Владимирский государственный университет

Н.И. ДУБРОВИН

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА
В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Владимир 2022

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н.И. ДУБРОВИН

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА
В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2022

ISBN 978-5-9984-1468-8

УДК 512
ББК 22.14

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук
генеральный директор ООО «КАВАТА»
Р.Н. Рощин

Кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В.Н. Горлов

Дубровин, Н. И.

Матричная алгебра в задачах [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Н. И. Дубровин; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2022. – 99 с. – ISBN 978-5-9984-1468-8. – Электрон. дан. (640 Кб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Включает в себя следующие разделы: предварительные сведения (линейные пространства, линейные операторы, понятие матрицы, операции над матрицами), определители матриц (определители малых порядков, свойства определителей, определитель с углом нулей, определитель Вандермонда), разложение матриц, собственные числа и собственные векторы квадратных матриц, ранг матрицы, приложения к решению систем линейных уравнений.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 27.03.05 – Инноватика, 28.03.02 – Наноинженерия, 15.03.05 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств. Будет полезно студентам, изучающим расширенный курс математики.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 11 назв.

ISBN 978-5-9984-1468-8

Оглавление

Введение

В пособии подробно рассматривается одна из фундаментальных и универсальных алгебраических конструкций – алгебра матриц. Эта алгебра имеет многочисленные применения и часто используется во всех разделах математики.

Параллельно с изложением материала предлагается решить задачи как теоретического, так и практического плана.

Пособие по алгебре матриц включает в себя следующие разделы: предварительные сведения (линейные пространства, линейные операторы, понятие матрицы, операции над матрицами), определители матриц (определители малых порядков, свойства определителей, определитель с углом нулей, определитель Вандермонда), разложения матриц, собственные числа и собственные векторы квадратных матриц, ранг матрицы, приложения к решению систем линейных уравнений.

Цель пособия – кратко, но точно и последовательно изложить все основные результаты и понятия, входящие в перечень, приведенный выше. Дано много комментариев и разъясняющих примеров, предложено множество задач. Поэтому пособие не претендует на роль учебника по математике; оно скорее ближе к справочнику по курсу алгебры матриц.

В пособии не приводятся сведения исторического характера и зачастую не указывается авторство теорем. Связано это с тем обстоятельством, что в нем излагаются только классические, давно устоявшиеся факты, о которых написано немало исторических текстов.

В пособии используются общепринятые обозначения:

- конец доказательства или его отсутствие обозначается знаком $\Box$;
- соотношение $a := b$ означает, что a по определению или по соглашению равно b;
- $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ – поле действительных чисел;

- $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел;
- $A \subseteq B$ – множество A есть часть множества B; в то время как $A \subset B$ обозначает собственную часть, не совпадающую с B.

Нумерация задач, определений, теорем, предложений, лемм и примеров сплошная в пределах всего текста пособия.

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ (кратко $m \times n$-матрицей) называют таблицу элементов, состоящую из m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{0.1}$$

Матрицы будем обозначать прописными латинскими буквами – A, B, C и т.д. Более компактная запись матрицы (0.1) следующая: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Здесь индекс i пробегает от 1 до m, а j изменяется от 1 до n независимо от i. Элементы матрицы могут быть разной природы: числа, многочлены, функции и даже сами матрицы.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda^2+1 & 2 \\ -\lambda & 5 \end{pmatrix}; \quad (e^x, \sin x, \cos x, 1)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \text{ где } A = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обратим внимание на двойной индекс (i, j), указывающий в какой строке и в каком столбце стоит элемент a_{ij} – в i-ой строке и j-ом столбце. Для заполнения $m \times n$-матрицы требуется $m \cdot n$ элементов. Тот факт, что индекс i пробегает от 1 до m, а j пробегает от 1 до n не принципиален. Нумерацию можно начинать, например, с нуля как это часто делается в программировании. Заметим, если полагать $0 \le i \le m$, $0 \le j \le n$, то это уже будет $(m+1) \times (n+1)$-матрица, содержащая $mn + m + n + 1$ элементов.

Опишем несколько ситуаций, когда матрицы возникают естественным образом. Рассмотрим преобразование плоскости Oxy. В общем случае это преобразование задается двумя функциями двух переменных

$$\begin{cases} u = f(x, y); \\ v = g(x, y) \end{cases} \tag{0.2}$$

и может быть устроено весьма сложно.

1 . Найти образ единичного квадрата $0 \le x, y \le 1$, если $u = xy$, а $v = x + y$.

Как приближение первого порядка к общему случаю (0.2) можно рассматривать афинно-линейные преобразования плоскости

$$\begin{cases} u = ax + by + f_0 \\ v = cx + dy + g_0, \end{cases} \tag{0.3}$$

где a, b, c, d, f_0, g_0 конкретные числа. Преобразование (0.3) полностью задается 2×3-матрицей

$$\begin{pmatrix} a & b & f_0 \\ c & d & g_0 \end{pmatrix},$$

которую удобно разделить на две подматрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ g_0 \end{pmatrix},$$

первая из которых – квадратная, а вторая – столбец высоты 2. Преобразование (0.3) оставляет начало координат, точку $O(0; 0)$, на месте, если $f_0 = g_0 = 0$. В этом случае преобразование (0.3) назовем линейным. С другой стороны, если $a = b = c = d = 0$, то преобразование $u = x + f_0$, $v = y + g_0$ задает параллельный перенос плоскости на вектор $f_0\mathbf{i} + g_0\mathbf{j}$. Здесь и далее $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – единичные вектора сонаправленные с осями Ox и Oy соответственно.

2 . Найти образ единичного квадрата $0 \le x, y \le 1$, если 1) $u = x + 2y$, а $v = y$; 2) $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, а $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$.

Рассмотрим два линейных преобразования

$$F : \begin{cases} u = a_1x + b_1y \\ v = c_1x + d_1y, \end{cases} \quad ; \quad G : \begin{cases} z = a_2u + b_2v \\ w = c_2u + d_2v \end{cases}$$

Найдем закон преобразования $G \circ F$, когда сначала мы применяем F, а потом G. Для этого во вторую систему подставим u и v из первой системы:

$$\begin{cases} z = a_2(a_1x + b_1v) + b_2(c_1x + d_1y) \\ w = c_2(a_1x + b_1y) + d_2(c_1x + d_1y) \end{cases} \quad \begin{cases} z = (a_2a_1 + b_2c_1)x + (a_2b_1 + b_2d_1)y \\ w = (c_2a_1 + d_2c_1)x + (c_2b_1 + d_2d_1)y \end{cases} \tag{0.4}$$

Как мы видим, последовательное применение отображения F, а затем G снова будет линейным и задается матрицей

$$\begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1) & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}$$

которую логично назвать произведением матрицы $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ на матрицу $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ (именно в этом порядке!).

3 . Найти произведения

1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Линейные преобразования пространства $Oxyz$ задаются уже 3×3-матрицами:

$$\begin{cases} u = a_1x + b_1y + c_1z \\ v = c = a_2x + b_2y + c_2z, \\ t = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

4 . Вывести закон умножения 3×3-матриц также, как это сделано выше для 2×2-матриц. Перемножить

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Естественным обобщением линейных преобразований плоскости и трехмерного пространства является линейное преобразование пространства строк $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R}\}$ длины n, которое задается матрицей вида (0.1) с условием $m = n$.

Вспомним прямо пропорциональную зависимость $y = kx$ задающую линейное преобразование прямой Ox. Здесь в роли матрицы выступает число k – коэффициент пропорциональности. Число можно рассматривать как матрицу размера 1×1. Такую "матрицу" в скобки заключать не обязательно.

Поставим ряд вопросов, которые возникают в связи с линейными преобразованиями плоскости и пространства.

- Если задан образ $u = u_0$, $v = v_0$, $t = t_0$ в соотношении (0.5), то как найти прообраз x, y, z и при каких условиях существует этот прообраз. Иными словами речь идет о решении линейной системы (0.5) относительно x, y, z.

- Линейное преобразование (0.3) меняет, вообще говоря, площади фигур. Каким образом (во-сколько раз)? Аналогичный вопрос относительно изменения объемом тел при применении преобразования (0.5).

- При каком условии существует обратное линейное преобразование и как его найти.

- Если матрицы рассматривать как обобщение чисел, то как далеко можно развить алгебру матриц? Можно ли находить значения функций от матриц?

- Матрица линейного преобразования в другой системе координат может выглядеть иначе. Как найти "хорошую" систему координат, в которой матрица линейного преобразования выглядела бы наиболее просто.

Разнообразные матрицы возникают и при изучении графов, уже на первоначальном этапе. Граф по определению есть множество точек $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ (вершины графа), некоторые пары из которых соединены дугами (ребрами). Сопоставим такому графу $n \times n$-матрицу смежности $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если вершины v_i, v_j смежны, т.е. соединены дугой и полагаем $a_{ij} = 0$ в противном случае. Например, полному графу (любая пара вершин смежна) сопоставляется матрица, у которой все элементы равны 1, кроме главной диагонали, где стоят нули. А циклу $C_4 : v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_1$ сопоставляется матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

5 . Построить матрицу смежности графа "три дома, три колодца" с шестью вершинами $h_1, h_2, h_3, w_1, w_2, w_3$ где каждый "дом" h_i соединен с каждым "колодцем" w_j тропинкой (=дугой).

При изучении поведения преобразования (0.2) плоскости в малой окрестности точки (a, b) естественно поставить вопрос о приближении этого преобразования линейным. Обозначим $\Delta x = x - a$, $\Delta y = y - b$ – приращение аргументов и $\Delta f = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$, $\Delta g = g(a + \Delta x, b + \Delta y) - g(a, b)$ – приращение функций f, g. В анализе функций многих переменных доказывается, что тогда

$$\begin{cases} \Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y; \\ \Delta g \approx \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y \end{cases} \tag{0.7}$$

с точностью до ошибки – бесконечно малой высшего порядка по сравнению с $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Например, линейное преобразование аппроксимирующее $u = x^2 + y^2$; $v = xy$ в точке $a = 3; b = 4$ будет иметь вид

$$\begin{cases} \Delta f \approx 6\Delta x + 8\Delta y; \\ \Delta g \approx 4\Delta x + 6\Delta y \end{cases}$$

что можно записать в матричном виде следующем образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta f \\ \Delta g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Матричная алгебра

Перейдем к формальным определениям матрицы, ее частей, видов различных матриц и арифметическим операциям над матрицами.

Формально, но строго, матрицей размера $m \times n$ над кольцом R (см. дополнение 1) называется отображение $[1; m]_{\mathbb{N}} \times [1; n]_{\mathbb{N}} \to R$. Элемент, соответствующий паре индексов (i, j), и равный $a_{ij} \in R$, стоит на (i, j)-ом месте. Следующие "подматрицы" матрицы (0.1)

$$(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}); \qquad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

называются *i-ой строкой* и *j-ым столбцом* матрицы A. Если матрица A содержит ровно одну строку (один столбец), A называется *строкой* (соответственно *столбцом*), а число n называется ее *длиной* (соответственно число m называется *высотой*). Крайний случай, когда $m = n = 1$, т.е.

такая матрица состоит и из одной строки и из одного столбца. Тогда ее единственный коэффициент в круглые скобки можно не заключать, и такую матрицу можно отождествлять с элементом кольца R. Множество матриц фиксированного размера $m \times n$ обозначается $\mathbf{Mat}(m \times n; R)$.

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – две $m \times n$-матрицы. Тогда *суммой* матриц A и B называется $m \times n$-матрица $A + B$, (i, j)-ый коэффициент которой равен $a_{ij} + b_{ij}$. *Произведение матрицы* A *на элемент* $r \in R$ определяется также покомпонентно: $rA = (ra_{ij})$, $Ar = (a_{ij})r$. Иными словами, rA так же как и Ar – матрицы того же размера $m \times n$ и на (i, j)-ом месте у них стоят элементы ra_{ij} и $a_{ij}r$ соответственно.

Матрица, у которой число строк и столбцов совпадают называется *квадратной*. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} и т. д. называются *главной диагональю* матрицы (0.1).

Приведем пример сложения и умножения матриц на число:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Транспонирование матриц

Пусть R – коммутативное кольцо. Транспонирование матриц – операция над $m \times n$-матрицей $A = (a_{ij})$ (см. (0.1) превращающая ее в $m \times n$-матрицу $A^\top$, у которой (i, j)-ый коэффициент равен (j, i)-ому коэффициенту матрицы A. Свойства операции транспонирования следующие:

$$(A + B)^\top = A^\top + B^\top; (rA)^\top = rA^\top r; \ \left((A^\top)\right)^\top = A \qquad (0.8)$$

Эти равенства выполняются для любых матриц $A, B \in \mathbf{Mat}_{m \times n}(R)$ и любого элемента $r \in R$.

6 . Вычислить $2A - 3B^\top$, если

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

7 . Сколько бинарных (содержащих лишь 0 и 1) матриц размера 4×5? Сколько матриц размера $m \times n$ над кольцом из k элементов?

Произведение матриц

Определим произведение строки длины n на столбец высоты n как сумму произведений первых, вторых и т. д. последних компонент:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

В частности, произведение строки длины 1 на столбец длины 1 есть произведение этих двух элементов в кольце R.

Пусть теперь у нас кроме $m \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$ имеется еще $n \times k$-матрица $B = (b_{ij})$, у которой число строк $(= n)$ совпадает с числом столбцов матрицы A. Тогда произведение AB – это матрица $D = (d_{ij})$ размера $m \times k$, (i, j)-ый коэффициент которой равен произведению i-ой строки матрицы A на j-ый столбец матрицы B:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{in} b_{nj} = (a_{i1} + \ldots + a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Мотивировка такого определения содержится в подсчете композиции двух линейных преобразований, см. (0.4).

8 . Вычислить

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$$

Дистрибутивность умножения по отношению к сложению: *для любой $m \times n$-матрицы A и любых матриц B, C размера $n \times k$ имеет место равенство*

$$A(B + C) = AB + AC$$

Если же матрица A имеет размер $k \times n$, а матрицы B и C как и выше, то

$$(B + C)A = BA + CA.$$

Свойство дистрибутивности легко следует из линейности операции суммирования:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j + \sum_{j=1}^{n} b_j; \ \sum_{j=1}^{n} k \cdot a_j = k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{0.9}$$

Определим *матричную единицу* e_{ij} как $m \times n$-матрицу, у которой на месте (i, j) стоит единица кольца R, а на остальных местах нули. Любую $m \times n$-матрицу $A = (a_{ij})$ можно разложить в сумму

$$A = \sum_{1 \le i \le m; 1 \le j \le n} a_{ij} e_{ij}$$

Верно равенство

$$e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il} \tag{0.10}$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j \\ 0, & \text{если} \quad i \ne j \end{cases}$$

так называемый *символом Кронекера.*

Ассоциативность произведения матриц. *Для любых матриц A, B, C размеров $m \times n$, $n \times k$, $k \times l$ соответственно имеет место равенство:*

$$A(BC) = (AB)C. \tag{0.11}$$

Это тождество в силу дистрибутивности достаточно проверить для матричных единиц:

$$e_{ij}(e_{kl} e_{pq}) = (e_{ij} e_{kl}) e_{pq} \ \Leftrightarrow \ \delta_{jk} \delta_{lp} e_{iq} = \delta_{jk} \delta_{lp} e_{iq},$$

что верно.

Множество $\mathbf{Mat}_{n \times n}(R)$ всех $n \times n$-матриц образует кольцо (см. §). Короче его будем обозначать так: $\mathbf{Mat}_n(R)$. Кольцо $\mathbf{Mat}_n(R)$ имеет нейтральный элемент относительно умножения – единичную матрицу. Квадратную $n \times n$-матрицу E назовем *единичной*, если у ней на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы – нули.

9 . Единичная матрица – нейтральный элемент по отношению к произведению матриц, то есть $EA = A$, $AE = A$ для любой матрицы A. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = E \quad (e_{ii} \in \mathbf{Mat}(n \times n; R)). \tag{0.12}$$

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Mat}_{n\times n}(K)$ называется *верхнетреугольной*, если ниже главной диагонали матрицы A стоят нули. Аналогично, A – *нижнетреугольная матрица*, если выше главной диагонали матрицы A стоят нули. Матрица A *треугольная*, если она либо верхнетреугольная, либо нижнетреугольная.

10 . Произведение и сумма верхнетреугольных матриц снова верхнетреугольная матрица. Тоже самое верно для нижнетреугольных матриц. Другими словами, верхнетреугольные (нижнетреугольные) матрицы образуют подкольцо кольца $\mathbf{Mat}(n \times n; R)$

11 Предложение. *Для любых матриц A, B над коммутативным кольцом (см. §), произведение которых определено, имеет место равенство:*

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Действительно, (j, i)-ый коэффициент матрицы $B^\top A^\top$ равен

$$(b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jn}) \cdot (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})^\top = b_{j1}a_{1i} + b_{j2}a_{2i} + \ldots + b_{jn}a_{ni},$$

что совпадает с (i, j)-ым элементом матрицы AB.

Элементарные преобразования

Элементарными преобразованиями строк матрицы (не обязательно квадратной) называется

(1 тип) прибавление к i-ой строке j-ой, умноженной предварительно слева на какой- либо элемент из K;

(2 тип) перестановка двух строк;

(3 тип) умножение строки слева на обратимый элемент из R. Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов матрицы*, только всюду слово "слева" надо заменить на слово "справа".

$n \times n$-Матрица D называется *обратной* к $n \times n$-матрице A, если $AD = DA = E$. Обратная матрица единственна, если она существует, и в этом случае она обозначается как A^{-1}.

12 . Проверить справедливость равенств

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Определим теперь *элементарные матрицы*:

1 тип: $E + k \cdot e_{ij}$, где $k \in R$ и $i \neq j$;

2 тип: матрица $s_{ij} = E - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$, полученная из единичной матрицы перестановкой i-ой и j-ой строки;

3 тип: матрица $E - e_{ii} + k \cdot e_{ii}$, где элемент k – обратим.

13 . Элементарные преобразования строк (столбцов) матриц обратимы. Элементарные матрицы обратимы, и обратная матрица к элементарной матрице сама является элементарной. Элементарные преобразования строк матриц 1-го, 2-го и 3-го типов – это то же самое, что умножение слева на элементарные матрицы 1-го, 2-го и 3- го типа. Аналогичное утверждение имеет место для элементарных преобразований столбцов матриц.

14 . Укажите в $\mathbf{Mat}_3(\mathbb{Q})$ какую-либо матрицу X с условием $X^3 = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 32 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0*8 & \end{pmatrix}$

15 . Решите в $\mathbf{Mat}_2(\mathbb{Q})$ уравнения а) $X^2 = 0$, б) $X^3 = 0$, в) $X^2 = X$, г) $X^2 = E$, д) $X^2 = -E$

Решим уравнение $X^2 = 0$, т.е. $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Возводя в квадрат и приравнивая к соответствующему элементу правой части, получим систему

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ xy + yt = 0 \\ zx + tz = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$$

Если $x + t \neq 0$, то $y = z = 0$ и из крайних уравнений системы следует, что $x = t = 0$, тем самым $x + t = 0$ – противоречие с предположением. Итак, доказано, что $x+t = 0$ и тогда все сводится к одному соотношению $yz = -t^2$. Либо $z \neq 0$ и тогда $X = \begin{pmatrix} -t & -t^2/z \\ z & t \end{pmatrix}$, либо $z = 0$ и тогда $X = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Всюду далее K обозначает некоторое поле. Под полем K можно подразумевать либо поле вещественных чисел, либо поле комплексных чисел. *Системой m линейных уравнений с n неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m. \end{cases} \tag{0.13}$$

Здесь a_{ij}-ые и b_j-ые – коэффициенты системы, т.е. какие-либо элементы поля K. Линейная система (0.13) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение и называется *несовместной* в противном случае. Совместная система называется *определенной*, если она имеет в точности одно решение и называется *неопределенной*, если система имеет более одного решения.

Пусть имеются две системы уравнений (не обязательно линейных) с одним и тем набором неизвестных – "новая" и "старая". Новая система есть *следствие* старой, если всякое решение старой системы одновременно есть решение новой системы. Две таких системы уравнений называются *эквивалентными*, если их множества решений совпадают, иными словами, если каждая из них есть следствие оставшейся.

Решать систему (0.13) будем *методом последовательного исключения неизвестных* или иначе *методом Гаусса.*

Элементарными преобразованиями линейной системы уравнений называется:

(1 тип) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на какое-либо число;

(2 тип) перестановка двух уравнений;

(3 тип) умножение какого-либо уравнения системы на ненулевой элемент поля K;

(4 тип) отбрасывание или дописывание нулевого уравнения.

16 Предложение. *Любое элементарное преобразование обратимо, то есть существует элементарное преобразование, применение которого к полученной системе, возвращает ее в исходное состояние.*

Как следствие получаем: *при элементарном преобразовании получается система, эквивалентная исходной.*

Процесс элементарных преобразований имеет конечную цель – ступенчатый вид системы. Система (0.13) имеет *ступенчатый вид* , если первое ненулевое слагаемое каждого последующего уравнения стоит правее чем первое ненулевое слагаемое предыдущего уравнения.

17 Теорема. *Любую систему линейных уравнений элементарными преобразованиями* 1*-го и* 2*-го типов можно привести к ступенчатому виду.*

◀ Считаем, что один из коэффициентов, стоящих в первом столбце, не равен 0. Иначе переходим к следующему столбцу и так далее пока не наткнемся на столбец, имеющий хотя бы один, отличный от нуля коэффициент. Если такового не окажется, то есть все $a_{ij} = 0$ и все $b_j = 0$, то доказывать нечего – система уже имеет ступенчатый вид. Итак, пусть $a_{i1} \neq 0$ для некоторого индекса i. Совершив, если нужно, (т.е. если $a_{11} = 0$), элементарное преобразование третьего типа – перестановка первого и i-го уравнения, добьемся того, что на месте $(1, 1)$ будет стоять не равный нулю коэффициент. Переобозначим коэффициенты так, что именно $a_{11} \neq 0$. Тогда, прибавляя к второму уравнению первое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, "занулим" коэффициент, стоящий на месте $(2, 1)$. Аналогичными преобразованиями занулим коэффициенты, стоящие на местах $(3, 1), ..., (m, 1)$. Получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n & = b_1, \\ \quad a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + ... + a_{2n}'x_n & = b_2', \\ .... & ... \\ \quad a_{m2}'x_2 + a_{m3}'x_3 + ... + a_{mn}'x_n & = b_m'. \end{cases} \tag{0.14}$$

Применим предположение индукции к последним $n - 1$ – уравнению системы (0.14) и приведем эту "подсистему" к ступенчатому виду. Тогда и вся система (0.14) примет ступенчатый вид. ►

Исследование системы по ступенчатому виду. Предположим, что система линейных уравнений приведена к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_k x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1, \\ \quad a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n & = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots \\ \quad a_{mp}x_p + \dots & = b_m. \end{cases} \tag{0.15}$$

Здесь $x_1, x_k, \dots, x_p$ – неизвестные, стоящие в углах ступенчатого вида. Их мы будем называть *главными*. Остальные неизвестные (их может и не быть) называются *свободными*. По определению ступенчатого вида имеем: $1 < k < \dots < p$. Вообще-то в ступенчатом виде могут присутствовать нулевые уравнения, то есть уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots 0 \cdot x_n = 0$. Но их можно отбросить (см. элементарное преобразование четвертого типа).

Обсудим сначала случай, когда система не имеет решения.

Если в процессе приведения к ступенчатому виду или в самом ступенчатом виде встретилось уравнение

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots 0 \cdot x_n = b, \tag{0.16}$$

где $b \neq 0$, то это уравнение не имеет решения, а, значит, и исходная система несовместна.

Считаем далее, что уравнение вида (0.16) нам не встретилось. Число ненулевых уравнений может быть меньше или равно числу неизвестных, но не может превосходить n. Действительно, каждая ступенька имеет ширину ≥ 1, следовательно общая ширина ступенек больше чем число ненулевых уравнений, а с другой стороны общая ширина ступенек вместе с последней не может превосходить n.

Завершает решение системы *обратный процесс*. Это серия элементарных преобразований, уравнений системы (0.14), начиная с последнего, позволяющая записать главные неизвестные через свободные в виде *линейной комбинации*. Сначала выражают x_p через все последующие неизвестные, пользуясь последним, m-ым уравнением:

$$x_p = b_m/a_{mp} - a_{mp+1}/a_{mp}x_{p+1} - \dots - a_{mn}/a_{mp}x_n.$$

(Если $p = n$, то это выражение имеет вид: $x_n = b_m/a_{mn}$). Далее, применяя элементарные преобразования 1 типа, зануляют все коэффициенты в (0.14), стоящие над коэффициентом a_{mp} точно также как мы это делали в "прямом" процессе приведения системы к ступенчатому виду (см. доказательство теоремы 17). Тогда из получившегося последнего уравнения выражают предпоследнее главное неизвестное через оставшиеся свободные неизвестные и так далее пока не доберемся до первого главного неизвестного и не выразим его через свободные неизвестные. Итак, мы видим, что

> *если в ступенчатом виде все неизвестные главные ($m = n$), то система определена. Если же имеются свободные неизвестные, то система неопределена, и общее решение получается обратным процессом, выражающим главные неизвестные через свободные.*

При этом свободные неизвестные играют роль параметров, "свободно" и независимо друг от друга пробегающих множество элементов поля K. В этом случае система неопределена. Формулы, выражающие неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через параметры задают *общее решение системы*, и число параметров называется *размерностью пространства решений.*

Исследование системы по ступенчатому виду как и изложение метода Гаусса закончено.

Рассмотрим теперь важный частный случай *однородной системы*, т.е. случай когда все b_i-ые в правой части (0.13) равны 0. Такая система заведомо совместна, поскольку строка из нулей – $(0, 0, \ldots, 0)$ является решением. Критерий существования ненулевого решения дает следующая теорема представляющая из себя непосредственное следствие метода Гаусса.

18 Теорема. *Однородная система имеет ненулевое решение, т.е. является неопределенной в том и только том случае, когда после приведения к ступенчатому виду число ненулевых уравнений меньше чем число неизвестных. В частности это так, если изначальная однородная система имела число уравнений меньше чем число неизвестных.*

19 . Решить СЛАУ

$$\begin{cases} 2x+2y-z+t &= 4 \\ 4x+3y-z+2t &= 6 \\ 8x+5y-3z+4t &= 12 \\ 3x+3y-2z+2t &= 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} 6x+5y-2z+4t &= 0 \\ 9x-y+4z-t &= 0 \\ 3x+4y+2z-2t &= 0 \\ 3x-9y+2t &= 0 \end{cases}$$

Для второй системы найти размерность и базис пространства решений.

Определители

Далее матрицы рассматриваются на некоторым полем K (снова можно считать $K=\mathbb{R}$, либо $K=\mathbb{C}$). Пусть $A=(a_{ij})$ – $n\times n$-матрица над полем K. *Определителем* матрицы A называется элемент поля K, который вычисляется по следующему правилу

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \; a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}. \tag{0.17}$$

Здесь стоит сумма $n!$ слагаемых со знаками плюс или минус. Произведение

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$$

построено так, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы A стоит ровно один сомножитель из этого произведения.

20 Теорема. *Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали. В частности,* $\det E = 1$.

◀ Пусть $A=(a_{ij})$ – верхнетреугольная $n\times n$-матрица. Тогда

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = 0,$$

если хотя бы для одного индекса i имеет место неравенство $\sigma(i)<i$. Рассмотрим оставшийся случай: для любого i выполнено неравенство $\sigma(i)\geq i$. Тогда $\sigma(n)=n$; далее $\sigma(n-1)=n-1$ и т.д. вплоть до $\sigma(1)=1$. Итак, в оставшемся случае имеется только одна подстановка – единичная. Тогда $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$. Для нижнетреугольной матрицы надо

заменить в рассуждениях выше знаки неравенств на противоположные. ▶

Пространство строк длины m над полем K будем обозначать K^m, в то время как пространство столбцов той же длины обозначаем как ${}^mK$. Пусть $F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ – функция строк длины m ($\mathbf{x}_i \in K^m$), т.е. любому набору n строк длины m сопоставляется элемент из поля K. Таковой функцией является определитель $\det A$, если $n \times n$-матрицу A представлять как совокупность своих строк: $A = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)^\top$, при этом в данном случае $m = n$. Функция F называется *полилинейной*, если для любых элементов $\lambda, \mu \in K$ и любого индекса i имеет место равенство

$$F(\ldots \lambda \mathbf{x}_i' + \mu \mathbf{x}_i'' \ldots) = \lambda F(\ldots \mathbf{x}_i' \ldots) + \mu F(\ldots \mathbf{x}_i'' \ldots)$$

(точками обозначены аргументы с номерами $\neq i$). Функция F называется *кососимметричной*, если при перестановке двух аргументов ее значение меняет знак:

$$F(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) = -F(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i \ldots) \tag{0.18}$$

Если в поле K двойка не равна нулю, то из кососимметричности сразу следует равенство

$$F(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) = 0 \text{ в случае } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j. \tag{0.19}$$

Если же в поле K двойка равна нулю (например, $K = \mathbb{Z}_2$) , то определение кососимметричности следует подправить: полилинейная функция называется кососимметричной, если она равна 0 в случае совпадения каких-либо двух аргументов.

Из второго определения следует кососимметричность в смысле первого определения. Действительно, из равенств

$$\begin{gathered} 0 = F(\ldots \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j \ldots) = \\ = F(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_i \ldots) + F(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) + F(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i \ldots) + \\ + F(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_j \ldots) = F(\ldots \mathbf{x}_i \ldots \mathbf{x}_j \ldots) + F(\ldots \mathbf{x}_j \ldots \mathbf{x}_i \ldots) \end{gathered}$$

сразу вытекает соотношение (0.18).

21 Теорема. *Определитель есть полилинейная и кососимметричная функция строк матрицы.*

◀ Ограничимся доказательством линейности по первой строке матрицы:

$$\begin{vmatrix} \lambda a'_{11}+\mu a''_{11} & \lambda a'_{12}+\mu a''_{12} & \dots & \lambda a'_{1n}+\mu a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ (\lambda a'_{1\sigma(1)} + \mu a''_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ a'_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} + \mu \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ a''_{1\sigma(1)}) a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мы видим, что линейность по любой строке матрицы следует из линейности оператора суммирования. Далее, пусть в матрице $A = (a_{ij})$ мы переставили t-ую и s-ую строку и получили матрицу $B = (b_{ij})$. В этой матрице

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq t, i \neq s; \\ a_{sj}, & \text{если } i = t; \\ a_{tj}, & \text{если } i = s. \end{cases}$$

Обозначим через τ транспозицию (ts). Без ограничения общности можно считать, что $t < s$. Отображение $S_n \to S_n$, сопоставляющее подстановке σ подстановку $\sigma\tau$, есть биекция, ибо оно обратимо, и $\rho \to \rho\tau^{-1} = \rho\tau$ служит обратным. Тогда

$$\det B = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ b_{1\sigma(1)} \dots b_{t\sigma(t)} \dots b_{s\sigma(s)} \dots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) \ b_{1\sigma\tau(1)} \dots b_{t\sigma\tau(t)} \dots b_{s\sigma\tau(s)} \dots b_{n\sigma\tau(n)} =$$

$$= - \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ b_{1\sigma(1)} \dots b_{t\sigma(s)} \dots b_{s\sigma(t)} \dots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= - \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \ a_{1\sigma(1)} \dots a_{s\sigma(s)} \dots a_{t\sigma(t)} \dots a_{n\sigma(n)} = -\det A,$$

что и требовалось доказать. Здесь учтено, что при умножении на транспозицию четность подстановки меняется (см. лемму 228). ▶

Следующая теорема – центральное утверждение в теории определителей. По существу она характеризует определитель аксиоматически двумя свойствами – полилинейностью и кососимметричностью.

22 Теорема. *Любая полилинейная и кососимметричная функция строк матрицы*

$$\mathcal{D} : \mathbf{Mat}_{n\times n}(K) \to K$$

пропорциональна определителю, а именно имеет место равенство $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(E)\det A$ *для любой* $n \times n$*-матрицы* A*. Если, кроме того,* $\mathcal{D}(E) = 1$*, то функция* $\mathcal{D}$ *совпадает с определителем.*

◀ Произвольная $n \times n$-матрица $A = (a_{ij})$ может быть записана как $A = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}e_{ij}$. Пользуясь полилинейностью, получаем равенство

$$\mathcal{D}(A) = \sum_{1\le j_1,\ldots,j_n\le n} a_{1j_1}\ldots a_{nj_n}\mathcal{D}(e_{1j_1} + \ldots + e_{nj_n}).$$

Но $\mathcal{D}(e_{1j_1}+\ldots+e_{nj_n}) = 0$, если найдутся индексы $i \ne i'$ такие, что $j_i = j_{i'}$ (см. соотношение (0.19)). Если же индексы $j_1, j_2, \ldots, j_n$ все различны, то

$$\mathcal{D}(e_{1j_1} + \ldots e_{nj_n}) = \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)\,\mathcal{D}(e_{11} + \ldots + e_{nn}) =$$

$$= \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)\,\mathcal{D}(E),$$

как следует из кососимметричности. Обозначив подстановку $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ через σ, мы приходим к равенству

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(E)\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)} = \mathcal{D}(E)\det A.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. ▶

Отметим теперь некоторые свойства определителей

23 Свойство *Определитель матрицы равен определителю транспонированной матрицы.*

◀ Пусть матрица $B = (b_{ij})$ получается из $n \times n$-матрицы A транспонированием. Учтем совпадение знаков у подстановок σ и σ^{-1} (см. теорему 229). Тогда

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\dots a_{\sigma^{-1}(n)n} =$$

$$= \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}\mu\ a_{\mu(1)1}a_{\mu(2)2}\dots a_{\mu(n)n} = \sum_{\mu\in S_n} \operatorname{sgn}\mu\ b_{1\mu(1)}b_{2\mu(2)}\dots b_{n\mu(n)} = \det B,$$

что завершает доказательство свойства. ▶

В силу равенства $\det A = \det A^\top$ все свойства, доказанные для строк, автоматически переносятся на столбцы и наоборот. В частности: *определитель – полилинейная и кососимметричная функция столбцов матрицы.*

24 Свойство *Определитель равен нулю, если какие-либо две строки (два столбца) совпадают.*

Это свойство мы отмечали ранее в более общем случае для полилинейной функции. Следующее свойство также следствие полилинейности.

25 Свойство *Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.*

26 Свойство *Определитель не изменится, если над строками (столбцами) совершить элементарное преобразование первого типа, т.е. к одной строке прибавить другую, умноженную на какое-либо число.*

◀ Это утверждение – следствие полилинейности и свойства 24:

$$F(\dots \mathbf{x}_i + \lambda\mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_j \dots) = F(\dots \mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_j \dots) + \lambda F(\dots \mathbf{x}_j \dots \mathbf{x}_j \dots) =$$

$$= F(\dots \mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_j \dots)$$

Здесь F – любая полилинейная и кососимметричная функция строк. ▶

Прежде, чем формулировать следующее свойство, приведем определение минора матрицы. *(i,j)-ым минором матрицы A* называется определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. Обозначается этот минор – M_{ij}. *Алгебраическим дополнением (i,j)-го элемента матрицы A* называется величина $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

27 Лемма. *Пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}$, $\mathbf{b}$ – строки длины k. Образуем две $k\times k$-матрицы B_i и B_j, вставив строку $\mathbf{b}$ в $(k-1)\times k$-матрицу $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1})^\top$*

сначала на i-ом месте, а затем на j-ом месте ($1 \le i, j \le k$). Тогда $\det B_i = (-1)^{j-i} \det B_j$.

◀ Считаем $i < j$. Матрица B_j получается из матрицы B_i перестановками-транспозициями i-ой строки (которая равна $\mathbf{b}$) с ниже расположенными $(j-i)$-строками. При каждой перестановке знак определителя меняется, и всего происходит $j - i$ смен знаков. ▶

28 Свойство (разложение определителя по столбцу (строке)) *Для i-строки и для j-го столбца имеет место разложение определителя $n \times n$-матрицы A:*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj};$$

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

◀ Фиксируем индекс j и проверим условия теоремы 22 для функции $\mathcal{D}(A) := a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$.

1. Функция $\mathcal{D}(A)$ полилинейна.

Линейность по строке с номером t, компоненты которой запишем как переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, означает возможность записать $\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_n)$ в виде $x_1D_1 + x_2D_2 + \ldots + x_nD_n$ для каких-то фиксированных элементов $D_1, \ldots, D_n \in K$. Слагаемое $a_{tj}A_{tj}$ линейно, так как $x_j = a_{tj}$ и A_{tj} не зависит от x_i-ых. Остальные слагаемые $a_{t'j}A_{t'j}$ при $t' \neq t$ линейны по x_i-ым, так как минор $M_{t'j}$ линеен по строке, совпадающей с $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, а $a_{t'j}$ не является переменной. Сумма линейных функций линейна, и произведение линейных функций на элемент поля K также линейно. Получаем утверждение настоящего пункта.

2. Функция $\mathcal{D}(A)$ кососимметрична.

Пусть у матрицы A строки с номерами t и s совпадают ($t < s$). Тогда $A_{ij} = 0$, если $i \neq t$ и $i \neq s$, ибо у минора M_{ij} в этом случае будут две совпадающие строки. Следовательно остается $\mathcal{D}(A) = a_{tj}A_{tj} + a_{sj}A_{sj} = a_{tj}(A_{tj} + A_{sj})$. В силу леммы 27, имеет место равенство $M_{sj} = (-1)^{(s-1)-t}M_{ts}$. (Роль строки $\mathbf{b}$ в лемме играет укороченная t-ая строка матрицы A, из которой выброшен j-ый компонент; при этом номер этой строки в миноре M_{sj} будет t, а в миноре M_{tj} этот номер будет равен $s - 1$ в силу неравенства $t < s$. Роль k играет число $n - 1$. Заметим, что

$(-1)^{(s-1)-t} = (-1)^{t-s+1}$. Тогда

$$A_{tj} + A_{sj} =$$

$$= (-1)^{t+j} M_{tj} + (-1)^{s+j} M_{sj} = (-1)^{t+j} M_{tj} + (-1)^{s+j}(-1)^{t-s+1} M_{tj} =$$
$$= (-1)^{t+j} M_{tj} + (-1)^{t+j+1} M_{tj} = (-1)^{t+j}(M_{tj} - M_{tj}) = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{D}(A) = 0$ в этом случае. Проверка кососимметричности закончена.

3. Нетрудно вычислить $\mathcal{D}(E) = 1 \cdot A_{jj} = 1$. Остается применить теорему 22. ▶

Имеют место также *ложные разложения по r-ой строке и r-ому столбцу*; если $r \neq i$ и $r \neq j$, то

$$0 = a_{r1}A_{i1} + a_{r2}A_{i2} + \ldots + a_{rn}A_{in},$$
$$0 = a_{1r}A_{1j} + a_{2r}A_{2j} + \ldots + a_{nr}A_{nj}.$$

Действительно, правая часть здесь совпадает с определителем матрицы, у которой две строки (два столбца) совпадают.

29 . Вычислить определители

$$a)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix};\ b)\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{bmatrix};\ c)\ \begin{bmatrix} 999 & 998 & 997 \\ 996 & 995 & 994 \\ 993 & 992 & 990 \end{bmatrix}$$

30 . Вычислить определители

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{bmatrix};\ b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{bmatrix};\ c)(\det \max\{i, j\})$$

31 . Вычислить определитель матрицы с нулями на главной диагонали и единицами на остальных местах.

Речь идет о матрице

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что такая матрица есть не что иное как матрица смежности полного графа. Прибавляя к первой строке все остальные строки получаем $(n-1, n-1, \ldots, n-1)$ в качестве первой строки. Вынося за знак определителя общий множитель $n-1$ из первой строки и затем вычитая из каждой строки, начиная со второй первую строку, получаем

$$\det D_n = (n-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-2}(n-1) = (-1)^n(n-1)$$

32 . Две строки матрицы 3×3 заполнены целыми числами так, что НОД чисел в каждой из них равен единице, и строки не пропорциональны над $\mathbb{Q}$. Всегда ли возможно заполнить целыми числами третью строку так, что бы определитель оказался единичным?

Подсказка. Рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ m & k & l \end{pmatrix}$$

и ее миноры M_{31}, M_{32}, M_{33}. Или, по-другому, рассмотреть соотношение $AB = E$ по модулю 2.

33 . Двое по очереди заполняют целыми числами клетки матрицы 3×3. Первый выигрывает, если в результате получиться вырожденная матрица. Кто победит?

34 . Сколько квадратных матриц порядка n с единичным определителем над полем из q элементов?

35 . Числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ всевозможными способами организуются в квадратные матрицы $n \times n$. Найдите сумму определителей этих матриц.

Матрица называется *трехдиагональной*, если на главной диагонали все числа одинаковы, а также над главной и под главной все числа одинаковы, а все остальные коэффициенты равны 0:

$$D_n(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & b & 0 & & 0\ldots & 0 \\ c & a & b & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c & a \end{bmatrix};$$

36 . Вывести рекуррентное линейное соотношение связывающее $\det_n(a,b,c)$, $\det_{n-1}(a,b,c)$, $\det_{n-2}(a,b,c)$

37 . Покажите, что определитель трехдиагональной матрицы с единицей на главной диагонали и над ней и -1 под ней является числом Фибоначчи, т. е. подчиняется следующему рекуррентному соотношению: $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ и начальным условия $f_0 = f_1 = 1$.

Вычисление определителей некоторых матриц

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и называется *вырожденной* в противном случае.

38 Теорема. *Определитель произведения матриц равен произведению определителей:* $\det(AB) = \det A \det B$ *(для любых $n \times n$-матриц A и B).*

◀ Фиксируем матрицу B. Тогда функция $\mathcal{D}(A) = \det AB$ полилинейна и кососимметрична. Это легко следует из определения умножения матриц. По теореме единственности получаем: $\det AB = \mathcal{D}(A) = \det A \cdot \mathcal{D}(E) = \det A \cdot \det B$ ▶

Следствие. *Произведение вырожденной матрицы на любую квадратную матрицу того же размера снова будет вырожденной матрицей. Произведение невырожденных матриц является невырожденной матрицей.*

39 Теорема. (определитель с углом нулей) *Пусть A, B – квадратные матрицы (не обязательно одинакового размера). Тогда*

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B \tag{0.20}$$

для любой матрицы C подходящего размера. Аналогично,

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ D & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B \tag{0.21}$$

для любой матрицы D подходящего размера.

◄ Левая часть в (0.20) – полилинейная функция столбцов матрицы A и строк матрицы B. Следовательно, по теореме единственности,

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B; \quad \begin{vmatrix} E & C \\ 0 & E \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

►

Определитель Вандермонда

Для любых $x_1, \dots, x_n$ имеет место равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{0.22}$$

В правой части здесь стоит произведение вида

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})$$

(всего $\frac{n(n-1)}{2}$ сомножителей.)

◄ Вычтем из каждого последующего столбца предыдущий, умноженный на x_1, а далее разложим по получившейся первой строке – (1,0,0. . . ,0). Приходим к определителю $(n-1) \times (n-1)$:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}$$

Далее вынесем из строк множители $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1)$ и сведем задачу к вычислению такого же определителя меньшего размера. Применение индукции заканчивает доказательство. ►

40 . Вычислить определители

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 & 125 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 49 & 243 \\ 243 & 49 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Обратная матрица

Далее в этом параграфе матрицы рассматриваются над полем. $n \times n$-Матрица D называется *обратной* к $n \times n$-матрице A, если $AD = DA = E$. В этом случае матрица A будет обратной для матрицы D, т. е. можно говорить о взаимно обратных матрицах. Отметим, что это определение в точности такое же, как и для чисел: два числа a и d взаимно обратны, если х произведение равно единице. Матрица A не может иметь более одной обратной к ней матрицы. В самом деле, пусть D^* еще одна обратная к A матрица. Тогда

$$D^* = D^*E = D^*(AD) = (D^*A)D = ED = D,$$

что и доказывает утверждение.

Обратная матрица обозначается как A^{-1}. Обозначение в виде дроби не применяется, так как умножение матриц некоммутативно. Установить следующие свойства.

1. Единичная матрица обратима.
2. Если матрица A обратима, то A^{-1} также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Если матрицы A и B обратимы, то матрица AB также обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

41 Теорема. *Обратная матрица к $n \times n$-матрице A существует тогда и только тогда, когда матрица A невырождена. В этом случае*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{0.23}$$

где A_{ij}, как и ранее, есть алгебраическое дополнение к (i, j)-тому элементу матрицы A.

◀ Если матрица A вырождена, то и AB вырождена (см. следствие **??**), поэтому произведение не может быть равно единичной матрице.

Предположим теперь, что $\det A \neq 0$. Тогда правая часть в (0.23) определена, и можно убедиться непосредственной проверкой, что ее произведение на матрицу A дает единичную матрицу; при этом используются свойства разложения и ложного разложения определителя матрицы по столбцу (строке). ▶

42 Предложение. *Имеет место равенство* $\det A^{-1} = 1/\det A$ *для любой невырожденной матрицы* A.

Действительно, применение теоремы об определителе произведения матриц к $A \cdot A^{-1} = E$ дает равенство $\det A \det A^{-1} = 1$, откуда и следует нужное равенство. ▶

Обозначим через $\mathrm{GL}(n, K)$ множество невырожденных $n \times n$-матриц. Из выше доказанного следует, что это множество – группа относительно умножения. Ее называют *общей линейной группой*. Более того, отображение $\det : \mathrm{GL}(n, K) \to K \setminus \{0\}$ – гомоморфизм общей линейной группы в группу ненулевых элементов поля K (относительно умножения). Ядро этого гомоморфизма, т.е. совокупность всех $n \times n$-матриц с единичным определителем, составляет подгруппу группы $\mathrm{GL}(n, K)$, которая называется *специальной линейной группой* и обозначается $\mathrm{SL}(n, K)$.

43 . Найти

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$$

при $a \neq 0$.

44 . Если $N \in \mathbf{Mat}_n(F)$ – нильпотентная матрица ($N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$), то

$$(E - N)^{-1} = E + N + N^2 + \cdots + N^{k-1}$$

Показать, что здесь можно считать $k \leq n$.

45 . Показать, что матрица $E - AB$ обратима в том и только том случае, когда матрица $E - BA$ обратима.

46 . Пусть $G = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix}$ – блочная матрица. Здесь A, B – квадратные матрицы быть может разного порядка. Доказать, что матрица G обратима тогда и только тогда, когда матрицы A, B обратимы. Найти в этом случае G^{-1}.

47 . Найти

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$$

при $a \neq 0$.

48 . Если $A, B, C, D \in \mathbf{Mat}_n(F)$ и $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$обратимы, то матрицы $A - BD^{-1}C$, $C - DB^{-1}A$, $B - AC^{-1}D$, $D - CA^{-1}B$ тоже обратимы и

$$\begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1}$$

Матричный метод решения линейных систем

. Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными (0.25), §. Обозначим через $A = (a_{ij})$ матрицу этой системы, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top$ – столбец свободных членов и через $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ обозначим столбец неизвестных. Тогда эта система может быть записана в *матричном виде*:

$$AX = B \tag{0.24}$$

Умножив слева это соотношение на A^{-1}, приходим к следующему результату:

49 Предложение. *Если A невырожденная матрица, то система (0.24) определена, и ее решение находится по формуле $X = A^{-1}B$.*

Это предложение показывает, что принципиально уравнение (0.24) и метод его решения в случае невырожденности матрицы A ничем не отличается от уравнения вида $ax = b$ при $a \neq 0$.

50 . Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 2 \\ 4x + y - z = 2 \\ x + 3y - 5z = 9 \end{cases}$$

Правило Крамара

Рассмотрим линейную систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases} \tag{0.25}$$

51 Теорема. (правило Крамара) *Система (0.25) определена тогда и только тогда, когда матрица A невырождена. В этом случае решение находится по формулам:*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}, \tag{0.26}$$

где A_i – матрица, полученная из матрицы A заменой i-го столбца на столбец свободных членов $(b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top$.

◀ Заметим, что при элементарных преобразованиях системы 1-3 типов свойство невырожденности (вырожденности) матрицы системы сохраняется так же, как сохраняется значения правых частей равенств (0.26). Следовательно правило Крамара (без формул) достаточно доказать в случае, когда матрица A имеет ступенчатый вид. Если $\det A \neq 0$, то в ступенчатом виде на главной диагонали должны стоять ненулевые элементы (см. теорему 20 об определителе треугольной матрицы), т. е. система (0.25) будет определенной. Наоборот, если система (0.25) определена, то все неизвестные – главные, следовательно матрица ступенчатого вида невырождена, и поэтому $\det A \neq 0$. Остается проверить формулу (0.26) в случае $A = E$. Это тривиальность. ▶

52 Замечание Если $\det A = 0$, но $\det A_k \neq 0$ для какого-либо k, то система (0.25) несовместна.

Действительно, повторяя доказательство правила Крамара и сводя все к ступенчатой системе линейных уравнений, мы видим, что уравнение $\det A \cdot x_k = \det A_k$ является следствием системы (0.25). Так как это следствие в случае $\det A = 0$, $\det A_k \neq 0$ не имеет решения, то и исходная система не имеет решения.

53 Теорема. *Пусть (0.25) – однородная система, т. е.* $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. *Эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда* $\det A = 0$.

◀ Так как однородная система всегда совместна, то остается две возможности – эта система либо определена (т. е. имеет только нулевое решение), либо неопределена (т. е. имеет ненулевое решение). Остается применить правило Крамара. ▶

54 . Решить следующие системы методом Крамара

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y5z = 5 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 2x - 5y + 3z + t = 5 \\ 3x - 7y + 3z - t = -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t = 7 \\ 4x - 6y + 3z + t = 8 \end{cases} \quad ;$$

55 . Показать, что многочлен степени n вполне определяется его значениями y_j в $n+1$ точке x_j $(1 \leq j \leq n)$. Такой многочлен имеет вид

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n=1} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

(многочлен Лагранжа)

56 . Найти квадратный трехчлен $P(x)$, если $P(-1) = 9$, $P(1) = 1$, $P(2) = -3$.

57 . Найти многочлен третьей степени $P(x)$, для которого $P(-1) = 0$, $P(1) = 4$, $P(2) = 3$, $P(3) = 16$.

58 . Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x + y + z + t = a \\ x - y + z + t = b \\ x + y - z + t = c \\ x + y + z - t = d \end{cases}$$

59 . Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2(x+t)+3(y+z)=a \\ 4(y+t)+5(z+x)=b \\ -3(z+t)+2(x+y)=c \\ x+y+z+t=d \end{cases}$$

Ранг матрицы

Мы снова возвращаемся к системам линейных уравнений, используя теперь развитый в предыдущих параграфах аппарат линейных пространств.

Для квадратной линейной системы уравнений с вырожденной матрицей множество решений может быть бесконечным. В этом случае общее решение записывается в виде линейной комбинации столбцов с использованием параметров, которые есть не что иное как свободные неизвестные. Можно сказать, что количество параметров характеризует размерность пространства решений. Как узнать эту размерность по матрице системы? Имеет смысл ввести характеристику матрицы – ранг.

60 Теорема. *Для матрицы имеет место совпадение следующих чисел:*

(а) *максимальное число линейно независимых столбцов,*

(а') *размерность пространства, порожденного столбцами,*

(б) *максимальное число линейно независимых строк,*

(б') *размерность пространства, порожденного строками,*

(в) *максимальный размер минора, не равного нулю.*

◀ Достаточно доказать совпадение чисел, определенных в (б) и (в). Обозначим их r_1 и r_2 соответственно. При элементарных преобразованиях строк числа r_1 и r_2 не меняются. Следовательно можно считать, что матрица A приведена к ступенчатому виду с единицами в его углах:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{0.27}$$

Но теперь ясно, что числа r_1 и r_2 равны числу ненулевых строк матрицы A. ▶

61 Определение Число, определяемое одним из эквивалентных условий (а), (б), (в), называется *рангом матрицы* A и обозначается $\operatorname{rank} A$.

62 Следствие. *Матрица A размера $n \times n$ невырождена тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} A = n$.

Рангом множества $\mathcal{F}$ элементов линейного пространства назовем максимальное количество линейно независимых элементов из $\mathcal{F}$. В силу теоремы **??** это число совпадает с размерностью пространства, порожденного $\mathcal{F}$:

$$\operatorname{rank} \mathcal{F} := \dim \left(\sum_{\mathbf{f} \in \mathcal{F}} \mathbf{f} K \right) \tag{0.28}$$

63 Предложение. (метод окаймляющих миноров) *Пусть M – ненулевой минор матрицы A размера $r \times r$ и любой окаймляющий минор равен 0. Тогда* $r = \operatorname{rank} A$.

◀ Можно считать, что минор M стоит в левой верхнем углу и тем самым

$$A = \begin{pmatrix} M & D \\ T & B \end{pmatrix}.$$

Умножая первую блок-строку на $-TM^{-1}$ и прибавляя ко второй, сводим доказательство к случаю $T = 0$. Тогда $B = 0$, иначе находится ненулевой окаймляющий минор. Но тогда $\operatorname{rank} A = r$. ▶

64 Предложение. *Система n строк $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ $(1 \leq i \leq n)$ длины n линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\det(a_{ij}) = 0$. *Это в свою очередь равносильно тому, что* $\operatorname{rank}(a_{ij}) < n$. *Более общо, система m строк $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ $(1 \leq i \leq m)$ длины n линейно* *зависима тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}(a_{ij}) < m$. *В частности, если* $m > n$, *то строки* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *заведомо зависимы.*

◀ Достаточно доказать более общее утверждение. Но оно сразу вытекает из теоремы п. 60 ▶

65 Предложение. *Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.*

◀ Пусть $n = \operatorname{rank} A$ и определено произведение матриц AB. Каждый столбец матрицы AB есть линейная комбинация столбцов матрицы A; по другому $AB \cdot K^m \subseteq A \cdot K^k$ (m – число строк B, а k – число строк матрицы A). Из определения ранга следует, что $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} A$. Применяя аналогичное рассуждение к строкам матрицы B, находим, что $\operatorname{rank} AB \leq \operatorname{rank} B$ ▶

66 Следствие. *Если в предложении выше* B *– невырожденная квадратная матрица, то* $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} A$

В самом деле $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AB)B^{-1} \leq \operatorname{rank}(AB)$ согласно предложению. Отсюда следует равенство $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank} A$.

67 Предложение. *Ранг суммы матриц не больше чем сумма рангов этих матриц.*

◀ Доказываем неравенство $\operatorname{rank}(A + B) \leq \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$. Применяя элементарные преобразования строк и столбцов, доказательство сводим к случаю $A + B = E_n$ – единичная матрица порядка n. Тогда строки матрицы A вместе со строками матрицы B образуют полную систему $\mathcal{F}$ в n- мерном пространстве строк. Тем самым число линейно независимых строк в системе $\mathcal{F}$ равно n. Часть из этих строк в количестве k является строками матрицы A, а другая часть, в количестве $n - k$ будет строками матрицы B. Эти части являются линейно независимыми по отдельности (подмножество линейного независимого множества векторов само линейно независимо). Тогда $\operatorname{rank} A \geq k$ и $\operatorname{rank} B \geq n - k$, откуда $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \geq k + n - k = n = \operatorname{rank}(A + B)$. ▶

68 Следствие. *При умножении на невырожденную матрицу ранг не меняется.*

◀ Если B невырождена, то $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} ABB^{-1} \leq \operatorname{rank} AB \leq A$, откуда следует совпадение $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$. ▶

69 Теорема. (Кронекера-Капелли) *Система линейных уравнений общего вида (см. (0.13)) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы.*

◀ Пусть A_* – расширенная матрица. Если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A_*$, то последний столбец матрицы A_*, т. е. $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top$ принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы A. Следовательно найдутся элементы x_1^0, $x_2^0, \ldots$, x_n^0 поля K такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})^\top x_i^0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top \tag{0.29}$$

Но это и значит, что $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$ – решение системы (0.13). Наоборот, если $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$ – решение системы (0.13), то имеет место равенство (0.29); следовательно линейные оболочки столбцов матриц A и A_* совпадают, значит совпадают и их размерности, т. е. ранги. ▶

70 . Покажите, что над полем всякая матрица ранга 1 представима в виде произведения столбца и строки, а всякая квадратная матрица ранга 1 пропорциональна своему квадрату.

Решение. Пусть строки $m \times n$-матрицы A таковы: $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m$, а саму матрицу будет в этом случае записывать как $A = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_m]^\top$. Если $\operatorname{rank} A = 1$, то найдется ненулевая строка $\overline{a}_i$. Переставляя строки, добьемся чтобы эта строка стала первой. Перестановка строк эквивалентна переходу $A \to P{*}A$, где P невырожденная $m{\times}m$-матрица, которая и реализует данную перестановку. Для любого $j > 1$ найдется подходящий коэффициент k_j такой, что $\overline{a}_j = k_j {\cdot} \overline{a}_1$. Получаем $P{*}A = [1, k_2, \ldots, k_m]^\top {\cdot} \overline{a}_1$, откуда $A = (P^{-1} \cdot [1, k_2, \ldots, k_m]^\top) \cdot \overline{a}_1$ – требуемое представление. Обозначим $(b_1, b_2, \ldots, b_m)^\top = P^{-1} \cdot [1, k_2, \ldots, k_m]^\top$ и предположим $m = n$. Тогда

$$A^2 = ((b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top {\cdot} \overline{a}_1) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top {\cdot} (\overline{a}_1 (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top) {\cdot} \overline{a}_1 = k_0 {\cdot} (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

где $k_0 = \overline{a}_1 (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top$.

71 . Докажите, что над полем любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц единичного ранга, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

Решение. Пусть $\operatorname{rank} A = r$ и $A \in \mathbf{Mat}(m \times n; F)$. Тогда элементарными преобразованиями строк матрицу A можно привести к виду $[B, O]$, где $B \in \mathbf{Mat}(r \times n; F)$ имеет ранг r. Элементарные преобразования строк соответствуют умножению матрицы A слева на невырожденную матрицу $D \in \mathbf{Mat}_m(F)$, т.е. $DA = [B, O]$. Если $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_r$ – строки матрицы B, то $B = B_1 + \cdots + B_r$, где $B_j \in \mathbf{Mat}(m \times n; F)$ матрица ранга 1, в которой на месте j-ой строки стоит b_j, а остальные элементы нули $(1 \le j \le r)$. Так как $A = \sum_{j=1}^{r} D^{-1} B_j$, то первое утверждение доказано. Неравенство

$$\operatorname{rank}(H_1 + H_2) \le \operatorname{rank}(H_1) + \operatorname{rank}(H_2)$$

обеспечивает доказательство второго утверждения (см. предложение 67).

72 . Для матрицы $A \in \mathbf{Mat}(m \times n, F)$ обозначим через L_A линейное отображение $F^n \to F^m$ сопоставляющее столбцу $X \in F^n$ столбец $AX \in F^m$. Докажите для любых матриц $A \in \mathbf{Mat}(k \times l, F)$, $B \in \mathbf{Mat}(l \times m, F)$, $C \in \mathbf{Mat}(m \times n, F)$ неравенства

- $\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - l \le \operatorname{rank} AB \le \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$;
- $\dim \Im L_B = \dim \Im L_A L_B + \dim(\Im L \cap \operatorname{Ker} L_A)$;
- (неравенство Фробениуса) $\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC \le \operatorname{rank} ABC + \operatorname{rank} B$

Задачи для самостоятельного решения

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

73 . Решить систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3+3x_4=-5 \\ 2x_1+x_2+x_3+4x_4=2 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-2x_3+2x_4=-4 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \sqrt{2x}+y=3 \\ \sqrt{x}+\sqrt{2}y=3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} (\cos\varphi)x+(\sin\varphi)y=\operatorname{tg}\varphi \\ -\sin\varphi x+\cos\varphi y=1 \end{cases}$

74 . Исследовать систему при всех значениях параметра a:

а) $\begin{cases} ax+2y \quad =1 \\ 2x+ay \quad =-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5 \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ ax_1+4x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} ax_1+x_2+x_3= \\ x_1+ax_2+x_3= \\ x_1+x_2+ax_3= \end{cases}$

75 . Найти общее решение и фундаментальную систему решений уравнений:

$$\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4+x_6=0 \end{cases}$$

76 . Найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

а) $\begin{cases} 5x_1+3x_2+5x_3+12x_4=10 \\ 2x_1+2x_2+3x_3+5x_4=4 \\ x_1+7x_2+9x_3+4x_4=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -9x_1+10x_2+3x_3+7x_4=7 \\ -4x_1+7x_2+x_3+3x_4=5 \\ 7x_1+5x_2-4x_3-6x_4=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 12x_1+9x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+x_3+2x_4=3 \\ 8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-7 \\ 9x_1+6x_2+x_3+x_4+2x_5=2 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4+2x_5=3 \end{cases}$.

77 . Решить системы сравнений:

а) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$, $(\mod 5)$; б) $\begin{cases} 3x+2y+5z=1 \\ 2x+5y+3z=1 \\ 5x+3y+2z=4 \end{cases}$, $(\mod 17)$

78 . Пусть $AX = B$ – СЛАУ. Доказать, что СЛАУ $(A^\top A)X = A^\top B$ совместна.

79 . Доказать, что разность двух решений неоднородной системы есть решение соответствующей однородной системы.

80 . Пусть столбец из свободных членов а) равен сумме столбцов ее основной матрицы; б) совпадает с первым столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо решение системы.

81 . Указать пример системы 2×2 с неизвестными x, y , множество решений которой заполняет прямую $y = x$.

82 . Известны два решения системы – $(1, 7, 3)$ и $(5, 1, 9)$. Указать решение этой системы, у которого первая координата равна 3.

83 . Могут ли совпадать множества решений данной однородной системы и ее сопряженной?

84 . Пусть A – целочисленная матрица и d – наименьший из модулей ее элементов. Доказать, что если при целочисленных элементарных преобразованиях строк и столбцов матрицы A число d не уменьшается, то d делит все элементы этой матрицы A.

85 . Выяснить, будет ли квадратная целочисленная система линейных уравнений, совместная по модулю любого простого числа p, совместной над кольцом целых чисел.

86 . Доказать, что всякую систему линейных уравнений с вещественными коэффициентами можно привести к ступенчатому виду, используя лишь элементарные преобразования II типа.

87 . Доказать, что при целочисленных элементарных пребразованиях строк и столбцов целочисленной матрицы наибольший общий делитель ее миноров фиксированного порядка k не меняется.

88 . Доказать, что целочисленная система уравнений имеет целочисленное решение в том и только том случае, когда для любого натурального числа k наибольшие общие делители всех миноров порядка k в матрице системы и ее расширенной матрице совпадают.

89 . Пусть задана система линейных комплексных уравнений $AX = b$ с квадратной невырожденной матрицей A. Предположим, что сумма модулей элементов каждой строки матрицы $E + A$ меньше 1. Пусть X_0 – произвольный столбец и индуктивно определим $X_{m+1} = (A + E)X_m - b$. Тогда последовательность столбцов X_m сходится к решению уравнения $AX = b$.

90 . Найти все векторы пространства $\mathbb{R}^n$, переходящие в вектор $b \in \mathbb{R}^m$ при линейном отображении $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, заданном матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 3 & 4 & -9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 8 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -14 \\ 2 & -6 & -3 & -1 \\ 3 & -9 & -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$.

91 . Найти какой-нибудь базис ядра линейного отображения, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 11 & 17 & -8 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

92 . Найти многочлен $f(x)$ третьей степени такой, что $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = 7$.

93 . Найти многочлен $f(x)$ третьей степени, для которого $f(-2) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 13$, $f(2) = 33$

94 . Найти многочлен $f(x)$ четвертой степени, для которого $f(-3) = -77$, $f(-2) = -13$, $f(-1) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = -17$

Матрицы

95 . Записать $n \times n$ – матрицу у которой а) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$; б) $a_{ij} = \min\{i;j\}$;
в) $a_{ij} = \max\{i;j\}$.

96 . Найти матрицу а) $(1,2)^\top \cdot (3,1)$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^\top \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

97 . Перемножить матрицы.

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

98 . Выполнить действие

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

99 . Найти матрицу $(\mathrm{diag}(1,-1,2,-2))^5$.

100 . Квадратная матрица A удовлетворяет соотношению $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $\det A$.

101 . При каких значения параметра t матрица $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ является а) единичной; б) нулевой?

102 . Сколько различных матриц 2×2 над полем $\mathbb{Z}_3$? Сколько из них невырожденных?

103 . Вычислить значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:
а) $f(x) = x^2 - 1$ и $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $f(x) = x^3 - 3x + 2; \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; .

104 . Вычислить e^A, где

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$; $\qquad$ б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

105 . Рассмотрим квадратную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислить степени матрицы H.

106 . Даны матрицы A, B, C. Их размеры равны 2×3, 5×2, 3×1 соответственно. Указать, какие из произведений $ABC, BAC, CAB, ACB, BCA, CBA$ существуют.

107 . Пусть C,A – квадратные матрицы одного размера и $f(x)$ – многочлен. Доказать, что $f(CAC^{-1}) = Cf(A)C^{-1}$.

108 . Доказать, что множество верхнетреугольных (нижнетреугольных) $n \times n$ – матриц замкнуто относительно сложения и умножения и тем самым составляет подкольцо кольца $\mathbf{Mat}_{n\times n}(K)$.

109 . Квадратная матрица A называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого натурального n. Доказать, что всякая *строго верхнетреугольная $n \times n$ – матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & .... & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}$$

нильпотентна. Более точно, $A^n = 0$. Аналогичный результат имеет место для *строго нижнетреугольных матриц.*

110 . Пусть A – квадратная матрица, причем $E_{ii}A = AE_{ii}$ для всех i (E_{ij} – элементарные матрицы, у которых на (ij) месте единица, а остальные элементы – нули). Доказать, что матрица A диагональна.

111 . Доказать, что если C – невырожденная матрица, то для любой матрицы A того же порядка $\operatorname{Tr} CAC^{-1} = \operatorname{Tr} A$. ($\operatorname{Tr} A$ – *след матрицы* A, сумма ее элементов, стоящих на главной диагонали.)

112 . Матрица A с условием $A^\top = A$ называется *симметричной*, а с условием $A^\top = -A$, – *кососимметричной.* Докажите, что симметричные и кососимметричные матрицы квадратны и что любую матрицу над полем характеристики не равной двум можно записать в виде суммы симметричной и кососимметричной матриц.

◀ Пусть A – $m \times n$-матрица. Тогда размер транспонированной матрицы есть $n \times m$. Если $A = \pm A^\top$, то $m = n$, т.е. матрица A квадратна.

Над полем с характеристикой не равной для произвольной квадратной матрицы A можно построить матрицы $A_+ := (A + A^\top)/2$ и $A_- := (A - A^\top)/2$. Первая из симметрична, а вторая кососимметрична, ибо $(A \pm A^\top)^\top = A^\top \pm (A^\top)^\top = A^\top \pm A$. Очевидно выполняется равенство $A = A_+ + A_-$, которое и есть искомое представление. ▶

113 . Доказать, что а) произведение двух симметрических или кососимметрических матриц является симметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны; б) произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

114 . Найти все симметрические ортогональные и кососимметрические ортогональные матрицы порядка 2

115 . Доказать, что если матрица A размера 2×2 нильпотентна, то $A^2 = 0$.

116 . Решить матричное уравнение $AXB = C$ относительно неизвестной матрицы X. Здесь A и B – квадратные невырожденные матрицы.

117 . Доказать, что матрица $E - AB$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $E - BA$.

118 . Пусть A – нильпотентная матрица. Доказать, что матрица $E-A$ обратима и указать обратную для нее матрицу.

119 . Доказать, что произведение верхнетреугольных матриц является верхнетреугольной.

Определители

120 . Доказать, что $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ по абсолютной величине совпадает с площадью параллелограмма, построенного на векторах $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$, $c\mathbf{i}+d\mathbf{j}$.

121 . Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} ab & ac \\ bd & cd \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \cos\alpha + i\sin\alpha & 1 \\ 1 & \cos\alpha - i\sin\alpha \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$; ж) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;

з) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; и) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$;к) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$ где $(\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

122 . Разлагая по второму столбцу, вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

123 . Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{52} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

124 . Вычислить определитель, составляя рекуррентную формулу а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

125 . Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$.

126 . При каких a определитель $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$ равен 0?

127 . Вычислить определители с помощью элементарных преобразований:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

128 . Вычислить определитель путем возведения его в квадрат.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

129 . Представить в виде многочлена, расположенного по убывающим степеням t, определитель
$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & ... & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n & -t \end{vmatrix}$.

130 . Вычислить определитель $\begin{vmatrix} cE & A \\ A & cE \end{vmatrix}$, где $A = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a \end{vmatrix}$.

131 . а) У 3×3 – матрицы каждый элемент увеличили в три раза. Как измениться определитель этой матрицы? б) У 4×4 – матрицы строки записали в обратном порядке. Как измениться определитель этой матрицы?

132 . Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица такая, что $|a_{ii}| > \sum_{k \neq i} |a_{ik}|$. Доказать, что $\det A \neq 0$.

133 . Пусть в определителе 3x3 все числа ≤ 1. Оценить сверху значение этого определителя.

134 . Выяснить, какие из следующих произведений входят в развернутое выражение определителей соответствующих порядков и с какими знаками:а) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; б) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$; в) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

135 . Как изменится определитель порядка n, если
а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) каждый его элемент a_{ik} умножить на $c^{i-k}(c \neq 0)$;
в) каждый его элемент заменить элементом, симметричным относительно побочной диагонали;
г) каждый его элемент заменить на симметричный относительно "центра"определителя;
д) его повернуть на 90^0 вокруг "центра"(против часовой стрелки)?

136 . Как изменится определитель, если
а) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец;
б) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы;
в) из каждой строки, кроме последней, вычесть следующую строку, а из последней вычесть прежнюю первую строку;
г) к каждому столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец, а к первому прибавить прежний последний столбец?

137 . Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Доказать, что определитель тоже делится на 17: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

138 . Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

139 . Доказать, что если в определителе порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбцов стоят элементы, равные нулю, причем $k+l > n$, то определитель равен нулю.

140 . Доказать, что сумма главных миноров порядка k матрицы $A \cdot A^T$ равна сумме квадратов всех миноров порядка k матрицы A.

141 . Доказать, что сумма алгебраических дополнений элементов строки определителя не изменится, если ко всем элементам матрицы прибавить одно и тоже число.

Правило Крамара

142 . С помощью правила Крамара решить системы уравнений:
а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 16x_2 = 17 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$;
в) $\begin{cases} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha = \cos\beta \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = \sin\beta \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

Обратная матрица

143 . Решить матричное уравнение:
а) $2X^\top + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

144 . Решить систему матричных уравнений:
а) $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
б) $2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $-4X + 2Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

145 . Пусть A,B – матрицы размеров $m \times n$ и $m \times k$. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$, где X – матрица размера $n \times k$, имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы $(A|B)$

146 . Пусть A – квадратная матрица. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

147 . Доказать, что система уравнений $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = B_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, где X_j и B_i – матрицы порядка $p \times q$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $det(a_{ij}) \neq 0$.

148 . Найти обратную матрицу:
а) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A,C – невырожденные матрицы;
в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;
е) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

149 . Какие значения может принимать определитель а) ортогональной матрицы; б) унитарной матрицы?

150 . Квадратная матрица A удовлетворяет соотношению $A^3 = E$. Выразить A^{-1} через A.

151 . Доказать, что в кольце матриц над полем а) обратимая матрица не является делителем нуля; б) любая матрица либо обратима, либо является левым и правым делителем нуля.

152 . Как изменится матрица A^{-1}, если в A
а) переставить i-ую и j-ую строки;
б) к i-ой строке прибавить j-ую, умноженную на c;
в) умножить i-ую строку на число $c \neq 0$;
г) преобразования а) – в) совершить со столбцами.

Собственные числа и собственные векторы

Инвариантные подпространства

153 Определение Пусть H подпространство линейного пространства L, и ψ – линейный оператор на L. Подпространство H называется *инвариантным относительно линейного оператора* ψ, если $\psi(\mathbf{a}) \in H$ для всякого элемента $\mathbf{a} \in H$.

Нулевое подпространство, а также все пространство инвариантны относительно любого оператора. Именно в случае инвариантного подпространства имеется возможность сузить действие оператора ψ на H, при этом получается уже оператор пространства H.

154 Предложение. *Пусть $\mathcal{F}$ - базис линейного пространства L размерности n такой, что вектора $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ составляют базис подпространства H, инвариантного относительно опера-тора ψ. Тогда матрица оператора ψ в базисе $\mathcal{F}$ имеет "блочный" вид:*

$$\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где B – $k \times k$-матрица, а блок нулей имеет размер $(n-k) \times k$.

◀ Так как $\psi(H) \subseteq H$, то $\psi(\mathbf{f}_i)$ для $i = 1, \ldots, k$ раскладывается лишь по элементам $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$. Далее применяем определение матрицы линейного оператора. ▶

Вид матрицы оператора ещё более упростится, когда пространство L разложимо в прямую сумму инвариантных относительно операторы ψ подпространств H и T. В этом случае, взяв базис $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ так, что $H = \mathbf{f}_1 K + \ldots + \mathbf{f}_k K$ и $T = \mathbf{f}_{k+1} K + \ldots + \mathbf{f}_n K$ получим блочно-диагональную матрицу $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ оператора ψ в базисе $\mathcal{F}$. Это следствие предложения 154.

Среди всех возможных собственных инвариантных подпространств фиксированного оператора ψ выделим те, которые имеют наименьшую возможную размерность – единица. Это тот случай, когда $\psi(\mathbf{a}K) \subseteq \mathbf{a}K$ для некоторого ненулевого элемента $\mathbf{a}$. На геометрическом уровне это значит, что вектор $\mathbf{a}$ лишь растягивается или сжимается во сколько-то раз, оставаясь лежать на той же самой "прямой" $\mathbf{a}K$. Так мы приходим к следующему определению.

155 Определение Пусть ψ – линейный оператор линейного пространства L. Ненулевой элемент $\mathbf{a} \in L$ называется *собственным элементом с собственным числом* λ, если $\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$.

Элемент $\mathbf{a} \in L$ является собственным оператора ψ в том и только том случае, когда "прямая"$\mathbf{a}K = \{\lambda\mathbf{a} \mid \lambda \in K\}$ является инвариантным подпространством.

156 Пример а) Для оператора гомотетии с коэффициентом k ($\mathbf{a} \to k\mathbf{a}$) любой ненулевой вектор будет собственным с собственным числом k

б) Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Линейный оператор симметрии S_ℓ относительно прямой ℓ обладает собственными векторами двух видов: те, которые лежат на прямой ℓ; они неподвижны: $S_\ell(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ для $\mathbf{a} \parallel \ell$ и тем самым имеют собственное число равное единице и те, которые перпендикулярны прямой ℓ; для них $S_\ell(\mathbf{b}) = -\mathbf{b}$, что дает собственное число равное -1. Заметим, если выбрать базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ так, что $\mathbf{e}_1 \parallel \ell$ и $\mathbf{e}_2 \perp \ell$, то матрица оператора S_ℓ в этом базисе будет диагональной $\mathrm{diag}(1; -1)$.

Все, что сказано выше относительно оператора симметрии применимо и к оператору ортогональной проекции Pr_ℓ на прямую ℓ с той лишь разницей, что вектора перпендикулярные ℓ имеют нулевое собственное число и матрица Pr_ℓ в указанном выше базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ имеет вид $\mathrm{diag}(1; 0)$.

в) Продолжим пример б) и рассмотрим оператор поворота R_ϕ На угол $\phi \in [0; 2\pi)$ предполагая, что рассматривается вещественное пространство. Тогда в случае $\phi \neq 0, \pi$ оператор R_ϕ вовсе не имеет собственных векторов.

г) Пусть L – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой, D – оператор дифференцирования $f(x) \to D(f)(x)$. Тогда для каждого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ собственное пространство $L_\lambda := \{f \in L \mid D(f) = \lambda f\}$ одномерно и порождается экспонентой $e^{\lambda x}$, т.е. $L_\lambda = \left\{Ce^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\right\}$.

Оператор D^2 двойного дифференцирования ($f \to f''$) для каждого отрицательного числа $\lambda := -\mu^2$ имеет двумерное собственное подпространство $\sin(\mu x)\mathbb{R} + \cos(\mu x)\mathbb{R}$ отвечающее собственному числу $-\mu^2$.

Линейные многочлены $\mathbb{R} + x\mathbb{R}$ составляют пространство собственных функций оператора D^2 с нулевым собственным числом, а для $\lambda = \mu^2 > 0$ таковым собственным пространством будет $\mathrm{sh}(\mu x)\mathbb{R} + \mathrm{ch}(\mu x)\mathbb{R}$.

Собственным пространством с нулевым собственным числом оператора D^n будут всевозможные многочлены степени $\leq n$.

Обобщим пример б)

157 Предложение. А.) *Пусть $\psi^2 = \psi$ для некоторого оператора ψ линейного пространства L. Тогда а) все собственные числа оператора ψ либо 0, либо 1, б) L разложимо в прямую сумму подпространств $H = \operatorname{Ker}\psi$ и $T = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - \psi)$, в) ψ есть проекция на H вдоль T.*

Б.) *Пусть $\psi^2 = \operatorname{Id}$ для некоторого оператора ψ линейного пространства L. Тогда а) все собственные числа оператора ψ либо -1, либо 1, б) пространство L разложимо в прямую сумму подпространств $H = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - \psi)$ и $T = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + \psi)$, в) ψ есть симметрия относительно H вдоль T.*

158 Теорема. *Пусть A – матрица линейного оператора ψ n-мерного линейного пространства относительно базиса $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ и*

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{f}_1 + a_2\mathbf{f}_2 + \ldots + a_n\mathbf{f}_n \in L$$

– какой-либо ненулевой элемент. Элемент $\mathbf{a}$ будет собственным с собственным числом λ тогда и только тогда, когда λ является корнем ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ*:*

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{0.30}$$

а столбец $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top$ - ненулевое решение следующей однородной системы линейных уравнений:

$$(A - \lambda E)X = 0 \tag{0.31}$$

◀ Соотношение $\psi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$ на матричном языке означает, что $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top = \lambda\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top$. Перенося все в левую часть, получаем однородную систему (0.31). Эта однородная система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$ (см. правило Крамара). ▶

Заметим, что левая часть равенства (0.30) представляет собой многочлен степени n с коэффициентом $(-1)^n$ при старшей степени. Он называется *характеристическим многочленом* оператора ψ или матрицы A.

159 Предложение. *В характеристическом многочлене свободный член равен $\det A$, а коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr} A$, где $\operatorname{Tr} A$ –* СЛЕД МАТРИЦЫ *A, по определению равный сумме диагональных коэффициентов.*

Докажем, что

160 Предложение. *Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса.*

Действительно, пусть $\mathcal{F}' = (\mathbf{f}'_1, \mathbf{f}'_2, \ldots, \mathbf{f}'_n)$ – другой, новый базис пространства L, связанный со старым базисом матрицей перехода C. Тогда матрица оператора ψ в новом базисе равна $A' = C^{-1}AC$ (предложение ???) и

$$\det(A' - \lambda E) = \det(c^{-1}AC - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - \lambda C^{-1}C) = \det C^{-1}(A - \lambda E)C =$$

$$= \det C^{-1} \det(A - \lambda E) \det C = \det C^{-1} \det C \det(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E),$$

что и требовалось доказать.

161 Лемма. *Собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.*

◀ Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ – собственные вектора линейного оператора $\psi : L \to L$ с собственными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Предположим, что $x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$ для некоторых $x_i \in K$. Подействуем на левую и правую часть этого соотношения $n-1$ раз оператором ψ. Учитывая, что $\psi^i(\mathbf{b}_j) = \lambda_j^i \mathbf{b}_j$, получим систему

$$\begin{cases} x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n = & \mathbf{0}, \\ \lambda_1 x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n x_n\mathbf{b}_n = & \mathbf{0}, \\ \lambda_1^2 x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n^2 x_n\mathbf{b}_n = & \mathbf{0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} x_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \lambda_n^{n-1} x_n\mathbf{b}_n = & \mathbf{0}, \end{cases}$$

Перепишем эту систему в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\mathbf{b}_1 \\ x_2\mathbf{b}_2 \\ \ldots \\ x_n\mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \ldots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad (0.32)$$

Определитель Вандермонда, стоящий в левой части (0.32) не равен 0, так как λ_i-ые попарно различны (см. "Общая алгебра, §Определители специального вида). Следовательно, эта матрица обратима. Умножение слева соотношения (0.32) на обратную к ней матрицу дает равенства $x_1\mathbf{b}_1 = x_2\mathbf{b}_2 = \ldots = x_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. Отсюда $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, так как вектора $\mathbf{b}_i$ по определению ненулевые. ▶

162 Теорема. (диагонализация линейного оператора в случае простого с *Пусть ψ – линейный оператор n-мерного линейного пространства, и характеристическое уравнение оператора ψ имеет n различных корней. Тогда оператор ψ диагонализируем: существует базис из собственных векторов.*

◀ Действительно, таковым базисом будут собственные вектора $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ отвечающие n попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – корням характеристического уравнения. Собственные вектора существуют по теореме 158, линейно независимы по лемме 161 и образуют базис по теореме **??** о размерности. Матрица оператора ψ в базисе $\{\mathbf{f}_i\}$ имеет вид $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. ▶

163 Пример Рассмотрим оператор r поворота плоскости $\mathbf{e}_1\mathbb{R} + \mathbf{e}_2\mathbb{R}$ на 90^0, имеющий матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в стандартном базисе. Этот оператор не диагонализируем. Продолжим действие r на комплексное двумерное пространство $\mathbf{e}_1\mathbb{C} + \mathbf{e}_2\mathbb{C}$ с той же матрицей. Продолжение обозначим $r^{\mathbb{C}}$. Он уже будет иметь с. вектора $(i, 1), (-i, 1)$ и в этом базисе его матрица имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(i; -i)$.

164 . Из n^2-мерного куба $[-R, R]^{n^2}$ ($R > 0$ – фиксировано) наудачу выбирается n^2 чисел и строится матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_n)$. Доказать, что с вероятностью единица эта матрица имеет простой спектр над полем комплексных чисел, т. е. имеет n различных (комплексных корней).

Теорему 162 можно обобщить, предварительно заметив, что *множество всех собственных векторов, отвечающих фиксированному собственному числу λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.* Действительно, это множество не что иное как ядро оператора $\psi - \lambda \operatorname{Id}$, а ядро является всегда подпространством (см. предложение ???).

165 Теорема. *Пусть $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ – все различные корни характеристического многочлена оператора ψ, действующего на линейном простран-*

стве L размерности n. Обозначим $n_i = \dim \operatorname{Ker}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$. Тогда оператор ψ диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняется равенство $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. В свою очередь, размерность пространства $\operatorname{Ker}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$ равна $n - \operatorname{rank}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$.

◀ Во-первых отметим, что сумма $H = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$ прямая, т. е. любой элемент из H единственным образом разложим в сумму слагаемых из $\operatorname{Ker}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$. Отсюда вытекает, что $\dim H = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Если теперь предположить, что имеет место равенство $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, то $H = L$ из соображений размерности. Значит, у оператора ψ есть базис из собственных векторов; он может быть получен объединением базисов подпространств $\operatorname{Ker}(\psi - \lambda_i \operatorname{Id})$. В этом базисе матрица оператора ψ диагональна.

Наоборот, пусть ψ обладает базисом $\{\mathbf{f}_i\}$, в котором матрица ψ диагональна – $\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$. Заметим, что тогда все $\mathbf{f}_i$-е будут собственными векторами. Перенумерацией базисных элементов можно добиться того, чтобы

$$\lambda_1 = \mu_1 = \ldots = \mu_s, \quad \lambda_2 = \mu_{s+1} = \ldots = \mu_t, \ldots, \lambda_k = \mu_q = \ldots = \mu_n.$$

Обозначим $H_1 = \mathbf{f}_1 K + \ldots + \mathbf{f}_s K, \ldots, H_k = \mathbf{f}_q K + \ldots + \mathbf{f}_n K$. Так как заведомо $H_j \subseteq \operatorname{Ker}(\psi - \lambda_j \operatorname{Id})$, то сумма $H_1 + \cdots + H_k$ прямая. Но эта сумма равна L, ибо она содержит все базисные элементы. Тогда

$$n_1 + \ldots + n_k \geq \dim H_1 + \cdots + \dim H_k = \dim L = n$$

Неравенство $\sum_{i=1}^{k} n_i \leq n$ верно во всех случаях. Из этих двух оценок получаем равенство $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. ▶

Матрица A называется *подобной* матрице B, если существует невырожденная матрица T такая, что $B = T^{-1} A T$. Показать, что отношение подобия обладает следующими свойствами

- $A \sim A$;
- если $A \sim B$, то $B \sim A$;
- если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$

Доказать, что если хотя бы одна из матриц A, B невырождена, то матрицы AB, BA подобны.

166 . Пусть матрица B получена из A перестановкой i-й и j-й строк, а также i-го и j-го столбцов. Доказать, что A и B подобны и найти невырожденную матрицу T, для которой $B = T^{-1}AT$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Mat}_n(F)$, $B = (b_{ij}) \in \mathbf{Mat}_m(F)$. Кронекеровским произведением матрицы A на матрицу B называется квадратная матрица порядка mn

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \end{pmatrix}$$

167 . Доказать, что если две матрицы A и B подобны диагональным матрицам, то их кронекеровское произведение также подобно диагональной матрице

Матричные нормы

Сначала напомним понятие векторной нормы. Пусть вещественному или комплексному n-вектору $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ((..)⊤ – операция транспонирования) поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, такое, что выполнены следующие аксиомы:

1) $\|x\| > 0$, если $x \neq 0$, $\|0\| = 0$,

2) $\|\alpha x\| = |alpha| \, \|x\|$ (аксиома абсолютной однородности)

3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (аксиома (неравенство) треугольника)

для любого числа α и любого вектора y. Тогда число $\|x\|$ называется нормой вектора $\|x\|$.

Наиболее употребительными на практике являются следующие векторные нормы:

- абсолютная норма (норма l_1, или 1-норма)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

- евклидова норма (норма l_2, или 2-норма)

$$\|x\|_2 = |(x, x)| = x\top x = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

  где через (,) обозначено скалярное произведение векторов;

- максимальная норма (норма l_∞, или ∞-норма)

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |xi|.$$

Эти нормы являются частными случаями нормы Гельдера (или нормы l_p) с показателем $p, p \geq 1$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p},$$

Для евклидовой векторной нормы имеет место неравенство Коши–Буняковского:

$$|(x, y)| = |x\top y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 .$$

Две векторные нормы $\|..\|_I$ и $\|..\|_{II}$ называются эквивалентными, если существуют такие положительные вещественные числа c_1 и c_2, что для любого вектора x выполняются неравенства (соотношения эквивалентности)

$$c_1 \|x\|_I \leq \|x\|_{II} \leq c2 \|x\|_I$$

причем c_1 и c_2 не зависят от выбора x. Рассмотренные выше нормы эквивалентны.

Собственные значения матриц. Число λ называется собственным значением квадратной матрицы A, если существует такой ненулевой вектор x, что $Ax = \lambda x$. Любой вектор $x \neq 0$, удовлетворяющий этому уравнению, называется собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений называется спектром матрицы, а максимальный из модулей ее собственных значений называется спектральным радиусом. Собственные значения λ (в общем случае комплексные) являются нулями характеристического многочлена $\det(A-\lambda E)$, т.е. нулями (корнями) векового уравнения

$\det(A-\lambda E)=0$. Собственные значения матриц A и $A^\top$ совпадают. Если матрица A невырожденная и λ – любое ее собственное значение, то $\lambda\neq 0$ и λ^{-1} является собственным значением матрицы A^{-1}. Если λ собственное значение матрицы А, то число $\lambda-\mu$ является собственным значением матрицы $A-\mu E$. Число λ^2 – собственное значение матрицы A^2.

Сингулярное разложение матриц. Для любой вещественной $(n\times m)$-матрица ранга r существуют ортогональная $(n\times n)$-матрица U и ортогональная $(m\times m)$-матрица V , такие, что

$$U\top AV=\Sigma,$$

где Σ – прямоугольная диагональная $(n\times m)$-матрица с невозрастающими неотрицательными элементами σ_i $(i=1,\ldots,m)$ на диагонали. Это разложение матрицы A называется сингулярным, а элементы σ_i – сингулярными числами, причем

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\ldots\geq\sigma_r>0\sigma_{r+1}=\ldots=\sigma_m=0.$$

Квадраты ненулевых сингулярных чисел матрицы А совпадают с ненулевыми собственными значениями матриц $A\top A$ и $AA\top$, а количество ненулевых сингулярных чисел равно рангу матрицы A. Сингулярное разложение единственно с точностью до матриц U и V .

Матричные нормы. Пусть вещественной или комплексной $(n\times m)$-матрице A поставлено в соответствие некоторое вещественное число $\|A\|$, такое, что выполнены следующие аксиомы:

$$\|A\|>0, \text{ если } A\neq 0,\ \|0\|=0,$$

$$\|\alpha A\|=|\alpha|\,,$$
$$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|\,,$$
$$\|AC\|\leq\|A\|\,\|C\|\,(\text{ аксиома мультипликативности })$$

для любого числа α и любых матриц B и C, для которых соответствующие операции имеют смысл. Тогда число $\|A\|$ называется нормой матрицы A.

Если $\|A\|$ удовлетворяет только первым трем аксиомам, то такую норму называют аддитивной (обобщенной) матричной нормой. Если удовлетворяются все четыре аксиомы, то такая норма матрицы называется мультипликативной. Всякую аддитивную норму умножением на достаточно большую положительную константу можно превратить в мультипликативную. Везде, где не оговорено противное, под матричной нормой будем понимать мультипликативную матричную норму. Наиболее употребительными на практике являются следующие матричные нормы:

- первая норма (столбцовая норма, или 1-норма)

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,;$$

- спектральная норма (вторая норма, или норма Гильберта)

$$\|A\| = \max_{1 \le i \le m} \sigma_i = \left(\max_{1 \le i \le m} \lambda_i(A \top A) \right)^{1/2} = \left(\max_{1 \le i \le n} \lambda_i(AA\top) \right)^{1/2},$$

  где σ_i – сингулярные числа матрицы A, $\lambda_i(A\top A)$ – собственные значения матрицы $A\top A$ и $\lambda_i(AA\top)$ – собственные значения матрицы $AA\top$;

- бесконечная норма (строчная норма, или ∞-норма)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,;$$

- сферическая норма (норма Фробениуса или евклидова норма)

$$\|A\|_F = \|A\|_E = N(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j(A^\top A) \right)^{1/}$$

Выписанные матричные нормы эквивалентны.

Матричная норма $\|.\|_M$ называется согласованной с векторными нормами $\|.\|_V$, если

$$\|Ax\|_V \le \|A\|_M \, \|x\|_V$$

для любой матрицы A и всех векторов x. Всякая норма матрицы согласована с какими-нибудь векторными нормами.

Пусть задана векторными норма $\|.\|_V$. Тогда числовая функция

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_V \ne 0} \frac{\|Ax\|_V}{\|x\|_V} = \sup_{\|x\|_V = 1} \|Ax\|_V$$

является матричной нормой и называется нормой матрицы, подчиненной векторной норме $\|.\|_V$.

Среди всех матричных норм, согласованных с заданной векторной нормой, подчиненная норма является минимальной в том смысле, что в неравенстве $\|Ax\|_V \le \|A\|_M \|x\|_V$ число $\|A\|_M$ нельзя уменьшить. Спектральная, 1- и ∞-нормы матриц являются подчиненными по отношению, соответственно, к евклидовой, 1- и ∞-нормам векторов, а значит и согласованными с ними.

Ортогонально подобные матрицы. Матрица A называется ортогонально подобной матрице B, если существует такая ортогональная матрица Q, что $A = Q^\top BQ$. Ортогонально подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Задачи

1. Найти соотношения эквивалентности, связывающие векторные нормы $\|x\|_\infty$, $\|x\|_1$, $\|x\|_2$. 2. Найти матричную норму, подчиненную евклидовой векторной норме $\|.\|_2$

3. Пусть A – вещественная $(n \times m)$-матрица, x – вещественный m-вектор и y – вещественный n-вектор. Доказать следующие три свойства спектральной нормы

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1, \|y\|-2=1} \left|y^\top Ax\right|, \ \left\|A^\top\right\|_2 = \|A\|_2, \ \left\|A^\top A\right\|_2 = \left\|AA^\top\right\|_2 = \|A\|_2^2$$

4. Пусть A – вещественная прямоугольная матрица. Показать, что умножение ее справа или слевва на ортогональную матрицу Q не меняет ее спектральную норму.

5. Показать справедливость неравенства

$$\|A\|_2^2 \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$$

6. Пусть A – квадратная матрица порядка n. Найти соотношение эквивалентности, связывающее норму $M(A) = n \max_{i,j=1,\ldots,n} |a_{ij}|$ с ∞-нормой матрицы.

7. Показать, что ∞-норма вектора x является частным случаем нормы Гельдера с показателем $p = \infty$.

8. Показать, что норма Гельдера удовлетворяет аксиоме треугольника из определения векторной нормы: $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Самосопряженные операторы

В этом параграфе L – вещественное линейное пространство со скалярным произведением.

Оператор $\psi : L \to L$ называется *самосопряженным*, если равенство

$$\mathbf{a} \cdot \psi(\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} \tag{0.33}$$

выполняется для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$.

168 Предложение. *Пусть $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ – ортонормированный базис пространства L. Оператор ψ самосопряжен тогда и только тогда, когда матрица A оператора ψ в базисе $\mathcal{F}$ симметрична: $A^\top = A$.*

◀ В матричном виде равенство (0.33) выглядит так:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\, A\, (b_n, \ldots, b_n)^\top = (b_1, b_2, \ldots, b_n)\, A\, (a_n, \ldots, a_n)^\top \tag{0.34}$$

Левая и правая часть в (0.34) – линейные функции аргументов $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Следовательно, (0.34) выполняется для любых строк $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$и $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, если и только если оно верно для элементов e_i и e_j стандартного базиса строк. Подставляя в (0.34) e_i вместо $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и e_j вместо $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, получим соотношение $a_{ij} = a_{ji}$. Это соотношение, верное для всех пар индексов (i, j), и характеризует симметричные матрицы. ▶

169 Предложение. *Пусть H – инвариантное подпространство самосопряженного оператора ψ. Тогда ортогональное дополнение $H^\perp$ также инвариантно.*

◀ Пусть $\mathbf{a} \in H$, $\mathbf{b} \in H^\perp$ – произвольные элементы. Тогда

$$\psi(\mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{b}\psi(\mathbf{a}) = 0,$$

так как $\psi(\mathbf{a}) \in H$ и $\mathbf{b} \perp H$. Отсюда следует, что $\psi(\mathbf{b}) \perp H$, т. е. $\psi(\mathbf{b}) \in H^\perp$. ▶

Следующее предложение понадобится при доказательстве теоремы о диагонализации самосопряженного оператора. Формально, оно является частным случаем этой теоремы.

170 Предложение. *Самосопряженный оператор на плоскости имеет ортонормированный базис из собственных векторов.*

◀ Пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ – матрица самосопряженного оператора на плоскости относительно стандартного базиса со стандартным скалярным произведением. Эта матрица симметрична в силу предложения 168. Её характеристический многочлен равен $\lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2$. Дискриминант этого квадратного трехчлена неотрицателен:

$$D = (a+c)^2 - 4ac + b^2 = (a-c)^2 + b^2.$$

Следовательно, существует корень λ_1 и соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{f}_1$ единичной длины. Выберем единичный вектор $\mathbf{f}_2$, порождающий ортогональное дополнение $(\mathbf{f}_1\mathbb{R})^\perp$. Тогда $\mathbf{f}_2$ – собственный вектор в силу предложения 168. Тем самым $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ – искомый ортонормированный базис. ▶

Из предложения 170 вытекает простое геометрическое и механическое описание произвольного самосопряженного оператора на плоскости: найдутся две взаимно перпендикулярные оси, по которым происходит растяжение в λ_1 и λ_2 раз. Оказывается, то же самое верно и для большей размерности.

171 . Диагонализировать оператор на плоскости, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Находим собственные числа оператора:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = 6$$

Для каждого с. числа находим с. вектор

$$\begin{pmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 2-1 \end{pmatrix} (p,q)^T = (0;0)^T \ \Rightarrow \ \mathbf{f}_1' = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 2 \\ 2 & 2-6 \end{pmatrix} (p,q)^T = (0;0)^T \ \Rightarrow \ \mathbf{f}_2' = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Как и предписано теорией, эти вектора ортогональны: $\mathbf{f}_1' \cdot \mathbf{f}_2' = 0$. Нормируя их, получаем ортогональный базис $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i}-2\mathbf{j})$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i}+\mathbf{j})$ в котором матрица заданного оператора имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(1,6)$.

172 Теорема. *Самосопряженный оператор евклидова пространства диагонализируем. Более того, существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов.*

◀ Пусть ψ – самосопряженный оператор евклидова пространства L с ортонормированным базисом $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Доказательство будем вести индукцией по размерности пространства L. Случай $\dim L = 1$ тривиален. Предположим теорема верна для размерностей пространства меньше, чем n, и сейчас $\dim L = n$. Пусть $z \in \mathbb{C}$ – какой-либо корень характеристического уравнения $f(\lambda) = 0$. Он существует по основной теореме алгебры теории комплексных чисел. Докажем в начале, что $z \in \mathbb{R}$. Предположим противное; тогда сопряженное комплексное число $\overline{z}$ также будет корнем характеристического уравнения, так как

$$\sum a_i z^i = 0 \Rightarrow \sum \overline{a_i z^i} = 0 \Rightarrow \sum a_i \overline{z}^i = 0$$

(здесь $a_i \in \mathbb{R}$). Допуская в качестве коэффициентов любые комплексные числа, найдем собственные вектора $\mathbf{b} = b_1\mathbf{f}_1 + \ldots + b_n\mathbf{f}_n \in \sum \mathbf{f}_i\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbf{b}} = \overline{b_1}\mathbf{f}_1 + \ldots + \overline{b_n}\mathbf{f}_n$ отвечающие собственным числам z и $\overline{z}$. Заведомо $\mathbf{b} \notin L$, но $\mathbf{a} := \mathbf{b} + \overline{\mathbf{b}} \in L$ и $\mathbf{c} := 1/i(\mathbf{b} - \overline{\mathbf{b}}) \in L$. Тогда двумерное подпространство $H = \mathbf{a}\mathbb{R} + \mathbf{c}\mathbb{R}$ инвариантно относительно ψ, ибо

$$\psi(H) \subseteq ((\mathbf{b}\mathbb{C} + \overline{\mathbf{b}}\mathbb{C}) \cap L) = H.$$

Отсюда получаем, что ограничение ψ на H, будучи самосопряженным оператором, не имеет на H собственного вектора, ибо его характеристический многочлен $(\lambda - z)(\lambda - \overline{z})$ не имеет действительных корней. Это противоречит утверждению предложения 3. Противоречие показывает, что характеристический многочлен оператора ψ имеет действительный корень λ_1. Рассмотрим $H = \mathrm{Ker}(\psi - \lambda_1\mathbb{R})$. Это подпространство инвариантно относительно ψ. Заведомо $H \neq 0$. Если $H = L$, то ψ – гомотетия с коэффициентом λ_1. В этом случае утверждение теоремы очевидным образом выполняется для любого ортонормированного базиса. В противном случае, $L = H \oplus H^{\perp}$ – разложение в прямую сумму инвариантных собственных подпространств (учесть предложение 168), к каждому из которых можно применить индукционное предположение. Объединив ортонормированные базисы подпространств H и $H^{\perp}$, в итоге получаем ортонормированный базис всего пространства. ▶

Произведение самосопряженных операторов не обязано быть самосопряженным оператором. Привести пример.

173 . Пусть φ, ψ – самосопряженные коммутирующие операторы (т. е. $\varphi\psi = \psi\varphi$). Тогда существует ортонормированный базис из собственных векторов как оператора φ, так и оператора ψ. В частности, произведение $\varphi\psi$ будет также самосопряженным оператором.

174 . Обобщить это утверждение на любое семейство попарно коммутирующих самосопряженных операторов.???

175 . Доказать, что если A, B – симметрические матрицы, то $AB + BA$ также симметрическая матрица

176 . Найти ортонормированный базис в котором матрица

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ортогональные операторы

Линейный оператор φ пространства L со скалярным произведением называется *ортогональным*, если он сохраняет длины векторов, т. е. $|\varphi(\mathbf{x})| = |\mathbf{x}|$ для любого $\mathbf{x} \in L$. Отсюда сразу следует, что *ортогональный оператор взаимно-однозначен, а если к тому же пространство L конечномерно, то ортогональный оператор – биекция.* Так как

$$2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2 ,$$

то φ ортогонален тогда и только тогда, когда φ сохраняет скалярное произведение. Следовательно, ортогональный оператор сохраняет и углы, ибо

$$\cos(\varphi(\widehat{\mathbf{x}), \varphi(}\mathbf{y})) = \frac{\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y})}{|\varphi(\mathbf{x})|\,|\varphi(\mathbf{y})|} = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} = \cos(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

для любых ненулевых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$.

177 Пример 1. Поворот плоскости на угол α – ортогональный оператор. Поворот пространства $\mathbb{R}^3$ относительно оси, проходящей через начало координат, также ортогональный оператор.

2. Отражение плоскости относительно прямой $ax + by = 0$ – ортогональный оператор. Симметрия $\mathbb{R}^3$ относительно прямой или плоскости, проходящей через начало координат, – ортогональный оператор.

Очевидно, что композиция ортогональных операторов – снова ортогональный оператор и обратный оператор к ортогональному будет также ортогональным. Следовательно, *множество $\mathcal{O}(L)$ всех ортогональных операторов евклидова пространства L образует группу.*

Пусть $\mathcal{F} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ – ортонормированный базис евклидова пространства L, и A – матрица ортогонального оператора φ в этом базисе. Возьмем произвольные элементы $\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{f}_i$ и $\mathbf{y} = \sum_i y_i \mathbf{f}_i$ пространства L. Тогда соотношение $\varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{xy}$ эквивалентно следующему

$$\left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^\top \cdot A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

В свою очередь это эквивалентно равенству

$$A^\top A = E \tag{0.35}$$

Матрица A с условием (0.35) называется *ортогональной*. Множество ортогональных матриц образует подгруппу $\mathcal{O}(n)$ в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ всех невырожденных матриц. Опишем группу $\mathcal{O}(2)$. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$ – матрица ортогонального оператора φ. Это эквивалентно системе равенств

$$a^2 + b^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

Пусть угол $\alpha \in [0, 2\pi)$ таков, что $a = \cos\alpha$ и $c = \sin\alpha$. Тогда либо $b = -\sin\alpha$ и $d = \cos\alpha$ и A – матрица поворота на угол α, либо $b = \sin\alpha$ и $d = -\cos\alpha$. В этом случае A имеет собственные числа ± 1 и собственные вектора $\mathbf{s}_1 = \cos\alpha \mathbf{f}_1 + \sin\alpha \mathbf{f}_2$ и $\mathbf{s}_2 = -\sin\alpha \mathbf{f}_1 + \cos\alpha \mathbf{f}_2$. Матрица оператора φ в базисе $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(1, -1)$. Мы доказали следующую теорему

178 Теорема. *Для любого ортогонального оператора плоскости $\mathbb{R}^2$ найдется ортонормированный базис в котором этот оператор будет иметь вид*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Прежде чем описывать $\mathcal{O}(3)$ докажем ряд лемм

179 Лемма. *Любая квадратная матрица нечетного размера имеет вещественное собственное число.*

◀ Это следствие известного из анализа результата – любой многочлен нечетной степени имеет хотя один вещественный корень. ▶

180 Лемма. *Собственные числа ортогонального оператора (ортогональной матрицы) могут быть только 1 и -1.*

◀ Пусть $\mathbf{x}$ – собственный вектор ортогонального оператора φ с собственным числом λ. Тогда

$$|\mathbf{x}| = |\varphi(\mathbf{x})| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{x}|$$

Отсюда следует результат, если учесть, что $|\mathbf{x}| \neq 0$. ▶

181 Предложение. *Пусть M – подпространство пространства L со скалярным произведением, $\varphi : L \to L$ – ортогональный оператор. Если M – инвариантно относительно φ, то и ортогональное дополнение $M^\top$ также φ-инвариантно.*

◀ Пусть $\mathbf{a} \in M$, $\mathbf{b} \in M^\top$. Тогда $\varphi(\mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{b}\varphi(\mathbf{a}) = 0$, так как $\varphi(\mathbf{a}) \in M$. Отсюда следует, что $\varphi(\mathbf{b}) \in M^\top$. ▶

182 Теорема. *Для любого ортогонального оператора φ трехмерного евклидова пространства найдется ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет вид:*

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{0.36}$$

◀ Пусть $\mathbf{f}_1$ – единичный собственный вектор оператора φ. Тогда подпространство $M = \mathbf{f}_1\mathbb{R}$ инвариантно относительно φ. Следовательно, плоскость $M^\top$ также φ-инвариантна (см. предложение 1). Выберем ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ на этой плоскости, так что матрица сужения $\varphi_{/M^\top}$ имеет вид как в теореме 1. В случае матрицы вращения, базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ искомый. Разберем случай $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = -\mathbf{f}_3$. Если $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, то перенумерацией базиса $\mathbf{f}_i$ получаем искомый базис $\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{f}_1$ в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(-1, 1, 1)$. Иначе, матрица оператора φ в базисе $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$. Тогда перенумеруем базис $\mathbf{f}_i$ по другому: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{f}_3$. В базисе $\mathbf{s}_i$ матрица оператора φ имеет требуемый вид:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

▶

Обозначим $\mathcal{R}(\alpha)$ 2×2-матрицу поворота на угол α.

183 Теорема. *Пусть ϕ – ортогональный оператор евклидова векторного пространства L. Тогда найдется ортонормированный базис пространства L в котором матрица оператора ϕ имеет один из двух следующих блочно-диагональных видов*

$$\mathrm{diag}(\mathcal{R}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{R}(\alpha_k)); \quad (\dim L = 2k)$$

или

$$\mathrm{diag}(\pm 1, \mathcal{R}(\alpha_1), \ldots, \mathcal{R}(\alpha_k)) \quad (\dim L = 2k + 1)$$

◀ Пусть $\mathbf{f}_1$ – единичный собственный вектор оператора φ. Тогда подпространство $M = \mathbf{f}_1\mathbb{R}$ инвариантно относительно φ. Следовательно, плоскость $M^\top$ также φ-инвариантна (см. предложение 1). Выберем ортонормированный базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ на этой плоскости, так что матрица сужения $\varphi_{/M^\top}$ имеет вид как в теореме 1. В случае матрицы вращения, базис $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ искомый. Разберем случай $\varphi(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$, $\varphi(\mathbf{f}_3) = -\mathbf{f}_3$. Если $\varphi(\mathbf{f}_1) = \mathbf{f}_1$, то перенумерацией базиса $\mathbf{f}_i$ получаем искомый базис $\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{f}_1$ в котором матрица оператора φ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(-1, 1, 1)$. Иначе, матрица оператора φ в базисе $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ имеет диагональный вид $\mathrm{diag}(-1, 1, -1)$. Тогда перенумеруем базис $\mathbf{f}_i$ по другому: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{f}_2$, $\mathbf{s}_2 = \mathbf{f}_1$, $\mathbf{s}_3 = \mathbf{f}_3$. В базисе $\mathbf{s}_i$ матрица оператора φ имеет требуемый вид:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

►

Жорданова форма

Пусть ϕ – линейный оператор линейного пространства L над полем K. Для элемента $k \in K$ определим *собственное подпространство*

$$L_k = \{x \in L \mid (\phi - k)^m(x) = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\} \tag{0.37}$$

184 Предложение. *Совокупность (0.37) образует инвариантное относительно ϕ подпространство.*

Действительно, если $(\phi - k)^m(x) = 0$ и $(\phi - k)^n(y) = 0$, то $(\phi - k)^{\max\{m,n\}}(kx + k'y) = 0$ для любых $k, k' \in K$. Инвариантность следует из того, что операторы ϕ и $(\phi - k)^m$ коммутируют.

185 Предложение. *Пусть $k_1, \ldots, k_n \in K$ – различные элементы. Тогда сумма $L_{k_1} + \cdots + L_{k_n}$ прямая.*

◄ Пусть $x_j \in L_{k_j}$ $(1 \leq j \leq n)$ такие, что $\sum_j x_j = 0$. Многочлены $h := (\lambda - k_1)^m$ и $g := (\lambda - k_2)^m \cdot \ldots \cdot (\lambda - k_n)^m$ взаимно просты, поэтому найдутся многочлены a и b такие, что $ha + gb = 1$. Считаем, что m достаточно большое число, такое, что $h(\phi)(x_1) = 0$ и $g(\phi)(x_j) = 0$ для всех $j \geq 2$.

Подействуем оператором $g(\phi)$ на левую и правую часть соотношения $\sum_j x_j = 0$. Получим $g(\phi)(x_1) = 0$, откуда

$$x_1 = \mathrm{Id}(x_1) = (h(\phi)a(\phi) + g(\phi)b(\phi))(x_1) = a(\phi)h(\phi)(x_1) + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Аналогично доказывается, что все остальные x_j равны 0. ►

Жордановой клеткой $J_m(k)$ назовем $m \times m$-матрицу, имеющую вид

$$J_m(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k \end{pmatrix} = kE + \sum_{j=1}^{m-1} e_{jj+1} \tag{0.38}$$

Здесь

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– нильпотентная матрица с условием $N^m = 0$, но $N^{m-1} = e_{1m} \neq 0$. Тогда

$$J_m(k) = kE+N; \quad (J_m(k))^2 = k^2E+2kN+N^2; \quad (J_m(k))^3 = k^3E+3k^2N+3kN^2+N^3$$

и т. д.

186 Теорема. *Пусть ν – нильпотентный оператор конечномерного пространства L размерности n. Тогда L разложимо в прямую сумму ν-инвариантных подпространств, на каждом из которых сужение ν действует как жорданова клетка, т.е. существует базис $e_1, \dots, e_m$ этого подпространства такой, что $\nu(e_j) = e_{j-1}$ $(j > 1)$ и $\nu(e_1) = 0$.*

◀ Рассмотрим L как модуль над алгеброй многочленов $K[t]$, считая $t \cdot x = \nu(x)$ для $x \in L$. Так как этот модуль конечно порожден, то он разложим в прямую сумму циклических подмодулей (ссылка ???). Теперь достаточно считать, что L – циклический $K[t]$-модуль, порождаемый элементом e_n. Рассмотрим семейство элементов $e_{n-1} := te_n = \nu(e_n)$,..., $e_{j-1} := te_j = \nu^{n-j+1}(e_n)$. Утверждаем, что $\nu(e_1) = 0$ и $e_1, \dots, e_n$ – базис пространства L_K. Действительно, если какой-либо e_j линейно выражается через $e_{j+1}, \dots, e_n$, то $K[t]e_n = e_{j+1}K + \dots + e_nK$, что имеет размерность меньше n и, следовательно, не совпадает с L – противоречие с выбором e_n. Итак $(e_j)_1^n$ – базис в L. Докажем теперь, что $\nu(e_1) = 0$. Для этого заметим сначала, что $\nu^n = 0$. Действительно, пусть $\nu^q = 0$ и q – наименьшее с таким свойством. Тогда

$$0 \subset \operatorname{Ker} \nu \subset \operatorname{Ker} \nu^2 \dots \subset \operatorname{Ker} \nu^{q-1} \subset L. \qquad (0.39)$$

В самом деле, $L \neq \operatorname{Ker} \nu^{q-1}$ в виду $\nu^{q-1} \neq 0$. Далее, совпадение $\operatorname{Ker} \nu^j = \operatorname{Ker} \nu^{j+1}$ влекло бы для элемента $x \in L \setminus \operatorname{Ker} \nu^{q-1}$ соотношение

$$0 = \nu^q(x) = \nu^{j+1}(\nu^{q-j-1}(x)) \Rightarrow \nu^{q-j-1}(x) \in \operatorname{Ker} \nu^j \Rightarrow \nu^{q-1}(x) = 0$$

– противоречие с выбором x. Итак, цепочка (0.39) действительно состоит из строгих включений и в ней не более n звеньев. Отсюда $q \leq n$, поэтому $\nu^n = 0$.

Завершает доказательство равенство $0 = \nu^n(e_n) = \nu(e_1)$. ▶

Напомним, что *геометрической кратностью* собственного числа λ линейного оператора ϕ называется размерность пространства $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{Id})$ собственных векторов.

Линейный оператор $j_m(k)$ пространства столбцов K^m, задающейся матрицей (0.38) имеет характеристический многочлен $(\lambda - k)^m$, одно собственное число k геометрической кратности 1, т.е. размерность собственного пространства $\{x \in K^m \mid j_m(k)(x) = kx\}$ равна 1 и это есть e_1K. Наоборот,

187 Следствие. *Если оператор $\phi : L \to L$ имеет одно собственное число k и алгебраическая кратность его равна $m := \dim L$, а геометрическая равна 1, то найдется базис, в котором матрица оператора ϕ есть жорданова клетка $J_m(k)$.*

◀ Из условия следует, что характеристический многочлен оператора ϕ равен $(\lambda - k)^m$.

Заменим ϕ на $\phi - k$ и сведем доказательство к случаю $k = 0$. Докажем, что тогда оператор ϕ нильпотентен. По крайней мере имеется дополнение U подпространства $V := L_0$ отвечающего собственному числу 0. Тогда в базисе (e_j) пространства L таком, что $e_1, \ldots, e_t$ – базис V, а остальные $e_{t+1}, \ldots, e_m$ – базис U, получаем блочно треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

При этом матрица C невырождена, ибо в противном случае найдется ненулевой $y \in U$ такой, что $\phi(y) = 0$ и тогда $U \cap V \neq 0$, что противоречит выбору этих подпространств. Если $U \neq 0$, то $\chi_\phi(\lambda) \neq \lambda^m$ – противоречие с условием. Итак, ϕ – нильпотентный оператор.

Применяя теорему 186 и учитывая, что пространство собственных векторов, отвечающих собственному числу 0, одномерно, заключаем, что K^m – циклический ϕ-модуль, и его матрица в подходящем базисе есть жорданова клетка $J_m(0)$. ▶

188 Теорема. *Пусть пространство L конечномерно, и $n = \dim L$, а $k_1, \ldots, k_t$ – все попарно различные собственные числа оператора ϕ с ал-*

гебраическими кратностями $s_1, \dots, s_t$ соответственно. Тогда

$$\dim L_{k_j} = s_j \ \textit{и если} \ \sum_j s_j = n, \ \textit{то} \ L = \bigoplus_j L_{k_j} \qquad (0.40)$$

◀ Первое равенство достаточно доказать для одного корня, скажем k_1. Более того, переходя от ϕ к $\phi - k_1 \operatorname{Id}$, сводим доказательство к случаю $k_1 = 0$. Тогда характеристический многочлен может быть записан так: $\chi_\phi(\lambda) = \lambda^{s_1} g(\lambda)$, где $g(0) \neq 0$. Пусть U – дополнение подпространства L_0. Тогда в базисе (e_j) пространства L таком, что $e_1, \dots, e_t$ – базис L_0, а остальные $e_{t+1}, \dots, e_m$ – базис U, получаем блочно треугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

в качестве матрицы оператора ϕ. При этом матрица C невырождена, ибо в противном случае найдется ненулевой $y \in U$ такой, что $\phi(y) = 0$ и тогда $U \cap L_0 \neq 0$, что противоречит выбору этих подпространств. Так как

$$\chi_\phi(\lambda) = \chi_A(\lambda) \cdot \chi_C(\lambda) = \lambda^t \cdot \chi_C(\lambda)$$

и $\cdot \chi_C(0) \neq 0$ в силу невырожденности матрицы C, то $m = t$ и $g(\lambda) = \chi_C(\lambda)$.

Если $\sum_j s_j = n$, то равенство $\bigoplus_j L_{k_j} = L$ следует из совпадения размерностей левой и правой частей. ▶

189 . (Кострикин, 41.16) В пространстве комплексных многочленов степени ≤ 2 от переменных x, y действует оператор $f(x, y) \to f(x + 1, y + 1)$. Найти жорданову форму и жорданов базис этого оператора

Решение. Размерность пространства равна 6. Найдем с. числа этого оператора (обозначим его ϕ)

$$\phi(f) = \lambda f \ \Rightarrow \ \lambda = 1$$

Перейдем к нильпотентному оператору $\Delta = \phi - \operatorname{Id}$. Найдем с. пространство (ядро) оператора Δ:

$$f(x+1, y+1) - f(x, y) \equiv 0 \ \Leftrightarrow \ f = C_1 + C_2(x - y) + C_3(x - y)^2$$

Оно имеет размерность 3. Найдем размерность ядра Δ^2:

$$\Delta^2(f) = 0 \ \Leftrightarrow \ f = C_1 + C_2(x - y) + C_3(x - y)^2 + C_4(x^2 - y^2)$$

Итак, $\dim \operatorname{Ker} \Delta = 3$ и $\dim \operatorname{Ker} \Delta^2 = 1$. Следовательно, жорданов вид исходного оператора таков: $\operatorname{diag}(J_1(1), J_2(1), J_3(1))$.

Жорданов базис: $(x-y)^2, x-y, \frac{1}{2}(x^2-y^2), 1, 2x+1, x^2$. Например, на первом месте стоит $(x-y)^2$, соответствующая клетке $J_1(0) = 0$ оператора Δ, так как нет многочлена f в заданном пространстве с условием $\Delta f = (x-y)^2$.

190 . (Кострикин 41.3) Найти $f(J_n(\alpha))$, где f– многочлен.

Решение. Обозначим $N := e_{12}+e_{23}+\dots+e_{n-1,n}$ – наддиагональ главной диагонали. Заметим, что $N^k = e_{1k+1} + e_{2k+2} + \cdots$ – k-ая наддиагональ $(1 \le k \le n-1)$. При этом $N^k = 0$ для $k \ge n$. Решим сначала задачу для многочлена $f = x^k$, учитывая, что $J_n(\alpha) = \alpha E + N$.

$$(\alpha E + N)^k = \alpha^k E + k\alpha^{k-1}N + C_k^2\alpha^{k-2}N^2 + C_k^3\alpha^{k-3}N^3 + \dots =$$

$$= \alpha^k E + f'(\alpha)N + \frac{1}{2!}f''(\alpha)N^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)N^3 + \cdots$$

Итак, для произвольного многочлена f получаем:

$$f(J_n(\alpha)) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & f'(\alpha) & \frac{1}{2!}f''(\alpha) & \frac{1}{3!}f'''(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\alpha) \\ 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) & \frac{1}{2!}f''(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\alpha) \\ 0 & 0 & f(\alpha) & f'(\alpha) & \dots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & f(\alpha) \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(1,0,\dots,0)f(J_n(\alpha)) \cdot (1,x,x^2,\dots,x^{n-1})^T$ – разложение по формуле Тейлора многочлена f в точке α до членов порядка $n-1$.

191 . Найти жорданову форму следующих матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};$$

192 . Доказать, что для любой квадратной λ-матрицы $A(\lambda)$ порядка n, определитель которой есть многочлен от λ степени n, существует числовая матрица B порядка n такая, что матрица $A(\lambda)$ эквивалентна характеристической матрице $B - \lambda E/$

Лямбда-матрицы

Пусть $A = (a_{ij})$ - $m \times n$-матрица. Зададимся натуральным числом $k \leq \min\{m, n\}$ и выберем k строк $i_1, \ldots, i_k$ и k столбцов $j_1, \ldots, j_k$. Образуем матрицу $(a_{i_\alpha j_\beta})$ $(1 \leq \alpha, \beta \leq k)$ определитель которой обозначим

$$A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_k \\ j_1 & \ldots & j_k \end{pmatrix} \qquad (0.41)$$

и назовем минором k-го порядка. Миноры (0.41), у которых $i_1 = j_1; \ldots; i_k = j_k$ называются главными.

Пусть K – поле. Матрица $A(\lambda) = (a_{ij}(\lambda))$, где $a_{ij}(\lambda) \in K[\lambda]$ – многочлены, называется матричным многочленом. Совокупность матричных многочленов размера $n \times n$ образует кольцо. По определению, $\deg A(\lambda) = \max\{\deg a_{ij}(\lambda)\}$. Если $m = \deg A(\lambda)$ и $A(\lambda) = A_0\lambda^m +$ <u>младшие члены</u>, то матрицу A_0 называем главным матричным коэффициентом и обозначаем $Lt(A)$.

193 Предложение. *Пусть $A(\lambda), B(\lambda)$ – два матричных многочлена одного порядка, причем матрица $Lt(B)$ обратима. Тогда найдутся единственные матричные многочлены $Q(\lambda); R(\lambda)$ $(\tilde{Q}(\lambda); \tilde{R}(\lambda))$ такие, что*

$$A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda); \qquad \deg R < \deg B \qquad (0.42)$$

$$A(\lambda) = B(\lambda)\tilde{Q}(\lambda) + \tilde{R}(\lambda); \qquad \deg \tilde{R} < \deg B \qquad (0.43)$$

Доказательство точно такое же как и в случае многочленов над полем. Деление вида (0.42) называем правым, а (0.43) – левым делением.

Пусть $F(\lambda) = F_0\lambda^m + F_1\lambda^{m-1} + \cdots + F_m$ – матричный многочлен над матрицами порядка n, и – какая-либо $n \times n$-матрица. Тогда по определению $F(A) = F_0A^m + F_1A^{m-1} + \cdots + F_m$; $\tilde{F}(A) = A^mF_0 + A^{m-1}F_1 + \cdots + F_m$.

Обобщенная теорема Безу. При правом (левом) делении матричного многочлена $F(\lambda)$ на бином $\lambda E - A$ остаток равен $F(A)$ $(\tilde{F}(A))$.

Определитель матрицы $\lambda E - A$ называется характеристическим многочленом матрицы A и обозначается $\chi_A(\lambda)$. Пусть $B(\lambda)$ – присоединенная матрица к матрице $\lambda E - A$. Тогда

$$(\lambda E - A)B(\lambda) = B(\lambda)(\lambda E - A) = \chi_A(\lambda)E$$

Тем самым матричный многочлен $\chi_A(\lambda)E$ делится на $\lambda E - A$ без остатка. Это возможно лишь в случае $\chi_A(A) = 0$ по обобщенной теореме Безу. Нами доказана

Теорема Гамильтона-Кэли. *Всякая квадратная матрица есть корень своего характеристического многочлена.*

194 Предложение. *Пусть A – квадратная матрица порядка n, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы A с учетом их кратностей. Если $g(\lambda)$ – скалярный многочлен, то $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n)$ – все собственные числа матрицы $g(A)$.*

◀ В виду того, что линейное пространство разложимо в прямую сумму собственных подпространств, достаточно доказать предложение для случая одного корня кратности n. В силу теоремы о жордановой форме, можно считать A верхнетреугольной матрицей с λ_1 на главной диагонали. Тогда $g(A)$ также верхнетреугольная матрица с $g(\lambda_1)$ на главной диагонали. Тогда $\chi_{g(A)}(\lambda) = (\lambda - g(\lambda_1))^n$ и заключение следует. ▶

195 Предложение. *Пусть поле K имеет нулевую характеристику и квадратная матрица A порядка n такова, что $\operatorname{Tr} A^k = 0$ для всех $1 \leq k \leq n$. Тогда A – нильпотентна.*

◀ Пусть ϕ – оператор пространства L, матрица которого есть A. Разложим линейное пространство L в прямую сумму $L = L_0 + L_*$ инвариантных подпространств, где L_0 – собственное подпространство, соответствующее числу 0 (возможно $L_0 = 0$), а L_* – сумма всех других собственных подпространств. Предполагая, что $L_* \neq 0$ получаем, что сужение ϕ на L_* удовлетворяет характеристическому уравнению $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0$ (см. теорему Гамильтона-Кэли). Здесь $k = \dim L_* \leq n$. При этом $a_k \neq 0$ (*) в силу того, что сужение ϕ на L_* невырождено. Так как след сужения ϕ^j на L_0 заведомо 0, то

$$0 = \operatorname{Tr} 0 = \operatorname{Tr}(\phi^k + a_1\phi^{k-1} + \dots + a_{k-1}\phi + a_k) = a_k \cdot k \Rightarrow a_k = 0$$

– противоречие с (*). Противоречие показывает, что на самом деле $L_* = 0$ и поэтому $L_0 = L$. Нильпотентность ϕ и матрицы A доказана. ▶

Пример. Если

$$a + d = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \text{ и } \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$$

то $a=-d$ и $a^2+2bc+d^2=0$, откуда $bc=-a^2=-d^2$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & d^2+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & -a^2-bc \end{pmatrix} = 0$$

Такой трюк уже для 3x3-матриц не проходит (слишком трудоемко!)

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2+b_1a_2+c_1a_3 & a_1b_1+b_1b_2+c_1b_3 & a_1c_1+b_1c_2+c_1c_3 \\ a_2a_1+b_2a_2+c_2a_3 & a_2b_1+b_2b_2+c_2b_3 & a_2c_1+b_2c_2+c_2c_3 \\ a_3a_1+b_3a_2+c_3a_3 & a_3b_1+b_3b_2+c_3b_3 & a_3c_1+b_3c_2+c_3c_3 \end{pmatrix}$$

Далее надо вычислять куб матрицы A и следы матриц A, A^2, A^3 приравнивать к 0. Как отсюда выводить, что $A^3=0$ непонятно. Ограничимся треугольной 3x3-матрицей с элементами a,b,c на главной диагонали. Тогда задачу можно сформулировать так:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=0 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=0$$

Действительно, если заключение не верно, то определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a=b \vee b=c \vee a=c.$$

Если $a=b$, то $c=-2a$ и $c^2=-2a^2$, откуда $4a^2=-2a^2$ и $a=b=0$, а далее и $c=0$ – противоречие. Так же разбираются и остальные случаи альтернативы. Итак, заключение $a=b=c=0$ должно выполняться!

196 Предложение. *Пусть A_j, B_j, Z – $n\times n$-матрицы такие, что $Z=\sum[A_j;B_j]$ и Z коммутирует с каждой A_j. Тогда матрица Z нильпотентна.*

Действительно,

$$Z^n = Z^{n-1}\sum[A_j;B_j] = \sum_j (Z^{n-1}A_jB_j - Z^{n-1}B_jA_j).$$

197 . Матрицу

$$\begin{pmatrix} -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda^2+3\lambda+2 & -\lambda+6 \\ -3\lambda^2+7\lambda+11 & -3\lambda^2+9\lambda+1 & -2\lambda+8 \\ -\lambda^2+2\lambda+8 & -2\lambda^2+5\lambda+3 & -\lambda+4 \end{pmatrix}$$

разделить слева на матрицу $B-\lambda E$, где $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&2\\2&-1&3\end{pmatrix}$

198 . Доказать, что если две матрицы A и B подобны, то их характеристические матрицы $A-\lambda E$, $B-\lambda E$ эквивалентны. Доказать обратное утверждение и при этом показать, что если $B-\lambda E=P(A-\lambda E)Q$, где P и Q – унимодулярные λ-матрицы и P_0, Q_0 – остатки при делении P слева, а Q справа на $B-\lambda E$, то $B=P_0AQ_0$ и $P_0Q_0=E$, т. е. матрица Q_0 осуществляет подобное преобразование матрицы A в матрицу B.

199 . Доказать, что любая квадратная матрица A подобна своей транспонированной матрице $A^\top$

200 . Выяснить, являются ли подобными между собой следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-5\\2&6&-10\\1&2&-3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}6&20&-34\\6&32&-51\\4&20&-32\end{pmatrix}$$

201 . Пользуясь методом задачи 198 для матриц $\begin{pmatrix}5&-1\\9&-1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}38&-81\\16&-34\end{pmatrix}$ найти невырожденную матрицу T такую, что $B=T^{-1}AT$.

202 . Доказать, что сумма характеристических чисел матрицы A равна ее следу, а произведение этих чисел равно определителю матрицы A.

203 . Доказать, что характеристические числа обратной матрицы A^{-1} равны (с учетом их кратности) обратным величинам для характеристических чисел матрицы A.

204 . Доказать, что характеристические числа матрицы A^p равны (с учетом их кратности) р-ым степеням характеристических чисел матрицы A.

Цепи Маркова

Имеется система S с дискретными состояниями $s_1,...,s_n$. Переходы из одного состояния в другое могут происходить только в определенные моменты времени $t_0,t_1,t_2,\ldots$. Переход из состояния s_i в состояние s_j в момент времени t_k происходит с вероятностью $p_{ij}(k)$ (*переходные вероятности*) так, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(k) = 1; \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{0.44}$$

Этот случайные процесс называется *марковской цепью* и представляет собой последовательность событий вида $\{S(k) = s_i\}$. Он характеризуется тем, что

$$\mathbf{P}(S(k+1) = s_j \mid S(k) = s_i) = \mathbf{P}(S(k+1) = s_j \mid S(k) = s_i \text{ всё, что было до момента I}$$

Наиболее важная его характеристика – вероятности $\mathbf{P}(S(k) = s_i)$.

Замечания. Названия «марковская цепь>, «марковский процесс связаны с именем А. А. Маркова, который еще в начале 20-го века дервым стал исследовать такие процессы.

Цепь, в которой условные вероятности состояний в будущем зависят только от состояния на данном, последнем, шаге и не зависят от предыдущих, иногда называют простой цепью Маркова, в отличие от такой, где будущее зависит от состояний системы не только в настоящем на данном шаге, но и от ее состояний на нескольких предыдущих шагах; такую цепь называют сложной цепью Маркова. Сам А. А. Марков рассматривал сложные цепи, построенные на материале буквенных последовательностей, взятых из текста пушкинского «Евгения Онегина».

Если в качестве системы, в которой происходит случайный процесс, рассмотреть букву, входящую в текст, которой могут быть: а, б, в щ, ъ, ы, ь, э, ю, я, «пробел», то сразу ясно, что вероятность последующей буквы быть той или другой зависит от того, какова была предыдущая (например, последовательности букв «яы» или«эь» в русском языке исключены); не так очевидно, но все же ясно, что эта вероятность зависит на только от предыдущей буквы, но и от других, ей предшествовавших (например, последовательность букв «ттт» в русском языке если не исключена, то практически невозможна, тогда как последовательность «тт» встречается довольно часто). Мы в данном элементарном изложении будем рассматривать только простые цепи Маркова.

Переходные вероятности в момент k можно записать в виде $n \times n$-матрицы

$$P(k) = (p_{ij}(k)) = \begin{Vmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1j}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2j}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1}(k) & p_{i2}(k) & \dots & p_{ij}(k) & \dots & p_{in}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nj}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{Vmatrix}$$

В ней сумма элементов любой строки равна 1. Матрицу с неотрицательными элементами и с таким свойством называют *стохастической*.

205 Определение Цепь Маркова называется *однородной*, если $p_{ij}(k)$ не зависят от k.

206 Определение Состояние s_i называется *поглощающим*, если $p_{ii} = 1$.

207 Определение Состояние s_i называется *не существенным*, если найдется другое состояние s_j такое, что переход $s_i \to s_j$ возможен, а обратный переход не возможен. Состояние s_i называется *существенным*, если оно не является несущественным.

Пусть задано начальное распределение вероятностей

$$\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0))$$

Тогда по формуле полной вероятностей

$$p_j(1) = \sum_{i=1}^{n} p_i(0) * p_{ij}$$

Если обозначить матрицу переходных вероятностей P, а вектор-строку безусловных вероятностей нахождения системы в состоянии s_j в момент k через $\mathbf{p}(k)$, то $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0)P$ и более общо

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k)P \Rightarrow \mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0) * P^k \tag{0.45}$$

Пример.

$$\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0, 0); \quad P = \begin{Vmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Стационарные вероятности

При ниже перечисленных условиях существуют предельные вероятности $p_j = \lim\limits_{k\to\infty} p_j(k)$

1. Множество всех состояний системы S должно быть эргодическим (ненулевая вероятность перехода из любого состояния в любое другое)

2. Цепь должна быть однородной

3. Цепь должна быть хорошо перемешанной (моменты попадания в отдельные состояния или группы состояний не образовывали бы циклов)

Заметим, что система из двух состояний с матрицей $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет третьему условию

Стационарные вероятности находятся из системы

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} * P \;\Leftrightarrow\; \mathbf{p} * (E - P) = 0 \tag{0.46}$$

с учетом $\sum p_j = 1$

Величина $p_i p_{ij}$ называется *потоком вероятности* из s_i в s_j

Для стационарного режима суммарный поток вероятности в состояние s_j равен суммарному потоку выводящему систему из состояния s_j:

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} p_i p_{ij} = p_j * \sum_{i=1, i\neq j}^{n} p_{ji} \tag{0.47}$$

– балансовое условие для состояний s_j.

Специальная группа целочисленных матриц

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, причем

$$a, d \equiv 1 \quad (mod\, 4) \tag{0.48}$$
$$c, b \in 2\mathbb{Z} \tag{0.49}$$
$$ad - bc = 1 \tag{0.50}$$

Обозначим через $val(A) := |a| + |b| + |c| + |d|$. Обозначим также

$$e_{12}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad e_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

208 Лемма. *Если $A \neq E$, то имеет место в точности одна из альтернатив*

а) $val(e_{12}(2)A) < val(A)$

б) $val(e_{12}(-2)A) < val(A)$

в) $val(e_{21}(2)A) < val(A)$

г) $val(e_{21}(-2)A) < val(A)$

◀ *Случай 1.* $|a| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$

Подслучай A) Знаки a и c совпадают.

Тогда
$$|a - 2c| + |b - 2d| < |a| + |b| \tag{0.51}$$

Докажем это. Если $a = c$, то из (0.50) следует, что $a = c = \pm 1$ – противоречие с (0.49). Итак, $a \neq c$. Следовательно, $a > c \geq 0$. Отсюда $|a - 2c| < |a| = a$. Далее, если знаки b и d различны, то $\mathrm{sgn}(ad) = \mathrm{sgn}(-bc)$. Из (0.50) следует, что этот знак – плюс и $ad = 1$, $bc = 0$. Тогда $a = d = 1$ (см. (0.48)) и либо $b = 0$ либо $c = 0$. Это простые случаи, те случаи когда A принадлежит либо $gr(e_{12}(2))$, либо $gr(e_{21}(2))$. Итак, можно считать, что знаки d и b совпадают. Имеем

$$\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow b \geq 2 \text{ и } d = (1+bc)/a = 1/a + bc/a \leq 1/a + b(a-1)/a = (1-b)/a + b < b$$

$$\begin{cases} b < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow\ d = (1+bc)/a = 1/a+bc/a \leq 1/a+b(a+1)/a = (1+b)/a+b < b$$

$$\begin{cases} b < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow\ b \leq -2 \text{ и } d = (1+bc)/a = 1/a+bc/a \geq 1/a+b(a-1)/a = (1-b)/a+b > b$$

$$\begin{cases} b < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow\ b \leq -2 \text{ и } d = (1+bc)/a = 1/a+bc/a \geq 1/a+b(a+1)/a = (1+b)/a+b > b$$

Во всех случаях $|d| < |b|$, откуда $|b - 2d| < |b|$. Итак, (0.51) доказано. Следовательно, $val(e_{12}(-2)A) < val(A)$.

Подслучай Б. Знаки a и c различны.

Тогда

$$|a + 2c| + |b + 2d| < |a| + |b| \tag{0.52}$$

Доказывается, что $val(e_{12}(2)A) < val(A)$ точно также как и в подслучае А.

Случай 2. $|d| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$

Доказывается так же как и в случае 1, что либо $val(e_{21}(2)A) < val(A)$ либо $val(e_{21}(-2)A) < val(A)$.

Случай 3. $|b| = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$

Подслучай А. Знаки a и c (а, значит и знаки b и d совпадают)

Тогда опять $|a-2c|+|b-2d| < |a|+|b|$, ибо $|b-2d| \leq |b|$. Доказав, что $|a| > |c|$, получаем отсюда, что $|a - 2c| < |a|$. Следовательно, $val(e_{12}(-2)A) < val(A)$

Подслучай Б. Знаки a и c различны.

Тогда $val(e_{12}(2)A) < val(A)$.

Первая часть леммы доказана. Ещё раз пройдёмся по всем случаям и подслучаям, чтобы убедиться в том, что альтернативы а)–г) несовместимы. Действительно, пусть мы находимся в подслучае а) случая 1. Тогда, если знаки a и c совпадают, то знаки b и d также совпадают и $|b| > |d|$. Следовательно, $|a+2c|+|b+2d| > |a|+|b|$ и $|c+2a|+|d+2b| < |c|+|d|$ и

$|c-2a|+|d-2b| > |a|+|b| \geq |c|+|d|$. Это значит, что $val(e_{12}(2)A) > val(A)$ и $val(e_{21}(2)A) > val(A)$ и $val(e_{21}(-2)A) > val(A)$. Аналогично можно проанализировать все остальные случаи и подслучаи. ►

209 Теорема. *Матрицы $e_{12}(2)$, $e_{21}(2)$ являются свободными порождающими, и группа, ими порождённая состоит из матриц A, удовлетворяющим условиям а)-г) леммы 208.*

◄ Прямо следует из леммы. ►

Матрицы бесконечного порядка

Матрицей порядка $\mathbb{N}$ назовем отображение $\mathbb{N}^2 \mapsto F$ (F – какое либо поле) которое записываем как таблицу элементов поля F с бесконечным числом строк и столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \tag{0.53}$$

Скадываются и умножаются на элементы поля F такие матрицы покомпонентно, однако произведение определено не для любых $\mathbb{N}$-матриц. Произведение $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ бесконечной строки (a_n) на столбец $(b_n)^\top$ бескло-нечной высоты определено в том случае, когда найдется лишь конечное множество индексов n таких, что $a_n b_n \neq 0$. Это условие выполняется, например, в случаях когда либо в строке (a_n) лишь конечное число ненулевых элементов, либо столбец $(b_n)^\top$ обладает этим свойством. Рассмотрим первый случай и совокупность всех $\mathbb{N}$-матриц, у которых в каждой строке лишь конечное число ненулевых элементов обозначим $\mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$, множество вообще всех $\mathbb{N}$-матриц обозначим $\mathbf{Mat}(\mathbb{N}; F)$. Ясно, что любое произведение AB, где $A \in \mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$, $B \in \mathbf{Mat}(\mathbb{N}; F)$ определено и принадлежит, вообще говоря множеству $\mathbf{Mat}(\mathbb{N}; F)$.

210 Предложение. *Если $A, A_1, A_2 \in \mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$, $B, C \in \mathbf{Mat}(\mathbb{N}; F)$, то*

- *$A_1 A_2 \in \mathbf{Mat}_0$;*

- $(A_1A_2)B = A_1(A_2B)$;
- $A(B+C) = AB + AC$

Докажем первое свойство (доказательства остальных ничем не отличаются от случая "конечных" матриц). Пусть $A_1 = (a_{ij})$ и $A_2 = (a'_{ij})$. Достаточно доказать, что в первой строке произведения A_1A_2 лишь конечное число ненулевых элементов. Пусть $a_{1j} = 0$ для всех $j \geq N$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, N-1$ найдем номер M_i такой, что $a'_{ij} = 0$ При условии $j \geq M_i$. Возьмем $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}\}$. Если $j \geq M$, то

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{1t}a'_{tj} = \sum_{t=1}^{N-1} a_{1t}a'_{tj} + \sum_{t=N}^{\infty} a_{1t}a'_{tj} = 0 + 0 = 0$$

Первая сумма после перового знака равенства равна 0, так как $a'_{tj} = 0$, ибо $j \geq M_t$, а вторая сумма равна 0 поскольку $a_{1t} = 0$ для $t \geq N$.

211 Следствие. *Множество* $\mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$ *образует кольцо. Единичным элементом в этом кольце будет матрица* E*, у которой на главной диагонали единицы, а остальные элементы нули.*

Бесконечные матрицы возникают при решении бесконечной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{0.54}$$

Для бесконечных матриц возникает много эффектов, не имеющих места для обычных квадратных матриц. Например, обозначим X^+ $\mathbb{N}$-матрицу, у которой наддиагональ состоит из единиц, а остальные элеметны 0, а $X^- = (X^+)^\top$ содержит единичную поддиагональ, а остальные элементы нули. Тогда

$$X^+ \cdot X^- = E; \quad X^- \cdot X^+ = E - e_{11}$$

Для квадратных матриц одного (конечного) порядка, если $AD = E$, то и $DA = E$. Как мы видим, для бесконечных матриц это свойство нарушается. Однако есть одно важноес свойство – обратимость унитреугольной матрицы, которое переноситься на случай бесконечных матриц.

212 Лемма. *Если $U \in \mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$ такова, что на главной диагонали и под главной диагональю нули, то для натурального k степень U^k сохраняет эти свойства и помимо того имеет нулевыми первые $k-1$ наддиагоналей.*

213 Теорема. *Пусть U такова как и в лемме 212. Тогда бесконечная сумма $E + U + U^2 + U^3 + \cdots$ корректно определена и является $\mathbb{N}$-матрицей обратой $\mathbb{N}$-матрице $E - U$.*

◀ Из леммы 212 вытекает, что сумма $E+U+U^2+U^3+\cdots$ принадлежит $\mathbf{Mat}(\mathbb{N}; F)$. Кроме того, проверяется непосредственно равенства

$$(E-U)(E+U+U^2+U^3+\cdots) = E+U+U^2+U^3+\cdots-U-U^2-U^3-\ldots = E$$

$$(E + U + U^2 + U^3 + \cdots)(E - U) = E.$$

▶ Матрица $E+U+U^2+U^3+\cdots$ не всегда принадлежит кольцу $\mathbf{Mat}_0(\mathbb{N}; F)$. Например, это так в случае матрицы $U = X^+$.

214 Лемма. *Матрица $(X^+)^k$ содержит единичную k-ую наддиагональ, а остальные элементы равны 0*

Проверяется это утверждение индукцией по числу k.

215 Теорема. *Отображение $F[x] \mapsto F[X^+]$, сопоставляющее многочлену $f(x)$ матрицу $f(X^+)$, будет изоморфизмом F-алгебр.*

Дополнение 1: группы, кольца, поля

В этом, весьма абстрактном параграфе приводятся определения и простейшие свойства некоторых алгебраических систем (групп, колец, полей), которые далее часто встречаются при изучении алгебры матриц.

Группы

Множество G с заданной на нем бинарной операцией, сопоставляющей паре элементов $a, b \in G$ элемент $a * b \in G$ (результат операции) называется *группой*, если выполнены следующие три аксиомы:

ГР1 операция $*$ ассоциативна т.е. верно тождество $a*(b*c) = (a*b)*c$;

ГР2 найдется нейтральный элемент $e \in G$ такой, что $e*a = a*e = a$ для любого $a \in G$ (доказать единственность нейтрального элемента);

ГР3 для любого элемента $a \in G$ найдется элемент $\tilde{a}$ для которого $a*\tilde{a} = \tilde{a}*a = e$ (доказать единственность элемента $\tilde{a}$).

Если операция $*$ умножение, то $\tilde{a}$ называется *обратным элементом* к элементу a и обозначается a^{-1}, сама же группа называется *мультипликативной*. Если же операция $*$ сложение, то $\tilde{a}$ называется *противоположным элементом* к элементу a и обозначается $-a$, а группа G в этом случае называется аддитивной.

216 . Пусть G – мультипликативная группа. Доказать, что а) $e^{-1} = e$; б) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

217 . Применяя индукцию по n, доказать, что в произведении $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ элементов группы результат не зависит от расстановки скобок и равен элементу $[[\ldots[a_1 * a_2] * a_3] * \ldots * a_n]$.

218 Пример Убедиться, что следующие множества с указанными операциями образуют группы: а) $(\mathbb{Z}, +)$; б) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$; в) $(\mathbb{S}, \cdot)$; г) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ (группа комплексных корней n-ой степени из единицы); д) мультипликативная группа знаков $\{\pm 1\}$

Число элементов в группе называется *порядком группы* и обозначается $|G|$. В примерах выше а), б), в) – группы бесконечного порядка, группа комплексных корней n-ой степени из единицы имеет порядок n, а группа знаков второго порядка.

Группа подстановок

Обозначим S_n множество всех биекций n элементного множества на себя. В качестве этого n элементного множества возьмём $\{1, 2, \ldots, n\}$. Элемент $\tau \in S_n$ называется подстановкой или *перестановкой* чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Полная табличная запись такого отображения следующая

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

Эта запись означает, что $\tau(k) = i_k$ для всех $1 \leq k \leq n$.

219 Теорема. *Множество S_n относительно композиции образует группу порядка $n!$.*

Нейтральным элементом в группе S_n служит единичная подстановка

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Обратной к подстановке τ будет подстановка

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix},$$

которая получается перестановкой строк таблицы, задающей элемент τ.

220 . Даны подстановки группы S_9

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix};\ \nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 4 & 6 & 9 & 7 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix};$$

Вычислить $\nu \cdot \tau$ и $\tau \cdot \rho$. Убедиться, что результаты не совпадают. Например, $\tau \cdot \nu(1) = \tau(\nu(1)) = \tau(2) = 1$ и тем самым подстановка $\tau \cdot \nu$ оставляет единицу на месте.

Подстановка, которую мы будем записывать в виде $c = (ij \dots k)$ и которая переводит i в j, а j в следующее справа стоящее число, а k переходит в первое число i, называется *циклом*, при этом множество $\{i, j, \dots, k\}$ называется *содержанием цикла c* и обозначается $\operatorname{supp} c$. Количество чисел в записи цикла называется его *длиной*. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Для транспозиции (ij) верны равенства

$$(ij)^2 = e; \qquad (ij)^{-1} = (ij); \qquad (ij) = (ji).$$

221 . Перемножьте два цикла в S_9:

$$c = (2, 3, 7, 1) \cdot (1, 9, 3, 4)$$

Результат запишите в виде полной табличной записи

222 . Найти порядок цикла $c = (54321) \in S_5$, т. е. наименьшее натуральное число n такое, что $c^n = e$. Вычислить c^{2021}.

Два цикла называются *независимыми*, если их содержания не пересекаются.

223 Предложение. *Два независимых цикла* c_1 *и* c_2 *коммутируют, т.е. имеет место равенство* $c_1c_2 = c_2c_1$.

224 Предложение. *Любая подстановка раскладывается в произведение независимых циклов. Такое разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.*

Наглядно подстановку после разложения в произведение независимых циклов можно представить как систему независимых колесиков с числами, написанными на ободе, а действие подстановки заключается в одновременном повороте каждого колесика на угол $\frac{360^o}{|c|}$, где $|c|$ – длина соответствующего цикла.

225 . Нарисовать соответствующие колесики для подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 4 & 2 & 6 & 9 & 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (178342)(569)$$

Пользуясь этим, найти порядок α и вычислить α^{-999}

226 Предложение. *Любая подстановка раскладывается в произведение транспозиций.*

◀ Мы уже доказали, что любая подстановка раскладывается в произведение циклов. Остается убедиться, что

$$(ijp \dots tk) = (ij)(jp) \dots (tk).$$

▶

Для подстановки, как и для числа, можно определить знак. Пару натуральных чисел (j, k) с условием $j \neq k$ назовем *инверсией подстановки* τ, если $(j - k)(\tau(j) - \tau(k)) < 0$, иначе говоря неравенство $j < k$ влечет $\tau(j) > \tau(k)$, а неравенство $j > k$ влечет неравенство $\tau(j) < \tau(k)$. Подстановку τ назовем *четной* и будем писать $\operatorname{sgn} \tau = 1$, если число всех инверсий подстановки τ четно. В противном случае подстановку τ назовем *нечетной* и будем писать $\operatorname{sgn} \tau = -1$. Отметим, что в данном контексте, sgn – отображение из группы S_n в группу знаков. Например, $\operatorname{sgn} e = 1$ и $\operatorname{sgn}(i\, i+1) = -1$.

227 . Вычислить знак подстановок τ, ν задачи 220.

Пусть
$$V_n := \prod_{1\le i<j\le n} (j-i) = (n-1)!\cdot(n-2)!\cdot\ldots\cdot 1! \tag{0.55}$$

Для подстановки τ определим число
$$\tau(V_n) := \prod_{1\le i<j\le n} (\tau(j)-\tau(i)) \tag{0.56}$$

В виду биективности τ получаем: $\tau(V_n) = \operatorname{sgn}\tau\cdot V_n$. Более того,
$$\prod_{1\le i<j\le n} (\rho\tau(j)-\rho\tau(i)) = \operatorname{sgn}\tau\cdot \prod_{1\le i<j\le n} (\rho(j)-\rho(i))$$

для любых двух подстановок $\rho,\tau\in S_n$. Действительно, там где $\tau(j)<\tau(i)$ множитель $\rho\tau(j)-\rho\tau(i)$ мы переписываем как $-(\rho\tau(i)-\rho\tau(j))$. Этих минусов будет столько, сколько инверсий в подстановке τ. После вынесения всех этих минусов вперед, произведение можно переписать как $\operatorname{sgn}\tau\cdot\prod_{1\le i<j\le n}(\rho(j)-\rho(i))$. Как следствие выше доказанного равенства получаем:
$$\operatorname{sgn}(\rho\tau)\cdot V_n = \rho\cdot\tau(V_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (\rho\tau(j)-\rho\tau(i)) = \operatorname{sgn}\tau\cdot\rho(V_n) = \operatorname{sgn}\tau\cdot\operatorname{sgn}\rho\cdot V_n$$

откуда следует *гомоморфность* отображения знака, т.е. тождества
$$\operatorname{sgn}(\tau\rho) = \operatorname{sgn}\tau\cdot\operatorname{sgn}\rho. \tag{0.57}$$

228 Лемма. *Знак транспозиции равен -1. При умножении на транспозицию подстановка меняет знак.*

◀ Равенство $\operatorname{sgn}(i\,i+1) = -1$ отмечено выше. Для транспозиции $(j\ k)$ с $j+1<k$ заметим, что
$$(j\ k) = (k\ k-1)(j\ k-1)(k-1\ k).$$

Тем самым доказательство первого утверждения леммы завершается индукцией по числу $N = |k-j|$ с применением гомоморфности (0.57). Она же доказывает второе утверждение. ▶

229 Теорема. (о знаке подстановки) .

А. *Если подстановка разложена в произведение транспозиций $\tau = t_1t_2\ldots t_k$, то $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^k$. В частности, любая транспозиция – нечетная перестановка.*

Б. *Для цикла c длины k справедливо равенство* $\operatorname{sgn} c = (-1)^{k-1}$.

В. *Если $\tau = c_1 c_2 \ldots c_t$ – разложение подстановки в произведение независимых циклов (включая циклы единичной длины), то* $\operatorname{sgn}\tau = (-1)^{n-t}$

◀ **А.** Применяем гомоморфность (0.57) и лемму 228.

Б. Утверждение следует из А и из формулы для разложения цикла в произведение транспозиций –

$$(ijp\ldots tk) = (ij)(jp)\ldots(tk),$$

которая проверяется непосредственно (считаются образы чисел $i, j, p, \ldots, t, k$ при воздействии левой части и правой части.

В. Пусть $k_1, \ldots, k_t$ – длины циклов $c_1, \ldots, c_t$. Тогда согласно Б и гомоморфности, получаем:

$\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn} c_1 \cdot \ldots \cdot \operatorname{sgn} c_t = (-1)^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{k_t-1} = (-1)^{k_1+\ldots+k_t-t} = (-1)^{n-t}$

▶

Подмножество H группы $(G, *, \tilde{g}, e)$ называется *подгруппой*, если оно содержит нейтральный элемент e и замкнуто относительно операций $*$ и $g \to \tilde{g}$, т . е. если $a, b \in H$, то $a * b, \tilde{a} \in H$. Например, $(\mathbb{Z}, +)$ – подгруппа $(\mathbb{Q}, +)$, а эта в свою очередь будет подгруппой аддитивной группы $(\mathbb{R}, +)$.

230 . Множество всевозможный степеней g^k, $k \in \mathbb{Z}$ элемента g мультипликативной группы G будет подгруппой. Обозначим эту подгруппу $\langle g \rangle$ и назовем *циклической* группой, порожденной элементом g

231 Следствие. *Для $n > 1$ подмножество $\mathbb{A}_n$ всех четных подстановок образует (*знакопеременную*) подгруппу порядка $n!/2$ в группе подстановок.*

Кольца, поля

Множество R с двумя операциями – сложением и умножением называется *кольцом*, если относительно сложения R образует абелеву группу, а умножение ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. выполняются тождества $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$,

$(b+c)a = ba + ca$. Предполагаем далее, что кольцо содержит единицу 1_R. Кольцо R называется *коммутативным*, если $ab = ba$ тождественно.

Элемент u кольца R называется *обратимым*, если найдется элемент $v \in R$ с условием $uv = vu = 1_R$

232 . Множество обратимых элементов кольца R обозначаем $U(R)$; оно будет группой относительно умножения.

Кратко поле – это ненулевое коммутативное кольцо в котором любой ненулевой элемент обратим. Более подробно, множество F вместе с двумя бинарными операциями – сложение и умножение, унарными операциями $x \to -x$ и $0 \neq x \to x^{-1}$ и двумя разными выделенными элементами 0 и 1 такими, что

П1. операции сложения и умножения ассоциативны;

П2. операции сложения и умножения коммутативны;

П3. умножение дистрибутивно относительно сложения;

П4. $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$;

П5. $x + (-x) = 0$, $x \cdot x^{-1} = 1$.

называется полем.

Примеры полей: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ и конечные поля вычетов по модулю простого числа $\mathbb{Z}_p$ из p элементов (p – простое число). Если F – поле, то полем будет и множество рациональных дробей $F(x)$ с переменной x, или, более общо, поле рациональных дробей с n переменными $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Если F – подполе поля K, то K будем называть *расширением поля* F.

Поле F называется конечным, если число его элементов конечно. В противном случае поле называется бесконечным. Примером конечного поля является кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ целых чисел по модулю простого числа p.

Дополнение 2: линейные пространства

Множество L, на котором определены операция сложения ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L \to \mathbf{a}+\mathbf{b} \in L$) и операция умножения на числа ($k \in K, \mathbf{a} \in L \to k\mathbf{a} \in L$ (здесь K – поле, например поле действительных чисел). Предположим, что операции сложения и умножения подчиняются следующим аксиомам-тождествам:

ЛП1 относительно сложения L образует абелеву группу

ЛП2 $k(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$; $(k_1+k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$

ЛП6 $k_2(k_1\mathbf{a}) = (k_2k_1)\mathbf{a}$

ЛП7 $1_K \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L$, $k, k_1, k_2 \in K$). Тогда L назовем *линейным пространством над числовым полем* K. Подмножество $M \subseteq L$ назовем *подпространством*, если оно замкнуто относительно операций сложения и умножения. В любом линейном пространстве есть по крайней мере два подпространства – нулевое и все линейное пространство есть подпространство в самом себе. Основным примером линейного пространства для нас будет *пространство строк* длины n – K^n, с покомпонентными операциями сложения и умножения на элементы поля K:

$$(a_1, \ldots, a_n)+(b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n);\ \lambda(a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)$$

Аналогично, семейство матриц фиксированного рамера образуют линейное пространство. В пространстве $n \times n$-матриц можно выделить подпространство а) диагональных матриц, б) верхнетреугольных матриц, в) симметрических матриц, г) кососимметрических матриц.

Множество решений однородной системы линейных m уравнений с n неизвестными будет подпространством в пространстве строк K^n.

$$M = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 0\}$$

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in M;\ 2a_1 + 3b_1 = 0;$$

$$2(a_1+a_2)+3(b_1+b_2) = 2a_1+3b_1+2a_2+3b_2 = 0+0 = 0 \Rightarrow (a_1+a_2, b_1+b_2) \in M$$

Наоборот, любое подпространство M пространства строк K^n может быть задано как множество решений системы m уравнений с n неизвестными, причём можно взять $m \leq n$. Однако этот факт докажем позже (???)

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – элементы линейного пространства L, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – элементы поля K. Выражение $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ называется *линейной комбинацией* элементов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Эта линейная комбинация называется *нетривиальной*, если хотя бы один из λ_i-ых отличен от нуля. В противном случае эта линейная комбинация называется *тривиальной*; ее значение равно нулю. Скажем, что элемент $\mathbf{b} \in L$ разложим по элементам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, если $\mathbf{b}$ равен какой-либо линейной комбинации этих элементов.

Множество всех линейных комбинаций образует подпространство линейного пространства L, обозначим его $K\mathbf{a}_1 + K\mathbf{a}_2 + \ldots + K\mathbf{a}_n$ или, иначе, $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$. Если это подпространство совпадает со всем пространством, т. е. любой элемент из L представим в виде линейной комбинации $\mathbf{a}_i$-х, то назовем систему элементов $\{\mathbf{a}_i\}$ *полной*; иными словами в этой ситуации L порождено элементами $\{\mathbf{a}_i\}$.

Представление элемента $\mathbf{b} \in L$ в виде линейной комбинации элементов $\{\mathbf{a}_i\}$ может быть не единственным. Легко видеть, что следующие два условия относительно системы векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ $(i \in I)$ эквивалентны:

а) *любой элемент* $\mathbf{b} \in K\mathbf{a}_1 + K\mathbf{a}_2 + \cdots + K\mathbf{a}_n$ *имеет единственное разложение в виде линейной комбинации* $\mathbf{a}_i$*-х.*

б) *если* $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$*, то* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Если выполнены эти эквивалентные условия, то элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми*. В противном случае элементы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, т. е. элементы линейно зависимы тогда, когда существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, равная нулю.

233 . Свойства (не)зависимости

A. *Если система элементов содержит* $\mathbf{0}$*, то она линейно зависима.*

В самом деле, равенство $1\cdot\mathbf{0}+0\mathbf{a}_2+\ldots+0\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$ является нетривиальной линейной зависимостью.

Элементарными преобразованиями системы векторов назовем (1 тип) прибавление к некоторому вектору другого, умноженного предварительно на какой-либо элемент поля K, (2 тип) перестановку местами двух векторов системы, (3 тип) умножение какого-либо вектора системы на ненулевой элемент поля.

Б. *Если к зависимой (независимой) системе элементов применить элементарное преобразование, то она останется линейно зависимой (независимой).*

В.*Система элементов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *зависима тогда и только тогда, когда найдется индекс* k, $1 \leq k \leq m$ *такой, что* $\mathbf{a}_k$ *линейно выражается через* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$.

Г. *Если система элементов зависима, то и всякая надсистема зависима. Если система элементов независима, то и всякая подсистема независима.*

Д. *Система* n *строк* $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(1 \leq i \leq n)$ *длины* n *линейно зависима тогда и только тогда, когда* $\det(a_{ij}) = 0$.

Е. *Система* m *строк* $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ $(1 \leq i \leq m)$ *длины* n *при* $m > n$ *всегда линейно зависима.*

◀ Рассмотрим систему линейных однородных уравнений относительно λ_i: $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)A = \mathbf{0}$, где $A = (a_{ij})$ – $m \times n$ матрица. Существование ненулевого решения этой системы есть в точности утверждение о линейной зависимости строк $\mathbf{a}_i$-ых. Если $m > n$, то ненулевое решение заведомо существует (метод Гаусса решения СЛАУ). Пусть $m = n$. Тогда по теореме Крамара эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(a_{ij}) = 0$. ▶

Ж.*Если каждый из элементов* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейно выражается через семейство элементов* $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ *и* $m > n$, *то элементы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейно зависимы.*

Заключение

Теория пределов, ряды и дифференциальный анализ обобщаются на поле комплексных чисел. В каком-то смысле получается более совершенная теория аналитических функций. Вопросы, связанные с глобальными величинами функций (длина кривой, площадь, объем и т.п.), находятся также за рамками данного пособия. Алгебраические конструкции (матрицы, определители, системы линейных уравнений, линейные пространства) и геометрические образы (векторы, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка) должны усваиваться параллельно с излагаемыми в пособии определениями и теоремами. Все вместе это составляет фундамент математического образования инженера. Далее, в зависимости от специфики будущей профессии, можно изучать теорию вероятностей, математическую статистику, многомерную геометрию, логику, гармонический анализ, теорию кодирования, теорию графов и множество других математических дисциплин.

Библиографический список

1. *Боревич*, З. И. Теория чисел / З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич. – М. : Наука, 1964. – 566 с.

2. *Бурбаки*, Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства / Н. Бурбаки. – М. : Наука, 1969. – 392 с.

3. *Бэлман*, Р. Введение в теорию матриц./ Р. Бэлман. - М.: Наука, 1969. - 189 с.

4. *Винберг*, Э. Б. Курс алгебры./ Э.Б. Винберг. - М.: Факториал Пресс, 2001. - 544 с.

5. *Грэхем*, Р. Конкретная математика / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М. : Мир : БИНОМ, 2006. – 704 с.

6. *Данко*, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1986. – Ч. 2. – 415 с.

7. *Дубровин*, Н. И. Конспект лекций по алгебре./ Н.И. Дубровин. - Владимир. ВлГУ. 1997. - 67 с.

8. *Дубровин*, Н. И. Математический анализ 1 : курс лекций / Н. И. Дубровин. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 144 с. – ISBN 978-5-9984-0827-4.

9. *Дубровин*, Н. И. О суммировании числовых рядов по Эйлеру / Н. И. Дубровин // Известия вузов. Математика. – 2020. – № 7. – С. 76 – 82.

10. *Кострикин*, А. И. Введение в алгебру./ А. И. Кострикин, М.: Наука, 1977. - 495 с.

11. *Кострикин,* А. И. Линейная алгебра и геометрия./ А. И. Кострикин, Ю. И. Манин - Изд-во МГУ. 1980. - 319 с.

.

Учебное электронное издание

ДУБРОВИН Николай Иванович

МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт прикладной математики, физики и информатики
ndubrovin81@gmail.com