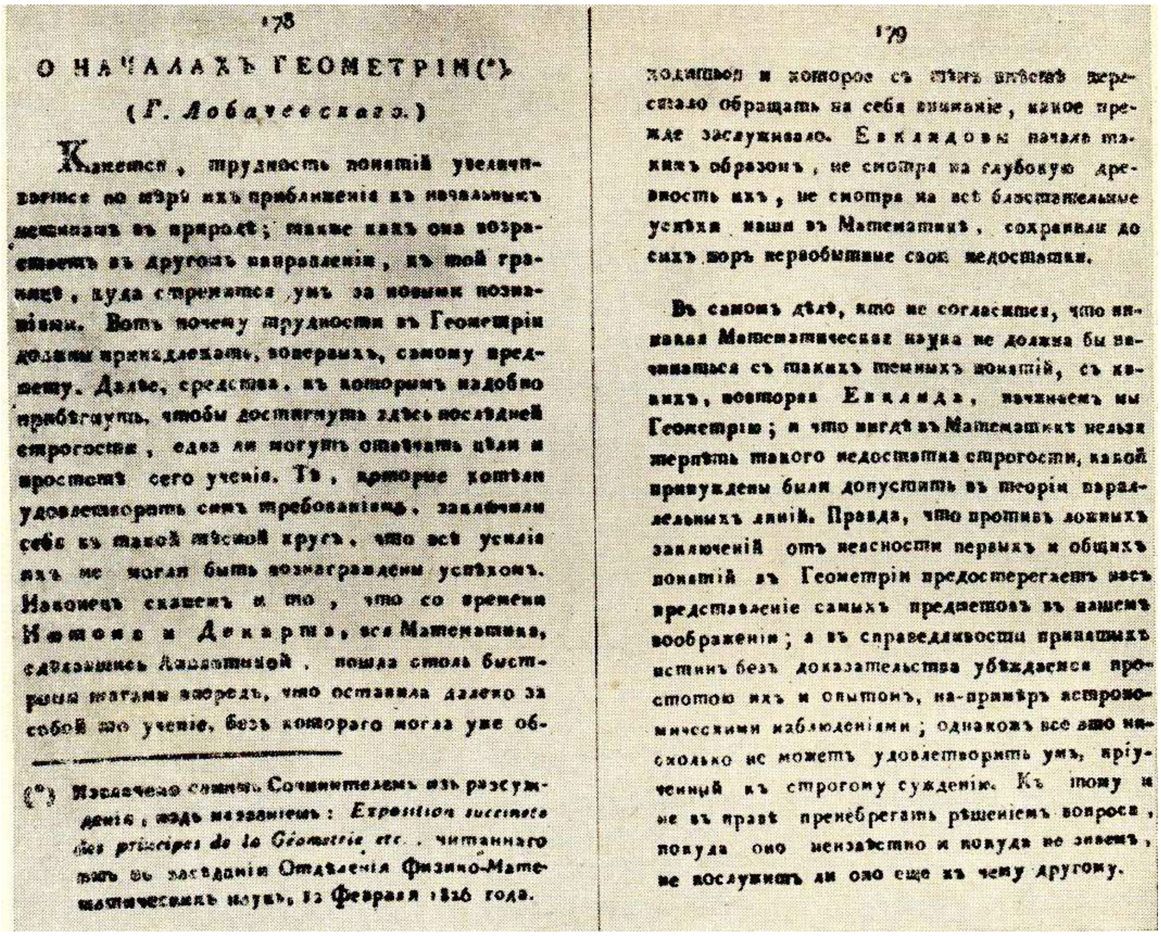
В июле 1846 г. исполнилось 30 лет работы Лобачевского в звании профессора. Согласно уставу, за этим должна была последовать отставка. Совет университета ходатайствовал перед министром просвещения об оставлении Лобачевского на кафедре ещё в течение пяти лет с тем, чтобы он мог сохранить за собой пост ректора. Министерство, однако, не сочло нужным удовлетворить просьбу Совета университета, и Лобачевский был назначен на второстепенный пост помощника попечителя Казанского округа, где его начальником оказался местный помещик генерал-лейтенант В.П. Молоствов. Отстранение от любимого дела, которому было отдано более 30 лет жизни, оскорбительное для достоинства великого учёного и педагога подчинение малокультурному Молоствову, наконец, большое личное горе – смерть в 1852 г. любимого старшего сына – всё это пагубно отразилось на здоровье Лобачевского, и ранее расстроенном непомерными трудами. Силы его начали быстро падать, заметно ослабло зрение. В последний год жизни Лобачевский ослеп и предсмертную свою работу «Пангеометрия» уже продиктовал двум своим ученикам. Скончался Лобачевский 24 февраля 1856 г.

Мировоззрение Лобачевского было материалистическим. Во взглядах на основные понятия математики, в частности геометрии, он твёрдо подчёркивал их материальное происхождение, рассматривая их как отражения реально существующих отношений вещей действительного мира. Математические абстракции не могут рождаться произвольно, они появляются как результат взаимоотношений человека с материальным миром. Научное познание имеет единственную цель: изучение реального мира. Критерием истинности научного познания является, по Лобачевскому, практика, опыт.

Лобачевский не был специалистом в узкой области математики. Его научное наследие включает в себя серьезные работы по алгебре («Алгебра или вычисление конечных», 1834 и др.) и математическому анализу («Об исчезновении тригонометрических строк», 1834; «О сходимости бесконечных рядов», 1841; «О значении некоторых определённых интегралов», 1852 и др.). Он первым ввёл различие между непрерывностью и дифференцируемостью функций, нашёл метод численного решения алгебраических уравнений, известный под его именем, и др. Однако бессмертную славу Лобачевский заслужил своими работами по геометрии. Отправным пунктом его исследований по неевклидовой геометрии была аксиома о параллельных.

Геометрия, в зависимости от того, используется ли аксиома о параллельных или нет, делится на две части. Та часть, куда входят предложения, не опирающиеся на эту аксиому, носит название абсолютной геометрии. Лобачевский, который вначале пытался дать доказательство упомянутой аксиомы, вскоре убедился в возможности расчленения геометрии на абсолютную и неабсолютную и осуществил его. Вслед за этим он попробовал заменить аксиому о параллельных её отрицанием: он предположил, что через точку, не лежащую на данной прямой, может проходить более чем одна прямая, лежащая в одной плоскости с прямой и не пересекающаяся с ней при продолжении. При этом он обнаружил, что формального противоречия не получается, а система выводов складывается в новую геометрию, отличную от евклидовой, но столь же логически строгую и последовательную, несмотря на непривычность, странность её утверждений.

Днём рождения неевклидовой геометрии можно считать 11(23) февраля 1826 г., когда на заседании отделения физико-математических наук Казанского университета Лобачевский доложил о своем сочинении «Сжатое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Через три года, в 1829 г., он издал это сочинение в расширенном виде под названием «О началах геометрии».



178

О НАЧАЛАХЪ ГЕОМЕТРІИ(*)

(Г. Лобачевскаго.)

Кажется, трудность понятій увеличивается по мѣрѣ ихъ приближенія къ начальнымъ истинамъ въ природѣ; также какъ она возрастаетъ въ другомъ направленіи, къ той границѣ, куда стремится умъ за новыми познаніями. Вотъ почему трудности въ Геометріи должны принадлежать, во-первыхъ, самому предмету. Далѣе, средства, къ которымъ надобно прибѣгнуть, чтобы достигнуть здѣсь послѣдней строгости, едва ли могутъ отвѣчать цѣли и простотѣ сего ученія. Тѣ, которые хотѣли удовлетворить симъ требованіямъ, заключили себя въ такой тѣсной кругъ, что всѣ усилія ихъ не могли быть вознаграждены успѣхомъ. Наконецъ скажемъ и то, что со времени Ньютона и Декарта, вся Математика, сдѣлавшись Аналитикой, пошла столь быстрыми шагами впередъ, что оставила далеко за собой то ученіе, безъ котораго могла уже об-

(*) Извлечено самимъ Сочинителемъ изъ разсужденія, подъ названіемъ: *Exposition succincte des principes de la Géométrie etc.*, читаннаго имъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, 12 Февраля 1826 года.

179

ходиться и которое съ тѣмъ вмѣстѣ перестало обращать на себя вниманіе, какое прежде заслуживало. Евклидовы начала такимъ образомъ, не смотря на глубокую древность ихъ, не смотря на всѣ блистательные успѣхи наши въ Математикѣ, сохранили до сихъ поръ первобытные свои недостатки.

Въ самомъ дѣлѣ, кто не согласится, что никакая Математическая наука не должна бы начинаться съ такихъ темныхъ понятій, съ какихъ, повторяя Евклида, начинаемъ мы Геометрію; и что нигдѣ въ Математикѣ нельзя терпѣть такого недостатка строгости, какой принуждены были допустить въ теоріи параллельныхъ линій. Правда, что противъ ложныхъ заключеній отъ неясности первыхъ и общихъ понятій въ Геометріи предостерегаетъ насъ представленіе самыхъ предметовъ въ нашемъ воображеніи; а въ справедливости принятыхъ истинъ безъ доказательства убѣждаемся простотою ихъ и опытомъ, на-примѣръ астрономическими наблюденіями; однакожъ все это нисколько не можетъ удовлетворить умъ, пріученный къ строгому сужденію. Къ тому же не въ правѣ пренебрегать рѣшеніемъ вопроса, покуда оно неизвѣстно и покуда не знаемъ, не послужитъ ли оно еще къ чему другому.

Две страницы сочинения «О началах геометрии» («Казанский вестник» за 1829 г.)

В последующем Лобачевский развивал свою новую геометрию, опубликовав ряд работ: «Воображаемая геометрия» (1835), «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1834 – 1838), «Геометрические исследования» на немецком языке (1840), «Пангеометрия» (1855).

Попытки доказать аксиому о параллельных приведением к противоречию возникали и до работ Лобачевского. И. Саккери (1733) даже получил ряд предложений, которые затем ошибочно признал противоречивыми, а следовательно, аксиому о параллельных – доказанной. И. Ламберт около 1766 г. (опубликовано в 1786 г.), следуя по тому же пути, не смог ни примириться с получающейся системой выводов, ни опровергнуть её. Аналогичные исследования предпринимали Ф. Швейкарт (1818) и Ф. Тауринус (1825). Однако только венгерский математик Я. Бояи (1802 – 1860) ясно выразил ту же мысль, что и Лобачевский, и к 1832 г. независимо от него развил систему неевклидовой геометрии в сочинении «Аппендикс, т.е. приложение, содержащее науку о пространстве, абсолютно истинную». После смерти Гаусса (1855) выяснилось, что тот тоже открыл начальные факты геометрии Лобачевского, но молчал о них из боязни уронить свою научную репутацию. Он даже не решился поддержать молодого Я. Бояи, когда тот прислал ему свою работу. Подлинное мужество учёного, свойственное Лобачевскому, особенно ярко проявилось в обстановке непризнания и нападок, созданной вокруг его работ, которая продолжалась до самой его смерти.

Геометрия Лобачевского в абсолютной своей части не отличается по существу от геометрии Евклида. В той же части, которая использует аксиому о параллельных, дело обстоит иначе. К этой части относятся теоремы: а) о расположении параллельных прямых; б) сумме углов в треугольниках и многоугольниках; в) площадях; г) вписанных в окружность и описанных многоугольниках; д) подобии и конгруэнтности фигур; е) тригонометрии; ж) теореме Пифагора; з) измерении круга и его частей. В этих пунктах двумерная геометрия Лобачевского отличается от евклидовой планиметрии.

На его сочинения академики (в том числе Остроградский) давали отрицательные отзывы, в печати появились пасквили на Лобачевского. Требовались незаурядное мужество и вера в научную достоверность и значимость своих исследований, чтобы противостоять этому. Лобачевский проявил необходимые качества, боролся настойчиво, но умер в 1856 г. непонятым и непризнанным.

Ф. Г. Миндинг

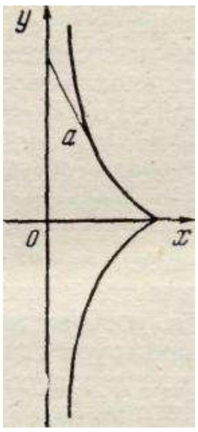
Фердинанд Готлибович Миндинг (23 января 1806 – 13 мая 1885) родился в польском городе Калише, в то время принадлежавшем Пруссии; учился он в университетах Галле и Берлина. С 1831 по 1843 г. был приват-доцентом Берлинского университета, а затем переехал на работу в Дерптский университет, где преподавал в течение 40 лет. Многие его труды опубликованы в изданиях Петербургской академии наук, членом-корреспондентом которой он состоял с 1864 г. и почётным членом – с 1879 г.

Фердинанд Миндинг

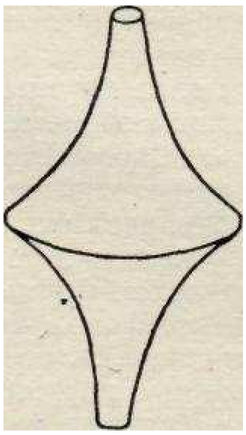
В Дерпте Миндинг занял кафедру прикладной математики и вместе с профессором кафедры чистой математики геометром К.Э. Зенфом поднял преподавание на весьма высокий уровень. Работы Миндинга разнообразны; они относятся к теории непрерывных дробей (1869), высшей алгебре, абелевым интегралам, вариационному исчислению и т. д. Главные свои открытия он сделал в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и особенно в геометрии.

Около 1840 г. Ф. Миндинг изучал поверхности постоянной гауссовой кривизны. Тригонометрия геодезических треугольников на поверхности постоянной отрицательной кривизны оказалась гиперболической тригонометрией.

За пять лет до исследований Миндинга, в 1835 г., Лобачевский в «Воображаемой геометрии» показал, что требование аксиомы параллельности можно свести к вопросу о справедливости соотношений гиперболической тригонометрии. Результат Миндинга означал, что внутренняя геометрия псевдосферы изоморфна планиметрии Лобачевского. Однако ни Миндинг, ни Лобачевский этого не заметили.



Трактриса



Псевдосфера

Впервые обнаружил этот факт итальянский геометр Е. Бельтрами. Он внимательно изучал сочинения Лобачевского по французским и итальянским переводам. При этом он увидел, что результаты одного его дифференциально-геометрического исследования содержат искомую интерпретацию геометрии Лобачевского. Бельтрами исследовал задачу картографии: отобразить поверхность на плоскость таким образом, чтобы все геодезические линии на поверхности изображались прямыми на плоскости. Он обнаружил, что такое отображение можно установить для сфер и для поверхностей постоянной отрицательной кривизны, а также нашёл среди последних псевдосферу.

Образом прямых Лобачевского явились геодезические на поверхности, а движения интерпретировались изгибаниями поверхности на себя. Бельтрами опубликовал свои результаты в 1868 г. в статье «Опыт истолкования неевклидовой геометрии». Это была первая интерпретация геометрии Лобачевского. Она произвела большое впечатление. После нее положение этой части геометрии изменилось. Сомнения в её непротиворечивости отпали, так как плоскость Лобачевского интерпретировалась на поверхности евклидова пространства.

В том же году воспитанник и профессор математики Казанского университета Эраст Петрович Янишевский (17 марта 1829 – февраль 1906) публикует «Историческую записку о жизни и деятельности Н.И. Лобачевского» (Казань, 1868) – речь, произнесенную им на торжественном собрании университета в ноябре 1868 г. (она появилась вскоре во французском и итальянском переводах).

Только в 1901 г. Д. Гильберт доказал, что в трёхмерном пространстве не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной. Поэтому осуществить интерпретацию типа Бельтрами всей плоскости Лобачевского невозможно.

Следующая по времени интерпретация, проведённая в 1871 г. Ф. Клейном в работе «О так называемой неевклидовой геометрии», основывается на введённом Кели проективном мероопределении на плоскости. Кели ввёл это понятие в 1859 г. в «Шестом мемуаре о формах».

Клейн доказал, что проективная метрика Кели, определяемая действительной кривой второго порядка, совпадает с метрикой пространства постоянной отрицательной кривизны. Теперь Клейн мог (и он именно это сделал) отобразить плоскость Лобачевского на внутренность абсолюта, например, внутрь круга. Модель Клейна явилась долгожданным полным доказательством непротиворечивости геометрии Лобачевского и наличия у неё реального смысла. После этой работы Клейна появились и продолжают появляться новые интерпретации, обнаруживая новые связи геометрии Лобачевского с другими областями математики. Например, модель А. Пуанкаре, предложенная им в 1882 г. в связи с задачами геометрической теории функций комплексного переменного.

Жизнь М. В. Остроградского

Математическая жизнь в Академии наук в середине десятых годов почти замерла и возродилась в конце двадцатых с приходом в Академию Остроградского и Буняковского, особенно первого из них.

Михаил Васильевич Остроградский родился 24 сентября 1801 г. на Украине, в деревне Пашенной Кобелякского уезда Полтавской губернии (ныне Козельщинского района Полтавской области) в семье помещика. В 1816 г. он поступил в Харьковский университет. Он был учеником прогрессивного учёного, ректора университета Т.Ф. Осиповского. В 1820 г. Остроградский успешно сдал кандидатские экзамены, и перед ним, казалось, открывалась прямая дорога к университетской профессуре. Однако острая идейная борьба, которая в те годы велась в Харьковском университете, помешала спокойному течению научной карьеры Остроградского. Т. Осиповский подверг критике идеалистическую немецкую философию, сторонники которой имелись и среди работавших в Харьковском университете иностранцев. Своё враждебное отношение к Осиповскому реакционная часть харьковской профессуры перенесла и на его лучшего ученика, также не любившего ни метафизики, ни мистики и бывшего, надо полагать, уже тогда «полным материалистом и атеистом». Когда ректор университета Осиповский предложил присвоить Остроградскому заслуженную им степень кандидата, в Совете университета произошли резкие столкновения. Один из реакционных профессоров, А.И. Дудрович, письменно донёс попечителю округа З.Я. Карнееву, что по вине Осиповского студенты-математики не занимаются богословием. Дело дошло до министра «духовных дел и народного просвещения»

А.Н. Голицына, по указанию которого Осиповский был уволен из университета, Остроградскому отказали в присуждении степени кандидата, издевательски предложив заново сдать экзамены, якобы сданные им раньше в неправильном порядке.

Остроградский мужественно перенёс эти испытания и решил несмотря ни на что посвятить свою жизнь науке. Еще в Харьковском университете его особенно увлекали вопросы прикладной математики и в 1822 г. он отправился в Париж, где работали Лаплас и Фурье, Лежандр и Пуассон, Бине и Коши и другие учёные, пролагавшие новые пути в математике, математической физике и механике.

Быстрые успехи Остроградского помогли ему завоевать дружбу и уважение многих французских математиков старшего поколения и сверстников. Парижский период явился для Остроградского не только «годами странствий и учения», но и интенсивного творчества.

Научные интересы Остроградского развивались в тесной связи с актуальными для парижских математиков проблемами. Даже большинство работ он написал и опубликовал на французском языке.

Собрание сочинений М.В. Остроградского на русском языке было издано только в 1959 – 1961 гг. Академией наук УССР.

Так же, как и его современники, Остроградский основные усилия направлял на решение прикладных проблем. Большинство его работ относилось к области механики, математической физики и связанных с ними проблем математического анализа. Кроме того, он оставил после себя работы по алгебре, теории чисел и теории вероятностей.

Центральное место в научной деятельности Остроградского занимают исследования по математической физике. Построение математической теории разных явлений природы было в центре внимания крупнейших парижских математиков в то время, когда в Париже учился Остроградский. В 1826 г. он написал первую работу (опубликована в 1832 г.), которая была посвящена задаче о распространении волн на поверхности жидкости в цилиндрическом бассейне. Несколько позже (1829) Остроградский решил ту же задачу для бассейна, имеющего форму кругового сектора.

Вернувшись в Петербург, Остроградский опубликовал «Заметку об интеграле, встречающемся в теории притяжения», где он дал оригинальный вывод уравнения Пуассона, который он нашёл и сообщил

Коши ещё в 1826 г. Вслед за тем он посвятил несколько мемуаров математической теории тепла. Здесь он развил метод Фурье для твёрдых тел в общей форме, а также впервые дал строгое решение задачи о распространении тепла в жидкости. Его заметка «О теории теплоты» (1828, опубликована в 1831 г.) содержит обобщение метода Фурье.

29 декабря 1828 г. молодой учёный был избран адъюнктом по прикладной математике, а два года спустя – выбран экстраординарным академиком и в 1831 г. – ординарным.

Многие сочинения Остроградского посвящены решению других задач математической физики: о намагничивании разобщённых брусков, о притяжении сфер и сфероидов, об интегрировании уравнений малых колебаний упругих сред и т.п.

В области математического анализа Остроградскому принадлежат большие открытия. По большей части они связаны с его прикладными работами и возникли как усовершенствования, необходимые для достаточно общей постановки задачи.

Так, например, знаменитая формула Остроградского

$$\iiint\limits_v -\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iint\limits_s -Pdydz+Qdzdx+Rdydx$$

была выведена впервые в 1828 г. Её обобщение на случай n-кратного интеграла в 1834 г. было найдено Остроградским для определения вариации кратного интеграла.

В статье «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (1836, опубликована в 1838 г.) дан метод, употребляющийся и в наше время.

Ряд статей Остроградского посвящён теории интегрирования алгебраических функций. Например, в них доказано, что алгебраический интеграл от рациональной функции может быть только рациональной функцией. Доказано также, что интеграл от алгебраической функции не может содержать ни показательных, ни тригонометрических функций. Найден способ отделения алгебраической части интеграла от рациональной дроби без оснований, теперь называемый в учебниках «правилом Эрмита».

Эти и многие другие результаты Остроградского в области теории интегрирования помимо их связи с прикладными задачами отразили новый этап развития интегрального исчисления.

Говоря о работах Остроградского по математическому анализу, нельзя не сказать о его результатах в области теории дифференциальных уравнений. В 1838 г. он опубликовал «Заметку о линейных дифференциальных уравнениях», где для уравнения вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

вывел определитель, называемый теперь детерминантом Вронского (Г. Вронский (1775 – 1853) ввёл этот детерминант в 1812 г.):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – частные интегралы уравнения.

Ранее (1835) Остроградский внёс улучшения в метод Ньютона приближённого решения системы дифференциальных уравнений.

В связи с задачей интегрирования рациональных дробей Остроградский нашёл новый способ выделения кратных корней многочленов. Его «Лекции по алгебраическому и трансцендентному анализу» (1837) сыграли большую роль в развитии математического образования в России.

В сфере научных интересов Остроградского находилась и теория вероятностей, которой он в разное время посвятил шесть статей (от 1834 до 1859 г.). В них он исследовал вопросы теории страхования, азартных игр, статистического контроля качества продукции, производящие функции и другие актуальные для его времени вопросы. Не избежал он в одной из своих работ и характерных для математиков того времени заблуждений, состоящих в необоснованном приложении соображений теории вероятностей к решению вопросов судебной практики и других специальных проблем. Другой определённой его ошибкой было пренебрежительное отношение к работам Лобачевского.

Скончался М. В. Остроградский 1 января 1862 г.

Жизнь и творчество В. Я. Буняковского

Большое значение для прогресса математики в России имела деятельность Виктора Яковлевича Буняковского (16 декабря 1804 – 12 декабря 1889). Как и Остроградский, он был родом с Украины: он родился в г. Баре Могилёвского уезда Подольской губернии (ныне Винницкой области) в семье подполковника одного из кавалерийских полков. Высшее математическое образование он получил в Париже, где в 1825 г. ему была присуждена степень доктора математики за две работы, предметом одной была теория распространения теплоты внутри твёрдых тел, а другой – задача о вращении в сопротивляющейся среде некоторой плоской системы. В Париже Буняковский познакомился с Остроградским, с которым ему пришлось впоследствии плодотворно сотрудничать.

Виктор Буняковский

В 1826 г. Буняковский вернулся в Россию и вскоре начал преподавать математику в Морском корпусе, где работал до 1864 г. В 1846 – 1860 гг. он состоял профессором Петербургского университета, читая лекции по дифференциальному и интегральному исчислению, аналитической механике, теории дифференциальных уравнений, вариационному исчислению, теории вероятностей и теории конечных разностей. Работал Буняковский и в других учебных заведениях Петербурга. В один год с Остроградским (1828) он был избран адъюнктом Академии наук и в 1830 г. – академиком. С 1864 г. он почти до самой кончины работал на посту вице-президента Академии наук.

В большом и разнородном научном наследии Буняковского (около 130 работ) имеются важные научные результаты. В трудах по теории чисел (их более 40) можно найти доказательства квадратичного закона взаимности, решение ряда задач диофантова анализа, учения о простых числах и т. д. Более 20 работ Буняковский посвятил теории вероятностей и её приложениям. Он решил многие важные задачи, возникавшие при организации страхового дела, ссудных касс, анализа народонаселения России (таблицы и эмпирическая формула смертности, подсчёты призывных контингентов и др.), промышленности. В качестве государственного эксперта по статистике и страхованию (с 1858 г.) Буняковский оказал большое содействие проникновению математических методов в практику хозяйственного строительства. В его сочинении «Основания теории вероятностей» (1846) охвачены все отделы теории вероятностей и её приложений, оно явилось первым большим руководством по этой науке в России.

Теории вероятностей и статистике Буняковский посвятил около 20 работ 1835 – 1876 гг., а с 1858 г. он состоял правительственным экспертом по этим вопросам. Математик не получил существенных оригинальных результатов в теории вероятностей, но в целом очень много сделал для развития этой науки в России. Современники высоко ценили его заслуги.

В работах Буняковского по анализу решено большое число конкретных задач в части теории интегрирования, сходимости рядов и т. д. Ему, в частности, принадлежит (1859) честь открытия известного неравенства

$$[\int_a^b f(x)\phi(x)dx]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b \phi^2(x)dx -,$$

которое иногда называют неравенством К. Шварца, хотя последний нашёл и опубликовал его лишь через 16 лет после Буняковского. Его геометрические исследования в основном посвящены проблемам оснований геометрии. Он тщательно исследовал историю доказательств постулата о параллельных, обнаружил несовершенства всех этих доказательств. Однако к работам Лобачевского Буняковский отнёсся отрицательно, разделив ошибку Остроградского, и продолжал искать логически строгое доказательство постулата. Неевклидова геометрия представлялась ему логически немыслимой.

Деятельность Остроградского и Буняковского, их учеников, многие из которых стали крупными специалистами в различных областях математики и техники, определила новый подъём математики в России, особенно в Петербурге. Начал складываться коллектив творчески работающих математиков, ведущее место в котором к концу жизни Остроградского занял приехавший из Москвы П.Л. Чебышев.

Жизнь П. Л. Чебышева

Крупнейший наряду с Н.И. Лобачевским русский математик XIX в. Пафнутий Львович Чебышев (по его собственному указанию надо произносить Чебышóв) родился 16 мая 1821 г. в сельце Окатово Боровского уезда Калужской губернии, где его отец имел небольшое поместье. Когда мальчику было около 10 лет, семья переехала в Москву. Здесь он получил домашнее образование и в 1837 г. поступил на физико-математический факультет университета, который окончил в 1841 г. кандидатом. Ещё при переходе на второй курс он написал свою первую работу о вычислении корней уравнений. За это сочинение Чебышев был награждён на конкурсе 1841 г. серебряной медалью; впрочем, оно было вполне достойно золотой.

Пафнутий Чебышев

Вскоре после окончания университета Чебышев опубликовал две первые свои работы по анализу, а именно «Заметку об одном классе кратных определённых интегралов» (в журнале Лиувилля, 1843) и «Заметку о сходимости ряда Тейлора» (в журнале Крелле, 1844). Два следующих сочинения московского периода были посвящены теории вероятностей. Одним из них явился «Опыт элементарного изложения теории вероятностей» (1845), задуманный как руководство для студентов Демидовского лицея в Ярославле, где преподавание имело юридический уклон. Летом 1846 г. Чебышев защитил «Опыт…» в качестве магистерской диссертации, оппонентами выступили Н.Е. Зернов и Н.Д. Брашман.

Продолжением диссертации явилась работа «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей», именно закона больших чисел Пуассона.

В Москве же П.Л. Чебышев написал свою первую работу по теории алгебраических функций. Это сочинение «Об интегрировании с помощью логарифмов», подготовленное (быть может, в первом варианте) в конце 1843 г., легло в основу его диссертации на право чтения лекций в Петербургском университете.

Николай Зернов

Николай Брашман

Первое место среди учителей Чебышева принадлежало Н.Д. Брашману. Великий математик сам засвидетельствовал это в заметке «Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей».

В 1847 г. Чебышев переехал в Петербург. Весной он защитил в Петербургском университете только что упоминавшуюся диссертацию на право чтения лекций, вскоре был утверждён доцентом и в сентябре начал первые свои учебные курсы – по алгебре и теории чисел (последний он читал в течение 35 лет).

Буняковский и Чебышев в короткие сроки подготовили полное собрание трудов Эйлера по теории чисел и подробный систематический указатель к нему. Двухтомник «Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae», в который вошли и многие неопубликованные заметки и фрагменты сочинений Эйлера, увидел свет уже в 1849 г. Одновременно появилась докторская диссертация Чебышева – замечательное по оригинальности построения и выводов изложение теории сравнений, содержавшее многие собственные результаты автора. Благодаря своим высоким достоинствам «Теория сравнений» Чебышева, защищённая в Петербургском университете 15(27) мая 1849 г. и через несколько дней отмеченная Демидовской премией Академии наук, десятки лет служила основным университетским руководством предмета. Она была переиздана в 1879 и 1907 гг., переведена на немецкий язык в 1888 г. и на итальянский в 1895 г. В приложении к «Теории сравнений» вышел знаменитый мемуар Чебышева «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», французский перевод которого в записках Академии наук (1848, опубликован в 1851) и в журнале Лиувилля (1852) обратил на себя внимание всего учёного мира. За этим в 1850 г. последовал непосредственно примыкающий к предыдущему мемуар «О простых числах», напечатанный прежде всего в журнале Лиувилля (1852). Ещё несколько статей по теории чисел появилось тогда же. Впоследствии Чебышев обращался к теории чисел редко.

В 1850 г. П.Л. Чебышев был избран экстраординарным профессором Петербургского университета и в 1860 г. – ординарным. Это десятилетие было временем интенсивной деятельности его в различных направлениях. В 1849 – 1851 гг. Чебышев читал на «реальном отделении» Петербургского университета курс практической (прикладной) механики, в 1852 – 1856 гг. – и в Александровском лицее, который был открыт в 1811 г. в Царском Селе и в котором некогда учился А.С. Пушкин.

Откликаясь на нужды Родины, Чебышев в самом начале 1856 г. приступил к работе в Артиллерийском отделении Военно-ученого комитета, а через несколько недель принял на себя также и обязанности члена Учёного комитета Министерства народного просвещения, которые с усердием выполнял до 1873 г. Работа Чебышева в Артиллерийском комитете, продолжавшаяся до 1869 г., имела серьезное значение для баллистики и вообще для артиллерийской науки. Например, в 1867 г. Чебышев вывел хорошо согласовавшуюся с опытами приближённую формулу дальности полета в воздухе сферических снарядов с начальными скоростями, не превосходящими некоторого предела. Его математические консультации широко использовал, между прочим, крупнейший русский баллистик Николай Владимирович Маиевский (1823 – 1892), бывший питомец Московского университета, а с 1878 г. – член-корреспондент Академии наук. С занятиями артиллерией, а именно с вопросом о составлении таблиц стрельбы по опытным данным, отчасти связаны были важные работы Чебышева по теории интерполирования.

Начиная с 1853 г. Чебышев всё чаще обращается к теории механизмов и теории приближения функций. Он исследовал свойства и нашёл вид целого класса специальных полиномов, носящих его имя и в наши дни. Полиномы Чебышева, Чебышева – Лагерра, Чебышева –

Эрмита и их разновидности играют большую роль в математике, имея многообразные приложения. Не говоря о кинематике механизмов, послужившей исходным пунктом чебышевской теории наилучшего приближения, последняя прилагается к решению алгебраических уравнений, интерполяции, приближённым квадратурам, геодезическим и картографическим задачам и т. д.

В теории Чебышева наилучшего приближения функций содержатся идеи общей теории ортогональных многочленов, теории моментов и моментов квадратур.

Исследование расположения простых чисел в натуральном ряде привело к появлению работ Чебышева о теории квадратичных форм. В 1866 г. вышла его статья «Об одном арифметическом вопросе», посвящённая диофантовым приближениям, т. е. приближенному целочисленному решению диофантовых уравнений, что он проделал с помощью аппарата непрерывных дробей.

Идеи Чебышева в области теории чисел разрабатывали его ученики: А.Н. Коркин, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной, И.М. Виноградов и др.

Чебышев написал всего четыре работы по теории вероятностей (1845, 1846, 1867, 1887), но, по всеобщему признанию, они вывели теорию вероятностей снова в ранг математических наук, послужили основой для создания целой математической школы.

В дальнейшем Чебышев расширил аппарат теории вероятностей с помощью алгебраических непрерывных дробей, свойства которых он вначале изучил в связи с задачами об интегрировании алгебраических функций. На базе алгоритма непрерывных дробей он построил общую теорию разложения произвольной функции в ряд по ортогональным полиномам. Дополнив аппарат строгим определением свойств математических ожиданий и других определений и рассуждений, Чебышев в 1866 г. нашёл доказательство закона больших чисел – метод, известный в современной литературе как метод моментов.

Ряд статей Чебышева посвящён теории интегрирования. В них речь идет об интегрировании алгебраических иррациональностей и методах приближённого вычисления определённых интегралов. Здесь ему принадлежит окончательное решение вопроса об условиях интегрируемости дифференциального бинома в элементарных функциях:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

где m, n, p – рациональные числа.

Именно он установил, что найденные ещё в XVIII в. случаи интегрируемости (p – целое число; $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ – целые числа) являются единственно возможными.

Помимо печатных трудов Чебышева, большую роль в распространении его влияния, и особенно в создании его школы, сыграла педагогическая работа учёного в Петербургском университете. Чебышев был не только вдохновляющим лектором, но и замечательным научным руководителем. Он помогал студентам и начинающим учёным ценными советами, предлагал им темы для самостоятельного изучения, обещавшие привести к важным и интересным результатам, рецензировал конкурсные студенческие сочинения, магистерские и докторские диссертации. Раз в неделю Чебышев принимал у себя дома всех желающих получить совет.

Непосредственными учениками Чебышева были А.Н. Коркин, Ю.В. Сохоцкий, Е.И. Золотарёв, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, И.Л. Пташицкий, И.И. Иванов, К.А. Поссе, Д.А. Граве, Г.Ф. Вороной, А.В. Васильев и еще ряд математиков.

Чебышев и его ученики образовали ядро научного коллектива математиков, за которым в литературе упрочилось название Петербургской математической школы. Коллектив этот в 1890 г. организовал Петербургское математическое общество, которое функционировало до 1905 г.

А. И. Коркин и Е. И. Золотарёв

Новые успехи русских математиков в теории чисел были достигнуты прежде всего А.Н. Коркиным и Е.И. Золотарёвым. *Александр Николаевич Коркин* (3 марта 1837 – 1 сентября 1908) был старшим из учеников Чебышева. Он происходил из зажиточной крестьянской семьи Вологодской губернии. Петербургский университет Коркин окончил в 1858 г. и преподавал в нём с 1860 по 1908 г., причём с 1868 г. в звании профессора. Более 30 лет он состоял также профессором Морской академии, где его сменил в 1900 г. его ученик А.Н. Крылов.

Глубокий знаток классиков математики, от Эйлера до Дирихле, Коркин, подобно Чебышеву, не ценил исследований Римана и Вейерштрасса, казавшихся ему «декадентскими». Работы Коркина относятся к двум областям: дифференциальным уравнениям и теории чисел. К первой области принадлежат обе его диссертации – магистерская «Об определении произвольных функций в интегралах линейных уравнений с частными производными» (1860), высоко оценённая в официальном отзыве Чебышева, и докторская «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и о некоторых вопросах механики» (1868), а также ряд статей. Коркину принадлежат ценные работы в теории чисел. Они были проведены им вместе с Е.И. Золотарёвым, который вначале слушал у него лекции, а затем стал его сотрудником и другом.

Александр Коркин

Егор Иванович Золотарёв родился 12 апреля 1847 г. в Петербурге, где отец его, часовщик, держал небольшой магазин. После окончания пятой гимназии, одной из лучших в столице по составу учителей (физику в ней преподавал, например, К.Д. Краевич (1833 – 1892), автор популярнейшего до революции учебника), Золотарёв в 1863 г. поступил в Петербургский университет. Физико-математический факультет он окончил в 1867 г.; здесь главными его учителями были Чебышев, Сомов, Коркин.

Егор Золотарёв

Осенью 1868 г. Золотарёв защитил диссертацию на право чтения лекций по теории наилучшего приближения функций, с успехом прочитал две пробные лекции и начал работу в Петербургском университете в качестве приват-доцента. Через год он сдал магистерские экзамены и защитил магистерскую диссертацию «Об одном неопределённом уравнении третьей степени» (1869), получившую хорошую оценку оппонентов – П.Л. Чебышева и Ю.В. Сохоцкого. В это же время он начал преподавать вначале механику, а затем и математику в Институте инженеров путей сообщения.

В университете он читал теорию эллиптических функций, анализ, механику, алгебру и впервые курс введения в анализ.

Вскоре Золотарёв вместе с Коркиным занялся теорией минимумов квадратичных форм. Их совместные статьи печатались на протяжении 1872 – 1877 гг. Параллельно Золотарёв разрабатывал теорию алгебраических чисел и в 1874 г. защитил в качестве докторской диссертации главный свой труд в этой области – «Теорию целых комплексных чисел с приложениями к интегральному исчислению» (1874). Оппонентами были Чебышев и Коркин. В апреле 1876 г. Золотарёв получил в Петербургском университете место профессора и в том же году, в декабре, был избран членом Академии наук в звании адъюнкта на место, освободившееся после кончины О.И. Сомова.

В начале июля 1878 г. Е.И. Золотарёв попал под поезд и 19 июля скончался от заражения крови всего 31 года от роду.

А. А. Марков

Андрей Андреевич Марков был одним из лучших учеников Чебышева. Родился Марков в Рязани 14 июня 1856 г. Отец его вначале служил в Лесном департаменте, а затем работал в качестве частного поверенного. В начале 1860-х гг. семья переехала в Петербург, и когда мальчику исполнилось десять лет, его определили в гимназию, ту самую, в которой ранее обучался Золотарёв. Любимым предметом Маркова стала математика, другие его мало интересовали. Он самостоятельно изучал высшую математику и сам нашёл один способ интегрирования обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Андрей Марков

В 1874 г., по окончании гимназии, А.А. Марков поступил в Петербургский университет, где слушал лекции Чебышева, Коркина и Золотарёва и работал под руководством двух последних в студенческом кружке. В 1878 г. ему была присуждена золотая медаль за сочинение «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей». В том же году

Марков окончил физико-математический факультет со степенью кандидата и, по представлению Коркина (Золотарёва уже не было в живых), был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Всего через два года Марков защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» (1880), примыкавшую к работам Коркина и Золотарёва. Это сочинение высоко оценил Чебышев.

В год защиты диссертации Марков приступил к преподаванию в Петербургском университете в должности приват-доцента. Вскоре теория непрерывных дробей получила новое развитие и применение в докторской диссертации Маркова «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей» (1884).

Два года спустя Марков был избран профессором университета и, по предложению Чебышева, адъюнктом Академии наук. В 1890 г. он был выбран экстраординарным академиком, в 1896 г. – ординарным.

В области теории зависимых случайных величин, которую Марков систематически и глубоко разрабатывал до самого конца жизни, ему принадлежат открытия непреходящего значения. Марковские цепи и обобщающие их марковские процессы известны теперь каждому математику и физику.

В 1905 г. Марков по собственному желанию вышел в отставку в университете со званием заслуженного профессора: он не желал занятием штатной должности загораживать путь другим, более молодым людям.

Тяжелое заболевание особенно обострилось в 1920 – 1921 гг., когда А.А. Марков в последний раз читал лекции по любимому предмету и готовил новое издание своего труда «Исчисления вероятностей». Он скончался 20 июля 1922 г.

А.А. Марков был решительным атеистом. Ярким свидетельством этого является его требование об отлучении его от церкви, которое он выразил в специальном прошении от 12 февраля 1912 г. (ст. ст.). Текст прошения весьма примечателен: «Честь имею покорнейше просить Святейший Синод об отлучении меня от церкви!».

В. А. Марков

В 1887 г. знаменитый химик Д.И. Менделеев (1834 – 1907) в труде «Исследование водных растворов по удельному весу» поставил задачу, явившуюся отправным пунктом новых исследований по теории приближения функций.

В статье «Об одном вопросе Д.И. Менделеева» (1889) А.А. Марков, обобщая задачу Менделеева на многочлены высших степеней, изучил связи между предельными значениями многочленов и их производных.

Задача Менделеева – Маркова была распространена на высшие производные братом академика – Владимиром Андреевичем Марковым, чрезвычайно даровитым математиком, скончавшимся от туберкулеза всего 26 лет от роду (19 мая 1871 – 30 января 1897). В работе «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке» (СПб., 1892), написанной незадолго до окончания университета, В.А. Марков дал решение вопроса об определении по уклонению многочлена верхнего предела значений его производной любого порядка.

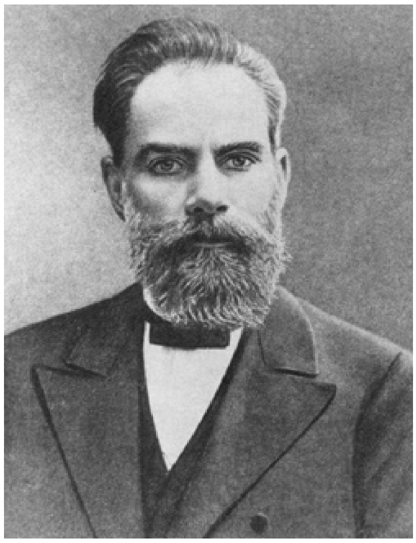
Владимир Марков

В.А. Марков далеко продвинулся в решении общей проблемы и, в частности, решил вопрос об отыскании наименее уклоняющегося от нуля многочлена данной степени с одним заданным коэффициентом при любой степени переменного. В своём труде В.А. Марков, подобно Чебышеву, решает задачи алгебры.

Жизнь А. М. Ляпунова

Александр Михайлович Ляпунов родился 6 июня 1857 г. в Ярославле в семье директора Демидовского лицея, астронома М.В. Ляпунова, ранее работавшего в Казанском университете. Два младших брата А.М. Ляпунова также приобрели большую известность: Сергей Михайлович (1859 – 1924) как композитор, Борис Михайлович (1864 – 1942) как филолог-славист.

Окончив гимназию в Нижнем Новгороде, А.М. Ляпунов в 1876 г. поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. По рекомендации своего руководителя профессора механики Д.К. Бобылёва (1842 – 1917) Ляпунов в 1880 г. был оставлен при кафедре механики для подготовки к званию профессора. Наибольшее впечатление в университетские годы на Ляпунова произвели лекции Чебышева.



Александр Ляпунов

Этот замечательный ученый поставил перед Ляпуновым задачу, из которой выросла магистерская диссертация «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884).

Защитив в 1885 г. диссертацию, Ляпунов перешёл в Харьковский университет, где приступил к чтению лекций по механике вместо избранного академиком В.Г. Имшенецкого.

Активная педагогическая работа и исключительно тщательная подготовка лекций недолго мешали научным занятиям молодого доцента. Два года спустя он приступил к разработке новой области – теории устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы и уже в 1888 г. опубликовал свою первую статью по этому вопросу. В 1892 г. при оппонентах Н.Е. Жуковском и Б.К. Млодзеевском Ляпунов защитил в Московском университете докторскую диссертацию «Общая задача об устойчивости движения» (1892), принадлежащую к числу наиболее выдающихся достижений математической мысли XIX века.

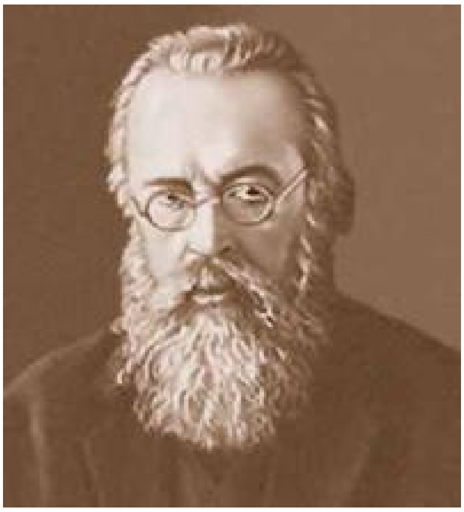
По возвращении в Харьков Ляпунов продолжал чтение лекций по различным предметам. В 1893 г. он был утверждён профессором. Чтение курса теории вероятностей явилось одним из поводов для написания замечательных книг 1900 – 1901 гг. о центральной предельной теореме. Он работал также над вопросами математической физики и значительно продвинул дальнейшее исследование теории потенциала.

В октябре 1901 г. Ляпунов, в начале того же года выбранный членом-корреспондентом Академии наук, был избран академиком по кафедре прикладной математики, остававшейся вакантной в течение семи лет после кончины Чебышева. Нельзя было найти более достойного преемника по академической кафедре для основателя и главы петербургской школы. Весной следующего года Ляпунов переехал в Петербург. Здесь он уже более не преподавал, а занялся научной работой, главным образом общей проблемой фигур равновесия вращающейся жидкости, связанной с тем вопросом, который поставил перед ним Чебышев в начале его научной деятельности.

Летом 1917 г. ввиду обострения туберкулеза у его жены, племянницы И.М. Сеченова, Ляпунов переехал на юг, в Одессу. В день кончины жены он попытался застрелиться. В своей предсмертной записке он просил похоронить себя в одной могиле с женой. Через три дня, 3 ноября 1918 г., Ляпунов скончался. Заслуги его перед наукой и Родиной поистине огромны.

Жизнь В. А. Стеклова

Владимир Андреевич Стеклов, сын преподавателя Нижегородской духовной семинарии и по матери племянник Н.А. Добролюбова, родился



Владимир Стеклов

в Нижнем Новгороде 9 января 1864 г. Он поступил на физико-математический факультет Харьковского университета в 1883 г., где с третьего курса стал заниматься под руководством А.М. Ляпунова. Именно он оказал решающее влияние на выбор Стекловым области исследований. После окончания в 1887 г. Харьковского университета Стеклов был оставлен на кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. За магистерской диссертацией «О движении твёрдого тела в жидкости» (1893), защита которой состоялась в 1894 г., последовал ряд исследований по математической физике, ставшей затем его главной специальностью. Некоторые мемуары в этой области и особенно докторская диссертация по прикладной математике («Общие методы решения основных задач математической физики» (1901), защищенная в 1902 г.) принесли Стеклову большую известность, и в начале 1903 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук.

В 1891 г. Стеклов стал приват-доцентом, а в 1896 г. – профессором Харьковского университета. В 1902 – 1905 гг. он состоял председателем Харьковского математического общества (до него этот пост занимал Ляпунов). Он был избран деканом факультета, участвовал в составлении нового университетского устава. В 1906 г. после выхода в отставку А.А. Маркова Стеклов возглавил кафедру математики в Петербургском университете, где воспитал многих учеников, ставших впоследствии крупными учёными. Более того, он создал здесь новую ветвь петербургской математической школы, выросшую затем в большую советскую школу математической физики.

В 1910 г. Стеклов был избран адъюнктом Академии наук, а летом 1912 г. – ординарным академиком.

В Петербургском университете Стеклов вёл научную и учебную работу. Детищем В.А. Стеклова был Физико-математический институт, созданный в 1921 г. и впоследствии разделенный на три, из которых Математический институт – крупнейший в своей области научный центр – носит его имя.

Стеклов был одним из замечательных математиков, работавших в тех областях своей науки, которые непосредственно связаны с естествознанием. Искренний и горячий патриот, он был большим знатоком и любителем русской культуры и истории. Умер Стеклов 30 мая 1926 г.

Важнейшие труды Стеклова посвящены математической физике. Особенное внимание учёных в конце XIX в. привлекали: задача об определении поверхностной плотности электричества, находящегося в равновесии на данной проводящей поверхности; задача об определении электростатического потенциала внутри данной поверхности по его известным значениям на самой поверхности, при условии, что внутри поверхности заряды отсутствуют; задача гидромеханики, состоящая в исследовании установившегося (не зависящего от времени) движения жидкости, обтекающей данное твёрдое тело.

Исследования Стеклов подытожил в докторской диссертации 1901 г., полное название которой – «Общие методы решения основных задач математической физики. Задача о распределении электричества. Основная задача гидродинамики. Задача об установившейся температуре. Задачи Дирихле (метода К. Неймана) и Гаусса. Фундаментальные функции и их приложения».

Работы В.А. Стеклова по теории замкнутости и разложениям функций продолжались три десятилетия: две последние вышли в год его кончины. Уже посмертно увидели свет «Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений» (1927). Сочинение по теории квадратур также относится к последнему десятилетию жизни В.А. Стеклова.

Проблемы, которые трактовались в работах Владимира Андреевича, были актуальными проблемами не только для его времени. И сейчас проводятся многочисленные исследования по теоремам разложения. Теория функций вещественного переменного и функциональный анализ подвели общую теоретическую базу и раскрыли новые перспективы для исследования различных функциональных пространств. Работы Владимира Андреевича с введёнными в них операциями замыкания и усреднения немало способствовали развитию этих новых областей математики.

С. В. Ковалевская

Выдающийся математик Софья Васильевна Ковалевская родилась 15 января 1850 г. в семье богатого помещика, отставного генерал-лейтенанта В.В. Корвин-Круковского; её прадедом с материнской стороны был академик Шуберт. Уже в детские годы она проявила интерес к математике и полюбила эту науку. Передовые общественные идеи 1860-х гг. оказали на юную Ковалевскую сильное влияние, прежде всего через её старшую сестру Анну Васильевну (1843 – 1887), впоследствии писательницу и активную участницу Парижской коммуны, членом правительства которой был муж Анны Васильевны В. Жаклар. Ещё молодой девушкой С.В. Ковалевская прониклась глубоким сочувствием к борьбе лучших представителей русской интеллигенции с самодержавным крепостническим строем и к идеям утопического социализма. Возмущало её неравноправное положение женщин, с которым ей пришлось рано познакомиться на собственном опыте.

Софья Ковалевская

Первые уроки высшей математики Ковалевской давал талантливый педагог Александр Николаевич Страннолюбский (10 февраля 1839 – 19 мая 1903), поклонник Чернышевского и Писарева, позднее – один из организаторов Высших женских курсов в Петербурге, открывшихся в 1878 г. Доступ в университеты был женщинам запрещён. Для получения высшего образования Ковалевская решила уехать за границу. Для того чтобы освободиться от отцовской власти, она вступила в фиктивный брак с В.О. Ковалевским, впоследствии знаменитым палеонтологом (1842 – 1883). В 1869 г. она отправилась в Германию. Постепенно она полюбила своего мужа, и брак перестал быть фиктивным.

Вскоре математическим образованием Ковалевской взялся руководить крупнейший немецкий математик того времени Вейерштрасс. Занятия её шли успешно, и она часто поражала своего учителя быстротой и оригинальностью мысли. В 1874 г. Вейерштрасс направил в Гёттингенский университет три работы Ковалевской, за которые ей была присвоена степень доктора философии «с высшей похвалой». Одна из них была посвящена общей теории уравнений с частными производными (опубликована в 1875), другая – приведению некоторого класса абелевых интегралов к эллиптическим (опубликована в 1884) и третья – дальнейшей разработке исследования Лапласа о форме кольца Сатурна, рассматриваемого как жидкое (опубликована в 1885) – одному из вопросов теории формы небесных тел, которую несколько позднее стал разрабатывать А.М. Ляпунов. Во всех трёх работах широкое применение получали методы и теоремы Вейерштрасса. Вернувшись в 1874 г. на родину, Ковалевская завязала знакомство с Чебышевым, Жуковским и другими учёными.

Но все усилия Ковалевской получить работу по специальности оставались тщетными: женщине в царских университетах места не было. Министр просвещения отказал ей даже в праве держать магистерские экзамены при Московском университете. Математические занятия Ковалевской стали менее интенсивными.

Весной 1883 г. трагически скончался В.О. Ковалевский, и Софья Васильевна с маленькой дочерью оказалась в трудном материальном положении. В это время она получила от шведского математика Г. Миттаг-Леффлера приглашение на должность доцента в незадолго перед тем открытый Стокгольмский университет и в ноябре того же года переехала в Стокгольм.

Ковалевская вновь с энергией взялась за научную работу. В 1884 г. она состоит уже профессором – первым в мире профессором математики среди женщин.

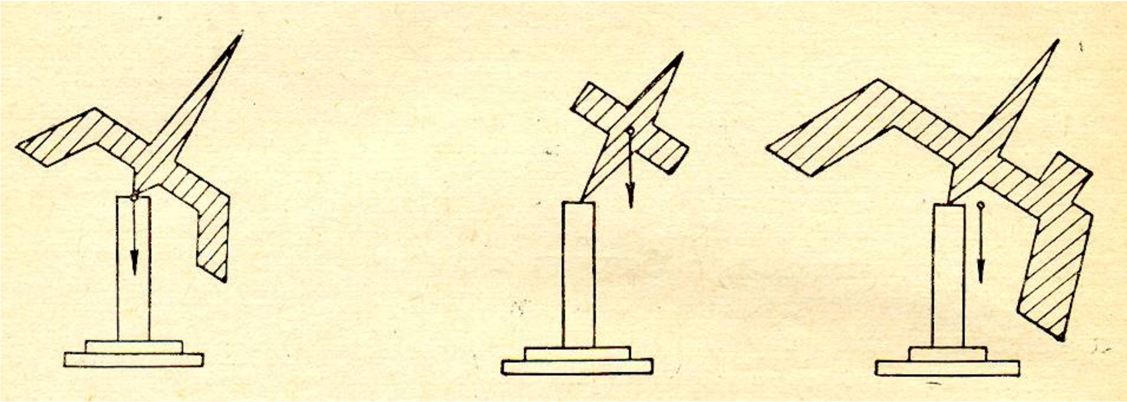
Перед ней открылись возможности для научной работы. Год за годом она читала курсы лекций. Их высокий научный уровень и педагогическое мастерство лектора вызывали благожелательные отклики. Известно, что С.В. Ковалевская читала следующие курсы: теория дифференциальных уравнений с частными производными (1884, 1890), вейерштрассова теория алгебраических (1885), абелевых (1885 – 1887), эллиптических (1888) и тета-функций (1888), теория потенциала (1886), теория движений твёрдого тела (1886 – 1887), качественная теория дифференциальных уравнений по Пуанкаре (1887 – 1888), аналитические методы теории чисел (1890) и др.

По предложению Миттаг-Леффлера Ковалевская вошла в состав редакции основанного им в 1882 г. журнала Acta mathematica.

1888 год стал для С.В. Ковалевской годом подлинного научного триумфа: ей присуждают премию Парижской академии наук за лучшую работу о вращении твёрдого тела; при этом премия была почти вдвое увеличена. Работа была представлена под девизом «Говори, что знаешь; делай, что обязан; будь, чему быть».

В 1889 г. Ковалевская получила премию Шведской академии за вторую работу, где доказывается, что уравнения движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки в общем случае не имеют однозначных решений с пятью произвольными постоянными и на всей комплексной плоскости в качестве особых точек содержат только полюса. Первый из таких случаев, когда центр движения находится в неподвижной точке, был исследован Эйлером и Пуансо; второй случай выделил и разрешил Лагранж; третий случай разрешила Ковалевская.

Весьма наглядную и простую иллюстрацию случаев Эйлера, симметричного гироскопа Лагранжа и несимметричного гироскопа Ковалевской предложил Н.Е. Жуковский (см. рисунок).



Гироскопы, соответствующие случаям Эйлера, Лагранжа и Ковалевской (по Н. Е. Жуковскому)

Эти исследования принесли Ковалевской мировую славу. По предложению Чебышева, Имшенецкого и Буняковского Петербургская академия наук вынесла специальное решение о допущении женщин к избранию в члены-корреспонденты, и 7(19) ноября 1889 г. Ковалевской присудили это почётное звание.

Ковалевская продолжала мечтать о возвращении на родину, живя и работая в Стокгольме. Хлопоты в этом направлении, к сожалению, не увенчались, успехом. Скончалась Софья Васильевна 10 февраля 1891 г. в расцвете сил на 42-м году жизни от воспаления лёгких. Похоронена в Стокгольме, на Северном кладбище.

Основной математический результат исследований Ковалевской содержится в одной из трёх работ, поданных ею на соискание докторской степени: «К теории дифференциальных уравнений в частных производных» (Zur Theorie der partiellen Differential – Gleichungen, Crelle's Journal, 1875) – работе, которую Э. Пикар назвал впоследствии классической. Это известная теорема Ковалевской о существовании решений нормальной системы уравнений с частными производными. Теорему Ковалевской теперь изучают студенты-математики. Дальнейшим исследованием задачи Коши в тех или иных условиях занимались многие крупные ученые.

14.2. Возникновение московской математической школы

Рассмотрим основные этапы формирования Московской математической школы. В отличие от Петербургской школы, где средоточием математических исследований являлась Академия наук, математики Москвы группировались вокруг университета. Историю математики в XIX в. в Москве следовало бы начинать с 1804 г., с момента организации физико-математического факультета и кафедр чистой и прикладной математики. Первая половина века характеризуется в основном постепенным повышением уровня преподавания, ростом квалификации профессоров и преподавателей. В трудных условиях самодержавного гнёта медленно росло и количество студентов: за 11 лет (1825–1836) физико-математический факультет окончило 119 человек, т. е. в среднем около 11 человек в год; за следующие 18 лет (1837–1854) его окончило уже 453 человека, что составляет около 25 человек в год. Возможности применения научных талантов были весьма ограниченными. Тем не менее из выпускников Московского университета за полстолетия вышло немало выдающихся учёных: академики П. Л. Чебышев, И. И. Сомов, Ф. А. Бредихин, профессоры В. Я. Цингер, А. Ю. Давидов, М. Ф. Хандриков, Н. А. Любимов, А. Г. Столетов и др.

В 1811 г. в Москве была предпринята попытка создать первое в России математическое общество. Инициатором был подполковник Н. Н. Муравьёв. Целью общества, как было указано в его уставе, было распространение математических наук. Впрочем, практически дело свелось к обучению прикладным военным наукам. Через пять лет, в 1816 г., на базе общества выросло военно-учебное заведение, готовящее офицеров генерального штаба. В 1826 г. оно было переведено в Петербург.

Перелом в налаживании серьезной научной деятельности в Москве наметился лишь в 60-е годы XIX в. Он целиком связан с организацией Московского математического общества.

Московское математическое общество начало свою деятельность в 1864 г. Вначале это была небольшая группа учёных, преимущественно преподавателей университета, собиравшихся на квартире у всеми уважаемого учителя многих из них, профессора Н. Д. Брашмана (1796 – 1866), ушедшего в этом же, 1864, году в отставку.

На первом заседании, 15 сентября 1864 г., Н. Д. Брашман был избран президентом общества, А. Ю. Давидов – вице-президентом. Было решено, что целью нового общества будет взаимное содействие в занятиях математическими науками. Для этого все 13 членов общества поделили между собой отрасли физико-математических наук, чтобы следить за их успехами и развитием и сообщать о них на заседаниях. По математике эти реферативные задания распределились таким образом (формулировки сохранены): А. Ю. Давидов – интегрирование уравнений с частными дифференциалами; А. В. Летников – дифференциальные уравнения; Н. Н. Алексеев – интегрирование иррациональных функций и эллиптические функции; К. М. Петерсон – аналитическая геометрия; С. С. Урусов – теория конечных разностей; Ф. А. Слудский, а затем с 1865 г. Н. В. Бугаев – теория чисел. Другие члены общества взяли на себя рефераты по механике, астрономии и физике.

Через год, в октябре 1865 г., члены общества возбудили ходатайство об официальном утверждении своей организации. До этого, в апреле 1865 г., они решили издавать «Математический сборник»; первый выпуск этого журнала появился в октябре 1866 г. Официальное оформление общества произошло 28 января 1867 г. Общество испытывало большие финансовые и организационные трудности, но дело шло. К 1901 г. в Нём состояло уже 101, а к 1913 г.– 112 человек. С перебоями, но выходил и «Математический сборник» – старейшее русское специально математическое периодическое издание, существующее и в наши дни. Наладился в 1873 г. обмен изданиями с заграничными организациями. Научный авторитет общества и связи его членов крепли. Большую помощь обществу оказывал его влиятельный член – П. Л. Чебышев.

Постепенно в обществе произошла дифференциация, которая привела к преобразованию математики и механики (носившей в то время название прикладной математики) и практически к их обособлению от других наук. До 1917 г. из 971 научного сообщения, прочитанного на заседаниях общества, 640 (66%) пришлось на математику, 217 (22%)–на механику и 114 (12%) на физику и астрономию.

Научные интересы московских математиков охватывали многочисленные области. Однако вскоре выкристаллизовались наиболее продуктивные направления, складывающиеся в научные школы. Во второй половине XIX в. таких школ было две: прикладной математики (механики) и дифференциальной геометрии. Крупным также было направление дифференциальных уравнений.

Н. Д. Брашман

Николай Дмитриевич Брашман (25 июня 1796 – 25 мая 1866), уроженец Моравии и воспитанник Политехнического института и университета в Вене, приехал работать в Петербург в 1823 г. С весны 1825 г. он преподавал в Казанском университете, а в начале учебного 1834 – 1835 гг. перешёл на кафедру прикладной математики Московского университета. Здесь он превосходно поставил курс механики, которому также посвящён ряд его научных работ. Два руководства Брашмана были удостоены Демидовской премии: «Курс аналитической геометрии» (1836) и, на основании отзыва Остроградского, «Теория равновесия тел твёрдых и жидких» (1837).

Николай Брашман

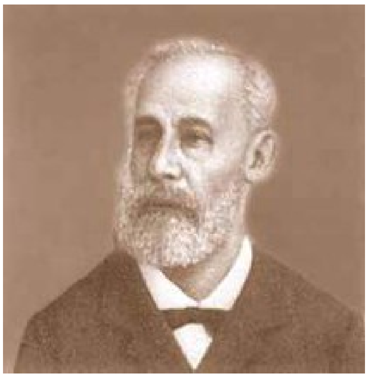
Интересы Брашмана распространялись и на прикладную механику. При его участии на факультете были введены в 1844 г. курсы начертательной геометрии и практической механики, чтение которых было поручено его ученику Александру Степановичу Ершову (1818 – 1867), впоследствии одному из организаторов Московского высшего технического училища.

Брашман находился в постоянном контакте с Академией наук и, в частности, с Остроградским, который оказывал несомненное воздействие на его научные интересы. В 1855 г. Брашман был избран членом-корреспондентом Академии. В Московском университете он работал до 1864 г., но и после того до конца жизни сохранял с ним самую тесную связь.

Он был учителем многих выдающихся математиков (П.Л. Чебышева, И.И. Сомова и др.) и механиков (А.С. Ершова, А.Ю. Давидова, Ф.А. Слудского и др.).

А. Ю. Давидов

Август Юльевич Давидов (27 декабря 1823 – 3 января 1886), окончивший университет в 1845 г. и преподававший в нём с 1850 г. сначала в звании адъюнкта, а потом экстраординарного (1853) и ординарного (1859) профессора. Преемник Брашмана по преподаванию механики в университете и на посту президента Московского математического общества А. Ю. Давидов был учёным широких научных взглядов, счастливо сочетавшим теоретические и прикладные занятия. Его работы по механике относятся к двум проблемам: теории равновесия тел, погружённых в жидкость, и капиллярным явлениям. Математические исследования Давидова относятся к применениям теории вероятностей, дифференциальным уравнениям с частными производными, теории интегрирования.



Август Давидов

Н. Е. Жуковский

В конце XIX в. в университете и Высшем техническом училище работало сравнительно много математиков прикладного направления: Ф.А. Слудский, Д.Н. Лебедев, Ф.Е. Орлов, В.Я. Цингер. Его общепризнанным главой был Николай Егорович Жуковский (1847 – 1921). Он окончил университет в 1868 г. по прикладной математике. Многие годы Жуковский преподавал в университете и в Высшем техническом училище. Вступив в математическое Общество (1876), он сделался одним из самых активных и авторитетных членов; его избрали вице-президентом (1903 – 1905), а затем президентом (1905 – 1921) Общества.

Николай Жуковский

В сочинениях и во всей деятельности Жуковский наиболее ярко выразил себя как учёный-теоретик и инженер-практик. В математике его основные исследования концентрируются вокруг уравнений математической физики, причём большое место отведено приближённым методам решения. Много работал он над проблемами теории функций комплексного переменного, открыв применения этой теории к решению сложных проблем гидро- и аэромеханики.

Среди многочисленных работ (около 80) Н.Е. Жуковского, написанных до 1900 г., преобладают сочинения по гидродинамике. В них исследуются проблемы качки судов, реактивные водомётные двигатели, трение жидкости в полости тела и т. п. В связи с техническим консультированием строительства московского водопровода Жуковский открыл явление гидравлического удара и разработал его теорию. Кроме того, ему принадлежит большое количество исследований по механике: теории движения твёрдого тела вокруг неподвижной точки, устойчивости движения и т. д.

В последние годы XIX в. Жуковский сосредоточил усилия на разработке проблем аэромеханики и авиации. С 1889 г. появляются его исследования по теории воздухоплавания. Вскоре он перешёл к экспериментам в этой области, построив в Московском университете (1902) первую аэродинамическую трубу. Через два года, в 1904 г., он открыл метод присоединенных вихрей, сделав его основой аэродинамических расчётов. За этим последовала разработка теории подъёмной силы крыла и вихревая теория винта. Одновременно расширялись и эксперименты. Вместе с учениками и сотрудниками (число которых быстро росло) Н.Е. Жуковский в 1904 г. принимал участие в проектировании и строительстве первого в России аэродинамического института в Кучино (под Москвой). В 1910 г. он организовал аэродинамическую лабораторию в Московском высшем техническом училище. Неисчислимые научно-теоретические и экспериментальные заслуги Жуковского дали основание В.И. Ленину назвать его «отцом русской авиации».

Жуковский воспитал огромное количество учёных-теоретиков, экспериментаторов, инженеров, офицеров-лётчиков. Он был окружён вниманием и заботой Советского правительства. После его смерти в 1921 г. исследования были продолжены и развиты его учениками, в особенности С.А. Чаплыгиным.

Николай Егорович Жуковский, как и другой замечательный механик, его ученик Сергей Алексеевич Чаплыгин (5 апреля 1869 –

8 октября 1942), был очень активным членом Московского математического общества, которое сыграло видную роль и в развитии механики в нашей стране. Всего с 1873 по 1920 гг. Жуковский выступил в заседаниях Общества со 114 докладами. Некоторые из них относятся и к математике – вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, непрерывным дробям.

К. М. Петерсон

Карл Михайлович Петерсон, по национальности – латыш, родился 25 мая 1828 г. в семье рижского мещанина, бывшего крепостного. После окончания рижской гимназии Петерсон в 1847 – 1852 гг. обучался в Дерптском университете, где его учителями были К.Э. Зенф и Ф.Г. Миндинг. В 1853 г. он защитил кандидатскую диссертацию.

Карл Петерсон

С 1865 г. Петерсон преподавал математику в Петропавловском училище в Москве. Университетским работником он не стал, но принял деятельное участие в кружке, группировавшемся около Н. Д. Брашмана и А.Ю. Давидова, и был одним из членов-учредителей Московского математического общества. За работы по интегрированию уравнений с частными производными Новороссийский университет по предложению В.В. Преображенского и физика Н.А. Умова присудил Петерсону в 1879 г. степень доктора чистой математики.

Кандидатская диссертация Петерсона «Об изгибании поверхностей» была весьма значительным научным трудом.

Исследования Петерсона в этом направлении продолжили С.П. Фиников, С.С. Бюшгенс, Н.Н. Лузин и др.

В. Я. Цингер

В годы творчества Петерсона лекции по геометрии в Московском университете читал Василий Яковлевич Цингер (23 февраля 1836 – 1 марта 1907), большой поклонник и знаток проективной геометрии, автор ряда работ не только в этой области и по механике, но также по ботанике, которую он любил едва ли не меньше своей прямой специальности. Блестящий лектор, увлекательно развивавший идеи Шаля и Штейнера, В.Я. Цингер был учителем ряда московских геометров: К.А. Андреева, А.К. Власова, Б.К. Млодзеевского, Д.Ф. Егорова. Из них первые два работали в области проективной геометрии, а два других – в области дифференциальной геометрии.

Василий Цингер

Работы по проективной геометрии К. А. Андреева и А. К. Власова

Константин Алексеевич Андреев (26 марта 1848 – 29 октября 1921) вскоре после окончания в 1871 г. Московского университета поступил на работу в Харьковский университет, где провел 25 лет (с 1874 до 1898 г.). После этого он почти до конца жизни преподавал в Московском университете.

Константин Андреев

Харьковский период жизни был временем наибольшей активности Андреева как учёного и общественного деятеля. Здесь он защитил магистерскую диссертацию «О геометрическом образовании плоских кривых» (1875), здесь же подготовил докторскую работу, защищённую в 1879 г. в Москве. В том же 1879 г. он был утверждён профессором. В 1884 – 1899 гг. он был председателем Харьковского математического общества и редактором его «Сообщений». Из его руководств особую известность получил «Основной курс аналитической геометрии».

Перу К.А. Андреева принадлежит несколько историко-биографических очерков – о собственном учителе В.Я. Цингере, о друге В.Г. Имшенецком (1896), о М. Шале (1881) и др.

В ином направлении трудился другой ученик Цингера – Алексей Константинович Власов (1868 – 21 мая 1922), работавший вначале в Московском университете, затем в 1911 – 1917 гг. в Московском коммерческом институте и далее опять в университете. В магистерской (1901) и докторской (1909) диссертациях А.К. Власов дал строгое проективное исследование линейных систем конических сечений и полярных систем высших порядков в формах первой ступени. Видное место в его творчестве занимают проблемы, связанные с теоремой Паскаля о конических сечениях. Для теоремы Паскаля Власов нашёл своеобразный аналог в четырёхмерном пространстве. Особое значение имеет оригинальное и простое доказательство Власова основной теоремы аксонометрии, высказанной в 1860 г. немецким геометром К. Польке и в 1864 г. обобщённой Г. Шварцем: всякий полный четырёхсторонник есть параллельная проекция некоторого тетраэдра. Работа Власова «Об особенностях в расположении паскалевых линий для данных шести точек конического сечения», также напечатанная посмертно («Математический сборник», 1925, т. 32, вып. 4), положила начало применению методов высшей синтетической геометрии к начертательной геометрии и номографии. Учеником Власова был крупный специалист во всех трёх областях геометрии профессор Московского университета Н.А. Глаголев (3 декабря 1888 – 2 июля 1945), окончивший этот университет в 1912 г. Многие студенты и теперь изучают «Курс высшей математики» А.К. Власова (1952).

Алексей Власов

Дифференциально-геометрические исследования Б. К. Млодзеевского

Научные интересы Болеслава Корнелиевича Млодзеевского (10 июля 1858 – 18 января 1923), сына профессора медицинского факультета Московского университета, складывались в большой мере под воздействием идей Петерсона. После окончания университета в 1880 г. он был по рекомендации своего учителя В.Я. Цингера оставлен при нём и с 1885 г. в должности приват-доцента начал преподавательскую деятельность, длившуюся без малого 40 лет. Магистерская диссертация Млодзеевского посвящена теории изгибания поверхностей; тему он выбрал по совету Цингера, который вместе с Жуковским выступали оппонентами на защите (1886). После защиты докторской работы по общей теории n-мерных многообразий (1889) Млодзеевский полтора года провёл в заграничной командировке в Париже, Гёттингене и Цюрихе. В 1892 г. он был избран профессором.

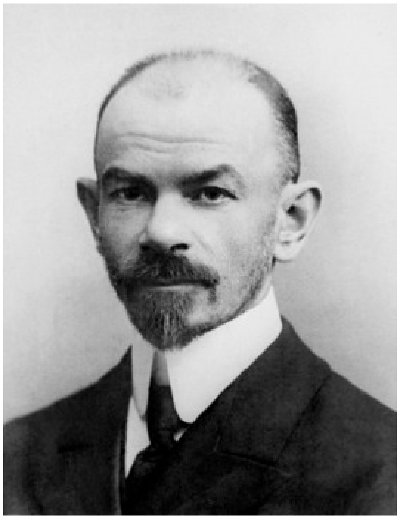
Болеслав Млодзеевский

Б.К. Млодзеевский был активным общественным деятелем и человеком передовых взглядов. Вместе с А. К. Власовым он много сил отдал Московскому математическому кружку, сыгравшему столь большую роль в развитии среднего образования. С 1891 г. он был одним из руководителей Московского математического общества в должности его секретаря, с 1906 г. как вице-президент при президенте Жуковском, а после кончины знаменитого механика в 1921 г. стал президентом. 1911 год был ознаменован в жизни Московского университета бурными событиями. Вспыхнувшие студенческие волнения были грубо подавлены полицией, введённой в помещение университета, ректор и его ближайшие помощники были уволены министром просвещения Л.А. Кассо. В знак протеста университет покинуло более 100 преподавателей, среди них П.Н. Лебедев, Н.А. Умов, С.А. Чаплыгин, Б.К. Млодзеевский, А.К. Власов, С.П. Фиников и многие другие. До 1917 г., когда Млодзеевский смог вернуться (как и Власов, и Фиников) в университет, он преподавал на Высших женских курсах и в университете им. Шанявского.

В России дифференциальные инварианты трёхмерного риманова пространства были впервые изучены Ф.М. Суворовым. Б.К. Млодзеевский распространил исследование инвариантов и условий наложимости на пространства и поверхности многих измерений. Ту же теорему независимо получил Г. Дарбу (1894). Млодзеевский успешно исследовал также изгибания различных частных классов поверхностей, непосредственно развивая работы Миндинга и Петерсона. Ему принадлежат также работы по отдельным вопросам анализа, механики и алгебраической геометрии, которой он занимался в последние годы жизни. Вместе с Д.Ф. Егоровым Б.К. Млодзеевский воспитал многих молодых геометров, составивших ядро большой научной школы. В этом деле большую роль сыграл организованный им в 1905 г. специальный семинар.

Д. Ф. Егоров и его ученики

Младший из четырёх названных выше учеников Цингера, *Дмитрий Федорович Егоров* (22 декабря 1869 – 10 сентября 1931), окончивший университет в 1891 г., специализировался вначале также по дифференциальной геометрии. Его докторская диссертация «Об одном классе ортогональных систем» (1901) посвящена триортогональным потенциальным поверхностям.



Дмитрий Егоров

Д.Ф. Егоров ввёл так называемые потенциальные поверхности (вошедшие в мировую литературу по инициативе Дарбу как поверхности *E*). Его исследования были впоследствии продолжены его учениками Л.Н. Сретенским и С.П. Финиковым.

Как и Млодзеевский, Егоров продолжал исследования Петерсона по изгибанию на главном основании.

С 1893 г. Д.Ф. Егоров состоял приват-доцентом Московского университета, с 1903 г. – профессором. Здесь ещё большее значение, чем работа в области геометрии, имела его деятельность, направленная на внедрение в России новых направлений в вариационном исчислении, теории интегральных уравнений и общей теории функций. Новые идеи Егоров излагал и в своих лекциях, всегда безукоризненно продуманных до последнего слова и последнего значка на доске, но особенное значение имел созданный им в 1910 г. семинар, где каждый год для работы со слушателями избиралась очередная актуальная тема. Постепенно Егоров стал одним из руководящих профессоров, и влияние его сильно сказывалось на всей жизни физико-математического факультета, особенно после смерти Жуковского и Млодзеевского. С 1922 г. и почти до конца жизни он руководил Московским математическим обществом как его президент; вице-президентом тогда был Н.Н. Лузин. Научная репутация Д.Ф. Егорова была безупречной. В 1924 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, в 1929 г. – почётным членом.

Многие крупные советские математики являются учениками Д.Ф. Егорова: Н.Н. Лузин, В.В. Степанов, И.И. Привалов, И.Г. Петровский, геометры С.С. Бюшгенс, С.П. Фиников и другие.

Д.Ф. Егоров (стоит справа), В. Серпиньский (стоит слева), Н.Н. Лузин (сидит)

Сергей Сергеевич Бюшгенс (24 сентября 1882 – 29 марта 1963) и ***Сергей Павлович Фиников*** (15 ноября 1883 – 27 февраля 1964) выступили с оригинальными исследованиями уже в конце рассматриваемого периода. В 1917 г. вышли их магистерские диссертации, продолжавшие петерсоновскую линию: «Об изгибании поверхностей на главном основании» С.С. Бюшгенса и «Общая задача изгибания на главном основании» С.П. Финикова. Оба они начали в 1906 г. преподавать в Московском университете. После смерти Егорова Фиников заменил его в качестве руководителя большой дифференциально-геометрической школы, в работу которой внес ряд новых идей.

Н. Н. Лузин

Главным идейным вдохновителем и признанным главой новой Московской математической школы явился Н.Н. Лузин.

Николай Николаевич Лузин родился 9 декабря 1883 г. в Томске. Дед его был крепостным крестьянином, отец – торговым служащим. Окончив в 1901 г. гимназию в Томске, Лузин в том же году поступил в Московский университет.

Николай Лузин

Как вспоминал сам Лузин, математику в гимназии он не любил, так как учитель требовал заучивания наизусть формулировок теорем и доказательств в точности по учебнику, а механическая память у Лузина была плохая. Дело несколько изменилось благодаря репетитору, который показал молодому гимназисту внутренние логические связи между предложениями математики. На математическое отделение Лузин поступил с целью приобрести хорошую общую подготовку для последующих занятий; он собирался стать инженером. Судьба его сложилась, однако, по-иному. Блестящие лекции московских профессоров, особенно геометров Б.К. Млодзеевского и К.А. Андреева, произвели на него сильное впечатление и навсегда поставили в центр его интересов математику.

Он, будучи ещё студентом младших курсов, был избран секретарём студенческого математического кружка, председателем которого был знаменитый механик Н.Е. Жуковский. Лузин и его университетский товарищ С.С. Бюшгенс были активными участниками этого кружка; в их докладах преобладали вопросы обоснования математики, теории множеств, арифметизации математики, которые тогда привлекали внимание математиков, и вопросы аксиоматики. На заседания кружка часто приходили профессора Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров и только что вступивший в число приват-доцентов И.И. Жегалкин.

В 1905 – 1906 гг. Лузин вместе с В.В. Голубевым по совету Егорова несколько месяцев провели в Париже, где посещали лекции Э. Бореля, А. Пуанкаре и других, изучали новинки научной литературы. В это время Лузин уже занимался вопросами теории функций.

В 1906 г. он окончил университет и по рекомендации Егорова был оставлен для подготовки к профессорскому званию. В 1910 г. он сдал магистерские экзамены и, после прочтения двух пробных лекций, получил в начале 1911 г. звание приват-доцента по кафедре чистой математики. Последующие годы Лузин посвятил углубленному изучению теории функций, в частности проблем теории тригонометрических рядов.

С осени 1910 до весны 1914 г. Лузин был в командировке в Гёттингене и Париже, где слушал некоторые лекционные курсы и познакомился с крупнейшими деятелями французской школы теории функций – А. Лебегом, Э. Борелем, А. Данжуа и другими выдающимися учёными. Одновременно он вёл интенсивную научную работу. В 1912 г. он выступил с несколькими заметками в парижских «Comptes rendus» и с двумя статьями в 28-м томе «Математического сборника», привлекшими большое внимание учёного мира.

В статье «К основной теореме интегрального исчисления» Лузин сообщил замечательную теорему о так называемом «*C*-свойстве» измеримых функций (*C* – начальная буква французского слова «continuité», что означает непрерывность).

Другая статья «Об одном случае ряда Тейлора», напечатанная в том же номере журнала, что и предыдущая, содержала первые выдающиеся открытия Лузина в теории степенных и тригонометрических рядов.

Лузин построил степенной ряд, коэффициенты которого стремятся к нулю и который расходится во всех точках окружности своего круга сходимости.

Весной 1914 г. Лузин возвратился в Москву и приступил к работе в университете. Отчёт о заграничной командировке вошёл в его знаменитую монографию «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), защищённую им в качестве магистерской диссертации. Защита состоялась в мае 1916 г. при официальных оппонентах Д.Ф. Егорове и Л.К. Лахтине. Она прошла очень успешно: в виде редкого исключения диссертанту присудили сразу степень доктора чистой математики. Ещё ранее физико-математический факультет и Московское математическое общество наградили Лузина за его монографию премией имени А.Ю. Давидова. В 1917 г. Лузин был избран профессором.

Лузин формулирует две главные задачи теории функций:

1. Дано структурное свойство функции. Требуется найти аналитические выражения, изображающие эту функцию.

2. Обратная, и более важная задача: дан класс аналитических выражений. Требуется найти необходимое и достаточное структурное свойство функций, изображаемых этим классом аналитических выражений.

Таким образом, Лузин видел главную задачу теории функций в том, чтобы её методы и понятия получили развитие, при котором содействовали бы развитию математики в целом, и особенно математического анализа. Дальнейшая разработка теории функций в его собственных трудах и в трудах основанной им научной школы показала, что Лузин правильно наметил главные цели этой новой тогда отрасли математики и что теория функций на самом деле оказалась призвана не только дать более глубокое обоснование анализа, но и служить эффективному развитию анализа и других наук.

Содержание диссертации Лузина очень богато и во многом весьма специально. Мы остановимся лишь на части содержащихся в ней результатов.

В первой главе работы Лузина излагается *C*-свойство и на его основе выводятся некоторые теоремы об аналитическом представлении измеримых и почти всюду конечных функций.

Вторая глава посвящена центральной проблеме интегрального исчисления – отысканию первообразных функций.

В третьей главе работы продолжено изучение первообразных функций.

Четвертая глава содержит, среди прочего, постановку некоторых вопросов относительно обобщения понятия неопределённого интеграла, а также раздел, посвящённый обобщениям понятия производной. Здесь автор рассказывает об одной работе А.Я. Хинчина.

В пятой главе устанавливаются необходимые и достаточные условия для сходимости почти всюду ряда Фурье для функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т. е. такой, что на отрезке $(0, 2\pi)$ существует конечный интеграл Лебега от квадрата функции $f(x)$. В 1907 г. Э. Фишер и Ф. Рисс установили носящую теперь их имена теорему. Теорема Фишера – Рисса применяется и для других ортогональных систем и играет важную роль в общей теории замкнутости.

Наконец, в шестой главе работы исследуется общий вопрос об условиях представимости функций тригонометрическими рядами. В тех случаях, когда сумма ряда в обычном смысле не существует, стали применять обобщённые приёмы суммирования.

Диссертация Н.Н. Лузина, написанная с редкой ясностью и характерным для автора наглядно-геометрическим стилем мышления, явилась богатейшим источником новых проблем, из которого учёные долгое время черпали и продолжают черпать задачи.

Монография «Интеграл и тригонометрический ряд» – ценнейший вклад Лузина в метрическую теорию функций, в которой на основе понятия меры изучаются свойства измеримых функций, интеграла, производной и других центральных понятий анализа.

В 1915 г. Лузин начинает заниматься другим направлением теории функции – дескриптивным. В ней изучаются структура и мощности различных сложных точечных множеств, образуемых некоторыми специальными способами из замкнутых множеств. В последующие же годы Лузин вместе с учениками развернул широкие исследования в этом направлении, которые продолжал до самой смерти.

Трудно переоценить роль Лузина в развитии современной математики, прежде всего в формировании Советской математической школы. Его прямыми или косвенными учениками считаются почти все выдающиеся московские математики. Чрезвычайное богатство своих идей Лузин использовал не в одиночку. Он охотно делился занимавшими его вопросами с молодёжью на лекциях, семинарах и в личных беседах. После занятий члены «Лузитании», как шутливо прозвали коллектив учеников Лузина, провожали молодого профессора домой, прогулка и живая научная беседу затягивались надолго.

Вместе с тем Н.Н. Лузин был удивительным лектором. Его слушатели никогда не забудут необыкновенного увлечения, которое они испытывали на его лекциях. Казалось, он заново творил на глазах аудитории излагаемую теорию – так оно действительно бывало в специальном курсе теории функций, когда он рассказывал о только что полученных и ещё не до конца развитых или обоснованных результатах. К тому же Лузин обладал очень красивым и проникновенным голосом.

Очень быстро вокруг Лузина составилась группа талантливых последователей из товарищей и студентов. Перед самой Октябрьской революцией эта ещё небольшая, но яркая и сильная Московская школа теории функций выступила публично. Мы имеем в виду первые работы А.Я. Хинчина, Д.Е. Меньшова, П.С. Александрова и М.Я. Суслина, а также магистерскую диссертацию университетского товарища Лузина – В.В. Голубева.

Н.Н. Лузин скончался 28 февраля 1950 г.

Тема 15. МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Методоло́гия (от греч. μεθοδολογία – учение о способах; от др.-греч. μέθοδος из μετά- + ὁδός, букв. «путь вслед за чем-либо» и др.-греч. λόγος – мысль, причина) – учение о методах, способах и стратегиях исследования предмета.

У этого термина существуют и другие значения. Рассмотрим различные определения методологии математики, которые даются в различных источниках.

1. Методология математики – это учение о специфике математики, рассматриваемой с точки зрения теории познания.

Известно, что математика в определенной мере тоже занимается исследованием самой себя. Создаются специальные метатеории, посвященные изучению природы формальных систем. Исследуется специфика математического аппарата. Но все это делается формально-логическими методами, т. е., не выходя за рамки самой математики.

Методология же математики исследует математическое знание с более общих позиций.

2. Методология математики – это учение о причинах объективности математического знания, о его «разумности», об исторической обусловленности ее природы и ее логической структуры.

В рамках этого учения исследуется вопрос о предмете математики и вопрос о причинах эффективности математического аппарата. Устанавливается, что эта эффективность отчасти является результатом приспособления нашего сознания к действительности: происходит накопление огромного интеллектуального опыта, играющего роль «компаса» в научных исследованиях.

3. Методология математики – это учение, основанное на обобщении исторического опыта. Анализ этого опыта приводит к форми-

рованию теории познания и к осознанию ее взаимосвязи с математикой.

4. Методология математики – это учение, связанное с психологией сознания и в особенности с психологией творчества. Психологические особенности восприятия, памяти, мышления накладывают определенный отпечаток на наши знания. Мы видим только то, что позволяют нам наши интеллектуальные возможности и, в частности, наш язык. Выразительные же возможности языка не беспредельны, они имеют определенные границы.

5. Методология математики – это учение о логических аспектах математического знания: методах построения математических абстракций, их природе, логическом статусе их существования., характере логических связей, специфических методах классической математики; это учение о построении формальных систем и возникающих в этой связи вопросах непротиворечивости, категоричности и полноты соответствующих аксиоматик; это, наконец, учение о характере требований к логической структуре математических теорий.

6. Методология математики – это учение о логико-математических языках: семантике этих языков и причинах возникновения семантических парадоксов, специфике первичных понятий и правилах установления определений выразительных возможностях различных формализованных языков и соотношении между языком и метаязыком.

7. Методология математики – это также учение о закономерностях и методах математической деятельности.

Это учение о закономерностях математического творчества, т.е. учение о методах поиска новых идей, новых теорем и их доказательств. В этом качестве методология математики смыкается с психологией познания и с эвристикой. Ее цель в этом случае состоит в выяснении норм научного мышления, осмыслении и выделении общих принципов математического познания, а также в выяснении взаимоотношений между эвристическими, эмпирическими и рационально-логическими факторами математической деятельности.

Любое строение имеет основание, фундамент. Фундамент сам на чем-то стоит, имеет определенную конструкцию и поддерживает все здание. Здание математики (или отдельной ее части) также может строиться на том или ином фундаменте, зависящем от почвы, на которой он зиждется. Этой почвой служат философские воззрения, математические достижения и приоритеты, культура, характеры людей, определяющих вместе с веяниями жизни и Богом пути развития математики соответствующей эпохи. С другой стороны, особенности конструкции фундамента оказывают огромное, если не решающее, влияние на продолжающее строиться здание математики, определяют направленность развития и изложения математики. Такой фундамент носит название оснований математики.

Первичной математической реальностью служат евклидова геометрия, натуральные числа и их дроби (отношения). Соответствующие простейшие факты и свойства являются той очевидностью, на которой базируется математика. В. Я. Перминов называет такую очевидность аподиктической, отличая ее от интуиции как прозрения или схватывания истины. Для него очевидность есть определенное видение истины. Аподиктические очевидности не корректируются опытом, имеют внеэмпирический и внеисторический характер, представляя собой особого рода бесспорные реалии сознания.

Строгое обоснование натуральных чисел и евклидовой геометрии стало первой важнейшей задачей оснований математики. Аксиоматическое определение натурального ряда было осуществлено Дедекиндом и Пеано в 1889 году, а содержательная аксиоматизация евклидовой геометрии – Гильбертом в 1899 году. В теории натурального ряда основополагающую роль играет аксиома математической индукции.

Основания математики – это важная часть самой математики, являющаяся ее обоснованием и надежной опорой. Основания математики теснейшим образом связаны с математической логикой. Математика всегда имела тот или иной фундамент, включающий осмысление основополагающих понятий. До XIX века не возникало сомнений в непротиворечивости математики. Так, геометрия Евклида была наукой о реальном пространстве. Ее аксиомы – очевидные истины о пространстве, дедуктивные выводы – неопровержимые факты. Пространство существует, значит, не противоречива и описывающая ее геометрия (реальное пространство есть модель геометрии). Из существования природы следует непротиворечивость описывающей ее математики.

Но открытие неевклидовых геометрий поколебало безмятежность математиков. Появилась необходимость в анализе основ геометрии. В 1899 году Гильберт публикует знаменитый труд «Основания геометрии», в котором евклидова геометрия изложена строго аксиоматически (устранены недостатки «Начал» Евклида), ее непротиворечивость сведена к непротиворечивости действительных чисел. Во второй половине XIX века была осуществлена перестройка основ математического анализа на базе строгой теории действительных чисел (арифметизация анализа). Кроме того, появились необычные алгебры, скажем, числа Кэли, двойные и дуальные числа. Все это способствовало зарождению оснований математики. Заметим, что Гильберт главными достижениями математики XIX века считал открытие неевклидовой геометрии и арифметизацию действительных чисел.

Нельзя обойти вниманием ошибочное утверждение Дойча о том, что с появлением неевклидовых геометрий геометрия стала частью физики; как раз наоборот: до XIX века евклидова геометрия была единственной «физической» реальностью.

Как наука основания математики (о предпосылках сказано выше) появились на свет чуть более 100 лет назад. С одной стороны, это было связано с кризисом в математике, вызванным появлением логических парадоксов, или антиномий (Рассела – 1902 год, Кантора – 1899 год, Бурали-Форти – 1897 год), и семантических парадоксов (Ришара – 1905 год, Греллинга – 1908 год, поздние версии парадокса лжеца). А с другой стороны, в это время успешно развивался формально-логический язык, т. е. существовали предпосылки разрешения кризисной ситуации.

Заключение

Подведем в нескольких словах итоги развития математики в России в XIX и начале XX вв.

К Октябрьской революции отечественная математика имела выдающиеся достижения. Русские математики, отправляясь от задач, которые ставила на очередь дня теория и практика, в ряде важнейших направлений далеко продвинулись вперед. Лобачевский, открыв пути построения новых геометрических систем и поставив математику перед необходимостью развития аксиоматических методов исследования, во многом определил все дальнейшее развитие математической мысли. Остроградский с блеском разрабатывал математическую физику, интегральное исчисление и другие отделы анализа. Благодаря трудам Чебышева и его учеников – Золотарёва, Вороного, Маркова, Ляпунова и других – русские школы теории чисел и теории вероятностей выдвинулись на первое место в мире. Чебышев же, показав один из наиболее замечательных примеров математического анализа задач техники, создал новую теорию приближения функций. Основополагающие труды Ляпунова по теории устойчивости динамических систем и качественным методам составили новую крупнейшую главу теории дифференциальных уравнений. Ляпунов и Стеклов мощно продвинули вперед математическую физику. В начале XX века возникла московская школа теории функций действительного переменного во главе с Лузиным, в Киеве школа алгебраическая, в Харькове сообщено было новое направление исследованиям по теории вероятностей и теории приближения функций; в Москве, Казани, Одессе и других центрах проводились исследования по геометрии.

Вместе с тем ещё более широкому развитию математики по всему её фронту, как и других естественных наук, в нашей стране препятствовала вся система царского режима. Народные массы не имели доступа к просвещению вообще и тем более к высшему образованию. На огромное государство приходилось лишь около десятка физико-математических факультетов; обучались на математических отделениях немногочисленные студенты. Научно-исследовательских математических институтов не существовало. Редко кого оставляли для подготовки к профессуре при университетах, и многим талантливым математикам после окончания университета не было пути к научной деятельности. Связь математики с народнохозяйственными нуждами была ещё слабой, несмотря на деятельность отдельных замечательных «прикладников», как Жуковский, Чаплыгин и Крылов.

Коренной поворот в развитии отечественной математики мог быть обусловлен только общественным поворотом в судьбах всей страны. После октябрьской революции начался новый период истории нашей математики.

Название «История и методология математики» традиционно используется при изложении взаимосвязанных вопросов истории и философии математики. Хотя теперь чаще используется название «философия математики». Иногда методологию и философию математики отождествляют. Но некоторые исследователи вкладывают в эти понятия различный смысл. Эта неопределенность в методологических основах науки мешает формированию научных представлений об истории и перспективах развития математических наук.

Рассмотрим некоторые распространенные представления о методологии науки.

К.А. Рыбников включает методологию математики в состав математики и определяет ее как общетеоретические истолкования математических законов и теорий, характеризующие общий подход к изучению предмета математики. Он выделяет три уровня предмета методологии математики: логический, исторический, философский уровни.

Е.М. Вечтомов не делает различия между философией и методологий: «Философия (или методология) математики призвана выявить специфику и закономерности развития математики, ее природу. Философия математики – это совокупность общих вопросов о математике и ответов на них, дающая представление о том, что такое математика».

Философия математики определяется как раздел философии и как общая методология математики. Хотя основными проблемами философии и методологии математики отмечаются одни и те же: установление сущности математики, ее предмета и методов, места математики в науке и культуре.

Цели изучения курса истории и методологии математики определяют его содержание. Учитывая различные существующие варианты изложения данного материала, я предлагаю следующее содержание:

1. Предмет математики, истории математики и методологии математики. Единство истории и методологии математики.

2. Периоды развития математики. Основные характеристики каждого периода. Зарождение математики. Период элементарной и высшей математики. Современная математика. Значение различных цивилизаций в развитии математической науки.

3. Важнейшие методологические проблемы математики. Соотношение математического знания и реальной действительности.

4. Место математики в системе наук и ее взаимодействие с другими науками. Математизация научного знания.

5. Математическое моделирование как метод познания. Математические структуры и модели. Аксиоматические теории. Важнейшие математические методы.

6. Философские категории в математике. Проблема истины в математике. Проблема бесконечности. Дискретное и непрерывное.

7. Природа математических понятий. Фундаментальные понятия математики. Основания математики. Формализм и интуиционизм.

8. Методология методики обучения математике. Философские аспекты методики преподавания математики.

9. Методологические проблемы информатики и кибернетики.

На семинарские занятия выносятся следующие темы:

Введение в методологию математики (Предмет математики, истории математики и методологии математики). Методологические проблемы математики (Математическое знание и реальная действительность. Фундаментальные понятия математики. Важнейшие математические методы). Методология методики обучения математике (Этапы развития, объект и предмет методики обучения математике. Методическая система обучения математике).

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА

К сожалению, объем часов не позволяет рассмотреть многие вопросы методологии математики глубже, поэтому студентам предлагается воспользоваться библиографическими списками литературы.

Обучающиеся выполняют и защищают реферат по выбранной теме, посвященной одному из вопросов истории и методологии математики. В процессе подготовки к семинарским занятиям и к экзамену/зачету составляется систематизированная библиография по истории и методологии математики.

К семинарским занятиям могут быть подготовлены доклады студентов на предлагаемые ниже темы:

1. Связь математики с другими науками.
2. Три знаменитых задачи древности.
3. «Задача о быках Гелиоса (бога Солнца)» Архимеда.
4. Математические знания в Древней Руси.
5. Арифметика в рукописях 15 – 17 века (на Руси).
6. Математика в эпоху Петра Первого.
7. Возникновение счётных машин. Арифмометр.
8. Математика в Петербургской Академии наук в 18 веке.
9. Идеи К. Маркса о путях развития математического анализа.
10. Создание вариационного исчисления.
11. Возникновение теории групп.
12. Создание теории функций комплексного переменного.
13. Неевклидова геометрия.

А также о жизни и творчестве следующих великих математиков:

- Евклид;
- Штейнер;
- Стеклов;
- Архимед;
- Якоби;
- Ковалевская;
- Диофант;
- Гамильтон;
- Жуковский;
- Омар Хайям;
- Дирихле;
- Егоров;
- Тарталья;
- Абель;
- Лузин
- Кардано;
- Галуа;
- Феррари;
- Риман;
- Виет;

- Вейерштрасс;
- Непер;
- Кантор;
- Кеплер;
- Кронекер;
- Декарт;
- Дедекинд;
- Ферма;
- Мёбиус;
- Паскаль;
- Бояи;
- Ньютон;
- Кели;
- Лейбниц;
- Грин;
- династия Бернулли;
- Клейн;
- Маклорен;
- Ли;
- Тейлор;
- Пуанкаре;
- Эйлер;
- Дарбу;
- Клеро;
- Лебег;
- Даламбер;
- Гильберт;
- Лагранж;
- Нётер;
- Монж;
- Вейль;
- Лаплас;
- Лобачевский;
- Лежандр;
- Остроградский;
- Гаусс;
- Буняковский;
- Фурье;
- Чебышев;
- Больцано;
- братья Марковы;
- Коши;
- Ляпунов и др.

Последняя лекция может быть зачётным занятием.

Она может быть проведена по билетам или в виде тестов. Также оцениваются сделанные ранее доклады студентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если математику, известную до 1600 года, можно охарактеризовать как элементарную, то по сравнению с тем, что было создано позднее, эта элементарная математика бесконечно мала. Расширились старые области и появились новые как основные, так и прикладные отрасли математических знаний. Огромное количество публикуемых результатов математической науки не позволяет даже ученому ознакомиться со всем, что происходит в области знаний, в которой он работает, не говоря уже о том, что многие результаты доступны пониманию только специалистам узкого профиля. Ни один математик сегодня не может надеяться знать все, что происходит в современном мире математической науки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Рыбников, К. А*. История математики / К. А. Рыбников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 456 с.
2. *Рыбников, К. А*. «Введение в методологию математики»/ К. А. Рыбников. – М. : Изд-во Моск. ун-та, , 1979.
3. *Стройк, Д. Я.* Краткий очерк истории математики / Д. Я. Стройк. – М. : Наука, 1978. – 336 с.
4. Хрестоматия по истории математики / под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Просвещение, 1977. – 224 с.
5. *Юшкевич, А. П.* История математики в России / А. П. Юшкевич. – М. : Наука, 1968. – 591 с.
6. *Кокурина, Ю. К.* «Курс лекций по истории математики» / Ю. К. Кокурина. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014.
7. *Кокурина Ю. К.* «История математики и физики в России» / Ю. К. Кокурина, М. А. Антонова. – Владимир, Изд-во ВлГУ, 2019.
8. *Никифоровский, В. А.* Великие математики Бернулли / В. А. Никифоровский. – М. : Наука, 1984. – 181 с.
9. *Клайн, М.* Математика. Поиск истины. – М. : Изд-во Мир, 1988.
10. *Клейн, Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетия. – 2-е изд. – М. : Наука, 1989.

11. *Выгодский, М. Я.* Арифметика и алгебра в Древнем мире. – М. : Наука, 1967.

12. *Бурбаки, Н.* Очерки по истории математики. – М. : Иностр. Литература, 1963.

13. *Ван-дер-Варден, В. А.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Вавилона, Египта, Индии. – М. : Физматгиз, 1959.

14. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М. : Физматгиз, 1960.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Арсенов О. О.* Григорий Перельман и гипотеза Пуанкаре. – М. : Эксмо, 2010. – 256 с.

2. *Гнеденко Б. В.* Очерки по истории математики в России. Изд. 3-е. – М.: УРСС, 2007. – 296 с.

3. *Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М. : Мир, 1986. – 432 с.

4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / под ред. А. П. Юшкевича. – М. : Наука, 1970 – 1972. – Т. 1 – 3.

5. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. – М. : Наука, 1990.

6. *Колмогоров А. Н.* Математика в её историческом развитии / под ред. В. А. Успенского. – М. : Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит., 1991. – 224 с.

7. *Рыбников К. А.* История математики. – М. : Изд-во МГУ, 1994. 496 с.

8. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. – Изд. 3. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1997. 336 с.

9. *Фрейман Л. С.* Творцы высшей математики. – М. : Наука, 1968. – 216 с.

10. *Юшкевич А. П.* История математики в России до 1917 года. – М. : Наука, 1968.

Учебное издание

ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Автор-составитель
КОКУРИНА Юлия Камильевна

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 23.03.22.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 11,39. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.