Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Учебное пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2021

УДК 373.3
ББК 74.262.21
Т46

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Тихомирова, С. В.
Т46 Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов : учеб. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 152 с.
ISBN 978-5-9984-1420-6

Содержит необходимые теоретические сведения начальной математики, основанные на теории числовых множеств и геометрическом материале, примеры решений типовых задач, проверочные тесты и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов вузов 2-го курса направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» (профиль «Начальное образование») всех форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 123. Табл. 1. Библиогр.: 20 назв.

УДК 373.3
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9984-1420-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебная дисциплина «Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов» – продолжение дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов». Включает в себя три больших раздела: «Расширение понятия о числе», «Теоретические основы начальной геометрии» и «Элементы конструктивной геометрии». Математика начальной школы выстроена в теоретико-множественном русле, основные понятия в ней – «множество», «натуральное число», «величина». Понятия «множество» и «натуральное число» служат базой для расширения понятия о числе. Для решения задач конструктивной геометрии необходимо освоить работу с геометрическими величинами.

Пособие содержит три главы с изложением основ теории и практические образцы решений типовых задач, а также подборку заданий для самостоятельного решения.

В первой главе рассматриваются вопросы теории расширения числовых множеств. Преддверием служат определения таких математических предложений, как выражения, равенства, неравенства, а также правила преобразования этих предложений в тождественные. Далее вводятся аксиоматические определения натуральных и целых неотрицательных чисел. Арифметические операции над числами в этом случае определяются также аксиоматически. Введенные множества служат основой для построения нового множества – множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Они получаются в результате расширения предыдущих множеств. При решении алгебраических уравнений в математике, при измерении размеров геометрических объектов, а зачастую в быту и повседневности одними целыми числами не обойтись. Например, в множестве целых чисел задачи «найти корень уравнения $5x = -2$», «измерить диагональ квадрата, сторона которого равна единице», «купить половину булки хлеба», «приготовить девятипроцентный раствор соли в воде» окажутся неразрешимыми, поэтому возникает необходимость изучения других (дробных) чисел и умения действовать с ними.

Множество целых неотрицательных чисел, как и множество натуральных чисел, вводится аксиоматически. В рамках аксиоматического подхода определяются арифметические действия с целыми неотрицательными числами, формулируются законы для операций сложения и умножения. Основной метод доказательства всех сформулированных математических предложений на множествах $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$ следует из четвёртой аксиомы Д. Пеано. Это метод математической индукции. Кроме строгих доказательств утверждений, устанавливается ещё справедливость правил вычитания и деления на множествах $\mathbb{N}_0$ и $\mathbb{N}$.

Работая с целыми неотрицательными числами, получаем числовые выражения. Теоретические особенности, касающиеся преобразования таких выражений, приводятся в самом начале первой главы.

После множества $\mathbb{N}_0$ происходит знакомство с множествами целых чисел $\mathbb{Z}$, рациональных чисел $\mathbb{Q}$, действительных чисел $\mathbb{R}$. Каждое из этих множеств порождается постепенным расширением предыдущего числового множества: множество $\mathbb{Z}$ получено расширением множества $\mathbb{N}_0$, в свою очередь, множество $\mathbb{Z}$ расширяется до множества $\mathbb{Q}$, и, наконец, множество $\mathbb{Q}$ – до множества $\mathbb{R}$.

Вторая глава включает в себя все геометрические понятия начальной школы и выполнена под чётким руководством педагога-методиста, народного учителя Российской Федерации В. А. Рыжика. Материал этой главы опирается на методические наработки педагогов-классиков – профессоров А. М. Пышкало, Н. Б. Истоминой, Л. П. Стойловой.

Третья глава содержит задачи на построение циркулем и линейкой и основные методы решения конструктивных задач: метод геометрических мест точек, метод преобразования и алгебраический метод. Углублённо эти вопросы рассмотрены в книге Б. И. Аргунова и М. Б. Балка «Геометрические построения на плоскости». В данном пособии материал теоретической части и практических задач отобран согласно объёму геометрического материала, необходимому будущему учителю начальной школы.

Задачи для самостоятельного решения сгруппированы по темам. Различные типы заданий содержат набор вариантов, что обеспечивает полноценную работу со студентами и в группе, и индивидуально.

При подготовке пособия автор использовал учебники, задачники-практикумы по математике для студентов высших педагогических учебных заведений, написанные профессорами Л. П. Стойловой, Н. Я. Виленкиным, А. Д. Александровым. Автор выражает глубокую благодарность за помощь в создании пособия своим учителям и коллегам Л. В. Любишевой, Г. Г. Шмырёвой, И. И. Цыганок, Е. В. Лопаткиной, С. П. Митину.

Глава 1. РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

1.1. Выражения. Равенства. Неравенства

Числовые выражения. Любое число можно считать числовым выражением. При записи числовых выражений используют знаки арифметических действий (операций), а также скобки.

Определение. Математическое предложение, составленное из чисел, знаков действий и скобок, называется числовым выражением.

В общем виде числовые выражения (числа) можно обозначать большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$.

Определение. Если A и B – числовые выражения, то $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$, $A : B$ также числовые выражения.

Если в качестве числовых выражений используют числа, то скобки записывают только для указания порядка действий. Принято сначала выполнять действия в скобках; если скобок нет, то следует начать с действия второй ступени (умножение, деление), а затем перейти к действию первой ступени (сложение, вычитание). Если в выражении имеются действия одной ступени, то выполняют действия по порядку слева направо. Если выражение составлено только на основе умножения или только на основе сложения, то выполнять эти действия можно в любой последовательности.

Определение. Число, которое получается в результате выполнения всех арифметических действий, указанных в выражении, называют значением числового выражения.

Например, значение числового выражения $3 \cdot 4 - 2$ равно 10. В общей теории рассматриваются выражения, не имеющие числового значения: $33 : (8 - 8)$. Про такие *выражения* говорят, что они *не имеют смысла*.

Множество всех числовых выражений можно разбить на два класса: K_1 – множество числовых выражений, имеющих числовое значение, K_2 – множество числовых выражений, не имеющих числового значения.

В K_1 можно задавать различные бинарные отношения. Эти бинарные отношения в дальнейшем позволяют определить числовые равенства и числовые неравенства.

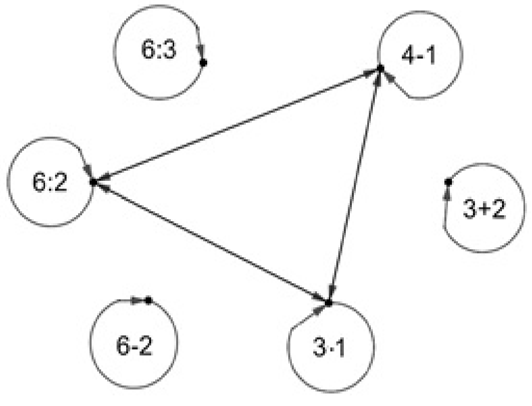


Рис. 1.1

Например, на множестве (рис. 1.1) $M = \{4-1, 3+2, 3\cdot 1, 6-2, 6:2, 6:3\}$ отношение R задано предикатом $R(x,y)$: «Выражение x имеет такое же числовое значение, что и выражение y».

Данное отношение рефлексивно, симметрично, транзитивно, т. е. является отношением эквивалентности, и становится возможным разбиение множества M на классы эквивалентности.

Похожим образом будет разбиваться на классы эквивалентности и всё множество числовых выражений, имеющих определённое числовое значение.

Числовые равенства. *Определение.* Числовым равенством называют два числовых выражения, соединённых знаком «равно»: $A = B$.

С точки зрения логики числовое равенство – это высказывание. В школьном курсе математики говорят так: *равенство верное* и *неверное*.

Определение. Высказывание является истинным, если значение числового выражения A совпадает со значением числового выражения B.

$4-1 = 3\cdot 1$ – «и» $\Longrightarrow$ равенство верно,
так как $\text{Зн.}(4-1) = \text{Зн.}(3\cdot 1)$.

$4-1 = 3+2$ – «л» $\Longrightarrow$ равенство неверно,
так как $\text{Зн.}(4-1) \neq \text{Зн.}(3+2)$.

Числовые равенства обладают следующими *свойствами.*

1°. Свойство рефлексивности. «Любое числовое выражение равно самому себе»: $A = A \Leftrightarrow \text{Зн.}(A) = \text{Зн.}(A)$ – «и».

2°. Свойство симметричности. «Если $A = B$, то $B = A$, где A, B – любые числовые выражения с определённым числовым значением»: $\text{Зн.}(A) = \text{Зн.}(B) \Longrightarrow \text{Зн.}(B) = \text{Зн.}(A)$.

3°. Свойство транзитивности. «Если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением»: $\text{Зн.}(A) = \text{Зн.}(B) \wedge \text{Зн.}(B) = \text{Зн.}(C) \Longrightarrow \text{Зн.}(A) = \text{Зн.}(C)$.

4°. «Если $A = B$, то $A + C = B + C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением, причём Зн. $(C) \neq 0$».

К обеим частям верного числового равенства можно прибавлять одно и то же числовое выражение, отличное от нуля.

5°. «Если $A = B$, то $A - C = B - C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением, причём Зн. $(C) \neq 0$».

6°. «Если $A = B$, то $A \cdot C = B \cdot C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением, причём Зн. $(C) \neq 0$».

7°. «Если $A = B$ и Зн.$(C) \neq 0$, то $A : C = B : C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

8°. «Если $A = B$ и $C = D$, то $A + C = B + D$, где A, B, C, D – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

9°. «Если $A = B$ и $C = D$, то $A - C = B - D$, где A, B, C, D – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

10°. «Если $A = B$ и $C = D$, то $A \cdot C = B \cdot D$, где A, B, C, D – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

11°. «Если $A = B$ и $C = D$ и Зн.$(C) =$ Зн.$(D) \neq 0$, то $A : C = B : D$, где A, B, C, D – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

Свойства $1^\circ – 3^\circ$ характеризуют отношение равенства на множестве числовых выражений с определённым числовым значением как отношение эквивалентности, поэтому множество числовых выражений с определённым числовым значением разбивается на классы эквивалентности. В один класс попадут все числовые выражения с одинаковыми числовыми значениями.

Свойства $4^\circ – 11^\circ$ описывают механизм получения истинных числовых равенств на основе заданных арифметических действий.

Числовые неравенства.

На множестве (рис. 1.2) $M = \{4 - 1, 3 + 2, 3 \cdot 1, 6 - 2, 6 : 2, 6 : 3\}$ отношение R задано предикатом $R(x, y)$: «Значение выражения x больше значения выражения y», где $x, y \in M$.

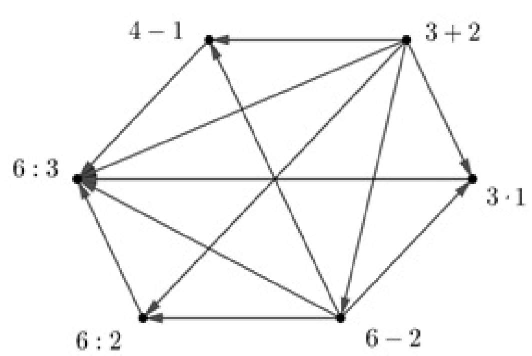


Рис. 1.2

Это отношение антирефлексивно, асимметрично, антитранзитивно, следовательно, является отношением строгого порядка, значит, множество M упорядоченное.

Аналогичным образом отношение порядка может быть введено и на всём множестве числовых выражений с определённым числовым значением.

Рассмотренное отношение позволяет определять числовые неравенства.

Определение. Числовое неравенство – это два числовых выражения, соединённых знаком «>» или «<»: $A > B$ или $A < B$.

С точки зрения логики неравенства – это высказывания. Истинность высказывания определяется на основе значений числовых выражений. Например, рассмотрим следующие числовые выражения:

$2 \cdot 3 + 8$ и $2 \cdot (3 + 8)$.

Найдем их значения:

$\text{Зн.}(2 \cdot 3 + 8) = 14, \quad \text{Зн.}(2 \cdot (3 + 8)) = 22;$

$\text{Зн.}(2 \cdot 3 + 8) < \text{Зн.}(2 \cdot (3 + 8)) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 8 < 2 \cdot (3 + 8)$ – «и».

Сформулируем *свойства* полученного *отношения*.

1°. Свойство антирефлексивности. «Никакое числовое выражение не может быть больше самого себя»: $\overline{A > A}$. Аналогично: «Никакое числовое выражение не может быть меньше самого себя» ($\overline{A < A}$).

2°. Свойство асимметричности. «Для любых числовых выражений A и B с определённым числовым значением: если A уже больше B, то никогда B не будет больше A» $(A > B \Rightarrow \overline{B > A})$.

Аналогично $A < B \Rightarrow \overline{B < A}$.

3°. Свойство транзитивности. «Для любых числовых выражений A, B и C с определённым числовым значением: если A больше B и B больше C, то A больше C»: $(A > B \wedge B > C) \Rightarrow (A > C)$.

Аналогично $(A < B \wedge B < C) \Rightarrow (A < C)$.

4°. К обеим частям верного числового неравенства можно прибавлять одно и то же числовое выражение, имеющее смысл.

«Если $A > B$, то $A + C > B + C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

«Если $A < B$, то $A + C < B + C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

5°. Из обеих частей верного числового неравенства можно вычитать одно и то же числовое выражение, имеющее смысл.

«Если $A > B$, то $A - C > B - C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

«Если $A < B$, то $A - C < B - C$, где A, B, C – любые числовые выражения с определённым числовым значением».

6°. «Для любых числовых выражений A, B и C с определённым числовым значением:

$A > B \wedge \text{Зн.}(C) > 0 \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$,

$A > B \wedge \text{Зн.}(C) < 0 \Rightarrow A \cdot C < B \cdot C$,

$A < B \wedge \text{Зн.}(C) > 0 \Rightarrow A \cdot C < B \cdot C$,

$A < B \wedge \text{Зн.}(C) < 0 \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$».

7°. «Для любых числовых выражений A, B и C с определённым числовым значением:

$A > B \wedge \text{Зн.}(C) > 0 \Rightarrow A : C > B : C$,

$A > B \wedge \text{Зн.}(C) < 0 \Rightarrow A : C < B : C$,

$A < B \wedge \text{Зн.}(C) > 0 \Rightarrow A : C < B : C$,

$A < B \wedge \text{Зн.}(C) < 0 \Rightarrow A : C > B : C$».

8°. «Для любых числовых выражений A, B и C с определённым числовым значением:

$A > B \wedge C > D \Rightarrow A + C > B + D$,

$A < B \wedge C < D \Rightarrow A + C < B + D$».

9°. «Для любых числовых выражений A, B и C с определённым числовым значением: при переходе к сравнению обратных числовых значений знак неравенства должен быть изменён на противоположный:

$A > B \wedge \text{Зн.}(A) > 0 \wedge \text{Зн.}(B) > 0 \Rightarrow \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$,

$A < B \wedge \text{Зн.}(A) > 0 \wedge \text{Зн.}(B) > 0 \Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$».

Свойства $1^\circ - 3^\circ$ характеризуют отношения «больше» и «меньше» на множестве числовых выражений с определённым числовым значением как отношения строгого порядка. Следовательно, множество числовых выражений с определённым числовым значением упорядоченное по указанным отношениям.

Свойства $4^\circ - 9^\circ$ определяют возможности получения истинных числовых неравенств на основе допустимых преобразований с использованием основных арифметических операций.

Поскольку равенства и неравенства являются высказываниями, то к ним применимы логические операции:

$A \leq B \equiv A < B \vee A = B$.

Нестрогие неравенства тождественны дизъюнкции строгого неравенства или равенства:

$A \geq B \equiv A > B \vee A = B.$

$5 \geq 3 \equiv 5 > 3 \vee 5 = 3$ («и» = «и» или «л»).

$5 \geq 5 \equiv 5 > 5 \vee 5 = 5$ («и» = «л» или «и»).

Двойные неравенства. Равносильны конъюнкции:

$B < A < C \equiv A > B \wedge A < C.$

Например, $3 < 5 < 7 \equiv 5 > 3 \wedge 5 < 7$ («и» = «и» и «и»).

Аналогично определяются и следующие двойные неравенства:

$B > A > C \equiv A < B \wedge A > C,$

$B \leq A < C \equiv A \geq B \wedge A < C \equiv (A > B \vee A = B) \wedge (A < C),$

$B < A \leq C \equiv A > B \wedge A \leq C \equiv (A > B) \wedge (A < C \vee A = C),$

$B \geq A > C \equiv A \leq B \wedge A > C \equiv (A < B \vee A = B) \wedge (A > C),$

$B > A \geq C \equiv A < B \wedge A \geq C \equiv (A < B) \wedge (A > C \vee A = C),$

$B \leq A \leq C \equiv A \geq B \wedge A \leq C \equiv (A > B \vee A = B) \wedge (A < C \vee A = C),$

$B \geq A \geq C \equiv A \leq B \wedge A \geq C \equiv (A < B \vee A = B) \wedge (A > C \vee A = C).$

Выражения с переменной. *Определение.* Математическое предложение, составленное на основе чисел, букв (переменных), знаков арифметических действий и скобок, называется буквенным, или выражением с переменной, если при подстановке значений переменных получают числовое выражение.

Покажем, что предложения $A(x) = 5x + 2$, $B(a, b) = 3a - b$, $L(n) = n^2 - 2n + 1$, $M(x, y, z) = x(y + z)$ являются выражениями с переменными.

Действительно:

1) пусть $x \in \mathbb{R}$, тогда $A(x)$ при $x = 3$ (например) становится числовым выражением $A(3) = 5 \cdot 3 + 2$;

2) пусть $a, b \in \mathbb{R}$, тогда $B(a, b)$ при $a = 1, b = 3$ (например) становится числовым выражением $B(1, 3) = 3 \cdot 1 - 3$;

3) пусть $n \in \mathbb{R}$, тогда $L(n)$ при $n = 7$ (например) становится числовым выражением $L(7) = 7^2 - 2 \cdot 7 + 1$;

4) пусть $x, y, z \in \mathbb{R}$, тогда $M(x, y, z)$ при $x = 1, y = 2, z = 3$ (например) становится числовым выражением $M(1, 2, 3) = 1 \cdot (2 + 3)$.

Определение. Множество значений переменной x, при подстановке которых в выражение с переменной $A(x)$ получается числовое выражение с определённым числовым значением, образует области определения $D_{A(x)}$ выражения $A(x)$.

Например, на множестве натуральных чисел рассмотрим выражения $A(x) = 5x + 2$, $E(x) = 5 : (x + 2)$ и $C(x) = \sqrt{x^2 - 2}$.

Область определения выражения $A(x)$ – всё множество натуральных чисел, $D_{A(x)} = \mathbb{N}$.

Область определения выражения $E(x)$ – все натуральные числа x, для которых частное $5 : (x + 2)$ имеет смысл. Рассуждаем: число 5 простое и делится только на 1 и 5; выражение $(x + 2) = 1$ в натуральных числах смысла не имеет, так как не найдётся ни одного натурального числа x, которое в сумме с бóльшим числом даст меньшее; выражение $(x + 2) = 5$ в натуральных числах определено при $x = 3$, так как $3 + 2 = 5$ – верное числовое равенство, то $D_{E(x)} = \{3\}$.

Область определения выражения $C(x)$ – все натуральные числа x, для которых арифметический квадратный корень $\sqrt{x^2 - 2}$ существует. По определению корня имеем: $x^2 - 2 \geq 0 \implies (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) \geq 0$. Согласно условию $x \in \mathbb{N}$. Значит, $D_{C(x)} = \{x | x \in \mathbb{N}, (x - \sqrt{2})(x + +\sqrt{2}) \geq 0\}$. Или, упрощая, получаем $D_{C(x)} = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq \sqrt{2}\}$.

Определение. Два выражения называются тождественно равными, или тождественными, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные числовые значения равны.

Например, на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ выражения $(a + b)^2$ и $a^2 + 2ab + b^2$ тождественно равны: $(a + b)^2 \equiv a^2 + + 2ab + b^2$.

Выражения $\frac{x}{5}$ и $\frac{x(x-2)}{5(x-2)}$ на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ не тождественны: $\frac{x}{5} \not\equiv \frac{x(x-2)}{5(x-2)}$. Эти выражения будут тождественны на множестве $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, потому что для всех действительных чисел $x \neq 2$ числовые значения выражений $\frac{x}{5}$ и $\frac{x(x-2)}{5(x-2)}$ будут совпадать. Итак, $\frac{x}{5} \equiv \frac{x(x-2)}{5(x-2)}$ для всех $x \in (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$.

К тождественным преобразованиям выражений с переменной относят те преобразования, которые не меняют области определения и значения выражения при подстановке значений переменных: приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок, вынесение общего множителя за скобки, приведение к общему знаменателю.

1.2. Аксиоматический подход к построению множества целых неотрицательных чисел

Метод логической организации предложений, составляющих какую-либо теорию, называется *аксиоматическим*. Впервые был применён математиками Древней Греции. В настоящее время такой метод построения теории общепринятый в математике. Суть его состоит в следующем.

1. Выделяются *основные* (неопределяемые) *понятия*, через которые вводятся все остальные понятия данной теории.

2. Для основных понятий вводятся отношения и формулируются заведомо истинные предложения – *аксиомы*, а из них логическим путём выводятся все остальные предложения данной теории, называемые *теоремами* и *леммами*.

Аксиоматический метод в математике связан с именами Евклида, Д. Гильберта, Н. И. Лобачевского, Я. Больяй, Дж. Пеано и др.

Основоположником аксиоматической теории множества целых неотрицательных чисел считается Дж. Пеано (1858 – 1932).

Требования к построению теории чисел таковы.

1. Основные неопределяемые понятия – множество, элемент множества.

2. Отношение – «непосредственно следовать за».

Для элементов множества $\mathbb{N}_0$ (или множества $\mathbb{N}$) примем обозначения: e – начальный элемент; x – любой элемент; x' – элемент, непосредственно следующий за x.

Аксиомы Пеано. **AI.** Начальный элемент e непосредственно не следует ни за каким целым неотрицательным числом x:

$(\forall x)\ [x' \neq e]$.

AII. Для любого целого неотрицательного числа существует одно и только одно непосредственно следующее за ним целое неотрицательное число:

$(\forall x)\ (\exists!\, y)\ [y = x']$.

AIII. Любое целое неотрицательное число непосредственно следует не более чем за одним целым неотрицательным числом:

$(\forall x, y, z)\ [z = x' \wedge z = y' \Rightarrow x = y]$.

AIV. Аксиома индукции: подмножество M множества $\mathbb{N}_0$, которое содержит e и вместе с любым элементом x всегда содержит и непосредственно следующий за ним элемент x', совпадает со всем множеством $\mathbb{N}_0$.

$(e \in M \wedge \forall x)\ [x \in M\ \Rightarrow\ x' \in M] \Longrightarrow [M =\ \mathbb{N}_0]$.

Замечание 1. Начальному элементу множества целых неотрицательных чисел приписан символ 0: $(e \in \mathbb{N}_0)\ \Longrightarrow (e = 0)$.

Замечание 2. Аксиомы Дж. Пеано, сформулированные для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, отличаются от приведённых аксиом для множества $\mathbb{N}_0$ только начальным элементом, которому приписан символ 1:

$(e \in \mathbb{N}_0) \Longrightarrow (e = 1)$.

Любое множество, для элементов которого задано отношение «непосредственно следовать за» и выполняются сформулированные аксиомы Дж. Пеано, можно определять как множество целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (если $e = 0$) или как множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ (если $e = 1$). Элементы этих множеств – числа, для записи которых используют привычную символику.

Далее система аксиом AI – AIV расширяется за счёт аксиоматического введения операций сложения и умножения.

Определение. Сложение – это бинарная операция, которая любой паре целых неотрицательных чисел (a, b) ставит в соответствие число $a + b$, называемое суммой чисел, при выполнении двух аксиом сложения.

$\boldsymbol{A_1^+}$. Сумма любого целого неотрицательного числа a и нуля равна самому этому числу: $\forall a \in \mathbb{N}_0\ \ a + 0 = a$.

$\boldsymbol{A_2^+}$. Сумма любого целого неотрицательного числа a и числа b', непосредственно следующего за числом b, равна числу $(a + b)'$, непосредственно следующему за суммой $a + b$: $\forall a,\ b \in \mathbb{N}_0\ \ a + b' = (a + b)'$.

Замечание 3. A_1^+ – это правило прибавления начального элемента к любому целому неотрицательному числу; A_2^+ – правило сложения любых элементов множества $\mathbb{N}_0$.

Имеют место *следствия* из аксиом сложения.

$\boldsymbol{C_1^+}$. Сумма нуля и любого целого неотрицательного числа a равна самому числу: $\forall a \in \mathbb{N}_0\ \ 0 + a = a$.

$\boldsymbol{C_2^+}$. Сумма целого неотрицательного числа a', непосредственно следующего за числом a, и любого целого неотрицательного числа b равна числу $(a+b)'$, непосредственно следующему за суммой $a+b$:

$\forall a,\ b \in \mathbb{N}_0\ \ a' + b = (a+b)'$.

Определение. Умножение – это бинарная операция, которая любой паре целых неотрицательных чисел (a, b) ставит в соответствие число $a \cdot b$, называемое произведением чисел, при выполнении двух аксиом умножения.

$\boldsymbol{A_1^\times}$. Произведение любого целого неотрицательного числа a и нуля равно нулю: $\forall a \in \mathbb{N}_0\ \ a \cdot 0 = 0$.

$\boldsymbol{A_2^\times}$. Произведение любого целого неотрицательного числа a и числа b', непосредственно следующего за числом b, равно сумме произведения чисел a и b с числом a: $\forall a,\ b \in \mathbb{N}_0\ \ a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Замечание 4. $A_1^\times$ – это правило умножения начального элемента на любое целое неотрицательное число; $A_2^\times$ – правило умножения любых элементов множества $\mathbb{N}_0$.

Имеют место *следствия* из аксиом умножения.

$\boldsymbol{C_1^\times}$. Произведение нуля и любого целого неотрицательного числа a равно нулю: $\forall a \in \mathbb{N}_0\ \ 0 \cdot a = 0$.

$\boldsymbol{C_2^\times}$. Произведение целого неотрицательного числа a', непосредственно следующего за числом a, и любого целого неотрицательного числа b равно сумме произведения чисел a и b с числом b:

$\forall a,\ b \in \mathbb{N}_0\ \ a' \cdot b = a \cdot b + b$.

Общая теория предполагает далее доказательство теорем существования и единственности введённых таким образом суммы и произведения целых неотрицательных чисел, а также законов, которым подчиняются эти операции. В рамках аксиоматического подхода можно утверждать, что сложение и умножение – алгебраические операции на этом множестве (т. е. результат сложения и результат умножения двух чисел находятся в этом же множестве), которые подчиняются коммутативным, ассоциативным и дистрибутивным законам.

Замечание 5. Выше приведены аксиомы сложения и умножения, а также следствия из них для множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$. Для множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ эти предложения формулируются так:

$A_1^+(\mathbb{N})\ \forall a \in \mathbb{N}\ \ a + 1 = a'$,

$A_2^+(\mathbb{N})\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}\ \ a + b' = (a+b)'$,

$C_1^+(\mathbb{N})\ \forall a \in \mathbb{N}\ \ 1 + a = a'$,

$C_2^+(\mathbb{N})\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}\ \ a' + b = (a + b)'$,

$A_1^\times(\mathbb{N})\ \forall a \in \mathbb{N}\ \ a \cdot 1 = a$,

$A_2^\times(\mathbb{N})\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}\ \ a \cdot b' = a \cdot b + a$,

$C_1^\times(\mathbb{N})\ \forall a \in \mathbb{N}\ \ 1 \cdot a = a$,

$C_2^\times(\mathbb{N})\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}\ \ a' \cdot b = a \cdot b + b$.

Отметим также, что в множестве $\mathbb{N}_0$ предложения $A_1^+(\mathbb{N})$, $C_1^+(\mathbb{N})$, $A_1^\times(\mathbb{N})$, $C_1^\times(\mathbb{N})$ уже не носят характер аксиом, поэтому могут быть доказаны.

Теперь перейдем к изучению операций вычитания и деления. Вычитание на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (как и на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$) – операция, обратная сложению, а деление – операция, обратная умножению.

Определение. Вычитание – это бинарная операция, которая паре целых неотрицательных чисел a и b ставит в соответствие их разность $a - b$. Число a называется уменьшаемым, число b – вычитаемым.

При этом *разностью* $a - b$ называется число $c \in \mathbb{N}_0$, которое в сумме с вычитаемым b даёт уменьшаемое a, т. е.

$a - b = c\ \Leftrightarrow\ c + b = a$.

Приведём здесь и *условие существования разности*. Разность целых неотрицательных чисел a и b существует тогда и только тогда, когда $b \leq a$.

Напомним, что целое неотрицательное число b меньше натурального числа a тогда и только тогда, когда найдется натуральное число k, которое в сумме с меньшим числом даст большее:

$\forall a,\ b \in \mathbb{N}_0 \wedge b < a \Leftrightarrow\ \exists k \in \mathbb{N}\ \ k + b = a\ (a \neq 0)$.

Определение. Деление – это бинарная операция, которая паре целых неотрицательных чисел a и b $(b \neq 0)$ ставит в соответствие их частное $a : b$. Число a называется делимым, число b – делителем.

При этом *частным* $a : b$ называется число $c \in \mathbb{N}_0$, которое при умножении на делитель b даёт делимое a, т. е. $a : b = c\ \Leftrightarrow\ c \cdot b = a$, $b \neq 0$.

Условие существования частного следующее: частное от деления целого неотрицательного числа a на натуральное число b существует тогда и только тогда, когда числа a и b находятся в отношении делимости.

Определение. Говорят, что числа a и b находятся в отношении делимости $a \vdots b$ при $b \neq 0$ тогда и только тогда, когда существует целое неотрицательное число k такое, что $k \cdot b = a$:

$$a \vdots b,\ b \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \cdot b = a.$$

В отличие от сложения и умножения, вычитание и деление не являются алгебраическими операциями, так как результаты их действий не всегда определяются как целое неотрицательное (или натуральное) число. В условиях существования разности чисел на множествах $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ лежит отношение «меньше» соответственно для натуральных и целых неотрицательных чисел. Условия существования частного чисел на множествах $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}_0$ построены на отношении «делимости» натуральных и целых неотрицательных чисел соответственно.

Надо отметить, что вычитание и деление на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (как и на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$) остаются операциями, которые не подчиняются коммутативному ($a - b \neq$ $\neq b - a$, $a : b \neq b : a$) и ассоциативному ($a - (b - c) \neq (a - b) - c$, $a : (b : c) \neq (a : b) : c$) законам. Для них формулируется целый ряд правил вычитания и деления.

Правило вычитания числа из суммы:

$$(a + b) - c = \begin{cases} (a - c) + b, & a > c, \\ a + (b - c), & b > c. \end{cases}$$

Правило вычитания из числа суммы:

$$a - (b + c) = \begin{cases} (a - b) - c, & a > b, \\ (a - c) - b, & a > c. \end{cases}$$

Правило вычитания числа из разности:

$$(a - b) - c = \begin{cases} a - (b + c), & a > b + c, \\ (a - c) - b, & a > b + c. \end{cases}$$

Правило вычитания из числа разности:

$$a - (b - c) = \begin{cases} (a - b) + c, & a > b, \\ (a + c) - b, & b > c. \end{cases}$$

Правило деления произведения на число:

$$(a \cdot b) : c = \begin{cases} (a : c) \cdot b, & a \vdots c, \\ a \cdot (b : c), & b \vdots c. \end{cases}$$

Правило деления числа на произведение:

$$a : (b \cdot c) = \begin{cases} (a : b) : c, & a \vdots (b \cdot c), \\ (a : c) : b, & a \vdots c. \end{cases}$$

Правило деления частного на число:

$$(a : b) : c = \begin{cases} a : (b \cdot c), & a \vdots (b \cdot c), \\ (a : c) : b, & a \vdots (b \cdot c). \end{cases}$$

Правило деления числа на частное:

$$a : (b : c) = \begin{cases} (a : b) \cdot c, & a \vdots b, \\ (a \cdot c) : b, & b \vdots c. \end{cases}$$

Таким образом, внутренняя организация множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$ (как и множества натуральных чисел $\mathbb{N}$) остаётся неизменной, она не зависит от того, какой подход используют для введения и изучения основных понятий для этих множеств. Красота построений числовых систем состоит в том, что неизменную внутреннюю структуру множества можно описывать, оставаясь в строгих границах первоначально данных определений.

Далее в рамках аксиоматического подхода к определению числа ответим на вопрос: *почему нельзя делить на ноль?*

Пусть даны два числа a и b. Для частного этих чисел $a : b$ рассмотрим два случая при $b = \mathbf{0}$.

Случай 1. Если $a = 0$, то $a : b = 0 : \mathbf{0}$. По определению частного двух чисел найдётся такое $c \in \mathbb{N}_0$, что при умножении на делитель $\mathbf{0}$ получится делимое 0. Имеем $c \cdot \mathbf{0} = 0$, причём по $A_1^\times$ число c любое, что противоречит теореме о единственности частного.

Случай 2. Если $a \neq 0$, то $a : b = a : \mathbf{0}$. По определению частного двух чисел найдётся такое $c \in \mathbb{N}_0$, что при умножении на делитель $\mathbf{0}$ получится делимое a. Имеем $c \cdot \mathbf{0} = a$, но по $A_1^\times$ правая часть, она же число a, должна быть равна 0. Получили противоречие аксиоматической теории.

Итак, рассматриваем операции, которые всегда выполняются в $\mathbb{N}_0$. Определяя деление, не должны вступать в противоречие с аксиоматической теорией. Вопрос о делении на ноль однозначно разрешён!

1.3. Примеры доказательства равенств и делимости выражений на число методом математической индукции

Аксиомы Дж. Пеано AI – AIII устанавливают порядок на числовом множестве $\mathbb{N}_0$ (или $\mathbb{N}$), а из аксиомы AIV следует основной метод доказательства на бесконечных множествах – метод математической индукции.

Правило. Чтобы доказать какое-либо утверждение $P(x)$ методом математической индукции нужно:

1) проверить истинность этого утверждения при начальном элементе e множества ($e = 0$ для $\mathbb{N}_0$ или $e = 1$ для $\mathbb{N}$);

2) на основе предположения об истинности утверждения при фиксированном значении переменной $x = k$ доказать, что утверждение истинно и для $x = k'$.

Если $P(e) \land P(k) \Rightarrow P(k')$ – истинное высказывание, то утверждение $P(x)$ справедливо для всех натуральных (или в зависимости от e – для целых неотрицательных) чисел.

Задача 1. Доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место равенство

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}.$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

1. Проверим истинность равенства при $n = 1$.

В левой части возьмём одно первое слагаемое (или, что то же самое, подставим в расчётную формулу значение $n = 1$), тогда

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}\overset{n=1}{\Longrightarrow}\frac{1}{(4\cdot 1-3)(4\cdot 1+1)}=\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

$$\text{Л. ч.}=\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Аналогичная подстановка в правую часть даёт следующее:

$$\text{Пр. ч.}=\frac{n}{4n+1}\overset{n=1}{\Longrightarrow}\frac{1}{4\cdot 1+1}=\frac{1}{5}.$$

Таким образом, при $n = 1$ Л. ч. = Пр. ч., равенство принимает вид $\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$ и является истинным.

2. Теперь выдвинем гипотезу, т. е. предположим, что при $n = k$ равенство истинно:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{S_k}=\frac{k}{4k+1}, \qquad (*)$$

и докажем, что и при $n = k' = k + 1$ оно также будет истинным:

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+$$
$$+\frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)}=\frac{k+1}{4(k+1)+1}. \qquad (**)$$

Рассмотрим выражение из левой части равенства (**) и попробуем преобразовать его к выражению, стоящему в правой части равенства $(**)$. Для этого используем гипотезу – равенство $(*)$, по которому S_k-сумма k (штук) слагаемых определённого вида может быть заменена значением суммы, найденным по формуле (правая часть равенства $(*)$),

$$\text{Л. ч.}(**) = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}}_{S_k} + \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} \overset{(*)}{\Rightarrow} \frac{k}{4k+1} +$$

$$+ \frac{1}{(4(k+1)-3)(4(k+1)+1)} = \frac{k}{4k+1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+5)} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\text{приводим к общему знаменателю}} \frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)} \xRightarrow{\text{преобразуем выражение в числителе}}$$

$$\Rightarrow \frac{4k^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)} \xRightarrow[\text{запишем в виде множителей}]{\text{квадратный трёхчлен в числителе}} \frac{4(k+1)\left(k+\frac{1}{4}\right)}{(4k+1)(4k+5)} \xRightarrow[\text{второго множителя}]{\text{4 внесём в скобки}}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} \xRightarrow[\text{натурального значения } k \text{ отлично от 0}]{\text{сократим на } (4k+1),\ \text{т. к. для любого}} \frac{k+1}{4k+5} = \text{Пр. ч.}(**)$$

Таким образом, после преобразований выражения в левой части равенство $(**)$ принимает вид $\frac{k+1}{4k+5} = \frac{k+1}{4k+5}$.

Очевидно, что это равенство истинно.

Доказано, что при $n = 1$ равенство истинно и из предположения об истинности равенства при $n = k$ следует его истинность при $n = k + 1$. Значит, данное равенство справедливо для всех натуральных чисел.

Замечание. В проведённом выше доказательстве использовано следующее разложение квадратного трёхчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, которые находятся по формулам $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$.

Задача 2. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $(n^3 - n) \vdots 3$.

Доказательство. 1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

$1^3 - 1 = 0$, 0 делится на 3. Значит, при $n = 1$ утверждение истинно.

2. Предположим, что при $n = k$ утверждение истинно, т. е.

$$(k^3 - k) \vdots 3, \qquad (*)$$

и докажем, что утверждение истинно при $n = k' = k + 1$, т. е. докажем, что имеет место делимость:

$$(k+1)^3 - (k+1) \vdots 3. \qquad (**)$$

Используем следующие рассуждения.

Составим разность между выражением при $n = k + 1$ (обозначим A) и выражением при $n = k$ (обозначим B) и упростим её:

$$\underbrace{[(k+1)^3 - (k+1)]}_{A} - \underbrace{[k^3 - k]}_{B} =$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 - k^3 + k = \underbrace{3k^2 + 3k}_{A-B} = 3(k^2 + k).$$

Полученная разность $A - B$ делится на 3 (по правилам деления произведения на число), вычитаемое B делится на 3 по предположению $(*)$. Значит, по правилу деления и уменьшаемое A будет делиться на 3. Следовательно, при $n = k + 1$ выражение $(**)$ делится на 3.

Доказано, что утверждение истинно при $n = 1$ и из истинности утверждения при $n = k$ следует истинность этого утверждения и при $n = k + 1$. Значит, выражение $(n^3 - n)$ делится на 3 при любом натуральном n.

Задача 3. Доказать, используя метод математической индукции, что для любого натурального n выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6.

Доказательство. 1. Проверим истинность утверждения при $n = 1$.

Найдём значение выражения $(5^{2n-1} + 7)$ при $n = 1$.

$5^{2\cdot 1-1} + 7 = 5^1 + 7 = 12$, 12 делится на 6 – истина.

2. Предположим, что выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6 при $n = k$, т. е.

$$(5^{2k-1} + 7) \vdots 6, \qquad (*)$$

и докажем, что данное утверждение будет истинно при $n = k + 1$, т. е. докажем, что имеет место делимость:

$$(5^{2(k+1)-1} + 7) \vdots 6. \qquad (**)$$

Преобразуем выражение $(**)$ к такому виду, чтобы можно было использовать условие $(*)$. А именно:

$5^{2(k+1)-1} + 7 = 5^{2k+2-1} + 7 = 5^{(2k-1)+2} + 7 =$
$= 5^{2k-1} \cdot 5^2 + 7 = 5^{2k-1} \cdot 25 + 7 =$
$= 5^{2k-1}(24 + 1) + 7 = \underbrace{5^{2k-1} \cdot 24} + \underbrace{5^{2k-1} + 7}.$

В полученном выражении первое слагаемое $5^{2k-1} \cdot 24$ делится на 6 (по правилу деления произведения на число, $24 \vdots 6,$ см. [10, гл. 2]), второе слагаемое $5^{2k-1} + 7$ делится на 6 по гипотезе $(*)$; следовательно, сумма этих слагаемых разделится на 6 (по правилу деления суммы нескольких слагаемых на число, см. [Там же]): $(5^{2k-1} \cdot 24 +$ $+ 5^{2k-1} + 7) \vdots 6$.

Потому и исходное выражение $(**)$ делится на 6.

Доказано, что выражение $(5^{2n-1} + 7)$ делится на 6 при $n = 1$ и из делимости его на 6 при $n = k$ следует делимость при $n = k + 1$. Значит, исходное утверждение справедливо для всех натуральных чисел n.

Задача 4. Доказать, что для любого целого неотрицательного числа n

$n \cdot 1 = n.$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции, а также аксиомами сложения и умножения и следствиями из этих аксиом.

1. Проверим истинность равенства при $n = 0$.

В этом случае равенство принимает вид $0 \cdot 1 = 0$.

Имеем: Л. ч. $= 0 \cdot 1 =$ (по следствию $C_1^{\times}$) $= 0$, Пр. ч. $= 0$.

$0 = 0$ – «истина» $\Longrightarrow$ Л. ч. = Пр. ч.

Следовательно, равенство $0 \cdot 1 = 0$ истинно.

2. Предположим, что при $n = k$ равенство истинно, т. е.

$$k \cdot 1 = k, \tag{$*$}$$

и докажем, что при $n = k'$ равенство будет истинным, т. е.

$$k' \cdot 1 = k'. \tag{$**$}$$

Рассмотрим выражение из левой части равенства $(**)$. Преобразуем его к выражению, стоящему в правой части равенства $(**)$. При этом будем использовать только заведомо допустимые преобразования.

Л. ч. $= k' \cdot 1 =$ (по следствию $C_2^{\times}$) $= \underbrace{k \cdot 1} + 1 =$ (по гипотезе $(*)$) $=$
$= k + 1 =$ (элементу, следующему за начальным, в множестве $\mathbb{N}_0$ приписан символ 1, именно $1 = 0'$) $= k + 0' =$ (по аксиоме A_2^{+}) $=$
$= (\underbrace{k + 0})' =$ (по аксиоме A_1^{+}) $= k' =$ Пр. ч.

Доказано, что при $n = 0$ исходное равенство истинно и из истинности равенства при $n = k$ следует истинность равенства при $n = k'$. Значит, данное равенство справедливо для всех целых неотрицательных чисел n.

Задача 5. Доказать, что для любых целых неотрицательных чисел a, b и c имеет место равенство

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Зафиксируем значения переменных a и b, индукцию же проведём по переменной c.

1. Проверим истинность равенства при $c = 0$. Оно принимает вид

$a(b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0.$

Отдельно рассмотрим выражения в левой и правой части.

Л. ч. $= a(\underbrace{b + 0}) =$ (по аксиоме A_1^+) $= a \cdot b$.

Пр. ч. $= a \cdot b + a \cdot 0 =$ (по аксиоме $A_1^\times$) $= a \cdot b + 0 =$
$=$ (по аксиоме A_1^+) $= a \cdot b$.

Равенство $a \cdot b = a \cdot b$ имеет место по теореме о единственности произведения. Следовательно, Л. ч. = Пр. ч.

Значит, равенство $a(b + 0) = a \cdot b + a \cdot 0$ истинно.

2. Предположим, что при $c = k$ равенство истинно, т. е.

$$a(b + k) = a \cdot b + a \cdot k, \qquad (*)$$

и докажем, что при $c = k'$ равенство будет истинным, т. е.

$$a(b + k') = a \cdot b + a \cdot k'. \qquad (**)$$

Для доказательства преобразуем выражение из левой части равенства $(**)$ к виду, записанному в его правой части:

Л. ч. $= a\,(b + k') =$ (по аксиоме A_2^+) $= a(b + k)' =$ (по аксиоме $A_2^\times$) $= \underbrace{a\,(b + k)} + a =$ (по гипотезе $(*)$) $= (a \cdot b +$ $+ a \cdot k) + a =$ (по ассоциативному закону сложения) $= a \cdot b +$ $+ \left(\underbrace{a \cdot k + a}\right) =$ (по аксиоме $A_2^\times$) $= a \cdot b + a \cdot k' =$ Пр. ч.

Таким образом, равенство $(**)$ становится истинным при $c = k'$.

Доказано, что равенство истинно при $c = 0$ и из истинности равенства при $c = k$ следует истинность равенства при $c = k'$. Значит, исходное равенство справедливо для всех целых неотрицательных чисел.

1.4. Множество целых чисел

Приведем определение целого числа как бинарного отношения и сформулируем свойства этого отношения. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ получают в результате расширения множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ (или множества целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$). Для этого рассматривают множество упорядоченных пар натуральных чисел, которые, как известно, являются элементами декартова произведения $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, или $\mathbb{N}^2$, т. е.

$\mathbb{N}^2 = \{(x, y) |\ x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}\}$.

Для элементов $\mathbb{N}^2$ вводится бинарное отношение следующим образом:

$(\forall\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}\,)\ [(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = y_1 + x_2]. \quad (*)$

Определим свойства данного отношения.

1. Для любого натурального числа x упорядоченная пара (x, y) равносильна самой себе.

Действительно, определение $(*)$ в этом случае имеет вид

$(\forall\, x, y\ \in \mathbb{N})\ [(x, y) \sim (x, y) \iff x + y = x + y]$.

Из истинности равенства $x + y = x + y$ заключаем, что $(x, y) \sim (x, y)$. Значит, *отношение* $(*)$ *рефлексивно*.

2. Для любых натуральных чисел x_1, x_2, y_1, y_2: если упорядоченная пара (x_1, y_1) равносильна упорядоченной паре (x_2, y_2), то и наоборот – упорядоченная пара (x_2, y_2) равносильна упорядоченной паре (x_1, y_1).

В самом деле, если $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, то по определению $(*)$ выполнено $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$.

Если $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$, то по определению $(*)$ выполнено равенство $x_2 + y_1 = y_2 + x_1$. Применим коммутативный закон сложения натуральных чисел к обеим частям верного числового равенства, получим $y_1 + x_2 = x_1 + y_2$ или, что то же самое, $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$.

Доказали, что из $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ следует $(x_2, y_2) \sim (x_1, y_1)$. Значит, *отношение* $(*)$ *симметрично*.

3. Для любых натуральных чисел x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3: если упорядоченная пара (x_1, y_1) равносильна упорядоченной паре (x_2, y_2) и упорядоченная пара (x_2, y_2) равносильна упорядоченной паре (x_3, y_3),

то, следовательно, упорядоченная пара (x_1, y_1) равносильна упорядоченной паре (x_3, y_3).

Имеем

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \xrightarrow{\text{по определению } (*)} x_1 + y_2 = y_1 + x_2, \qquad (1)$$

$$(x_2, y_2) \sim (x_3, y_3) \xrightarrow{\text{по определению } (*)} x_2 + y_3 = y_2 + x_3. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1) и (2), получим верное числовое равенство:

$$x_1 + y_2 + x_2 + y_3 = y_1 + x_2 + y_2 + x_3. \qquad (3)$$

Из обеих частей верного числового равенства можно вычесть одно и то же натуральное число (по свойству 5° числовых равенств, см. п. 1.1): вычтем в равенстве (3) из левой и правой частей число-сумму $(x_2 + y_2)$ (или, что то же самое, число-сумму $(y_2 + x_2)$ согласно коммутативному закону сложения), получим $x_1 + y_3 = y_1 + x_3$. Последнее равенство по определению $(*)$ отвечает равносильности пар (x_1, y_1) и (x_3, y_3), т. е. $(x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$, что и требовалось доказать.

Итак, $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \sim (x_3, y_3) \Longrightarrow (x_1, y_1) \sim (x_3, y_3)$, значит, *отношение* $(*)$ *обладает свойством транзитивности*.

Установили, что *введённое отношение* обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, т. е. является *отношением эквивалентности*, поэтому множество $\mathbb{N}^2$ может быть разбито на классы эквивалентности по данному отношению. В один класс попадут все эквивалентные в смысле определения $(*)$ упорядоченные пары (паре (x, y) соответствует целое число $x - y$).

Определение. Целым числом называют класс эквивалентных в смысле определения $(*)$ упорядоченных пар натуральных чисел.

Каждому классу приписывают определённый символ, и, таким образом, можно говорить о множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

Считается, что множество целых чисел состоит из натуральных чисел, нуля и чисел, противоположных натуральным. Это не противоречит данному определению целого числа.

Определение. Натуральное число k будет определяться классом эквивалентных в смысле определения $(*)$ упорядоченных пар вида $(a + k, a), a \in \mathbb{N}$.

Определение. Нуль будет определяться классом эквивалентных в смысле определения $(*)$ упорядоченных пар вида $(a, a), a \in \mathbb{N}$.

Определение. Отрицательное число $-k$ (как число, противоположное натуральному k) будет определяться классом эквивалентных в смысле определения $(*)$ упорядоченных пар вида $(a, a+k), a \in \mathbb{N}$.

Например, $1 = \{(2,1), (3,2), \dots, (n+1, n), \dots\}$,

$0 = \{(1,1), (2,2), \dots, (n,n), \dots\}$,

$-1 = \{(1,2), (2,3), \dots, (n, n+1), \dots\}$.

Для записи целого числа используют любую пару из соответствующего класса. Пары (a,b) и $(a+n, b+n)$ всегда будут эквивалентны в смысле определения $(*)$. Убедимся в этом.

Действительно, если $(a,b) \sim (a+n, b+n)$, то должно иметь место равенство $a+(b+n) = b+(a+n)$. Применим к правой части равенства законы сложения натуральных чисел: сначала ассоциативный $(a+(b+n) = (b+a)+n)$, затем коммутативный $(a+(b+n) = (a+b)+n)$ и снова ассоциативный $(a+(b+n) = a+(b+n))$. Последнее равенство истинно, значит, равенство $a+(b+n) = b+(a+n)$ всегда справедливо, следовательно, пары (a,b) и $(a+n, b+n)$ эквивалентны, $(a,b) \sim (a+n, b+n)$, что и требовалось доказать.

Остановимся подробнее на операциях с целыми числами. В общей теории рассматривают сумму, разность и произведение целых чисел. Эти операции будут определяться также с помощью эквивалентности пар.

Определение. Если целое число z_1 определяется упорядоченной парой вида (x_1, y_1), целое число z_2 – упорядоченной парой вида (x_2, y_2), то

сумма $z_1 + z_2$ определяется упорядоченной парой вида $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;

разность $z_1 - z_2$ определяется упорядоченной парой вида $(x_1 + y_2, y_1 + x_2)$;

произведение $z_1 \cdot z_2$ определяется упорядоченной парой вида $(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2,\ x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$.

Лемма. Отношение эквивалентности пар устойчиво относительно операций умножения и сложения.

Дано: $(a,b) \sim (a_1, b_1)$, $(c,d) \sim (c_1, d_1)$.

Доказать: 1) $(a,b) + (c,d) \sim (a_1, b_1) + (c_1, d_1)$;

2) $(a,b)(c,d) \sim (a_1, b_1)(c_1, d_1)$.

Доказательство. 1. Докажем, что

$(a,b) \sim (a_1, b_1) \wedge (c,d) \sim (c_1, d_1) \Rightarrow (a,b) + (c,d) \sim (a_1, b_1) + (c_1, d_1)$.

Пары (a, b) и (a_1, b_1) и пары (c, d) и (c_1, d_1) эквивалентны по условию. Применим определение $(*)$ к этим парам:

$(a, b) \sim (a_1, b_1) \Longrightarrow a + b_1 = b + a_1$ (условие 1),

$(c, d) \sim (c_1, d_1) \Longrightarrow c + d_1 = d + c_1$ (условие 2).

Сумму пар $(a, b) + (c, d)$ определяет пара $(a + c, b + d)$, соответственно, сумма $(a_1, b_1) + (c_1, d_1) = (a_1 + c_1, b_1 + d_1)$.

Чтобы доказать эквивалентность суммы пар

$(a, b) + (c, d) \sim (a_1, b_1) + (c_1, d_1)$,

надо установить эквивалентность пар

$(a + c, b + d) \sim (a_1 + c_1, b_1 + d_1)$.

Пары $(a + c, b + d)$ и $(a_1 + c_1, b_1 + d_1)$ будут эквивалентны только при выполнении равенства $a + c + b_1 + d_1 = b + d + a_1 + c_1$. Для левой части этого равенства получаем:

$$a + c + b_1 + d_1 \xrightarrow{\text{коммутативный закон сложения}} a + b_1 + c + d_1 \to$$
$$\xrightarrow{\text{сгруппируем слагаемые}} (a + b_1) + (c + d_1) \to$$
$$\xrightarrow{\text{по (условию 1) и (условию 2)}} (b + a_1) + (d + c_1) = b + a_1 + d + c_1 \to$$
$$\xrightarrow{\text{коммутативный закон сложения}} b + d + a_1 + c_1 = \text{правой части},$$

что и требовалось доказать.

2. Докажем, что

$(a, b) \sim (a_1, b_1) \wedge (c, d) \sim (c_1, d_1) \Longrightarrow (a, b)(c, d) \sim (a_1, b_1)(c_1, d_1)$.

По условию пары (a, b) и (a_1, b_1) эквивалентны, $(a, b) \sim (a_1, b_1)$. Это означает, что компоненты пары (a_1, b_1) отличаются от соответствующих компонент пары (a, b) на «шаг» (смещение, сдвижку), обозначим его p. Тогда для компонент имеет место представление

$a_1 = a + p, \quad b_1 = b + p$ (условие 3).

Аналогично для пар $(c, d) \sim (c_1, d_1)$ вводится шаг q:

$c_1 = c + q, \quad d_1 = d + q$ (условие 4).

Произведение пар (a, b) и (c, d) по определению есть упорядоченная пара

$(a, b)(c, d) = (a \cdot c + b \cdot d,\ a \cdot d + b \cdot c)$,

произведение пар (a_1, b_1) и (c_1, d_1) определится также упорядоченной парой вида

$(a_1, b_1)(c_1, d_1) = (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1, a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1)$.

Теперь для того чтобы доказать равносильность произведения пар $(a, b)(c, d) \sim (a_1, b_1)(c_1, d_1)$, надо доказать равносильность пар

$(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \sim (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1, a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1).$

Для того чтобы указанная равносильность выполнялась, необходимо и достаточно, согласно определению $(*)$, установить справедливость равенства сумм:

$$a \cdot c + b \cdot d + a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1 = a \cdot d + b \cdot c + a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1. \quad (5)$$

Далее воспользуемся условиями (3) и (4) – представлениями компонент с шагом p и шагом q, заменим в равенстве (5) натуральные числа a_1, b_1, c_1, d_1 на a, b, c, d, получим следующее.

Левая часть равенства (5) $= a \cdot c + b \cdot d + (a + p)(d + q) + + (b + p)(c + q) = a \cdot c + b \cdot d + a \cdot d + a \cdot q + p \cdot d + p \cdot q + b \cdot c + + b \cdot q + p \cdot c + p \cdot q$.

Правая часть равенства (5) $= a \cdot d + b \cdot c + (a + p)(c + q) + + (b + p)(d + q) = a \cdot d + b \cdot c + a \cdot c + a \cdot q + p \cdot c + p \cdot q + b \cdot d + + b \cdot q + p \cdot d + p \cdot q$.

Здесь видим, что левая часть равна правой части, так как они состоят из одинаковых слагаемых. Это влечёт выполнение равенства (5), что доказывает эквивалентность пар

$(a \cdot c + b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \sim (a_1 \cdot c_1 + b_1 \cdot d_1, a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1),$

что, в свою очередь, доказывает $(a, b)(c, d) \sim (a_1, b_1)(c_1, d_1)$.

Лемма доказана.

Множество целых чисел образует кольцо относительно введённых операций сложения и умножения. Нуль этого кольца $\mathbb{Z}$ – класс пар вида (a, a), а единица – класс пар вида $(a + 1, a)$.

Лемма. Для любых двух пар (a, b) и (c, d) найдётся пара (x, y) такая, что $(a, b) + (x, y) \sim (c, d)$.

Дано: (a, b), (c, d).

Доказать: $\exists (x, y) \quad (a, b) + (x, y) \sim (c, d)$.

Доказательство. Имеем:

$(a, b) + (x, y) \sim (c, d) \Rightarrow$ по определению суммы пар $\Rightarrow$
$\Rightarrow (a + x, b + y) \sim (c, d) \Rightarrow$ по определению $(*)$ эквивалентности пар $\Rightarrow$
$\Rightarrow (a + x + d, b + y + c) \Rightarrow$ применим коммутативный закон сложения чисел для каждой компоненты в паре и группировку $\Rightarrow$
$\Rightarrow (x + (a + d), y + (b + c)) \Rightarrow$ по определению $(*)$ эквивалентности пар $\Rightarrow (x, y) \sim (a + d, b + c)$.

Лемма доказана.

Полученная пара $(x, y) \sim (a + d, b + c)$ – *разность данных упорядоченных пар* (a, b) и (c, d), поэтому операция вычитания определяется в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел следующим образом:

$(a, b) - (c, d) = (a + d, b + c)$.

После доказательства соответствующих теорем существования и единственности можно утверждать, что на множестве целых чисел сложение, вычитание и умножение – алгебраические операции. Законы, которым подчиняются операции сложения и умножения, остаются прежними, а известные правила вычитания на множестве целых чисел принимают характер тождеств. Таким образом, структура множества целых чисел «богаче» структуры множества натуральных или целых неотрицательных чисел на одну операцию и целый ряд тождеств, которые выполняются в этом множестве без каких-либо дополнительных условий. (Студентам предлагается доказать законы и правила самостоятельно.)

Рассмотрим примеры задач[1] и их решения.

Задача 1. Найдите такое x, что $(x^2, x) \sim (16, 10)$.

Решение. По определению $(*)$ эквивалентности пар получаем уравнение $x^2 + 10 = x + 16$, где x – натуральное число. Решаем квадратное уравнение $x^2 - x - 6 = 0$. По теореме Виета для корней x_1 и x_2 этого уравнения имеем $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = -6$. Отсюда находим $x_1 = 3$ и $x_2 = -2$. Но $x \in \mathbb{N}$, поэтому решением уравнения будет $x = 3$.

Итак, эквивалентные пары следующие: $(9, 3) \sim (16, 10)$.

Проверка: действительно, пара $(9, 3)$ определяет целое число 6; пара $(16, 10)$ определяет целое число 6; $6 = 6$ – истина.

Вывод: задача решена верно.

Задача 2. Найдите такое x, что $(x^2, 7) \sim (x, 5)$.

Решение. По определению $(*)$ эквивалентности пар получаем уравнение $x^2 + 5 = 7 + x$, где x – натуральное число. Решаем квадратное уравнение $x^2 - x - 2 = 0$. По теореме Виета для корней x_1 и x_2 этого уравнения имеем $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 \cdot x_2 = -2$. Отсюда находим

[1] Формулировки заданий взяты из главы «Числа» задачника-практикума по математике Н. Я. Виленкина, см. [5].

$x_1 = 2$ и $x_2 = -1$. По определению $(*)$ $x_1,\ x_2 \in \mathbb{N}$, следовательно, решением уравнения будет $x = 2$.

Итак, эквивалентные пары следующие: $(4,7) \sim (2,5)$.

Проверка: действительно, пара $(4,7)$ определяет целое число -3; пара $(2,5)$ определяет целое число -3; $-3 = -3$ – истина.

Вывод: задача решена верно.

Задача 3. Докажите, что для любых a, b, n пары $(a+n, a)$ и $(b+n, b)$ эквивалентны.

Доказательство. Применим определение $(*)$ для пар $(a+n, a)$ и $(b+n, b)$:

$(a+n, a) \sim (b+n, b) \xrightarrow{\text{по определению } (*)} (a+n) + b = a + (b+n)$.

Преобразуем левую часть: $(a+n) + b = \xrightarrow{\text{по ассоциативному закону для чисел}}$ $= a + (n+b) = \xrightarrow{\text{по коммутативному закону для чисел}} = a + (b+n) =$ Пр. ч., что и требовалось доказать.

1.5. Множество рациональных чисел

К построению множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно подходить разными способами.

Первый из них предполагает за основу брать множество целых чисел $\mathbb{Z}$, из элементов которого формируется множество $M \subset \mathbb{Z}^2$, которое далее и разбивается на классы по заданному специальным образом отношению эквивалентности. При этом $M = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{Z} \wedge y \neq 0\}$, а эквивалентность упорядоченных пар определяется условием

$$(\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M)\ [(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2].$$

Второй способ предполагает введение сначала множества положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$, затем нуля и множества чисел $\mathbb{Q}^-$, противоположных положительным рациональным, с последующим описанием алгоритма сложения, вычитания, умножения и деления рациональных чисел с одинаковыми или разными знаками.

Рассмотрим этот способ подробнее.

Покажем, как ввести множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$. Для этого сначала определим обыкновенную дробь.

Определение. Обыкновенной дробью называют упорядоченную пару натуральных чисел, записанную в виде $\frac{a}{b}$, в которой a – числитель, b – знаменатель.

Определение. Две дроби равны, если равны их числители и равны их знаменатели:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

Определение. Две дроби равносильны, если произведение числителя первой дроби на знаменатель второй дроби равно произведению знаменателя первой дроби на числитель второй дроби:

$$\frac{a}{b}\sim\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c.$$

Отношение равносильности на множестве обыкновенных дробей – это отношение эквивалентности, так как оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности[2]. Следовательно, множество всех обыкновенных дробей разбивается на классы эквивалентности по данному отношению. При этом в один класс попадут все дроби, связанные между собой данным отношением, т. е. равносильные между собой дроби.

Определение. Положительным рациональным числом называют класс равносильных между собой дробей.

Таким образом, можно говорить, что определено множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$.

Для записи положительного рационального числа может быть использована любая дробь из класса, но, как правило, записывают несократимую дробь, которая в каждом классе единственная.

Определение. Несократимой дробью $\frac{a}{b}$ называется дробь, у которой числитель a и знаменатель b – взаимно простые числа, т. е. $\text{НОД}(a,b)=1$.

Определение. Два положительных рациональных числа r_1 и r_2 равны, если они определяются одним классом равносильных дробей. То есть если дробь $\frac{a_1}{b_1}$ используется для записи числа r_1, а дробь $\frac{a_2}{b_2}$ – для записи числа r_2, то

$$r_1=r_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}\sim\frac{a_2}{b_2}.$$

Заметим, что в силу свойства рефлексивности отношения равносильности равные дроби всегда равносильны.

---

[2] Студентам предлагается выполнить проверку этих свойств самостоятельно.

Определение. Если положительное рациональное число r_1 определяется дробью вида $\frac{a_1}{b_1}$ $(a_1, b_1 \in \mathbb{N})$, а положительное рациональное число r_2 определяется дробью вида $\frac{a_2}{b_2}$ $(a_2, b_2 \in \mathbb{N})$, то

сумма $r_1 + r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$;

разность $r_1 - r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2}$;

произведение $r_1 \cdot r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$;

частное $r_1 : r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1 b_2}{b_1 a_2}$.

В общей теории доказываются теоремы существования и единственности суммы, произведения и частного положительных рациональных чисел r_1 и r_2, что позволяет говорить о том, что на этом множестве операции сложения, умножения и деления алгебраические. Частичной алгебраической операцией на $\mathbb{Q}^+$ остаётся лишь операция вычитания.

Определение. Обыкновенная дробь, знаменатель которой – целая степень числа 10, называется д е с я т и ч н о й.

Положительное рациональное число всегда можно представить в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной периодической). И наоборот: конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь всегда может быть записана в виде обыкновенной дроби. Существуют *критерии обратимости обыкновенных дробей в десятичные:*

1) *несократимая* дробь $\frac{a}{b}$ обратится *в конечную* десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении знаменателя этой дроби на простые множители содержатся только степени чисел 2 и 5 $(b = 2^\alpha \cdot 5^\beta)$;

2) *несократимая* дробь $\frac{a}{b}$ обратится *в чистую периодическую* десятичную дробь тогда и только тогда, когда её знаменатель взаимно прост с числом 10 ($\text{НОД}(b, 10) = 1$). Другими словами, в разложении знаменателя такой дроби на простые множители не должны содержаться числа 2 и 5;

3) *несократимая* дробь $\frac{a}{b}$ обратится *в смешанную периодическую* десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении её знаменателя на простые множители наряду со степенями чисел 2 и 5 содержится множитель, взаимно простой с числом 10 ($b = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot d$, $\text{НОД}(d, 10) = 1$).

Определение. **Чистой периодической десятичной дробью** является дробь, у которой группа повторяющихся цифр (период дроби) начинается сразу после десятичной запятой. Количество цифр в периоде определяет его длину.

Длина периода такой дроби определяется как наименьший показатель степени λ, для которого утверждение $\left(10^{\lambda}-1\right) \vdots b$ истинно.

Определение. **Смешанной периодической десятичной дробью** является дробь, у которой после десятичной запятой содержатся несколько цифр (предпериод дроби), не относящихся к периоду. Количество этих цифр определяет длину предпериода, а количество повторяющихся цифр – длину периода смешанной периодической дроби.

Длина предпериода μ дроби определяется как наибольший из показателей степеней у множителей 2 и 5 в разложении знаменателя b ($\mu = \max(\alpha, \beta)$), а длина периода такой дроби определяется как наименьший показатель степени λ, для которого истинно утверждение $\left(10^{\lambda}-1\right) \vdots d$, если знаменатель $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot d,$ НОД$(d, 10) = 1$.

При решении задач, связанных с представлением конечных десятичных или периодических десятичных дробей в виде обыкновенных, используют правила, которые ниже приведём без доказательств.

Правило 1. Чтобы конечную десятичную дробь обратить в обыкновенную, нужно в числителе записать число, образованное цифрами после десятичной запятой, а в знаменателе – соответствующую степень числа 10.

Правило 2. Чтобы чистую периодическую дробь обратить в обыкновенную, нужно в числителе записать период этой дроби, а в знаменателе – число, образованное столькими девятками, сколько цифр в периоде.

Правило 3. Чтобы смешанную периодическую дробь обратить в обыкновенную, нужно в числителе записать разность между числом, образованным цифрами предпериода и периода, и числом, образованным цифрами предпериода, а в знаменателе – число, образованное столькими девятками, сколько цифр в периоде, и столькими нулями, сколько цифр в предпериоде дроби.

Замечание. Сформулированные правила относятся к дробям, у которых целая часть равна нулю. Однако это не ограничивает их общности, поскольку целая часть дроби всегда может быть выделена в виде отдельного слагаемого. Например: $2{,}57 = 2 + 0{,}57$.

Далее в общей теории нуль как рациональное число формально определяется на основе класса дробей вида $\frac{0}{b}$, $b \in \mathbb{N}$. Легко установить, что такие дроби равносильны между собой.

Числа, противоположные положительным рациональным, тоже вводятся формально. Если r – положительное рациональное число, то $-r$ – число, ему противоположное. Нуль считают противоположным самому себе: $0 = -0$. Такие числа и образуют множество $\mathbb{Q}^-$. А множество рациональных чисел есть объединение множества положительных рациональных чисел, нуля и множества чисел, противоположных положительным:

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$.

Операции с рациональными числами разных знаков подчиняются известным правилам, которые мы не будем приводить, поскольку они хорошо известны.

В множестве рациональных чисел операции сложения, умножения, вычитания и деления выполняются без каких-либо ограничений, а значит, являются алгебраическими.

Замечание. К необходимости расширения множества натуральных (или целых неотрицательных) чисел до множества целых, а затем и до множества рациональных чисел приводят и задачи, связанные с разрешимостью уравнений определенного вида в данном числовом множестве. Например, уравнение вида $a + x = b$ в множестве натуральных чисел имеет решение не всегда. Требование того, чтобы такое уравнение всегда имело решение, приводит к необходимости появления целых чисел. Разрешимость этого уравнения позволяет заключить, что в множестве целых чисел операция вычитания выполняется без каких-либо ограничений, т. е. является алгебраической.

Уравнение вида $a \cdot x = b$ в множестве натуральных чисел и даже в множестве целых чисел не всегда имеет решение. Требование же того, чтобы такое уравнение имело решение всегда, приводит к необходимости появления теперь уже рациональных чисел. Разрешимость этого уравнения, в свою очередь, позволяет утверждать, что операция деления в множестве рациональных чисел выполняется без каких-либо ограничений, т. е. является алгебраической.

Можно заключить, что задача расширения числовых множеств связана с требованием того, чтобы какая-либо операция в новом числовом множестве стала алгебраической.

Рассмотрим примеры задач и их решения.

Задача 1. Доказать, что для любых положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство $(r_1 + r_2) : r_3 = r_1 : r_3 + r_2 : r_3$.

Доказательство. Пусть число r_1 представлено дробью $\frac{a_1}{b_1}$, число r_2 представлено дробью $\frac{a_2}{b_2}$, число r_3 представлено дробью $\frac{a_3}{b_3}$.

Тогда сумма чисел $r_1 + r_2$ определяется дробью вида $\frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$, а частное $(r_1 + r_2) : r_3$ представлено дробью

$$\frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3}{(b_1 b_2) a_3}. \qquad (*)$$

В правой части равенства частное $r_1 : r_3$ представлено дробью $\frac{a_1 b_3}{b_1 a_3}$, частное $r_2 : r_3$ представлено дробью $\frac{a_2 b_3}{b_2 a_3}$, а сумма $r_1 : r_3 + r_2 : r_3$ определится дробью вида

$$\frac{(a_1 b_3)(b_2 a_3) + (a_2 b_3)(b_1 a_3)}{(b_1 a_3)(b_2 a_3)}. \qquad (**)$$

Для доказательства исходного равенства нужно, чтобы дроби $(*)$ и $(**)$ принадлежали одному классу эквивалентности, тогда они будут определять одно и то же рациональное число. Докажем, что дроби $(*)$ и $(**)$ равносильны:

$$\frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3}{(b_1 b_2) a_3} \sim \frac{(a_1 b_3)(b_2 a_3) + (a_2 b_3)(b_1 a_3)}{(b_1 a_3)(b_2 a_3)}.$$

Рассмотрим дробь $(**)$:

$$\frac{(a_1 b_3)(b_2 a_3) + (a_2 b_3)(b_1 a_3)}{(b_1 a_3)(b_2 a_3)} = \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3 \ a_3}{(b_1 b_2)(a_3)^2} \sim \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3}{(b_1 b_2) a_3},$$

что и требовалось доказать. При доказательстве использовался тот факт, что при делении числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число получается дробь, равносильная данной.

Итак, дроби $(*)$ и $(**)$ равносильны, значит, принадлежат одному классу эквивалентности и определяют одно и то же положительное рациональное число, поэтому исходное равенство имеет место для всех положительных рациональных чисел.

Замечание. Можно было непосредственно использовать определение равносильных дробей и показать, что произведение числителя дроби $(*)$ на знаменатель дроби $(**)$ равно произведению знаменателя дроби $(*)$ на числитель дроби $(**)$, применяя при этом законы операций сложения и умножения в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Задача 2. Для дробей $\frac{132}{880}, \frac{2520}{8064}, \frac{39}{91}, \frac{308}{1936}, \frac{196}{1440}$ определить структуру соответствующих десятичных дробей. Конечную десятичную дробь записать в стандартном виде, для чистой периодической дроби определить длину периода, для смешанной периодической дроби определить длину предпериода и длину периода.

Решение. Проверим, является ли дробь $\frac{132}{880}$ несократимой.

Для этого найдем $\text{НОД}(132, 880)$, используя канонический вид чисел:

$132 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11,$

$880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11.$

Значит, $\text{НОД}(132, 880) = 2^2 \cdot 11 = 44,$

поэтому $\frac{132}{880} \sim \frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \cdot 5}$.

По каноническому виду знаменателя последней дроби определяем, что она обратится в конечную десятичную дробь, потому что в разложении её знаменателя на простые множители присутствуют только степени чисел 2 и 5.

Запишем эту дробь в стандартном виде. Заменим дробь $\frac{3}{2^2 \cdot 5}$ ей равносильной со знаменателем, равным целой степени числа 10:

$\frac{3}{2^2 \cdot 5} \sim \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{3 \cdot 5}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{3 \cdot 5}{10^2} = \frac{15}{100} = 0{,}15.$

Следовательно, дробь $\frac{132}{880} \sim 0{,}15$.

Проведём аналогичные рассуждения для дроби $\frac{2520}{8064}$.

Найдём $\text{НОД}(2520, 8064)$ по каноническому виду чисел:

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7,$

$8064 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7.$

$\text{НОД}(2520, 8064) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504.$

Значит, дробь $\frac{2520}{8064} \sim \frac{5}{16} = \frac{5}{2^4}$.

По каноническому виду знаменателя последней дроби определяем, что она обратится в конечную десятичную дробь. Запишем её в стандартном виде. Заменим дробь $\frac{5}{2^4}$ ей равносильной со знаменателем, равным целой степени числа 10: $\frac{5}{2^4} \sim \frac{5 \cdot 5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{5^5}{(2 \cdot 5)^4} = \frac{3125}{10\,000} = 0{,}3125.$

Следовательно, дробь $\frac{2520}{8064} \sim 0{,}3125$.

Теперь проверим, является ли дробь $\frac{39}{91}$ несократимой.

Для этого найдём $\text{НОД}(39, 91)$ по каноническому виду чисел:

$39 = 3 \cdot 13$,

$91 = 7 \cdot 13$.

Значит, $\text{НОД}(39, 91) = 13$,

поэтому $\frac{39}{91} \sim \frac{3}{7}$.

Знаменатель последней дроби взаимно прост с числом 10, значит, такая дробь будет обращаться в чистую периодическую дробь.

Найдём длину периода λ этой дроби из условия $(10^{\lambda} - 1) \vdots 7$.

$10^1 - 1 = 9$; $9 \vdots 7$ – ложно;

$10^2 - 1 = 99$; $99 \vdots 7$ – ложно;

$10^3 - 1 = 999$; $999 \vdots 7$ – ложно;

$10^4 - 1 = 9999$; $9999 \vdots 7$ – ложно;

$10^5 - 1 = 99\,999$; $99\,999 \vdots 7$ – ложно;

$10^6 - 1 = 999\,999$; $999\,999 \vdots 7$ – истинно $(= 142\,857)$.

Наименьший показатель λ, для которого $(10^{\lambda} - 1)$ делится на 7, равен 6.

Таким образом, длина периода дроби $\frac{3}{7}$ равна 6 и $\frac{39}{91}$ приводится к виду $\overline{0,(b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6)}$.

Дробь $\frac{308}{1936}$ с использованием приведённых выше рассуждений приводится к несократимому виду $\frac{7}{44} = \frac{7}{2^2 \cdot 11}$. Знаменатель последней дроби позволяет заключить, что в этом случае дробь обращается в смешанную периодическую дробь. Длина предпериода $\mu = \max(2, 0) = 2$. Длина периода λ определяется из условия $(10^{\lambda} - 1) \vdots 11$.

$10^1 - 1 = 9$; $9 \vdots 11$ – ложно;

$10^2 - 1 = 99$; $99 \vdots 11$ – истинно $(= 9)$.

Следовательно, длина периода нашей дроби равна 2.

Значит, дробь $\frac{308}{1936}$ приводится к виду $\overline{0, a_1 a_2 (b_1 b_2)}$.

Последняя дробь $\frac{196}{1440} \sim \frac{49}{360} = \frac{49}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$ и, следовательно, обратится в смешанную периодическую дробь. В этом случае длина предпериода

$\mu = \max(3, 2) = 3$. Длина периода определяется из условия $(10^{\lambda} - 1) \vdots 9$ (так как $3^2 = 9$):

$10^1 - 1 = 9;\ 9 \vdots 9$ – истинно $\Longrightarrow\ \lambda = 1$,

поэтому дробь $\frac{196}{1440}$ приводится к виду $\overline{0, a_1 a_2 a_3 (b_1)}$.

Задача 3. Дроби $0{,}125;\ 0,(12);\ 0,(108);\ 0{,}2(15);\ 0{,}21(5)$ обратить в обыкновенные и ответ пояснить.

Решение. Дробь $0{,}125$ конечная десятичная, и её обращение в обыкновенную происходит согласно правилу:

$0{,}125 = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{1000} \sim \frac{1}{8}$.

Дробь $0,(12)$ чистая периодическая,

поэтому $0,(12) = \frac{12}{99} \sim \frac{4}{33}$. Обоснуем это. Обозначим

$$x = 0,(12). \qquad (*)$$

Теперь обе части уравнения $(*)$ умножим на 10^2 (показатель степени равен длине периода), получим:

$x \cdot 10^2 = 12 + \underbrace{0,(12)}_{x}$ (так как $0,(12) = 0{,}121212 \ldots$ и $0,(12) \times \times 10^2 = 12{,}1212 \ldots = 12,(12) = 12 + 0,(12)$),

или

$$x \cdot 10^2 = 12 + x. \qquad (**)$$

Разрешим уравнение $(**)$ относительно x, получим

$100x - x = 12;\quad 99x = 12;\quad x = \frac{12}{99}$,

что с учётом уравнения $(*)$ и обосновывает правило.

Аналогичные рассуждения проводят и с дробью $0,(108)$:

$0,(108) = \frac{108}{999} \sim \frac{4}{37}$,

потому что если $x = 0,(108)$, то, умножив обе части на 10^3, получим

$x \cdot 10^3 = 108 + x$,

откуда $999x = 108,\ \ x = \frac{108}{999}$, что и доказывает правильность представления.

Дробь $0{,}2(15)$ смешанная периодическая. Для её обращения в обыкновенную воспользуемся правилом:

$0{,}2(15) = \frac{215-2}{990} = \frac{213}{990} \sim \frac{71}{330}$.

Обоснование правила состоит в следующем. Обозначим $x = 0{,}2(15)$. Умножим обе части последнего равенства сначала на 10^1

(показатель степени равен длине предпериода), а затем на 10^3 (показатель степени равен сумме длин предпериода и периода), получим

$$x \cdot 10^1 = 2 + 0,(15), \qquad (*)$$

$$x \cdot 10^3 = 215 + 0,(15). \qquad (**)$$

Найдём разность уравнений $(**)$ и $(*)$:

$1000x - 10x = 215 - 2$; $990x = 215 - 2$; $x = \frac{215-2}{990}$,

что и доказывает правило.

Аналогичные рассуждения проводим и для дроби $0{,}21(5)$:

$0{,}21(5) = \frac{215-21}{900} = \frac{194}{900} \sim \frac{97}{450}$.

Если обозначить $x = 0{,}21(5)$, умножить обе части сначала на 10^2, затем на 10^3 и рассмотреть соответствующие разности, то получим

$x \cdot 10^2 = 21 + 0,(5)$,

$x \cdot 10^3 = 215 + 0,(5)$,

$1000x - 100x = 215 - 21$, $900x = 215 - 21$, откуда $x = \frac{215-21}{900}$.

1.6. Множество действительных чисел

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ может быть получено как расширение множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. В множестве $\mathbb{R}$ отчасти решена задача извлечения корня для случая арифметического корня. Но в отличие от предшествующих расширений здесь решаются и другие важные задачи элементарной и неэлементарной математики. Это прежде всего измерение длин отрезков (по существу же, и любых других непрерывных величин) и создание основ теории пределов и всего математического анализа.

Из теории измерения величин напомним следующее. Чтобы измерить какую-либо величину, её сравнивают с некоторой определённой величиной того же рода, принятой за единицу измерения. В результате такого сравнения возможны два варианта:

1) выбранная единица измерения e или какая-либо её часть целое число раз откладывается на измеряемом объекте a, и в этом случае говорят, что величины a и e соизмеримы;

2) невозможно подобрать какую-либо часть e, которая целое число раз отложилась бы на объекте a. В этом случае говорят, что величины a и e несоизмеримы.

В первом случае мерой a (или числовым значением величины a при выбранной единице измерения e) будет либо натуральное число, либо число рациональное. Ранее отмечено, что для таких чисел существуют две формы записи: в виде бесконечной периодической десятичной дроби или в виде обыкновенной несократимой дроби (среди всего класса равносильных дробей, определяющих данное рациональное число, такая дробь единственная). Значит, если величины a и e соизмеримы, то мера a относительно e (и наоборот) определяется рациональным числом.

Во втором случае, когда величины a и e несоизмеримы, мера a относительно e (и наоборот) не может быть записана числом рациональным, т. е. не определяется периодической десятичной дробью. Таким образом вводится класс *бесконечных непериодических десятичных дробей*, которые используются для записи *иррациональных чисел*.

Классический пример несоизмеримых отрезков – сторона квадрата и его диагональ.

Если в квадрате $ABCD$ (рис. 1.3) обозначить сторону $AD = e$, диагональ $AC = a$ и длину (меру) отрезка AD принять за единицу, то по теореме Пифагора длина (мера) отрезка AC составит $\sqrt{2}$. Несоизмеримость отрезков AC и AD означает, что $\sqrt{2}$ не может быть числом рациональным. Докажем это.

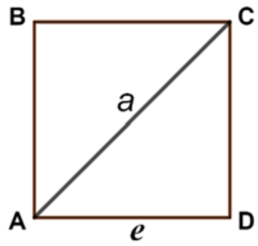


Рис. 1.3

Доказательство. Проводится методом от противного.

Предположим, что $\sqrt{2}$ – число рациональное. Это значит, что для такого числа существует единственное представление в виде обыкновенной несократимой дроби, т. е. можно записать, что

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \text{ где } m, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\text{НОД}(m, n) = 1. \quad (2)$$

Из условия (1) следует, что $2 = \frac{m^2}{n^2}$, или

$$2n^2 = m^2. \tag{3}$$

Из условия (3) следует, что $m^2 \vdots 2$.

Тогда по правилу деления произведения на простое число получим

$$m \vdots 2. \tag{4}$$

По определению отношения делимости и из условия (4) следует, что

$$m = 2p, \tag{5}$$

где $p \in \mathbb{N}$. Подставим представление m из условия (5) в равенство (3), получим $2n^2 = 4p^2$ или $n^2 = 2p^2$.

Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что

$$n \vdots 2. \tag{6}$$

Из условий (4) и (6) получаем, что $2 = \text{ОД}(m, n)$, а это противоречит условию (2).

Таким образом, предполагать, что $\sqrt{2}$ – число рациональное (а значит, отрезки AC и AD соизмеримы), нельзя, поэтому $\sqrt{2}$ – число иррациональное, записываемое в виде бесконечной непериодической десятичной дроби (а отрезки AC и AD несоизмеримы).

Определение. Числа, для записи которых используют бесконечные непериодические десятичные дроби, образуют множество положительных иррациональных чисел $\boldsymbol{J}^+$.

Определение. Множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ представляет собой объединение множества положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}^+$ и множества положительных иррациональных чисел $\boldsymbol{J}^+$: $\mathbb{R}^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \boldsymbol{J}^+$.

Для сравнения положительных действительных чисел на множестве $\mathbb{R}^+$ вводят отношения «равно», «меньше» и «больше». Заметим, что если $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}^+$, то их сравнение осуществляется известным образом в рамках множества $\mathbb{Q}^+$.

Если же хотя бы одно из чисел (α или β) иррациональное ($\alpha \in \boldsymbol{J}^+ \vee \beta \in \boldsymbol{J}^+$), тогда используют следующие *правила сравнения*.

1. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ и их десятичная запись имеет вид

$\alpha = \overline{a, a_1 a_2 \dots a_k \dots}$, $\beta = \overline{b, b_1 b_2 \dots b_k \dots}$.

Тогда положительные действительные числа α и β равны, если равны их целые части и соответствующие десятичные знаки:

$\alpha = \beta \iff a_i = b_i \ (i = 1, 2, 3, \dots)$.

Если же целые части различны или одно из чисел имеет десятичный знак, не совпадающий с соответствующим десятичным знаком в записи другого числа, то такие два числа считают неравными.

2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ и их десятичная запись имеет вид

$\alpha = \overline{a, a_1 a_2 \dots a_k \dots}$, $\quad \beta = \overline{b, b_1 b_2 \dots b_k \dots}$.

Тогда число α будет меньше числа β, если $a < b$ или если найдётся такое k, что $a = b$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$, но $a_k < b_k$:

$\alpha < \beta \Leftrightarrow a < b \ \vee \ \exists k \in \mathbb{N}\colon a = b, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k < b_k.$

Отношение «меньше» на множестве положительных действительных чисел – отношение строгого порядка, так как оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

3. Отношение «больше» на $\mathbb{R}^+$ вводится аналогично. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ и их десятичная запись имеет вид

$\alpha = \overline{a, a_1 a_2 \dots a_k \dots}$, $\quad \beta = \overline{b, b_1 b_2 \dots b_k \dots}$.

Тогда число α будет больше числа β, если $a > b$ или если найдётся такое k, что $a = b$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$, но $a_k > b_k$:

$\alpha > \beta \Leftrightarrow a > b \ \vee \ \exists k \in \mathbb{N}\colon a = b, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}, a_k > b_k.$

Отношение «больше» на множестве положительных действительных чисел – отношение строгого порядка, так как оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

Так как для любых положительных действительных чисел α и β имеет место только одно из соотношений: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ или $\alpha > \beta$, то множество $\mathbb{R}^+$ линейно упорядоченно.

Для каждого положительного действительного числа α можно указать его *приближённое рациональное значение*. Различают приближённые значения по недостатку с точностью до $\frac{1}{10^k}$ и приближённые значения по избытку с точностью $\frac{1}{10^k}$.

Чтобы получить приближённое значение числа α *по недостатку* α^- с точностью до $\frac{1}{10^k}$, нужно оставить целую часть и первые k цифр после запятой, остальные цифры отбросить.

Чтобы получить приближённое значение числа α *по избытку* α^+ с точностью до $\frac{1}{10^k}$, нужно оставить целую часть, первые $(k-1)$ цифр после запятой, к k-й цифре прибавить 1, а остальные цифры отбросить.

Для любого положительного действительного числа α имеет место оценка $\alpha^- \leq \alpha < \alpha^+$.

Если число α записано в виде бесконечной десятичной дроби, то неравенство будет иметь вид $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$.

Определение. Верными цифрами в записи числа α являются те, которые совпадают в десятичной записи α^- и α^+.

При выполнении сложения, вычитания, умножения и деления положительных действительных чисел с заданной степенью точности используют следующие правила.

Если

$$\alpha^- \leq \alpha < \alpha^+,$$
$$\beta^- \leq \beta < \beta^+,$$

то

$$\alpha^- + \beta^- \leq \alpha + \beta < \alpha^+ + \beta^+,$$
$$\alpha^- \cdot \beta^- \leq \alpha \cdot \beta < \alpha^+ \cdot \beta^+,$$
$$\alpha^- - \beta^+ \leq \alpha - \beta < \alpha^+ - \beta^-,$$
$$\alpha^- : \beta^+ \leq \alpha : \beta < \alpha^+ : \beta^-.$$

Если требуется найти сумму, разность, произведение или частное положительных действительных чисел с точностью до $\frac{1}{10^n}$, то приближения для самих чисел, как правило, берут на один-два десятичных знака больше.

Так как множество $\mathbb{R}^+$ обладает *свойством непрерывности*, то результаты сложения, вычитания, умножения и деления положительных действительных чисел определялись однозначно (а не с указанной степенью точности). Поясним смысл этого свойства.

Определение. Говорят, что множество $X \subset \mathbb{R}^+$ расположено слева от множества $Y \subset \mathbb{R}^+$, если для любых чисел $x \in X$ и $y \in Y$ выполняется неравенство $x < y$.

Определение. Говорят, что **число δ разделяет множества** X и Y, если для всех $x \in X$ и всех $y \in Y$ имеем неравенство $x \leq \delta \leq y$.

Свойство непрерывности множества положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ состоит в следующем: если множество $X \subset \mathbb{R}^+$ расположено слева от множества $Y \subset \mathbb{R}^+$, то найдётся хотя бы одно число, разделяющее эти множества.

Теперь можно определить результаты операций сложения, вычитания, умножения и деления положительных действительных чисел.

Определение. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, тогда **суммой положительных действительных чисел** α и β называют число $\alpha + \beta$, разделяющее множество приближений суммы по недостатку $\{\alpha^- + \beta^-\}$ и множество приближений суммы по избытку $\{\alpha^+ + \beta^+\}$ с любой степенью точности.

В общей теории доказывают, что сумма положительных действительных чисел всегда существует и единственна, а это значит, что в множестве $\mathbb{R}^+$ операция сложения алгебраическая. Коммутативный и ассоциативный законы сложения в множестве $\mathbb{R}^+$ также имеют место.

Определение. **Разностью положительных действительных чисел** α и β называют число $\alpha - \beta$, разделяющее множество приближений разности по недостатку $\{\alpha^- - \beta^+\}$ и множество приближений разности по избытку $\{\alpha^+ - \beta^-\}$ с любой степенью точности.

В общей теории доказывают, что при условии $\alpha > \beta$ разность положительных действительных чисел существует и единственна, а это значит, что в множестве $\mathbb{R}^+$ операция вычитания только частично алгебраическая. Операция вычитания в множестве $\mathbb{R}^+$ не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, для положительных действительных чисел выполняются лишь известные нам правила вычитания.

Определение. **Произведением положительных действительных чисел** α и β называют число $\alpha \cdot \beta$, разделяющее множество приближений произведения по недостатку $\{\alpha^- \cdot \beta^-\}$ и множество приближений произведения по избытку $\{\alpha^+ \cdot \beta^+\}$ с любой степенью точности.

В общей теории доказывают, что произведение положительных действительных чисел всегда существует и единственно, а это значит, что в множестве $\mathbb{R}^+$ операция умножения алгебраическая. Коммутативный и ассоциативный законы умножения в множестве $\mathbb{R}^+$ имеют место, а с операцией сложения умножение связано дистрибутивными законами.

Определение. Частным положительных действительных чисел α и β называют число $\alpha : \beta$, разделяющее множество приближений частного по недостатку $\{\alpha^- : \beta^+\}$ и множество приближений частного по избытку $\{\alpha^+ : \beta^-\}$ с любой степенью точности.

В общей теории доказывают, что частное положительных действительных чисел всегда существует и единственно, а это значит, что в множестве $\mathbb{R}^+$ операция деления алгебраическая. Эта операция в множестве $\mathbb{R}^+$ не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам, а известные правила деления произведения на число, числа на произведение, частного на число и числа на частное в этом множестве принимают характер тождеств (т. е. выполняются для всех положительных действительных чисел).

Если теперь к множеству $\mathbb{R}^+$ присоединить нуль, определить числа, противоположные положительным действительным, и описать правила сложения, вычитания, умножения и деления таких чисел, то определяется множество действительных чисел $\mathbb{R}$:

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$.

В множестве действительных чисел алгебраической становится и операция вычитания.

Геометрической моделью множества действительных чисел служит числовая прямая: любое действительное число может быть изображено единственным образом точкой на этой прямой, и наоборот: любой точке числовой прямой соответствует единственное действительное число.

Замечание. К построению множества действительных чисел $\mathbb{R}$ можно подойти и известным уже способом: через разбиение множества упорядоченных пар положительных действительных чисел по отношению эквивалентности. Эквивалентность упорядоченных пар определяется условием:

$$(\forall x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}^+) \quad [(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = y_1 + x_2].$$

Определение. Действительным числом в этом случае называют класс эквивалентных в смысле приведенного условия упорядоченных пар положительных действительных чисел. При этом множество положительных действительных чисел выстраивается с позиций измерения величин и их соизмеримости.

Далее изучаются арифметические операции с числами. В случае сложения и вычитания чисел соответствующие действия выполняют с направленными отрезками. При умножении и делении чисел требуется переход к новым единицам измерения.

Глава 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Геометрический материал начальной математики строится на понятии «величина», более точно – «геометрическая величина», поэтому сначала введем понятие величины в рамках аксиоматической теории, рассмотрим арифметические действия, выполнимые с величинами, действия тоже определим аксиоматически. Затем достаточно ёмко опишем основные геометрические величины начальной математики и сопоставим школьное определение величины с её аксиоматическим определением в курсе теоретических основ математической подготовки учителя начальных классов [10].

2.1. Аксиоматический подход к определению скалярной величины

Общая теория величин, называемая аксиоматической[3], рассматривается для объектов некоторого множества согласно введенным аксиомам и правилам, регламентирующим отношения между объектами внутри множества.

Величина – одно из основных понятий в математике. *Величины* бывают *скалярные* и *векторные*. Скалярные величины характеризуются только числовым значением, векторные величины кроме числовой характеристики имеют направление. В начальных классах изучают скалярные величины.

На некотором множестве M рассмотрим величину f.

Множество M будет *областью определения* скалярной величины f, если для элементов этого множества определено некоторое отношение эквивалентности ($\sim$) и отношение «состоять из» ($\oplus$).

Определение. Скалярной величиной f называют отображение множества M в множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$:

$$f : M \to \mathbb{R}^+,$$

при выполнении следующих аксиом.

[3] У студентов опыт работы с аксиоматической теорией построения множеств имеется. Ранее, в пособии [10] и в первой главе этого пособия, аксиоматический подход использовался для построения множества целых неотрицательных чисел, множества натуральных чисел.

1. Существует объект в множестве, которому ставится в соответствие единица:

$\exists\ e \in M, f(e) = 1.$

2. Если объекты a и b из множества M эквивалентны, то их образы при данном отображении будут равны:

$(a, b\ \in\ M \wedge a \sim b) \to \big(f(a) = f(b)\big).$

3. Если a, b, c – элементы множества M и связаны отношением «состоять из», то образ a будет равен сумме образов b и c:

$(a, b, \mathrm{c}\ \in\ M \wedge a = b \oplus \mathrm{c}) \to (f(a) = f(b) + f(c)).$

4. Для любых объектов e и e' из множества M существует положительное действительное число k такое, что образ объекта e' будет находиться как k образов объектов e:

$(\forall e, e' \in M, \exists\ k \in \mathbb{R}^{+}) \to (f(e') = k \cdot f(e)).$

В зависимости от выбранного объекта e будет выстраиваться отображение, согласно которому каждому объекту из множества M ставится в соответствие положительное действительное число, являющееся мерой этого объекта при выбранной единице измерения e.

Любой образ можно считать мерой объекта при выбранной единице измерения: $f(a) = m_e(a)$.

Аксиомы скалярной величины на языке мер в этом случае выглядят так.

1. $\exists e \in M, m_e(a) = 1.$

2. $(a \sim b) \to \big(m_e(a) = m_b(b)\big).$

3. $(a = b \oplus \mathrm{c}) \to \big(m_e(a) = m_e(b) + m_e(c)\big).$

4. $\exists k\ \in\ \mathbb{R}^{+}, m_e(e') = k.$

Операции с величинами. Можно выполнять следующие действия с величинами: складывать, вычитать, умножать на число, делить. Рассмотрим эти действия с точки зрения аксиоматической теории.

На множестве M выберем две величины v_1 и v_2, а также единицу измерения e.

Запись $v_1, v_2, e \in M$ означает, что данные величины имеют одну и ту же область определения.

1. *Сложение однородных величин.* Это операция, которая величинам v_1, v_2 одного рода ставит в соответствие их сумму $v_1 + v_2$:

$\forall v_1, v_2 \in M \to v_1 + v_2.$

Пусть величины v_1 и v_2 связаны отображением множества M в множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$:

$v_1: M \to \mathbb{R}^+,\ v_2: M \to \mathbb{R}^+.$

Числа $k, n \in \mathbb{R}^+$ служат мерами объектов v_1, v_2 соответственно:

$m_e(v_1) = k,\ m_e(v_2) = n,\ k, n \in \mathbb{R}^+.$

Мерой суммы $v_1 + v_2$ величин v_1 и v_2 будет сумма мер k и n данных величин:

$m_e(v_1 + v_2) = k + n.$

Сумма однородных величин всегда существует и единственна.

Сложение однородных величин подчиняется коммутативному и ассоциативному законам.

Коммутативный закон. Если v_1 и v_2 – величины одного и того же рода, то сумма величин $v_1 + v_2$ будет равна сумме величин $v_2 + v_1$:

$v_1 + v_2 = v_2 + v_1.$

Ассоциативный закон. Если величины v_1, v_2 и v_3 одного рода, то сумма величины v_1 с суммой $v_2 + v_3$ будет равна сумме суммы величин $v_1 + v_2$ с величиной v_3:

$v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3.$

Доказательство коммутативного закона следующее.

Действительно,

$m_e(v_1) = k, k \in \mathbb{R}^+;$

$m_e(v_2) = n,\ n \in \mathbb{R}^+;$

$m_e(v_1 + v_2) = k + n;$

$m_e(v_2 + v_1) = n + k.$

$k + n = n + k$ – коммутативный закон сложения положительных действительных чисел имеет место, следовательно, будет справедлив и коммутативный закон сложения величин.

Аналогично рассуждая, докажем ассоциативный закон.

Дано: $m_e(v_1) = k, m_e(v_2) = n, m_e(v_3) = p$, где $k, n, p \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство ассоциативного закона следующее.

$m_e(v_2 + v_3) = n + p, m_e(v_1 + (v_2 + v_3)) = k + (n + p);$

$m_e(v_1 + v_2) = k + n, m_e((v_1 + v_2) + v_3) = (k + n) + p.$

$k + (n + p) = (k + n) + p$ – ассоциативный закон сложения положительных действительных чисел.

Ассоциативность сложения однородных величин имеет место в силу ассоциативности сложения положительных действительных чисел.

2. *Вычитание однородных величин.* Это операция, которая величинам v_1, v_2 одного рода ставит в соответствие их разность – величину того же рода $(v_1 - v_2)$:

$v_1, v_2 \to v_1 - v_2$.

Величины v_1, v_2 определены как отображения:

$v_1: M \to \mathbb{R}^+$ и $v_2: M \to \mathbb{R}^+$.

При одной и той же единице измерения e имеем

$m_e(v_1) = k,\ m_e(v_2) = n$, где $k, n \in \mathbb{R}^+$;

$m_e(v_1 - v_2) = k - n,\ k - n \in \mathbb{R}^+,\ k > n$.

Разность величин существует тогда и только тогда, когда числовые значения этих величин сравнимы по отношению «больше».

Если разность величин одного рода существует, то она единственна.

Вычитание однородных величин не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам:

$v_1 - v_2 \neq v_2 - v_1, \quad v_1 - (v_2 - v_3) \neq (v_1 - v_2) - v_3$.

При вычитании однородных величин имеют место известные правила вычитания для величин одного рода.

Сложение и вычитание величин разного рода не имеет смысла.

3. *Умножение величины на число.* Это операция, которая скалярной величине v и положительному действительному числу c ставит в соответствие величину cv того же рода, что и величина v:

$v \in M,\ c \in \mathbb{R}^+,\ v \wedge c \to cv \in M$.

Действительно, пусть мера скалярной величины $v : M \to \mathbb{R}^+$ равна $m_e(v) = n,\ n \in \mathbb{R}^+$. Тогда мера величины cv равна произведению числа c на меру $m_e(v)$ величины v: $m_e(cv) = cn$.

Умножение скалярной величины на число – всегда выполнимая операция, результат которой определяется однозначно.

Умножение скалярной величины на число подчиняется следующим законам:

1) $c\,(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$ – дистрибутивность относительно величин;

2) $(c_1 + c_2)\,v = c_1 v + c_2 v$ – дистрибутивность относительно положительных скаляров.

4. *Деление однородных величин.* С однородными величинами выполняется операция деления, результат которой – отношение величин.

Если v_1, v_2 – величины одного рода, где $v_1: M \to \mathbb{R}^+$ и $v_2: M \to \mathbb{R}^+$ и известны меры данных величин: $m_e(v_1) = k, m_e(v_2) = n$, то отношение однородных величин определяется отношением их мер, т. е. числовых значений:

$\frac{v_1}{v_2} = \frac{k}{n}$, где $\frac{k}{n} \in \mathbb{R}^+$.

Результатом деления однородных величин должно быть положительное действительное число, которое показывает, во сколько раз одна величина больше или меньше другой.

При выполнении операции с величинами разного рода получают величины третьего рода.

Величины разного рода можно умножать и делить.

$$[\text{расстояние}] : [\text{время}] = [\text{скорость}]$$
$$[\text{длина}] \cdot [\text{ширина}] = [\text{площадь}]$$
$$[\text{длина}] \cdot [\text{площадь}] = [\text{объем}]$$
$$[\text{масса}] \cdot [\text{ускорение}] = [\text{сила}]$$

При умножении и делении неоднородных величин соответствующее действие выполняется с единицами измерения и числовыми значениями величин.

2.2. О геометрических величинах в начальной математике

С величинами ребёнок знакомится задолго до школы: переливая воду из одной ёмкости в другую, сравнивает по объему сосуды, укладывает кубики в коробку, заполняя её, ленточкой подходящей длины учится обвязывать подарочную коробку. Ребёнок с интересом замечает, что одна машинка едет быстрее другой, что папина сумка тяжелее маминой.

В начальной школе дети работают с такими величинами, как длина, площадь, объём, величина угла, время, скорость, цена и др. Среди перечисленных длина, площадь, объём, величина угла относятся к геометрическим величинам. *Геометрические величины* – это свойства геометрических фигур, характеризующие их форму и размеры. Названные величины скалярные, поскольку определяются только числовыми значениями.

Далее рассмотрим понятие «геометрическая фигура», или «фигура плоскости». Под *геометрической фигурой* на плоскости понимаем любое множество точек этой плоскости. Например, отрезок, прямая, круг – плоские геометрические фигуры, потому как все точки принадлежат одной плоскости. Куб, шар, пирамида не являются плоскими фигурами.

Геометрические величины будем рассматривать на соответствующих множествах: длину – на множестве отрезков плоскости, площадь – на множестве многоугольных фигур плоскости, величину угла – на множестве углов плоскости, объём – на множестве прямоугольных параллелепипедов. Теоретическое изложение вопросов в обязательном порядке сопроводим элементами методики обучения начальной математике.

Итак, если на некотором множестве задана величина, то согласно аксиоматической теории скалярных величин в этом множестве: 1) должен существовать единичный объект e – единица измерения величины; 2) для одинаковых (равных) объектов их величины должны совпадать; 3) величина объекта, составленного из более мелких объектов, находится как сумма величин мелких объектов; 4) любой объект можно измерять относительно выбранной единицы измерения в более крупных (или в более мелких) единицах. Объекты данного множества можно складывать, вычитать, изменять в k раз.

2.3. Отрезок. Длина отрезка. Измерение и сравнение длин отрезков

Переходим к изучению величины «длина». Какие объекты характеризует длина?

Понятие длины присуще протяженным фигурам.

Нам понадобится понятие «луч». Дети знают лучи солнца.

«Нарисуйте солнышко, нарисуйте его лучики. Каждый из таких лучей начинается от солнца и бежит к земле, не сворачивая, не изгибаясь. Так же и в математике».

Лучом называется часть прямой (ограниченная с одной стороны), имеющая начало, но не имеющая конца. Иногда луч называют словом *«полупрямая»*. Луч отличается от прямой тем, что у него имеется начальная точка. Любая точка на прямой разделяет её на два луча. На рис. 2.1 изображен луч AC, точка A – начало луча, точка C задает луч AC.

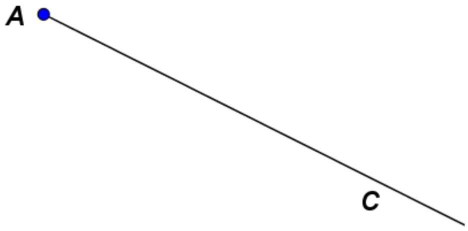


Рис. 2.1

Рис. 2.2

Отрезком прямой назовем часть прямой, ограниченную двумя точками этой прямой. Другими словами, отрезком прямой является множество точек данной прямой, содержащее две различные точки данной прямой – *концы отрезка* – и все точки, лежащие между ними, – *внутренние точки отрезка* (рис. 2.2)

На плоскости через любую точку можно провести бесконечное множество прямых (рис. 2.3). Через любые две точки плоскости можно провести единственную прямую (рис. 2.4, *а*). Любые две точки плоскости задают единственный отрезок (рис. 2.4, *б*).

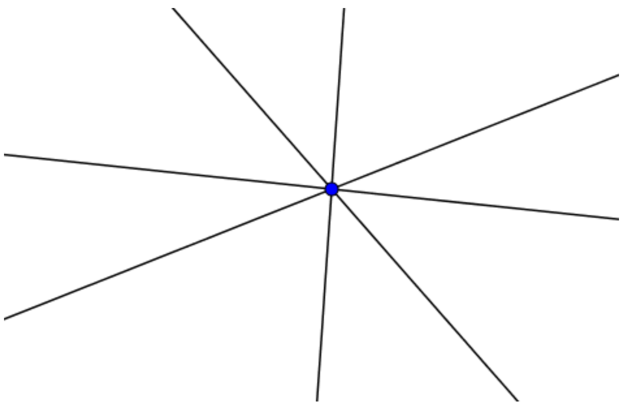


Рис. 2.3

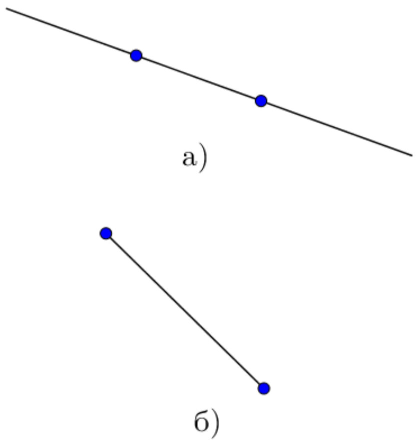


Рис. 2.4

Сколько отрезков можно провести через любые три точки плоскости? (Три отрезка, если точки не лежат на одной прямой. Один отрезок в случае, если все три точки лежат на одной прямой.) Какая фигура при этом получается? (Треугольник. Во втором случае треугольник вырождается в отрезок, внутри которого отмечена точка.)

Чтобы различать отрезки прямой линии от прямой линии принято отмечать концы отрезка (точками или штрихами). На рис. 2.5, *а* изображена прямая, на рис. 2.5, *б* – отрезок данной прямой с точками на концах.

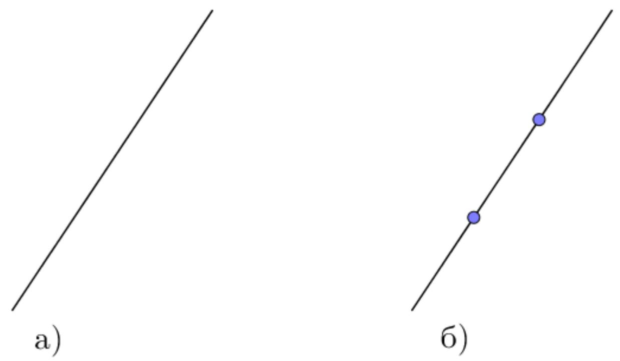


Рис. 2.5

Моделью отрезка может служить палочка, полоска бумаги, натянутая нить или лента, прямой кусок проволоки.

Из нескольких (например, трёх) палочек можно составить ломаную линию, при этом палочки размещаем последовательно одна за другой (т. е. каждые две соседние палочки имеют одну общую точку). Итак, геометрическая фигура, состоящая из отрезков, последовательно соединенных своими концами, называется *ломаной*, или *ломаной линией*. Подберём к слову «ломаная» однокоренные слова: ломать, надломить, переломить, поломать. Рассмотрите модель отрезка: палочку, например. Что будет, если надломить палочку? Надломим палочку один раз – получим ломаную из двух палочек.

На рис. 2.6 изображена ломаная линия, состоящая из трех звеньев. *Звенья ломаной* – это отрезки, её составляющие.

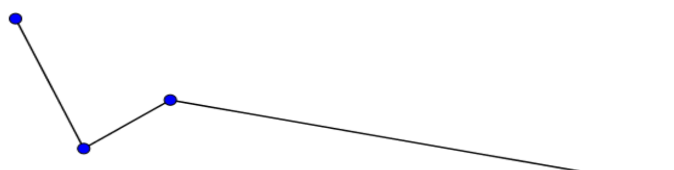


Рис. 2.6

Сравнение отрезков осуществляют сначала на глаз, в дальнейшем – наложением или с помощью циркуля. Часто, посмотрев внимательно на отрезки, можно сказать, какой из них длиннее. Однако существуют отрезки, которые мало отличаются друг от друга. В таком случае пользуются методом наложения: совместим отрезки таким образом, чтобы выходили они из одной точки и были расположены вдоль одной полупрямой. Тогда можно видеть: какой из отрезков заканчивается раньше, этот отрезок будет короче, меньше другого. Теперь для любых двух отрезков легко оценить, какой из них длиннее (или короче).

Не представляется возможным каждый раз вырезать из бумаги все отрезки, которые надо сравнить. Потому для удобства сравнения отрезков между собой на множестве отрезков плоскости используют натянутую нить или полоску бумаги.

Пусть требуется сравнить первый и второй отрезки. Возьмем нить, левой рукой приложим к началу первого отрезка, натянем её и правой рукой приложим к концу отрезка. Зафиксируем положение пальцев на нити. Теперь левую руку приложим к началу второго отрезка, а правую попробуем приложить к концу второго отрезка. Следим при этом, чтобы нитка была натянута, а пальцы не сдвигались с места. Конец второго отрезка или совпадёт с положением правой руки, или не достигнет её, или опередит.

Сравнивать отрезки можно и с помощью циркуля. Поставим ножки циркуля в концы первого отрезка. Фиксируем раствор циркуля. Теперь одну ножку циркуля приложим к началу второго отрезка и смотрим, куда поместилась вторая ножка. Например, конец второго отрезка оказался внутри раствора циркуля, значит, второй отрезок короче первого.

Может случиться, что при наложении отрезки целиком совпадают, в таком случае отрезки называют *равными* или говорят, что эти *отрезки равны* между собой.

Числовой характеристикой протяженности отрезка считается длина отрезка.

Длиной отрезка называется положительная скалярная величина, обладающая следующими свойствами (ниже ряд этих свойств дополним согласно аксиоматическому определению скалярной величины):

1) равные отрезки имеют равные длины;

2) если отрезок составлен из двух отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.

Переходим к измерению отрезков. *Измерить отрезок* – значит сравнить его с другим отрезком, принимаемым за единицу измерения. Сначала выбираем эталон[4] – некоторый отрезок – в качестве единицы измерения и все другие отрезки сравниваем с эталоном (рис. 2.7).

На рис. 2.8 изображены два отрезка. Первый отрезок измерили, получилось четыре мерки. Второй отрезок измерили, получилось три мерки. $4 > 3$, значит, первый отрезок длиннее второго. Верно ли это? (Нет) Почему? (Потому что использовали разные мерки.) Для сравнения двух отрезков будем использовать одну и ту же мерку.

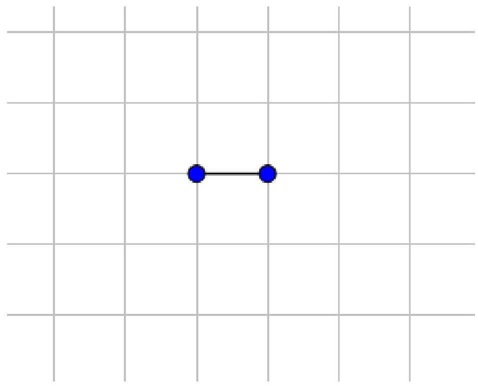


Рис. 2.7

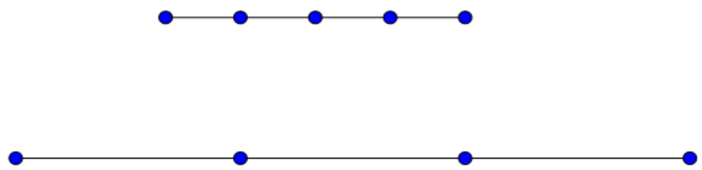


Рис. 2.8

На рис. 2.9 отрезки измерили одной меркой. В первом отрезке уложилось четыре мерки, во втором – девять таких же мерок. Вывод: первый отрезок короче второго, поскольку $4 < 9$.

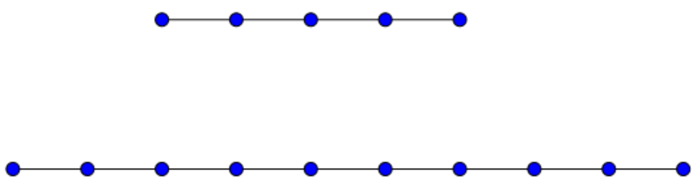


Рис. 2.9

Измерение отрезков выполняют с помощью специального прибора – линейки. На школьной линейке имеются деления. Эти деления

[4] Вместо слова «эталон» для младшего школьника более подходит слово «мерка», однокоренные слова – «мера», «измерение», «мерить», «измерять».

указывают длину отрезка. Отрезок от 0 до 1 – одна единица измерения. На рис. 2.10 изображена линейка. Привычная единица измерения – сантиметр.

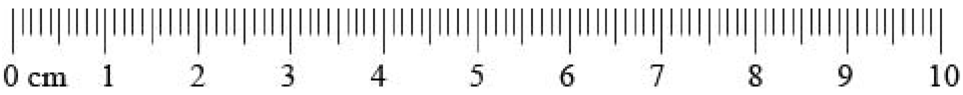


Рис. 2.10

Одну такую единицу и берем в качестве мерки (см. рис. 2.7). Линейку прикладывают к отрезку и определяют его длину.

Если на данном отрезке поставить точку, то эта точка разделит отрезок на два отрезка. В общем случае полученные отрезки будут разной длины. Например, на рис. 2.11 изображен отрезок длиной четыре мерки. Отметили на данном отрезке точку, получилось два отрезка длиной одна и три мерки.

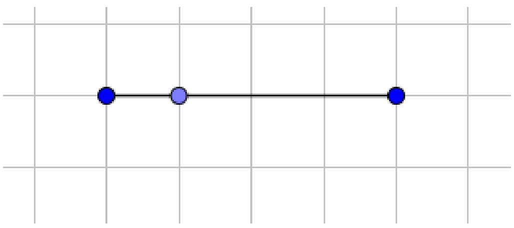


Рис. 2.11

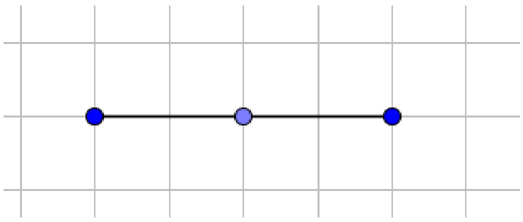


Рис. 2.12

На рис. 2.12 получились равные отрезки. В таком случае говорят, что данный *отрезок поделили пополам*, при этом точку деления данного отрезка называют *серединой отрезка*.

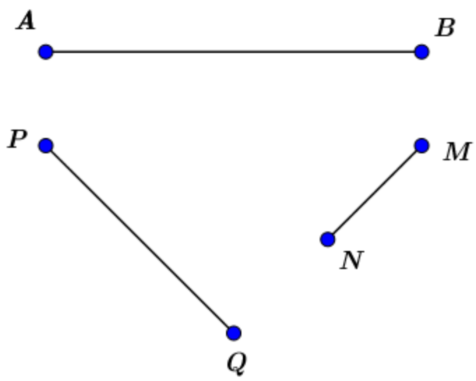


Рис. 2.13

Далее в начальной школе учат *обозначать отрезки:* точки – концы отрезка – обозначают заглавными буквами (рис. 2.13). Запись «отрезок AB» означает, что одна граница отрезка – точка, названная буквой A, другая граница – буквой B.

Действия с отрезками. Младшему школьнику доступны следующие операции с отрезками: сложение и вычитание отрезков, изменение данного отрезка в k раз, в том числе умножение данного отрезка на натуральное число k. Определим каждую из этих операций и напомним, как находить результат действия конкретной операции.

Суммой двух отрезков a и b называется третий отрезок c, который равен объединению отрезков a и b, если эти отрезки не имеют общих внутренних точек, но имеют общий конец.

Даны отрезки MN и KL (рис. 2.14). Построим сумму отрезков $MN + KL$.

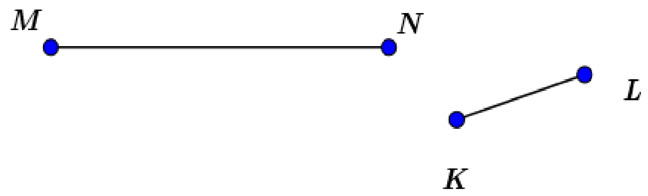


Рис. 2.14

Для построения суммы отрезков MN и KL достаточно на луче от точки A последовательно отложить отрезки $AB = MN$ и $BC = KL$ (рис. 2.15). Получим отрезок AC, равный сумме отрезков MN и KL, т. е. $AC = MN + KL$. Отметим здесь, что порядок, в котором откладываются отрезки AB и BC на луче, не важен. Важно отложить отрезки последовательно и в одну сторону, один за другим.

Рис. 2.15

Разностью[5] *двух отрезков* a и b называется такой третий отрезок c, который при сложении с отрезком b дает отрезок a: $a - b = c$, если $c + b = a$.

[5] Разность – разница. В качестве моделей отрезков хорошо использовать цветные карандаши, а в тетради строить цветные отрезки. Возьмите два карандаша. Приложите один к другому так, чтобы карандаши оказались наложенными друг на друга и их заостренные концы «смотрели» в одну сторону. Поставьте эту пару заостренными концами на стол, придерживайте конструкцию. Теперь можно видеть, на сколько один карандаш длиннее (или короче) другого. Это и есть разница – разность длин карандашей. Перенесите эту практическую ситуацию в тетрадь, изображая карандаши соответствующими цветными отрезками.

Разность отрезков a и b можно построить, если первый отрезок длиннее второго. Из этого определения следует, что для построения отрезка $a - b$ достаточно: 1) изобразить отрезок a; 2) отложить отрезок b на отрезке a от любого его конца. Разностью отрезков a и b будет отрезок, дополняющий отрезок b до отрезка a.

Даны отрезки MN и KL (см. рис. 2.14). Построим разность отрезков $MN - KL$.

На рис. 2.16 построена разность AC отрезков $AB = MN$ и $BC = KL$, $AC = MN - KL$.

На рис. 2.17 построена разность BC отрезков $AB = MN$ и $AC = KL$, $BC = MN - KL$.

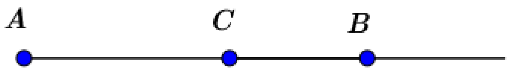


Рис. 2.16

Рис. 2.17

Следовательно, построить разность можно разными способами. Полученные отрезки-разности AC и BC равны, что следует из теоремы существования и единственности разности отрезков. В математической теории формулируются и доказываются теоремы существования и единственности суммы и разности двух отрезков, здесь на этих теоремах останавливаться не будем.

Рис. 2.18

Если на луче последовательно в одну сторону отложить три раза отрезок a, т. е. найти сумму трех одинаковых отрезков $a + a + a$, то новый отрезок можно обозначить $3a$. Этот отрезок в три раза больше данного. Говорят, что отрезок $3a$ получен произведением натурального числа 3 и отрезка a. Такой отрезок построен на рис. 2.18.

Произведением отрезка a *и натурального числа* k называется отрезок ka, равный сумме k (штук) отрезков, каждый из которых равен отрезку a: $ka = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{k \text{ слагаемых}}$.

Иначе говоря, построение отрезка ka (при $k > 1$) сводится к построению суммы k одинаковых отрезков a.

Проверим теперь выполнение требований 1) – 4) (см. с. 53) к скалярной величине «длина».

Действительно, на множестве отрезков:

1) существует единичный отрезок, при помощи которого измеряют все остальные отрезки (см. рис. 2.7);

2) одинаковые отрезки имеют равные длины (рис. 2.19);

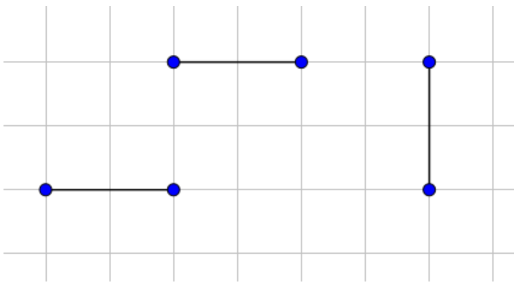


Рис. 2.19

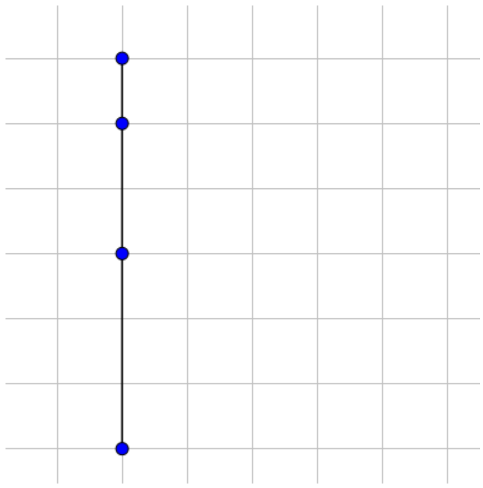


Рис. 2.20

3) если отрезок разбит на несколько отрезков, то его длина находится как сумма длин составляющих отрезков (рис. 2.20);

4) данный отрезок можно измерять более крупными (или более мелкими) относительно выбранной мерки единицами измерения. Например, на рис. 2.21 отрезок AB измерен единицей e, длина отрезка при этом измерении равна 9, $m(AB) = 9e$. Также отрезок AB измерен единицей e_1, длина отрезка при этом измерении равна 3, $m(AB) = 3e_1$.

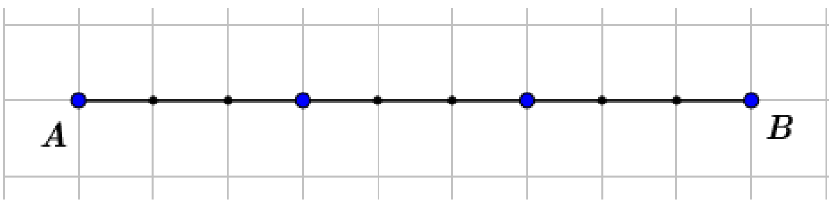
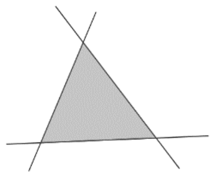


Рис. 2.21

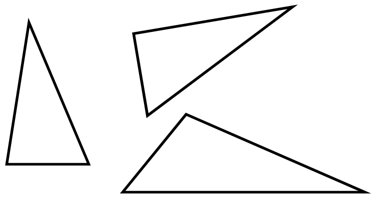
2.4. Треугольники и четырехугольники: определения, виды, характеристические свойства

Определим множество треугольников и множество четырехугольников, подробно изучим классы фигур, составляющие эти множества, опишем характеристические свойства и укажем признаки фигур разных классов.



Треугольником называется часть плоскости, ограниченная тремя прямыми. Точки пересечения прямых называются вершинами треугольника, отрезки прямых – сторонами треугольника.

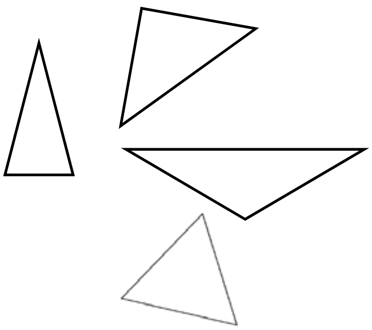
Разносторонним называется треугольник, у которого нет равных сторон.



Против большего угла лежит большая сторона, против меньшего угла – меньшая сторона.

В треугольнике сумма длин двух его сторон больше длины третьей стороны.

Равнобедренным называется треугольник, у которого две стороны равны. Эти стороны называются *боковыми*, третья сторона – *основанием*.



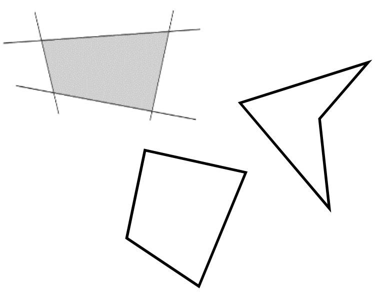
Углы при основании равны.

Признак. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

Равносторонним называется треугольник, у которого все стороны равны.

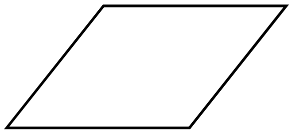
Все три угла равны.

Признак. Если в треугольнике три угла равны, то он равносторонний.



Четырехугольником называется часть плоскости, ограниченная четырьмя последовательно пересекающимися между собой прямыми. Точки пересечения прямых называются вершинами четырехугольника, отрезки прямых – сторонами четырехугольника.

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых.



Противоположные стороны параллелограмма равны.

Противоположные углы параллелограмма равны.

Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Точка пересечения диагоналей – центр симметрии параллелограмма.

Параллелограмм диагональю делится на два равных треугольника.

Средние линии параллелограмма пересекаются в точке пересечения его диагоналей. В этой точке две его диагонали и две его средние линии делятся пополам.

У четырёхугольника без самопересечений две противоположные стороны одновременно равны и параллельны.

Противоположные стороны попарно параллельны.

Поясним следующее: слово «попарно» означает «каждые две из всех имеющихся». Фраза «Противоположные стороны параллелограмма попарно параллельны» значит, что каждые две лежащие друг против друга стороны параллельны между собой.

Прямоугольником называется четырёхугольник, у которого все углы прямые.

Прямоугольник – это параллелограмм. Его противоположные стороны попарно параллельны.

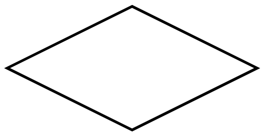
Стороны прямоугольника являются его высотами.

Около любого прямоугольника можно описать окружность, причём диагональ прямоугольника – это диаметр описанной окружности.

Признаки. Параллелограмм является прямоугольником при выполнении любого из условий:

1) если диагонали параллелограмма равны;
2) если все углы параллелограмма равны.

Ромбом называется четырёхугольник, у которого все стороны равны.



Ромб – это параллелограмм, поэтому его противоположные стороны равны и попарно параллельны.

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и в точке пересечения делятся пополам. Тем самым диагонали делят ромб на четыре прямоугольных и равных треугольника.

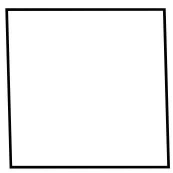
Середины четырёх сторон ромба – вершины прямоугольника.

Диагонали ромба представляют собой перпендикулярные оси симметрии.

В любой ромб можно вписать окружность, центр которой лежит на пересечении его диагоналей.

Признаки. Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) две его смежные стороны равны (отсюда следует, что все стороны равны);
2) его диагонали пересекаются под прямым углом;
3) одна из диагоналей параллелограмма делит содержащие её углы пополам.



Квадратом называется четырёхугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

По определению квадрата имеем: все его стороны равны; все углы квадрата прямые; диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам.

Квадрат – частный случай ромба и прямоугольника.

2.5. Площадь и периметр

Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других её помещений.

В геометрии говорят о *площади фигуры*. Любое множество точек плоскости есть фигура. На рис. 2.22 представлены некоторые множества F_1, F_2, F_3 точек плоскости. Геометрические фигуры устроены по-разному, следовательно, рассматривая площадь, выделяют определенный класс фигур. Например, изучают площадь многоугольника, площадь произвольной плоской фигуры, площадь поверхности многогранника и др.

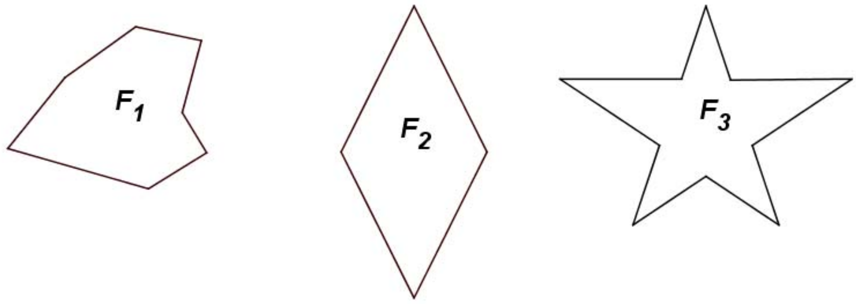


Рис. 2.22

Площадью многоугольной фигуры называется положительная скалярная величина, определенная для каждой фигуры так, что:

1) равные многоугольные фигуры имеют равные площади;
2) если многоугольная фигура состоит (составлена) из двух частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

Фигуры *равны,* или *конгруэнтны*, если существует наложение (движение), которое переводит одну из них в другую[6]. Понимая равенство фигур именно в смысле полного совмещения этих фигур при движении, в математике начальной школы коротко говорим: фигуры равны, если совпадают при наложении.

Теперь зададимся вопросом: что значит измерить площадь фигуры? Попробуем отыскать ответ вместе с учениками.

Детям предлагается измерить площадь страницы учебника – прямоугольной плоскости – квадратными мерками разных размеров. Какие из квадратных мерок наиболее подходящие для этого измерения? Почему? (Чем мельче квадратная единица, тем точнее получается измерение.)

[6] Под *движением* фигуры понимается такое её преобразование, которое сохраняет расстояния между любыми двумя её точками. Подробно о движении и его видах речь пойдёт в п. 3.7.

Закрываем представленную фигуру мерками так, чтобы любые соседние мерки не перекрывали друг друга и между ними не оставалось свободного места. Ребята работают практически с измеряемой частью плоскости разными мерками и приходят к выводу: наиболее подходящие для «замощения» плоскости более мелкие квадраты. Удобнее всего измерить площадь учебника квадратами.

Сколько таких квадратов поместилось в прямоугольнике? Сосчитаем число квадратных мерок, содержащихся в нём. Количество квадратов, которое плотно покроет страницу учебника, и есть её площадь при выбранной мерке.

Итак, процесс измерения площади связан с сопоставлением мерки – фигуры, выбранной в качестве единицы измерения, – с измеряемой фигурой.

Квадрат, изображенный на рис. 2.23, примем за единицу измерения e площади и назовём *квадратной единицей* (сокращенно пишут: кв. ед. или ед. кв.).

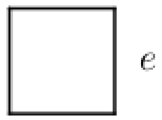


Рис. 2.23

Площадь прямоугольника в единицах квадратных можно вычислить и чисто алгебраическим способом. Для этого нужно:

– измерить длину основания в единицах длины;

– измерить длину высоты в тех же единицах длины;

– перемножить полученные числа.

Если имеем дело с квадратом, то достаточно измерения одной его стороны.

В каких единицах удобнее измерять площадь листа тетради, площадь классной доски, площадь прямоугольной комнаты?

Величина «площадь» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к положительным скалярным величинам. Действительно:

1) среди множества всех фигур плоскости можно выбрать фигуру e в качестве единицы измерения: $m(e) = 1$. Запись $m(e) = 1$ читается так: «мера фигуры e равна единице». Такая квадратная единица измерения изображена на рис. 2.23;

2) равные многоугольные фигуры имеют равные площади: $F_1 = F_2 \Rightarrow m(F_1) = m(F_2)$ (рис. 2.24);

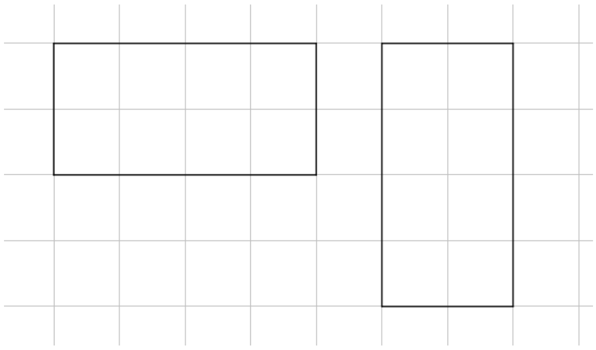


Рис. 2.24

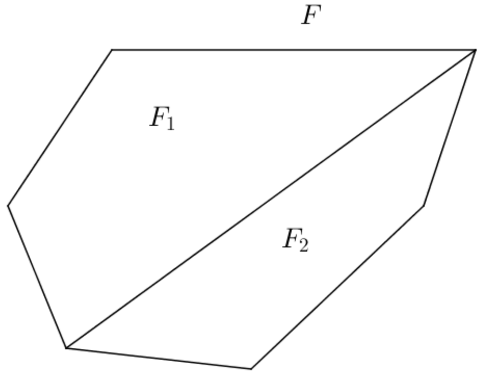


Рис. 2.25

3) площадь разбитой на части многоугольной фигуры F (рис. 2.25) находится как сумма площадей многоугольных фигур, составляющих фигуру: $F = F_1 + F_2 \Rightarrow m(F) = m(F_1) + m(F_2)$;

4) в множестве многоугольных фигур плоскости всегда можно выбрать фигуру e_1 в качестве новой единицы измерения, т. е. всегда найдется положительное действительное число k такое, что мера e_1 при первоначально выбранной единице e будет равна k, $e_1 = ke$.

Например, на рис. 2.26 представлены мерки e и e_1. Прямоугольник на рис. 2.27 измерен мерками e, его площадь в этом случае составляет $6e$, а на рис. 2.28 приведен тот же прямоугольник, измеренный более мелкими мерками $e_1 = \frac{1}{4}e$, площадь прямоугольника при этом измерении равна $24e_1$.

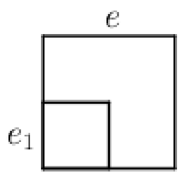


Рис. 2.26

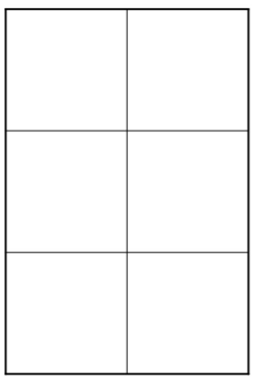


Рис. 2.27

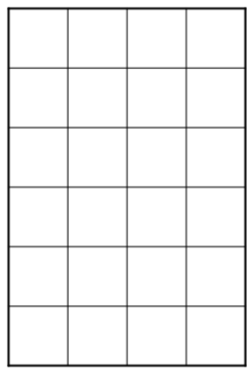


Рис. 2.28

Удобно переходить к новым единицам измерения в задачах следующего типа.

Выбран единичный квадрат e (см. рис. 2.23). Дан прямоугольник (рис. 2.29).

Требуется определить площадь S этого прямоугольника в указанных единицах измерения e.

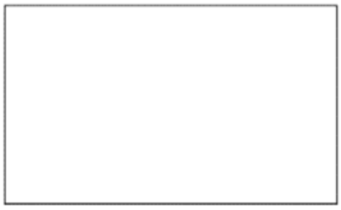
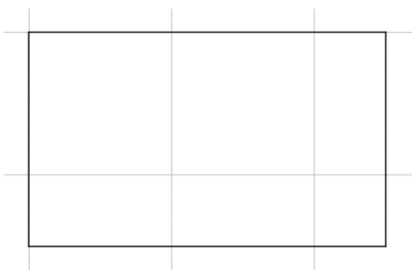


Рис. 2.29

Закрываем прямоугольник данными мерками. Случилось так, что целым количеством квадратов e прямоугольник не покрывается: в данный прямоугольник поместилось два целых квадрата e и некоторые части мерки e.

Тогда переходят к другой единице измерения – более мелкой – следующим образом: сторону исходного квадрата делим пополам, получаем квадрат со стороной в два раза меньше исходной, новый единичный квадрат e_1 имеет в четыре раза меньшую площадь, чем исходная мерка e, $e_1 = \frac{1}{4}e$ (см. рис. 2.26). Измеряем теперь данный прямоугольник новой меркой e_1. Если такие квадраты e_1 плотно покрывают прямоугольник, то площадь прямоугольника может быть выражена целым числом единиц квадратных (более мелких по сравнению с исходной единицей измерения).

Итак, на рис. 2.30 для исходного прямоугольника площадь $S > 2e$. Наиболее точное измерение получается в более мелких мерках e_1, это показано на рис. 2.31. Количество квадратов e_1 равно 15. Вычисление площади через произведение длин сторон дает $S = 3 \cdot 5 = 15e_1$ – тот же самый результат. Вывод: площадь прямоугольника составляет 15 квадратных единиц e_1. Для вывода о значении площади достаточно одной процедуры.



Рису. 2.30

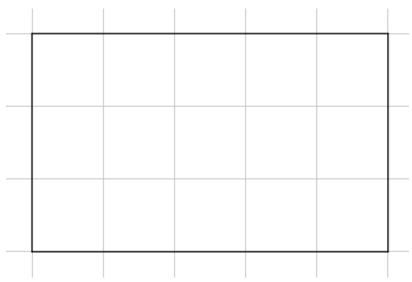


Рис. 2.31

Если учащиеся знакомы с дробями, то можно записать ответ и в исходных единицах измерения, но он будет дробным. Каждые четыре квадрата e_1 составляют квадратную единицу e, значит, каждый квадрат e_1 – четверть квадрата e. Сколько квартетов e_1 поместится в данном прямоугольнике? Три. И останутся ещё три квадратные единицы e_1, т. е. три четверти e. В итоге получаем $S = 3e + \frac{3}{4}e = 3\frac{3}{4}\ e$ (ед. кв.).

Задачи, в которых измерения требуют перехода к более крупным единицам измерения, чаще всего связаны с площадями больших размеров, например при измерении площадей помещений, земельных участков.

В начальной школе детей знакомят и с равносоставленными фигурами.

Геометрические фигуры, сложенные из одинакового числа равных частей (или, наоборот, разрезанные на одинаковое число равных частей), называют *равносоставленными*. Например, на рис. 2.32 фигуры F_1, F_2, F_3 равносоставлены.

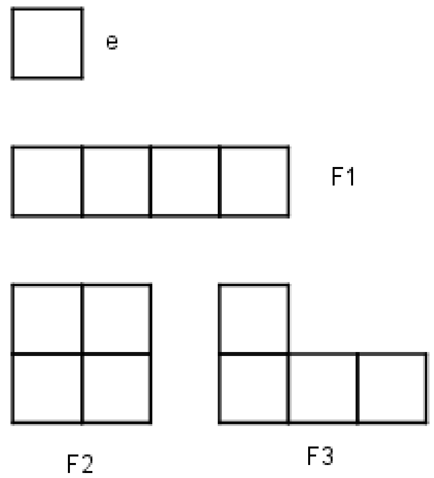


Рис. 2.32

Вопрос о том, как именно равносоставленность фигур применяют при решении геометрических задач в курсе теоретических основ начальной математики, подробно рассмотрен на практических примерах в гл. 4 пособия [10].

Также в начальной математике рассматривают многоугольные фигуры, площади которых равны. Такие фигуры называют *равновеликими*. Сам термин в младшей школе чаще всего не употребляют из-за трудностей произношения. Все равносоставленные фигуры равновелики. На рис. 2.32 фигуры F_1, F_2, F_3 имеют одинаковые площади, следовательно, фигуры F_1, F_2, F_3 равновелики. Прямоугольники на рис. 2.33 равновелики.

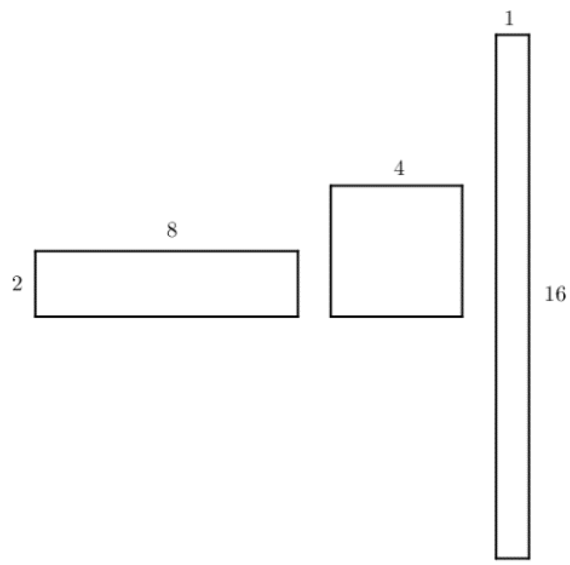


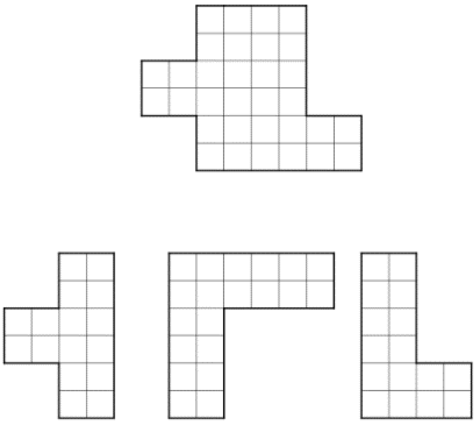
Рис. 2.33

Построение многоугольной фигуры заданной площади зависит от первоначально выбранной единицы измерения. В качестве упражнения предлагаем ученику задания.

Задание. Площадь прямоугольника равна 16 кв. ед. Начертите несколько прямоугольников, имеющих такую же площадь (основание и высота должны выражаться целым числом единиц). Сколько таких прямоугольников? (В начальной школе задача решается в целых числах, поэтому ответ – три таких прямоугольника).

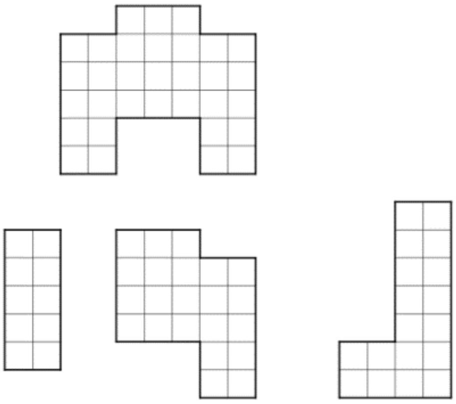
Найдите периметры этих прямоугольников. (20, 16, 34 кв. ед.)

Задание. На рис. 2.34 и 2.35 выберите из фигур 1, 2, 3 такие две, из которых можно составить большую фигуру. Соедините линиями большую фигуру с выбранными фигурами [20, с. 27].



1 2 3

Рис. 2.34



1 2 3

Рис. 2.35

Периметр – длина границы фигуры. Вычисление периметра имеет существенное практическое значение, например, для определения длины ограды вокруг сада или участка; периметр колеса (окружности) показывает, насколько далеко оно продвинется при полном обороте.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон. Периметр фигуры можно найти двумя способами:

1) найти длину каждой стороны и затем сумму полученных чисел;

2) начертить прямую линию, с помощью циркуля отложить на определенном луче этой прямой в одном направлении одну сторону за другой, найти длину полученного отрезка.

Вторым способом найдем периметр треугольника ABC (рис. 2.36).

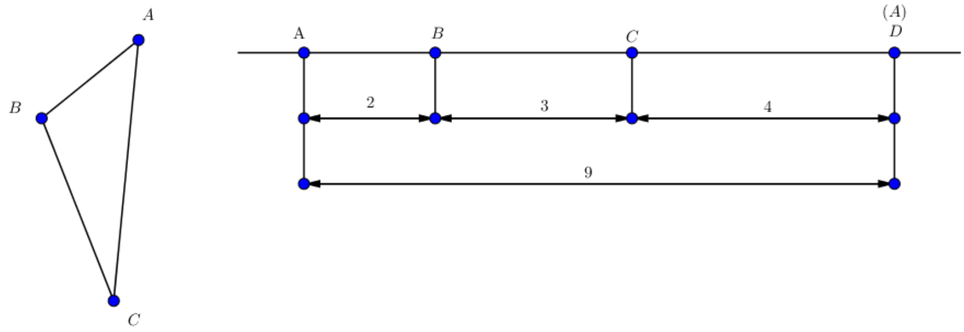


Рис. 2.36

На рис. 2.37 построены фигуры одинакового периметра. Сравните площади этих фигур.

Можно ли утверждать, что «фигуры с одним и тем же периметром не обязательно имеют равные между собой площади»? (Да)

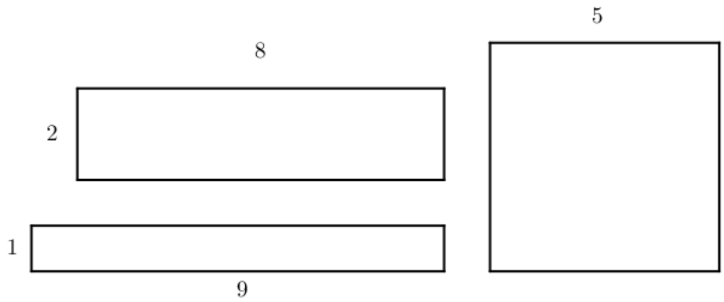


Рис. 2.37

Ученикам предлагается выполнить ряд упражнений.

Из длинного отрезка проволоки сделали прямоугольник размером 7×8. Узнайте длину куска проволоки. (30)

Можно ли кусок проволоки длиной 10 ед. согнуть в прямоугольник длиной 4 ед. и шириной 2 ед.? (Нет)

Какой длины кусок проволоки нужно взять, чтобы сделать квадрат со стороной 2 ед.? (8)

Можно ли из куска проволоки длиной 15 ед. сделать квадрат со стороной 4 ед.? (Нет)

Начертите какой-нибудь четырехугольник. Продолжите одну из его сторон. На продолжении этой стороны последовательно в одном направлении отложите отрезки, равные соответственно трем другим сторонам четырехугольника. Найдите периметр четырехугольника одним измерением.

Графический диктант: на клетчатой бумаге поставьте точку A в вершине любой клеточки, далее шагайте карандашом: 7 клеток вниз – точка B, 5 клеток вправо – точка C, 9 клеток вверх – точка D. Найдите периметр ломаной $ABCD$. (21)

Начертите треугольник ABC. Продлите луч AC за точку A, за точку C. С помощью циркуля от точки C на луче AC (вне ΔABC) отложите отрезок CP, равный отрезку BC. Отложите от точки A на луче CA (вне ΔABC) отрезок AQ, равный отрезку AB. Можно ли теперь с помощью одного измерения найти периметр треугольника ABC? (Да)

2.6. Угол и мера угла

Понятие угла. Вершины и стороны угла. Прямой угол. *Угол* – это часть плоскости, которую образуют два луча, выходящие из одной точки[7].

Для изображения угла достаточно отметить точку и провести из неё два луча, не лежащие на одной прямой, как это показано на рис. 2.38.

Точка – *вершина угла*. Лучи образуют *стороны угла*. У угла одна вершина и две стороны.

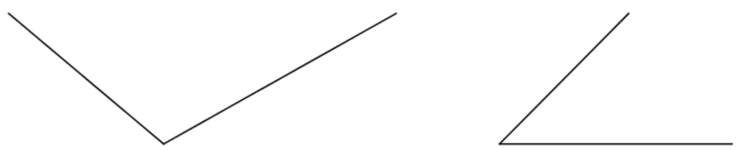


Рис. 2.38

Чтобы составить модель угла, достаточно взять две тонкие палочки (каждая длиной с ладонь, на одном из концов просверлена дырочка), скрепить их небольшим болтом. Раздвигая и сдвигая палочки, будем получать углы разной величины. Палочки (стороны угла) раздвигаем – угол увеличивается, постепенно сдвигаем палочки – угол при этом уменьшается.

С помощью такой модели можно сравнивать углы. Приложим модель к первому углу (см. рис. 2.38). Не меняя положения палочек, приложим модель ко второму углу, совмещая вершину и одну палочку со стороной угла (правую – с правой). Если (левая) палочка оказалась вне второго угла, то второй угол меньше первого.

Проверьте (сравните) с помощью модели углы прямоугольника. Все четыре угла прямоугольника равны между собой.

[7] Материал заимствован из источника [14].

Модель прямого угла дети получают, выполняя практическую работу. Каждому из них даются листы бумаги разных размеров с неровными краями. Внутри листа ставится точка. Дети должны сложить лист так, чтобы линия сгиба прошла через эту точку. Затем они еще раз складывают полученный лист так, чтобы части линии сгиба первого листа совместились. Организуя деятельность учащихся, учитель сам может демонстрировать им способ действия. В результате получится модель прямого угла. Все модели, изготовленные учащимися, накладываются друг на друга, и делается вывод, что все прямые углы равны между собой.

Практическая реализация этих действий требует правильных представлений о величине угла. Для этой цели можно воспользоваться приёмом наложения и представлениями детей о луче.

С моделью прямого угла школьники выполняют различные упражнения: накладывают эту модель на соответствующие углы тетради, книги и убеждаются, что эти углы прямые; строят прямые углы на клетчатой и нелинованной бумаге. Ученики находят прямые углы на различных предметах. Необходимо строить прямые углы в различном положении на плоскости. Для этого раздаются листы с начерченными на них лучами и предлагается провести лучи так, чтобы образовались прямые углы. Учащиеся строят их при помощи модели прямого угла и/или при помощи чертёжного треугольника (один из углов треугольника прямой, два других острые). На практике чертёжный треугольник используют и для проверки прямых углов.

На столе у каждого учащегося бумажный треугольник. Определите на глаз наибольший, наименьший из углов. Разорвите треугольник на три части (учитель демонстрирует как это можно сделать). Проверьте свой вывод, сравнив углы наложением.

Обозначают углы (около вершины) большими латинскими буквами, малыми греческими буквами, цифрами (рис. 2.39).

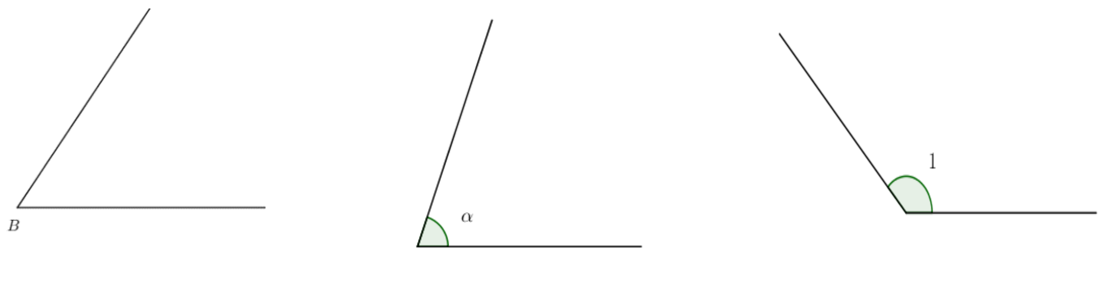


Рис. 2.39

Взаимное положение угла и точки. Расстояние от точки плоскости до вершины угла. На листе бумаги нарисуйте угол. Лист разделился на две области: «бежим» от одной стороны угла до другой стороны, та область, в которой быстрее доберемся от одной стороны до другой, считается *внутренней*, другая – *внешней*. На рис. 2.40 внешняя область угла закрыта вертикальной штриховкой, внутренняя – горизонтальной.

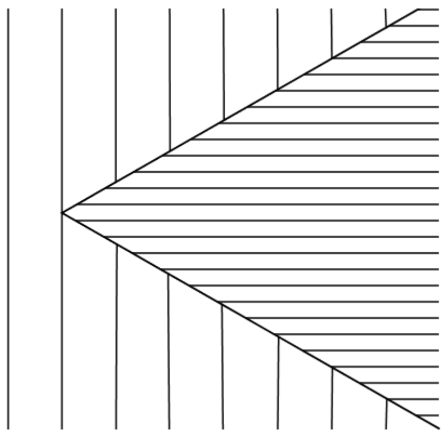


Рис. 2.40

Понятно, что положение всех точек листа относительно угла однозначно определено: они либо внутри угла, либо вне данного угла.

Может случиться так, что точки попадут на стороны самого угла, тогда говорят: «Точка принадлежит стороне угла» (кстати, и самому углу).

Фигуры и их углы. Может ли у одного и того же треугольника быть два тупых угла? Два прямых угла? Один прямой и один тупой угол? (Нет. Нет. Нет)

Сколько острых и развёрнутых углов образуют две пересекающиеся прямые? (4; 4) Начертите две пересекающиеся прямые линии. Убедитесь в своем предположении.

В общем случае (т. е. когда соседние стороны не равны между собой) диагонали[8] прямоугольника при пересечении образуют два тупых и два острых угла.

Какие углы образуют диагонали прямоугольника со сторонами 8 и 6 см? (Два острых и два тупых угла) Постройте такой прямоугольник. Убедитесь в правильности своего предположения при помощи чертёжного треугольника.

Можно ли сказать, что диагонали квадрата образуют четыре прямых угла? (Да) Проверьте это при помощи чертёжного треугольника.

---

[8] Напомним, *диагональю* многоугольника называется отрезок, соединяющий две несоседние вершины.

Если из какой-нибудь точки, лежащей на прямой, провести луч, не лежащий на этой прямой, то получатся два угла (рис. 2.41).

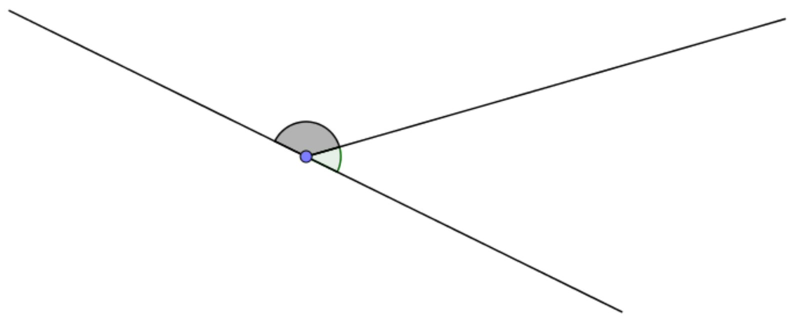


Рис. 2.41

Сравнение углов. Угол обозначают тремя буквами, например, как на рис. 2.42, ABC или CBA. Буква, записанная в середине, – это всегда вершина угла (в данном случае вершина – точка B), лучи BA и BC – стороны угла.

Два угла называют *равными*, если один из них можно наложить на другой так, чтобы они совпали всеми своими точками. Другими словами, углы равны, если существует движение, переводящее один из них в другой (при этом вершина и стороны одного угла переходят соответственно в вершину и стороны другого).

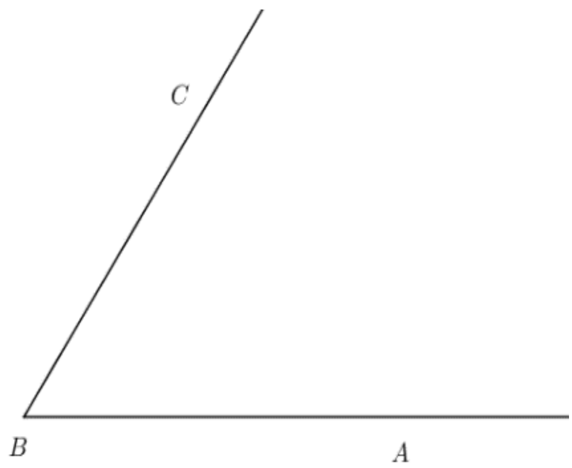


Рис. 2.42

Например, на рис. 2.38 углы не могут совпасть ни при каком наложении. Такие углы нельзя считать равными.

Если при наложении один угол составляет часть другого угла, то первый угол *меньше* второго, а второй *больше* первого.

Угол BOD на рис. 2.43 составляет часть угла BOA (он лежит внутри угла BOA), поэтому угол BOD меньше угла BOA и угол BOA больше угла BOD.

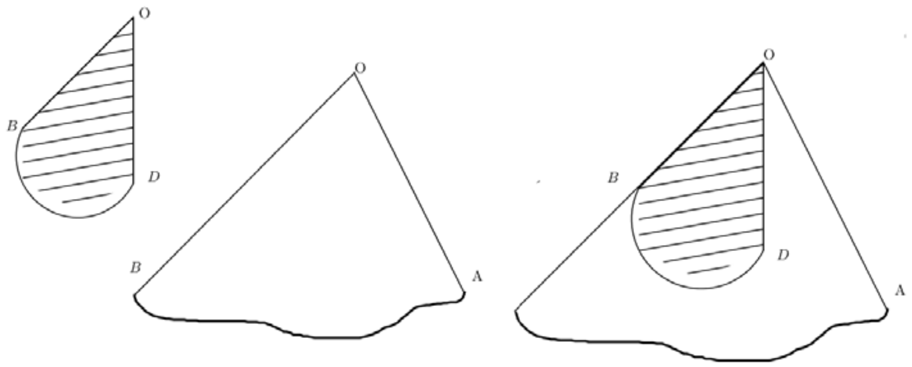


Рис. 2.43

Виды углов. Получим развернутый угол за несколько практических шагов, описанных ниже и изображенных на рис. 2.44. Возьмем два луча OA и OB, имеющие общее начало и одно и то же направление. Будем поворачивать луч OB против часовой стрелки (будто раскрывать веер). При своем движении луч OB будет оставлять след – угол AOB. Аналогично, как веер, раскрывается и показывается при этом все большая и большая часть плоскости (ткань, бумага). Продолжим движение луча OB. Луч будет охватывать все больший и больший угол, пока не закроет всю полуплоскость.

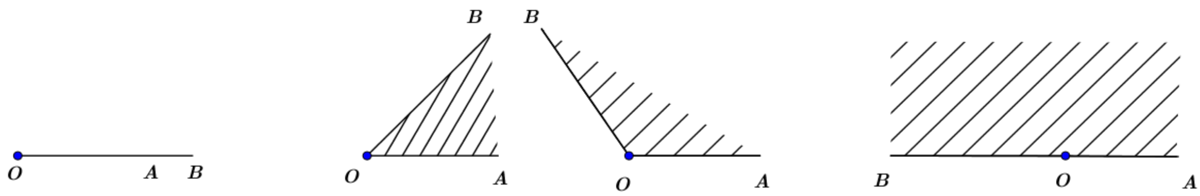


Рис. 2.44

Такой угол – всю полуплоскость – назовем *развернутым углом*. За вершину развернутого угла можно принять любую точку исходной прямой полуплоскости. Но развернутый угол – это не только полуплоскость, но и полуплоскость с выделенной на исходной прямой точкой.

Прямым углом называется угол, равный половине развернутого.

Какой угол образуют стрелки часов в три часа? В шесть часов? (Прямой. Развернутый)

Угол, меньший прямого, называется *острым углом*. Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется *тупым углом*. Например, на рис. 2.39 угол B и угол α – острые, а угол 1 – тупой.

Покажите, расставляя руки, острый, прямой, тупой и развернутый углы.

Можно для иллюстрации вида угла повернуться:

– вправо на прямой угол;

– влево на прямой угол;

– вправо на развернутый угол;

– влево на развернутый угол.

Из точки проведены два луча: горизонтальный и вертикальный. Какой угол образуют эти лучи? (Прямой) Покажите этот угол с помощью двух палочек (карандашей), с помощью своих рук.

На рис. 2.45 изображены два угла с общей вершиной и одной общей стороной. Такие углы называют *прилежащими*.

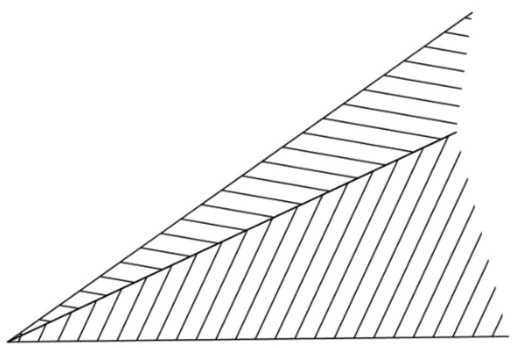


Рис. 2.45

Общие точки этих углов лежат только на их общей стороне. Других общих точек у этих углов нет.

Третий угол, который при этом получается, называют *суммой двух* данных *углов*.

Два прилежащих угла, составляющие в сумме развернутый угол (полуплоскость с выделенной точкой), называются *смежными*. Смежные углы изображены на рис. 2.41.

В тетради нарисуйте прямой, острый, тупой углы. Определите самостоятельно вид угла, смежного с каждым из нарисованных углов. (Прямой, тупой, острый)

Точка на прямой делит её на два луча. Такие два луча называют противоположными. Тогда две стороны смежных углов являются *противоположными* лучами, а две другие стороны совпадают, т. е. являются *общей* стороной.

Измерение углов. Градус. Транспортир. *Величиной угла* называется положительная скалярная величина, определенная для каждого угла так, что:

1) равные углы имеют равные величины;

2) если угол составлен из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей[9].

До сих пор углы мы сравнивали или наложением, или при помощи чертежного треугольника и могли ответить на вопрос: больше или меньше прямого угла данный угол.

Для измерения углов поступают так. Делят прямой угол на 90 равных углов. Один из таких углов – $\frac{1}{90}$ прямого угла – принимают за единицу измерения. Эту единицу измерения углов называют *градусом* и обозначают значком °. Тогда прямой угол содержит 90°.

Градус делится на 60 минут, а минута – на 60 секунд. Одну минуту обозначают $1'$, одну секунду – $1''$. Например, если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут $5°3'12''$. Для большей точности в измерении углов используют и доли секунды.

Для измерения углов (в градусах) есть специальный прибор – *транспортир*. Дуга окружности транспортира разделена на 180 равных частей. Транспортир изображен на рис. 2.46.

Рис. 2.46

Как построить угол с помощью транспортира? На листе бумаги проведем прямую KL (на которой будет одна из сторон угла), поставим на этой прямой точку O – вершину угла, центр транспортира совместим с этой точкой, отметим с помощью точки A нужное число градусов, проведем луч OA. Угол LOA построен.

Циферблат обычных часов разделен на 12 равных частей (12 часов) (рис. 2.47). Одно часовое деление циферблата соответствует 30°.

[9] Определение может быть дополнено пунктами о единице измерения и возможности измерения угла разными единицами (согласно требованиям аксиоматики скалярных величин).

Каждое часовое деление разделено на пять равных частей (на пять минутных делений). Всего в часовой шкале $5 \cdot 12 = 60$ минутных делений. Скольким градусам соответствует одно минутное деление циферблата часов? (6°)

Задания. 1. Какой угол составляют минутная и часовая стрелки в 4 часа после полудня? Вычислите этот угол. Проверьте расчеты непосредственным измерением. 2. Вычислите угол, который составляют минутная и часовая стрелки в 13 часов, 17 часов, 23 часа 30 минут. 3. На сколько градусов повернется минутная стрелка за 1 минуту, 8 минут, 12 минут, 15 минут, 25 минут, полчаса?

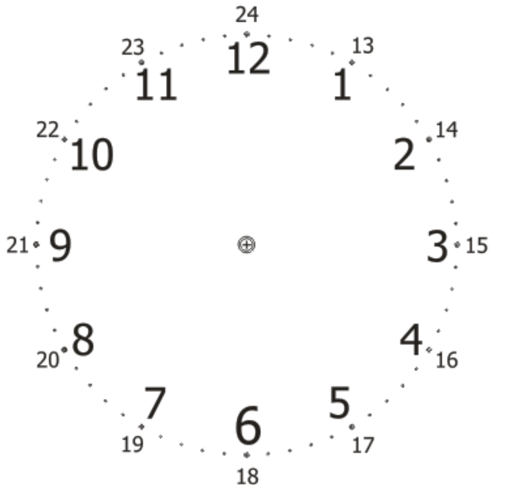


Рис. 2.47

4. Сумма смежных углов равна 180°. Если один из смежных углов равен 45°, то другой угол будет равен 135°. Убедитесь в этом при помощи непосредственного измерения.

5. Один из смежных углов в два раза больше другого. Найдите эти углы. (120 и 60°) Решение представлено на отрезках (рис. 2.48): $180°: 3 = 60°, 60° \cdot 2 = 120°$.

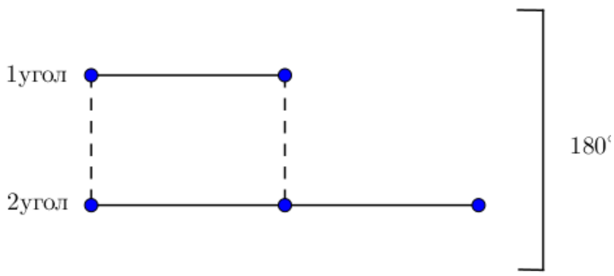


Рис. 2.48

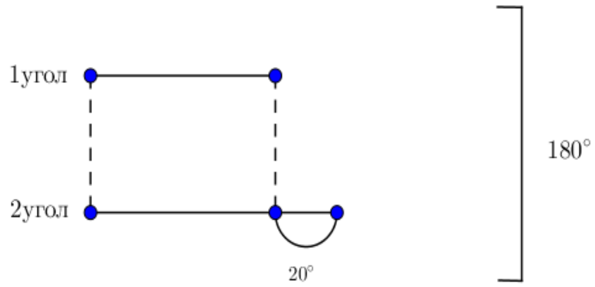


Рис. 2.49

6. Один из смежных углов на 20° больше другого. Найдите эти углы. (100 и 80°) Решение смоделировано на отрезках (рис. 2.49): $180° - 20° = 160°, 160°: 2 = 80°$.

2.7. Параллельные и перпендикулярные прямые

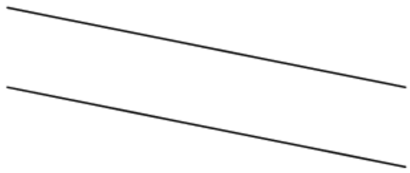


Рис. 2.50

Параллельность прямых и отрезков. *Параллельными* прямыми называют непересекающиеся прямые (рис. 2.50). Если продолжить в обе стороны противоположные стороны прямоугольника, то получим две непересекающиеся прямые, т. е. параллельные прямые.

Отрезки параллельных прямых также считаем параллельными.

Противоположные стороны прямоугольника попарно параллельны.

Параллельные прямые вычерчивают с помощью линейки и чертежного треугольника. Чтобы изобразить таким способом параллельные прямые, надо расположить линейку на листе, приставить треугольник к линейке одной из сторон прямого угла. Треугольник скользит вдоль линейки. При таком движении множество прямых, идущих вдоль второй стороны прямого угла треугольника, описывает класс параллельных между собой прямых.

Построение прямоугольников и квадратов. Определения, свойства и признаки прямоугольников и квадратов приведены в п. 2.4.

Прямоугольники и квадраты можно построить либо с помощью угольника, либо с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим оба способа построения (без доказательства).

1. Из точек A и B, лежащих на данной прямой, нужно в одну полуплоскость провести лучи так, чтобы получились прямые углы. Построенные лучи перпендикулярны заданной прямой. На луче, который выходит из точки A, отметим точку D. На луче, который выходит из точки B, отметим точку C на таком же расстоянии, что и D от A. Соединим точки D и C. Полученная фигура $ABCD$ – прямоугольник.

2. Даны два отрезка a и b. Проведём прямую l, отметим точку A, $A \in l$. На прямой l отложим отрезок AB, равный отрезку a: $AB = a, B \in l$. Из точки A восстановим перпендикуляр следующим образом: пусть окружность с центром A произвольного радиуса пересекает прямую l в двух точках K и M, отличных от точки B; окружность с центром K радиусом KM пересекает окружность с центром M радиусом KM в точках N и L. Точки N и L лежат по разные стороны от прямой l. Выпол-

ним построения в одной полуплоскости, например, в которой находится точка N. Рассуждения и алгоритм построения прямоугольника в другой полуплоскости, которой принадлежит точка L, проводятся аналогично. Соединим отрезком точки A и N. Перпендикуляр AN к прямой l построен, $AN \perp l$. На луче AN отложим отрезок AD, равный отрезку b: $AD = b, D \in AN$.

Пользуясь описанным алгоритмом построения перпендикуляра к прямой, восстановим перпендикуляры в точке B (в полуплоскость, где находится точка N) и в точке D (в полуплоскость, где находится точка B). Эти два перпендикуляра пересекутся в четвертой вершине прямоугольника – точке C. Прямоугольник $ABCD$ построен.

Взаимное положение двух прямых. Две прямые на плоскости могут пересекаться и не пересекаться. В случае пересечения прямые имеют одну общую точку, в случае отсутствия пересечения прямые не имеют общих точек и являются параллельными.

Если прямые находятся в пространстве:

– и имеют одну общую точку, то они пересекаются;

– имеют хотя бы две общие точки (а следовательно, и все точки будут общими), то прямые совпадают;

– не имеют общих точек, то эти прямые параллельные или скрещивающиеся (скрещивающиеся прямые, в отличие от параллельных, не лежат в одной плоскости).

В качестве упражнения для учащихся предлагается на примере моделей куба или пирамиды показать и назвать (используя буквы):

– всевозможные пары пересекающихся прямых и плоскости граней, которым принадлежат эти прямые;

– всевозможные пары скрещивающихся прямых;

– всевозможные пары параллельных прямых.

Перпендикулярные прямые. Две прямые, при пересечении которых образуются прямые углы, называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными). Такие прямые показаны на рис. 2.51. Если две прямые взаимно перпендикулярны, то каждая из них перпендикулярна другой.

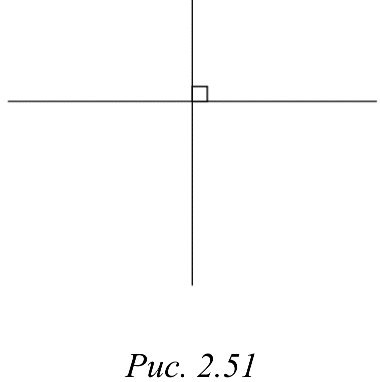


Рис. 2.51

Покажите на окружающих предметах пересекающиеся горизонтальную и вертикальную прямые.

Сколько можно провести прямых, перпендикулярных данной прямой? (Бесконечное множество) А сколько можно провести прямых через данную точку на данной прямой? (Одну)

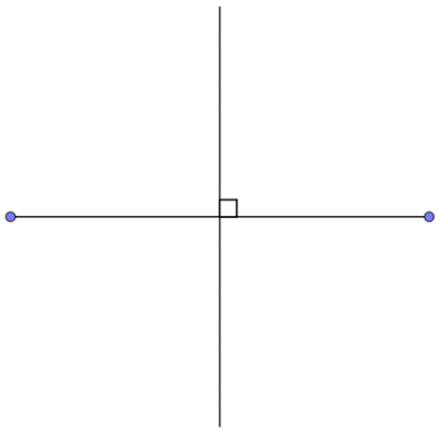


Рис. 2.52

Прямая, содержащая перпендикуляр, восстановленный из середины отрезка, называется *срединным перпендикуляром*. Срединный перпендикуляр – это не отрезок, а прямая. Срединный перпендикуляр отрезка построен на рис. 2.52.

Расстояние от точки до прямой измеряется по перпендикуляру, опущенному из данной точки к данной прямой.

Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны между собой (рис. 2.53).

Прямая, перпендикулярная к одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и к другой прямой (см. рис. 2.53).

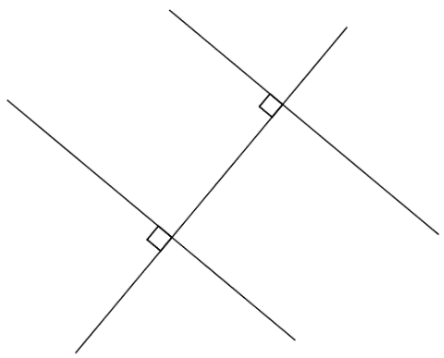


Рис. 2.53

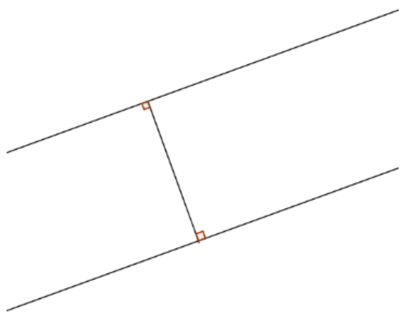


Рис. 2.54

Расстояние между двумя параллельными прямыми – это длина отрезка, перпендикулярного к данным прямым (так называемого *общего перпендикуляра* этих прямых), при этом концы отрезка лежат на данных прямых (рис. 2.54).

Часть плоскости, заключенную между двумя параллельными прямыми, называют *полосой*. Сами прямые называют *краями полосы*. Они принадлежат полосе.

Две параллельные прямые делят плоскость на три части: полосу и две полуплоскости. Указанные части имеют разные штриховки на рис. 2.55.

Интересно заметить, что одна точка делит прямую на два луча (две полупрямые), а одна прямая делит плоскость на две полуплоскости. Две точки делят прямую на три части: отрезок и два луча. Две параллельные прямые делят плоскость на три части: полосу и две полуплоскости.

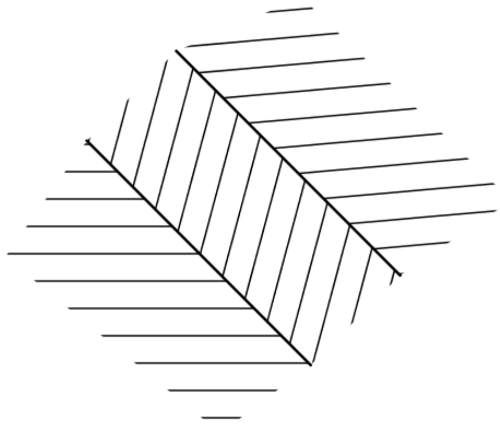


Рис. 2.55

Шириной полосы называют расстояние между ее краями – параллельными прямыми, ограничивающими полосу.

Если на плоскости край одной полосы пересекает край другой полосы, то полосы пересекаются.

Какая фигура получится при пересечении двух полос разной ширины? (Параллелограмм. См. рис. 2.56 там, где штриховка прошла дважды.) Одинаковой ширины? (Ромб) Две полосы пересекаются так, что край одной полосы перпендикулярен краю другой. Какая фигура получится в этом случае при пересечении полос разной ширины? (Прямоугольник) Одинаковой ширины? (Квадрат)

Понятия перпендикулярности прямых, расстояния от точки до прямой положены в основу одного из геометрических преобразований, которое называется симметрией. Рассмотрим этот вопрос подробно.

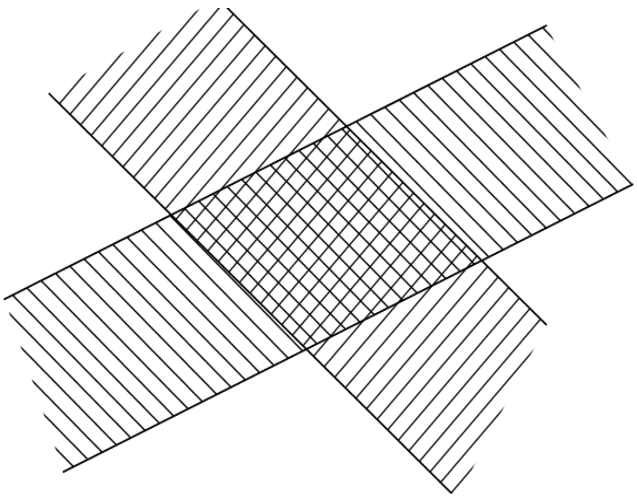


Рис. 2.56

2.8. Роль и место симметрии в геометрическом материале начальной школы

Теоретически связи (соответствия) между объектами множеств и практические алгоритмы сортировки различных таких связей исследованы в разделе «Бинарные соответствия и отношения» пособия [18]. В геометрии начальной школы соответствия также имеют место быть, и здесь особого внимания заслуживает вопрос о преобразованиях.

Преобразованием f множества X назовем бинарное соответствие $x \rightarrow f(x)$, которое каждой точке x фигуры X сопоставляет точку $f(x)$ фигуры $У$. При преобразовании f точка $f(x)$ называется *образом* точки x, точка x – *прообразом* точки $f(x)$.

Преобразования плоскости и пространства классифицируются по изменению двух характерных признаков: формы фигуры, размеров фигуры. Среди различных преобразований начальной геометрии наглядны и доступны только такие, которые сохраняют форму и размеры фигуры.

Движением фигуры называется такое её преобразование, которое сохраняет расстояния между любыми её точками, т. е. расстояние между двумя точками x_1 и x_2 фигуры равно расстоянию между их образами: $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$: $|y_1y_2| = |x_1x_2|$.

На практике можно убедиться, что через расстояния между точками, через длины соединяющих эти точки отрезков можно выразить любое геометрическое свойство фигуры.

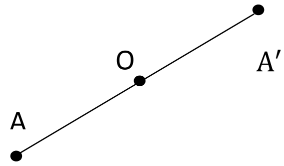
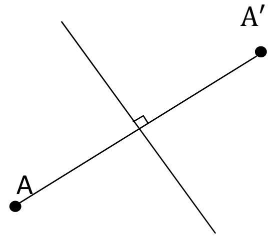
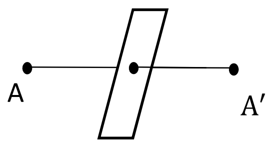
Остановимся только на одном из видов движения – *симметрии*. Понятие симметрии (в широком смысле) означает соответствие, неизменность, проявляемые при каких-либо изменениях.

Охарактеризуем основные виды симметрии (на плоскости и в пространстве) и укажем фигуры, обладающие симметрией конкретного вида.

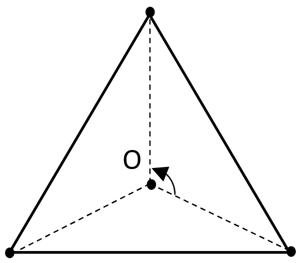
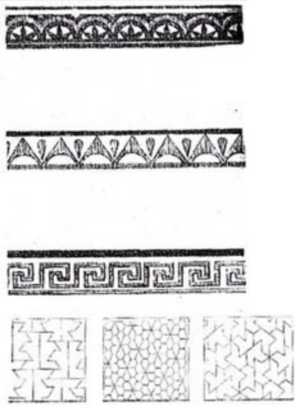
Фигура обладает симметрией, если существует такое (нетождественное) движение этой фигуры, при котором образом этой фигуры является она сама (иначе говоря, при котором она самосовмещается).

В соответствии с тем, каким видом является движение, самосовмещающее фигуру, говорят о центральной, осевой, поворотной, переносной, зеркальной симметрии фигуры (см. таблицу).

Виды симметрии

Вид симметрии, определение	Построение симметричных точек	Характерное свойство	Примеры фигур с элементами симметрии
Центральная – две точки симметричны относительно некоторого центра, если этот центр совпадает с серединой отрезка, соединяющего данные точки		Движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку	Круг, центр круга – центр симметрии Параллелограмм, точка пересечения диагоналей – центр симметрии
Осевая – две точки симметричны относительно некоторой прямой (оси), если они находятся на перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее		Движение плоскости, у которого множество неподвижных точек – прямая	Круг, диаметр круга – ось симметрии Правильный треугольник, три высоты – три оси симметрии Прямоугольник, две средние линии – две оси симметрии Ромб, диагонали ромба – две оси симметрии Квадрат, две средние линии и две диагонали – четыре оси симметрии
Зеркальная (относительно плоскости) – две точки симметричны относительно некоторой плоскости, если отрезок, соединяющий эти точки, перпендикулярен этой плоскости, а сами точки равноудалены от нее		Движение пространства, множество неподвижных точек которого есть плоскость	Правильная четырехугольная призма имеет пять плоскостей симметрии: три срединных сечения и два диагональных

Окончание

Вид симметрии, определение	Построение симметричных точек	Характерное свойство	Примеры фигур с элементами симметрии
Вращение, или **поворотная,** – одна точка получается из другой поворотом вокруг некоторого центра на данный угол. При этом указанные точки находятся на одной окружности, центр которой совпадает с центром поворота, и радиусы, проведенные к этим точкам, образуют данный угол. При этом задается направление поворота – по часовой стрелке или против нее. Центр поворота называется центром симметрии n-го порядка фигуры, если при повороте данной фигуры вокруг центра поворота на угол $\frac{360^{\circ}}{n}$ фигура совмещается сама с собой		На плоскости: движение плоскости, имеющее единственную неподвижную точку – центр симметрии n-го порядка. В пространстве: движение пространства, при этом множеством неподвижных точек будет прямая, вокруг которой осуществляется поворот	Правильный треугольник имеет центр симметрии 3-го порядка Квадрат имеет центр симметрии 4-го порядка Снежинка имеет центр симметрии 6-го порядка
Переносная, или **параллельный перенос,** – движение плоскости, которое перемещает точки плоскости в одном и том же направлении на одну и ту же величину		Присуще лишь неограниченным фигурам	Бордюр – это полоса между двумя параллельными прямыми, заполненная равными друг другу фигурами Паркет – это замощение (покрытие) плоскости равными непересекающимися фигурами

В начальной школе много заданий по рисованию симметричных изображений: «Продолжи орнамент», «Дорисуй вторую половину (какого-либо объекта)», «Найди правильное изображение предмета в зеркале». При изучении геометрических фигур симметрия выручает: «Сложи фигуру (круг, овал, квадрат, прямоугольник, треугольник, трапецию) пополам. Полученную фигуру ещё раз сложи пополам». Благодаря наглядности и манипуляциям-складываниям из бумаги ребенок быстро и легко запоминает свойства фигур. Симметрии присуща закономерность. Достаточно уловить относительно чего: точки, прямой, плоскости или их комбинаций – наблюдается повтор, и задача становится разрешимой. Исследовательские задания-наблюдения: «Отметь особенности, рассматривая фото бабочки, снежинки, морской звезды, человека, данного архитектурного сооружения», «Найди в окружающем мире 10 симметричных объектов» – формируют умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, распознавать и изображать геометрические фигуры. Данные задания не только расширяют кругозор, но и приобщают ребенка к искусству, художественному творчеству, воспитывают и формируют эстетически утонченную натуру.

Греческое слово «симметрия» означает согласованность размеров, соразмерность. Геометрические тела, имеющие плоскость симметрии, чрезвычайно распространены в природе и обыденной жизни. Тело человека или животного имеет плоскость симметрии, разделяющую его на правую и левую части. Однако указанные части (левую и правую) нельзя совместить друг с другом никакими перемещениями и поворотами в пространстве. Так, кисти правой и левой рук симметричны, но совместить их нельзя, что можно видеть хотя бы из того, что одна перчатка не может подходить к правой и левой руке. Взятые по отдельности левая и правая части зеркально асимметричны. Пара же «левое – правое» – это объект и его зеркальный двойник при условии, что сам объект зеркально асимметричен. Большое число предметов домашнего обихода имеет плоскость симметрии: стул, обеденный стол, книжный шкаф, диван, пр. Некоторые предметы, как например обеденный стол, имеют даже не одну, а две плоскости симметрии, кухонный табурет – четыре плоскости симметрии.

Обычно, рассматривая предмет, имеющий плоскость симметрии, мы стремимся занять по отношению к нему такое положение, чтобы плоскость симметрии нашего тела или по крайней мере нашей головы совпала с плоскостью симметрии самого предмета. В этом случае симметричная форма предмета становится особенно заметной.

Окружающий нас мир во многом симметричен: симметричны снежинки и кристаллы, цветы и листья, тела насекомых, птиц, морских обитателей и т. д. И все созданное человеком тоже чаще всего симметрично: архитектурные сооружения, мебель, посуда, автомобили, самолеты и т. д. Симметрию мы находим и в музыке (в мелодиях и ритмах), и в поэзии (в размерах и рифмах), и в спортивных играх.

В геометрии, изучая тот или иной класс фигур, чаще всего мы запоминаем подробно среди фигур класса наиболее симметричные: например равнобедренные и равносторонние треугольники – в классе треугольников, правильные пирамиды и правильные призмы – среди пирамид и призм.

Одна и та же фигура может обладать несколькими видами симметрии. Например, правильный треугольник обладает тремя осевыми симметриями и поворотными симметриями на 120 и 240°.

Изучение симметрии фигур, объектов, свойства симметрии как закономерности в различных научных областях – вопрос, заслуживающий особого внимания, актуальный и по сей день. В математике решению задач методом симметрии отведено значительное место. Этим методом решаются многие геометрические задачи на построение, на доказательство. Применим указанный метод к решению некоторых задач в гл. 3 («Элементы конструктивной геометрии»). Часть задач о нахождении максимальных или минимальных значений некоторой величины красиво решается именно методом симметрии.

2.9. Объём

Понятие об *объёме как о величине* дается по аналогии с понятием о площади. Можно сравнивать вместимость различных сосудов, наполняя один из них водой и переливая её в другие сосуды или пересыпая определённое количество песка в коробки различных размеров. Объёмы некоторых предметов можно сравнивать. Переливая жидкость определённого объёма в сосуды различной формы (банка, бутылка, графин, стакан), можно показать, что хотя форма изменилась, но объём остался прежним.

Сравним объёмы двух параллелепипедов при помощи вложения одного тела (коробки) в другое. Далее переходим к сравнению объёмов двух равновеликих (равных по объёму) тел. Можно взять две открытые коробки (передняя и верхняя грани либо отсутствуют, либо их можно отбросить) равновеликие, но заметно отличающиеся линейными размерами рёбер, и поставить вопрос о том, какая из них имеет большую вместимость.

Напомним, что у каждой величины свои единицы измерения: длина измеряется в единицах длины, площадь – в единицах площади. Для *измерения объема* нужны новые единицы, которыми можно заполнить фигуру, – кубические единицы измерения объёма (кубические мерки – единичные кубы).

Попытка решить вопрос вложением одного предмета в другой оказывается безрезультатной. Приходим к выводу, что для сравнения объёмов фигур можно наполнить тела кубическими единицами и затем подсчитать количество полученных единичных кубиков.

Учащиеся, пользуясь заранее изготовленными коробками, измеряют их объём, заполняя его единичными кубиками. Коробки должны быть изготовлены так, чтобы в них уложилось целое количество кубических единиц. Полезно провести непосредственное измерение объёма также и нестандартными единицами, например стаканами, кружками.

Следующий этап – разбиение целого на равные части: *разрезание* предмета *на кубические единицы*. Учитель может продемонстрировать такой процесс на экране, показав презентацию (со слайдами рис. 2.57 – 2.60), или с набором кубиков. Возьмем прямоугольный параллелепипед, например набор магнитных кубиков, и «разрежем» его на слои: один слой – на бруски, один брусок – на кубические единицы (отдельные кубики). Затем из полученных элементов восстановим параллелепипед и подсчитаем количество кубических единиц (см. рис. 2.57).

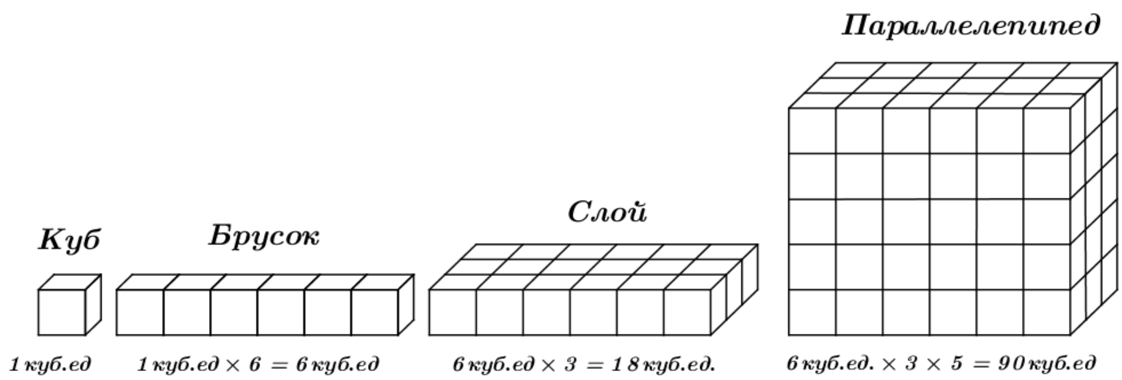
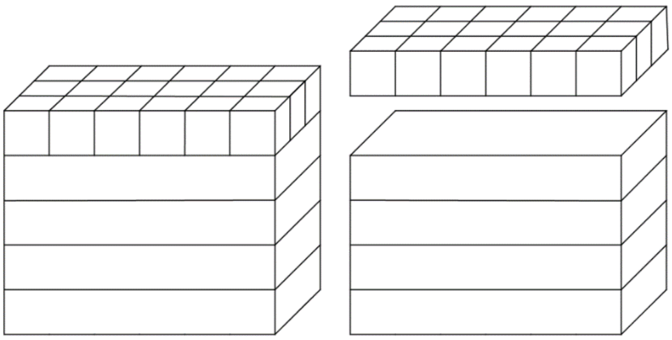


Рис. 2.57

Желательно, чтобы ученики, пользуясь набором кубических единиц, брусков и слоев, сложили из кубических единиц брусок, из брусков – слой, из слоев – прямоугольный параллелепипед.



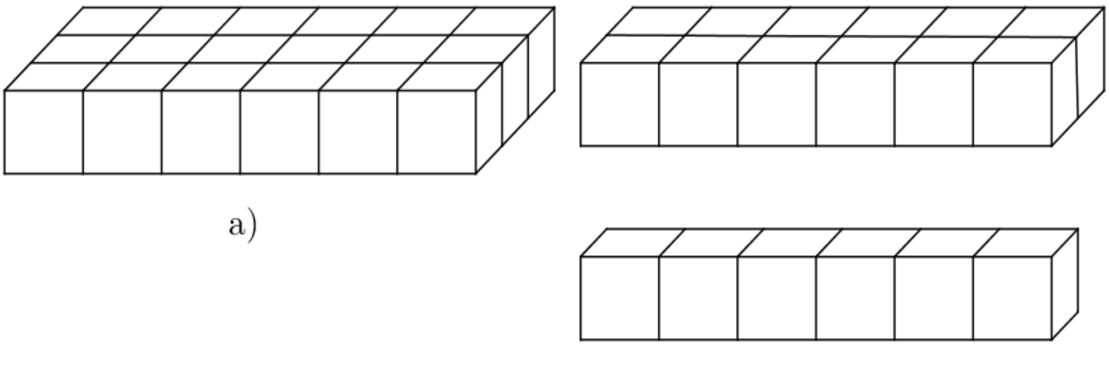
а) б)

Рис. 2.58

Покажем разрезание параллелепипеда на чертежах. На рис. 2.58, *а* выделен верхний слой. На рис. 2.58, *б* показан тот же параллелепипед, но с одним отделенным слоем.

По рис. 2.58 легко установить число слоёв и связать его с высотой параллелепипеда.

Затем берём один слой (рис. 2.59, *а*) и отделяем от него один брусок (рис. 2.59, *б*).



а)

б)

Рис. 2.59

На рис. 2.59 видно число брусков в одном слое, и это надо связать с шириной основания параллелепипеда.

Далее берем один брусок (рис. 2.60, *а*) и отделяем один единичный кубик (рис. 2.60 *б*, *в*), установив связь количества кубических единиц в одном бруске с длиной основания параллелепипеда. Теперь уже нетрудно восстановить ход рассуждений в обратном порядке и определить количество кубических единиц в параллелепипеде путем перехода от бруска к слою и от одного слоя к числу слоев.

Итак, подготовительная работа закончена. Переходим к выводу *способа для вычисления объёма*. Стоит подвергнуть критике способ заполнения тела кубическими единицами как неудобный, а зачастую и практически невыполнимый. (Но именно он лежит в основе теории при конструктивном определении объёма. Кроме того, он аналогичен работе с площадью.)

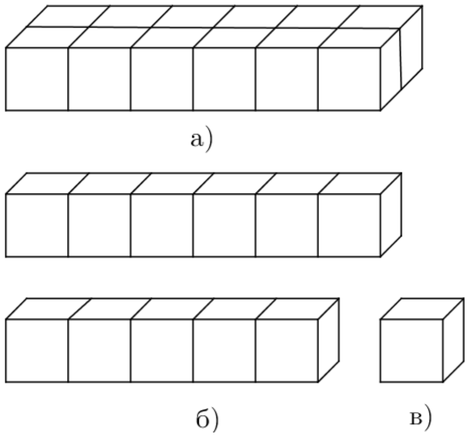


Рис. 2.60

Объяснение происходит примерно так. Учитель заполняет открытую коробку кубическими единицами. Затем снимаются все слои, кроме нижнего, а в одном из углов оставляется один столбик, при помощи которого можно подсчитать количество слоев.

В беседе с детьми учитель подводит их к выводу, что можно не оставлять столбики кубиков, а достаточно измерить высоту тела, чтобы узнать, сколько будет слоев (рис. 2.61). Затем учитель отмечает, что измерение ширины укажет число брусков, а измерение длины – число кубических единиц в бруске.

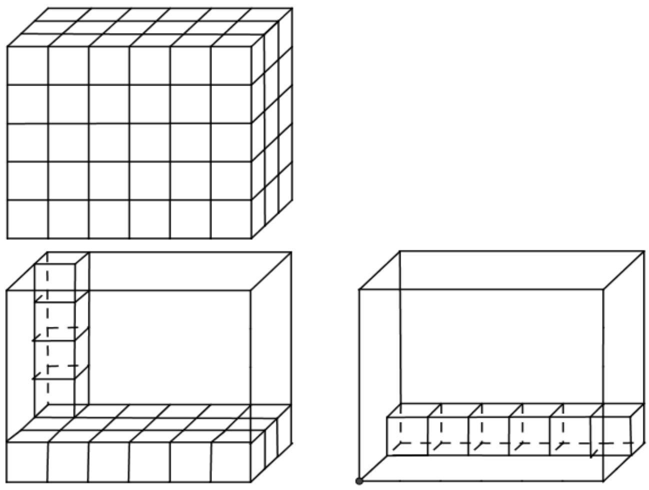


Рис. 2.61

В результате формулируется способ вычисления объёма прямоугольного параллелепипеда: *чтобы вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, можно измерить его длину, ширину и высоту одной и той же единицей длины и полученные числа перемножить. В произведении имеем* *число, выражающее в кубических единицах объем прямоугольного параллелепипеда.*

Принятая в начальной школе запись $6\,\text{куб. ед.}\ \cdot 3\ \cdot 5 = 90\,\text{куб. ед.}$ вполне согласуется со всем ходом рассуждений по выводу способа вычисления объёма. Не следует спешить с требованием заучить способ. Пусть ученики некоторое время объясняют, что измерить длину нужно для того, чтобы узнать, сколько кубических единиц содержится в одном бруске, ширину – чтобы узнать, сколько брусков в одном слое, высоту – чтобы узнать количество слоёв; что полученные числа надо перемножить для вычисления объёма; что результат выразится в кубических единицах (единицах объёма).

Через некоторое время можно будет предложить ученикам выучить способ вычисления объёма. После этого можно показать им другую форму записи для вычисления объема: $6 \cdot 3 \cdot 5\ =\ 90$ (куб. ед.) или $6\,\text{ед.}\ \cdot 3\,\text{ед.}\ \cdot 5\,\text{ед.} = 90\,\text{куб. ед.}$ Вычисление объёма куба не встретит затруднений, если тщательно был проработан вывод для вычисления объёма параллелепипеда. Когда ученики изучат таблицы линейных, квадратных и кубических мер, следует сопоставить эти меры и их единичные отношения с помощью наглядных пособий и соответствующих таблиц.

При изучении фигур и их объёмов[10] учитываем следующее: изменив положение прямоугольного параллелепипеда так, что ширина, длина и высота поменялись местами, можно показать независимость объёма от положения прямоугольного параллелепипеда в пространстве.

Весьма широки практические приложения, связанные с задачами на вычисление объёмов. Важное значение имеет вычисление объёмов на основе измерений, выполненных учащимися как в классе, так и вне класса, дома. Среди практических задач могут быть и задачи

[10] Поясним, что рассуждения об объёме проводим не для всяких фигур, а лишь для тех тел, для которых указанный способ вычисления объёма подходит (равно как и в случае с площадью многоугольной фигуры).

на вычисление боковой и полной поверхности куба и параллелепипеда. Развитию пространственного мышления способствуют задачи и упражнения занимательного характера, проводимые во внеклассной и классной работе.

В результате изучения величины «объем» ученики должны уметь выделять прямоугольный параллелепипед и куб среди других фигур, знать их элементы, уметь указать сходство и различие этих фигур, находить их в окружающей обстановке; уметь рисовать куб и параллелепипед на клетчатой и нелинованной бумаге; уметь вычислять объём этих фигур и понимать роль каждого из трёх измерений при вычислении объёма; иметь понятие об объёме как о величине, отличной от длины и площади, и конкретные представления о мерах объёма и их соотношении.

Теперь проверим, что величина «объем» удовлетворяет всем требованиям положительных скалярных величин. Действительно:

1) среди множества всех фигур в пространстве можно выбрать фигуру e – единичный куб (рис. 2.62) – в качестве единицы измерения так, что мера этой фигуры будет равна единице: $m(e) = 1$;

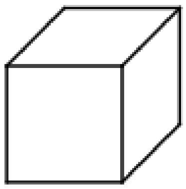


Рис. 2.62

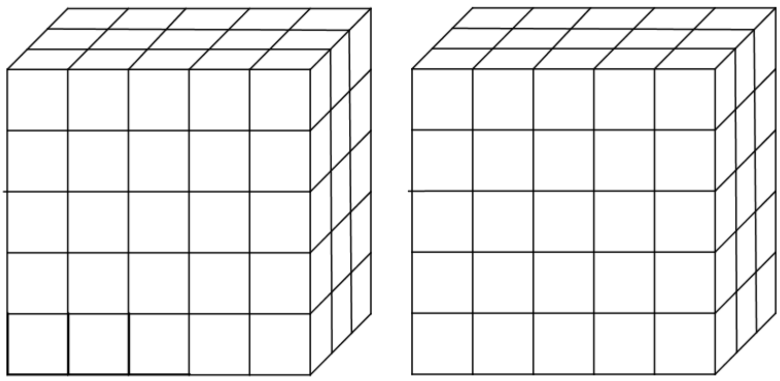


Рис. 2.63

2) равные фигуры (рис. 2.63) имеют равные объемы:

$F_1 = F_2 \Leftrightarrow m(F_1) = m(F_2)$;

3) объем разбитой на части фигуры (рис. 2.64) находится как сумма объемов частей, составляющих фигуру:

$F = F_1 + F_2 \Rightarrow m(F) = m(F_1) + m(F_2)$;

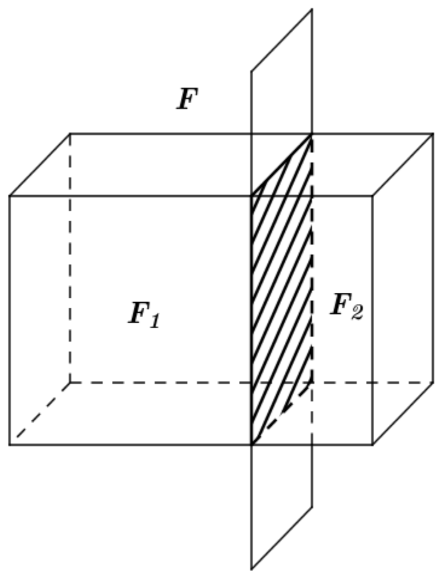


Рис. 2.64

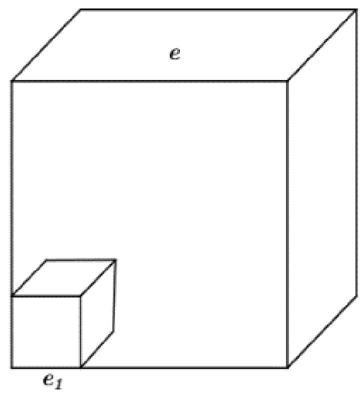


Рис. 2.65

4) в множестве фигур пространства всегда можно выбрать фигуру e_1 в качестве новой единицы измерения (рис. 2.65), т. е. всегда найдется положительное действительное число k такое, что мера e_1 при первоначально выбранной единице e будет равна k: $e_1 = ke$.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Общие аксиомы конструктивной геометрии

Определение. Фигурой называют любую совокупность точек (содержащую по крайней мере одну точку).

Например, фигурами являются: точка, пара точек, прямая (рассматриваемая как совокупность принадлежащих ей точек), пара параллельных прямых, отрезок (фигура, состоящая из двух точек и всех точек прямой, лежащих между ними), интервал или открытый отрезок (совокупность всех точек, лежащих между двумя данными точками прямой), луч (фигура, состоящая из некоторой точки прямой и всех точек этой прямой, расположенных по одну сторону от этой точки), окружность (совокупность всех точек плоскости, отстоящих на данное расстояние от некоторой точки этой плоскости), круг (совокупность всех точек плоскости, расстояния до которых от данной в этой плоскости точки не превышают длины данного отрезка).

Определение. Одна фигура называется частью другой фигуры, если каждая точка первой фигуры принадлежит второй фигуре.

Например, частью прямой будет любой отрезок, любой луч, лежащие на этой прямой, точка на этой прямой, сама прямая.

Определение. Объединением двух или нескольких фигур называется совокупность всех точек, принадлежащих хотя бы одной из этих фигур.

Определение. Пересечением, или общей частью двух или нескольких фигур, называется совокупность всех точек, которые являются общими для этих фигур.

Определение. Разностью двух фигур называется совокупность всех таких точек первой фигуры, которые не принадлежат второй фигуре.

Может оказаться, что пересечение (или разность) двух фигур не содержит ни одной точки. В этом случае говорят, что пересечение (или соответственно разность) данных фигур есть *пустое множество* точек. Например, пересечение прямой с окружностью будет пустым множеством, если расстояние от центра окружности до прямой окажется больше радиуса этой окружности; разность между интервалом прямой и всей прямой есть пустое множество.

Определение. Раздел геометрии, в котором изучаются геометрические построения, называется **к о н с т р у к т и в н о й г е о м е т р и е й**. Основное понятие конструктивной геометрии – «построить геометрическую фигуру».

Сформулируем *общие аксиомы конструктивной геометрии*.

Если о какой-либо фигуре сказано, что она дана, то подразумевается, что эта фигура уже изображена, начерчена, т. е. построена.

AI. Каждая данная фигура построена.

AII. Если построены две (или более) фигуры, то построено и объединение этих фигур.

AIII. Если построены две фигуры, то можно установить, является ли их разность пустым множеством или нет.

AIV. Если разность двух построенных фигур не является пустым множеством, то эта разность построена.

AV. Если две фигуры построены, то можно установить, является ли их пересечение пустым множеством или нет.

AVI. Если пересечение двух построенных фигур не пусто, то оно построено.

AVII. Можно построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют.

AVIII. Можно построить точку, заведомо принадлежащую построенной фигуре.

AIX. Можно построить точку, заведомо не принадлежащую построенной фигуре.

3.2. Инструменты геометрических построений

Для конструктивной геометрии необходимо располагать точным и для математических целей полным описанием того или иного инструмента. Такое описание даётся в виде аксиом. Эти аксиомы в абстрактной математической форме выражают те свойства реальных чертежных инструментов, которые используются для геометрических построений.

В начальной геометрии рассматриваются только такие построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки. Сформулируем соответствующие аксиомы.

А. *Аксиома линейки.* Линейка позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить отрезок, соединяющий две построенные точки;

б) построить прямую, проходящую через две построенные точки;

в) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку.

Б. *Аксиома циркуля*. Циркуль позволяет выполнить следующие геометрические построения:

а) построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы);

б) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг.

Циркуль и линейка позволяют выполнить следующие *основные построения:*

1) построить отрезок, соединяющий две построенные точки (акс. А, а);

2) построить прямую, проходящую через две построенные точки (акс. А, б);

3) построить луч, исходящий из построенной точки и проходящий через другую построенную точку (акс. А, в);

4) построить окружность, если построены центр окружности и отрезок, равный радиусу окружности (или его концы) (акс. Б, а);

5) построить любую из двух дополнительных дуг окружности, если построены центр окружности и концы этих дуг (акс. Б, б);

6) построить любое конечное число общих точек двух построенных фигур, если такие точки существуют (акс. AVII);

7) построить точку, принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. AVIII);

8) построить точку, заведомо не принадлежащую какой-либо построенной фигуре (акс. AIX).

3.3. Задача на построение

Задача на построение состоит в том, что требуется построить заранее указанными инструментами некоторую фигуру, если дана некоторая другая фигура и определены некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данной фигуры.

Определение. Каждая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, называется решением этой задачи.

Найти решение задачи на построение – значит свести её к конечному числу основных построений, т. е. указать конечную последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура будет считаться построенной в силу принятых аксиом конструктивной геометрии.

Решить задачу на построение – значит найти все её решения.

Задача считается решённой, если:

1) построено некоторое число неравных между собой фигур Φ_1, Φ_2, …, Φ_n, удовлетворяющих условиям задачи;

2) доказано, что всякая фигура, удовлетворяющая условиям задачи, равна одной из построенных фигур.

При этом считается, что задача имеет n различных решений.

Если условие задачи предусматривает определённое расположение искомой фигуры относительно какой-либо данной фигуры, то полное решение состоит в построении всех фигур, удовлетворяющих условию задачи (если такие фигуры существуют в конечном числе). При этом даже равные фигуры, но по-разному расположенные относительно данных фигур, рассматриваются как различные решения данной задачи.

При решении конструктивных задач необходимо пользоваться следующей схемой решения, состоящей из четырёх этапов:

1) анализ;
2) построение;
3) доказательство;
4) исследование.

Анализ. Цель анализа состоит в установлении таких зависимостей между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур, которые позволили бы построить искомую фигуру. Это достигается с помощью построения чертежа-наброска, изображающего данные и искомые элементы примерно в том расположении, как это требуется по условию задачи.

На чертеже следует *выделить данные* элементы и важнейшие *искомые* элементы.

Построение. Данный этап решения состоит в том, чтобы указать последовательность основных построений, которые достаточно провести, чтобы искомая фигура была построена.

Построение обычно сопровождается графическим оформлением каждого шага с помощью инструментов, принятых для построения.

Доказательство. Имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем поставленным в задаче условиям.

Исследование. При построении обычно ограничиваются отысканием одного какого-либо решения, причём предполагается, что все шаги построения действительно выполнимы. Для полного решения задачи нужно выяснить ещё следующие вопросы:

1) всегда ли (т. е. при любом ли выборе данных) можно выполнить построения избранным способом;
2) можно ли и как построить искомую фигуру, если избранный способ нельзя применить;
3) сколько решений имеет задача при каждом возможном выборе данных.

Рассмотрение всех этих вопросов и составляет исследование. Таким образом, оно имеет целью установить условия разрешимости и определить число решений. При этом разными считаются решения, дающие неравные фигуры (или если и равные, то различно расположенные относительно фигуры, с которой связывалось построение).

3.4. Основные задачи на построение

Существует ряд простейших геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Называют их обычно *элементарными*, или основными, *геометрическими задачами* на построение. К числу элементарных задач чаще всего относят следующие:

1) построить отрезок, равный данному;
2) построить угол, равный данному;
3) разделить отрезок пополам;
4) разделить угол пополам;
5) через точку на прямой провести перпендикуляр к этой прямой;

6) из точки опустить перпендикуляр на прямую;
7) через точку провести прямую, параллельную данной;
8) разделить отрезок на *n* равных отрезков.

Составим подробные решения основных задач на построение с помощью циркуля и линейки. Этими решениями без дополнительных разъяснений можно пользоваться в дальнейшем при решении других задач.

1. Построить отрезок AB, равный данному отрезку a (рис. 3.1).

1) l – произвольная прямая;
2) $A \in l$;
3) $|AB| = a$;
4) AB – искомый.

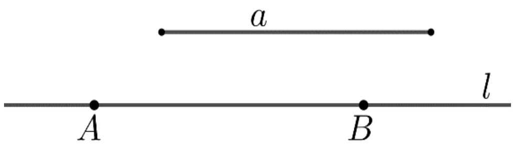


Рис. 3.1

2. Построить угол $\angle ABC$, равный данному углу α (рис. 3.2).

1) l – произвольная прямая;
2) $B \in l$;
3) окр. (O, r);
4) окр. (B, r);
5) $|KM| = |AC|$;
6) AB;
7) $\angle ABC = \alpha$;
8) $\angle ABC$ – искомый.

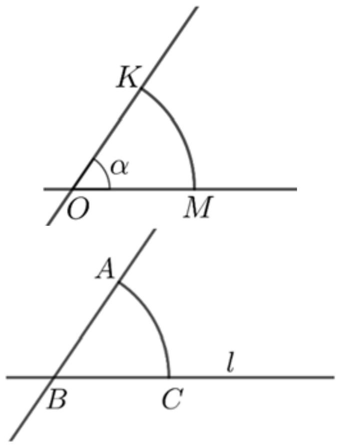


Рис. 3.2

3. Разделить отрезок AB пополам (построить середину отрезка AB) (рис. 3.3).

1) окр. (A, r);
2) окр. (B, r);
3) окр. $(A, r) \cap$ окр. $(B, r) = MN$;
4) $MN \cap AB = C$;
5) C – искомая.

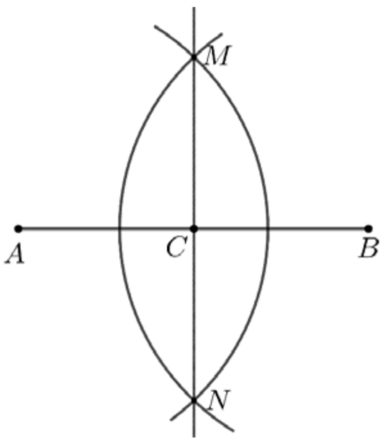


Рис. 3.3

4. Разделить угол $\angle ABC$ пополам (построить биссектрису данного угла $\angle ABC$) (рис. 3.4).

1) окр. (B, r);

2) окр. $(B, r) \cap \angle \alpha = \{A, C\}$;

3) окр. $(A, r) \cap$ окр. $(C, r) = D$;

4) BD – искомая.

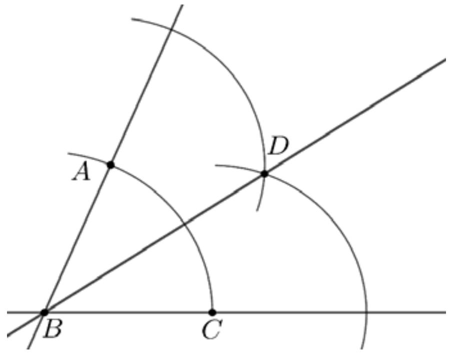


Рис. 3.4

5. Через точку A на прямой a провести перпендикуляр к этой прямой (рис. 3.5).

1) окр. (A, r);

2) окр. $(A, r) \cap a = \{B, C\}$;

3) окр. $(B, R) \cap$ окр.$(C, R) =$
$= \{M, K\}$;

4) $MK \perp BC$;

5) MK – искомый.

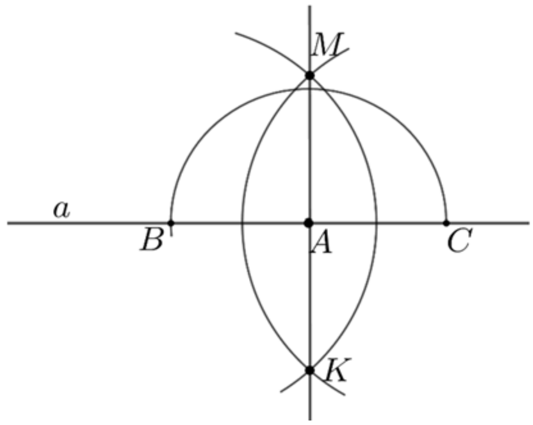


Рис. 3.5

6. Из точки A опустить перпендикуляр на прямую a (рис. 3.6).

1) окр. (A, R);

2) окр. $(A, R) \cap a = \{B, C\}$;

3) окр. $(B, r) \cap$ окр. $(C, r) =$
$= \{M, K\}$;

4) $MK \perp BC$;

5) MK – искомый.

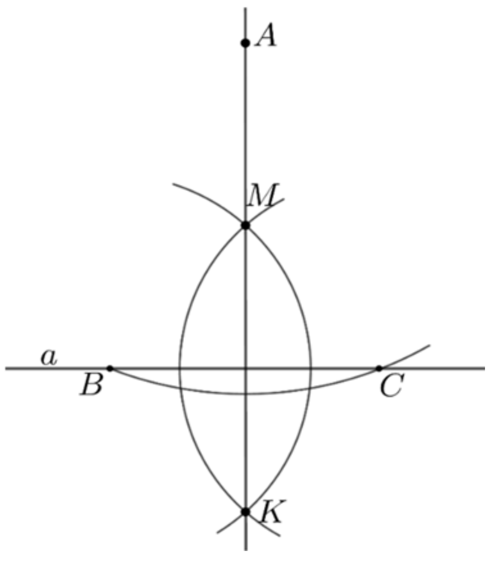


Рис. 3.6

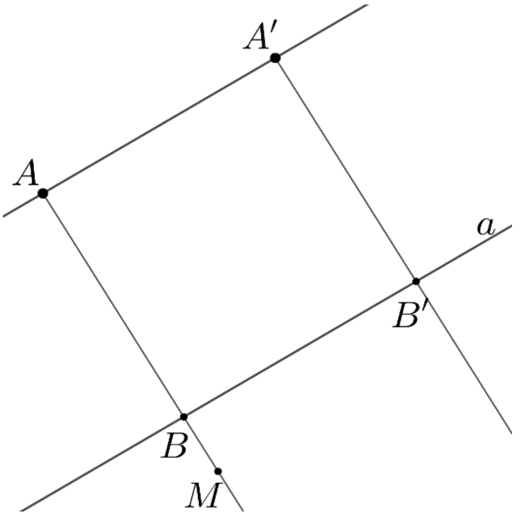


Рис. 3.7

7. Через точку A провести прямую, параллельную данной прямой a (рис. 3.7).

1) $AM \perp a$ (см. построение 6);

2) $AM \cap a = B$, $\rho(A, a) =$ $= |AB|$;

3) $|BB'| = |AB|, B' \in a$;

4) $A'B' \perp a$ (см. построение 5),
$A' \wedge A \in$ одной полуплоскости от прямой a;

5) $AA' \parallel a$;

6) AA' – искомая.

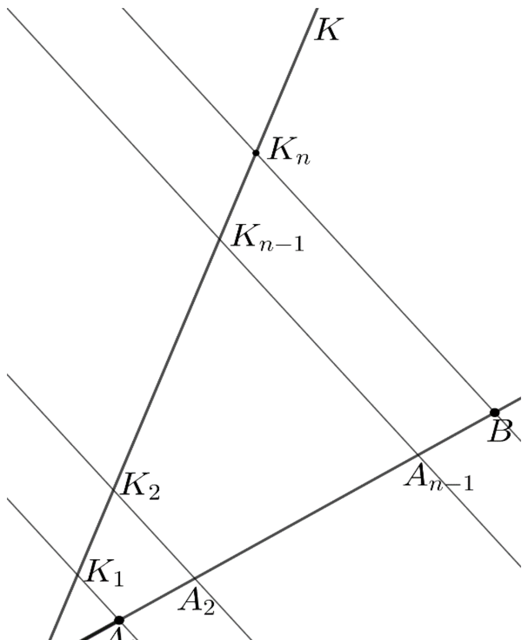


Рис. 3.8

8. Разделить отрезок AB на n равных отрезков (найти n-ю часть отрезка AB) (рис. 3.8).

1) $AK, K \notin AB$;

2) $AK_1 = K_1K_2 = \dots =$ $= K_{n-1}K_n, K_1, K_2, \dots, K_{n-1}, K_n \in AK$;

3) K_nB;

4) $K_{n-1}A_{n-1} \parallel K_nB$, $A_{n-1} \in AB$;

5) $K_{n-2}A_{n-2} \parallel K_nB$, … , $K_3A_3 \parallel K_nB$;

6) $K_2A_2 \parallel K_nB, A_2 \in AB$;

7) $K_1A_1 \parallel K_nB, A_1 \in AB$;

8) $AA_1 = A_1A_2 = \dots =$ $= A_{n-1}B$;

9) AA_1 – искомый.

При решении задач на построение чаще всего используют *три основных метода:*

– метод геометрических мест точек (ГМТ), или метод пересечений;
– алгебраический метод;
– метод геометрических преобразований.

Ниже рассмотрим каждый из этих методов.

Приведём пример задачи и её решения.

Задача. Построить параллелограмм по основанию a, высоте h_a и одной из диагоналей d [8] (рис. 3.9).

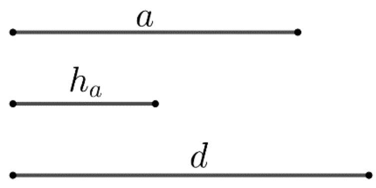


Рис. 3.9

Согласно условию, данными являются отрезки, представляющие основание, высоту и диагональ параллелограмма. Все эти фигуры считаются уже построенными (по AI).

Анализ. Выполним чертёж-иллюстрацию (рис. 3.10), считая, что искомый параллелограмм $ABCD$ уже построен. Отметим на чертеже данные элементы: $BC = a$, $BH = h_a$, $BD = d$.

Установим связи и зависимости между элементами параллелограмма. Отметим, что противоположные стороны AD и BC лежат на параллельных прямых, расстояние между которыми равно высоте h_a, поэтому можно построить треугольник ABD и затем достроить его до параллелограмма $ABCD$. Получим следующий алгоритм построения искомой фигуры:

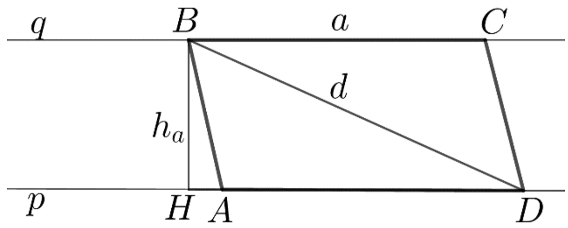


Рис. 3.10

1) строим параллельные прямые p и q на расстоянии h_a друг от друга (см. построение 7);
2) на прямой p откладываем отрезок $AD = a$;
3) из точки D как из центра проводим окружность радиусом d и находим точку B её пересечения с прямой q;
4) на прямой q от точки B откладываем отрезок $BC = a$;
5) строим отрезки AB и CD.

Построение. Все этапы алгоритма построения выполняем циркулем и линейкой непосредственно на чертеже с использованием заданных элементов (рис. 3.11).

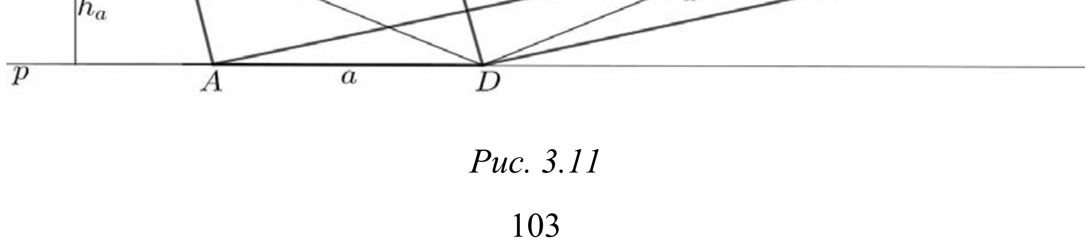


Рис. 3.11

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$. Его противоположные стороны AD и BC параллельны, так как лежат на параллельных прямых p и q. Эти же стороны равны по построению: $AD = BC = a$. Значит, $ABCD$ – параллелограмм, у которого $AD = a$, $BD = d$, а высота h_a, так как расстояние между параллельными прямыми p и q равно h_a (по построению). Следовательно, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

Исследование. Проверим возможность построения параллелограмма $ABCD$ непосредственно по шагам алгоритма построения.

1. Параллельные прямые p и q на расстоянии h_a всегда можно построить, и притом единственным образом.

2. Построить отрезок $AD = a$ на прямой p также можно, и притом единственным образом.

3. Окружность, проведённая из центра D радиусом d, будет иметь общие точки с прямой q только тогда, когда $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то получится одна общая точка B, если же $d > h_a$ – две общие точки B и B'.

4. Это построение всегда однозначно выполнимо.

5. Эти построения всегда однозначно выполнимы.

Таким образом, решение возможно, если $d \geq h_a$. Если $d = h_a$, то задача имеет единственное решение, если же $d > h_a$ – два решения.

3.5. Основные множества точек на плоскости, их построение и использование при решении задач на построение

Определение. Геометрическим местом точек (ГМТ) является фигура, заданная путём указания свойства, которым обладают все точки этой фигуры и только они.

Определение. Свойство, при помощи которого описывается то или иное геометрическое место точек, называется характеристическим свойством точек этого геометрического места.

Геометрическое место точек может быть:

– линией (совокупностью нескольких линий);

– конечной совокупностью точек;

– областью плоскости.

Простейшие ГМТ на плоскости следующие.

1. Геометрическое место точек (плоскости), находящихся на данном расстоянии r от некоторой заданной точки O (этой плоскости), есть по определению окружность радиусом r с центром в точке O.

2. Геометрическое место точек (плоскости), равноудалённых от двух данных (в этой плоскости) точек, есть прямая, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к этому отрезку. Это ГМТ называют *симметралью*, или *медиатрисой*, данных точек (рис. 3.12).

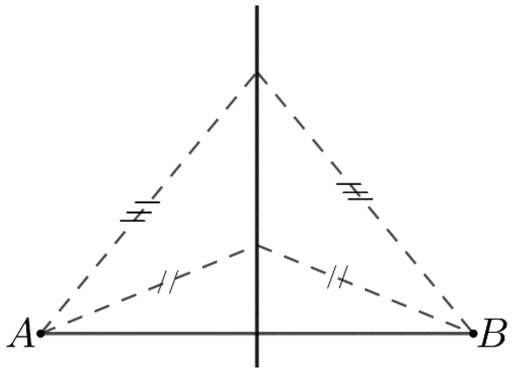


Рис. 3.12

3. Геометрическое место точек (плоскости), находящихся на данном расстоянии h от данной (в этой плоскости) прямой, есть пара прямых, параллельных данной прямой.

Для построения этого ГМТ надо в любой точке A данной прямой a провести к ней перпендикуляр p, отложить на нём по обе стороны от этой прямой данный отрезок h и провести через концы отложенных отрезков прямые l_1, l_2, параллельные данной прямой a (рис. 3.13).

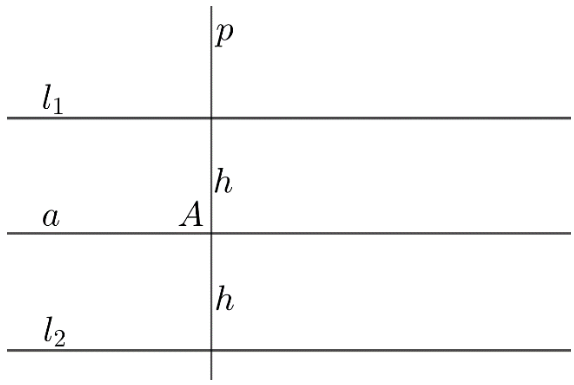


Рис. 3.13

4. Геометрическое место точек (плоскости), равноудалённых от двух данных параллельных прямых (этой плоскости), есть прямая, параллельная данным прямым.

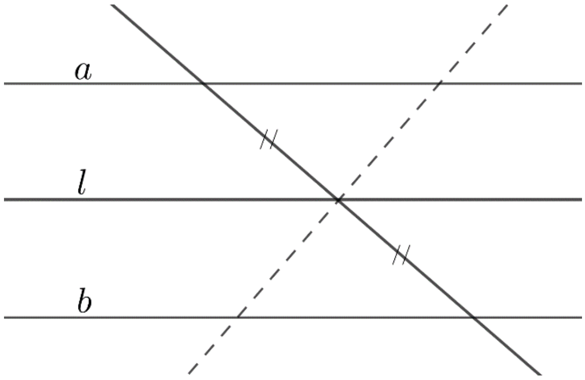


Рис. 3.14

Для построения этого ГМТ проводят какую-либо прямую c, пересекающую данные прямые a и b, делят отрезок этой секущей, заключённый между данными прямыми, пополам и проводят искомую прямую через середину этого отрезка параллельно данным прямым. Полученную прямую называют *средней линией* данных параллельных прямых (рис. 3.14).

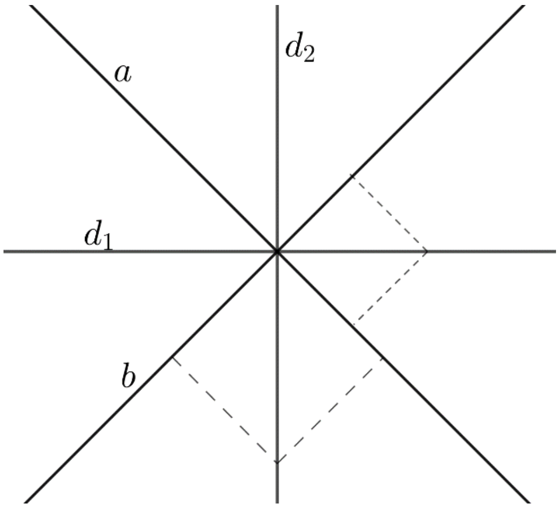


Рис. 3.15

5. Геометрическое место точек (плоскости), равноудалённых от двух данных пересекающихся прямых (этой плоскости), представляет собой две взаимно перпендикулярные прямые, являющиеся биссектрисами углов, образованных данными прямыми. Построение этого ГМТ сводится к элементарной задаче 4 о делении угла пополам. На рис. 3.15 прямые d_1 и d_2 образуют ГМТ, равноудалённых от прямых a и b.

3.6. Построение отрезков, заданных формулами

Довольно часто приходится решать следующую задачу.

Даны отрезки, известны их длины при заданной единице измерения. Требуется построить с помощью данных инструментов отрезок, длина которого при той же единице измерения выражается через длины данных отрезков заданной формулой:

$y = f(a, b, c, \dots, l)$.

В таких случаях кратко говорят, что строим выражение $f(a, b, c, \dots, l)$. Предполагается, что функция $f(a, b, c, \dots, l)$, задающая длину искомого отрезка через длины данных отрезков, рассматривается для таких значений положительных аргументов, при которых она имеет смысл и положительна.

В школьном курсе геометрии в разделе «Приложение алгебры к геометрии» на основании метрических соотношений в треугольнике и круге даются способы для построения циркулем и линейкой отрезков, заданных простейшими формулами.

1. $x = a + b$. Построение см. на рис. 3.16.

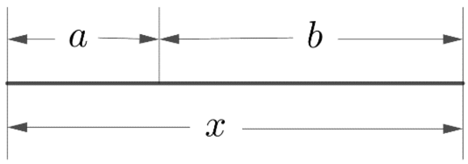


Рис. 3.16

2. $x = a - b$ $(a > b)$. Построение см. на рис. 3.17.

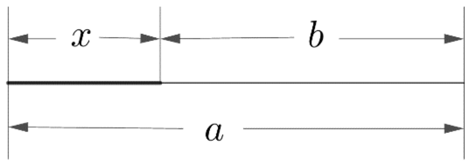


Рис. 3.17

3. $x = na$, где n – натуральное число. Алгоритм сводится к построению 1. На рис. 3.18 построен отрезок x такой, что $x = 5a$.

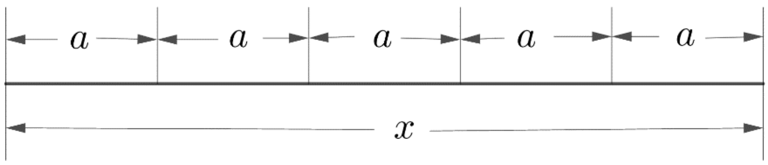


Рис. 3.18

4. $x = \frac{a}{n}$. Строим луч, выходящий из какого-либо конца O данного отрезка a под произвольным углом к нему. Откладываем на этом луче n раз произвольный отрезок b так, что $OB = nb$ (рис. 3.19). Соединяем точку B со вторым концом A отрезка a. Через точку B_1, определяемую условием $OB_1 = b$, проводим прямую, параллельную AB, и отмечаем точку A_1, в которой она пересечёт отрезок a. $x = OA_1$.

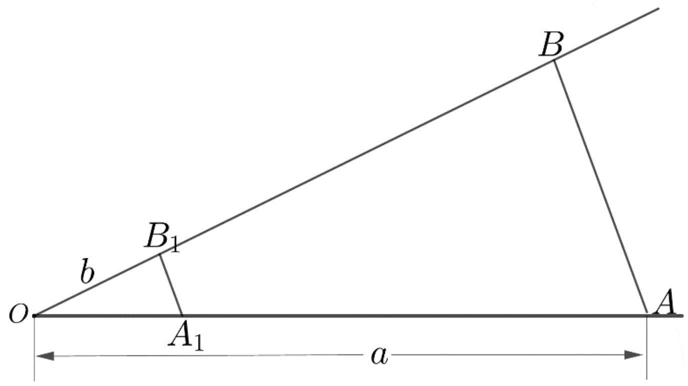


Рис. 3.19

5. $x = \frac{n}{m}a$ (n и m – данные натуральные числа).

Первый способ. Разделим отрезок a на m равных частей (см. построение 4) и увеличим полученный отрезок в n раз (см. построение 3).

Второй способ. Пусть $OA = a$. На произвольном луче, исходящем из точки O (рис. 3.20), откладываем отрезок $OB_1 = mb$ и отрезок $OB = nb$. Через точку B_1 проводим отрезок B_1A_1, параллельный BA. Тогда $OA_1 = \frac{n}{m}a$.

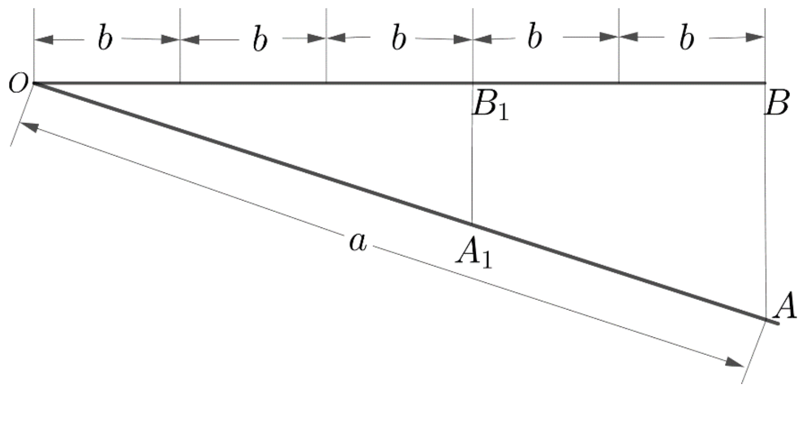


Рис. 3.20

6. $x = \frac{ab}{c}$ (построение четвёртого отрезка, пропорционального трём данным отрезкам).

Запишем условие в виде пропорции: $c : a = b : x$. Пусть $OA = a$, $OC = c$, компоненты одного из отношений отложены на одном луче, исходящем из точки O (рис. 3.21). На другом луче, исходящем из той же точки, откладываем известный компонент другого отношения: $OB = b$. Через точку A проводим прямую, параллельную BC, и отмечаем точку X её пересечения с прямой OB. Отрезок OX искомый, т. е. $OX = x$.

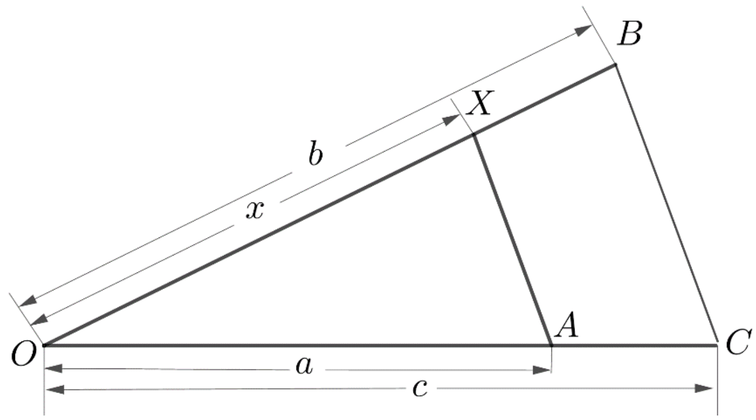


Рис. 3.21

7. $x = \frac{a^2}{c}$.

Первый способ. Воспользоваться построением 6, полагая $b = a$.

Второй способ (применимый, если $a < c$). Строим полуокружность диаметром $AB = c$, хорду $AC = a$, перпендикуляр CD к AB (рис. 3.22). Тогда $AD = x$.

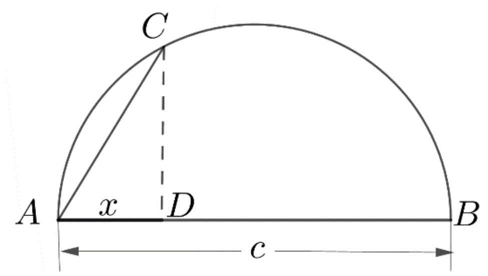


Рис. 3.22

8. $x = \sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального двух данных отрезков).

Первый способ. Строим отрезки $AC = a$, $CB = b$ так, что $AB = a + b$. На AB как на диаметре строим полуокружность (рис. 3.23). В точке C восстанавливаем перпендикуляр к AB и отмечаем точку D его пересечения с окружностью. Тогда $x = CD$.

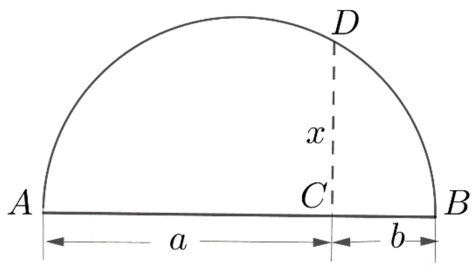


Рис. 3.23

Второй способ (для $a > b$). Строим окружность диаметром $MN = a$, на MN откладываем отрезок $MK = b$ (рис. 3.24). В точке K восстанавливаем перпендикуляр к MN и отмечаем точку X его пересечения с окружностью. Хорда $MX = x$.

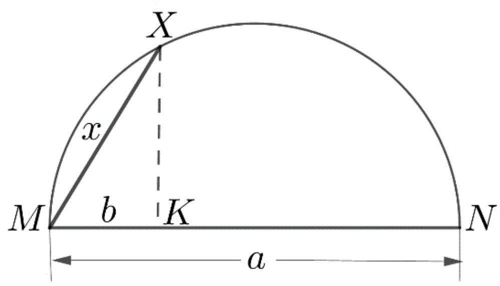


Рис. 3.24

Третий способ (для $a > b$). Строим окружность диаметром $a - b$ (рис. 3.25), через центр проводим секущую и откладываем на ней внешнюю часть, равную b. Из полученной точки A проводим касательную AT, $x = AT$.

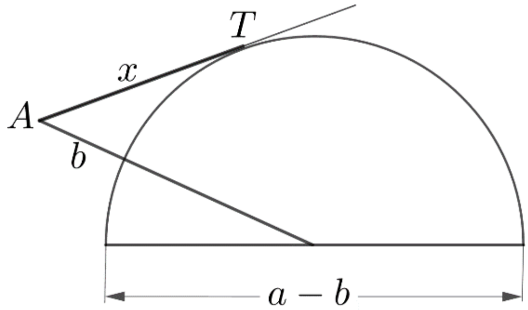


Рис. 3.25

9. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Отрезок x строится как гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 3.26).

10. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$. Отрезок x строится как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b (рис. 3.27).

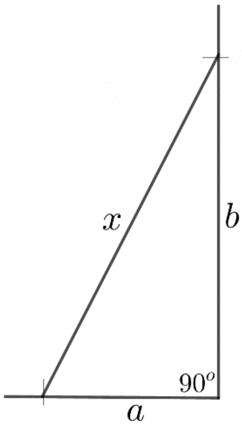


Рис. 3.26

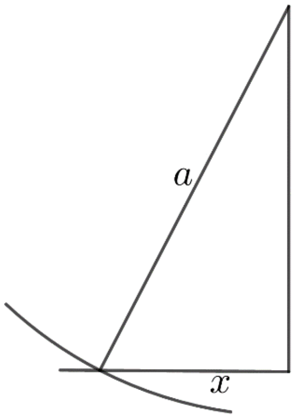


Рис. 3.27

К рассмотренным построениям можно свести построение отрезков, заданных более сложными формулами. Приведём некоторые примеры.

Пример 1. $x = a\sqrt{n}$, где n – натуральное число. Если $n = pq$, где p и q – натуральные числа, то $x = \sqrt{(pa)(qa)}$ и задача сводится к построению 8.

Если $n = p^2 + q^2$, то $x = \sqrt{(pa)^2 + (qa)^2}$ и задача сводится к построению 9.

Аналогично: если $n = p^2 - q^2$, то задача сводится к построению 10.

Пример 2. $x = a\sqrt{\frac{p}{q}}$, p и q – натуральные числа. Можно записать: $x = \sqrt{(pa)(\frac{a}{q})}$, и поэтому задача сводится к построениям 5 и 8.

Пример 3. $x = \frac{abc}{de}$. Строим сначала y по формуле $y = \frac{ab}{d}$, затем x по формуле $x = \frac{cy}{e}$ (см. построение 6).

Пример 4. $x = \frac{a^4}{b^3}$. Строим выражение $y = \frac{a^2}{b}$ (см. построение 7), а затем $x = \frac{y^2}{b}$.

Пример 5. $x = \sqrt{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}$ $(a^2 + d^2 > b^2 + c^2)$. Строим последовательно отрезки y, z, x по формулам

$$y = \sqrt{a^2 + d^2}, \quad z = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad x = \sqrt{y^2 - z^2}.$$

Пример 6. $x = \frac{a^4+b^4}{a^3-b^3+c^3}$ $(a^3 + c^3 > b^3)$.

Перепишем заданное выражение так: $x = \dfrac{a + \frac{b^4}{a^3}}{a - \frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{a^2}} a$.

Строим теперь отрезки y, z, x по следующим формулам: $y = a + \frac{b^4}{a^3}$ (см. пример 4), $z = a - \frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{a^2}$ (см. пример 3), $x = \frac{ay}{z}$.

Пример 7. $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$ $(a > b)$.

Ясно, что $x = \sqrt{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}$. Строим теперь отрезки y, z, x по формулам $y = \sqrt{a^2 - b^2}$ (построение 10), $y = \sqrt{a^2 + b^2}$ (построение 9), $x = \sqrt{yz}$ (построение 8).

3.7. Движения на плоскости и их применение к геометрическим построениям

Общее понятие о точечных преобразованиях фигур. Пусть Ф – некоторая фигура, расположенная в плоскости. Пусть имеет место некоторое правило, в силу которого каждой точке M фигуры Ф ставится в соответствие некоторая определённая точка M' той же плоскости. Это означает, что в плоскости установлено *преобразование* фигуры Ф[11]. Точка M' – есть образ точки M, точка M – прообраз точки M'. Совокупность всех точек, соответствующих точкам данной фигуры Ф, образует некоторую фигуру Ф$'$, которая называется образом данной фигуры; при этом первоначальную фигуру считают прообразом фигуры Ф$'$.

Пример 1. Каждой точке плоскости ставится в соответствие эта же точка. Такое преобразование называется *тождественным преобразованием* плоскости. При данном преобразовании плоскости каждая фигура преобразуется в себя.

[11] Напомним, что теоретическое обоснование вопроса о соответствиях на множествах подробно изложено в учебно-практическом пособии [18]. В настоящей главе рассматриваются соответствия между элементами на множествах геометрических фигур. Введённая в пособии [18] терминология сохраняется.

Пример 2. Каждой точке плоскости ставится в соответствие одна и та же точка O этой плоскости.

Наиболее важную роль в геометрии играют так называемые взаимно однозначные преобразования.

Определение. Преобразование фигуры называется взаимно однозначным, или одно-однозначным (1–1-значным), если каждая точка фигуры-образа имеет только один прообраз.

Указанный выше пример 1 представляет собой 1–1-значное преобразование всей плоскости в себя.

Простой пример взаимно однозначного преобразования полуокружности в отрезок получим, если сопоставим каждой точке полуокружности AmB её ортогональную проекцию на диаметр AB (рис. 3.28).

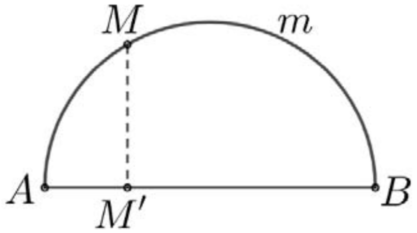


Рис. 3.28

Рассмотрим ещё пример. Пусть каждой точке некоторой окружности ставится в соответствие её проекция на один и тот же диаметр AB; такое преобразование окружности в отрезок не будет 1–1-значным, так как каждая точка диаметра AB (за исключением концов) будет служить образом двух различных точек окружности (рис. 3.29).

Если же каждой точке некоторого круга сопоставить её проекцию на один и тот же диаметр этого круга, то каждая точка этого диаметра (кроме его концов) будет иметь бесконечно много прообразов, так что преобразование также не будет взаимно однозначным.

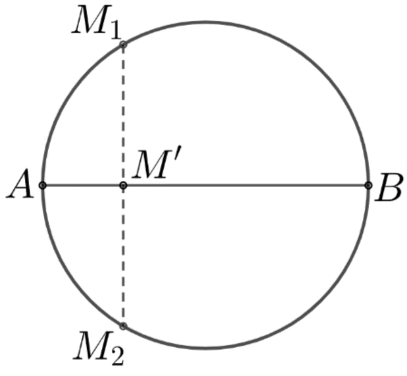


Рис. 3.29

В случае 1–1-значного преобразования П помимо данного соответствия $M \to M'$ возникает одновременно соответствие $M' \to M$, потому что каждая точка фигуры Φ' обладает единственным, вполне определённым прообразом.

Определение. Преобразование, которое ставит в соответствие каждой точке фигуры Φ' её прообраз в данном преобразовании П, называют преобразованием, обратным данному, и обозначают Π^{-1}.

Среди взаимно однозначных преобразований особую роль играют движения.

Определение. Движением на плоскости называют в геометрии всякое преобразование, обладающее следующим свойством: если A и B – две произвольные точки фигуры Ф, преобразующиеся соответственно в точки A' и B', то отрезки AB и $A'B'$ равны между собой.

Из самого определения следует, что движения суть 1–1-значные преобразования: если бы две различные точки A_1 и A_2 преобразовались движением в одну и ту же точку A', то по определению имело бы место соотношение $A_1A_2 = A'A'$, т. е. точки A_1 и A_2 совпадали бы, что невозможно.

Параллельный перенос. Пусть на плоскости задан некоторый вектор $\vec{v} \equiv \overrightarrow{OO'}$.

Определение. Параллельным переносом фигуры Ф на вектор $\vec{v}$ (рис. 3.30) называется такое преобразование фигуры Ф, при котором каждой точке M этой фигуры ставится в соответствие такая точка M' плоскости, что выполняется условие $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

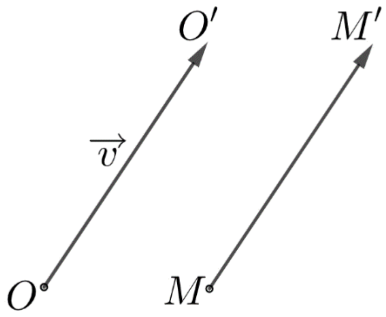


Рис. 3.30

Перенос является движением. Действительно, если векторы $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ равны одному и тому же вектору $\overrightarrow{OO'}$, то получаем, что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, а отсюда вытекает равенство отрезков AB и $A'B'$, поэтому при параллельном переносе каждая фигура преобразуется в равную ей фигуру.

Для прямолинейных фигур построение их образов в данном переносе осуществляется по нескольким точкам. Для построения образа данной окружности строят образ её центра и, принимая его за центр, проводят окружность с тем же радиусом.

Пример. Построить трапецию по заданным её сторонам.

Подробнее: требуется построить трапецию так, чтобы её основания были соответственно равны данным отрезкам a и b $(a > b)$, а боковые стороны были соответственно равны данным отрезкам c и d $(c \leq d)$.

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция с бóльшим основанием AD и меньшим основанием BC. AB и CD – боковые стороны, причём $AB = c$, $CD = d$ (рис. 3.31).

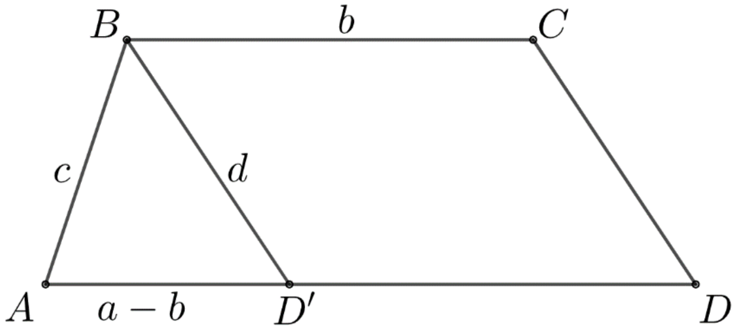


Рис. 3.31

Представим себе перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{CB}$. Тогда сторона CD преобразуется в отрезок BD'. Треугольник ABD' может быть построен, так как все стороны его известны. Чтобы построить искомую трапецию, останется подвергнуть отрезок BD' переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$. Его длина известна, и он направлен одинаково с вектором $\overrightarrow{AD}$.

Построение. 1. Построим треугольник ABD' по сторонам $AB = c$, $BD' = d$ и $AD' = a - b$. 2. Через точку B проведём луч, одинаково направленный с лучом AD'. 3. На этом луче построим точку C так, чтобы $BC = b$. 4. Через точку C проведём прямую CD параллельно BD' до пересечения с продолжением AD' в точке D. $ABCD$ – искомая трапеция.

Доказательство. $AB = c$, $BC = b$ по построению; $AD = AD' +$ $+D'D = AD' + BC = a - b + b = a$. $CD = BD'$ как отрезки параллельных прямых между параллельными прямыми.

Исследование. Первый шаг выполни́м при условии

$$d - c < a - b < d + c.$$

При этом условии однозначно выполнимы и все остальные шаги построения. Заметим также, что треугольник ABD', а следовательно, и трапеция $ABCD$ определяются условиями задачи однозначно до равенства, поэтому при условии $d - c < a - b < d + c$ задача имеет единственное решение. Если же это условие не выполняется, то задача решения не имеет.

Осевая симметрия[12]***.*** *Определение.* Две точки плоскости M и M' называются симметричными относительно прямой s, если они

[12] Виды симметрии рассмотрены в п. 2.8.

расположены на одном перпендикуляре к прямой s и прямая s делит отрезок MM' пополам.

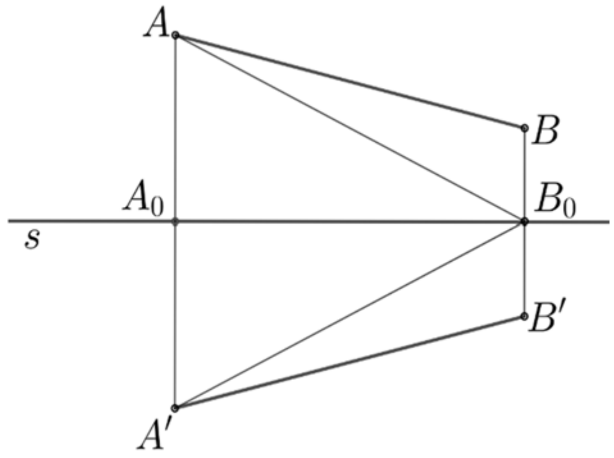


Рис. 3.32

Определение. Преобразование, при котором каждой точке данной фигуры ставится в соответствие точка, симметричная ей относительно прямой s, называется о с е в о й с и м м е т р и е й, или о т р а ж е н и е м в прямой s. Прямая s называется при этом о с ь ю с и м м е т р и и.

Осевая симметрия является движением. Действительно, пусть в симметрии относительно прямой s точке A соответствует точка A', а точке B – точка B' (рис. 3.32).

Тогда $\triangle AA_0B_0 = \triangle A'A_0B_0$ (по двум катетам), следовательно,

$AB_0 = A'B_0$,

$\angle A_0B_0A = \angle A_0B_0A'$.

Отсюда легко видеть, что $\angle AB_0B = \angle A'B_0B'$, поэтому $\triangle AB_0B = \triangle A'B_0B'$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A'B'$, так что осевая симметрия преобразует каждую фигуру в равную ей фигуру.

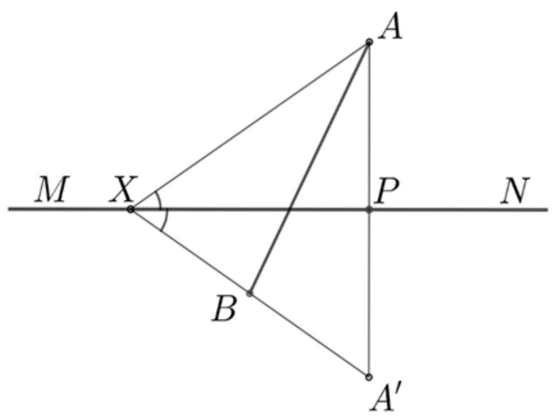


Рис. 3.33

Пример 1. Прямая MN пересекает отрезок AB. Найти на прямой MN такую точку X, чтобы прямая MN служила биссектрисой угла AXB (рис. 3.33).

Если A' – отражение точки A в прямой MN, то по определению $AP = A'P$ и $\angle MPA = \angle MPA' = 90°$, поэтому $\triangle XPA = \triangle XPA'$ и, следовательно, $\angle PXA = \angle PXA'$. Таким образом, точка B должна располагаться на прямой $A'X$, иначе говоря, точка X должна располагаться на прямой $A'B$, поэтому точка X может быть построена как пересечение прямой $A'B$ с прямой MN.

Задача имеет единственное решение, если расстояния точек A и B от прямой MN не одинаковы. Если эти расстояния одинаковы, но точки A и B не симметричны относительно прямой MN, то задача вовсе не имеет решения (так как прямая $A'B$ пойдёт параллельно MN). Наконец, если точки A и B симметричны относительно MN, то задача становится неопределённой: любая точка прямой MN удовлетворяет в этом случае условию задачи.

Пример 2. Построить треугольник, зная сторону $AC = b$, прилежащий к ней угол $A = \alpha$ и разность двух других сторон: $AB - BC = r$.

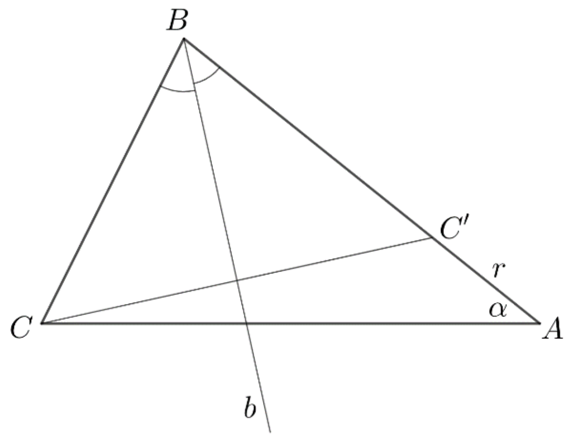


Рис. 3.34

Пусть ABC – искомый треугольник (рис. 3.34). Величины b и α – элементы треугольника ABC. Чтобы ввести в чертёж данную величину r, достаточно отразить сторону BC в биссектрисе угла B; если при этом точка C преобразуется в точку C', то точка C' окажется на стороне AB, причём отрезок $AC' = AB - BC' = AB - BC = r$.

В треугольнике ACC' теперь известны две стороны и угол между ними, так что он легко может быть построен. Кроме того, замечаем, что биссектриса угла B перпендикулярна прямой CC' и делит отрезок CC'пополам.

Итак, для построения треугольника ABC надо предварительно построить треугольник ACC' по двум сторонам и углу между ними, а затем провести прямую, перпендикулярную CC', через середину отрезка CC' до пересечения с лучом AC'; эта точка пересечения и явится третьей вершиной B искомого треугольника.

Доказательство предлагается студенту провести самостоятельно.

Исследование. Заметим прежде всего, что по условию $AB > BC$ и поэтому $\angle A < \angle C$, следовательно, угол α должен быть острым. При этом условии симметраль точек C и C' пересечёт луч AC' в том и только в том случае, когда $\angle CC'B$ острый, т. е. $\angle AC'C$ тупой, так что отрезок AC' меньше проекции отрезка AC на прямую AB: $r < b \cos\alpha$.

Это неравенство не может осуществиться, если $\alpha \geq 90°$. Таким образом, соотношение $r < b \cos\alpha$ выражает условие (однозначной) разрешимости задачи.

Пример 3. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку r и лежала на данной прямой a, а остальные две вершины ромба лежали соответственно на данных прямых b и c.

Анализ. Пусть $ABDC$ – искомый ромб, $AD = r$.

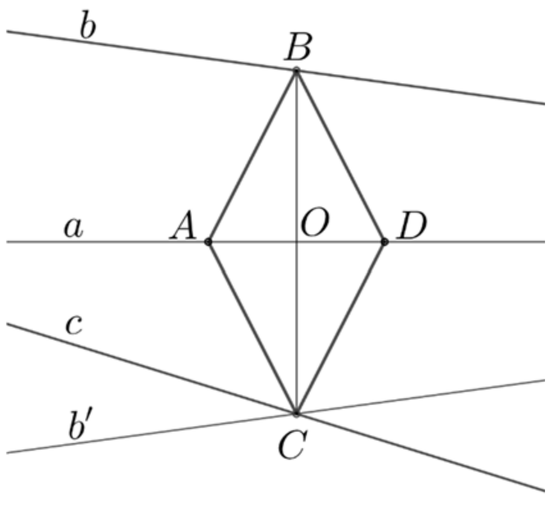


Рис. 3.35

Задача о построении ромба сводится к построению какой-либо одной из его вершин, например вершины C. По свойствам ромба точки B и C симметричны относительно прямой a, поэтому при зеркальном отражении в прямой a точка B преобразуется в точку C, а следовательно, прямая b – в некоторую прямую b', проходящую через точку C (рис. 3.35).

Таким образом, точка C может быть построена как точка пересечения прямых c и b', из которых одна дана, а другая легко строится.

Построение. Строим последовательно: прямую b', симметричную с прямой b относительно прямой a; точку C, общую для прямых c и b'; прямую BC; точку $O \equiv BC \cap a$; точки A и D на прямой a, отстоящие от точки O на расстояние $\frac{r}{2}$. $ABDC$ – искомый ромб.

Доказательство ввиду его простоты опустим.

Исследование. Возможны следующие случаи: 1) $c||b'$, решений нет; 2) $c \equiv b'$, решений бесконечно много; 3) прямые c и b' пересекаются вне прямой a, одно решение; 4) прямые c и b' пересекаются на прямой a, решений нет.

Сущность приёма, применённого в последнем примере, состоит в следующем: задача сводится к построению точки, причём эта точка оказывается общей точкой некоторой данной фигуры и фигуры, симметричной другой данной фигуре относительно некоторой оси.

Вращение около точки. Пусть в плоскости даны точка O и ориентированный угол α.

Определение. Каждой точке M данной плоскости будем ставить в соответствие такую точку M', чтобы: 1) $OM = OM'$; 2) $\angle MOM' = \alpha$. Такого рода соответствие называется в р а щ е н и е м плоскости около точки O на угол α (рис. 3.36). Точка O называется ц е н т р о м в р а щ е н и я, угол α – у г л о м п о в о р о т а.

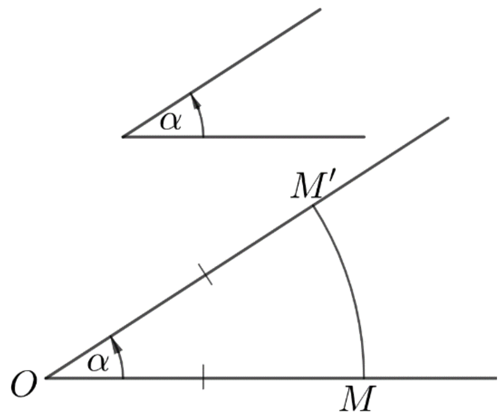


Рис. 3.36

Вращение является движением.

В самом деле, если O – центр вращения, α – угол поворота, AA' и BB' – две пары соответственных точек, то по определению $OA = OA'$, $OB = OB'$. Кроме того, $\angle A'OB' =$ $= \alpha - \angle BOA' = \angle AOA' - \angle BOA' =$ $= \angle AOB$, поэтому $\triangle A'OB' =$ $= \triangle AOB$ и, следовательно, $A'B' =$ $= AB$ (рис. 3.37).

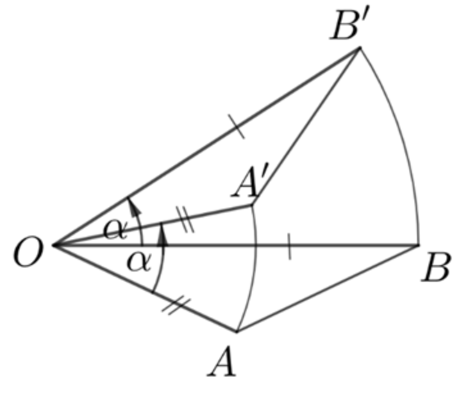


Рис. 3.37

Таким образом, вращение переводит всякую фигуру в равную ей фигуру.

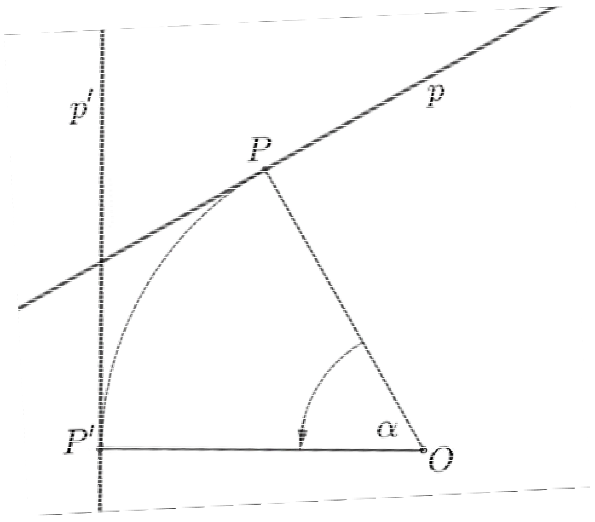


Рис. 3.38

Чтобы построить образ некоторой прямой, достаточно избрать на ней какие-либо две точки, построить их образы и соединить их прямой.

Можно также опустить из центра вращения перпендикуляр OP на данную прямую p, осуществить его поворот на данный угол и провести затем через точку P' (в которую перейдёт точка P) прямую p', перпендикулярную к OP' (рис. 3.38).

Чтобы построить образ окружности, следует построить образ её центра и, приняв его за центр, провести окружность с тем же радиусом.

Построение образа данного многоугольника сводится к повороту его вершин.

Пример 1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

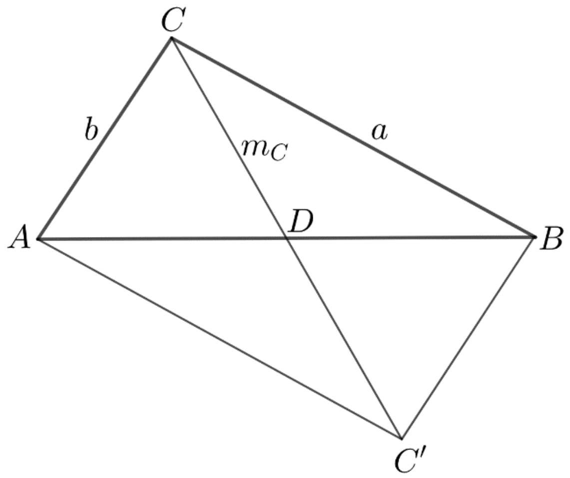


Рис. 3.39

Пусть ABC – искомый треугольник, a и b – данные его стороны, $CD = m_C$ – данная медиана (рис. 3.39).

Повернув всю фигуру около точки D на $180°$, получим параллелограмм $ACBC'$, у которого известны стороны и одна из диагоналей $CC' = 2m_C$. Это подсказывает следующий ход построения: строится (по трём сторонам) треугольник ACC' и дополняется до параллелограмма $ACBC'$; соединив точки A и B, получим искомый треугольник ABC.

Построение треугольника ACC', а следовательно, и искомого треугольника возможно при условии $|a - b| < 2m_C < a + b$.

При этих условиях решение единственное.

Пример 2. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых a, b и c.

Пусть $PQRS$ – искомый квадрат, причём $P \in a$, $Q \in b$, $R \in c$ (рис. 3.40). При повороте вокруг точки Q на 90° точка R совпадёт с точкой P, а прямая c преобразуется в прямую c', проходящую через точку P, так что $P \equiv a \cap c'$. Построив отрезок PQ (сторону квадрата), легко построим затем весь квадрат.

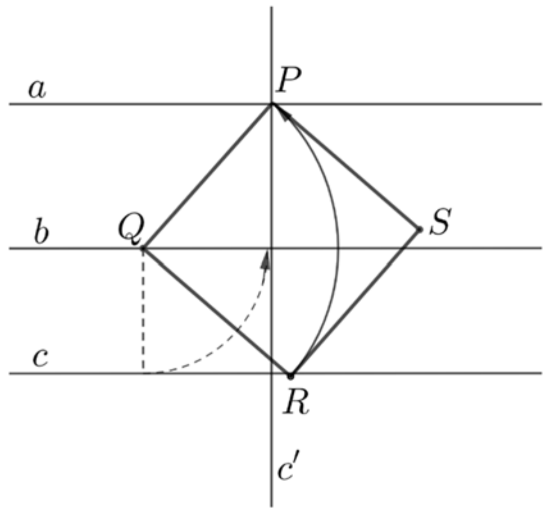


Рис. 3.40

Выбирая точку Q на различных прямых, получим три неравных квадрата (рис. 3.41). Исключение составляет тот случай, когда одна из данных прямых равноудалена от двух других: в этом случае квадраты $P_1Q_1R_1S_1$ и $P_2Q_2R_2S_2$ оказываются равными.

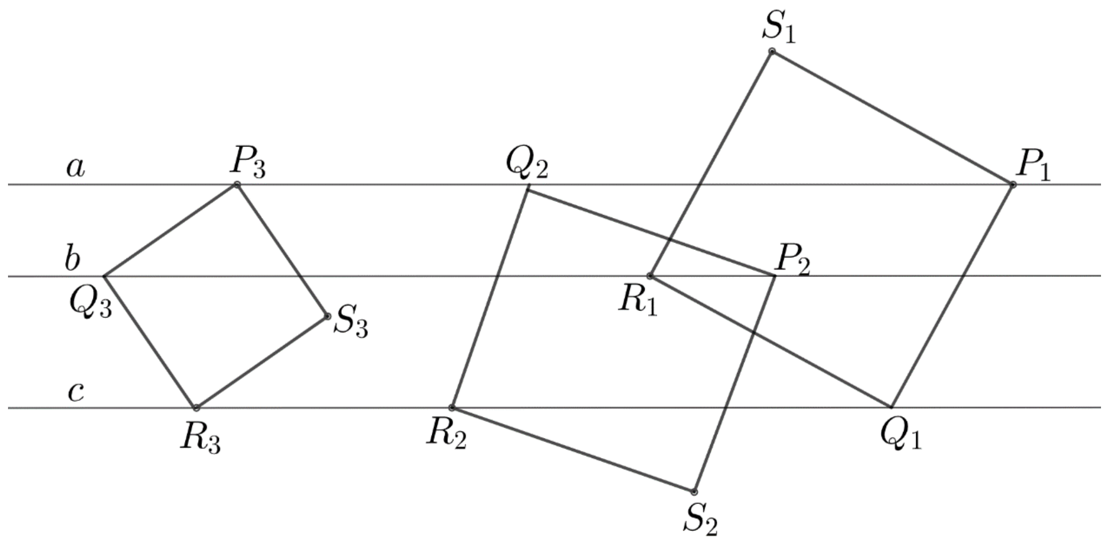


Рис. 3.41

Эта задача имеет бесконечно много решений, которые можно получить, меняя положение точки Q на прямых a, b и c. Каждый из квадратов, которые могут быть получены таким путём, будет равен одному из квадратов $P_1Q_1R_1S_1$, $P_2Q_2R_2S_2$ и $P_3Q_3R_3S_3$.

Вращение на $180°$ часто рассматривают как особый вид преобразования. Если O – центр вращения, то каждая точка M плоскости преобразуется при этом в такую точку M', что точки M и M' располагаются на прямой, проходящей через точку O, и находятся по разные стороны от точки O на одинаковых от неё расстояниях (рис. 3.42). Такое преобразование называется *центральной симметрией* относительно точки O. Ясно, что центральная симметрия определяется заданием центра или одной пары соответственных точек.

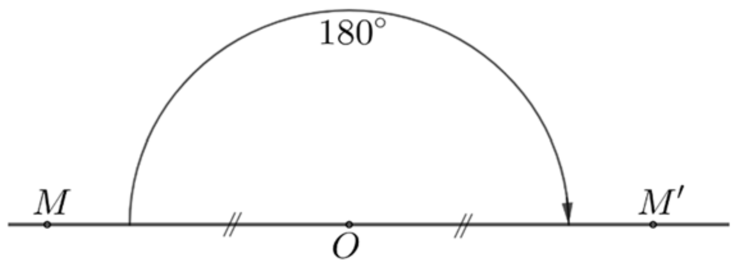


Рис. 3.42

Пример 3. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах квадрата. Кроме того, остался столб в центре квадрата (рис. 3.43). Требуется восстановить границу участка.

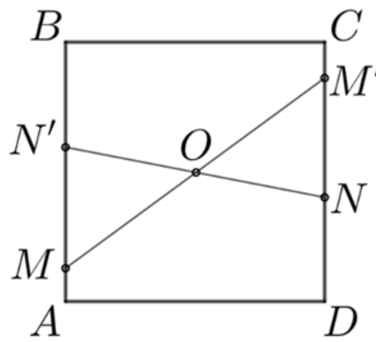


Рис. 3.43

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомый квадрат, O – его центр, M и N – данные точки соответственно на сторонах AB и CD.

Если повернуть квадрат на $180°$ около его центра, то точка M займёт некоторое положение M' на стороне CD, а точка N – некоторое положение N' на стороне AB. После этого нетрудно уже восстановить искомый квадрат.

Построение. 1. Строим точку M', симметричную точке M относительно центра O, и точку N', симметричную точке N относительно центра O. 2. Строим прямые MN' и NM'. 3. Повернём построенные прямые около точки O на $90°$. Четыре построенные прямые ограничивают искомый квадрат.

Доказательство опускаем.

Исследование. По смыслу задачи невозможен случай, когда точки M и N располагаются с точкой O на одной прямой, но не симметричны относительно O. Если точки M и N симметричны относительно

O, то задача становится неопределённой. В остальных случаях задача имеет единственное решение.

Решение задач на построение методом подобия. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

Анализ. Искомый треугольник должен удовлетворять трём условиям:

1) он должен быть равнобедренным;

2) угол при вершине должен быть равен данному углу α;

3) сумма основания и соответствующей высоты должна быть равна данному отрезку l.

Замечаем, что легко построить треугольник, удовлетворяющий первым двум условиям. Таких треугольников существует бесконечно много. Пусть построили один из них – треугольник $B'AC'$, причём $\angle B'AC' = \alpha$.

Треугольник, удовлетворяющий условиям 1) – 3), будем искать среди треугольников, гомотетичных[13] треугольнику $B'AC'$ относительно какого-либо центра подобия, например относительно точки A. Пусть ΔBAC искомый (рис. 3.44). Ясно, что $BC || B'C'$ (или $BC \equiv B'C'$). Пусть AP' – высота треугольника $B'AC'$, P – точка пересечения прямых BC и AP'. Ясно, что AP – высота треугольника BAC.

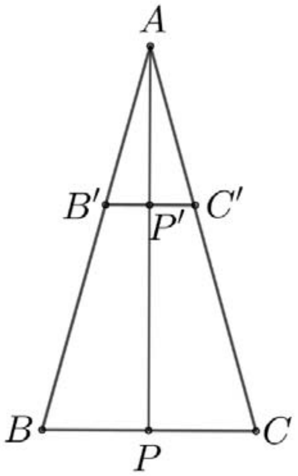


Рис. 3.44

Если в некоторой гомотетии точке B' соответствует точка B, то точкам C' и P' соответствуют точки C и P. Найдём коэффициент гомотетии, преобразующей треугольник $B'AC'$ в треугольник BAC. По условию дан отрезок l такой, что $BC + AP = l$. Кроме того, располагая построенным треугольником $B'AC'$, мы можем построить отрезок l', равный сумме $B'C' + AP'$.

Тогда искомый коэффициент гомотетии равен $\frac{BC+AP}{B'C'+AP'}$, т. е. $\frac{l}{l'}$.

---

[13] О гомотетии и построении гомотетичных фигур см. издание [1]. В приведённом примере подробно на определении и свойствах гомотетии останавливаться не будем.

Итак, треугольник BAC гомотетичен треугольнику $B'AC'$ относительно центра подобия A, причём коэффициент подобия равен $\frac{l}{l'}$.

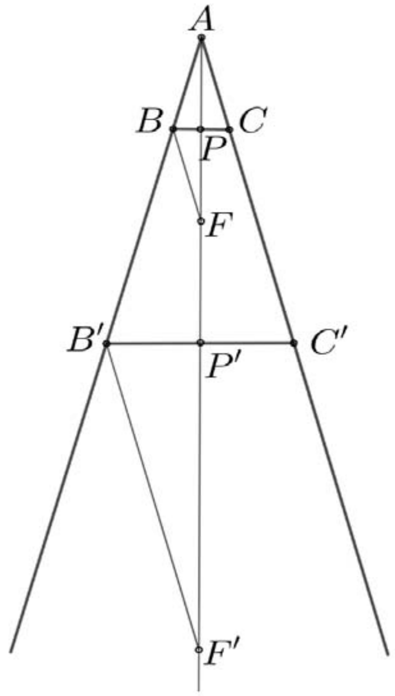


Рис. 3.45

По этим данным искомый треугольник BAC может быть построен.

Построение. 1. Строим произвольный треугольник $B'AC'$ (рис. 3.45), удовлетворяющий условиям 1) и 2) ($B'A = C'A$ и $\angle B'AC' = \alpha$).

2. Строим высоту этого треугольника AP' и на продолжении отрезка AP' откладываем отрезок $P'F' = B'C'$ так, что $AF' = AP' + B'C'$. Эту сумму обозначим через l'.

3. Строим на луче AP' точку F такую, что $AF = l$.

4. Строим ΔBAC, соответствующий $\Delta B'AC'$ в гомотетии $\Gamma\left\{A, \frac{l}{l'}\right\}$. Для этого последовательно строим $FB||F'B'$, $BC||B'C'$. ΔBAC – искомый.

Доказательство. Пусть P' – образ основания высоты P искомого треугольника ABC. Точка P' принадлежит основанию вспомогательного треугольника $B'AC'$ и продолжению высоты AP, поэтому является пересечением указанных элементов: $P' \equiv B'C' \cap AP$.

Так как $\Delta BAC \approx \Delta B'AC'$, то $\frac{AP}{AP'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB}{AB'} = \frac{AF}{AF'} = \frac{l}{l'}$, поэтому $\frac{AP+BC}{AP'+B'C'} = \frac{l}{l'}$. Но $AP' + B'C' = l'$ по построению. Значит, $AP + BC = l$.

Итак, ΔBAC удовлетворяет условию 3). Очевидно, что он удовлетворяет и условиям 1) и 2).

Исследование. Все шаги проведенного построения однозначно выполнимы, поэтому данный способ построения даёт единственное решение. Всякий другой треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий условиям задачи, должен быть, очевидно, подобен построенному треугольнику ABC, поэтому для всякого другого решения $A_1B_1C_1$, полученного каким-либо другим путём, будут выполняться следующие соотношения: $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{A_1P_1+B_1C_1}{AP+BC}$.

Так как $A_1P_1 + B_1C_1 = AP + BC$, то и $B_1C_1 = BC$, откуда ясно, что $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$. Таким образом, всякий другой приём построения приведёт к тому же решению, так что задача разрешима однозначно.

ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕМЕ «АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ»

1. Сущность аксиоматического построения теории заключается в следующем:

а) перечисляются объекты и отношения между ними, которые называются …;

б) каждое понятие (кроме указанных в *а*), …;

в) формулируются основные предложения, которые называются …;

г) каждое предложение теории (кроме указанных в *в*) … .

Выберите правильный ответ:

1) доказывается;
2) определяется;
3) неопределяемыми, или основными;
4) аксиомами;
5) теоремами;
6) анализируется и нумеруется.

2. Является ли данное высказывание одной из аксиом Пеано:

а) в множестве M существует элемент e, непосредственно не следующий ни за каким элементом из множества M. Он называется начальным;

б) $(\forall a, b \in M)(a + b = b + a)$;

в) для каждого элемента $a \in M$ существует единственный элемент a', непосредственно следующий за a;

г) любое подмножество K множества M совпадает с самим множеством M, если начальный элемент $e \in K$ и из того, что $a \in K$, следует, что $a' \in K$;

д) $a + 0 = a$?

Выберите правильный ответ:

1) да;
2) нет;
3) затрудняюсь с ответом.

3. Укажите предложения, которые не являются аксиомой сложения:

а) $(\forall a \in N_0) a + 0 = a$;

б) $(\forall a, b \in N_0) a + b' = (a + b)'$;

в) $(\forall a, b, c \in N_0)(a + b) + c = a + (b + c)$;

г) $\forall a,\ b \in \mathbb{N}\ \ a \cdot b' = a \cdot b + a$;

д) $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{N}\ \ (a + b) - c = a + (b - c),\ \ b > c$.

4. Закончите предложение:

а) $0 \cdot a = \cdots$;

б) $a \cdot 1 = \cdots$;

в) $1 \cdot a = \cdots$;

г) $a' \cdot b = \cdots$;

д) $a \cdot b' = \cdots$.

Выберите правильный ответ:

1) $(a + b)'$;

2) a;

3) 0;

4) a';

5) $ab + b$;

6) $ab + a$.

5. Выберите правильный ответ:

а) аксиома IV Пеано называется …;

б) аксиома IV Пеано лежит в основе доказательства …;

1) методом от противного;
2) методом математической индукции;
3) аксиомой индукции;
4) основной аксиомой арифметики;
5) методом полной индукции;
6) методом перебора всевозможных вариантов;
7) методом неполной индукции.

6. Чтобы доказать истинность утверждения $p(n), n \in N$ методом математической индукции:

а) предполагают, что утверждение $p(n)$ верно при $n = k$, и доказывают, что оно верно для следующего числа $n = k'$;

б) доказывают, что утверждение верно для 1, 2, 3 и т. д.;

в) доказывают, что утверждение верно при $n = 1$ и при $n = k$;

г) доказывают, что утверждение верно при $n = 1$. Затем предполагают, что оно истинное при $n = k$, и доказывают, что оно истинное для следующего числа $n = k'$.

ТЕСТИРОВАНИЕ ПО ТЕМЕ «РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ»

1. Необходимость введения рациональных чисел вызвана тем, что натуральных чисел недостаточно:

а) для решения уравнения … ;

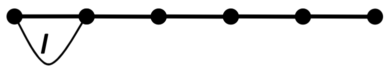
б) измерения отрезка единичным отрезком e.

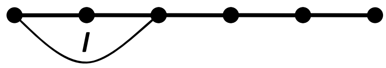
Выберите правильный ответ:

1) $3x = 6$;

2) $5x = 7$;

3) $x^2 - 2 = 0$;

4) 

5) 

2. Укажите неверное высказывание:

а) обыкновенной дробью называется пара натуральных чисел, записанная в определённом порядке;

б) $\frac{3}{8}$ – форма записи рационального числа;

в) $\frac{3}{8}$ – обыкновенная дробь;

г) $\frac{3}{8}$ – рациональное число;

д) $\frac{3}{8}, \frac{6}{16}, \frac{15}{40}, \frac{21}{56}$ – различные формы записи одного и того же числа.

3. Закончите предложения:

а) обыкновенная дробь называется конечной десятичной, если знаменатель её …;

б) несократимая дробь $\frac{a}{b}$ запишется конечной десятичной дробью, если в каноническом разложении знаменателя …;

в) несократимая дробь $\frac{a}{b}$ запишется чистой периодической дробью, если …;

г) несократимая дробь $\frac{a}{b}$ запишется смешанной периодической дробью, если в каноническом разложении знаменателя … .

Выберите правильный ответ:

1) НОД (b, 10) = 1, т. е. знаменатель взаимно прост с числом 10;

2) равен $10^n, n \in N$;

3) имеются другие множители, кроме 2 и 5;

4) нет других множителей, кроме 2 и 5;

5) содержит(ся) только число 5;

6) присутствует не более трёх простых множителей.

4. Выберите правильный ответ:

а) число, записанное чистой периодической дробью, – …;

б) число, записанное смешанной периодической дробью, – …;

в) число, записанное конечной десятичной дробью, – …;

г) число, записанное бесконечной десятичной непериодической дробью, – …;

д) Число, записанное бесконечной десятичной периодической дробью, – …;

1) рациональное;

2) иррациональное.

5. Возьмём два рациональных числа r_1, r_2, причём $r_1 = \frac{a}{b}$; $r_2 = \frac{c}{d}$:

а) если $ab = cd$, то $r_1 \ldots r_2$;

б) если $ab < cd$, то $r_1 \ldots r_2$;

в) если $ab > cd$, то $r_1 \ldots r_2$;

г) $17 \cdot 5 > 12 \cdot 6$, тогда $r_1 = \frac{17}{12} \ldots r_2 = \frac{6}{5}$;

д) $17 \cdot 4 < 12 \cdot 6$, тогда $r_1 = \frac{17}{6} \ldots r_2 = \frac{12}{4}$.

Выберите правильный ответ:

1) равно;

2) меньше;

3) больше.

6. Выберите правильный ответ:

а) если $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$, тогда $r_1 + r_2 =$ ...;

б) если $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$ и $r_1 > r_2$, тогда $r_1 - r_2 =$ ...;

в) если $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$, тогда $r_1 \cdot r_2 =$ ... ;

г) если $r_1 = \frac{a}{b}, r_2 = \frac{c}{d}$, тогда $r_1 : r_2 =$ ... ;

1) $\frac{ad-cb}{bd}$;

2) $\frac{ac}{bd}$;

3) $\frac{ad}{bc}$;

4. $\frac{ad+cb}{bd}$.

7. Запишите числа обыкновенными дробями:

а) $r = 0{,}1414$;

б) $r = 0{,}1414\ldots$;

в) $r = 0,(14)$;

г) $r = 0{,}11414$;

д) $r = 0{,}11414\ldots$.

Выберите правильный ответ:

1) $\frac{14}{99}$;

2) $\frac{11414}{10^5}$;

3) $\frac{1414}{10^4}$;

4) $\frac{113}{990}$;

5) правильный ответ не указан.

8. Выберите правильный ответ:

а) иррациональным числом называется число, записанное …;

б) рациональным числом называется число, записанное …;

в) действительным числом называется число, записанное …;

1) бесконечной десятичной периодической дробью;

2) бесконечной десятичной дробью;

3) бесконечной десятичной непериодической дробью.

9. Дано множество

$M = \{\sqrt{9}, \sqrt{11}, \sqrt{18}, \ \frac{2}{7}, \ 1{,}666\ldots, 0{,}313313331\ldots,$
$0{,}2424442777\ldots, \ 1{,}3131252525\ldots, \ 3{,}030030003\ldots,$
$0{,}277000\ldots, \ 0{,}35(04)\}$.

Запишите подмножество этого множества, состоящее из чисел x таких, что:

а) x – число рациональное;

б) x – число иррациональное;

в) x – число натуральное.

Выберите правильный ответ:

1) $\{\sqrt{9}\}$;

2) $\{\sqrt{11}, \sqrt{18}, 0{,}313313331\ldots, 3{,}030030003\ldots\}$;

3) $\{0{,}2424442777\ldots, 1{,}31312525\ldots, 0{,}277000\ldots, 0{,}35(04)\}$.

10. Определите значение истинности высказывания:

а) любое рациональное число является действительным;

б) любое действительное число является рациональным;

в) существуют действительные числа, которые не являются рациональными;

г) существуют рациональные числа, которые не являются действительными;

д) множество действительных чисел – это объединение множества рациональных и иррациональных чисел.

11. Основное свойство дроби следующее:

а) вид дроби, у которой числитель меньше знаменателя;

б) класс равных между собой дробей;

в) объединение множества положительных рациональных чисел, нуля и множества отрицательных рациональных чисел;

г) если числитель и знаменатель дроби умножить (разделить) на одно и то же число, то получится дробь, равная данной;

д) замена данной дроби другой дробью, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем.

12. Если заменяют данную дробь другой дробью, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем, то говорят:

а) записаны обыкновенные дроби;

б) выполнено сокращение данной дроби;

в) знаменатель и числитель данной дроби взаимно простые;

г) числитель меньше знаменателя;

д) найдена группа повторяющихся цифр после десятичной запятой.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи по теме «Выражения. Равенства. Неравенства»

1. Найдите числовое значение выражения при $a = 0{,}75$:

$\frac{1}{2} + \frac{1}{1-2a} : \frac{1}{a} - a : \frac{1}{1+2a} + \frac{2a^2+4a^3+8a^4}{8a^3}$.

2. Упростите выражения путём тождественных преобразований:

а) $6(2ab-3)+2a(6b-5)$; б) $(12a-16b):4-(10a-4b)$.

3. Найдите область определения выражений с переменной:

а) $-3x+7$; б) $\frac{12x}{(3x-2)\,x}$; в) $\frac{8}{\sqrt{x^2-2}}$; г) $\sqrt{a^2+b}$.

4. Найдите область допустимых значений переменной x в следующих выражениях:

а) $\sqrt{2x+6}$; б) $\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+3}$; в) $\frac{7}{\sqrt{x^2-6^2}}$,; г) $\sqrt{\frac{2x}{1-3x}}$.

5. Определите множество значений переменной x, на котором данный предикат принимает значение «истина»: $\frac{3x-2}{x-3} + \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$.

6. Определите, будут ли тождественны выражения с переменной $\frac{x}{8}$ и $\frac{x(x-3)}{8(x-3)}$. На каком множестве?

7. При каких значениях x являются тождествами следующие равенства:

а) $8x+9+\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-4} = 8x+9$; б) $\frac{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}$.

8. Докажите следующие тождества:

а) $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$;

б) $\frac{x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z}{(z-x)(z-y)} = 0$.

9. Выясните, из каких пар неравенств можно образовать истинные двойные неравенства, и запишите их: а) $5 < 15$ и $15 > 10$; б) $13 < 24$ и $36 > 24$; в) $3 \leq 7$ и $7 \geq 4$; г) $8 \leq 10$ и $14 > 10$; д) $6 \geq 6$ и $2 < 6$.

10. Чайный стакан стоит a рублей, а чайная ложка стоит b рублей. Что означают записи $a+b$, $2a+3b$, $4a-2b$, $a : b$?

Задачи по теме «Доказательство равенств и делимости выражений на число методом математической индукции»

В задачах 11 – 40 доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном значении переменной n имеет место следующее равенство.

11. $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

12. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

13. $1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

14. $1+5+9+\cdots+(4n-3)=n(2n-1)$.

15. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

16. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

17. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$.

18. $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\cdots+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

19. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

20. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

21. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$.

22. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

23. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{n}{5n+1}$.

24. $\frac{1}{1\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 15}+\frac{1}{15\cdot 22}+\cdots+\frac{1}{(7n-6)(7n+1)}=\frac{n}{7n+1}$.

25. $\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 25}+\cdots+\frac{1}{(8n-7)(8n+1)}=\frac{n}{8n+1}$.

26. $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$.

27. $\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 11}+\cdots+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{n}{5(2n+5)}$.

28. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3^n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$.

29. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

30. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

31. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\frac{3^2}{5\cdot7}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

32. $-1+3-5+7-9+\cdots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$.

33. $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$.

34. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

35. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

36. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

37. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

38. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

39. $0\cdot1^2+1\cdot2^2+2\cdot3^2+\cdots+(n-1)n^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

40. $1\cdot2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n=2+(n-1)\,2^{n+1}$.

В задачах 41 – 50 доказать, используя метод математической индукции, делимость выражений на заданное число при любом натуральном значении переменной n.

41. а) $(2n^3+3n^2+7n)\,\vdots\,2$;

б) $(n^4-n^2)\,\vdots\,12$;

в) $(6^{n+2}+7^{2n+1})\,\vdots\,43$;

г) $(2^{5n+3}+5^n\cdot3^{n+2})\,\vdots\,17$;

д) $(3^{2n+1}+40n-67)\,\vdots\,64$.

42. а) $(n^3+2n)\,\vdots\,3$;

б) $(n^4+6n^3+11n^2+6n)\,\vdots\,24$;

в) $(3^{2n+1}+1)\,\vdots\,4$;

г) $(2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) \vdots 37$;

д) $(4 \cdot 6^n + 5n - 4) \vdots 5$.

43. а) $(n^3 + 3n^2 + 5n) \vdots 3$;

б) $n^2(n^2 - 1) \vdots 4$;

в) $(49^n - 1) \vdots 6$;

г) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 2^{2n} \cdot 3^{3n+2}) \vdots 1053$;

д) $(7^n + 3n - 1) \vdots 9$.

44. а) $n(14n^2 + 9n + 1) \vdots 6$;

б) $(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) \vdots 9$;

в) $(36^n - 1) \vdots 5$;

г) $(11^{n+1} + 12^{2n-1}) \vdots 133$;

д) $(9^{n+1} - 18n - 9) \vdots 18$.

45. а) $(n^5 - n) \vdots 5$;

б) $(2n^3 + 3n^2 + 7n) \vdots 3$;

в) $(5^{2n-1} + 1) \vdots 2$;

г) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$;

д) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$.

46. а) $(n^3 + 11n) \vdots 3$;

б) $n(n+1)(n+2)(n+3) \vdots 4$;

в) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \vdots 9$;

г) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) \vdots 133$;

д) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$.

47. а) $(n^3 - 7n + 6) \vdots 6$;

б) $(2n^2 + n)(7n + 1) \vdots 3$;

в) $(8 \cdot 2^{3n} - 1) \vdots 7$;

г) $(5^{n+3} \cdot 2^n - 125) \vdots 45$;

д) $(3^{2n+2} - 8n - 9) \vdots 64$.

48. а) $(n^3 + 5n) \vdots 3$;

б) $(n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n) \vdots 24$;

в) $(7^{2n} - 1) \vdots 8$;

г) $(2 \cdot 7^n + 1) \vdots 3$;

д) $(4^n + 15n - 1) \vdots 3$.

49. а) $n(2n^2 - 3n + 1) \vdots 6$;

б) $(n^7 - n) \vdots 7$;

в) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 19$;

г) $(6^{2n} - 1) \vdots 35$;

д) $(9^n - 8n - 1) \vdots 8$.

50. а) $(n^3 + 5n) \vdots 6$;

б) $(2n^2 + n)(7n + 1) \vdots 6$;

в) $(3^{2n+1} + 5) \vdots 8$;

г) $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$;

д) $(7^n + 3n - 1) \vdots 3$.

В задачах 51 – 60 доказать тождество в множестве целых неотрицательных чисел по указанной в задаче переменной, применяя метод математической индукции.

51. $(a + b)\, c = ac + bc$ (по b).

52. $(a \cdot b)\, c = a\, (b \cdot c)$ (по b).

53. $a\, (b + c) = ab + ac$ (по a).

54. $a\, (b \cdot c) = (a \cdot b)\, c$ (по c).

55. $a\, (b + c) = ab + ac$ (по b).

56. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (по b).

57. $1 + a = a'$.

58. $a \cdot b = b \cdot a$ (по b).

59. $a + b = b + a$ (по b).

60. $a + 1 = a'$.

Задачи по теме «Множество целых чисел»

61. Докажите, что $(a+m,a)+(b+n,b)\sim(c+m+n,c)$ и $(a+m,a)\times$ $\times\,(b+n,b)\sim(c+m\cdot n,c)$.

62. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a,b)(n+1,n)\sim(a,b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

63. Найдите значение выражения $\big((3,5)+(7,16)\big)\big((6,4)-(7,11)\big)$. Сравните ответ с результатом, получаемым путём замены пар (a,b) разностями $a-b$ и последующим вычислением.

64. Докажите, что для любой пары (a,b) имеет место отношение $(a,b)(a+1,b)\sim(a,b)(a,b)+(a,b)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

65. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a,b)+(a+1,b)\sim\big((a,b)+(a,b)\big)+(n+1,n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

66. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n имеет место отношение $(a,b)+(a,b)\sim(a,b)(n+2,n)$. Выполните проверку данного отношения в целых числах.

67. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a,b)+(n,n)\sim(a,b)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

68. Докажите, что для любой пары (a,b) и любого натурального числа n выполняется отношение $(a,b)(n,n)\sim(m,m)$. Сформулируйте это правило в целых числах.

69. Найдите значение выражения $\big((7,3)+(9,20)\big)\big((5,3)-(9,13)\big)$. Сравните ответ с результатом, получаемым путём замены пар (a,b) разностями $a-b$ и последующим вычислением.

70. Найдите значение выражения $(5,12)\big((8,4)+(17,29)\big)-(7,1)$. Сравните ответ с результатом, получаемым путём замены пар (a,b) разностями $a-b$ и последующим вычислением.

Задачи по теме «Множество рациональных чисел»

В задачах 71 – 80 указать, при каких условиях для положительных рациональных чисел r_1, r_2, r_3 имеет место равенство, и доказать его.

71. $r_1 : (r_2 : r_3) = (r_1 : r_2) : r_3$.
72. $r_1 - (r_2 - r_3) = (r_1 + r_3) - r_2$.
73. $r_1 : (r_2 \cdot r_3) = (r_1 : r_2) : r_3$.
74. $r_1 (r_2 : r_3) = (r_1 \cdot r_2) : r_3$.
75. $r_1 - (r_2 - r_3) = (r_1 - r_2) + r_3$.
76. $(r_1 - r_2) : r_3 = r_1 : r_3 - r_2 : r_3$.
77. $(r_1 - r_2) - r_3 = r_1 - (r_2 + r_3)$.
78. $(r_1 + r_2) : r_3 = r_1 : r_3 + r_2 : r_3$.
79. $r_1 - (r_2 + r_3) = (r_1 - r_3) - r_2$.
80. $r_1 (r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$.

В задачах 81 – 90 выяснить, какие из обыкновенных дробей могут быть записаны в виде: а) конечных десятичных дробей; б) периодических десятичных дробей. В первом случае дробь обратить в десятичную (не производя деления числителя на знаменатель), во втором случае определить длины периода и предпериода десятичной дроби.

81. $\frac{275}{2000}, \frac{176}{656}, \frac{616}{4480}, \frac{594}{605}, \frac{2044}{2560}, \frac{999}{1375}$.
82. $\frac{561}{1650}, \frac{693}{792}, \frac{357}{1050}, \frac{8225}{8400}, \frac{454}{2050}, \frac{315}{365}$.
83. $\frac{90}{2200}, \frac{2214}{2220}, \frac{189}{450}, \frac{796}{800}, \frac{404}{548}, \frac{2388}{2400}$.
84. $\frac{165}{1750}, \frac{356}{640}, \frac{462}{1626}, \frac{1246}{2240}, \frac{297}{396}, \frac{1008}{1010}$.
85. $\frac{588}{800}, \frac{231}{242}, \frac{495}{4625}, \frac{125}{325}, \frac{1323}{1800}, \frac{3416}{3500}$.
86. $\frac{165}{4875}, \frac{154}{448}, \frac{409}{410}, \frac{792}{808}, \frac{363}{1500}, \frac{847}{1750}$.
87. $\frac{378}{450}, \frac{1022}{1780}, \frac{1078}{2100}, \frac{102}{260}, \frac{58}{60}, \frac{712}{2000}$.
88. $\frac{175}{180}, \frac{472}{480}, \frac{3096}{4400}, \frac{522}{1200}, \frac{222}{542}, \frac{674}{675}$.
89. $\frac{396}{404}, \frac{740}{7500}, \frac{189}{900}, \frac{409}{1600}, \frac{87}{110}, \frac{256}{2400}$.
90. $\frac{275}{286}, \frac{225}{1095}, \frac{1885}{2000}, \frac{1131}{1200}, \frac{3125}{5000}, \frac{65}{1650}$.

В задачах 91 – 100 периодические десятичные дроби обратить в обыкновенные (с обоснованием правил) и найти значение выражения.

91. $0,(615384) \cdot 0,5(90) : 0,(81) + 0,(5)$.

92. $0,(714285) \cdot 0,58(3) : 0,(45) - 0,41(6)$.

93. $0,3(18) \cdot 0,(285714) : 0,(54) + 0,8(3)$.

94. $0,(307692) \cdot 0,(481) : 0,2(037) + 0,(27)$.

95. $0,(615384) \cdot 0,29(54) : 0,4(09) + 0,(5)$.

96. $0,(714285) \cdot 0,(63) : 0,(540) + 0,15(90)$.

97. $0,5(90) \cdot 0,(692307) : 0,(729) + 0,4(39)$.

98. $0,(148) \cdot 0,47(72) : 0,(538461) + 0,(20)$.

99. $0,(925) \cdot 0,61(36) : 0,(714285) - 0,0(45)$.

100. $0,(615384) \cdot 0,5(90) : 0,(54) - 0,1(6)$.

В задачах 101 – 110 решить уравнение, используя зависимость между результатом и компонентами действий.

101. $\left(1 - \left(\frac{484}{847} - \frac{235}{329}x\right) : \frac{76}{133}\right) : \frac{273}{364} + \frac{79}{237} = \frac{46}{69}$.

102. $\left(1 - \left(\frac{338}{1183} - \frac{231}{539}x\right) : \frac{243}{567}\right) : \frac{155}{186} - \frac{51}{170} = \frac{89}{178}$.

103. $\left(1 - \left(\frac{244}{305} - \frac{201}{335}x\right) : \frac{189}{270}\right) : \frac{145}{203} + \frac{3}{30} = \frac{72}{80}$.

104. $\left(1 - \left(\frac{89}{178} - \frac{363}{605}x\right) : \frac{364}{455}\right) : \frac{338}{507} + \frac{71}{568} = \frac{217}{248}$.

105. $\left(1 - \left(\frac{267}{712} - \frac{224}{256}x\right) : \frac{201}{268}\right) : \frac{120}{144} + \frac{46}{345} = \frac{168}{180}$.

106. $\left(1 - \left(\frac{324}{567} - \frac{155}{217}x\right) : \frac{144}{252}\right) : \frac{135}{180} + \frac{89}{267} = \frac{112}{168}$.

107. $\left(1 - \left(\frac{118}{413} - \frac{129}{301}x\right) : \frac{102}{238}\right) : \frac{155}{186} - \frac{57}{190} = \frac{79}{158}$.

108. $\left(1 - \left(\frac{168}{210} - \frac{249}{415}x\right) : \frac{182}{260}\right) : \frac{170}{238} + \frac{19}{190} = \frac{513}{517}$.

109. $\left(1 - \left(\frac{117}{234} - \frac{228}{380}x\right) : \frac{388}{485}\right) : \frac{178}{267} + \frac{38}{304} = \frac{259}{296}$.

110. $\left(1 - \left(\frac{117}{312} - \frac{217}{248}x\right) : \frac{219}{292}\right) : \frac{155}{186} + \frac{62}{465} = \frac{406}{435}$.

Задачи по теме «Множество действительных чисел»

В задачах 111 – 120 найти значение с точностью до 0,001.

111. $\dfrac{\left(\frac{3}{7}\sqrt{10}+\frac{7}{6}\right):\sqrt{7}}{\left(\frac{7}{6}\sqrt{7}-\frac{3}{7}\right):\sqrt{10}}$.

112. $\dfrac{\left(\frac{2}{11}\sqrt{12}+\frac{11}{7}\right):\sqrt{5}}{\left(\frac{11}{7}\sqrt{5}-\frac{2}{11}\right):\sqrt{12}}$.

113. $\dfrac{\left(\frac{4}{7}\sqrt{11}+\frac{7}{3}\right):\sqrt{6}}{\left(\frac{7}{3}\sqrt{6}-\frac{4}{7}\right):\sqrt{11}}$.

114. $\dfrac{\left(\frac{6}{13}\sqrt{13}+\frac{13}{9}\right):\sqrt{8}}{\left(\frac{13}{9}\sqrt{8}-\frac{6}{13}\right):\sqrt{13}}$.

115. $\dfrac{\left(\frac{5}{6}\sqrt{14}+\frac{22}{7}\right):\sqrt{3}}{\left(\frac{22}{7}\sqrt{3}-\frac{5}{6}\right):\sqrt{14}}$.

116. $\dfrac{\left(\frac{7}{12}\sqrt{15}+\frac{12}{7}\right):\sqrt{7}}{\left(\frac{12}{7}\sqrt{7}-\frac{7}{12}\right):\sqrt{15}}$.

117. $\dfrac{\left(\frac{4}{7}\sqrt{12}+\frac{7}{6}\right):\sqrt{5}}{\left(\frac{7}{4}\sqrt{5}-\frac{4}{7}\right):\sqrt{12}}$.

118. $\dfrac{\left(\frac{5}{13}\sqrt{8}+\frac{13}{7}\right):\sqrt{3}}{\left(\frac{13}{11}\sqrt{3}-\frac{2}{13}\right):\sqrt{8}}$.

119. $\dfrac{\left(\frac{4}{17}\sqrt{11}+\frac{17}{3}\right):\sqrt{18}}{\left(\frac{17}{3}\sqrt{18}-\frac{4}{17}\right):\sqrt{11}}$.

120. $\dfrac{\left(\frac{6}{11}\sqrt{13}+\frac{11}{9}\right):\sqrt{22}}{\left(\frac{13}{11}\sqrt{22}-\frac{6}{13}\right):\sqrt{13}}$.

121. Доказать, что числа $\sqrt{7}$ и $\sqrt{10}$ иррациональные.

122. Доказать, что числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{12}$ иррациональные.

123. Доказать, что числа $\sqrt{11}$ и $\sqrt{6}$ иррациональные.

124. Доказать, что числа $\sqrt{8}$ и $\sqrt{13}$ иррациональные.

125. Доказать, что числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{14}$ иррациональные.

126. Доказать, что числа $\sqrt{7}$ и $\sqrt{15}$ иррациональные.

127. Доказать, что числа $\sqrt{12}$ и $\sqrt{5}$ иррациональные.

128. Доказать, что числа $\sqrt{8}$ и $\sqrt{3}$ иррациональные.

129. Доказать, что числа $\sqrt{18}$ и $\sqrt{17}$ иррациональные.

130. Доказать, что числа $\sqrt{13}$ и $\sqrt{22}$ иррациональные.

Задачи по теме «Построение фигур циркулем и линейкой»

1. Задачи на построение треугольника циркулем и линейкой

Построить треугольник:

а) по трём сторонам;

б) двум сторонам и углу между ними;

в) стороне и двум прилежащим углам;

г) двум сторонам и углу, лежащему против большей из них;

д) двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них;

е) двум углам и стороне, лежащей против одного из них;

ж) основанию, высоте и боковой стороне;

з) углу и двум высотам, проведённым на стороны угла;

и) двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне;

к) основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

Построить равнобедренный треугольник:

а) по основанию и боковой стороне;

б) основанию и прилежащему углу;

в) боковой стороне и углу при вершине;

г) боковой стороне и углу при основании;

д) боковой стороне и высоте;

е) основанию и углу при вершине;

ж) основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону;

з) углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону;

и) боковой стороне и высоте, опущенной на боковую сторону.

Построить равносторонний треугольник по стороне.

Построить прямоугольный треугольник:

а) по двум катетам;

б) равнобедренный, по основанию и боковой стороне;

в) по гипотенузе и острому углу;

г) катету и гипотенузе (два способа);

д) катету и острому углу, прилежащему к катету;

е) катету и противолежащему острому углу.

2. Задачи на построение четырёхугольника циркулем и линейкой

Построить параллелограмм:

а) по двум неравным сторонам и одной диагонали;

б) стороне и двум диагоналям;

в) двум диагоналям и углу между ними;

г) основанию, высоте и диагонали;

д) двум диагоналям и высоте.

Построить прямоугольник:

а) по диагонали и углу между диагоналями;

б) стороне и диагонали.

Построить ромб:

а) по стороне и диагонали;

б) двум диагоналям;

в) высоте и диагонали;

г) углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла;

д) диагонали и противолежащему углу.

Построить квадрат:

а) по диагонали;

б) стороне;

в) сумме стороны и диагонали.

Построить трапецию:

а) по диагоналям, углу между ними и боковой стороне;

б) двум параллельным сторонам и двум диагоналям;

в) одному её углу, двум диагоналям и средней линии.

3. Использование геометрических мест точек при решении задач на построение

А. На данной прямой найти точку, равноудалённую от двух точек на прямой.

Б. Построить точку, равноудалённую от всех вершин треугольника.

В. Построить точку, равноудалённую от всех сторон треугольника.

Г. На прямой, пересекающей стороны, найти точку, равноудалённую от сторон данного угла.

Д. На прямой найти точку, равноудалённую от сторон угла.

Е. В треугольнике ABC найти точку, равноудалённую от сторон угла A и вершин B и C.

Ж. Найти точку, равноудалённую от сторон угла A и находящуюся на расстоянии b от точки A.

З. Найти точку, равноудалённую от вершин B и C треугольника и находящуюся на расстоянии b от вершины A.

Задачи по теме «Элементы конструктивной геометрии»

1. Построить треугольник по двум углам α, β и периметру p.
2. Построить параллелограмм, зная середины его трех сторон.
3. Построить треугольник по основанию и двум медианам, проведенным к боковым сторонам.
4. Найти ГМТ, расположенных внутри данного треугольника AOB и отстоящих вдвое дальше от стороны OA, чем от стороны OB.
5. Построить треугольник, зная биссектрису, медиану и высоту, проведенные из одной вершины.
6. Построить треугольник по высотам h_b, h_c и медиане m_c.
7. Построить прямоугольный треугольник по катету, если известно, что его гипотенуза втрое больше другого катета.
8. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.
9. Построить касательную из данной точки к данной окружности.

10. Построить треугольник по двум медианам m_a, m_b и высоте h_a.

11. Даны отрезок AB и окружность. Построить на данной окружности точку X, расстояние от которой до точки A вдвое больше, чем до точки B.

12. Построить треугольник по разности углов при основании и боковым сторонам.

13. Через точку A, лежащую внутри угла, провести прямую так, чтобы её отрезок, заключённый между сторонами угла, делился точкой A пополам.

14. На прямой даны четыре точки B, P, H, C. Построить $\triangle ABC$, высота которого проходит через H, а биссектриса – через P.

15. Построить треугольник по стороне a, углу α и медиане m_a.

16. Построить треугольник по стороне a, углу α и медиане m_b.

17. Построить равносторонний треугольник, вершины которого лежат на трёх данных параллельных прямых.

18. Построить треугольник по трём медианам.

19. Построить треугольник по трём высотам.

20. Дан единичный отрезок. Построить отрезок, длина которого была бы равна $2 - \sqrt{2}$.

21. Построить отрезки по формулам $x = \frac{a^3+b^3}{a^2}$, $y = \sqrt[4]{a^3b - b^3a}$.

22. Построить отрезки по формулам $x = \frac{a^3+b^3}{ab+ac}$, $y = \sqrt[4]{abcd}$.

23. Как построить выражения $x = \sqrt{a^2 - \frac{b^5}{a^3}}$, $y = \sqrt[4]{\frac{a^5-b^5+c^5}{a+b+c}}$?

24. Дан единичный отрезок. Построить отрезок, длина которого была бы равна $\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

25. Построить отрезок $y = \sqrt[4]{a^4 - a^2 \cdot b^2 + b^4}$ алгебраическим методом.

Задачи по теме «Решение задач на построение методом преобразования»

1. Построить трапецию по основаниям и диагоналям.
2. Построить трапецию по стороне, диагоналям и углу между диагоналями.
3. Построить треугольник по трём его медианам.
4. Даны две точки A и B по разные стороны от данной прямой a. Отложить на прямой a отрезок MN, равный данному отрезку l, так, чтобы длина ломаной $AMNB$ была наименьшей.
5. Из трёх данных прямых две параллельны, а третья их пересекает. Построить равносторонний треугольник с вершинами на этих прямых и стороной, равной данному отрезку a.
6. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между двумя данными параллельными прямыми, был равен данному отрезку.
7. Между сторонами данного угла поместить отрезок, равный данному отрезку l, так, чтобы он был параллелен данной прямой, пересекающей обе стороны данного угла.
8. Между двумя параллельными прямыми дана точка. Провести окружность, проходящую через эту точку и касательную к данным прямым (решить методом переноса).
9. Между сторонами данного угла поместить отрезок, равный данному, так, чтобы он отсекал от стороны угла равные отрезки (решить методом переноса).
10. Построить параллелограмм, основанием которого служит данный отрезок, а две другие его вершины лежат на двух данных окружностях.
11. Провести параллельно данной прямой a секущую к двум данным окружностям так, чтобы сумма (или разность) образуемых ею хорд была равна данному отрезку.

12. Построить четырёхугольник по трём сторонам и двум углам, прилежащим к неизвестной стороне.
13. Построить четырёхугольник, зная четыре его стороны и угол между двумя противоположными его сторонами.
14. Построить четырёхугольник по диагоналям, углу между ними и двум смежным (или несмежным) его сторонам.
15. На боковых сторонах AB и AC треугольника ABC найти соответственно такие точки X и Y, чтобы прямая XY была параллельна прямой BC и выполнялось соотношение $BX = AY$.
16. Между пунктами A и B расположены два канала. Где выбрать места для мостов через эти каналы, чтобы путь из A в B через эти мосты был кратчайшим? (Предполагается, что берега каждого канала – параллельные прямые и мосты должны быть перпендикулярны берегам.)
17. Повернуть вокруг данной точки M на данный угол α в указанном направлении: а) данную окружность; б) данный квадрат.
18. Построить равносторонний треугольник, имеющий одной своей вершиной данную точку A, а две другие вершины расположены на данных параллельных прямых.
19. Из данной точки P как из центра описать дугу окружности так, чтобы концы её лежали на данных двух окружностях, а градусная мера её была равна градусной мере данного угла.
20. Через данную точку P провести прямую так, чтобы отрезок её, заключённый между двумя данными окружностями, делился этой точкой пополам.
21. В данный параллелограмм вписать квадрат.
22. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник.
23. Построить треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

24. Найти на двух данных прямых a и b две точки, симметричные относительно третьей данной прямой c.

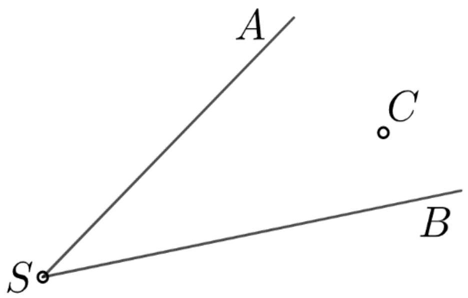
25. Даны две окружности. Найти на данной прямой AB такую точку X, чтобы касательные, проведённые из этой точки к данным окружностям, были наклонены к AB под равными углами.

26. Построить четырёхугольник $ABCD$ по четырём его сторонам, если известно, что его диагональ AC делит угол A пополам.

27. Построить треугольник по высоте, разности отрезков, на которые она делит основание, и разности углов, прилежащих к основанию.

28. Даны ΔABC и точка M внутри него. Построить равнобедренный треугольник с вершиной в точке M так, чтобы его основание было параллельно стороне AB и концы оснований находились на прямых AC и BC.

29. Дана прямая a и две точки A и B по разные стороны от неё. Найти на данной прямой a такую точку C, чтобы разность расстояний от неё до двух данных точек A и B была наибольшей.



30. Дорога SA пересекает реку SB под острым углом. Гонец из сторожевого пункта C должен по возможности скорее добраться до дороги SA (чтобы с попутной машиной передать письмо), но при этом ему нужно по пути напоить коня в реке SB. Как он должен ехать?

31. Построить ромб так, чтобы одна его диагональ была равна данному отрезку a и лежала на данной прямой, а другие две вершины ромба лежали соответственно на двух данных окружностях.

32. На основании данного равнобедренного треугольника ABC найти точку, разность расстояний от которой до боковых сторон равна данному отрезку.

33. Даны две окружности и прямая между ними. Построить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины были на окружностях, а одна из высот лежала на данной прямой.

34. Даны точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой a. Расположить на этой прямой отрезок XY, равный данному отрезку l, так, чтобы ломаная $AXYB$ была наименьшей длины.

35. На бильярдном столе в двух точках A и B находились два шара. После удара в шар A он, отразившись от n последовательных бортов, попал в шар B. Построить ломаную, по которой при этом двигался шар A. (Решите задачу отдельно при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены теоретические аспекты некоторых вопросов, базирующихся на числовых множествах и геометрическом материале. Задания книги направлены на активную умственную деятельность будущего учителя начальной школы, приучение его к математической культуре, освоение техники выполнения практических заданий, а также методики работы с инструментами построений на плоскости – циркулем и линейкой.

Студент, вооружённый теоретическими основами базовых разделов геометрии и числовых множеств, владеющий умениями анализировать, исследовать решение задачи, грамотно и содержательно выстраивать доказательство математических предложений, считается усвоившим учебную программу дисциплины «Актуальные проблемы математической подготовки учителя начальных классов», и его знания отвечают требованиям федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования и начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Аргунов, Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М. : Учпедгиз, 1957. – 266 с.

2. Сборник задач по элементарной геометрии / Л. С. Атанасян [и др.]. – М. : Просвещение, 1964. – 96 с.

3. Базылев, В. Т. Геометрия / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – М. : Просвещение, 1975. – Ч. 2 : Проективное пространство и методы изображений. – 367 с.

4. Виленкин, Н. Я. Математика. 4 – 5 классы. Теоретические основы / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1974. – 223 с.

5. Задачник-практикум по математике / Н. Я. Виленкин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 208 с.

6. Лаврова, Н. Н. Задачник-практикум по математике / Н. Н. Лаврова, Л. П. Стойлова. – М. : Просвещение, 1985. – 184 с.

7. Пышкало, А. М. Геометрия в I – IV классах / А. М. Пышкало. – М. : Просвещение, 1965. – 244 с.

8. Стойлова, Л. П. Математика : учебник / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2013. – 271 с. – ISBN 978-5-7695-9911-8.

9. Стойлова, Л. П. Теоретические основы начального курса математики / Л. П. Стойлова. – М. : Академия, 2014. – ISBN 978-5-4468-0768-0.

10. Тихомирова, С. В. Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Целые неотрицательные числа.

Величины : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-1394-0.

Дополнительная литература

11. Геометрия : учеб. для 7-го класса общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров [и др.]. – М. : Просвещение, 2008. – 176 с. – ISBN 978-5-09-019005-3.

12. Александров, А. Д. Геометрия : учеб. для 8-го класса общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2009. – 176 с. – ISBN 978-5-09-016668-3.

13. Александров, А. Д. Геометрия : учеб. для 9-го класса общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2010. – 175 с. – ISBN 978-5-09-010501-0.

14. Истомина, Н. Б. Методика обучения математике в начальной школе. Развивающее обучение / Н. Б. Истомина. – 2-е изд., испр. – Смоленск : Ассоциация XXI век, 2009. – 288 с. – ISBN 978-5-89308-699-7.

15. Назаретский, В. Е. Задачник-практикум по элементарной геометрии / В. Е. Назаретский, Н. Г. Федин. – М. : Учпедгиз, 1961. – 132 с.

16. Натуральные числа. Изучаем. Считаем. Делим : метод. рекомендации / сост. С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 52 с.

17. Тихомирова, С. В. Роль и место симметрии в геометрическом материале начальной школы // Интеллектуальный потенциал общества как драйвер инновационного развития науки : сб. ст. Междунар. науч.-практ. конф. (26 июня 2019 г., г. Тюмень). В 2 ч. Ч. 2. – Уфа : OMEGA SCIENCE, 2019. – С. 148 – 153. – ISBN 978-5-907238-01-5.

18. Тихомирова, С. В. Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов. Множества / С. В. Тихомирова. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с. – ISBN 978-5-9984-1234-9.

19. Изучение числовых множеств : метод. рекомендации / сост. И. И. Цыганок. – Владимир : ВГПУ, 2003. – 45 с.

20. Истомина, Н. Б. Наглядная геометрия. Тетрадь по математике. 1 класс / Н. Б. Истомина, З. Б. Редько. – М. : Линка-пресс, 2016. – 64 с. – ISBN 978-5-904347-31-4.

Учебное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Учебное пособие

Редактор Т. В. Евстюничева
Технический редактор Ш. В. Абдуллаев
Корректор Н. В. Пустовойтова
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 20.12.21.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,84. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.