Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

А.В. КАЛЕБИН Р.С. КСЕНОФОНТОВ

МАТЕМАТИКА

Пособие для поступающих в ВлГУ

Владимир 2003

УДК 51(07)

Рецензенты
Кандидат педагогических наук, доцент
Владимирского государственного педагогического университета
И.Т. Ткачёв
Кандидат физико-математических наук, доцент
Владимирского государственного университета
В.П. Собакин

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Калебин А.В., Ксенофонтов Р.С.
Математика. Пособие для поступающих в ВлГУ / Владим. гос. ун-т; Владимир, 2003. 172 с.
ISBN 5-89368-386-2

Содержится справочный материал по основным разделам курса и решение типичных задач. Все задачи взяты из централизованных тестов и тестов вступительных экзаменов ВлГУ за 2000–2002 гг., а также из билетов устных экзаменов за 1996–2001 гг. Кроме того, использовано «Пособие по математике для поступающих в ВлГУ» А.Г. Сорокиной и В.А. Скляренко.
Предназначено для абитуриентов, поступающих в вуз.
ISBN 5-89368-386-2

УДК 51(07)

ISBN 5-89368-386-2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Теорема Безу. Если x_1 является корнем некоторого многочлена, то этот многочлен делится на $x - x_1$.

Пример 1. Решить уравнение $x^3-4x^2-27x+90=0$

Решение. Подставляя в данное уравнение числа ± 1, ± 2, ± 3, …, найдём первый корень уравнения $x_1 = 3$. По теореме Безу левая часть уравнения делится на $x-3$. Процесс деления показан ниже.

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2-27x+90 & x-3 \\ \underline{x^3-3x^2} & x^2-x-30 \\ -x^2-27x+90 & \\ \underline{-x^2+3x} & \\ -30x+90 & \\ \underline{-30x+90} & \\ 0 & \end{array}$$

Приравниваем к нулю то, что получилось в результате деления: $x^2-x-30=0$ и находим остальные корни $x_2 = -5$, $x_3 = 6$. *Ответ:* 3 ; –5 ; 6 .

Пример 2. Решить уравнение $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

Решение. С помощью перебора найдём первый корень $x_1 = 2$. Многочлен $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120$ разделим на $x - 2$. Получим уравнение $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$. С помощью перебора найдём второй корень $x_2 = 3$. Многочлен $x^3 - 2x^2 - 23x + 60$ разделим на $x - 3$. Получим уравнение $x^2 + x - 20 = 0$. Его корни: $x_3 = 4$, $x_4 = -5$. *Ответ:* 2 ; 3 ; 4 ; –5 .

Пример 3. Решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Решение. С помощью перебора найдём первый корень $x_1 = 2$. Многочлен $x^3 + 0x^2 - 12x + 16$ разделим на $x - 2$. Получим уравнение $x^2 + 2x - 8 = 0$. Его корни: $x_2 = 2$, $x_3 = -4$. *Ответ:* 2 ; –4 .

Пример 4. Решить уравнение $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = x^2 + 3x - 14$.

Решение. Область допустимых значений (*ОДЗ*): $x-3 \neq 0$, т.е. $x \neq 3$. Заметим, что значение $x=3$ является корнем числителя x^2-2x-3 . По теореме Безу числитель делится на $x-3$. Разделив числитель на $x-3$, получим $x+1$. Следовательно, уравнение примет вид $x+1=x^2+3x-14$. Корни этого уравнения $x_1 = 3 \notin ОДЗ$, $x_2 = -5 \in ОДЗ$. *Ответ:* –5 .

Пример 5. Найти все целые значения k , при которых дробь $\dfrac{15k^2 - 11k + 29}{5k - 2}$ является также целым числом.

Решение. Разделим числитель на знаменатель с остатком.

$$\begin{array}{r|l} 15k^2-11k+29 & 5k-2 \\ \underline{15k^2-6k} & 3k-1 \\ -5k+29 & \\ \underline{-5k+\ \ 2} & \\ 27 & \end{array}$$

Данная дробь равна частному плюс остаток, делённый на знаменатель, т.е. $\frac{15k^2-11k+29}{5k-2}=3k-1+\frac{27}{5k-2}$. Следовательно, достаточно выяснить, при каких целых значениях k дробь $\frac{27}{5k-2}$ является целым числом. Числитель этой дроби 27 делится на числа ±1 , ±3 , ±9 , ±27 . Приравниваем $5k-2$ к каждому из этих чисел и решаем уравнения $5k-2=\pm1$; $5k-2=\pm3$; $5k-2=\pm9$; $5k-2=\pm27$. Множество корней всех этих уравнений $\left\{\frac{3}{5};\frac{1}{5};1;-\frac{1}{5};\frac{11}{5};-\frac{7}{5};\frac{29}{5};-5\right\}$. *Ответ:* 1 ; –5 .

<u>*Пример 6.*</u> Найти среднее арифметическое всех корней уравнения .

$$\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}.$$

Решение. После раскрытия скобок получим $\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$. Обозначим $a=x^2+x$. Тогда уравнение примет вид $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$. Дальнейший ход решения :

$\frac{\frac{1}{4}}{a^2+\frac{1}{4}a}=\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4a^2+a}=\frac{1}{4}$; $4a^2+a-4=0$; $a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{65}}{8}$. Сделав обратную замену, получим два уравнения: 1) $x^2+x=\frac{-1+\sqrt{65}}{8}$ и 2) $x^2+x=\frac{-1-\sqrt{65}}{8}$. Второе уравнение не имеет решений, так как его дискриминант отрицателен. Первое уравнение имеет два корня $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{65}}{2}}}{2}$. Среднее арифметическое этих корней равно $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{2}$. *Ответ:* $-\frac{1}{2}$.

<u>*Пример 7.*</u> Найти целые корни уравнения $\frac{3x^2+6x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}=2$.

Решение. $3\cdot\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}=2$. Обозначим $a=\frac{x^2+2x}{x^2-x+1}$. Получим уравнение $3a-\frac{1}{a}=2$. Его корнями являются числа $a_1=1$, $a_2=-\frac{1}{3}$. После

обратной замены получим два уравнения: 1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-x+1}=1$ и 2) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-x+1}=-\dfrac{1}{3}$.
Корни этих уравнений: $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_2=-1$, $x_3=-\dfrac{1}{4}$. *Ответ:* -1 .

<u>*Пример 8.*</u> Найти рациональные корни уравнения $x+\dfrac{1}{x}+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=6$.

Решение. Пусть $a=x+\dfrac{1}{x}$. Тогда $a^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$, т.е. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=a^2-2$. После замены переменной получим уравнение $a+2(a^2-2)=6$, корнями которого являются числа $a_1=2$, $a_2=-\dfrac{5}{2}$. После обратной замены получим два уравнения: 1) $x+\dfrac{1}{x}=2$ и 2) $x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{5}{2}$. Корни этих уравнений $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-\dfrac{1}{2}$ рациональны. Ответ: 1 ; -2 ; $-\dfrac{1}{2}$.

<u>*Пример 9.*</u> Решить уравнение $\sqrt{4x-3}=\sqrt{15x+4}-\sqrt{5x+1}$.
Решение. Радикал, перед которым стоит «минус», перенесём в другую часть уравнения. Получим $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$. *ОДЗ* определяется условиями: $4x-3\ge 0$, $15x+4\ge 0$, $5x+1\ge 0$. Возведём уравнение в квадрат. $4x-3+2\cdot\sqrt{4x-3}\cdot\sqrt{5x+1}+5x+1=15x+4$. После преобразований получим $2\cdot\sqrt{20x^2-11x-3}=6x+6$; $\sqrt{20x^2-11x-3}=3x+3$. Так как левая часть последнего уравнения неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной. Отсюда возникает дополнительное условие (*ДУ*) : $3x+3\ge 0$. После повторного возведения в квадрат получим уравнение $20x^2-11x-3=9x^2+18x+9$, корнями которого являются числа $x_1=3$, $x_2=-\dfrac{4}{11}$. Первый корень удовлетворяет всем условиям, определяющим *ОДЗ* и *ДУ*, второй корень $\notin$*ОДЗ*. *Ответ:* 3 .

<u>*Пример 10.*</u> Найти количество различных корней уравнения . $\sqrt{\sqrt{11x^2+1}-2x}=x-1$.
Решение. *ОДЗ*: $\sqrt{11x^2+1}-2x\ge 0$. *ДУ*: $x-1\ge 0$. Возведём уравнение в квадрат. Получим $\sqrt{11x^2+1}-2x=x^2-2x+1$; $\sqrt{11x^2+1}=x^2+1$. Ещё раз возведём в квадрат . Получим $11x^2+1=x^4+2x^2+1$; $x^4-9x^2=0$; $x^2(x^2-9)=0$. Последнее уравнение имеет три корня 0 , 3 , –3 , из которых лишь $x=3$ удовлетворяет *ОДЗ* и *ДУ*. *Ответ:* 1 .

<u>*Пример 11.*</u> Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{16x}}=2{,}5$.

Решение. Сделаем замену переменной $a=\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}}$. *ДУ*: $a>0$. Получим уравнение $a+\dfrac{1}{a}=2{,}5$, корнями которого являются числа $a_1=2$, $a_2=\dfrac{1}{2}$. Оба значения удовлетворяют *ДУ.* После обратной замены получим два уравнения $\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}}=2$ и $\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}}=\dfrac{1}{2}$, корнями которых являются числа $x_1=-\dfrac{1}{3}$ и $x_2=-\dfrac{1}{63}$. *Ответ:* $-\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{63}$.

<u>*Пример 12.*</u> Решить уравнение $\sqrt{2x^2+5x+1}=5-2x^2-5x$.

Решение. С помощью замены a=2x^2+5x приведём уравнение к виду $\sqrt{a+1}=5-a$. *ОДЗ*: $a+1\ge 0$. *ДУ*: $5-a\ge 0$. Возведём уравнение в квадрат. $a+1=25-10a+a^2$; $a^2-11a+24=0$; $a_1=8$ (не удовлетворяет *ДУ*) ; $a_2=3$ (удовлетворяет *ОДЗ* и *ДУ*). После обратной замены получим: $2x^2+5x=3$, откуда

$x_1=-3$, $x_2=\dfrac{1}{2}$. *Ответ:* -3 ; $\dfrac{1}{2}$.

В примерах 13 и 14 рекомендуем делать проверку, подставляя найденные корни в данное уравнение.

<u>*Пример 13.*</u> Решить уравнение $\sqrt{5x+3-2x^2}=(3x+1)\cdot\sqrt{3-x}$.

Решение. Приравняем к нулю выражение $5x+3-2x^2$, найдём его корни и разложим на множители. Получим $5x+3-2x^2=-2(x-3)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=(3-x)(2x+1)$.

Опуская детали, мы приводим главные моменты процесса решения. $\sqrt{(3-x)(2x+1)}-(3x+1)\cdot\sqrt{3-x}=0$; $\sqrt{3-x}\cdot\left(\sqrt{2x+1}-3x-1\right)=0$; $\sqrt{3-x}=0$ или $\sqrt{2x+1}-3x-1=0$. Корни этих уравнений $x_1=3$, $x_2=0$. *Ответ:* 0 ; 3 .

<u>*Пример 14.*</u> Решить уравнение $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}=\dfrac{x}{2}$.

Решение. Умножив обе части уравнения на сумму соответствующих корней, получим $\left(\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{3x-3}+\sqrt{x-3}\right)=\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{3x-3}+\sqrt{x-3}\right)$. После упрощений получим $2x=\dfrac{x}{2}\left(\sqrt{3x-3}+\sqrt{x-3}\right)$; $4x-x\left(\sqrt{3x-3}+\sqrt{x-3}\right)=0$; $x\left(4-\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-3}\right)=0$. Дальнейший ход решения очевиден. *Ответ:* 4 .

<u>*Пример 15.*</u> Найти целый корень уравнения $\sqrt{2x-11}+\sqrt{8-x}=\dfrac{\sqrt{x-4}+1}{x-6}$.

Решение. *ОДЗ* : $\begin{cases} 2x-11 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases}$. Отсюда следует, что $x \in [\,5{,}5\,;6\,) \cup (\,6\,;8\,]$.

Целые числа, принадлежащие *ОДЗ* : $7\ ;\ 8$. Подставляя эти числа в данное уравнение, убеждаемся в том, что лишь число 7 является корнем уравнения.
Ответ: 7 .

<u>*Пример 16.*</u> Решить уравнение $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-12} = 1$.

Решение. Один из радикалов перенесём в правую часть уравнения, затем обе части полученного уравнения возведём в куб. При этом используются формулы: $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a\ \ ;\ \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Итак: $\sqrt[3]{5x+7} = 1 + \sqrt[3]{5x-12}\ \ ;\ \ 5x+7 = 1 + 3\cdot\sqrt[3]{5x-12} + 3\cdot\left(\sqrt[3]{5x-12}\right)^2 + 5x - 12\ \ ;$
$3\cdot\left(\sqrt[3]{5x-12}\right)^2 + 3\cdot\sqrt[3]{5x-12} - 18 = 0$. После замены переменной $a = \sqrt[3]{5x-12}$ получим уравнение: $3a^2 + 3a - 18 = 0$. Его корни: $a_1 = 2\ \ ;\ \ a_2 = -3$.

Обратная замена: 1) $\sqrt[3]{5x-12} = 2\ \ ;\ \ 5x-12 = 8\ \ ;\ \ x = 4\ \ ;$
2) $\sqrt[3]{5x-12} = -3\ \ ;\ \ 5x-12 = -27\ \ ;\ \ x = -3$. *Ответ:* $4\,;-3$.

<u>*Пример 17.*</u> Решить уравнение $\sqrt[4]{x+8} + \sqrt[4]{9-x} = 3$.

Решение. Один из радикалов перенесём в правую часть уравнения, затем обе части полученного уравнения возведём в четвёртую степень. При этом используются формулы: $\left(\sqrt[4]{a}\right)^4 = a\ \ ;\ \ (a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$.

Итак: $\sqrt[4]{x+8} = 3 - \sqrt[4]{9-x}\ \ ;$

$x+8 = 81 - 4\cdot 27\cdot\sqrt[4]{9-x} + 6\cdot 9\cdot\left(\sqrt[4]{9-x}\right)^2 - 4\cdot 3\cdot\left(\sqrt[4]{9-x}\right)^3 + 9 - x\ \ ;$

$2x + 12\cdot\left(\sqrt[4]{9-x}\right)^3 - 54\cdot\left(\sqrt[4]{9-x}\right)^2 + 108\cdot\sqrt[4]{9-x} - 82 = 0$.

Замена переменной: $a = \sqrt[4]{9-x} \geq 0$. Отсюда следует, что $a^4 = 9-x\ ,\ x = 9 - a^4$.
Уравнение принимает вид $2\cdot\left(9-a^4\right) + 12a^3 - 54a^2 + 108a - 82 = 0$;
$-2a^4 + 12a^3 - 54a^2 + 108a - 64 = 0$.
С помощью теоремы Безу нетрудно выяснить, что полученное уравнение имеет два корня: $a_1 = 1\ ,\ a_2 = 2$. Отсюда $x_1 = 9 - 1^4 = 8\ ,\ x_2 = 9 - 2^4 = -7$. Проверка показывает, что x_1 и x_2 удовлетворяют данному уравнению. *Ответ:* $8\,;-7$.

<u>*Пример 18.*</u> Решить уравнение $\dfrac{x\cdot\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[5]{x^3} - 1} + \dfrac{\sqrt[5]{x^3} - 1}{\sqrt[5]{x} - 1} = 16$.

Решение. Замена: $a = \sqrt[5]{x}$. Отсюда следует, что $x = a^5$. Уравнение принимает вид $\dfrac{a^6 - 1}{a^3 - 1} + \dfrac{a^3 - 1}{a - 1} = 16$. *ОДЗ* : $a \neq 1$. Числители дробей разложим на множители: $a^6 - 1 = \left(a^3\right)^2 - 1^2 = \left(a^3 - 1\right)\left(a^3 + 1\right)\ ;\ a^3 - 1 = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right)$.

Получим $\frac{(a^3-1)(a^3+1)}{a^3-1}+\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a-1}=16$; $a^3+1+a^2+a+1=16$; $a^3+a^2+a-14=0$. Это уравнение имеет единственный корень $a=2$. Тогда $x=2^5=32$. *Ответ:* 32 .

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 13x - 14 = 0$.
2. Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $x^3 - 19x - 30 = 0$.
3. Решить уравнение $\frac{x^2+3x+2}{x+1}=x^2-5x-5$.
4. Найти все целые значения k, при которых дробь $\frac{6k^2+k+48}{3k-1}$ является также целым числом.
5. Найти целые корни уравнения $\frac{2}{2x^2+x-4}+\frac{54}{2x^2+x+3}=7$.
6. Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $\frac{1}{x(x+3)}-\frac{1}{(x+1{,}5)^2}=-4\frac{1}{2}$.
7. Найти натуральные корни уравнения $\frac{x^2+x-3}{x-1}+\frac{6x-6}{x^2+x-3}=5$.
8. Найти рациональные корни уравнения $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.
9. Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{3}$.
10. Найти число различных корней уравнения $\sqrt{\sqrt{34x^2+81}-6x}=3-x$.
11. Решить уравнение $\sqrt{\frac{5-x}{x+3}}-2\cdot\sqrt{\frac{x+3}{5-x}}=1$.
12. Найти сумму всех корней уравнения $x^2+4x-3\cdot\sqrt{x^2+4x+15}=3$.
13. Решить уравнение $\sqrt{x^2+5x+6}+2x\cdot\sqrt{x+2}=0$.
14. Решить уравнение $\sqrt{8-x}-\sqrt{x+2}=\frac{3-x}{2}$.
15. Найти целый корень уравнения $\sqrt{4x-23}+\sqrt{9-x}=\frac{4}{x-7}$.
16. Решить уравнение $\sqrt[3]{12-\sqrt{x}}-\sqrt[3]{3-\sqrt{x}}=3$.
17. Решить уравнение $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.
18. Решить уравнение $\frac{x-1}{\sqrt[4]{x^3}-1}-\frac{\sqrt[4]{x^3}+1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1}=-\frac{6}{7}$.

УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

Модуль действительного числа определяется так: $|z| = \begin{cases} z\ , если\ z \ge 0 \\ -z\ , если\ z \le 0 \end{cases}$.

Пример 1. Найти корень уравнения $\left|15 - |5x+3|\right| = 11$, принадлежащий промежутку $(-6\ ; -2\ ]$.

Решение. Напомним, что если a – *конкретное число*, то уравнение $|z| = a$ не имеет решений при $a < 0$, имеет два решения $z = \pm a$ при $a \ge 0$. Ход решения данной задачи:

$$15 - |5x+3| = 11\ ; \qquad 15 - |5x+3| = -11\ ;$$
$$|5x+3| = 4\ ; \qquad |5x+3| = 26\ ;$$
$$5x+3 = \pm 4\ ; \qquad 5x+3 = \pm 26\ ;$$
$$x_1 = \frac{1}{5}\ ;\ x_2 = -\frac{7}{5}\ . \qquad x_3 = \frac{23}{5}\ ;\ x_4 = -\frac{29}{5}\ .$$

Ответ: $-\frac{29}{5}$.

Пример 2. Найти наименьший корень уравнения $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x^2 - x - 3 \ge 0$, тогда $|x^2 - x - 3| = x^2 - x - 3$, и уравнение примет вид $1+x+x^2-x-3=0$, откуда $x_1 = \sqrt{2}$ (не удовлетворяет условию 1)) , $x_2 = -\sqrt{2}$ (это значение удовлетворяет условию 1) и является решением данного уравнения).
2) Пусть $x^2 - x - 3 \le 0$, тогда $|x^2 - x - 3| = -x^2 + x + 3$, и уравнение примет вид $1+x-x^2+x+3=0$, откуда $x_1 = 1 - \sqrt{5}$ (удовлетворяет условию 2) и является решением данного уравнения) , $x_2 = 1 + \sqrt{5}$ (не удовлетворяет условию 2)) .

Выбираем наименьшее из двух чисел $-\sqrt{2}$ и $1 - \sqrt{5}$. *Ответ:* $-\sqrt{2}$.

Пример 3. Найти корень уравнения $|7x-2| - |8+4x| = -7 - 3x$, принадлежащий промежутку $\left(-1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

Решение. Найдём точки, принадлежащие данному промежутку, в которых имеющиеся модули равны нулю: $7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{7} \in \left(-1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$;

$8 + 4x = 0 \Rightarrow x = -2 \notin \left(-1\ ;\ \frac{1}{3}\right)$. Следовательно, данный промежуток можно представить в виде объединения двух промежутков . Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x \in \left(-1\ ;\ \frac{2}{7}\right]$. Тогда $|7x-2| = -7x+2$, $|8+4x| = 8+4x$, и уравнение примет вид $-7x + 2 - (8 + 4x) = -7 - 3x$, откуда $x = \frac{1}{8} \in \left(-1\ ;\ \frac{2}{7}\right]$ является решением данного уравнения.

2) Пусть $x \in \left[\frac{2}{7} \ ; \ \frac{1}{3}\right)$. Тогда $\left| 7x-2 \right| = 7x-2$, $\left| 8+4x \right| = 8+4x$, и

уравнение примет вид $7x-2-(8+4x)=-7-3x$, откуда $x = \frac{1}{2} \notin \left[\frac{2}{7} \ ; \ \frac{1}{3}\right)$ не является решением данного уравнения.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

<u>*Пример 4.*</u> Решить уравнение $\left| 3x+12 \right| + \left| x+1 \right| = 3x+14$.

Решение. На числовой оси отметим точки -4 и -1 , т.е. такие точки, в которых имеющиеся модули равны нулю. Так как числовая ось представляет собой объединение трёх промежутков $(-\infty\,;-4\,] \cup [-4\,;-1\,] \cup [-1\,;+\infty\,)$, то мы рассмотрим три случая.

1) Пусть $x \in (-\infty\,;-4\,]$. Тогда $\left| 3x+12 \right| = -3x-12$, $\left| x+1 \right| = -x-1$. Следовательно, $-3x-12-x-1=3x+14$, откуда $x = -\frac{27}{7} \notin (-\infty\,;-4\,]$.
2) Пусть $x \in [-4\,;-1\,]$. Тогда $\left| 3x+12 \right| = 3x+12$, $\left| x+1 \right| = -x-1$. Следовательно, $3x+12-x-1=3x+14$, откуда $x = -3 \in [-4\,;-1\,]$.
3) Пусть $x \in [-1\,;+\infty\,)$. Тогда $\left| 3x+12 \right| = 3x+12$, $\left| x+1 \right| = x+1$. Следовательно, $3x+12+x+1=3x+14$, откуда $x = 1 \in [-1\,;+\infty\,)$.

Ответ: -3 ; 1 .

<u>*Замечание.*</u> Допустим, что после раскрытия модулей все «иксы» сократились. Если при этом получается неверное числовое равенство (типа 0=5) , то на рассматриваемом промежутке решений нет. Если при этом получается верное числовое равенство (типа 5=5) , то весь рассматриваемый промежуток следует включить в ответ.

<u>*Пример 5.*</u> Решить уравнение $\left| 3x-8 \right| - \left| 3x-2 \right| = 6$.

Решение. Точки, в которых имеющиеся модули равны нулю: $\frac{2}{3}$ и $\frac{8}{3}$.

1) Если $x \in \left(-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$, то получим уравнение $(-3x+8)-(-3x+2)=6$; $6=6$.

Это – верное числовое равенство . Поэтому весь промежуток $\left(-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ следует включить в ответ.

2) Если $x \in \left[\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right]$, то получим уравнение $(-3x+8)-(3x-2)=6$; $-6x+10=6$; $x = \frac{2}{3} \in \left[\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right]$. Значение $x = \frac{2}{3}$ следует включить в ответ.

3) Если $x \in \left[\frac{8}{3};+\infty\right)$, то получим уравнение $(3x-8)-(3x-2)=6$; $-6=6$.

Это – неверное числовое равенство . Поэтому на промежутке $\left[\dfrac{8}{3}\,;+\infty\right)$ решений нет.

Ответ: $\left(-\infty\,;\dfrac{2}{3}\right]$.

<u>*Пример 6.*</u> Решить уравнение $\sqrt{2x^2-4x-21}-2=\left|\,3x-16\,\right|$.

Решение. Рассмотрим два случая: $3x-16\geq 0$ и $3x-16\leq 0$.

1) Пусть $3x-16\geq 0$ (*) . Тогда $\left|\,3x-16\,\right|=3x-16$, и уравнение примет вид $\sqrt{2x^2-4x-21}-2=3x-16$; $\sqrt{2x^2-4x-21}=3x-14$. Выпишем *ОДЗ* и *ДУ*. *ОДЗ* : $2x^2-4x-21\geq 0$. Дополнительное условие (*ДУ*) : $3x-14\geq 0$. После возведения в квадрат получим $2x^2-4x-21=9x^2-84x+196$. Корни этого уравнения: $x_1=7$ (удовлетворяет условию (*) , а также *ОДЗ* и *ДУ*) , $x_2=\dfrac{31}{7}$ (не удовлетворяет условию (*)) .
2) Пусть $3x-16\leq 0$ (**) . Тогда $\left|\,3x-16\,\right|=-3x+16$, и уравнение примет вид $\sqrt{2x^2-4x-21}-2=-3x+16$; $\sqrt{2x^2-4x-21}=-3x+18$. Выпишем *ОДЗ* и *ДУ*. *ОДЗ* : $2x^2-4x-21\geq 0$. Дополнительное условие (*ДУ*) : $-3x+18\geq 0$. После возведения в квадрат получим $2x^2-4x-21=9x^2-108x+324$. Корни этого уравнения: $x_1=5$ (удовлетворяет условию (**) , а также *ОДЗ* и *ДУ*) , $x_2=\dfrac{69}{7}$ (не удовлетворяет условию (**)) .

Ответ: 7 ; 5 .

<u>*Пример 7.*</u> Решить уравнение $\sqrt{x+6+2\cdot\sqrt{x+5}}+\sqrt{x-\sqrt{x+5}}=5$.

Решение. Замена переменной: $a=\sqrt{x+5}\geq 0$ (*) . Тогда $a^2=x+5$; $x=a^2-5$. Подставив всё это в данное уравнение, получим: $\sqrt{a^2-5+6+2a}+\sqrt{a^2-5-a}=5$; $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{a^2-a-5}=5$; $\left|\,a+1\,\right|+\sqrt{a^2-a-5}=5$. Так как $a\geq 0$, то $a+1>0$; следовательно, $\left|\,a+1\,\right|=a+1$. Получим уравнение $a+1+\sqrt{a^2-a-5}=5$; $\sqrt{a^2-a-5}=4-a$. Это уравнение имеет единственный корень $a=3$ (удовлетворяет условию (*)) . Следовательно, $x=3^2-5=4$. *Ответ:* 4 .

<u>*Пример 8.*</u> Решить уравнение $\sqrt{x+2\cdot\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\cdot\sqrt{x-1}}=x-1$.

Решение. Замена переменной: $a=\sqrt{x-1}\geq 0$ (*) . Тогда $a^2=x-1$; $x=a^2+1$. Подставив всё это в данное уравнение, получим: $\sqrt{a^2+1+2a}+\sqrt{a^2+1-2a}=a^2$; $\sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=a^2$; $\left|\,a+1\,\right|+\left|\,a-1\,\right|=a^2$. Так как $a\geq 0$, то $a+1>0$; следовательно, $\left|\,a+1\,\right|=a+1$. Получим уравнение $a+1+\left|\,a-1\,\right|=a^2$.

1) Если $a-1\ge 0$ (**) , т.е. $a\ge 1$, то $|a-1|=a-1$, и уравнение принимает вид $a+1+a-1=a^2$. Отсюда $a_1=0$ (не удовлетворяет условию (**)) , $a_2=2$ (удовлетворяет условиям (**) и (*)) . Следовательно, $x=2^2+1=5$.
2) Если $a-1\le 0$ (***) , т.е. $a\le 1$, то $|a-1|=-a+1$, и уравнение принимает вид $a+1-a+1=a^2$. Отсюда $a_1=\sqrt{2}$ (не удовлетворяет условию (***)) , $a_2=-\sqrt{2}$ (не удовлетворяет условию (*)) .

Ответ: 5 .

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все корни уравнения $\left||6x+5|-11\right|=6$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7}{3};-1\right)$.
2. Найти наибольший корень уравнения $2\cdot|x^2+2x-5|=x-1$.
3. Найти все корни уравнения $|4-3x|-|2x+3|=2-4x$, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{1}{2};2\right]$.
4. Решить уравнение $|7x+2|-2\cdot|2x-5|=7-x$.
5. Решить уравнение $|5x-13|+|6-5x|=7$.
6. Решить уравнение $\sqrt{2x^2+3x-10}+7=3\cdot|x+1|$.
7. Решить уравнение $\sqrt{2x+7+2\cdot\sqrt{2x+6}}+\sqrt{2x-\sqrt{2x+6}}=4$.
8. Решить уравнение $\sqrt{3x+2\cdot\sqrt{3x-1}}+\sqrt{3x-2\cdot\sqrt{3x-1}}=3x-1$.

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

<u>*Пример 1.*</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 - 2x = 15 \end{cases}$.

Решение. Из первого уравнения выразим $x = \dfrac{3y+5}{4}$ и подставим это значение во второе уравнение. Тогда $\dfrac{(3y+5)^2}{16} - \dfrac{3y+5}{4} \cdot y + y^2 - 2 \cdot \dfrac{3y+5}{4} = 15$. После преобразований получим квадратное уравнение $13y^2 - 14y - 255 = 0$, имеющее корни $y_1 = 5$, $y_2 = -\dfrac{51}{13}$. Подставим эти значения в выражение для x. Тогда $x_1 = 5$, $x_2 = -\dfrac{22}{13}$. *Ответ:* $(5;5)$; $\left(-\dfrac{22}{13}; -\dfrac{51}{13}\right)$.

<u>*Пример 2.*</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} 2 \cdot \sqrt{\dfrac{7x+2y}{y-2x}} - 9 \cdot \sqrt{\dfrac{y-2x}{7x+2y}} = 3 \\ 5 \cdot \sqrt{x} + 5 \cdot \sqrt{7y} = 3 \cdot \sqrt{7} \end{cases}$.

Решение. Обозначим $a = \sqrt{\dfrac{7x+2y}{y-2x}}$. Дополнительное условие (*ДУ*): $a > 0$. Тогда первое уравнение примет вид $2a - \dfrac{9}{a} = 3$. Последнее уравнение имеет два корня: $a_1 = 3$ (удовлетворяет *ДУ*), $a_2 = -1{,}5$ (не удовлетворяет *ДУ*). Обратная замена делается только в первом случае: $\sqrt{\dfrac{7x+2y}{y-2x}} = 3$; $\dfrac{7x+2y}{y-2x} = 9$; $7x + 2y = 9y - 18x$; $25x=7y$. Отсюда $x = \dfrac{7y}{25}$. Подставив это значение во второе уравнение данной системы, получим $5 \cdot \sqrt{\dfrac{7y}{25}} + 5 \cdot \sqrt{7y} = 3 \cdot \sqrt{7}$; $\sqrt{7y} + 5 \cdot \sqrt{7y} = 3 \cdot \sqrt{7}$; $6 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{y} = 3 \cdot \sqrt{7}$.
Отсюда $\sqrt{y} = \dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{4}$; $x = \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{100}$. *Ответ:* $\left(\dfrac{7}{100}; \dfrac{1}{4}\right)$.

<u>*Пример 3.*</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} 2 \cdot \sqrt{2x - y + 3} + 3x - 3y = 1 \\ (x-y) \cdot \sqrt{2x - y + 3} = -2 \end{cases}$.

Решение. После замены переменных $\begin{cases} a = \sqrt{2x - y + 3} \ge 0 \\ b = x - y \end{cases}$ получим систему уравнений $\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ ba = -2 \end{cases}$. Её решения: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = -1 \end{cases}$ (удовлетворяет условию $a \ge 0$)

и $\begin{cases} a_2 = -3/2 \\ b_2 = 4/3 \end{cases}$ (не удовлетворяет условию $a \ge 0$). Обратную замену делаем только в первом случае. $\begin{cases} \sqrt{2x - y + 3} = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x - y + 3 = 4 \\ x = y - 1 \end{cases}$. Отсюда $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Ответ: (2 ; 3).

<u>*Пример 4.*</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + 3 \cdot \sqrt{y} = 7 \\ 3y - 4 \cdot \sqrt{xy} - 2x = 2 \end{cases}$.

Решение. После замены переменных $\begin{cases} a = \sqrt{x} \ge 0 \\ b = \sqrt{y} \ge 0 \end{cases}$ получим систему уравнений $\begin{cases} a + 3b = 7 \\ 3b^2 - 4ab - 2a^2 = 2 \end{cases}$. Её решения: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 2 \end{cases}$ (удовлетворяет условиям $a \ge 0$, $b \ge 0$) и $\begin{cases} a_2 = -43 \\ b_2 = 50/3 \end{cases}$ (не удовлетворяет условию $a \ge 0$). Следовательно, $\begin{cases} x = a_1^2 = 1 \\ y = b_1^2 = 4 \end{cases}$. *Ответ:* (1 ; 4) .

<u>*Пример 5.*</u> Найти произведение абсцисс точек пересечения прямой $2x - y = 1$ и окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Решение. Нужно решить систему уравнений $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$. Решениями этой системы являются пары чисел $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{5} \\ y_1 = \dfrac{-1 - 2 \cdot \sqrt{19}}{5} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{19}}{5} \\ y_2 = \dfrac{-1 + 2 \cdot \sqrt{19}}{5} \end{cases}$.

$x_1 x_2 = \dfrac{2 - \sqrt{19}}{5} \cdot \dfrac{2 + \sqrt{19}}{5} = -\dfrac{3}{5}$. *Ответ:* $-\dfrac{3}{5}$.

<u>*Пример 6.*</u> Найти точки пересечения графиков функций $y = 13x + 10$ и $y = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$.

Решение. Нужно решить систему $\begin{cases} y = 13x + 10 \\ y = 2x^3 - 3x^2 + x + 3 \end{cases}$. Отсюда следует, что $13x + 10 = 2x^3 - 3x^2 + x + 3$; $2x^3 - 3x^2 - 12x - 7 = 0$. Это уравнение решается с помощью теоремы Безу. Его корни: $x_1 = -1$; $x_2 = 3{,}5$.

Тогда $y_1 = -3$; $y_2 = 55{,}5$. *Ответ:* $(-1 ; -3)$; $(3{,}5 ; 55{,}5)$.

Пример 7. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2+xy+2y^2=37 \\ 2x^2+2xy+y^2=26 \end{cases}$.

Решение. Данные уравнения перемножим «крест-накрест» : $26(x^2+xy+2y^2)=37(2x^2+2xy+y^2)$. После раскрытия скобок, переноса и приведения подобных получим $0=48x^2+48xy-15y^2$ (*).

Допустим, что $y=0$. Тогда из полученного уравнения (*) следует, что $x=0$. Но это невозможно, так как пара $(0;0)$ не является решением данной системы. Отсюда вытекает, что $y\neq 0$, поэтому уравнение (*) можно разделить на y^2.

Имеем: $48\cdot\frac{x^2}{y^2}+48\cdot\frac{x}{y}-15=0$. После замены $a=\frac{x}{y}$ получим уравнение $48a^2+48a-15=0$, корнями которого являются числа $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=-\frac{5}{4}$. Затем, выполнив обратную замену, получим две системы:

$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{1}{4} \\ x^2+xy+2y^2=37 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{x}{y}=-\frac{5}{4} \\ x^2+xy+2y^2=37 \end{cases}$.

Первая система имеет решения $(1;4)$ и $(-1;-4)$, вторая система имеет решения $(-5;4)$ и $(5;-4)$. *Ответ:* $(1;4)$; $(-1;-4)$; $(-5;4)$; $(5;-4)$.

Пример 8. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y+xy^2=20 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$.

Решение. Левые части обоих уравнений разложим на множители: $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=65 \end{cases}$. Разделим первое уравнение на второе: $\frac{xy(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}=\frac{20}{65}$; $\frac{xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{4}{13}$; $13xy=4x^2-4xy+4y^2$; $4x^2-17xy+4y^2=0$. Полученное уравнение разделим на y^2. Имеем: $4\cdot\frac{x^2}{y^2}-17\cdot\frac{x}{y}+4=0$. После замены $a=\frac{x}{y}$ получим уравнение $4a^2-17a+4=0$, корнями которого являются числа 4 и $\frac{1}{4}$. . Затем, выполнив обратную замену, получим две системы: $\begin{cases} \frac{x}{y}=4 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{1}{4} \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$.

Первая система имеет решение $(4;1)$, вторая система имеет решение $(1;4)$.

Ответ: $(1;4)$; $(4;1)$.

Пример 9. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$.

Решение. *ОДЗ* : $x \ge 0$, $y \ge 0$. Перенесём радикалы, содержащие букву x , в правые части уравнений, затем каждое уравнение возведём в квадрат. Получим: $\begin{cases} \sqrt{y+1} = 1 - \sqrt{x} \\ \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x+1} \end{cases}$; $\begin{cases} y+1 = 1 - 2\cdot\sqrt{x} + x \\ y = 1 - 2\cdot\sqrt{x+1} + x + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -2\cdot\sqrt{x} + x \\ y = 2 - 2\cdot\sqrt{x+1} + x \end{cases}$. Отсюда следует, что $-2\cdot\sqrt{x} + x = 2 - 2\cdot\sqrt{x+1} + x$. Это уравнение имеет единственный корень $x = 0$. Тогда $y = -2\cdot\sqrt{0} + 0 = 0$. Проверка показывает, что пара $(0;0)$ является решением данной системы. *Ответ:* $(0;0)$.

Задачи для самостоятельного решения

9. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y + 7 = 0 \\ 2y^2 - 3x^2 - 5xy - 18x - 2y - 18 = 0 \end{cases}$.

10. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy = 24 \\ 8\cdot\dfrac{3x+2y}{x+4y} - 6\cdot\dfrac{x+4y}{3x+2y} = 13 \end{cases}$.

11. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\cdot\sqrt{\dfrac{4x-16y}{x+2y}} - 4\cdot\sqrt{\dfrac{x+2y}{4x-16y}} = 7 \\ x^2 + xy - 3y^2 = 1 \end{cases}$.

12. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\cdot\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ 6x + y - 3\cdot\sqrt{xy} = 15 \end{cases}$.

13. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3\cdot\sqrt{5x - y + 7} + 3x - 2y = 5 \\ (2y - 3x)\cdot\sqrt{5x - y + 7} = -2 \end{cases}$.

14. Найти произведение ординат точек пересечения прямой $15x + 2y = 2$ и гиперболы $y = \dfrac{4}{15x+7}$.

15. Найти точки пересечения графиков функций $y = -12x - 11$ и $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 12$.

16. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 14y^2 = 2 \\ 2x^2 - 3xy - 10y^2 = 1 \end{cases}$.

17. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^4 - y^4 = 15 \\ x^3y - xy^3 = 6 \end{cases}$.

18. Решить систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2y+3} = 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{2y+2} = 2 \end{cases}$.

УПРОЩЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

<u>*Пример 1.*</u> Вычислить $A = \sqrt{\left(\sqrt{6}+1\right)^3 + 1 - \sqrt{6}} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)$.

Решение. Сначала упростим подкоренное выражение.

$\left(\sqrt{6}+1\right)^3 + 1 - \sqrt{6} = \left(\sqrt{6}\right)^3 + 3\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2 + 3\cdot\sqrt{6} + 1 + 1 - \sqrt{6} = 6\cdot\sqrt{6} + 18 + 3\cdot\sqrt{6} + 2 - \sqrt{6} =$
$= 8\cdot\sqrt{6} + 20$.

Итак, $A = \sqrt{8\cdot\sqrt{6}+20}\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$. Напомним, что формула типа $\sqrt{a}\cdot b = \sqrt{ab^2}$ справедлива лишь при $b \ge 0$. Если $b < 0$, то следует предварительно вынести за скобку знак «минус». Следовательно

$$A = -\sqrt{8\cdot\sqrt{6}+20}\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = -\sqrt{\left(8\cdot\sqrt{6}+20\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} =$$
$$= -\sqrt{\left(8\cdot\sqrt{6}+20\right)\cdot\left(3-2\cdot\sqrt{6}+2\right)} = \left\{\begin{matrix}\textit{после перемножения и}\\ \textit{приведения подобных}\end{matrix}\right\} = -\sqrt{4} = -2.$$

Ответ: -2.

<u>*Пример 2.*</u> Вычислить $A = \dfrac{10}{1-\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6}-2} - \dfrac{3}{\sqrt{6}-3}$.

Решение. Числители и знаменатели всех дробей домножим на «сопряжённые выражения». Получим

$$A = \frac{10\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)}{\left(1-\sqrt{6}\right)\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)} + \frac{2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)} - \frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+3\right)}{\left(\sqrt{6}-3\right)\cdot\left(\sqrt{6}+3\right)} =$$
$$= \frac{10\cdot\left(1+\sqrt{6}\right)}{1-6} + \frac{2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}{6-4} - \frac{3\cdot\left(\sqrt{6}+3\right)}{6-9} = -2\cdot\left(1+\sqrt{6}\right) + \left(\sqrt{6}+2\right) + \left(\sqrt{6}+3\right) = 3.$$

Ответ: 3.

<u>*Пример 3.*</u> Упростить выражение $A = \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3} + \dfrac{x^2-18x-40}{x^2-x-6} + \dfrac{x^3+27}{x^2-9}$.

Решение. Числители и знаменатели всех дробей разложим на множители и сократим каждую дробь. Напомним, что если x_1 *и* x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Кроме того, потребуются формулы: $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ и $a^3+b^3 = (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$. Следовательно

$$A = \frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)} + \frac{(x+2)(x-20)}{(x+2)(x-3)} + \frac{(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}{(x-3)(x+3)} =$$
$$= \frac{x+5}{x-3} + \frac{x-20}{x-3} + \frac{x^2-3x+9}{x-3} = \frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x+2$$

Ответ: $x+2$.

<u>*Пример 4.*</u> Сократить дробь $A = \dfrac{4x^2-9y^2}{4x^2-36xy+45y^2}$.

Решение. Понятно, что $4x^2-9y^2 = (2x-3y)(2x+3y)$. Для того, чтобы разложить на множители знаменатель, решим квадратное (относительно переменной x) уравнение $4x^2-36y\cdot x+45y^2=0$.

Дискриминант $D=(-36y)^2-4\cdot4\cdot45y^2=576y^2=(24y)^2$.

Тогда $x_1=\dfrac{36y-24y}{8}=\dfrac{3y}{2}$, $x_2=\dfrac{36y+24y}{8}=\dfrac{15y}{2}$. Следовательно

$$4x^2-36xy+45y^2=4\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)=4\cdot\left(x-\frac{3y}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{15y}{2}\right)=(2x-3y)(2x-15y)$$

Итак, $A=\dfrac{(2x-3y)(2x+3y)}{(2x-3y)(2x-15y)}=\dfrac{2x+3y}{2x-15y}$. *Ответ:* $\dfrac{2x+3y}{2x-15y}$.

Пример 5. Упростить выражение $A=\dfrac{9x-6\cdot\sqrt{x}+1}{3x+5\cdot\sqrt{x}-2}:\dfrac{9x-1}{2+\sqrt{x}}$.

Решение. Обозначим $y=\sqrt{x}$. Тогда $x=y^2$. Искомое выражение равно

$$A=\frac{9y^2-6y+1}{3y^2+5y-2}\cdot\frac{2+y}{9y^2-1}=\frac{(3y-1)^2}{(y+2)\cdot(3y-1)}\cdot\frac{y+2}{(3y-1)\cdot(3y+1)}=\frac{1}{(3y+1)}=\frac{1}{3\cdot\sqrt{x}+1} .$$

Пример 6. Дано: $\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t}=2$. Вычислить $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}$.

Решение. Обе части данного уравнения умножим на сопряжённое выражение. Получим $\left(\sqrt{8-t}-\sqrt{3-t}\right)\cdot\left(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}\right)=2\cdot\left(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}\right)$;

$(8-t)-(3-t)=2\cdot\left(\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}\right)$. Отсюда $\sqrt{8-t}+\sqrt{3-t}=\dfrac{5}{2}$. *Ответ:* $\dfrac{5}{2}$.

Пример 7. Дано: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x-5}$. Упростить выражение $f(x+2)-f(x+8)$.

Решение.

$$f(x+2)-f(x+8)=\frac{3\cdot(x+2)+2}{(x+2)-5}-\frac{3\cdot(x+8)+2}{(x+8)-5}=\frac{3x+8}{x-3}-\frac{3x+26}{x+3}=\frac{102}{x^2-9} .$$

Пример 8. Упростить выражение $A=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-4}-\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2+4}$, если $a>1$.

Решение.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)^2-4}=\sqrt{\frac{1}{a}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+a-4}=\sqrt{\frac{1}{a}-2+a}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right|=\left\{\textit{Так как}\quad a>1,\textit{то}\ \frac{1-a}{\sqrt{a}}<0\right\}=\frac{-1+a}{\sqrt{a}} .$$

Аналогично, $\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)^2+4}=\dfrac{1+a}{\sqrt{a}}$. Следовательно, $A=\dfrac{-1+a}{\sqrt{a}}-\dfrac{1+a}{\sqrt{a}}=\dfrac{-2}{\sqrt{a}}$

Ответ: $\dfrac{-2}{\sqrt{a}}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^3+2}\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)$.
2. Вычислить $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{5}+3}$.
3. Упростить выражение $\dfrac{x}{3x-18}-\dfrac{2}{x^2-5x-6}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$.
4. Упростить выражение $x-\dfrac{\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+xy}-1\right)^2}{x+y+1}$.
5. Сократить дробь $\dfrac{x^2+xy-6y^2}{x^2-xy-2y^2}$.
6. Упростить выражение $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}\right)\cdot\left(\dfrac{a\cdot\sqrt{a}-8}{a+2\cdot\sqrt{a}+4}\right)$.
7. Дано: $\sqrt{14-t}-\sqrt{3-t}=3$. Вычислить $\sqrt{14-t}+\sqrt{3-t}$.
8. Дано: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$. Упростить выражение $f\left(x^2\right)-f(x+2)$.
9. Упростить выражение $\sqrt{a^2+a\cdot\sqrt{8}+2}+\sqrt{a^2-a\cdot\sqrt{8}+2}$ при $a<-2$.

ПРОГРЕССИИ

Определение. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *арифметической прогрессией*, если существует такая константа d, что для всех натуральных n выполнено равенство $a_{n+1} - a_n = d$. При этом d называется *разностью прогрессии*.

Формула общего члена: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма первых n членов: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ или $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$.

Пример 1. В арифметической прогрессии сумма первых трёх членов равна 24, а четвёртый член прогрессии на 12 меньше её восьмого члена. Найти произведение третьего и седьмого членов этой прогрессии.

Решение. Запишем систему уравнений $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 24 \\ a_4 + 12 = a_8 \end{cases}$. Из формулы общего члена следует: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_8 = a_1 + 7d$. Тогда $\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 24 \\ a_1 + 3d + 12 = a_1 + 7d \end{cases}$. Эта система имеет решение $\begin{cases} a_1 = 5 \\ d = 3 \end{cases}$. Следовательно $a_3 \cdot a_7 = (a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 6d) = (5 + 2 \cdot 3) \cdot (5 + 6 \cdot 3) = 253$. *Ответ:* 253.

Пример 2. В арифметической прогрессии сумма пятого и девятого членов равна 36. Найти сумму первых тринадцати членов прогрессии.

Решение. Имеем: $a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d = 2 \cdot (a_1 + 6d) = 36$. Отсюда $a_1 + 6d = 18$. Следовательно $S_{13} = \dfrac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = (a_1 + 6d) \cdot 13 = 18 \cdot 13 = 234$.
Ответ: 234.

Пример 3. В арифметической прогрессии сумма первых шести членов равна 12, разность прогрессии равна -2, последний член равен -19. Найти количество членов прогрессии.

Решение. По условию, $d = -2$, а также $S_6 = \dfrac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = (2a_1 + 5 \cdot (-2)) \cdot 3 = 12$.

Следовательно $a_1 = 7$. Затем используем формулу общего члена. $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1) \cdot (-2) = -19$. Отсюда n=14. *Ответ:* 14.

Пример 4. Сумма первых n членов некоторой последовательности задана формулой $S_n = \dfrac{3n^2 - 11n}{4}$. Найти четвёртый член этой последовательности.

Решение.
По определению $S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4 = S_3 + a_4$.

Следовательно $a_4 = S_4 - S_3 = \dfrac{3 \cdot 4^2 - 11 \cdot 4}{4} - \dfrac{3 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3}{4} = 2{,}5$. *Ответ:* 2,5.

<u>*Определение.*</u> Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется *геометрической прогрессией*, если существует такая константа $q \neq 0$, что для всех натуральных n выполнено равенство $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. При этом q называется *знаменателем прогрессии*.

Формула общего члена: $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Сумма первых n членов: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

Геометрическая прогрессия *возрастает*, если $a_1 > 0$, $q > 1$ или $a_1 < 0$, $0 < q < 1$.
Геометрическая прогрессия *убывает*, если $a_1 > 0$, $0 < q < 1$ или $a_1 < 0$, $q > 1$.

<u>*Пример 5.*</u> Найти знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если произведение её первого, третьего и пятого членов равно 8, а сумма второго и четвёртого членов равна $13/3$.

Решение. Запишем систему уравнений $\begin{cases} a_1 a_3 a_5 = 8 \\ a_2 + a_4 = \dfrac{13}{3} \end{cases}$. Из формулы общего члена следует: $a_3 = a_1 q^2$, $a_5 = a_1 q^4$, $a_2 = a_1 q$, $a_4 = a_1 q^3$. Подставив всё это в систему, получим $\begin{cases} a_1 \cdot a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 8 \\ a_1 q + a_1 q^3 = \dfrac{13}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} a_1^3 q^6 = 8 \\ a_1 q\left(1 + q^2\right) = \dfrac{13}{3} \end{cases}$. Из обеих частей первого уравнения извлекаем кубический корень. Тогда $a_1 q^2 = 2$. Следовательно $a_1 = \dfrac{2}{q^2}$; $\dfrac{2}{q^2} \cdot q\left(1 + q^2\right) = \dfrac{13}{3}$. Отсюда $\begin{cases} q = \dfrac{2}{3} \\ a_1 = \dfrac{9}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} q = \dfrac{3}{2} \\ a_1 = \dfrac{8}{9} \end{cases}$. Так как прогрессия возрастает, то подходит лишь вторая пара значений. *Ответ:* $\dfrac{3}{2}$.

<u>*Пример 6.*</u> В геометрической прогрессии, все члены которой отрицательны, произведение первого и седьмого членов равно 81. Найти $A = a_4^2 + a_4 + 12$.
Решение. $a_1 \cdot a_7 = a_1 \cdot a_1 q^6 = a_1^2 q^6 = \left(a_1 q^3\right)^2 = a_4^2 = 81$. Отсюда $a_4 = \pm\sqrt{81} = \pm 9$. Условию задачи удовлетворяет $a_4 = -9$. Следовательно $A = (-9)^2 - 9 + 12 = 84$.
Ответ: 84.

Задачи для самостоятельного решения

10. Сумма второго и пятого членов арифметической прогрессии равна 9, а сумма первого и седьмого членов равна 3. Найти восьмой член прогрессии.
11. Найти сумму первых одиннадцати членов арифметической прогрессии, если сумма её третьего, пятого и десятого членов равна 18.
12. В арифметической прогрессии пятый член равен 4, сумма второго и шестого членов равна 9, последний член равен -1. Найти количество членов прогрессии.
13. Сумма первых n членов некоторой последовательности задана формулой $S_n = \dfrac{2^n - 3^n}{3 \cdot 2^{n+1}}$. Найти третий член этой последовательности.
14. Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если произведение её первого и четвёртого членов равно 12, а сумма второго и третьего членов равна 8.
15. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна $15{,}5$, а знаменатель прогрессии равен 2. Найти второй член этой прогрессии.
16. В геометрической прогрессии с положительными членами сумма первого и второго членов равна 20, сумма третьего и четвёртого членов равна 180, а n–ый член равен 405. Найти n.

АРИФМЕТИКА

Пример 1. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 10% , а другое уменьшить на 20%?

Решение. Напомним, что $\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$. Процент изменения любой величины вычисляется по формуле $\dfrac{(\textit{конечное значение}) - (\textit{начальное значение})}{(\textit{начальное значение})} \cdot 100\%$.

Если результат получился положительным, то величина увеличилась.
Если результат получился отрицательным, то величина уменьшилась.
Пусть x и y – первоначально данные числа. Их произведение равно $\Pi_{нач} = xy$.
После изменения данных величин:
первое число примет значение $x + 10\% \cdot x = x + 0{,}10x = 1{,}1x$,
второе число примет значение $y - 20\% \cdot y = y - 0{,}20y = 0{,}8y$,
произведение примет значение $\Pi_{кон} = 1{,}1x \cdot 0{,}8y = 0{,}88xy$. Процент изменения произведения равен $\dfrac{\Pi_{кон} - \Pi_{нач}}{\Pi_{нач}} \cdot 100\% = \dfrac{0{,}88xy - xy}{xy} \cdot 100\% = -12\%$.

Ответ: произведение уменьшилось на 12% .

Пример 2. Два числа относятся как $4 : 3$. Первое увеличили на 5% , второе уменьшили на 2% . На сколько процентов изменилась их сумма ?

Решение. Пусть $4x$ и $3x$ – первоначально данные числа. Их сумма равна $\Sigma_{нач} = 4x + 3x = 7x$. После изменения чисел сумма стала равняться $\Sigma_{кон} = (4x + 5\% \cdot 4x) + (3x - 2\% \cdot 3x) = (4x + 0{,}05 \cdot 4x) + (3x - 0{,}02 \cdot 3x) = 7{,}14x$.

Процент изменения суммы равен $\dfrac{\Sigma_{кон} - \Sigma_{нач}}{\Sigma_{нач}} \cdot 100\% = \dfrac{7{,}14x - 7x}{7x} = 2\%$.

Ответ: сумма увеличилась на 2% .

Пример 3. Числитель дроби уменьшили на 1% , а знаменатель – на 12%. На сколько процентов изменилась дробь ?

Решение. Пусть данная дробь равна $D_{нач} = \dfrac{x}{y}$. После изменения числителя и знаменателя дробь стала равняться $D_{кон} = \dfrac{x - 1\% \cdot x}{y - 12\% \cdot y} = \dfrac{0{,}99x}{0{,}88y} = 1{,}125 \cdot \dfrac{x}{y}$. Процент изменения дроби равен $\dfrac{D_{кон} - D_{нач}}{D_{нач}} \cdot 100\% = \dfrac{1{,}125 \cdot \frac{x}{y} - \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} \cdot 100\% = 12{,}5\%$.

Ответ: дробь увеличилась на 12,5% .

Пример 4. Найти число, 90% которого равны числу

$$A = \sqrt{\left(9 - 2 \cdot \sqrt{23}\right)^2} + \sqrt{\left(9 + 2 \cdot \sqrt{23}\right)^2} .$$

Решение. Используя формулу $\sqrt{x^2} = |\,x\,| = \begin{cases} x \ , \ \text{если} \ x \ge 0 \\ -x \ , \ \text{если} \ x \le 0 \end{cases}$, получим

$A = \left|\, 9 - 2\cdot\sqrt{23} \,\right| + \left|\, 9 + 2\cdot\sqrt{23} \,\right| = -\left(9 - 2\cdot\sqrt{23}\right) + \left(9 + 2\cdot\sqrt{23}\right) = 4\cdot\sqrt{23}$.

Искомое число равно $\dfrac{A}{90\%} = \dfrac{4\cdot\sqrt{23}}{\frac{90}{100}} = \dfrac{40}{9}\cdot\sqrt{23}$. *Ответ:* $\dfrac{40}{9}\cdot\sqrt{23}$.

<u>*Пример 5.*</u> Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 540 и 504 .

Решение. Сначала мы напомним некоторую информацию общего характера.

1) Натуральное число, отличное от единицы, называется простым, если оно делится только на само себя и на единицу и не делится ни на какие другие числа. Например, числа 2 , 3 , 5 , 7 , 11, 13, 17 , 19 , … являются простыми.
2) Если натуральное число можно разложить в произведение других, меньших чисел, то такое число называется составным. Например, число 75 является составным, так как $75 = 3\cdot 25 = 3^1\cdot 5^2 = 2^0\cdot 3^1\cdot 5^2$.
3) Любое натуральное число N можно разложить в произведение степеней простых чисел: $N = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, где $p_1 , p_2 , \ldots , p_k$ – простые числа , $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_k$ – какие-либо неотрицательные целые числа.
4) Для разложения конкретного числа в произведение степеней простых чисел требуется знание признаков делимости, некоторые из которых мы приводим:
   а) число делится на 2 , если оно оканчивается цифрой 2 , 4 , 6 , 8 , 0 ;
   б) число делится на 5 , если оно оканчивается цифрой 5 , 0 ;
   в) число делится на 10 , 100 , 1000 , … , если оно оканчивается цифрами 0 , 00 , 000 , … ;
   г) число делится на 3 , если сумма цифр этого числа делится на 3 (например, 794 не делится на 3 , так как $7+9+4=20$ не делится на 3 ; 795 делится на 3 , так как $7+9+5=21$ делится на 3) ;
   д) число делится на 9 , если сумма цифр этого числа делится на 9 (например, 794 не делится на 9 , так как $7+9+4=20$ не делится на 9 ; 792 делится на 9 , так как $7+9+2=18$ делится на 9) .
5) Пусть два числа A и B разложены в произведение степеней простых чисел:
   $A = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, $B = p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$. Обозначим:
   $m_1 = \min\{\,\alpha_1 ; \beta_1\}$; $m_2 = \min\{\,\alpha_2 ; \beta_2\}$; … ; $m_k = \min\{\,\alpha_k ; \beta_k\}$;
   $M_1 = \max\{\,\alpha_1 ; \beta_1\}$; $M_2 = \max\{\,\alpha_2 ; \beta_2\}$; … ; $M_k = \max\{\,\alpha_k ; \beta_k\}$.
   Тогда:
   наибольший общий делитель $НОД(A , B) = p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{m_k}$;
   наименьшее общее кратное $НОК(A , B) = p_1^{M_1}\cdot p_2^{M_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{M_k}$.

Вернёмся к решению задачи.

$540 = 10\cdot 54 = (2\cdot 5)\cdot(2\cdot 27) = 2\cdot 5\cdot 2\cdot 3^3 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^1 = 2^2\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 7^0$;

$504 = 9\cdot 56 = 9\cdot(7\cdot 8) = 3^2\cdot 7^1\cdot 2^3 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^1$.

Согласно вышесказанному,

$НОД(540 ;504) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^0\cdot 7^0 = 36$; $НОК(540 ;504) = 2^3\cdot 3^3\cdot 5^1\cdot 7^1 = 7560$.

Следовательно, $\dfrac{НОК}{НОД} = \dfrac{7560}{36} = 210$. *Ответ:* 210 .

Пример 6. Числители трёх дробей пропорциональны числам 1 , 3 , 2 , а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1 , 5 , 3 . Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{34}{135}$. Найти наименьшую из дробей.

Решение. Дроби, о которых идёт речь, можно записать так: $a=\dfrac{1x}{1y}$; $b=\dfrac{3x}{5y}$; $c=\dfrac{2x}{3y}$. После приведения к общему знаменателю: $a=\dfrac{15x}{15y}$; $b=\dfrac{9x}{15y}$; $c=\dfrac{10x}{15y}$. Ясно, что наименьшей дробью является b . Среднее арифметическое всех дробей равно $\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{34x}{45y}=\dfrac{34}{135}$. Отсюда $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}$. Следовательно, $b=\dfrac{3x}{5y}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{5}$.

Пример 7. Пусть сумма первых трёх членов пропорции равна 28 . Второй член составляет $\frac{1}{2}$, а третий $\frac{2}{3}$ первого члена. Найти четвёртый член пропорции.

Решение. Пропорцией называется запись вида $a:b=c:d$ или $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$. При этом a называется первым членом пропорции, b – вторым членом пропорции, c – третьим членом пропорции, d – четвёртым членом пропорции. По условию, $b=\frac{1}{2}a$, $c=\frac{2}{3}a$. Тогда $d=\dfrac{bc}{a}=\dfrac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{2}{3}a}{a}=\dfrac{1}{3}a$. Сумма первых трёх членов пропорции равна $a+b+c=a+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a=\frac{13}{6}a=28$. Отсюда $a=\frac{168}{13}$. Следовательно, $d=\frac{1}{3}\cdot\frac{168}{13}=\frac{56}{13}$. *Ответ:* $\frac{56}{13}$.

Пример 8. Найти сумму первых двадцати натуральных чётных чисел , которые при делении на 7 дают в остатке 6 .

Решение. Выпишем натуральные числа, которые при делении на 7 дают в остатке 6 , выделим чётные и зачеркнём нечётные числа: **6** ; ~~13~~ ; **20** ; ~~27~~ ; **34** ; ~~41~~ ; **48** ; … . Выделенные числа образуют арифметическую прогрессию, у которой: первый член $a_1=6$; разность $d=14$ (разность между двумя соседними выделенными членами есть одно и то же число, именно: $20-6=34-20=48-34=\ldots=14$). Требуется найти сумму первых $n=20$ членов этой прогрессии, т.е. S_{20} .

Так как $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$, то $S_{20}=\dfrac{2\cdot 6+19\cdot 14}{2}\cdot 20=2780$. *Ответ:* 2780 .

Пример 9. Найти сумму всех натуральных двузначных чисел , которые при делении на 6 дают в остатке 4 .

Решение. Выпишем натуральные числа, которые при делении на 6 дают в остатке 4 , выделим двузначные и зачеркнём числа, не являющиеся двузначными:
~~4~~ ; **10** ; **16** ; **22** ; **28** ; **34** ; **40** ; **46** ; **52** ; **58** ; **64** ; **70** ; **76** ; **82** ; **88** ; **94** ; ~~100~~ ; … .
Сумма выделенных чисел равна 780 . *Ответ:* 780 .

<u>Пример 10.</u> Указать все номера рациональных чисел данного множества:
1) $\sqrt{10-4\cdot\sqrt{6}}-\sqrt{6}$; 2) $27^{\frac{5}{3}}$; 3) $27^{\frac{5}{2}}$; 4) $2{,}14(12)$; 5) $5^{\log_4 2}$.

Решение. Упростим все числа данного множества.

1) $\sqrt{10-4\cdot\sqrt{6}}-\sqrt{6}=\sqrt{4-4\cdot\sqrt{6}+6}-\sqrt{6}=\sqrt{2^2-2\cdot2\cdot\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2}-\sqrt{6}=$
$=\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}-\sqrt{6}=\left|\,2-\sqrt{6}\,\right|-\sqrt{6}=-2+\sqrt{6}-\sqrt{6}=-2$. Это – рациональное число.

2) $27^{\frac{5}{3}}=\left(3^3\right)^{\frac{5}{3}}=3^5=243$. Это – рациональное число.

3) $27^{\frac{5}{2}}=\left(3^3\right)^{\frac{5}{2}}=3^{\frac{15}{2}}=3^7\cdot3^{\frac{1}{2}}=2187\cdot\sqrt{3}$. Это число «не считается» в точном виде, поэтому оно иррационально.

4) Любая периодическая дробь является рациональным числом. Например: $2{,}14(12)=2{,}14121212...=2+\dfrac{14}{100}+\dfrac{12}{10000}+\dfrac{12}{1000000}+\dfrac{12}{100000000}+\ldots$ Сумма всех слагаемых, начиная с третьего, представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член $a_1=\dfrac{12}{10000}$, знаменатель (отношение последующего слагаемого к предыдущему) равен $q=\dfrac{1}{100}$. Сумма всех членов такой прогрессии равна $\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{825}$. Следовательно, данное число равно $2+\dfrac{14}{100}+\dfrac{1}{825}=\dfrac{3533}{1650}$. Это – рациональное число.

5) $5^{\log_4 2}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$. Это число «не считается» в точном виде, поэтому оно иррационально.

Ответ: 1 , 2 , 4 .

<u>Пример 11.</u> Найти сумму всех чётных чисел k , каждое из которых делится без остатка на 7 и удовлетворяет условию $-140\le k<295$.

Решение. Чётные числа, делящиеся на 7 – это числа, делящиеся на 14. Перечень чисел, делящихся на 14 и удовлетворяющих условию задачи: 0 ; ±14 ; ±28 ; ±42 ; ±56 ; ±70 ; ±84 ; ±98 ; ±112 ; ±126 ; ±140 ; 154 ; 168 ; 182 ; 196 ; 210 ; 224 ; 238 ; 252 ; 266 ; 280 ; 294 . Сумма чисел со знаками « ± » равна нулю. Следовательно, требуемая сумма равна 154 + 168 + 182 + 196 + 210 + 224 + 238 + 252 + 266 + + 280 + 294 = 2464 . *Ответ:* 2464 .

Задачи для самостоятельного решения

1. На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 15% , а другое уменьшить на 12%?
2. Два числа относятся как $2:7$. Первое увеличили на 9% , второе уменьшили на 18% . На сколько процентов изменилась их сумма ?
3. Числитель дроби увеличили на 8% , а знаменатель – на 44%. На сколько процентов изменилась дробь ?
4. Найти число, 60% которого равны числу $\sqrt{\left(5-3\cdot\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{\left(5+3\cdot\sqrt{3}\right)^2}$.
5. Найти частное от деления наименьшего общего кратного на наибольший общий делитель чисел 6300 и 990 .
6. Числители трёх дробей пропорциональны числам 1 , 7 , 3 , а знаменатели пропорциональны соответственно числам 1 , 9 , 5 . Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{214}{405}$. Найти наименьшую из дробей.
7. Пусть сумма первых трёх членов пропорции равна 33 . Второй член составляет $\frac{1}{5}$, а третий $\frac{2}{9}$ первого члена. Найти четвёртый член пропорции.
8. Найти сумму первых двадцати натуральных нечетных чисел, которые при делении на 9 дают в остатке 5 .
9. Найти сумму всех натуральных двузначных чисел , которые при делении на 8 дают в остатке 3 .
10. Указать все номера рациональных чисел данного множества 1) $\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}$; 2) $2^{\log_{625}5}$; 3) $\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; 4) $\left(\sqrt{5}\right)^0$; 5) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.
11. Найти сумму всех целых чисел k , каждое из которых делится без остатка на 26 и удовлетворяет условию $-339<k<443$.

ТЕОРЕМА ВИЕТА

Теорема Виета. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$. Тогда $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

При решении задач на теорему Виета могут использоваться формулы: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$ и $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$.

Пример 1. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2-x-4=0$. Найти $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=\frac{1}{2}$, $x_1x_2=-2$. Следовательно

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot(-2)}{-2}=-\frac{17}{8}$$

. *Ответ:* $-\frac{17}{8}$.

Пример 2. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2+6x-3=0$. Найти $\frac{1}{2-x_1}-\frac{1}{x_2-2}$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-3$, $x_1x_2=-\frac{3}{2}$. Следовательно

$$\frac{1}{2-x_1}-\frac{1}{x_2-2}=\frac{x_2-2-2+x_1}{(2-x_1)(x_2-2)}=\frac{(x_1+x_2)-4}{2x_2-x_1x_2-4+2x_1}=\frac{(x_1+x_2)-4}{2(x_1+x_2)-x_1x_2-4}=$$

$$=\frac{-3-4}{2\cdot(-3)-\left(-\frac{3}{2}\right)-4}=\frac{14}{17}$$

. *Ответ*: $\frac{14}{17}$.

Пример 3. Найти все значения b , при которых корни уравнения $x^2-3x+2b+3=0$ удовлетворяют условию $5x_1+3x_2=23$.

Так как уравнение имеет корни, то дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D=(-3)^2-4\cdot1\cdot(2b+3)=-8b-3\geq0$. По теореме Виета $x_1+x_2=3$, $x_1x_2=2b+3$. Из системы уравнений $\begin{cases}5x_1+3x_3=23\\x_1+x_2=3\end{cases}$ следует $\begin{cases}x_1=7\\x_2=-4\end{cases}$. Тогда $2b+3=7\cdot(-4)$, откуда $b=-15{,}5$. Легко проверить, что при найденном значении b условие $D\geq0$ выполнено. *Ответ:* $-15{,}5$.

Пример 4. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $4-2\cdot\sqrt{3}$.

Решение. Обозначим $x_1=4-2\cdot\sqrt{3}$. Вторым корнем искомого уравнения является сопряжённое число $x_2=4+2\cdot\sqrt{3}$. Заметим, что $x_1+x_2=8$, $x_1x_2=4$. Искомое уравнение: $(x-x_1)(x-x_2)=0$; $x^2-x_1x-xx_2+x_1x_2=0$; $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$; $x^2-8x+4=0$. *Ответ:* $x^2-8x+4=0$.

Пример 5. Пусть x_1 *и* x_2 – корни уравнения $x^2 - x - 3 = 0$. Составить квадратное уравнение, имеющее корни $\dfrac{1}{x_1 x_2^2}$ *и* $\dfrac{1}{x_1^2 x_2}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -3$. Искомое уравнение: $\left(x - \dfrac{1}{x_1 x_2^2}\right)\left(x - \dfrac{1}{x_1^2 x_2}\right) = 0$; $\dfrac{x x_1 x_2^2 - 1}{x_1 x_2^2} \cdot \dfrac{x x_1^2 x_2 - 1}{x_1^2 x_2} = 0$; $x^2 x_1^3 x_2^3 - x x_1^2 x_2 - x x_1 x_2^2 + 1 = 0$; $(x_1 x_2)^3 x^2 - x(x_1 x_2)(x_1 + x_2) + 1 = 0$; $(-3)^3 x^2 - x \cdot (-3) \cdot 1 + 1 = 0$; $-27x^2 + 3x + 1 = 0$.

Ответ: $-27x^2 + 3x + 1 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - x - 4 = 0$. Найти $\dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2 + 1}$.
2. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2 + 2x - 11 = 0$. Найти $\dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1}$.
3. Найти все значения q, при которых корни уравнения $x^2 - 4x + q = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 + 5x_2 = 2$.
4. Составить квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $-5 - 3 \cdot \sqrt{2}$.
5. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $5x^2 - 7x - 34 = 0$. Составить квадратное уравнение, корни которого обратны корням данного уравнения.

НЕРАВЕНСТВА

<u>*Пример 1.*</u> Найти количество всех целых решений неравенства $\dfrac{12-x-x^2}{15x-2x^2-x^3}\ge 0$, принадлежащих промежутку $\left[\,-13\,;\,4\,\right]$.

Решение. Числитель и знаменатель умножим на -1 . Получим $\dfrac{x^2+x-12}{x^3+2x^2-15x}\ge 0$.

Затем числитель и знаменатель разложим на множители: $\dfrac{(x-3)(x+4)}{x(x-3)(x+5)}\ge 0$.

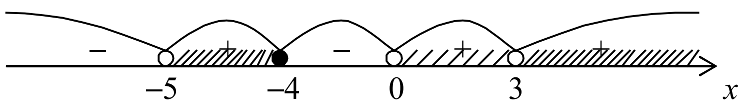
Дробь можно сократить, но при этом следует отметить, что $x\ne 3$. Следовательно, $\dfrac{x+4}{x(x+5)}\ge 0$. Решим это неравенство методом интервалов.

На числовой оси отметим точки, в которых:

1) числитель равен нулю (в данном примере это -4) ; такие точки отмечаются *незакрашенными* в случае *строгого* неравенства ($>$ или $<$) или *закрашенными* в случае *нестрогого* неравенства ($\ge$ или $\le$) ;
2) знаменатель равен нулю (в данном примере это 0 и -5) ; такие точки отмечаются *незакрашенными* независимо от того, является ли неравенство строгим или нет.
3) Кроме того, отметим “выколотую” точку 3 .

Отметим знаки функции $f(x)=\dfrac{x+4}{x(x+5)}$ на получившихся промежутках и

заштрихуем нужные промежутки (в данном примере промежутки, отмеченные знаком “+” , так как наша функция ≥ 0) .



Все решения данного неравенства: $x\in(-5\,;-4\,]\cup(\,0\,;3\,)\cup(\,3\,;+\infty\,)$.

Целые решения, принадлежащие промежутку $\left[\,-13\,;\,4\,\right]$: $-4\,;1\,;2\,;4$.

Количество этих целых решений равно 4 . *Ответ:* 4 .

<u>*Замечание*</u> по поводу расстановки знаков функции $f(x)$ при решении рациональных неравенств. Сначала определяем знак функции $f(x)$ в крайнем правом промежутке, подсчитывая значение функции в любой внутренней точке этого промежутка. Затем пользуемся правилом чередования знаков. Это правило *применимо только к рациональным неравенствам*.

Правило чередования знаков (только для рациональных неравенств).

Если сомножитель $x-x_0$ стоит *в нечётной степени* (напр., в 1-ой, в 3-ей, в 5-ой) , то при переходе через точку x_0 знаки *чередуются*.

Если сомножитель $x-x_0$ стоит *в чётной степени* (напр., в 0-ой, во 2-ой, в 4-ой) , то при переходе через точку x_0 знаки *не чередуются*.

Проиллюстрируем сказанное на неравенстве из примера 1. Формально можно записать $f(x)=\dfrac{(x+4)^1}{x^1(x-3)^0(x+5)^1}$. Так как $f(4)=\dfrac{2}{9}>0$, то над промежутком $(3\,;+\infty)$ ставим знак "плюс". Затем расставляем знаки функции, исходя из правила чередования знаков: при переходе через точку 3 знаки *не чередуются*, при переходе через остальные точки знаки *чередуются*.

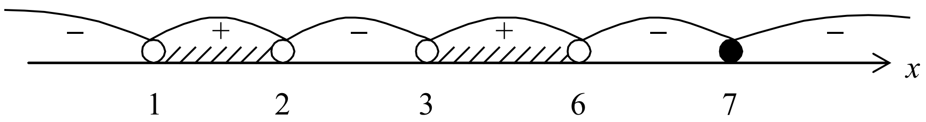
<u>*Пример 2.*</u> Решить неравенство $\dfrac{5x-31}{(x^2-7x+6)(x^2-5x+6)}\ge\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Решение. Всё перенесём в левую часть неравенства и разложим на множители имеющиеся знаменатели. Получим $\dfrac{5x-31}{(x-1)(x-6)\cdot(x-2)(x-3)}-\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}\ge 0$.

Затем приведём к общему знаменателю и произведём дальнейшие упрощения:

$\dfrac{5x-31-(x-6)(x-3)}{(x-1)(x-6)(x-2)(x-3)}\ge 0$; $\dfrac{-x^2+14x-49}{(x-1)(x-6)(x-2)(x-3)}\ge 0$;

$\dfrac{-(x-7)^2}{(x-1)(x-6)(x-2)(x-3)}\ge 0$. Выполним рисунок.



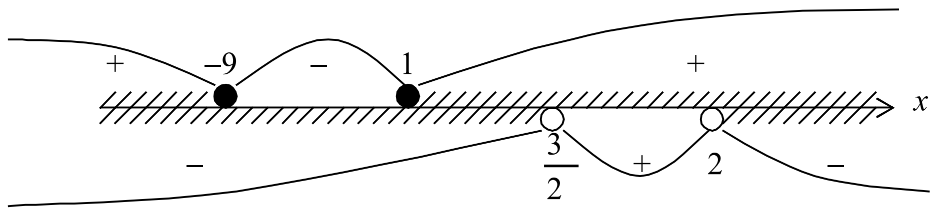
Обращаем внимание на то, что в ответ включаются не только два заштрихованных промежутка, но и изолированная закрашенная точка 7.

Ответ: $(1\,;2)\cup(3\,;6)\cup\{7\}$.

<u>*Пример 3.*</u> Решить систему неравенств $\begin{cases}x^2+8x-9\ge 0\\ \dfrac{x+1}{2x-3}\le 3\end{cases}$.

Решение. Левую часть первого неравенства разложим на множители. Во втором неравенстве тройку перенесём налево и сделаем приведение к общему знаменателю.

Получим систему $\begin{cases}(x-1)(x+9)\ge 0\\ \dfrac{10-5x}{2x-3}\le 0\end{cases}$. Выполним рисунок.



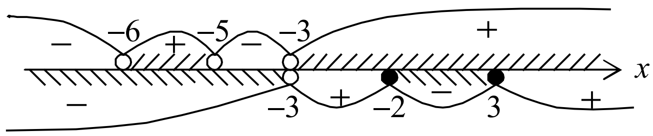
На верхней части рисунка решено первое неравенство, на нижней – второе. В ответ записываем пересечение получившихся множеств решений, т.е. те промежутки, на которых присутствуют обе штриховки.

Ответ: $\left(-\infty\,;-9\,\right]\cup\left[\,1\,;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\,2\,;+\infty\,\right)$.

<u>*Пример 4.*</u> Решить двойное неравенство $-1<\dfrac{x^2+10x+27}{x+3}\le 11$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases}\dfrac{x^2+10x+27}{x+3}>-1\\ \dfrac{x^2+10x+27}{x+3}\le 11\end{cases}$.

После переноса констант в левые части соответствующих неравенств, приведения к общему знаменателю и разложения числителей на множители получим систему $\begin{cases}\dfrac{(x+5)(x+6)}{x+3}>0\\ \dfrac{(x+2)(x-3)}{x+3}\le 0\end{cases}$. Выполним рисунок.



Ответ: $(-6\,;-5\,)\cup[\,-2\,;3\,]$.

<u>*Пример 5.*</u> Найти сумму целых решений системы $\begin{cases}|\,x\,|\ge 4\\ |\,x-1\,|<6\end{cases}$.

Решение. Так как левые и правые части обоих неравенств неотрицательны, то оба неравенства можно возвести в квадрат. При этом используется формула $|z|^2=z^2$.

Данная система равносильна системе $\begin{cases}x^2\ge 16\\ (x-1)^2<36\end{cases}$ или $\begin{cases}(x-4)(x+4)\ge 0\\ (x-7)(x+5)<0\end{cases}$.

Множество всех решений этой системы: $\left(\,-5\,;-4\,\right]\cup\left[\,4\,;7\,\right)$.

Целые решения: $-4\,;4\,;5\,;6$. *Ответ:* 11 .

<u>*Пример 6.*</u> Найти количество целых решений неравенства $\sqrt{\dfrac{x^2-3}{x}}<1$.

Решение. ОДЗ: подкоренное выражение ≥ 0 . Кроме того, поскольку левая и правая части данного неравенства неотрицательны, неравенство можно возвести в квадрат. Следовательно, нужно решить систему $\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{x}\ge 0\\ \dfrac{x^2-3}{x}<1\end{cases}$. Множество решений этой системы: $\left[-\sqrt{3}\,; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right) \cup \left[\sqrt{3}\,; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right)$. Целое решение: 2 .

Ответ: 1 .

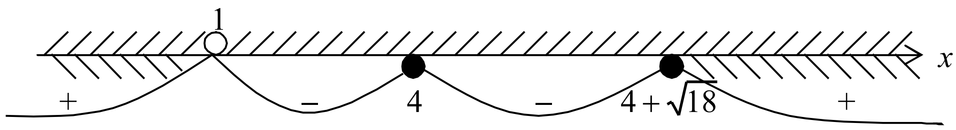
Большинство неравенств, содержащих модули и радикалы, мы рекомендуем решать методом интервалов. Этот метод будет проиллюстрирован в примерах 7 – 9.

<u>*Пример 7.*</u> Решить неравенство $|\, x-7 \,| \geq \dfrac{9}{x-1}$.

Решение. Из правой части неравенства всё перенесём в левую часть и введём функцию $f(x) = |\, x-7 \,| - \dfrac{9}{x-1} \geq 0$. Затем выполним три стандартных пункта.

1) *Находим ОДЗ:* $x-1 \neq 0$, т.е. $x \neq 1$.
2) *Приравняем к нулю функцию* $f(x)$. Другими словами, мы решаем уравнение $|\, x-7 \,| - \dfrac{9}{x-1} = 0$. Корни этого уравнения: $x_1 = 4$; $x_2 = 4 + \sqrt{18} \approx 8{,}2$.
3) *Рисунок.* На верхней части рисунка изобразим ОДЗ. На нижней части рисунка отметим точки, в которых $f(x)=0$. Точки отмечаются “закрашенными” , если неравенство нестрогое, и “незакрашенными” , если неравенство строгое. Затем нарисуем дуги и расставим знаки функции $f(x)$ в каждом промежутке, входящем в ОДЗ. Если промежуток не входит в ОДЗ, то соответствующая дуга не изображается. В случае произвольных неравенств не существует каких-либо правил чередования знаков. Поэтому следует подсчитывать значения функции $f(x)$ в каждом промежутке, входящем в ОДЗ.

В нашем случае
$f(0) = 16 > 0$; $f(2) = -4 < 0$; $f(5) = -0{,}25 < 0$; $f(10) = 2 > 0$.



Ответ: $(-\infty\,; 1) \cup \{4\} \cup \left[4+\sqrt{18}\,; +\infty \right)$.

<u>*Пример 8.*</u> Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{5-x}}{3-x} \leq 1$.

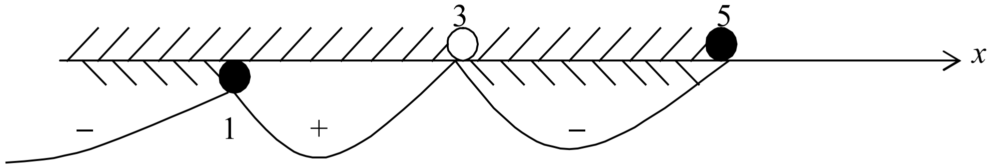
Решение. Выполним те же стандартные пункты, что и в примере 12.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{5-x}}{3-x} - 1 \leq 0$

1) *ОДЗ:* $\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ 3-x \neq 0 \end{cases}$, т.е. $x \in (-\infty\,; 3) \cup (3\,; 5\,]$.

2) $f(x)=0$, т.е. $\dfrac{\sqrt{5-x}}{3-x} = 1$. Корнем этого уравнения является $x=1$.

3) *Рисунок.*



Ответ: $(-\infty\,;1\,]\cup(\,3\,;5\,]$.

<u>*Пример 9.*</u> Решить неравенство $x^2+6x+2\cdot\sqrt{x^2+6x-7}<22$.

Решение. Перенесём всё в левую часть неравенства и введём функцию $f(x)=x^2+6x+2\cdot\sqrt{x^2+6x-7}-22<0$.

1) *ОДЗ* : $x^2+6x-7\ge 0$; $(x-1)(x+7)\ge 0$; $x\in(-\infty\,;-7\,]\cup[\,1\,;\infty\,)$.

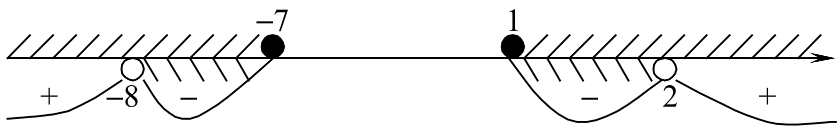
2) Решим уравнение $f(x)=0$, т.е. $x^2+6x+2\cdot\sqrt{x^2+6x-7}-22=0$.

Замена: $a=x^2+6x$. Получим: $a+2\cdot\sqrt{a-7}-22=0$; $2\cdot\sqrt{a-7}=22-a$.

Запишем *ОДЗ* : $a-7\ge 0$ и *ДУ* : $22-a\ge 0$. После возведения в квадрат получим: $4(a-7)=(22-a)^2$. Отсюда $a_1=16$ (удовлетворяет *ОДЗ* и *ДУ*) ; $a_2=32$ (не удовлетворяет *ДУ*) .

Обратная замена: $x^2+6x=16$. Отсюда $x_1=-8$; $x_2=2$.

3) Рисунок.



Ответ: $(-8\,;-7\,]\cup[\,1\,;2\,)$.

Задачи для самостоятельного решения

6. Найти количество всех целых решений неравенства $\dfrac{30-x-x^2}{35x-2x^2-x^3} \geq 0$, принадлежащих промежутку $[-15\,;6)$.
7. Решить неравенство $\dfrac{1}{x^2+5x+4} \leq \dfrac{8x+27}{(x^2+8x+16)(x^2+7x+6)}$.
8. Найти количество всех целых решений неравенства $\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2 - \dfrac{2}{x+2} \leq \dfrac{8x}{(x-2)^2(x+2)}$.
9. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 < 25 \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases}$.
10. Решить двойное неравенство $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3x+1}{x-2} < 2$.
11. Найти сумму целых решений системы неравенств $\begin{cases} |\,x-6\,| \geq 3 \\ |\,x-5{,}5\,| < 4{,}5 \end{cases}$.
12. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}} \geq 2$.
13. Решить неравенство $\dfrac{2}{3-2x} < \dfrac{3}{|\,x+5\,|}$.
14. Решить неравенство $\sqrt{x+5} > x-1$.
15. Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-4} \leq 1$.
16. Решить неравенство $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}} \geq \dfrac{7}{12}$.

ВЕКТОРЫ

Общие сведения.

1. Даны векторы в пространстве: $\boldsymbol{a}=\{a_1\,;\,a_2\,;\,a_3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{b_1\,;\,b_2\,;\,b_3\}$.

   Скалярное произведение этих векторов равно $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

   Длина (или модуль) вектора $|\,\boldsymbol{a}\,|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

   Замечание. Если векторы находятся не в пространстве, а на плоскости (т.е. имеют две координаты) , то «третьи слагаемые» в двух вышеприведённых формулах отсутствуют.

   Косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен $\cos(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$.

   Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$.
   Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ прямой, или $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.
   Угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ тупой, если $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$.

   Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны (или параллельны) , если $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

   Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, если существует такое число k ($k>0$ в случае сонаправленных векторов, и $k<0$ в случае противонаправленных векторов) , при котором $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

2. Даны точки: $A(a_1\,;\,a_2\,;\,a_3)$ и $B(b_1\,;\,b_2\,;\,b_3)$.

   В целях упрощения записей и сокращения хода решения задач (это важно при тестовых испытаниях, когда время ограничено, а задач много) используются определённые формулы , и **этим формулам мы придаём в точности тот смысл, который указан, а не какой-либо иной.** Например:

   $\boldsymbol{AB}=B-A$ (координаты вектора $\boldsymbol{AB}$ равны координатам точки B минус соответствующие координаты точки А) ;

   $B=A+\boldsymbol{AB}$ (координаты точки В равны координатам точки А плюс соответствующие координаты вектора $\boldsymbol{AB}$) .

   Если точка C является серединой отрезка AB , то $C=\dfrac{1}{2}(A+B)$, т.е. координаты точки C равны полусумме соответствующих координат точек A и B .

   Если точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$, считая от точки A , то
   $\boldsymbol{AC}=\dfrac{m}{m+n}\cdot\boldsymbol{AB}$, следовательно, $C=A+\dfrac{m}{m+n}\cdot\boldsymbol{AB}$.

<u>*Пример 1.*</u> Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{\,3\,;-2\,;\,1\,\}$ и $\boldsymbol{b}=\{\,-2\,;\,4\,-3\,\}$. Найти длину вектора $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Решение. $\boldsymbol{c}=2\cdot\{\,3\,;-2\,;\,1\,\}+3\cdot\{\,-2\,;\,4\,-3\,\}=\{\,6\,;-4\,;\,2\,\}+\{-6\,;\,12\,;-9\,\}=\{\,0\,;\,8\,;-7\,\}$.
$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{0^2+8^2+(-7)^2}=\sqrt{113}$; $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(-2)\cdot0+4\cdot8+(-3)\cdot(-7)=53$;

$$\cos(\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{3\cdot(-2)+(-2)\cdot4+1\cdot(-3)}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+4^2+(-3)^2}}=-\frac{17}{\sqrt{406}}\ .$$

Ответ: $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{113}$; $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 53$; $\cos(\boldsymbol{a} ; \boldsymbol{b}) = -\dfrac{17}{\sqrt{406}}$.

<u>Пример 2.</u> При каких значениях m длина вектора $\boldsymbol{a}$={ –7 ; 2m ; 4 } не превосходит длины вектора $\boldsymbol{b}$={ 3m ; 6 ; –3 } ?

Решение. Сначала подсчитаем длины данных векторов: $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{49 + 4m^2 + 16} = \sqrt{4m^2 + 65}$; $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{9m^2 + 36 + 9} = \sqrt{9m^2 + 45}$. По условию, $|\boldsymbol{a}| \le |\boldsymbol{b}|$. Следовательно, $\sqrt{4m^2 + 65} \le \sqrt{9m^2 + 45}$; $4m^2 + 65 \le 9m^2 + 45$; $5m^2 - 20 \ge 0$. Решениями этого неравенства являются $m \in (-\infty ; -2\,] \cup [\,2 ; +\infty)$.
Ответ: $(-\infty ; -2\,] \cup [\,2 ; +\infty)$.

<u>Пример 3.</u> При каких значениях m угол между векторами $\boldsymbol{a}$={ m ; –3 ; 5 } и $\boldsymbol{b}$={ 3 ; 2m ; 3 } не превосходит 90° ?

Решение. Так как угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ острый или прямой, то скалярное произведение этих векторов $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \ge 0$, т.е. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 3m - 6m + 15 = -3m + 15 \ge 0$. Отсюда следует, что $m \le 5$. *Ответ:* (–∞ ; 5] .

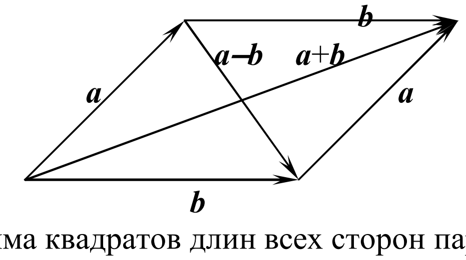
<u>Пример 4.</u> Даны векторы $\boldsymbol{AB}$={ α ; 6 ; β } и $\boldsymbol{BC}$={ 2 ; –3 ; 5 }. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Найти α+β .

Решение. Из условия следует, что векторы $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BC}$ коллинеарны. Следовательно, их координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{\beta}{5}$. Отсюда α=–4 ; β=–10 ; α+β=–14 . *Ответ:* –14 .

<u>Пример 5</u>. Вектор $\boldsymbol{p}$ одинаково направлен с вектором $\boldsymbol{q}$={ –5 ; 3 ; –2 } и $|\boldsymbol{p}| = 4 \cdot \sqrt{38}$. Найти сумму координат вектора $\boldsymbol{p}$.

Решение. Из условия следует, что векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны. Тогда $\boldsymbol{p} = k \cdot \boldsymbol{q} = \{ -5k ; 3k ; -2k \}$. Так как вектор $\boldsymbol{p}$ одинаково направлен с вектором $\boldsymbol{q}$, то k>0 . $|\boldsymbol{p}| = \sqrt{25k^2 + 9k^2 + 4k^2} = \sqrt{38k^2} = |k| \cdot \sqrt{38} = k \cdot \sqrt{38} = 4 \cdot \sqrt{38}$. Отсюда k=4 ; $\boldsymbol{p}$={ –20 ; 12 ; –8 } ; сумма координат вектора $\boldsymbol{p}$ равна –16 . *Ответ:* –16 .

<u>Пример 6</u>. Дано: $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы на плоскости ; $|\boldsymbol{b}|=7$; $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=12$; $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=14$. Найти $|\boldsymbol{a}|$.



Решение. Известно, что сумма квадратов длин всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов длин его диагоналей. Отсюда следует, что

$2\cdot|\boldsymbol{a}|^2+2\cdot|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$. Подставив в это равенство данные, получим: $2\cdot|\boldsymbol{a}|^2+2\cdot 7^2=12^2+14^2$. Отсюда $|\boldsymbol{a}|=11$. *Ответ:* 11 .

Пример 7. Даны точки $A(\ 1\ ;\ -2\ )$, $B(\ -6\ ;\ -3\ )$, $C(\ -2\ ;\ 9\ )$. Найти расстояние от точки A до середины отрезка BC .

Решение. Обозначим середину отрезка BC через D . Тогда $D=\frac{1}{2}\cdot(B+C)=(\ -4\ ;3\ )$; $\boldsymbol{AD}=D-A=\{\ -5\ ;5\ \}$. Расстояние от точки A до точки D – это длина вектора AD , т.е. $|\boldsymbol{AD}|=\sqrt{25+25}=5\cdot\sqrt{2}$. *Ответ:* $5\cdot\sqrt{2}$.

Пример 8. Найти координаты точки M , лежащей на оси Oy и равноудалённой от точек $A(\ 3\ ;\ 3\ )$ и $B(\ 2\ ;\ 8\ )$.

Решение. Пусть $(\ x\ ;\ y\ )$ – координаты точки M . Поскольку $M\in Oy$, то $x=0$. Следовательно, $M(\ 0\ ;\ y\ )$. Дальнейший ход решения:

$\boldsymbol{AM}=\{\ -3\ ;\ y-3\ \}$; $|\boldsymbol{AM}|=\sqrt{(-3)^2+(y-3)^2}=\sqrt{y^2-6y+18}$;

$\boldsymbol{BM}=\{\ -2\ ;\ y-8\ \}$; $|\boldsymbol{BM}|=\sqrt{(-2)^2+(y-8)^2}=\sqrt{y^2-16y+68}$.

Так как точка M равноудалена от точек A и B , то $|\boldsymbol{AM}|=|\boldsymbol{BM}|$, т.е. $\sqrt{y^2-6y+18}=\sqrt{y^2-16y+68}$, отсюда $y=5$. *Ответ:* $(\ 0\ ;\ 5\ )$.

Пример 9. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB , где $A(\ 4\ ;\ 1\ )$, $B(\ -2\ ;\ 9\ )$.

Решение. Центром окружности является точка O – середина отрезка AB , т.е. точка $O=\frac{1}{2}\cdot(A+B)=(\ 1\ ;5\ )$. Радиусом окружности является, например, длина вектора OA , т.е. $|\boldsymbol{OA}|=|\ \{\ 3\ ;-4\ \}\ |=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Напомним, что уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(\ x_0\ ;\ y_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Следовательно, уравнение искомой окружности $(x-1)^2+(y-5)^2=5^2$. *Ответ:* $(x-1)^2+(y-5)^2=25$.

Пример 10. Найти координаты точки C , которая делит отрезок AB в отношении $2:3$, считая от точки A , если $A(\ 12\ ;\ -2\ )$, $B(\ 7\ ;8\ )$.

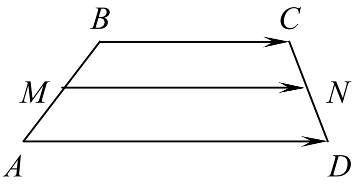
Решение.

С одной стороны, $\boldsymbol{AC}=\frac{2}{5}\cdot\boldsymbol{AB}=\frac{2}{5}\cdot\{\ -5\ ;10\ \}=\{\ -2\ ;4\ \}$. С другой стороны, $\boldsymbol{AC}=C-A$. Следовательно, $C=A+\boldsymbol{AC}=(\ 12\ ;\ -2\ )+\{\ -2\ ;\ 4\ \}=(\ 10\ ;\ 2\ )$.

Ответ: (10; 2).

Пример 11. В трапеции $ABCD$: $A(5\,;-2)$, $B(4\,;0)$, $C(-2\,;8)$, $\boldsymbol{AD}=2\cdot\boldsymbol{BC}$. Найти координаты вершины D и длину средней линии трапеции.

Решение.



С одной стороны, $\boldsymbol{AD}=2\cdot\boldsymbol{BC}=2\cdot\{-6\,;\,8\}=\{-12\,;\,16\}$. С другой стороны, $\boldsymbol{AD}=D-A$. Следовательно, $D=A+\boldsymbol{AD}=(5\,;-2)+\{-12\,;16\}=(-7\,;14)$.

Пусть MN – средняя линии трапеции. Поскольку длина средней линии трапеции равна полусумме длин её оснований, то

$$|\boldsymbol{MN}|=\frac{|\boldsymbol{AD}|+|\boldsymbol{BC}|}{2}=\frac{|2\cdot\boldsymbol{BC}|+|\boldsymbol{BC}|}{2}=\frac{2\cdot|\boldsymbol{BC}|+|\boldsymbol{BC}|}{2}=\frac{3}{2}\cdot|\boldsymbol{BC}|=\frac{3}{2}\cdot|\{-6\,;8\}|=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{(-6)^2+8^2}=15\ .$$ *Ответ :* $D(-7\,;14)$; $|\boldsymbol{MN}|=15$.

Пример 12. При каких значениях p вектор $\boldsymbol{c}=\{3-p\,;\,p^2+6p\}$ равен вектору $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}=\{2\,;1\}$, $\boldsymbol{b}=\{-1\,;3\}$?

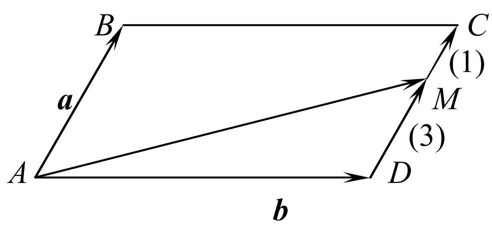
Решение. Нужно координаты вектора $\boldsymbol{c}$ приравнять к соответствующим координатам вектора $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\{4\,;-5\}$ и решить систему $\begin{cases}3-p=4\\ p^2+6p=-5\end{cases}$. Эта система имеет единственное решение $p=-1$. *Ответ:* -1 .

Пример 13. Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=\{3\,;1\}$, в два раза длиннее $\boldsymbol{a}$ и имеющего положительную первую координату.

Решение. Пусть искомый вектор $\boldsymbol{b}=\{x\,;y\}$. Так как $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, то скалярное произведение $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3x+y=0$. Так как $|\boldsymbol{b}|=2\cdot|\boldsymbol{a}|$, то $\sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{3^2+1^2}$. Система $\begin{cases}3x+y=0\\ \sqrt{x^2+y^2}=2\cdot\sqrt{10}\end{cases}$ имеет два решения $\begin{cases}x_1=2\\ y_1=-6\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=-2\\ y_2=6\end{cases}$. Поскольку x-координата должна быть положительной, то условию задачи удовлетворяет лишь первое решение. *Ответ:* $\{2\,;-6\}$.

Пример 14. Точка M делит сторону CD параллелограмма $ABCD$ в отношении $1:3$, считая от точки C . Выразить вектор $\boldsymbol{AM}$ через векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AD}$.

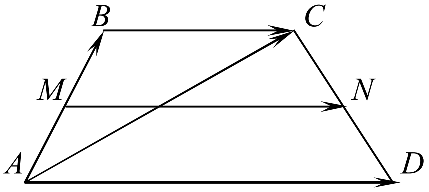
Решение.



$$\boldsymbol{DM}=\frac{3}{4}\cdot\boldsymbol{DC}=\frac{3}{4}\cdot\boldsymbol{a}\quad;\quad\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{DM}=\boldsymbol{b}+\frac{3}{4}\cdot\boldsymbol{a}\ .$$ *Ответ:* $\boldsymbol{b}+\frac{3}{4}\cdot\boldsymbol{a}$.

Пример 15. Дано: $ABCD$ – трапеция, BC и AD – её основания, точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, $\boldsymbol{AB} = \{ -7 ; 4 ; 5 \}$, $\boldsymbol{AC} = \{ -3 ; 2 ; -1 \}$, $\boldsymbol{AD} = \{ 6 ; -3 ; -9 \}$. Найти сумму координат вектора $\boldsymbol{MN}$.

Решение.



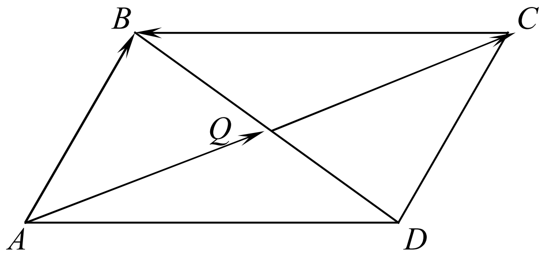
$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}$. Следовательно, $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{AB}=\{ -3 ; 2 ; -1 \} - \{-7 ; 4 ; 5 \}=\{4; -2; -6\}$.
По свойству средней линии трапеции

$$\boldsymbol{MN} = \frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{AD}+\boldsymbol{BC}) = \frac{1}{2}\cdot(\{ 6 ; -3 ; -9 \}+\{ 4 ; -2 ; -6 \}) = \left\{ 5 ; -\frac{5}{2} ; -\frac{15}{2} \right\}.$$

Сумма координат вектора $\boldsymbol{MN}$ равна -5. *Ответ:* -5.

Пример 16. В параллелограмме $ABCD$ заданы $\boldsymbol{AB} = \{ -5 ; -1 ; 2 \}$, $\boldsymbol{CB} = \{ -3 ; -3 ; 4 \}$, $A (2 ; 8 ; -2)$. Найти сумму координат точки пересечения диагоналей параллелограмма.

Решение. Обозначим через Q точку пересечения диагоналей параллелограмма.



$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{CB} = \{ -5 ; -1 ; 2 \} - \{ -3 ; -3 ; 4 \} = \{ -2 ; 2 ; -2 \}$.
Так как диагонали параллелограмма делятся пополам в точке их пересечения, то $\boldsymbol{AQ} = \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{AC} = \frac{1}{2}\cdot\{ -2 ; 2 ; -2 \} = \{ -1 ; 1 ; -1 \}$. С другой стороны, $\boldsymbol{AQ} = Q - A$.
Следовательно, $Q = A + \boldsymbol{AQ} = (2 ; 8 ; -2) + \{ -1 ; 1 ; -1 \} = (1 ; 9 ; -3)$. Сумма координат точки Q равна 7. *Ответ:* 7.

Пример 17. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(2 ; 1)$, $B(1 ; -2)$, $C(9 ; 2)$.

Решение. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0 ; y_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Подставив в это уравнение координаты данных точек вместо $(x ; y)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (2-x_0)^2+(1-y_0)^2=R^2 \\ (1-x_0)^2+(-2-y_0)^2=R^2 \\ (9-x_0)^2+(2-y_0)^2=R^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4-4x_0+x_0^2+1-2y_0+y_0^2=R^2 \\ 1-2x_0+x_0^2+4+4y_0+y_0^2=R^2 \\ 81-18x_0+x_0^2+4-4y_0+y_0^2=R^2 \end{cases}.$$

Из второго уравнения вычтем первое уравнение, а также из третьего уравнения вычтем первое. Получим: $\begin{cases} 2x_0+6y_0=0 \\ -14x_0-2y_0+80=0 \end{cases}$. Отсюда следует, что $\begin{cases} x_0=6 \\ y_0=-2 \end{cases}$, а также $R^2=(2-x_0)^2+(1-y_0)^2=(2-6)^2+(1+2)^2=25$. Следовательно, уравнение окружности имеет вид $(x-6)^2+(y+2)^2=25$.

Ответ: $(x-6)^2+(y+2)^2=25$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны векторы $\boldsymbol{a}=\{\ 2\ ;\ 4\ ;\ -1\ \}$ и $\boldsymbol{b}=\{\ 3\ ;\ 5\ -3\ \}$. Найти длину вектора $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$, косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
2. При каких значениях m длина вектора $\boldsymbol{a}=\left\{\sqrt{3}\ ;m+1\ ;m+2\right\}$ не превосходит 8 ?
3. При каких значениях m угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{\ 2\ ;\ m\ ;\ -4\ \}$ и $\boldsymbol{b}=\{\ m\ ;\ 1\ ;6\ \}$ тупой ?
4. Даны векторы $\boldsymbol{AB}=\{\ 2\ ;\ 6\ ;\ 1\ \}$ и $\boldsymbol{BC}=\{\ -4\ ;\ m\ ;\ n\ \}$. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найти $m{\cdot}n$.
5. Вектор $\boldsymbol{p}$ противонаправлен вектору $\boldsymbol{q}=\{\ 4\ ;\ -6\ ;\ 2\ \}$ и $|\boldsymbol{p}|=\sqrt{14}$. Найти произведение координат вектора $\boldsymbol{p}$.
6. Дано: $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы на плоскости; $|\boldsymbol{a}|=10$; $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=31$; $|\boldsymbol{b}|=21$. Найти $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.
7. Даны точки $A(\ 6\ ;\ 2\ )$, $B(\ 3\ ;\ -5\ )$, $C(\ -9\ ;\ 3\ )$. Найти расстояние от точки A до середины отрезка BC.
8. Найти координаты точки M, лежащей на оси Ox и равноудалённой от точек $A(\ -2\ ;\ 1\ )$ и $B(\ 8\ ;\ 11\ )$.
9. Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, где $A(\ -2\ ;-4\ )$, $B(\ 4\ ;\ 10\ )$.
10. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $3:4$, считая от точки A, если $A(\ 2\ ;\ 5\ )$, $B(\ -5\ ;19\ )$.
11. В трапеции $ABCD$: $A(\ 0\ ;\ 8\ )$, $B(\ -2\ ;\ 3\ )$, $C(6\ ;\ 1\ )$, $\boldsymbol{AD}=4{\cdot}\boldsymbol{BC}$. Найти координаты вершины D и длину средней линии трапеции.
12. При каких значениях p вектор $\boldsymbol{c}=\left\{\ p^2-1\ ;2p+1\right\}$ равен вектору $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}=\{\ 2\ ;\ 1\ \}$, $\boldsymbol{b}=\{\ -1\ ;\ 3\ \}$?
13. Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=\{1;\ 2\ \}$, в три раза длиннее $\boldsymbol{a}$ и имеющего отрицательную вторую координату.
14. Точка M делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $3:2$, считая от точки B. Выразить вектор $\boldsymbol{AM}$ через векторы $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{AD}$.
15. Дано: $ABCD$ – трапеция, AB и CD – её основания, точки M и N – середины сторон AD и BC соответственно, $\boldsymbol{MN}=\{\ -2\ ;\ 2\ ;\ -4\ \}$, $\boldsymbol{CD}=\{\ 3\ ;\ -3\ ;\ 6\ \}$. Найти сумму координат вектора $\boldsymbol{AB}$.
16. В параллелограмме $ABCD$ заданы координаты двух вершин $A\ (\ 4\ ;\ -2\ ;\ 4\ )$ и $B\ (\ 5\ ;\ -1\ ;\ -8\ )$ и координаты точки пересечения диагоналей $Q\ (\ 7\ ;\ -1\ ;\ 4\ )$. Найти координаты вектора $\boldsymbol{AD}$.
17. Составить уравнение окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках $A(\ 1\ ;\ 1\ )$, $B(\ 3\ ;\ 3\ )$, $C(\ -6\ ;\ 0\ )$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. *Определения тригонометрических функций.*
   Пусть из начала координат исходит вектор единичной длины (радиус-вектор), наклонённый к положительному направлению оси Ox под углом α .
   $\sin\alpha$ – это проекция радиус-вектора на ось Oy .
   $\cos\alpha$ – это проекция радиус-вектора на ось Ox .
   $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. $\mathrm{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.
2. *Области определения и области значений.*
   $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены при всех $\alpha\in(-\infty\,;+\infty)$.
   $\mathrm{tg}\,\alpha$ не определён в точках $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. $\mathrm{ctg}\,\alpha$ не определён в точках πn .
   (Здесь и в дальнейшем $n\in\boldsymbol{Z}$, т.е. $n = 0\,;\pm1\,;\pm2\,;\pm3\,;\,\ldots$)
   $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ принимают все значения только из отрезка $[-1\,;1]$.
   $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ принимают любые значения из числовой оси $(-\infty\,;+\infty)$.

3. *Знаки тригонометрических функций.*
   $\sin\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или II четверти ; $\sin\alpha < 0$ при $\alpha\in$ III или IV четверти.
   $\cos\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или IV четверти ; $\cos\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или III четверти.
   $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или III четверти ; $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или IV четверти.
   $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$ при $\alpha\in$ I или III четверти ; $\mathrm{ctg}\,\alpha < 0$ при $\alpha\in$ II или IV четверти.

4. *Стандартные значения тригонометрических функций.*

Угол	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0
ctg	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.

5. *Чётность и нечётность.*
$\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ – нечётные функции:
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$.
$\cos\alpha$ – чётная функция: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

6. *Периодичность.*
$\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют период 2π : $\sin\alpha = \sin(\alpha \pm 2\pi)$; $\cos\alpha = \cos(\alpha \pm 2\pi)$.
$\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ имеют период π : $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}(\alpha \pm \pi)$; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(\alpha \pm \pi)$.

7. *Формулы приведения.*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha \;;\; \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha \;;\; \sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha \;;\; \sin(2\pi\pm\alpha)=\pm\sin\alpha .$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha \;;\; \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha \;;\; \cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha \;;\; \cos(2\pi\pm\alpha)=\cos\alpha .$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha \;;\; \mathrm{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\,\alpha \;;\; \mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{ctg}\,\alpha \;;\; \mathrm{tg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{tg}\,\alpha .$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{tg}\,\alpha \;;\; \mathrm{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\,\alpha \;;\; \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\mathrm{tg}\,\alpha \;;\; \mathrm{ctg}(2\pi\pm\alpha)=\pm\mathrm{ctg}\,\alpha .$$

8. *Зависимости между функциями одного и того же аргумента.*

Основное тригонометрическое тождество: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \;;\; 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \;;\; \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} \;;\; \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} .$$

9. *Формулы сложения.*

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \;;\; \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha .$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \;;\; \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta .$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \;;\; \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} .$$

10. *Функции двойного и тройного аргумента.*

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \;;\; \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \;;\; \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha .$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \;;\; \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha .$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \;;\; \mathrm{tg}\,3\alpha = \frac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\,\mathrm{tg}^2\alpha} .$$

11. *Формулы понижения степени.*

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha \;;\; \cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha .$$

12. *Функции половинного аргумента.*

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad ;$$

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad ; \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad ;$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad ; \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad .$$

13. *Разложение произведений в суммы.*

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) \quad ;$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) \quad ;$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta).$$

14. *Разложение сумм в произведения.*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \quad ;$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ; \quad \cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2} \quad .$$

15. *Определения обратных тригонометрических функций.*

а) Пусть $|a| \le 1$. Тогда $\arcsin a$ – это число или угол, $\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу a.

б) Пусть $|a| \le 1$. Тогда $\arccos a$ – это число или угол, $\in[0;\pi]$, косинус которого равен числу a.

в) Пусть a – любое число. Тогда $\mathrm{arctg}\,a$ – это число или угол, $\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу a.

г) Пусть a – любое число. Тогда $\mathrm{arcctg}\,a$ – это число или угол, $\in(0;\pi)$, котангенс которого равен числу a.

Замечание. Если $a > 0$, то все углы $\arcsin a$, $\arccos a$, $\mathrm{arctg}\,a$, $\mathrm{arcctg}\,a$ находятся в первой четверти.

16. *Основные формулы с обратными тригонометрическими функциями.*

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a \quad ; \quad \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a \quad ;$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a \quad ; \quad \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a \quad ; \quad \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a \quad ;$$

$$\sin(\arcsin a) = \cos(\arccos a) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \quad ;$$

$$\sin(\arccos a) = \cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{a} \quad ;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} a) = \cos(\operatorname{arcctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad ; \quad \sin(\operatorname{arcctg} a) = \cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad ;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin a) = \operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg}(\arccos a) = \operatorname{ctg}(\arcsin a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} .$$

17. *Стандартные значения обратных тригонометрических функций.*

$\arcsin 0 = 0 \quad ;$	
$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad ;$	$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \quad ;$
$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad ;$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad ;$
$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ;$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3} \quad ;$
$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad .$	$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad .$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \quad ;$	
$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad ;$	$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \quad ;$
$\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad ;$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \quad ;$
$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad ;$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} \quad ;$
$\arccos 1 = 0 \quad .$	$\arccos(-1) = \pi \quad .$

$\operatorname{arctg} 0 = 0$;	
$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$;	$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;	$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;
$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.	$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.
$\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$;	
$\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$;	$\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$;
$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$;	$\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$;
$\operatorname{arcctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$.	$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$.

18. *Простейшие тригонометрические уравнения.*

а) Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin z = a$ не имеет решений.

Если $|a| \le 1$, то уравнение $\sin z = a$ имеет решения $z = (-1)^n \arcsin a + \pi n$.

Частные случаи:

$$\sin z = 0 \Rightarrow z = \pi n .$$

$$\sin z = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n .$$

$$\sin z = -1 \Rightarrow z = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n .$$

б) Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos z = a$ не имеет решений.

Если $|a| \le 1$, то уравнение $\cos z = a$ имеет решения $z = \pm \arccos a + 2\pi n$.

Частные случаи:

$$\cos z = 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi n .$$

$$\cos z = 1 \Rightarrow z = 2\pi n .$$

$$\cos z = -1 \Rightarrow z = \pi + 2\pi n .$$

в) Пусть a – любое число.
Тогда уравнение $\operatorname{tg} z = a$ имеет решения $z = \operatorname{arctg} a + \pi n$.

г) Пусть a – любое число.
Тогда уравнение $\operatorname{ctg} z = a$ имеет решения $z = \operatorname{arcctg} a + \pi n$.

Пример 1. Вычислить $A=\dfrac{\cos 76^\circ-\cos 16^\circ}{1-2\sin^2 22^\circ}$.

Решение. Числитель разложим в произведение (одна из формул пункта 14) , а к знаменателю применим формулу понижения степени (пункт 11). Получим

$$A=\frac{2\sin 46^\circ \sin(-30^\circ)}{1-2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 44^\circ\right)}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos 44^\circ}=\frac{-\sin 46^\circ}{\cos(90^\circ-46^\circ)}=\{\textit{пункт } 7\}=\frac{-\sin 46^\circ}{\sin 46^\circ}=-1 .$$

Ответ: -1 .

Пример 2. Вычислить $A=\arccos(\operatorname{tg}(-315^\circ))$.

Решение. В силу периодичности тангенса $\operatorname{tg}(-315^\circ)=\operatorname{tg}(-315^\circ+360^\circ)=\operatorname{tg}45^\circ=1$. Следовательно, $A=\arccos 1=0$. *Ответ:* 0 .

Пример 3. Вычислить $A=\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

Решение. В формулу (из пункта 16) $\sin(\operatorname{arcctg} a)=\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ подставим $a=-\dfrac{5}{6}$.

Получим $A=\dfrac{6}{\sqrt{61}}=\dfrac{6\cdot\sqrt{61}}{61}$. *Ответ:* $\dfrac{6\cdot\sqrt{61}}{61}$.

Пример 4. Вычислить в градусах угол $\arccos\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{7}}-\arccos\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

Решение. Обозначим $\alpha=\arccos\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{7}}$ и $\beta=\arccos\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. Требуется вычислить $\alpha-\beta$. Согласно замечанию к пункту 15 , α и $\beta\in$ I-ой четверти, т.е. $0<\alpha<90^\circ$ и $0<\beta<90^\circ$. Следовательно, $-90^\circ<\alpha-\beta<90^\circ$. По формуле сложения (пункт 9) и по формулам пункта 16 имеем: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=$

$$=\cos\left(\arccos\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\right)\cos\left(\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}\right)+\sin\left(\arccos\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\right)\sin\left(\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}+\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{7}}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$ Итак, $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $-90^\circ<\alpha-\beta<90^\circ$, то $\alpha-\beta=\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=30^\circ$. *Ответ:* 30° .

Пример 5. Вычислить $A=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение. Используя формулы пунктов 16 и 7 , получим

$$A=\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\pi-\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$$

Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg}\dfrac{3}{4}\in$ I-ой четверти . Требуется вычислить $A=\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

$\cos\alpha = \cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right) = \frac{3/4}{\sqrt{1+9/16}} = \frac{3}{5}$. По формуле понижения степени $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$. *Ответ:* $\frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$.

<u>*Пример 6.*</u> Дано: $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha + 4\cos\alpha} = \frac{3}{2}$. Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

Решение. После перемножения «крест-накрест» получим
$4\sin\alpha + 6\cos\alpha = 3\sin\alpha + 12\cos\alpha$; $\sin\alpha = 6\cos\alpha$; $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 6$; $\operatorname{tg}\alpha = 6$.
Ответ: 6 .

<u>*Пример 7.*</u> Дано: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 3$. Найти $A = \frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - 2\cos\alpha}$.

Решение. Из условия задачи следует, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$. Используя формулы пункта 12 , найдём $\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}} = 0{,}6$; $\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{9}} = 0{,}8$.

Следовательно, $A = \frac{2\cdot 0{,}6 + 0{,}8}{0{,}6 - 2\cdot 0{,}8} = -2$. *Ответ:* -2 .

<u>*Пример 8.*</u> Упростить выражение $A = \left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\frac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$.

Решение. Приведём к общему знаменателю, суммы и разности разложим в произведения по формулам пункта 14, затем сократим дроби.

$$A = \frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha}{\sin\alpha\sin 3\alpha}\cdot\frac{1}{2\cos 3\alpha\cos 2\alpha} = \frac{2}{2\sin 3\alpha\cos 3\alpha} = \frac{2}{\sin 6\alpha}.$$

Ответ: $\frac{2}{\sin 6\alpha}$.

<u>*Пример 9.*</u> Упростить выражение $A = \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)(\cos 8\alpha - 1)}{\sin 4\alpha\cdot(\cos 4\alpha + 1)}$.

Решение. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

$\cos 8\alpha - 1 = -(1 - \cos 8\alpha) = -2\sin^2 4\alpha$; $\cos 4\alpha + 1 = 2\cos^2 2\alpha$. Следовательно,

$$A = \frac{\frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\left(-2\sin^2 4\alpha\right)}{\sin 4\alpha\cdot 2\cos^2 2\alpha} = \frac{4\sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{4\sin 4\alpha}{\sin 4\alpha} = 4$$. *Ответ:* 4 .

<u>*Пример 10.*</u> Найти среднее арифметическое корней уравнения $\cos^2 x - \sin x\cos x = 1$, принадлежащих отрезку $[\,-200^\circ\,;\,270^\circ\,]$.

Решение. $\cos^2 x - \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$; $-\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$; $-\sin x \cdot (\cos x + \sin x) = 0$. Найдём корни этого уравнения и произведём отбор корней. Так как границы отрезка указаны в градусах, то и корни должны быть указаны в градусах.

1) $\sin x = 0 \;\Rightarrow\; x = \pi n = 180°n$. Придадим букве n значения $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$, а также $-1 ; -2 ; -3 ; \ldots$, но только такие, чтобы попасть в отрезок $[\,-200° ; 270°\,]$.
$n = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 0°} \in$ отрезку.
$n = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 180°} \in$ отрезку.
$n = 2 \;\Rightarrow\; x=360° \notin$ отрезку. Движение в положительном направлении прекращаем.
$n = -1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = -180°} \in$ отрезку.
$n = -2 \Rightarrow x=-360° \notin$ отрезку. Движение в отрицательном направлении прекращаем.
Итак, мы нашли три корня $0° ; 180° ; -180° \in [\,-200° ; 270°\,]$.

2) $\cos x + \sin x = 0$. Разделив это уравнение на $\cos x$, получим $1 + \operatorname{tg} x = 0$,
$\operatorname{tg} x = -1 \;\Rightarrow\; x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n = -45° + 180°n$.
$n = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = -45°} \in$ отрезку.
$n = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x = 135°} \in$ отрезку.
$n = 2 \;\Rightarrow\; x=315° \notin$ отрезку. Движение в положительном направлении прекращаем.
$n = -1 \Rightarrow x=-225° \notin$ отрезку. Движение в отрицательном направлении прекращаем.
Итак, мы нашли ещё два корня $-45° ; 135° \in [\,-200° ; 270°\,]$.
Перечень всех требуемых корней: $0° ; 180° ; -180° ; -45° ; 135°$. Всего 5 корней.
Среднее арифметическое $\dfrac{0° + 180° + (-180°) + (-45°) + 135°}{5} = 18°$. *Ответ:* $18°$.

<u>*Пример 11.*</u> Найти сумму корней уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos^2 x = 0{,}25$, принадлежащих отрезку $\left[\,-\dfrac{\pi}{6} ; 2\pi\,\right]$.

Решение. Применив формулу приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ и основное тригонометрическое тождество $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим уравнение $\sin x + 1 - \sin^2 x = 0{,}25$. Произведём замену переменной: $a = \sin x$. Дополнительное условие (*ДУ*) : $|\,a\,| \le 1$.
После замены переменной уравнение примет вид $a + 1 - a^2 = 0{,}25$. Это уравнение имеет два решения: $a_1 = -\dfrac{1}{2}$ (удовлетворяет *ДУ*) и $a_2 = \dfrac{3}{2}$ (не удовлетворяет *ДУ*) . Обратная замена: $\sin x = -\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = (-1)^n\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \pi n$, $n = 0 ; \pm 1 ; \pm 2 ; \ldots$

Корни данного уравнения, принадлежащие данному отрезку: $-\dfrac{\pi}{6} ; \dfrac{7\pi}{6} ; \dfrac{11\pi}{6}$.
Сумма этих корней равна $\dfrac{17\pi}{6}$. *Ответ:* $\dfrac{17\pi}{6}$.

*Пример 12.* Найти сумму корней уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x$, принадлежащих отрезку $[\,-270°\,;\,90°\,]$.

Решение. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$; $2\cos^2 x = \sqrt{2} \cdot \sin x$; $2 \cdot \left(1 - \sin^2 x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$. Замена: $a = \sin x$. *ДУ*: $|\,a\,| \le 1$. Получим уравнение $2 \cdot \left(1 - a^2\right) = \sqrt{2} \cdot a$. Корни этого уравнения: $a_1 = -\sqrt{2}$ (не удовлетворяет *ДУ*) и $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (удовлетворяет *ДУ*). Обратная замена: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Общее решение: $x = \left(-1\right)^n \frac{\pi}{4} + \pi n = \left(-1\right)^n \cdot 45° + 180° n$. Корни, принадлежащие отрезку: $45°$; $-225°$. Их сумма равна $-180°$. *Ответ:* $-180°$.

Однородные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним

1. Уравнение вида $a\sin^2 t + b\sin t\cos t + c\cos^2 t = 0$ называется однородным уравнением второй степени (здесь a , b , c = Const , t – неизвестное). Если $a \ne 0$ и $c \ne 0$ (т.е. “ничего не выносится за скобку”) , то уравнение можно разделить на $\cos^2 t$. Получим уравнение $a\operatorname{tg}^2 t + b\operatorname{tg} t + c = 0$, которое после замены переменной сводится к квадратному уравнению.

2. Уравнение вида $a\sin^2 t + b\sin t\cos t + c\cos^2 t = d$ сводится к однородному уравнению, если константу d представить в виде $d = d\sin^2 t + d\cos^2 t$, затем все слагаемые перенести в левую часть уравнения и привести подобные.

3. Уравнение вида $a\sin t + b\cos t = c$ можно решать двумя способами.

   <u>Первый способ</u> – переход к половинному аргументу. Запишем формулы: $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$; $\cos t = \cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}$; $c = c\sin^2\frac{t}{2} + c\cos^2\frac{t}{2}$ и всё это подставим в уравнение. Затем все слагаемые перенесём в левую часть уравнения и приведём подобные. В результате получится однородное уравнение.

   <u>Второй способ</u> – введение вспомогательного угла. Разделив все коэффициенты уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$, получим $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Известно, что существует такой угол φ , что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Тогда уравнение примет вид $\cos\varphi\sin t + \sin\varphi\cos t = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\sin\left(t + \varphi\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 13. Найти количество корней уравнения $3\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$, принадлежащих отрезку $[\,0\,;2\pi\,]$.

Решение. $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$; $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Разделив последнее уравнение на $\cos^2 x$, получим $\mathrm{tg}^2\, x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0$. Замена переменной: $a = \mathrm{tg}\, x$. Имеем: $a^2 + 2a - 3 = 0$, откуда $a_1 = 1$; $a_2 = -3$.

1) $\mathrm{tg}\, x = 1 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$. Корни, принадлежащие отрезку: $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$.

2) $\mathrm{tg}\, x = -3 \;\Rightarrow\; x = \mathrm{arctg}(-3) + \pi n$. Корни, принадлежащие отрезку: $\mathrm{arctg}(-3) + \pi$; $\mathrm{arctg}(-3) + 2\pi$.

Количество требуемых корней равно 4 . *Ответ:* 4 .

Пример 14. Решить уравнение $\sin 5x + \sqrt{3}\cdot\cos 5x = 1$ двумя способами – с помощью перехода к половинному аргументу и с помощью введения вспомогательного угла.

Решение.

Первый способ – переход к половинному аргументу. Запишем формулы: $\sin 5x = 2\sin\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{5x}{2}$; $\cos 5x = \cos^2\dfrac{5x}{2} - \sin^2\dfrac{5x}{2}$; $1 = \sin^2\dfrac{5x}{2} + \cos^2\dfrac{5x}{2}$ и всё это подставим в уравнение. Затем все слагаемые перенесём в левую часть уравнения и приведём подобные. В результате получится уравнение $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2\dfrac{5x}{2} - 2\sin\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{5x}{2} + \left(1-\sqrt{3}\right)\cos^2\dfrac{5x}{2} = 0$. После деления на $\cos^2\dfrac{5x}{2}$ получим уравнение $\left(\sqrt{3}+1\right)\mathrm{tg}^2\dfrac{5x}{2} - 2\,\mathrm{tg}\dfrac{5x}{2} + \left(1-\sqrt{3}\right) = 0$. Отсюда следует:

1) $\mathrm{tg}\dfrac{5x}{2} = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{5x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2}{5}\pi n$.

2) $\mathrm{tg}\dfrac{5x}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{5x}{2} = \mathrm{arctg}\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} + \pi n = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n$; $x = -\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5}\pi n$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2}{5}\pi n$; $-\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5}\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Второй способ – введение вспомогательного угла. Разделив все коэффициенты уравнения на $\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, получим $\dfrac{1}{2}\sin 5x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x = \dfrac{1}{2}$. Коэффициенты при синусе и косинусе – это «табличные» числа, именно $\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, уравнение можно переписать в виде $\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 5x + \sin\dfrac{\pi}{3}\sin 5x = \dfrac{1}{2}$ или $\sin\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$. Отсюда $5x + \dfrac{\pi}{3} = (-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$; $x = -\dfrac{\pi}{15} + (-1)^n\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{\pi n}{5}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{15} + (-1)^n\dfrac{\pi}{30} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Форма записи общего решения тригонометрического уравнения может зависеть от способа решения уравнения. Однако все эти формы записи определяют *одно и то же множество решений.* Желающие убедиться в этом могут найти все решения примера 14 на отрезке $[\,0\,;\,2\pi\,]$, исходя из ответов, полученных как по первому, так и по второму способу.

Пример 15. Найти сумму корней уравнения $\sin 3x \sin 5x = \sin x \sin 7x$, принадлежащих отрезку $[\,0^\circ\,;\,90^\circ\,]$.

Решение. Разложим произведения в суммы, используя формулы пункта 13. Имеем: $\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x = \frac{1}{2}\cos 6x - \frac{1}{2}\cos 8x$; $\cos 2x - \cos 6x = 0$. Разность косинусов разложим в произведение по формуле из пункта 14. Получим $2\sin 4x \sin 2x = 0$. Корни этого уравнения, принадлежащие данному отрезку: 0° ; 45° ; 90° . Их сумма равна 135° . *Ответ:* 135° .

Пример 16. Найти все корни уравнения $\frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x} + \sqrt{2} = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\,\frac{\pi}{2}\,;\,2\pi\,\right]$.

Решение. ОДЗ: $\sin 2x \neq 0$. Разложив числитель в произведение, получим $\frac{2\sin 2x \sin(-x)}{\sin 2x} + \sqrt{2} = 0$; $-2\sin x + \sqrt{2} = 0$. Корень этого уравнения,

принадлежащий данному отрезку: $\frac{3\pi}{4}$. Этот корень удовлетворяет условию, определяющему *ОДЗ*, поэтому его следует включить в ответ. *Ответ:* $\frac{3\pi}{4}$.

Пример 17. Найти все корни уравнения $\frac{\sin 4x}{\cos 5x} + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[\,45^\circ\,;\,180^\circ\,]$.

Решение. ОДЗ: $\cos 5x \neq 0$.
Умножив данное уравнение на $\cos 5x$, получим $\sin 4x + \cos 5x = 0$. Теперь мы «сделаем из косинуса синус» с помощью формулы приведения $\cos 5x = \sin(90^\circ - 5x)$. Имеем: $\sin 4x + \sin(90^\circ - 5x) = 0$. Полученную сумму разложим в произведение: $2\sin\frac{-x + 90^\circ}{2}\cos\frac{9x - 90^\circ}{2} = 0$. Корни этого уравнения, принадлежащие данному отрезку: 90° ; 70° ; 110° ; 150° . Однако не все они принадлежат *ОДЗ* , а именно $90^\circ \notin$ *ОДЗ* . *Ответ:* 70° ; 110° ; 150° .

Пример 18. Найти все корни уравнения $\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1$ на отрезке $\left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\,\right]$.

Решение. *ОДЗ* определяется условиями: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ 1+\operatorname{tg} x \neq 0\end{cases}$. Почему надо писать второе условие – понятно: знаменатель имеющейся дроби не должен равняться нулю. Первое условие вытекает из того, что в уравнении имеется функция $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, которая определена, если $\cos x \neq 0$.

Замечание. По аналогичным соображениям, если в уравнении (или в неравенстве) имеется функция $\operatorname{ctg} x$, то в *ОДЗ* следует включать условие $\sin x \neq 0$.

Вернёмся к решению данного уравнения. Имеем: $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}} = 1$;

$\dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x}} = 1$; $(\cos x - \sin x)\cos x = 1$;

$\cos^2 x - \sin x \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x$; $-\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$;

$-\sin x \cdot (\cos x + \sin x) = 0$. Отсюда следует:

1) $\sin x = 0$; $x = \pi n$ ($n = 0\,;\pm 1\,;\pm 2\,;\ldots$).

При $n = 0$: $x = 0$ принадлежит данному отрезку и принадлежит *ОДЗ* .

При $n = 1$: $x = \pi$ принадлежит данному отрезку и принадлежит *ОДЗ* .

При всех остальных n : $x = \pi n$ не принадлежит данному отрезку.

2) $\cos x + \sin x = 0$. После деления на $\cos x$ получим $1 + \operatorname{tg} x = 0$. Но это невозможно в силу одного из условий, определяющих *ОДЗ* .

Ответ: $0\,;\pi$.

<u>*Пример 19.*</u> Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{\cos x} + 1 = 0$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$.

Решение. *ОДЗ* : $\cos x \neq 0$. Разложив числитель в произведение, получим $\dfrac{2\cos 2x \cos x}{\cos x} + 1 = 0$; $2\cos 2x + 1 = 0$; $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$; $2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$ ($n = 0\,;\pm 1\,;\pm 2\,;\ldots$) . После отбора корней легко выяснить, что только один корень, именно $x = -\dfrac{\pi}{3}$, принадлежит данному отрезку.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}$.

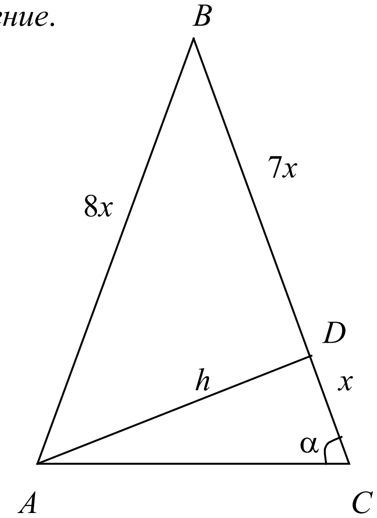
Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $4\sin 36^\circ \cos 6^\circ + 4\sin^2 24^\circ - 4$.
2. Вычислить $\arccos(\sin(600^\circ))$.
3. Вычислить $\mathrm{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.
4. Вычислить в градусах угол $\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.
5. Вычислить $A = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.
6. Дано: $\dfrac{2\cos\alpha - \sin\alpha}{3\sin\alpha + 4\cos\alpha} = \dfrac{11}{27}$. Найти $\mathrm{ctg}\,\alpha$.
7. Дано: $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. Найти $\dfrac{3\sin\alpha + 6\cos\alpha}{3\sin\alpha + \cos\alpha}$.
8. Упростить выражение $\left(\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{\cos 3\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.
9. Упростить выражение $\dfrac{\sin 2\alpha\cdot(\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha)}{(1+\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cos 2\alpha}$.
10. Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sin 2x - 2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos^2 x = 0$, принадлежащих промежутку $\left(-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{3\pi}{4}\right]$.
11. Найти сумму корней уравнения $2\sin^2 x + 3\sin(90^\circ + x) - 3 = 0$, принадлежащих интервалу $(-60^\circ\,;\,420^\circ)$.
12. Найти среднее арифметическое корней уравнения $3\,\mathrm{ctg}\,x = 2\sin x$, принадлежащих промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{4}\,;4\pi\right]$.
13. Найти количество корней уравнения $6\sin^2 x + 3\sin x\cos x = 2 + 5\cos^2 x$, принадлежащих отрезку $[-\pi\,;\,\pi]$.
14. Решить уравнение $\cos 4x - \sin 4x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ двумя способами – с помощью перехода к половинному аргументу и с помощью введения вспомогательного угла.
15. Найти сумму корней уравнения $\cos 3x\cos 2x - \sin x\sin 6x = \cos 7x$, принадлежащих отрезку $[-150^\circ\,;\,-30^\circ]$.
16. Найти все корни уравнения $\dfrac{\sin x - \cos x}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0$, принадлежащие отрезку $[\,0\,;\,2\pi\,]$.
17. Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 1$, принадлежащие отрезку $[\,0^\circ\,;\,180^\circ\,]$.
18. Найти все корни уравнения $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x} + 1 = 0$ на отрезке $[\,0\,;\,2\pi\,]$.
19. Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin x} = 2$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Пример 1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении $7 : 1$, считая от вершины треугольника. Найти косинус угла при основании треугольника.

Решение.



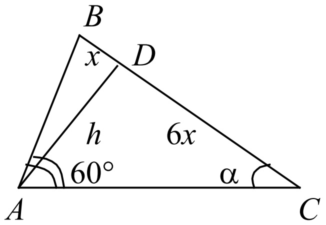
AB и BC – боковые стороны ΔABC;
AC – основание ΔABC;
$AD = h$ – высота ΔABC;
$BD = 7x$; $DC = x$; $AB = BC = 8x$.

По теореме Пифагора, применённой к ΔABD,
$h = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{64x^2 - 49x^2} = x \cdot \sqrt{15}$.

По теореме Пифагора, применённой к ΔADC,
$AC = \sqrt{h^2 + x^2} = \sqrt{15x^2 + x^2} = 4x$.
$\cos\alpha = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{4}$.

Пример 2. Один из углов треугольника равен $60°$, а высота, опущенная из вершины этого угла, делит сторону на части в отношении $1 : 6$. Найти тангенс меньшего угла треугольника.

Решение.



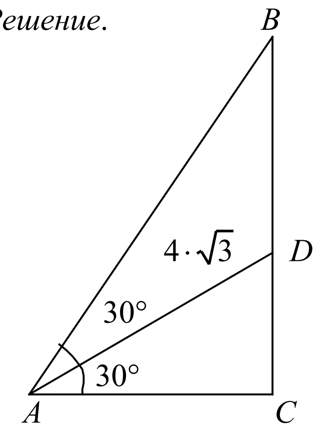
$BD = x$; $DC = 6x$.
$AD = h$ – высота.
$\angle BAC = 60°$.
$\angle ABD = 180° - \alpha - 60° = 120° - \alpha$.
α – меньший угол в ΔABC.

Из ΔADC $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{6x}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{h}{x} = 6\operatorname{tg}\alpha$. Из ΔADB $\dfrac{h}{x} = \operatorname{tg}\angle ABD = \operatorname{tg}(120° - \alpha)$.

Следовательно, $6\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(120° - \alpha)$; $6\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}120° - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}120° \operatorname{tg}\alpha}$. Это уравнение имеет два решения: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Так как, по смыслу задачи, α – острый угол, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$. *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Острый угол прямоугольного треугольника равен $60°$, а биссектриса этого угла равна $4 \cdot \sqrt{3}$. Найти площадь круга, описанного около треугольника.

Решение.



Из ΔADC: $AC = AD\cos 30° = 4\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

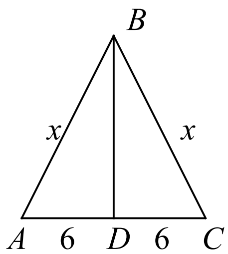
Из ΔABC: $AB = \dfrac{AC}{\cos 60°} = \dfrac{6}{1/2} = 12$.

Так как центр круга, описанного около прямоугольного треугольника, находится на середине гипотенузы, то радиус круга равен $R = \dfrac{1}{2}AB = 6$. Площадь круга $S = \pi R^2 = 36\pi$.

Ответ: 36π .

<u>*Пример 4.*</u> В равнобедренном треугольнике длина основания равна 12 *см* , а его периметр равен 32 *см*. Найти радиус вписанной окружности.

Решение.



Проведём BD – ось симметрии в ΔABC .

Периметр ΔABC равен $x + x + 12 = 32$, отсюда $x = 10$.

По теореме Пифагора $BD = \sqrt{x^2 - 6^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

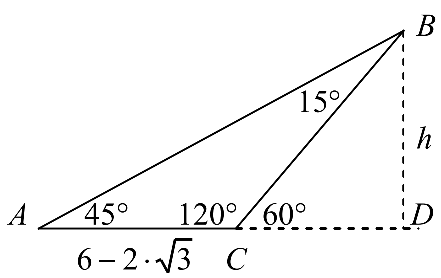
Площадь $S_{\Delta ABC}$ равна $\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD = \dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 8 = 48$.

Известно, что $S_\Delta = p_\Delta \cdot r$, где S_Δ – площадь ΔABC , p_Δ – полупериметр ΔABC , r – радиус вписанного круга.

Следовательно, $r = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p_{\Delta ABC}} = \dfrac{48}{\frac{1}{2}\cdot 32} = 3$. *Ответ:* 3 .

<u>*Пример 5.*</u> Углы треугольника относятся как 1 : 3 : 8 , а его меньшая сторона равна $6 - 2\cdot\sqrt{3}$. Найти высоту треугольника, опущенную на эту сторону.

Решение. Обозначим углы треугольника через α , 3α , 8α . Сумма всех углов треугольника равна $\alpha + 3\alpha + 8\alpha = 180°$. Отсюда $\alpha = 15°$. Следовательно, углы треугольника соответственно равны $15°$, $45°$, $120°$.



По теореме синусов $\dfrac{AC}{\sin 15°} = \dfrac{BC}{\sin 45°}$. Следовательно, $BC = AC\cdot\dfrac{\sin 45°}{\sin 15°}$.

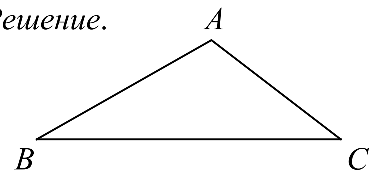
Кстати, $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45°\cos 30° - \sin 30°\cos 45° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Из ΔBCD: $h = BC\sin 60° = AC\cdot\dfrac{\sin 45°}{\sin 15°}\cdot\sin 60° = \left(6 - 2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\dfrac{\sin 45°}{\sin 15°}\cdot\sin 60° = 6$.

Ответ: 6 .

<u>*Пример 6.*</u> В треугольнике ABC : $\angle A$ – тупой , AC=5 , AB=6 , sin$A$=0,6 . Найти длину стороны BC .

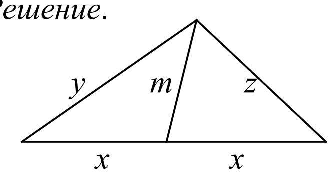
Решение.



Из основного тригонометрического тождества $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ следует, что $\cos A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\sqrt{1-(0{,}6)^2} = \pm 0{,}8$
Так как $\angle A$ – тупой , то $\cos A < 0$.
Следовательно, $\cos A = -0{,}8$. По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A = 6^2 + 5^2 - 2\cdot 6\cdot 5\cdot(-0{,}8) = 109$. Следовательно, $BC = \sqrt{109}$. *Ответ:* $\sqrt{109}$.

<u>*Пример 7.*</u> Треугольник, периметр которого равен 15 *см* , делится медианой на два треугольника с периметрами 11 *см* и 14 *см* . Найти длину медианы.

Решение.



Обозначим длины элементов треугольника, как указано на рисунке. Исходя из условий задачи, составим систему уравнений. Требуется найти лишь одно неизвестное, m – длину медианы.

$$\begin{cases} y + z + 2x = 15 \\ y + m + x = 11 \\ z + m + x = 14 \end{cases}$$
. Сложив 2-ое и 3-ье уравнения, получим $(y + z + 2x) + 2m = 25$.

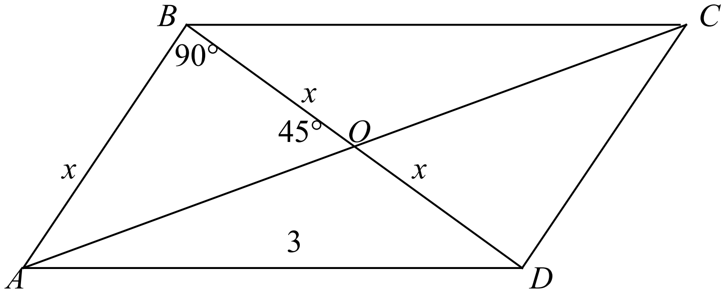
С учётом 1-го уравнения отсюда следует: $15 + 2m = 25$, $m = 5$. *Ответ:* 5 .

<u>*Пример 8.*</u> Диагонали параллелограмма равны 5 *см* и $4\cdot\sqrt{2}$ *см* , а угол между ними равен $45°$. Найти площадь параллелограмма.

Решение. Площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними. Следовательно, $S = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 45° = 10$. *Ответ:* 10 .

<u>*Пример 9.*</u> Диагональ параллелограмма перпендикулярна одной из его сторон, а угол между диагоналями равен $45°$. Найти площадь параллелограмма, если его большая сторона равна 3 *см* .

Решение.

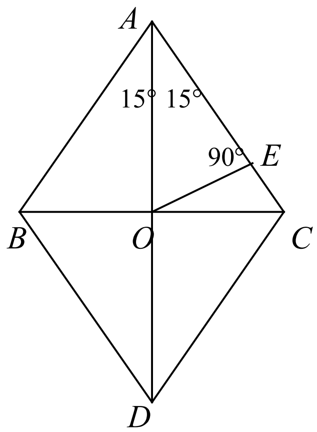


Сторона AD является гипотенузой в прямоугольном ΔABD, поэтому $AD > AB$. Следовательно, большей стороной параллелограмма является именно AD. Обозначим $BO = OD = x$. Из прямоугольного ΔABO : $\frac{AB}{BO} = \operatorname{tg} 45° = 1$. Следовательно, $AB = BO = x$. По теореме Пифагора, применённой к ΔABD, $AD^2 = AB^2 + SD^2$; $3^2 = x^2 + (2x)^2$. Отсюда $x^2 = \frac{9}{5}$. Известно, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. Поэтому $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x = x^2 = \frac{9}{5}$. Площадь параллелограмма $ABCD$ в два раза больше площади треугольника ABD. Следовательно, $S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{9}{5} = 3{,}6$.

Ответ: 3,6.

Пример 10. Острый угол ромба равен $30°$, а радиус вписанного в ромб круга равен $2 \cdot \sqrt{5}$. Найти площадь ромба.

Решение.



Из точки O пересечения диагоналей ромба (которые взаимно перпендикулярны) проведём $OE \perp AC$.

Радиус вписанного круга – это как раз OE.

Из ΔAEO : $\frac{OE}{AO} = \sin 15° \Rightarrow AO = \frac{OE}{\sin 15°}$.

Из ΔAOC : $\frac{OC}{AO} = \operatorname{tg} 15° \Rightarrow OC = AO \operatorname{tg} 15°$.

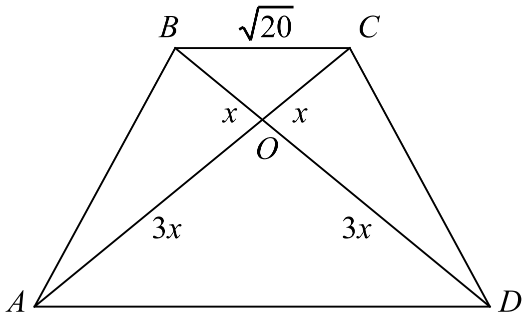
$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OC = \frac{1}{2}(AO)^2 \operatorname{tg} 15° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(OE)^2}{\sin^2 15°} \cdot \frac{\sin 15°}{\cos 15°} = \frac{(2 \cdot \sqrt{5})^2}{2 \sin 15° \cos 15°} = \frac{20}{\sin 30°} = 40.$$

$S_{ромба} = 4 \cdot S_{\Delta AOC} = 160$. *Ответ:* 160.

Пример 11. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении 1 : 3. Найти боковую сторону трапеции, если её меньшее основание равно $\sqrt{20}$.

Решение.



ΔBOC – прямоугольный. По теореме Пифагора $BC^2 = BO^2 + OC^2$, т.е. $20 = x^2 + x^2 = 2x^2$. Отсюда $x^2 = 10$.

ΔAOB – прямоугольный.

По теореме Пифагора

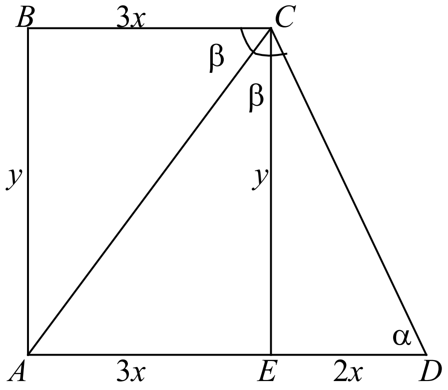
$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 9x^2 + x^2 = 10x^2 = 100$.

Следовательно, $AB = 10$.

Ответ: 10.

Пример 12. Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как 3 : 5 , а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Найти тангенс острого угла трапеции.

Решение.



Проведём высоту CE и обозначим $AB = CE = y$. Из условия задачи следует, что $BC = 3x$, $AD = 5x$.
Из рисунка ясно, что $AE = BC = 3x$, $ED = AD - AE = 5x - 3x = 2x$.
Обозначим $\angle ACB = \angle ACD = \beta$, $\angle CDE = \alpha$.
Так как $AD \parallel BC$ и CD – секущая, то $\alpha + 2\beta = 180°$. Следовательно, $\beta = 90° - \frac{\alpha}{2}$.
Требуется найти $\operatorname{tg}\alpha$.

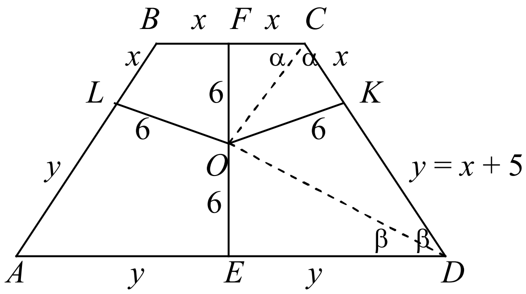
Из ΔABC : $\frac{y}{3x} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Из ΔCED : $\frac{y}{2x} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Следовательно, $\frac{3}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. Отсюда $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$. После подстановки в формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ и упрощения получим $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$. *Ответ:* $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Пример 13. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 6 *см*. Точка касания делит боковую сторону на отрезки, разность между которыми равна 5 *см*. Найти длину средней линии трапеции.

Решение.



Проведём ось симметрии EF . Пусть O – середина отрезка EF , $OL \perp AB$, $OK \perp CD$. Ясно, что OL , OK , OE и OF – радиусы вписанной окружности.
$\Delta OFC = \Delta OKC$ (у них общая гипотенуза OC и два одинаковых катета OF и OK) . Следовательно, $FC = CK = x$ и $\angle FCO = \angle KCO = \alpha$. Аналогично, из равенства треугольников $\Delta OED = \Delta OKD$ следует, что $KD = ED = y$ и $\angle EDO = \angle KDO = \beta$. По свойству внутренних односторонних углов при параллельных прямых AD и BC и секущей CD имеем: $2\alpha + 2\beta = 180°$, следовательно, $\alpha + \beta = 90°$. ΔCOD – прямоугольный, так как $\angle COD = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$.
По теореме Пифагора для ΔOFC : $OC^2 = OF^2 + FC^2 = 36 + x^2$.
По теореме Пифагора для ΔOED : $OD^2 = OE^2 + ED^2 = 36 + y^2 = 36 + (x+5)^2$.

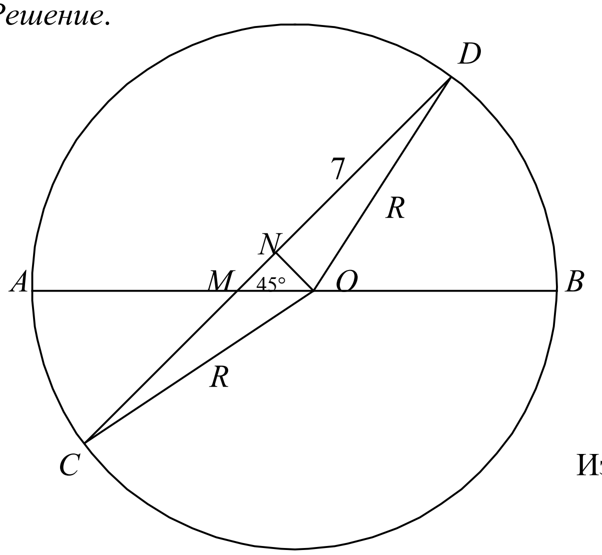
По теореме Пифагора для ΔCOD: $CD^2 = OC^2 + OD^2$.

Следовательно, $(2x+5)^2 = 36 + x^2 + 36 + (x+5)^2$. Отсюда $x = 4$, $y = x + 5 = 9$.

Длина средней линии трапеции равна $\dfrac{AD+BC}{2} = \dfrac{2y+2x}{2} = 13$. *Ответ:* 13.

<u>*Пример 14.*</u> Через точку, которая делит диаметр круга в отношении $2:3$, проведена хорда длиной 14 *см* под углом 45° к диаметру. Найти расстояние от центра круга до хорды.

Решение.



AB – диаметр окружности.
M – точка, через которую проходит хорда.
O – центр окружности.
$OA=OB=OC=OD=R$ – её радиусы.
$ON \perp CD$; $CD = 14$.
Обозначим $AM = 2x$, $MB = 3x$.
$AM = MB = 5x = 2R$.
Следовательно, $R = 2{,}5x$.

$OM = OA - AM = 2{,}5x - 2x = \dfrac{x}{2}$.

Из ΔMNO: $ON = OM \sin 45° = \dfrac{x\cdot\sqrt{2}}{4}$.

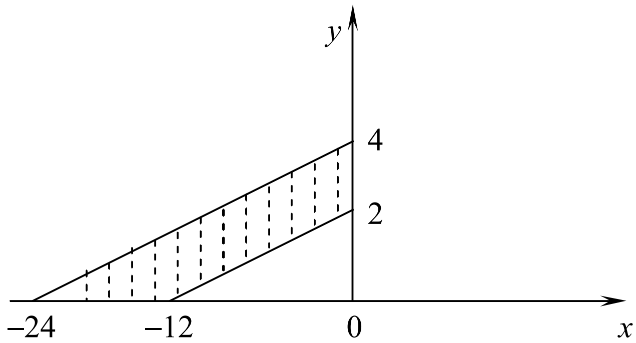
Так как ON – ось симметрии равнобедренного ΔCOD, то $DN = \dfrac{1}{2}CD = 7$.

По теореме Пифагора для ΔDNO: $R^2 = ON^2 + 7^2$; $(2{,}5x)^2 = \dfrac{2x^2}{16} + 49$. Отсюда $x = \sqrt{8}$. Требуемое расстояние $ON = \dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{4} = 1$. *Ответ:* 1.

<u>*Пример 15.*</u> Найти площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $3y - \dfrac{x}{2} = 6$, $3y - \dfrac{x}{2} = 12$ и осями координат.

Решение. В уравнение $3y - \dfrac{x}{2} = 6$ подставим $x = 0$. Тогда $y = 2$.

В уравнение $3y - \dfrac{x}{2} = 6$ подставим $y = 0$. Тогда $x = -12$. Следовательно, прямая $3y - \dfrac{x}{2} = 6$ проходит через точки $(0;2)$ и $(-12;0)$. Аналогично, прямая $3y - \dfrac{x}{2} = 12$ проходит через точки $(0;4)$ и $(-24;0)$.



Площадь заштрихованного четырёхугольника S равна разности площадей соответствующих прямоугольных треугольников: $S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 36$.

Ответ: 36 .

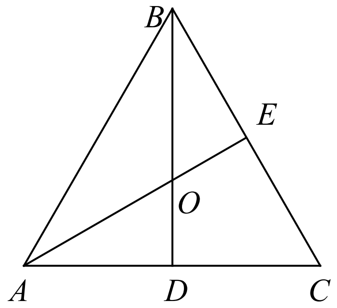
Задачи для самостоятельного решения

1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении $3 : 22$, считая от вершины треугольника. Найти синус угла при вершине треугольника.
2. Высота треугольника, проведённая из вершины его прямого угла, делит гипотенузу на части в отношении $3 : 4$. Найти косинус меньшего острого угла треугольника.
3. Острый угол прямоугольного треугольника равен $60°$, а биссектриса этого угла равна $6 \cdot \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника.
4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15 *см* , а его периметр равен 54 *см*. Найти радиус вписанной окружности.
5. Углы треугольника относятся как $1 : 4 : 7$, а его меньшая сторона равна $\sqrt{3} - 1$. Найти площадь треугольника.
6. В треугольнике ABC : $\angle B$ – тупой , BC=2 , AB=13 , $\sin B = \frac{5}{13}$. Найти длину стороны AC .
7. Треугольник, периметр которого равен 18 *см* , делится медианой на два треугольника с периметрами 16 *см* и 14 *см* . Найти длину медианы.
8. Диагонали параллелограмма равны $6 \cdot \sqrt{6}$ *см* и $5 \cdot \sqrt{2}$ *см* , а угол между ними равен $60°$. Найти площадь параллелограмма.
9. Диагонали параллелограмма равны 4 *см* и 6 *см* , и одна из них перпендикулярна стороне параллелограмма. Найти площадь параллелограмма.
10. Острый угол ромба равен $60°$, а радиус вписанного в ромб круга равен $2 \cdot \sqrt{3}$ Найти периметр ромба.
11. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении $3 : 4$. Найти большее основание трапеции, если её боковая сторона равна 10 .
12. Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $3 : 4$, а диагональ является биссектрисой её острого угла. Найти синус острого угла трапеции.
13. В равнобедренную трапецию вписан круг радиуса $3 \cdot \sqrt{5}$ *см*. Найти периметр трапеции, если её меньшее основание равно 6 *см*.
14. Через точку, которая делит диаметр круга в отношении $1 : 3$, проведена хорда длиной $\sqrt{15}$ *см* под углом 30° к диаметру. Найти радиус круга.
15. Найти площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $2x - 3y = 6$, $2x - 3y = 18$ и осями координат.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

При решении задач на правильную пирамиду используются следующие факты.

Правильный треугольник.



Сторона основания $AB = BC = AC = x$.

AE и BD – оси симметрии.

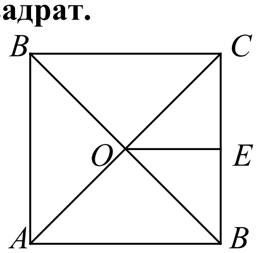
$AD = DC = BE = EC = \dfrac{x}{2}$.

Радиус вписанной окружности $OD = OE = \dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{6}$.

Радиус описанной окружности $OA = OB = \dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$.

Площадь правильного треугольника $S = \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

Квадрат.



Сторона квадрата $= x$.

Диагональ квадрата $AC = x \cdot \sqrt{2}$.

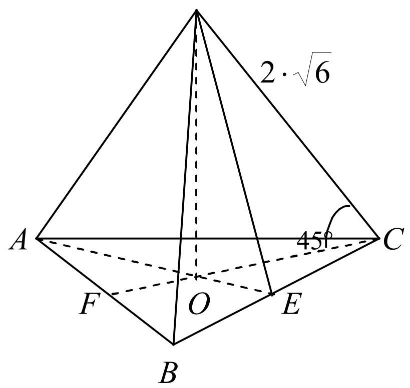
Радиус описанного круга $OC = \dfrac{x \cdot \sqrt{2}}{2}$.

Радиус вписанного круга $OE = \dfrac{x}{2}$.

Площадь квадрата $S = x^2$.

<u>*Пример 1.*</u> Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2 \cdot \sqrt{6}$ *см* и образует угол 45° с плоскостью основания пирамиды. Найти объём и площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.



AE и CF – оси симметрии в ΔABC.

DE – апофема пирамиды.

$CD = 2 \cdot \sqrt{6}$; $\angle DCO = 45°$.

Пусть сторона основания $BC = x$.

Тогда $EC = \dfrac{x}{2}$; $OC = \dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$; $OE = \dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{6}$.

Из ΔDOC: $OC = CD \cdot \cos 45°$.

Следовательно, $\dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{3} = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда

$x = 6$; $EC = 3$; $OC = 2 \cdot \sqrt{3}$; $OE = \sqrt{3}$.

Из ΔDOC: $DO = CD \cdot \sin 45° = 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Объём пирамиды $V = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot DO = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 18$.

По теореме Пифагора для ΔDEC: $DE = \sqrt{CD^2 - EC^2} = \sqrt{24 - 9} = \sqrt{15}$.

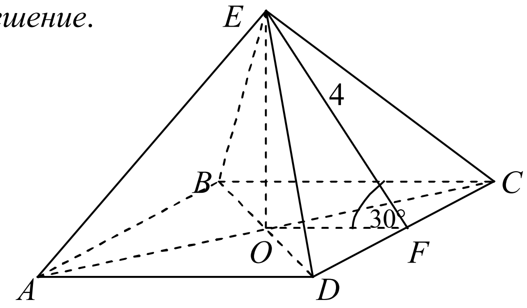
Площадь боковой поверхности

$$S_{бок} = 3 \cdot S_{\Delta DBC} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DE = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{15} = 9 \cdot \sqrt{15} \; .$$

Ответ: $V = 18$; $S_{бок} = 9 \cdot \sqrt{15}$.

<u>*Пример 2.*</u> Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 4 *см*, а боковая грань составляет с плоскостью основания угол 30°. Найти объём и площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.



Апофема $EF = 4$.
$\angle EFO = 30°$.
Пусть x – сторона основания.
Тогда $OF = \frac{x}{2}$.
Из ΔEOF: $OF = EF \cdot \cos 30°$.

Следовательно, $\frac{x}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $x = 4 \cdot \sqrt{3}$. Из ΔEOF : $EO = EF \cdot \sin 30° = 4 \cdot 0{,}5 = 2$.

Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot EO = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 32$.

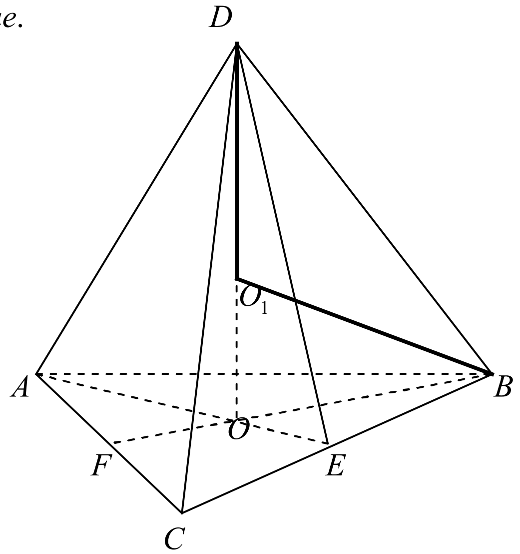
Площадь полной поверхности

$$S_{полн} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{\Delta CED} = \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EF = 48 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 = 48 + 32 \cdot \sqrt{3} \, .$$

Ответ: $V = 32$; $S_{полн} = 48 + 32 \cdot \sqrt{3}$.

<u>*Пример 3.*</u> В правильной треугольной пирамиде длина высоты в два раза больше длины ребра основания. Найти отношение объёма вписанного шара к объёму описанного шара.

Решение.



Пусть x – сторона основания.
AE и BF – оси симметрии.
$BO = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{3}$; $OE = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{6}$.
Высота $DO = 2x$.
Обозначим через R радиус описанного шара.
Пусть O_1 – его центр.
Тогда $O_1D = O_1B = R$.
$O_1O = DO - O_1D = 2x - R$.

По теореме Пифагора для ΔO_1OB : $(O_1O)^2 + (OB)^2 = (O_1B)^2$, т.е. $(2x - R)^2 + \left(\frac{x \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2 = R^2$. Из этого уравнения находим, что $R = \frac{13}{12} \cdot x$.

Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2x = \frac{x^3 \cdot \sqrt{3}}{6}$.

По теореме Пифагора для ΔDOE : $DE = \sqrt{DO^2 + OE^2} = \sqrt{4x^2 + \frac{x^2}{12}} = \frac{7x}{2 \cdot \sqrt{3}}$.

Площадь полной поверхности пирамиды

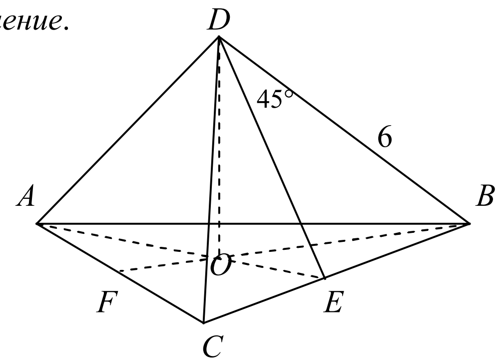
$$S_{полн} = S_{\Delta ABC} + 3 \cdot S_{\Delta DCB} = S_{\Delta ABC} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DE = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{7x}{2 \cdot \sqrt{3}} = 2x^2 \cdot \sqrt{3} .$$

Радиус вписанного шара r находим по формуле $r = \frac{3 \cdot V}{S_{полн}} = \frac{3 \cdot \frac{x^3 \cdot \sqrt{3}}{6}}{2x^2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{x}{4}$.

Искомое отношение $\frac{V_{впис\,шара}}{V_{опис\,шара}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \left(\frac{\frac{x}{4}}{\frac{13}{12} \cdot x}\right)^3 = \frac{27}{2197}$. *Ответ:* $\frac{27}{2197}$.

<u>*Пример 4.*</u> В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны, а длина бокового ребра равна 6 *см*. Найти объём и площадь полной поверхности пирамиды.

Решение.



По условию, $\angle CDB = 90°$. Апофема DE – биссектриса этого угла. Следовательно, $\angle BDE = 45°$. Пусть x – сторона основания.

Тогда $BE = \frac{x}{2} = 6\sin 45° = 3 \cdot \sqrt{2}$.

Отсюда $x = 6 \cdot \sqrt{2}$.

$DE = 6\cos 45° = 3 \cdot \sqrt{2}$.

$OE = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{6} = \sqrt{6}$. Площадь полной поверхности

$$S_{полн} = S_{\Delta ABC} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DE = \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2} \cdot x \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 18 \cdot \sqrt{3} + 54 .$$

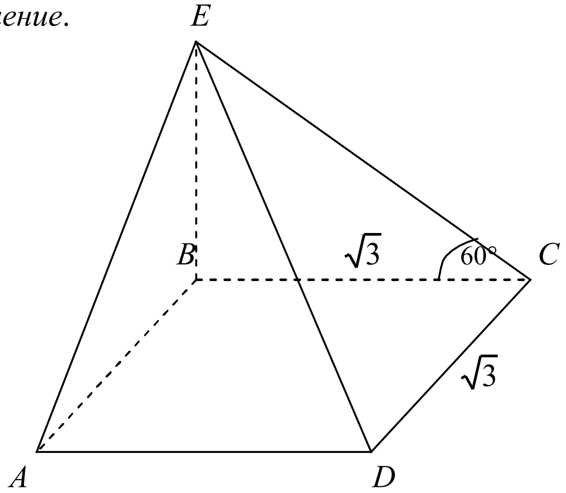
По теореме Пифагора для ΔDOE : $DO = \sqrt{DE^2 - OE^2} = \sqrt{18 - 6} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Объём пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 36$.

Ответ: $S_{полн} = 18 \cdot \sqrt{3} + 54$; $V = 36$.

<u>*Пример 5.*</u> Найти площадь боковой поверхности пирамиды, в основании которой лежит квадрат со стороной $\sqrt{3}$ *см*, если одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания, а соседнее с ним ребро наклонено к плоскости основания под углом 60°.

Решение.



$BE \perp$ плоскости $ABCD$.
Так как $CD \perp BE$ и $CD \perp BC$, то по теореме о трёх перпендикулярах $CD \perp EC$. Другими словами, $\angle ECD = 90°$. Поскольку $\Delta ABE = \Delta CBE$ и $\Delta EAD = \Delta ECD$, то площадь боковой поверхности можно считать так:

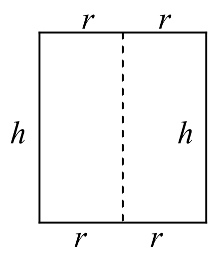
$$S_{бок} = 2 \cdot S_{\Delta BEC} + 2 \cdot S_{\Delta DEC} = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot BC \cdot BE + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot DC \cdot EC = \sqrt{3} \cdot BE + \sqrt{3} \cdot EC.$$

Из ΔCBE: $BE = BC \cdot \mathrm{tg}\, 60° = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$; $EC = \dfrac{BC}{\cos 60°} = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

Следовательно, $S_{бок} = \sqrt{3} \cdot 3 + \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3} + 6$. *Ответ:* $3 \cdot \sqrt{3} + 6$.

<u>*Пример 6.*</u> Периметр осевого сечения цилиндра равен 10 *см*, а площадь боковой поверхности равна 4π *см*^{2}. Найти высоту цилиндра, если его объём равен 4π *см*^{3}.

Решение.



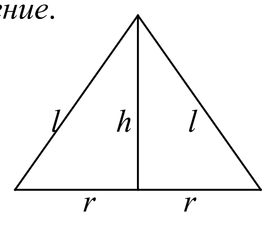
Осевым сечением цилиндра является прямоугольник.
Ось цилиндра изображена пунктиром.
r – радиус основания, h – высота цилиндра.
Периметр осевого сечения равен $4r + 2h = 10$.
Площадь боковой поверхности равна $2\pi rh = 4\pi$.
Полученная система уравнений имеет два решения:

$$\begin{cases} r_1 = 2 \\ h_1 = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r_2 = 0{,}5 \\ h_2 = 4 \end{cases}.$$

В первом случае объём цилиндра $V = \pi r^2 h = 4\pi$, что удовлетворяет условию.
Во втором случае объём цилиндра $V = \pi r^2 h = \pi$, что не удовлетворяет условию.
Ответ: 1.

<u>*Пример 7.*</u> Площадь полной поверхности конуса равна 4π *см*^{2}, а периметр осевого сечения равен 6 *см*. Найти высоту конуса.

Решение.



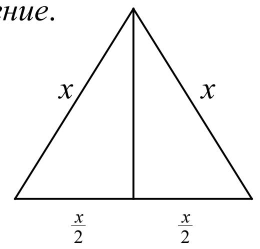
Осевым сечением конуса является равнобедренный треугольник.
r – радиус основания, h – высота, l – образующая.
Периметр осевого сечения равен $2l + 2r = 6$.
Площадь полной поверхности равна $\pi rl + \pi r^2 = 4\pi$.

Полученная система уравнений имеет единственное решение $\begin{cases} r = \frac{4}{3} \\ l = \frac{5}{3} \end{cases}$.

По теореме Пифагора $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 1$. *Ответ:* 1.

Пример 8. Осевое сечение конуса – правильный треугольник с площадью $9\cdot\sqrt{3}$ $см^2$. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Решение.



Обозначим сторону правильного треугольника через x. Тогда образующая конуса равна $l = x$, Радиус основания конуса равен $r = \frac{x}{2}$.

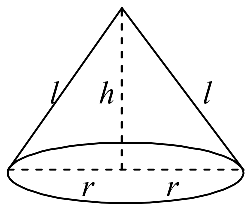
Площадь боковой поверхности равна $\pi rl = \dfrac{\pi x^2}{2}$

Площадь осевого сечения равна $\dfrac{x^2\cdot\sqrt{3}}{4} = 9\cdot\sqrt{3}$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, площадь боковой поверхности конуса равна 18π. *Ответ:* 18π.

Пример 9. Развёрткой конуса является четверть круга, а длина образующей конуса равна $4\cdot\sqrt{15}$. Найти объём конуса.

Решение. Пусть r – радиус основания, $l = 4\cdot\sqrt{15}$ – образующая, h – высота.



С одной стороны, длина окружности основания конуса равна $2\pi r$. С другой стороны, эта же длина равна длине дуги развёртки боковой поверхности, т.е. длине четверти окружности радиуса l, т.е. $\frac{1}{4}\cdot 2\pi l$.

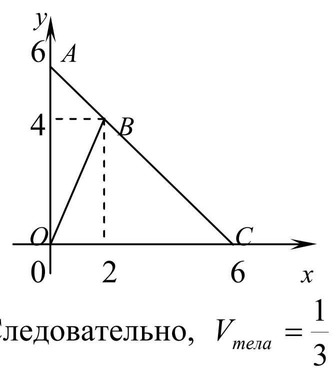
Следовательно, $2\pi r = \frac{1}{4}\cdot 2\pi l$. Отсюда $r = \frac{1}{4}l = \sqrt{15}$.

По теореме Пифагора $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{240 - 15} = 15$.

Объём конуса равен $\dfrac{1}{3}\cdot\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 15\cdot 15 = 75\pi$. *Ответ:* 75π.

Пример 10. Область, ограниченная линиями $y = 2x$, $y = 6 - x$ и $x = 0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём полученного тела вращения.

Решение. Построим графики всех данных функций. Требуется найти объём тела,



которое получается в результате вращения вокруг оси Ox треугольника OAB. Объём этого тела равен объёму конуса, образованного вращением отрезка AC (радиус основания $r = 6$, высота $h = 6$), минус объём конуса, образованного вращением отрезка BC (радиус основания $r = 4$, высота $h = 4$), минус объём конуса, образованного вращением отрезка OB (радиус основания $r = 4$, высота $h = 2$).

Следовательно, $V_{тела} = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 6^2\cdot 6 - \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 4 - \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 4^2\cdot 2 = 40\pi$. *Ответ:* 40π.

Пример 11. Сфера радиуса 5 *см* проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит прямоугольник со сторонами 3 *см* и 4 *см*. Найти объём параллелепипеда.

Решение. Обозначим через x, y, z и d соответственно длину, ширину, высоту и диагональ параллелепипеда. По условию, $x = 3$, $y = 4$. Так как сфера является *описанной* около прямоугольного параллелепипеда, то её диаметр равен длине диагонали параллелепипеда. Следовательно, $d = 2 \cdot 5 = 10$. По свойству диагонали параллелепипеда $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$, т.е. $10^2 = 3^2 + 4^2 + z^2$, отсюда $z = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$. Объём параллелепипеда равен $xyz = 60 \cdot \sqrt{3}$. *Ответ:* $60 \cdot \sqrt{3}$.

Пример 12. Диагональ куба равна 12 *см* . Найти площадь сферы, касающейся всех граней этого куба.

Решение. Обозначим через x и d соответственно ребро и диагональ куба. По условию, $d = 12$. По свойству диагонали куба $d^2 = x^2 + x^2 + x^2$, т.е. $12^2 = 3x^2$, отсюда $x = \sqrt{48}$. Так как данная сфера является *вписанной* в куб, то её радиус R равен половине ребра куба, т.е. $R = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{48} = \sqrt{12}$. Площадь сферы равна $4\pi R^2 = 48\pi$. *Ответ:* 48π .

Задачи для самостоятельного решения

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $6 \cdot \sqrt{2}$ *см*, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 45°. Найти объём и площадь боковой поверхности пирамиды.
2. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды равно 4 *см* и образует угол 30° с плоскостью основания пирамиды. Найти объём и площадь полной поверхности пирамиды.
3. В правильной четырёхугольной пирамиде длина высоты в три раза больше длины ребра основания. Найти отношение площади поверхности описанного шара к площади поверхности вписанного шара.
4. В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны, а высота пирамиды равна 2 *см*. Найти объём и площадь полной поверхности пирамиды.
5. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник. Одно из боковых рёбер перпендикулярно основанию, а два других наклонены к основанию под углом 60°. Найти объём пирамиды, если апофема боковой грани, имеющей большую площадь, равна $\sqrt{15}$ *см*.
6. Площадь осевого сечения цилиндра равна 3 *см*^{2} , а площадь его полной поверхности равна 11π *см*^{2}. Найти объём цилиндра.
7. Площадь осевого сечения конуса равна $4 \cdot \sqrt{3}$ *см*^{2} , а его объём равен 8π *см*^{3}. Найти образующую конуса.
8. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 18 *см*. Найти объём конуса.
9. Диагональ боковой развёртки цилиндра равна 2 *см* и пересекает основание под углом 30°. Найти объём цилиндра.
10. Область, ограниченная линиями $y = x$, $y = 4 - x$ и $y = 1$, вращается вокруг оси Ox . Найти объём полученного тела вращения.
11. Сфера проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1 *см* , 2 *см* и 2 *см* . Найти объём шара, ограниченного этой сферой.
12. Диагональ куба равна 6 *см* . Найти объём шара, касающегося всех граней этого куба.

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Свойства степеней.

Если $a > 0$, x – любое число , то $a^x > 0$.

$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$; $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$; $a^{xy} = \left(a^x\right)^y = \left(a^y\right)^x$; $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

$a^0 = 1$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$.

Свойства логарифмов.

$\log_a b$ – это показатель степени, в который нужно возвести число a , чтобы получить число b . Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$.

Выражение $\log_a b$ определено, если $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$.

При $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ справедливы формулы: $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$;

$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$; $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\dfrac{x}{y}\right)$;

$\log_a \left(x^n\right) = n \cdot \log_a x$; $\log_{a^k} (x) = \dfrac{1}{k} \cdot \log_a x$; $\log_{a^k} \left(x^n\right) = \dfrac{n}{k} \cdot \log_a x$;

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$; $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\left(\text{при } c > 0 \text{ , } c \neq 1\right)$; $\log_a b = \dfrac{\lg b}{\lg a} = \dfrac{\ln b}{\ln a}$.

Основные значения логарифмов: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a \left(a^n\right) = n$.

Замечание.

Если из условий задачи не вытекает, что $x > 0$, то **при чётных значениях** n используют формулы: $\log_a \left(x^n\right) = n \cdot \log_a |x|$; $\log_{x^n} (a) = \dfrac{1}{n} \cdot \log_{|x|} (a)$.

Простейшие степенные уравнения.

1) Если n – нечётное число , a – любое число , то $x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Например, $x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$; $x^3 = -15 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-15} = -\sqrt[3]{15}$.

2) Если n – чётное число , $a < 0$, то уравнение $x^n = a$ не имеет решений.

Если n – чётное число , $a \geq 0$, то $x^n = a \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$.

Например, $x^2 = -4 \Rightarrow$ нет решений ; $x^2 = 14 \Rightarrow x = \pm\sqrt{14}$;

$x^4 = -16 \Rightarrow$ нет решений ; $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$.

3) Если n – нечётное число , a – любое число , то $\sqrt[n]{x} = a \Rightarrow x = a^n$.

Например, $\sqrt[5]{x} = 2 \Rightarrow x = 2^5 = 32$; $\sqrt[3]{x} = -8 \Rightarrow x = (-8)^3 = -512$.

4) Если n – чётное число, $a<0$, то уравнение $\sqrt[n]{x}=a$ не имеет решений.
Если n – чётное число, $a\ge 0$, то $\sqrt[n]{x}=a \;\Rightarrow\; x=a^n$.
Например, $\sqrt{x}=-9 \;\Rightarrow$ нет решений ; $\sqrt{x}=9 \;\Rightarrow\; x=9^2=81$;
$\sqrt[6]{x}=-2 \;\Rightarrow$ нет решений ; $\sqrt[6]{x}=2 \;\Rightarrow\; x=2^6=64$.

Простейшие показательные и логарифмические уравнения.

Пусть $a>0,\, a\ne 1$.

1) Если $b\le 0$, то уравнение $a^x=b$ не имеет решений.
Если $b>0$, то $a^x=b \;\Rightarrow\; x=\log_a b$.
Частный случай: $a^x=a^y \;\Rightarrow\; x=y$.
Например, $2^x=-8 \;\Rightarrow$ нет решений ; $2^x=15 \;\Rightarrow\; x=\log_2 15$;
$2^x=8 \;\Rightarrow\; 2^x=2^3 \;\Rightarrow\; x=3$.

2) При любом значении b : $\log_a x=b \;\Rightarrow\; x=a^b$.
Частный случай: $\log_a x=\log_a y \;\Rightarrow\; x=y$.
Например, $\log_3 x=-4 \;\Rightarrow\; x=3^{-4}=\frac{1}{81}$; $\log_2 x=\log_2 5 \;\Rightarrow\; x=5$.

Простейшие показательные и логарифмические неравенства.

Если при решении неравенства мы “избавляемся” от основания степени или от логарифма, то при этом:
1) если основание больше 1 , то знак неравенства сохраняется;
2) если основание меньше 1 (и больше 0) , то знак неравенства меняет своё направление на противоположное.

Примеры. $2^x\ge 2^3 \;\Rightarrow\; x\ge 3$; $2^x\ge 5 \;\Rightarrow\; x\ge \log_2 5$;

$2^x\le 2^3 \;\Rightarrow\; x\le 3$; $2^x\le 5 \;\Rightarrow\; x\le \log_2 5$;

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x\ge\left(\frac{3}{7}\right)^2 \;\Rightarrow\; x\le 2 \;;\quad \left(\frac{3}{7}\right)^x\ge\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x\le\log_{\frac{3}{7}}\left(\frac{2}{3}\right) \;;$$

$$(0{,}5)^x\le(0{,}5)^3 \;\Rightarrow\; x\ge 3 \;;\quad (0{,}5)^x\le 3 \;\Rightarrow\; x\ge\log_{0{,}5}3 \;;$$

$$\log_2 x\ge 5 \;\Rightarrow\; x\ge 2^5 \;\Rightarrow\; x\ge 32 \;;\quad \log_2 x\le 5 \;\Rightarrow\; 0<x\le 2^5 \;\Rightarrow\; 0<x\le 32 \;;$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x\ge 5 \;\Rightarrow\; 0<x\le\left(\frac{1}{2}\right)^5 \;\Rightarrow\; 0<x\le\frac{1}{32} \;;\quad \log_{\frac{1}{2}} x\le 5 \;\Rightarrow\; x\ge\left(\frac{1}{2}\right)^5 \;\Rightarrow\; x\ge\frac{1}{32}.$$

Пример 1. Вычислить $A=\log_3 8\cdot\log_{\sqrt{2}}243$.

Решение. $A=\log_3\left(2^3\right)\cdot\log_{2^{0,5}}\left(3^5\right)=3\cdot\log_3 2\cdot\dfrac{5}{0{,}5}\cdot\log_2 3=30\cdot\log_3 2\cdot\dfrac{1}{\log_3 2}=30$.

Пример 2. Вычислить $A=\dfrac{4\cdot\log_5 200}{\log_{25}5}-\dfrac{2\cdot\log_5 8}{\log_{625}5}$.

Решение. $A=\frac{4\cdot\log_5 200}{\frac{1}{2}}-\frac{2\cdot\log_5 8}{\frac{1}{4}}=8\cdot(\log_5 200-\log_5 8)=8\cdot\log_5\left(\frac{200}{8}\right)=16$.

<u>*Пример 3.*</u> Вычислить $A=(1{,}5\ )^{\frac{1}{3\cdot\log_{125}3}}\cdot(2\ )^{\frac{1}{3\cdot\log_{125}3}}$.

Решение. $A=(1{,}5\cdot 2\ )^{\frac{1}{3\cdot\log_{125}3}}=(3\ )^{\frac{1}{3}\cdot\log_3 125}=(3\ )^{\log_3\sqrt[3]{125}}=5$. *Ответ:* 5 .

<u>*Пример 4.*</u> Вычислить $A=2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$.

Решение. Так как $\log_4(\sqrt{3}-2)^2=\log_{2^2}(\sqrt{3}-2)^2=\frac{2}{2}\cdot\log_2|\sqrt{3}-2|=\log_2(2-\sqrt{3})$ и $\log_9(2+\sqrt{3})^2=\log_{3^2}(2+\sqrt{3})^2=\frac{2}{2}\cdot\log_3|2+\sqrt{3}|=\log_3(2+\sqrt{3})$, то $A=2^{\log_2(2-\sqrt{3})}+3^{\log_3(2+\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4$. *Ответ:* 4 .

<u>*Пример 5.*</u> Вычислить $A=6^{\frac{x-2}{x-1}}\cdot 2^{\frac{3x}{2}}$ при $x=\log_2 12$.

Решение. $\frac{x-2}{x-1}=\frac{\log_2 12-2}{\log_2 12-1}=\frac{\log_2 12-\log_2 4}{\log_2 12-\log_2 2}=\frac{\log_2 3}{\log_2 6}=\log_6 3$. Следовательно, $A=6^{\log_6 3}\cdot 2^{\frac{3}{2}\cdot\log_2 12}=3\cdot\left(2^{\log_2 12}\right)^{\frac{3}{2}}=3\cdot 12^{\frac{3}{2}}=3\cdot 12^1\cdot 12^{\frac{1}{2}}=36\cdot\sqrt{12}$. *Ответ:* $36\cdot\sqrt{12}$.

<u>*Пример 6.*</u> Решить уравнение $\left(\sqrt[5]{6^{x-1}}\right)^{x+3}=36^{x+1}$.

Решение. Используя свойства степеней, получим $6^{\frac{1}{5}\cdot(x-1)(x+3)}=(6^2)^{x+1}$. Следовательно, $\frac{1}{5}\cdot(x-1)(x+3)=2x+2$. Отсюда $x_{1,2}=4\pm\sqrt{29}$.

Ответ: $4\pm\sqrt{29}$.

<u>*Пример 7.*</u> Решить уравнение $6^x\cdot 3^{x+4}=4^{x+1}$.

Решение. Разделив уравнение на всю правую часть, получим $\frac{(2\cdot 3)^x\cdot 3^{x+4}}{(2^2)^{x+1}}=1$; $\frac{2^x\cdot 3^x\cdot 3^{x+4}}{2^{2x+2}}=1$; $\frac{3^{2x+4}}{2^{x+2}}=1$; $\frac{(3^2)^{x+2}}{2^{x+2}}=1$; $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+2}=\left(\frac{9}{2}\right)^0$. *Ответ:* –2 .

<u>*Пример 8.*</u> Решить уравнение $6^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{x+1}=9$.

Решение. ОДЗ: $x\neq 0$. Разделив уравнение на всю правую часть, получим $\frac{2^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{x+1}}{3^2}=1$; $2^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{\frac{x^2-1}{x}}=1$; $2^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{\frac{(x+1)(x-1)}{x}}=1$; $\left(2\cdot 3^{x+1}\right)^{\frac{x-1}{x}}=1$.

Заметим, что $a^b=1$ в двух случаях: 1) $a=1$, b – любое ; 2) $b=0$, $a\neq 0$.
В соответствии с этим последнее уравнение распадается на два уравнения.

1) $2\cdot 3^{x+1}=1$. Отсюда $3^{x+1}=\frac{1}{2}$; $x+1=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)=-\log_3 2$; $x=-1-\log_3 2$.

2) $\frac{x-1}{x}=0$. Отсюда $x=1$. *Ответ:* $-1-\log_3 2$; 1 .

<u>*Пример 9.*</u> Решить уравнение $4^x+4^{x+1}=10\cdot 2^{1-x}$.

Решение. $2^{2x}+2^{2x+2}=10\cdot\frac{2}{2^x}$; $2^{2x}+2^{2x}\cdot 4=\frac{20}{2^x}$; $2^{2x}\cdot(1+4)=\frac{20}{2^x}$; $2^{3x}=4=2^2$; $3x=2$; $x=\frac{2}{3}$. *Ответ:* $x=\frac{2}{3}$.

<u>*Пример 10.*</u> Решить уравнение $25^{\log_2 x}-6\cdot 5^{\log_2 x}+5=0$.

Решение. После замены переменной $a=5^{\log_2 x}>0$ получим уравнение $a^2-6a+5=0$. Его корни: $a_1=1$; $a_2=5$. Выполним обратную замену.

1) $5^{\log_2 x}=1$; $\log_2 x=0$; $x=2^0=1$.

2) $5^{\log_2 x}=5$; $\log_2 x=1$; $x=2^1=2$. *Ответ:* 1 ; 2 .

<u>*Пример 11.*</u> Решить уравнение $\frac{16^x}{10^{2x}}-4=3\cdot(0{,}4)^x$.

Решение. Сначала преобразуем первое слагаемое: $\frac{16^x}{10^{2x}}=\frac{16^x}{100^x}=\left(\frac{16}{100}\right)^x=(0{,}16)^x$.

Имеем уравнение $(0{,}16)^x-4=3\cdot(0{,}4)^x$. Замена переменной: $a=(0{,}4)^x>0$. Получим уравнение $a^2-3a-4=0$. Его корни: $a_1=-1$ (не подходит) , $a_2=4$ (подходит) . Обратная замена: $(0{,}4)^x=4$. *Ответ:* $x=\log_{0{,}4}4$.

<u>*Пример 12.*</u> Решить уравнение $\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x+\left(5-2\cdot\sqrt{6}\right)^x=10$.

Решение. Так как $\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)\left(5-2\cdot\sqrt{6}\right)=1$, то $5-2\cdot\sqrt{6}=\frac{1}{5+2\cdot\sqrt{6}}$.

Следовательно, уравнение принимает вид $\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x+\frac{1}{\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x}=10$. Замена переменной: $a=\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x$. Получим уравнение $a+\frac{1}{a}=10$. Его корни: $a_{1,2}=5\pm\sqrt{24}=5\pm 2\cdot\sqrt{6}$. Обратная замена: 1) $\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x=5+2\cdot\sqrt{6}$; $x=1$;

2) $\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^x=5-2\cdot\sqrt{6}=\frac{1}{5+2\cdot\sqrt{6}}=\left(5+2\cdot\sqrt{6}\right)^{-1}$; $x=-1$.

Ответ: ± 1 .

<u>*Пример 13.*</u> Решить уравнение $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x$.

Решение. Наименьшее основание $16=4^2$, наибольшее основание $81=9^2$, среднее основание $36=4\cdot 9$. Имеем: $3\cdot\left(4^2\right)^x+(4\cdot 9)^x-2\cdot\left(9^2\right)^x=0$; $3\cdot\left(4^x\right)^2+4^x\cdot 9^x-2\cdot\left(9^x\right)^2=0$. Разделив уравнение на $\left(9^x\right)^2$, получим

$3\cdot\dfrac{(4^x)^2}{(9^x)^2}+\dfrac{4^x}{9^x}-2=0$. Замена переменной: $a=\dfrac{4^x}{9^x}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}>0$. Получим уравнение $3a^2+a-2=0$. Его корни: $a_1=-1$ (не подходит), $a_2=\dfrac{2}{3}$ (подходит). Обратная замена: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}=\dfrac{2}{3}$. Отсюда $x=\dfrac{1}{2}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{2}$.

<u>*Пример 14.*</u> Решить уравнение $\log_4(x^2-x-3)=\log_4(x^2-5x+4)-0{,}5$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}x^2-x-3>0\\ x^2-5x+4>0\end{cases}$. Запишем $-0{,}5=\log_4(4^{-0{,}5})=\log_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Уравнение примет вид $\log_4(x^2-x-3)=\log_4(x^2-5x+4)+\log_4\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $\log_4(x^2-x-3)=\log_4\left(\dfrac{x^2-5x+4}{2}\right)$; $x^2-x-3=\dfrac{x^2-5x+4}{2}$. Отсюда $x_1=2\notin ОДЗ$; $x_2=-5\in ОДЗ$. *Ответ:* -5 .

<u>*Пример 15.*</u> Решить уравнение $\log_2^2(2x)=\log_2(2x^2)+1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}2x>0\\ 2x^2>0\end{cases}\Rightarrow x>0$. Имеем: $(\log_2(2x))^2=\log_2 2+\log_2 x^2+1$; $(\log_2 2+\log_2 x)^2=1+2\cdot\log_2 x+1$; $(1+\log_2 x)^2=2+2\cdot\log_2 x$. Замена переменной: $a=\log_2 x$. Получим $(1+a)^2=2+2a$. Отсюда $a=\pm1$. Обратная замена: 1) $\log_2 x=1$; $x=2^1=2$; 2) $\log_2 x=-1$; $x=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$. *Ответ:* 2 ; $\dfrac{1}{2}$.

<u>*Пример 16.*</u> Решить уравнение $\lg^2(10x^2)=1+\lg(x^6)$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases}10x^2>0\\ x^6>0\end{cases}\Rightarrow x\neq0$. Поэтому при выносе чётных степеней за знаки логарифмов появляются модули (см. замечание на стр. 53) . Имеем: $(\lg(10x^2))^2=1+6\cdot\lg|x|$; $(\lg10+\lg x^2)^2=1+6\cdot\lg|x|$; $(1+2\lg|x|)^2=1+6\cdot\lg|x|$. Замена: $a=\lg|x|$. Получим $(1+2a)^2=1+6a$. Отсюда $a_1=0$; $a_2=\dfrac{1}{2}$. Обратная замена: 1) $\lg|x|=0$; $|x|=1$; $x=\pm1$; 2) $\lg|x|=\dfrac{1}{2}$; $|x|=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$; $x=\pm\sqrt{10}$. *Ответ:* ±1 ; $\pm\sqrt{10}$.

<u>*Пример 17.*</u> Решить уравнение $\log_{x+3}(2x^2+7x+7)=2$.

Решение. ОДЗ: $2x^2+7x+7>0$; $x+3>0$; $x+3\neq1$. Из данного уравнения следует, что $2x^2+7x+7=(x+3)^2$. Отсюда $x_1=1\in ОДЗ$; $x_2=-2\notin ОДЗ$. *Ответ:* 1 .

Пример 18. Решить уравнение $\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_4 x}+3=0$.

Решение. ОДЗ: $x>0$; $x\neq 1$. Так как $\log_x 2=\frac{1}{\log_2 x}$, то $\frac{1}{\log_x 2}=\log_2 x$.

Так как $\log_4 x=\log_{2^2} x=\frac{1}{2}\cdot\log_2 x=\frac{\log_2 x}{2}$, то $\frac{1}{\log_4 x}=\frac{2}{\log_2 x}$. Следовательно, уравнение можно переписать в виде $\log_2 x+\frac{2}{\log_2 x}+3=0$. Решив это уравнение с помощью замены переменной $a=\log_2 x$, получим:

1) $\log_2 x=-1$; $x=\frac{1}{2}\in ОДЗ$;

2) $\log_2 x=-2$; $x=\frac{1}{4}\in ОДЗ$. *Ответ:* $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

Пример 19. Решить уравнение $\log_{0,6x}\left(\frac{3}{5x}\right)+\frac{1}{\log_x^2(0,6)}=1$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 0,6x\neq 1\text{, т.е. } x\neq \frac{5}{3} \end{cases}$. Преобразуем каждое слагаемое, входящее в данное уравнение. $\log_{0,6x}\left(\frac{3}{5x}\right)=\log_{0,6x}\left(\frac{\frac{3}{5}}{x}\right)=\log_{0,6x}\left(\frac{0,6}{x}\right)=\frac{\log_{0,6}\left(\frac{0,6}{x}\right)}{\log_{0,6}(0,6x)}=$

$=\frac{\log_{0,6}(0,6)-\log_{0,6} x}{\log_{0,6}(0,6)+\log_{0,6} x}=\frac{1-\log_{0,6} x}{1+\log_{0,6} x}$; $\frac{1}{\log_x^2(0,6)}=\left(\frac{1}{\log_x 0,6}\right)^2=(\log_{0,6} x)^2$.

Перепишем уравнение в виде $\frac{1-\log_{0,6} x}{1+\log_{0,6} x}+(\log_{0,6} x)^2=1$. Решив это уравнение с помощью замены переменной $a=\log_{0,6} x$, получим:

1) $\log_{0,6} x=0$; $x=(0,6)^0=1\notin ОДЗ$.

2) $\log_{0,6} x=1$; $x=(0,6)^1=0,6=\frac{3}{5}\in ОДЗ$.

3) $\log_{0,6} x=-2$; $x=(0,6)^{-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\frac{25}{9}\in ОДЗ$. *Ответ:* $\frac{3}{5}$; $\frac{25}{9}$.

Пример 20. Решить уравнение $3^{\log_3\left(\frac{1}{9}\right)}\cdot x^{\log_3\left(\frac{x^3}{9}\right)-3}=1$.

Решение. ОДЗ: $x>0$. Упрощая уравнение, получим $\frac{1}{9}\cdot x^{\log_3\left(x^3\right)-\log_3 9-3}=1$; $\frac{1}{9}\cdot x^{3\cdot\log_3 x-2-3}=1$; $x^{3\cdot\log_3 x-5}=9$. Полученное уравнение прологарифмируем по основанию 3 : $\log_3\left(x^{3\cdot\log_3 x-5}\right)=\log_3 9$; $(3\cdot\log_3 x-5)\cdot\log_3 x=2$. Решив это уравнение с помощью замены переменной $a=\log_3 x$, получим:

1) $\log_3 x = 2$; $x = 3^2 = 9$.

2) $\log_3 x = -\dfrac{1}{3}$; $x = 3^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. *Ответ:* 9 ; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

__Пример 21.__ Решить неравенство $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq \dfrac{1}{4}$.

Решение. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_3\left(x^2+6x-7\right)} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$; $\log_3\left(x^2+6x-7\right) \leq 2$ (знак неравенства меняет своё направление на противоположное, так как отбрасываемое основание $\dfrac{1}{2} < 1$).

Следовательно, $0 < x^2 + 6x - 7 \leq 3^2$ или $\begin{cases} x^2 + 6x - 7 > 0 \\ x^2 + 6x - 7 \leq 9 \end{cases}$. Поскольку методы решения подобных систем неравенств были изложены ранее, мы не приводим дальнейшего хода решения. *Ответ:* $\left[-8\,;-7\right) \cup \left(1\,;2\right]$.

__Пример 22.__ Решить неравенство $\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{2x+3}-3} \geq \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{2x+3}-3}$.

Решение. Разделив неравенство на его правую часть (это можно делать по причине положительности правой части) , получим $\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right)^{\sqrt{2x+3}-3} \geq 1 = \left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right)^0$.

Так как $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}} \approx 0{,}83 < 1$, то при отбрасывании основания направление знака неравенства меняется. Следовательно, $\sqrt{2x+3} - 3 \leq 0$; $\sqrt{2x+3} \leq 3$; $0 \leq 2x + 3 \leq 9$; $-3 \leq 2x \leq 6$; $-1{,}5 \leq x \leq 3$. *Ответ:* $\left[-1{,}5\,;3\right]$.

__Пример 23.__ Решить неравенство $3^{\log_2 x} + 2 \cdot x^{\log_4 9} \leq 3 \cdot x^{\log_x 9}$.

Решение. *ОДЗ*: $x > 0$; $x \neq 1$. Сначала преобразуем отдельные слагаемые.

$\log_4 9 = \log_{2^2}\left(3^2\right) = \dfrac{2}{2} \cdot \log_2 3 = \log_2 3$; $x^{\log_4 9} = x^{\log_2 3} = \left\{\begin{matrix} \textit{по формуле} \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{matrix}\right\} = 3^{\log_2 x}$;

$3 \cdot x^{\log_x 9} = 3 \cdot 9 = 27$. Следовательно, неравенство принимает вид: $3^{\log_2 x} + 2 \cdot 3^{\log_2 x} \leq 27$. Дальнейший ход решения: $3^{\log_2 x} \cdot (1+2) \leq 27$; $3^{\log_2 x} \leq 9 = 3^2$; $\log_2 x \leq 2$; $0 < x \leq 2^2 = 4$. С учётом *ОДЗ* получаем следующий ответ.

Ответ: $\left(0\,;1\right) \cup \left(1\,;4\right]$.

__Пример 24.__ Решить неравенство $\log_{0,7}(x+5) \geq \log_{0,7}\left(x^2 + 2x - 7\right)$.

Решение. *ОДЗ*: $\begin{cases} x + 5 > 0 \\ x^2 + 2x - 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-5\,;-1-\sqrt{8}\right) \cup \left(-1+\sqrt{8}\,;+\infty\right)$.

В данном неравенстве отбрасываем логарифмы, меняя направление знака неравенства (потому что основание $0{,}7 < 1$) . Получим $x + 5 \leq x^2 + 2x - 7$. Это неравенство имеет решения $x \in (-\infty; -4\,] \cup [\,3; +\infty)$. Ответом является пересечение полученного множества с *ОДЗ*. *Ответ:* $(-5; -4\,] \cup [\,3; +\infty)$.

<u>*Пример 25.*</u> Решить неравенство $\sqrt{\log_3 \dfrac{5x-3}{x+4}} < 1$.

Решение. Возведём неравенство в квадрат и учтём, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным. $0 \le \log_3 \dfrac{5x-3}{x+4} < 1$; $3^0 \le \dfrac{5x-3}{x+4} < 3^1$; $\begin{cases} \frac{5x-3}{x+4} \ge 1 \\ \frac{5x-3}{x+4} < 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{4x-7}{x+4} \ge 0 \\ \frac{2x-15}{x+4} < 0 \end{cases}$. *Ответ:* $\left[\dfrac{7}{4}; \dfrac{15}{2}\right)$.

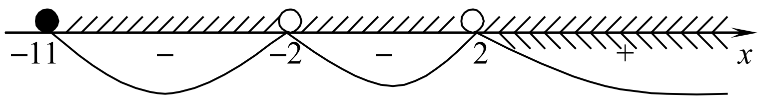
<u>*Пример 26.*</u> Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{2^{|x|}-4} \ge 0$.

Решение. Данное неравенство мы решим методом интервалов. Обозначим $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+11}-3}{2^{|x|}-4}$ и выполним три стандартных пункта.

1) *ОДЗ*: $\begin{cases} x+11 \ge 0 \\ 2^{|x|}-4 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x \ge -11 \\ 2^{|x|} \ne 2^2 \quad \Rightarrow \quad |x| \ne 2 \quad ; \quad x \ne \pm 2 \end{cases}$.

2) $f(x) = 0$; $\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{2^{|x|}-4} = 0$; $\sqrt{x+11} - 3 = 0$; $x = -2 \notin$ *ОДЗ*.

3) Рисунок и расстановка знаков функции $f(x)$.



Ответ: $(2; +\infty)$.

<u>*Пример 27.*</u> Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_{0,1}(x-3)+1}}{x^2-14x+40} \ge 0$.

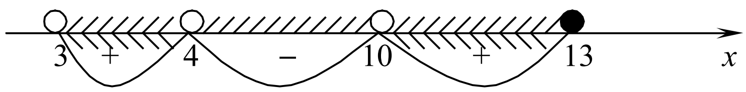
Решение. Данное неравенство мы решим методом интервалов. Обозначим $f(x) = \dfrac{\sqrt{\log_{0,1}(x-3)+1}}{x^2-14x+40}$ и выполним три стандартных пункта.

1) *ОДЗ*: $\begin{cases} \log_{0,1}(x-3)+1 \ge 0 \\ x^2-14x+40 \ne 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \log_{0,1}(x-3) \ge -1 \\ x \ne 4 \quad ; \quad x \ne 10 \end{cases}$; $\begin{cases} 0 < x-3 \le 10 \\ x \ne 4 \quad ; \quad x \ne 10 \end{cases}$;

$\begin{cases} 3 < x \le 13 \\ x \ne 4 \quad ; \quad x \ne 10 \end{cases}$.

2) $f(x) = 0$; $\log_{0,1}(x-3)+1 = 0$; $\log_{0,1}(x-3) = -1$; $x = 13$.

3) Рисунок и расстановка знаков функции $f(x)$.

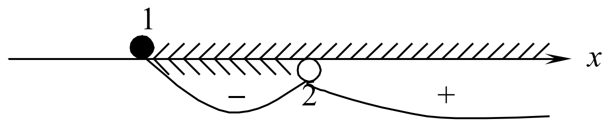


Ответ: $(3; 4) \cup (10; 13\,]$.

Пример 28. Решить неравенство $5^{\sqrt{x-1}}-2\cdot 5^{1-\sqrt{x-1}}<3$.

Решение. Данное неравенство мы решим методом интервалов. Обозначим $f(x)=5^{\sqrt{x-1}}-2\cdot 5^{1-\sqrt{x-1}}-3<0$ и выполним три стандартных пункта.

1) *ОДЗ*: $x\geq 1$.
2) $f(x)=0$; $5^{\sqrt{x-1}}-2\cdot\dfrac{5^1}{5^{\sqrt{x-1}}}-3=0$. Решив это уравнение с помощью замены переменной $a=5^{\sqrt{x-1}}$, получим $x=2$.
3) Рисунок и расстановка знаков функции $f(x)$.



Ответ: $[\,1\,;2\,)$.

Пример 29. Найти целый корень уравнения $\log_2(3-|x|)=\sqrt{2x+3}$.

Решение. *ОДЗ* : $\begin{cases}3-|x|>0\\ 2x+3\geq 0\end{cases}$; $\begin{cases}-3<x<3\\ x\geq -1{,}5\end{cases}$; $x\in[\,-1{,}5\,;3\,)$.

Целые числа, принадлежащие *ОДЗ* : -1 ; 0 ; 1 ; 2 . Подставляя эти числа в данное уравнение, убеждаемся в том, что лишь число -1 является корнем уравнения.
Ответ: -1 .

Пример 30. Найти целый корень уравнения $4^{\frac{x+3}{2}}+\dfrac{x-3}{x+2}=0$.

Решение. Имеем: $4^{\frac{x+3}{2}}=\dfrac{3-x}{x+2}$. Так как левая часть полученного уравнения положительна, то и правая часть должна быть положительной. Следовательно, $\dfrac{3-x}{x+2}>0$, т.е. $x\in(\,-2\,;3\,)$. Целые числа, принадлежащие промежутку $(-2\,;3)$: -1 ; 0 ; 1 ; 2 . Подставляя эти числа в данное уравнение, убеждаемся в том, что лишь число -1 является корнем уравнения. *Ответ:* -1 .

Пример 31. Решить уравнение $\log_2\left(3-2^{|x+1|}\right)=x$.

Решение. *ОДЗ* : $3-2^{|x+1|}>0$. Из уравнения следует, что $3-2^{|x+1|}=2^x$.

1) Если $x+1\geq 0$, то уравнение принимает вид $3-2^{x+1}=2^x$. Отсюда $x=0$ (удовлетворяет *ОДЗ* и условию 1)) .
2) Если $x+1\leq 0$, то уравнение принимает вид $3-2^{-x-1}=2^x$. Отсюда $x_1=\log_2\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$ (не удовлетворяет условию 2)) ,

$x_2 = \log_2 \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$ (удовлетворяет *ОДЗ* и условию 2)) .

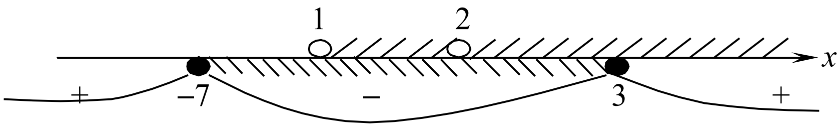
Ответ: 0 ; $\log_2 \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}$.

<u>*Пример 32.*</u> Найти количество целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+5) + 2 \cdot \log_3 4 \ge \frac{1}{\log_{x-1} 3} .$$

Решение. *ОДЗ* : $\begin{cases} x+5>0 \\ x-1>0 \\ x-1 \ne 1 \end{cases}$; $x \in (\ 1 ; 2\ ) \cup (\ 2 ; +\infty\ )$.

Так как $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) = -\log_3(x+5)$, $2 \cdot \log_3 4 = \log_3 16$, $\dfrac{1}{\log_{x-1} 3} = \log_3(x-1)$, то неравенство принимает вид $-\log_3(x+5) + \log_3 16 \ge \log_3(x-1)$. Отсюда следует: $\log_3 16 \ge \log_3(x-1) + \log_3(x+5)$; $\log_3 16 \ge \log_3(x^2+4x-5)$; $x^2+4x-5 \le 16$; $x^2+4x-21 \le 0$; $(x-3)(x+7) \le 0$. На верхней части рисунка отметим *ОДЗ* , а на нижней части отметим все решения полученного неравенства.



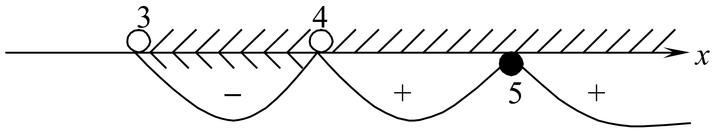
Целое решение, принадлежащее пересечению полученных множеств: 3 .
Количество целых решений равно 1 . *Ответ:* 1 .

<u>*Пример 33.*</u> Найти количество целых решений неравенства

$$(x^2-10x) \cdot \log_4(x-3) \le \frac{25}{\log_{x-3} 0{,}25} .$$

Решение. *ОДЗ* : $\begin{cases} x-3>0 \\ x-3 \ne 1 \end{cases}$; $x \in (\ 3 ; 4\ ) \cup (\ 4 ; +\infty\ )$.

Так как $\dfrac{25}{\log_{x-3} 0{,}25} = 25 \cdot \log_{0{,}25}(x-3) = 25 \cdot \log_{4^{-1}}(x-3) = -25 \cdot \log_4(x-3)$, то неравенство принимает вид $(x^2-10x) \cdot \log_4(x-3) \le -25 \cdot \log_4(x-3)$. Отсюда следует, что $(x^2-10x) \cdot \log_4(x-3) + 25 \cdot \log_4(x-3) \le 0$;
$(x^2-10x+25) \cdot \log_4(x-3) \le 0$; $f(x) = (x-5)^2 \log_4(x-3) \le 0$.
Решим уравнение $f(x)=0$, т.е. $(x-5)^2 \log_4(x-3) = 0$. Из этого уравнения следует, что либо $(x-5)^2 = 0$, т.е. $x = 5 \in ОДЗ$, либо $x = 4 \notin ОДЗ$.
На верхней части рисунка изобразим *ОДЗ* , а на нижней части рисунка отметим точку, в которой $f(x)=0$, и расставим знаки функции $f(x)$.

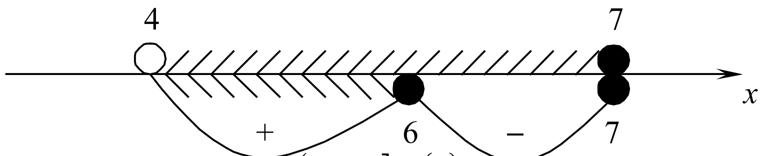


Все решения данного неравенства: $(3\,;4\,)\cup\{5\}$. Целое решение: 5 .
Количество целых решений равно 1 . *Ответ:* 1 .

<u>*Пример 34.*</u> Найти количество целых решений неравенства

$$\sqrt{7-x}\cdot\left(\log_{0,2}(2x-8)+\frac{1}{\log_{x-2}5}\right)\ge 0\ .$$

Решение. *ОДЗ* определяется условиями: $7-x\ge 0$; $2x-8>0$; $x-2>0$; $x-2\ne 1$. Отсюда следует, что $x\in(\,4\,;7\,]$. Так как $\log_{0,2}(2x-8)+\dfrac{1}{\log_{x-2}5}=\log_{5^{-1}}(2x-8)+\log_5(x-2)=-\log_5(2x-8)+\log_5(x-2)=$ $=\log_5\dfrac{x-2}{2x-8}$, то неравенство принимает вид $f(x)=\sqrt{7-x}\cdot\log_5\dfrac{x-2}{2x-8}\ge 0$.
Решим уравнение $f(x)=0$, т.е. $\sqrt{7-x}\cdot\log_5\dfrac{x-2}{2x-8}=0$. Из этого уравнения следует, что либо $\sqrt{7-x}=0$, т.е. $x=7\in$ *ОДЗ* , либо $\log_5\dfrac{x-2}{2x-8}=0$, т.е. $x=6\in$ *ОДЗ* . На верхней части рисунка изобразим *ОДЗ* , а на нижней части рисунка отметим точки, в которых $f(x)=0$, и расставим знаки функции $f(x)$.



Все решения данного неравенства: $(\,4\,;6\,]\cup\{7\}$. Целые решения: $5\,;6\,;7$.
Количество целых решений равно 3 . *Ответ:* 3 .

Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислить $\log_5 121\cdot\log_{\sqrt{11}}125$.
2. Вычислить $\dfrac{3\cdot\log_3 54}{\log_{81}3}-\dfrac{4\cdot\log_3 6}{\log_{27}3}$.
3. Вычислить $(20\,)^{\frac{1}{2\cdot\log_{81}5}}\cdot(0{,}25\,)^{\frac{1}{2\cdot\log_{81}5}}$.
4. Вычислить $5^{\log_{\sqrt5}\sqrt{4+2\cdot\sqrt3}}+5^{\log_{25}\left(2\cdot\sqrt3-4\right)^2}$.
5. Вычислить $3^{\frac{x-2}{x}}\cdot 6^{x-1}$ при $x=-\log_6 3$.
6. Решить уравнение $\left(\sqrt[3]{5^{x+1}}\right)^{x-4}=125^{x-1}$.
7. Решить уравнение $5^{2x-1}\cdot 3^{x+4}=45^{x+1}$.

8. Решить уравнение $2^{\frac{x+2}{x}} \cdot 3^{x-1} = 12$.
9. Решить уравнение $3^x - 3^{x-2} = 24 \cdot 9^{1-x}$.
10. Решить уравнение $4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 8 = 0$.
11. Решить уравнение $\frac{3^{2x}}{100^x} = 2 \cdot (0{,}3)^x + 3$.
12. Решить уравнение $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + \left(4-\sqrt{15}\right)^x = 62$.
13. Решить уравнение $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$.
14. Решить уравнение $\log_{0,25}\left(x^2 + x - 4\right) = \log_{0,25}\left(x^2 - 2x - 3\right) + 0{,}5$.
15. Решить уравнение $\log_2\left(x^3\right) \cdot \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = \log_2\left(\frac{2}{x^4}\right)$.
16. Решить уравнение $\log_3^2\left(3x^2\right) + \log_9\left(x^2\right) \cdot \log_3\left(\frac{x^2}{3}\right) = 1$.
17. Решить уравнение $\log_{4-x}\left(4x^2 - 16x + 13\right) = 2$.
18. Решить уравнение $\log_2 \sqrt{3x+1} \cdot \log_{x-1} 2 = 1$.
19. Решить уравнение $\log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{1}{3x}\right) + \log_x^{-2}(3) = 1$.
20. Решить уравнение $x^{2 \cdot \lg^2 x - 1,5} = \sqrt{10}$.
21. Решить неравенство $3^{\log_2\left(x^2 - 6x + 5\right)} \le 27$.
22. Решить неравенство $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{2-3x}-3} < \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{2-3x}-3}$.
23. Решить неравенство $6^{\log_{\frac{1}{3}} x} + 3 \cdot x^{\log_{\frac{1}{3}} 6} > 4 \cdot x^{-2 \cdot \log_x 6}$.
24. Решить неравенство $\log_6(x+2) < \log_6 \frac{18}{7-x}$.
25. Решить неравенство $\sqrt{\log_{0,5} \frac{2x+1}{x-3}} < 1$.
26. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+2} - 2}{3^{-x} - \sqrt{3}} \le 0$.
27. Решить неравенство $\frac{\sqrt{\log_{0,2}(3x-4)}}{16x - 25} \ge 0$.
28. Решить неравенство $3^{1+\sqrt{3-x}} - 3^{1-\sqrt{3-x}} \le 8$.
29. Найти целый корень уравнения $\frac{\log_3(x+7)}{\log_3(-x-1)} = \frac{x+4}{x+3}$.
30. Найти целый корень уравнения $6^{\frac{x+5}{2}} + 2x^2 + 8x = 0$.
31. Решить уравнение $\log_3\left(4 - 3^{|x-2|}\right) = x - 2$.
32. Найти количество целых решений неравенства $\lg(x-1) + 2 \cdot \log_{0,1} 6 \le \frac{1}{\log_{x-9} 0{,}1}$.
33. Найти количество целых решений неравенства $\left(x^2 + 25\right) \cdot \log_{0,2}(x-3) + \frac{10x}{\log_{x-3} 5} \ge 0$.
34. Найти количество целых решений неравенства $\sqrt{6-x} \cdot \left(\log_{0,5}(2x-6) + \frac{1}{\log_{x-1} 2}\right) \ge 0$.

ПРОИЗВОДНЫЕ

Таблица производных.

$$\left(z^n\right)' = nz^{n-1} \quad (\ n = Const\ ) \quad ; \quad \left(\sqrt{z}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{z}} \quad ; \quad \left(\frac{1}{z^n}\right)' = -\frac{n}{z^{n+1}} \quad ;$$

$$\left(a^z\right)' = a^z \ln a \quad (\ a = Const\ ) \quad ; \quad \left(e^z\right)' = e^z \quad ; \quad \left(\log_a z\right)' = \frac{1}{z\ln a} \quad ; \quad \left(\ln z\right)' = \frac{1}{z} \quad ;$$

$$\left(\sin z\right)' = \cos z \quad ; \quad \left(\cos z\right)' = -\sin z \quad ; \quad \left(\operatorname{tg} z\right)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad ; \quad \left(\operatorname{ctg} z\right)' = -\frac{1}{\sin^2 z} \quad .$$

Если z зависит от x , то каждую табличную производную нужно умножить на $(z)'$.

Свойства производной.

$$\left(Const\right)' = 0 \quad ; \quad \left(u \pm v\right)' = u' \pm v' \quad ; \quad \left(C\cdot u\right)' = C\cdot(u)' \quad ;$$

$$\left(uv\right)' = u'v + uv' \quad ; \quad \left(uvw\right)' = u'vw + uv'w + uvw' \quad ; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad .$$

<u>*Пример 1.*</u> Найти производную функции $y = 2\sin^3 3x + 6\cdot\ln\cos 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{18}$.

Решение. $y' = 2\cdot\left(\sin^3 3x\right)' + 6\cdot\left(\ln\cos 3x\right)'$. Считаем каждую производную по отдельности. В фигурных скобках даётся пояснение: выписывается табличная производная **с учётом фразы, написанной после таблицы производных**, и указывается, *что именно* следует подставить вместо z в написанную формулу.

$$\left(\sin^3 3x\right)' = \left\{\begin{aligned} &\left(z^3\right)' = 3z^2\cdot(z)' \\ &z = \sin 3x \end{aligned}\right\} = 3\sin^2 3x\cdot\left(\sin 3x\right)' = 3\sin^2 3x\cdot\left(3\cos 3x\right) = 9\sin^2 3x\cos 3x \ .$$

$$\left(\ln\cos 3x\right)' = \left\{\begin{aligned} &\left(\ln z\right)' = \frac{1}{z}\cdot(z)' \\ &z = \cos 3x \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\cos 3x}\cdot\left(\cos 3x\right)' = \frac{1}{\cos 3x}\cdot\left(-3\sin 3x\right) = -3\operatorname{tg} 3x \ .$$

$$y' = 2\cdot\left(9\sin^2 3x\cos 3x\right) + 6\cdot\left(-3\operatorname{tg} 3x\right) = 18\cdot\left(\sin^2 3x\cos 3x - \operatorname{tg} 3x\right) .$$

В полученную производную подставим значение x_0 .

$$y'(x_0) = 18\cdot\left(\sin^2\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{15\cdot\sqrt{3}}{4} \ .$$

Ответ: $-\dfrac{15\cdot\sqrt{3}}{4}$.

Нахождение критических точек и промежутков монотонности функции.

Критические точки – это такие точки, в которых функция определена, и в которых производная равна нулю или не определена.

На рисунках все *критические точки* отмечаются *закрашенными*, а точки, в которых функция $y(x)$ не определена, отмечаются *не закрашенными*.

Если во всех точках некоторого промежутка $y'(x) > 0$, то функция $y(x)$ возрастает на этом промежутке. Если $y'(x) < 0$, то функция убывает.

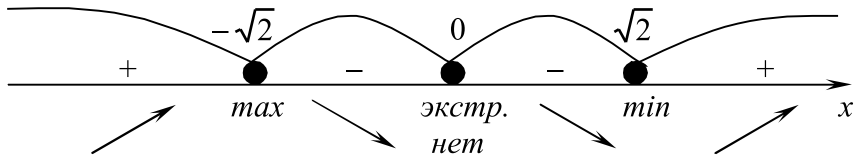
Допустим, что на двух соседних промежутках функция возрастает. Вопрос: в каких случаях эти промежутки следует объединять в один промежуток, а в каких случаях этого делать нельзя? Ответ: если точка, разделяющая эти промежутки, *принадлежит ОДЗ* функции, то промежутки *объединяются* ; если точка, разделяющая эти промежутки, *не принадлежит ОДЗ* функции, то промежутки *не объединяются*.

Если требуется найти *интервалы* возрастания функции, то граничные точки соответствующих промежутков *не включаются*. Если требуется найти *промежутки* возрастания функции, то граничные точки соответствующих промежутков *включаются при условии*, что они принадлежат *ОДЗ* функции.

Если при переходе (слева направо) через критическую точку производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то в критической точке достигается минимум. Если знак меняется с «плюса» на «минус», то достигается максимум. Если знаки не чередуются, то в критической точке экстремума нет. Разумеется, что в точках, не принадлежащих *ОДЗ* функции, никаких экстремумов нет.

<u>Пример 2.</u> Найти критические точки функции $y = 0{,}6x^5 - 2x^3 - 1$, интервалы и промежутки возрастания и убывания, а также значения функции во всех критических точках.

Решение. $y' = 3x^4 - 6x^2 = 3x^2\left(x^2 - 2\right)$. Приравняем производную к нулю и найдём критические точки: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. Отметим на числовой оси критические точки и определим знаки производной.



Ответ: интервалы возрастания: $\left(-\infty\,; -\sqrt{2}\,\right)$ и $\left(\sqrt{2}\,; +\infty\,\right)$;

промежутки возрастания: $\left(-\infty; -\sqrt{2}\,\right]$ и $\left[\sqrt{2}\,; +\infty\,\right)$;

интервал убывания: $\left(-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,\right)$;

промежуток убывания: $\left[-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,\right]$;

в точке $x = -\sqrt{2}$ достигается максимум; $y_{\max} = y\left(-\sqrt{2}\right) = 1{,}6 \cdot \sqrt{2} - 1$;

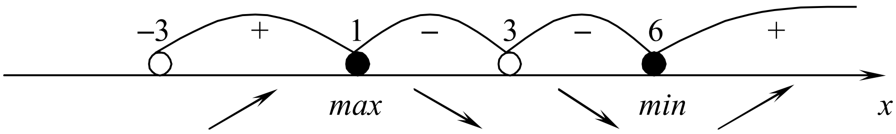
в точке $x = 0$ экстремума нет; $y(0) = -1$;

в точке $x = \sqrt{2}$ достигается минимум; $y_{\min} = y\left(\sqrt{2}\right) = -1{,}6 \cdot \sqrt{2} - 1$.

<u>Пример 3.</u> Найти критические точки функции $y = \ln(x+3) + \dfrac{1}{x-3}$, интервалы и промежутки возрастания и убывания, а также значения функции во всех критических точках.

Решение. ОДЗ: $x > -3$; $x \neq 3$. Вычислим производную, приравняем её к нулю и найдём критические точки. $y' = \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{(x+3)(x-3)^2} = \dfrac{(x-1)(x-6)}{(x+3)(x-3)^2}$.

$y' = 0$ при $x_1 = 1 \in ОДЗ$ и $x_2 = 6 \in ОДЗ$. Критические точки: 1 ; 6 . Отметим на числовой оси критические точки и определим знаки производной.



Ответ: интервалы возрастания: $(-3;1)$ и $(6;+\infty)$;

промежутки возрастания: $(-3;1]$ и $[6;+\infty)$;

интервалы убывания: $(1;3)$ и $(3;6)$;

промежутки убывания: $[1;3)$ и $(3;6]$;

в точке $x = 1$ достигается максимум; $y_{\max} = y(1) = \ln 4 - \frac{1}{2}$;

в точке $x = 6$ достигается минимум; $y_{\min} = y(6) = \ln 9 + \frac{1}{3}$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

1) Находим критические точки функции, *принадлежащие данному отрезку*.
2) Подсчитываем значения функции в этих критических точках и значения функции в граничных точках отрезка.
3) Из всех подсчитанных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

<u>*Пример 4.*</u> Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = \ln x - x^2 - x + 2$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{4};2\right]$.

Решение. Вычислим производную, приравняем её к нулю и найдём критические точки, принадлежащие данному отрезку. $y' = \dfrac{1}{x} - 2x - 1 = \dfrac{1 - 2x^2 - x}{x} = 0$ при $x_1 = -1 \notin \textit{отрезку}$ и $x_2 = \dfrac{1}{2} \in \textit{отрезку}$. Подсчитываем следующие значения:

$y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 2 = -\ln 2 + 1{,}25 \approx 0{,}56$;

$y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \ln\dfrac{1}{4} + 1{,}6875 = -2 \cdot \ln 2 + 1{,}6875 \approx 0{,}30$; $y(2) = \ln 2 - 4 \approx -3{,}31$.

Наибольшее значение $y_{наиб} = y\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln 2 + 1{,}25$.

Наименьшее значение $y_{наим} = y(2) = \ln 2 - 4$.

Сумма наибольшего и наименьшего значений равна $-2{,}75$. *Ответ:* $-2{,}75$.

Касательные.

Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке с абсциссой x_0 :

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) .$$

Значение $y'(x_0)$ называется угловым коэффициентом касательной. Угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.

Если касательная к графику $y = y(x)$ в точке x_0 параллельна прямой $y = kx + b$, то угловые коэффициенты касательной и прямой равны, т.е. $y'(x_0) = k$.

Если касательная к графику $y = y_1(x)$ в точке x_1 параллельна касательной к графику $y = y_2(x)$ в точке x_2, то угловые коэффициенты этих касательных равны, т.е. $y_1'(x_1) = y_2'(x_2)$.

<u>*Пример 5.*</u> Написать уравнение касательной к графику функции $y = \ln x$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

Решение. Для нахождения точки пересечения графика с осью абсцисс нужно «игрек» приравнять к нулю: $\ln x = 0 \;\Rightarrow\; x = e^0 = 1$. Обозначим $x_0 = 1$. Имеем: $y(x_0) = \ln 1 = 0$; $y' = \dfrac{1}{x}$; $y'(x_0) = \dfrac{1}{1} = 1$.
Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$, т.е. $y = 0 + 1\cdot(x-1)$, $y = x - 1$.
Ответ: $y = x - 1$.

<u>*Пример 6.*</u> В точке с абсциссой $x_0 = 3$ проведена касательная к графику функции $y = 7 + 2x - 5x^2 - 2x^3 + \dfrac{27}{x}$. Найти ординату точки касательной, абсцисса которой равна 2.

Решение. $y(x_0) = 7 + 6 - 45 - 54 + 9 = -77$; $y' = 2 - 10x - 6x^2 - \dfrac{27}{x^2}$; $y'(x_0) = 2 - 30 - 54 - 3 = -85$. Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$; $y = -77 - 85\cdot(x-3)$. В полученное уравнение подставим $x = 2$. Тогда $y = 8$.
Ответ: 8.

<u>*Пример 7.*</u> В точке пересечения графика функции $y = x\ln x$ с осью абсцисс проведена касательная. Какой угол она образует с осью Ox ?

Решение. Сначала найдём абсциссу точки пересечения графика с осью Ox. Для этого решим уравнение $x\ln x = 0$. *ОДЗ*: $x > 0$. Следовательно, $\ln x = 0$; $x = 1$. Обозначим $x_0 = 1$. Вычислим производную: $y' = (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$. Пусть α – угол между касательной и осью Ox. Тогда угловой коэффициент касательной равен $\operatorname{tg}\alpha = y'(x_0) = \ln 1 + 1 = 1$. Следовательно, $\alpha = 45°$. *Ответ:* 45°.

<u>*Пример 8.*</u> В какой точке пересекает ось абсцисс касательная к графику функции $y = 20\cdot\log_2(x-3)$ с угловым коэффициентом $k = \dfrac{5}{\ln 2}$?

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания.

Угловой коэффициент $k = y'(x_0) = \dfrac{20}{(x_0 - 3)\ln 2} = \dfrac{5}{\ln 2}$. Отсюда $x_0 = 7$;

$y(x_0) = 20 \cdot \log_2 4 = 40$. Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$; $y = 40 + \dfrac{5}{\ln 2}(x - 7)$. В полученное уравнение касательной подставим $y = 0$ и найдём x . Получим $x = 7 - 8 \cdot \ln 2$. *Ответ:* $(\,7 - 8 \cdot \ln 2\,;\,0\,)$.

Пример 9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{3}{x+4}$ в точке с положительной ординатой, где эта касательная параллельна прямой $y = -3x$.

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Так как касательная параллельна прямой, то угловой коэффициент касательной $y'(x_0) = -\dfrac{3}{(x_0+4)^2}$ равен угловому коэффициенту данной прямой, т.е. числу -3 . Следовательно, $-\dfrac{3}{(x_0+4)^2} = -3$. Отсюда $\begin{cases} x_0 = -5 \\ y(x_0) = \dfrac{3}{x_0+4} = -3 < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x_0 = -3 \\ y(x_0) = \dfrac{3}{x_0+4} = 3 > 0 \end{cases}$.
Первая пара значений не удовлетворяет условию задачи, вторая – удовлетворяет. Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$; $y = 3 - 3 \cdot (x + 3)$; $y = -3x - 6$. *Ответ:* $y = -3x - 6$.

Пример 10. Прямая $y = 9x$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x + 16$. Найти координаты точки касания.

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Угловой коэффициент касательной $y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$ равен угловому коэффициенту данной прямой, т.е. числу 9 . Следовательно, $3x_0^2 - 3 = 9$. Отсюда $x_0 = \pm 2$. Так как данная прямая и данный график пересекаются в точке с абсциссой x_0 , то должно выполняться условие $9x_0 = x_0^3 - 3x_0 + 16$. Этому условию удовлетворяет лишь $x_0 = 2$. При этом $y(x_0) = x_0^3 - 3x_0 + 16 = 18$. *Ответ:* (2 ; 18) .

Пример 11. Пусть касательная к графику функции $y = x^3$, проведённая в точке с абсциссой $x_1 = 1$, параллельна касательной к графику функции $y = 2 \cdot \sqrt{x}$, проведённой в точке с абсциссой x_2 . Найти x_2 .

Решение. Обозначим $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$. Так как касательные параллельны, то соответствующие угловые коэффициенты равны, т.е. $y_1'(x_1) = y_2'(x_2)$. Имеем: $y_1'(x_1) = 3x_1^2 = 3$; $y_2'(x_2) = \dfrac{1}{\sqrt{x_2}}$. Следовательно, $\dfrac{1}{\sqrt{x_2}} = 3$, отсюда $x_2 = \dfrac{1}{9}$. *Ответ:* $\dfrac{1}{9}$.

Пример 12. Через точку $(5;3)$ проходят две касательные к графику функции $y=-2x^2+4x+1$. Найти сумму абсцисс точек касания.

Решение. Пусть x_0 – абсцисса какой-либо точки касания. Тогда $y(x_0)=-2x_0^2+4x_0+1$; $y'(x_0)=-4x_0+4$. Уравнение касательной: $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$; $y=-2x_0^2+4x_0+1+(-4x_0+4)(x-x_0)$. Поскольку касательная проходит через точку $(5;3)$, то в уравнение касательной можно подставить $x=5$, $y=3$. Получим $3=-2x_0^2+4x_0+1+(-4x_0+4)(5-x_0)$, отсюда $(x_0)_1=1$; $(x_0)_2=9$. Сумма этих значений равна 10 . *Ответ:* 10 .

Пример 13. Касательная к параболе $y=x^2+mx+4$ проходит через начало координат. Найти значение параметра m , при котором абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 6 .

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Тогда $y(x_0)=x_0^2+mx_0+4$; $y'(x_0)=2x_0+m$. Уравнение касательной: $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$; $y=x_0^2+mx_0+4+(2x_0+m)(x-x_0)$. Поскольку касательная проходит через начало координат, то в уравнение касательной можно подставить $x=0$, $y=0$. Получим $0=x_0^2+mx_0+4+(2x_0+m)(-x_0)$, отсюда $x_0=\pm 2$. Так как, по условию, $x_0>0$, то $x_0=2$. Ордината точки касания $y(x_0)=4+2m+4=6$. Отсюда $m=-1$. *Ответ:* -1 .

Пример 14. Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y=x^2-3x+2$ и $y=x^2-x+4$.

Решение. Обозначим $y_1(x)=x^2-3x+2$ и $y_2(x)=x^2-x+4$. Запишем уравнение общей касательной в виде $y=ax+b$. Пусть $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$ – точки касания, принадлежащие соответственно первой и второй параболе. Составим систему уравнений, из которой найдём a и b .

(1) $y_1=x_1^2-3x_1+2$ (точка $(x_1;y_1)$ принадлежит первой параболе) ;
(2) $y_2=x_2^2-x_2+4$ (точка $(x_2;y_2)$ принадлежит второй параболе) ;
(3) $y_1=ax_1+b$ (точка $(x_1;y_1)$ принадлежит прямой) ;
(4) $y_2=ax_2+b$ (точка $(x_2;y_2)$ принадлежит прямой) ;
(5) $2x_1-3=a$ (угловой коэффициент $y_1'(x_1)=a$) ;
(6) $2x_2-1=a$ (угловой коэффициент $y_2'(x_2)=a$) .

Приравняем правые части уравнений (1) и (3) , а также правые части уравнений (2) и (4) . Получим: $\begin{cases} ax_1+b=x_1^2-3x_1+2 \\ ax_2+b=x_2^2-x_2+4 \end{cases}$.

Из уравнений (5) и (6) выразим $x_1 = \dfrac{a+3}{2}$ и $x_2 = \dfrac{a+1}{2}$. Подставим эти значения в предыдущую систему: $\begin{cases} a \cdot \dfrac{a+3}{2} + b = \left(\dfrac{a+3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \dfrac{a+3}{2} + 2 \\ a \cdot \dfrac{a+1}{2} + b = \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2 - \dfrac{a+1}{2} + 4 \end{cases}$.

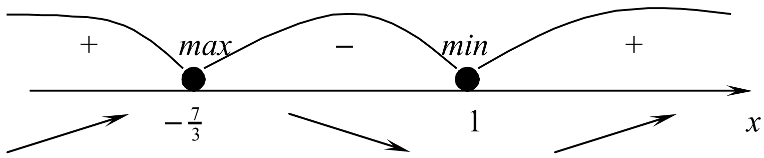
После упрощений получим: $\begin{cases} b = \dfrac{-a^2 - 6a - 1}{4} \\ b = \dfrac{-a^2 - 2a + 15}{4} \end{cases}$. Отсюда $\begin{cases} a = -4 \\ b = \dfrac{7}{4} \end{cases}$.

Уравнение общей касательной: $y = ax + b$; $y = -4x + \dfrac{7}{4}$. *Ответ:* $y = -4x + \dfrac{7}{4}$.

<u>*Пример 15.*</u> К графику функции $y = x^3 + 2x^2 - 7x - 7$ в точке минимума проведена касательная. Найти точки её пересечения с графиком.

Решение. Вычислим производную, приравняем её к нулю, найдём критические точки, а также промежутки возрастания и убывания данной функции.

$y'(x) = \left(x^3 + 2x^2 - 7x - 7\right)' = 3x^2 + 4x - 7 = 0$ при $x_1 = 1$ или при $x_2 = -\frac{7}{3}$.



$y(x_1) = y(1) = -11$; $y'(x_1) = 0$. Уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_1 = 1$: $y = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1)$, т.е. $y = -11$.

Для нахождения точек пересечения касательной и графика нужно решить систему уравнений $\begin{cases} y = x^3 + 2x^2 - 7x - 7 \\ y = -11 \end{cases}$. Её решения: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -11 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -11 \end{cases}$.

Ответ: $(1; -11)$; $(-4; -11)$.

<u>*Пример 16.*</u> К графику функции $y = x^3 - 2$ из начала координат проведена касательная. Найти абсциссы точек пересечения касательной и графика.

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания.

Тогда $y(x_0) = x_0^3 - 2$; $y'(x) = \left(x^3 - 2\right)' = 3x^2$; $y'(x_0) = 3x_0^2$.

Уравнение касательной: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$; $y = x_0^3 - 2 + 3x_0^2(x - x_0)$.

Так как касательная проходит через начало координат, то в последнее уравнение можно подставить $x = 0$ и $y = 0$. Получим $0 = x_0^3 - 2 + 3x_0^2(0 - x_0)$. Отсюда $x_0 = -1$. Тогда $y(x_0) = -3$; $y'(x_0) = 3$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y=-3+3(x+1)$, т.е. $y=3x$. Для нахождения абсцисс точек пересечения касательной и графика нужно решить систему $\begin{cases} y=x^3-2 \\ y=3x \end{cases}$. Её решения: $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=-3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=2 \\ y_2=6 \end{cases}$. В ответ следует записать абсциссы полученных точек. *Ответ:* -1 ; 2.

<u>*Пример 17.*</u> К графику функции $y=\dfrac{3}{x^2}-1$ из начала координат проведена касательная с положительным угловым коэффициентом. Найти точки её пересечения с графиком.

Решение. Пусть x_0 – абсцисса точки касания.

Тогда $y(x_0)=\dfrac{3}{x_0^2}-1$; $y'(x)=\left(\dfrac{3}{x^2}-1\right)'=-\dfrac{6}{x^3}$; $y'(x_0)=-\dfrac{6}{x_0^3}$.

Уравнение касательной: $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$; $y=\dfrac{3}{x_0^2}-1-\dfrac{6}{x_0^3}(x-x_0)$.

Так как касательная проходит через начало координат, то в последнее уравнение можно подставить $x=0$ и $y=0$. Получим $0=\dfrac{3}{x_0^2}-1-\dfrac{6}{x_0^3}(0-x_0)$. Отсюда $x_0=\pm 3$. Так как касательная имеет, по условию, положительный угловой коэффициент, то $y'(x_0)=-\dfrac{6}{x_0^3}>0$. Этому условию удовлетворяет лишь $x_0=-3$.

При этом $y(x_0)=\dfrac{3}{x_0^2}-1=\dfrac{3}{(-3)^2}-1=-\dfrac{2}{3}$; $y'(x_0)=-\dfrac{6}{x_0^3}=-\dfrac{6}{(-3)^3}=\dfrac{2}{9}$ . .

Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{9}(x+3)$, т.е. $y=\dfrac{2}{9}x$.

Для нахождения точек пересечения касательной и графика нужно решить систему уравнений $\begin{cases} y=\dfrac{3}{x^2}-1 \\ y=\dfrac{2}{9}x \end{cases}$. Её решения: $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2=\dfrac{3}{2} \\ y_2=\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Ответ: $\left(-3\,;-\dfrac{2}{3}\right)$; $\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{1}{3}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти производную функции $y=3\,\mathrm{tg}^2\,4x-e^{\cos 8x}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{16}$.
2. Найти критические точки функции $y=-2{,}4x^5+20x^3-6$, интервалы и промежутки возрастания и убывания, а также значения функции во всех критических точках.

3. Найти критические точки функции $y = -\ln(x+5) - \dfrac{1}{x-1}$, интервалы и промежутки возрастания и убывания, а также значения функции во всех критических точках.
4. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}$ на отрезке $[-6; -1]$.
5. Написать уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{x} - 1$ в точке его пересечения с осью абсцисс.
6. В точке с абсциссой $x_0 = -2$ проведена касательная к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 2x - 3 + \dfrac{2}{x+1}$. Найти абсциссу точки касательной, ордината которой равна -5 .
7. В точке пересечения графика функции $y = xe^x$ с осью абсцисс проведена касательная. Какой угол она образует с осью Ox ?
8. В какой точке пересекает ось абсцисс касательная к графику функции $y = 12 \cdot 2^{x-4}$ с угловым коэффициентом $k = 3 \cdot \ln 2$?
9. Написать уравнение касательной к графику функции $y = -\dfrac{27}{x-1}$ в точке с отрицательной абсциссой, где эта касательная параллельна прямой $y = 3x + 20$.
10. Прямая $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{32}$ является касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{2}x^4 - x$. Найти координаты точки касания.
11. Пусть касательная к графику функции $y = \operatorname{tg} x$, проведённая в точке с абсциссой $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, параллельна касательной к графику функции $y = e^x$, проведённой в точке с абсциссой x_2 . Найти x_2 .
12. Через точку $(-1{,}5; 3)$ проходят две касательные к графику функции $y = -0{,}5x^2 + 2x + 1$. Найти сумму абсцисс точек касания.
13. Касательная к параболе $y = x^2 - mx + 9$ проходит через начало координат. Найти значение параметра m , при котором абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 3 .
14. Составить уравнение общей касательной к графикам функций $y = x^2 + 4x + 8$ и $y = x^2 + 8x + 4$.
15. К графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ в точке максимума проведена касательная. Найти точки её пересечения с графиком.
16. К графику функции $y = 1 - 4x^3$ из начала координат проведена касательная. Найти абсциссы точек пересечения касательной и графика.
17. К графику функции $y = \dfrac{9}{x^2} - 3$ из начала координат проведена касательная с положительным угловым коэффициентом. Найти точки её пересечения с графиком.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Исследование квадратного трёхчлена $y = Ax^2 + Bx + C$.

При решении конкретных задач *нужно особо рассматривать* случай $A = 0$.
Далее мы предполагаем, что $A \neq 0$.

Графиком функции $y = Ax^2 + Bx + C$ является парабола, вершина которой находится в точке $\left(-\dfrac{B}{2A}; -\dfrac{D}{4A} \right)$, где $D = B^2 - 4AC$ – дискриминант.

Парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ не имеет общих точек с осью Ox (или уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ не имеет действительных корней) , если $D < 0$.

Парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ имеет одну общую точку с осью Ox (или уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ имеет единственный действительный корень, или квадратный трёхчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ можно представить в виде полного квадрата), если $D = 0$.

Парабола $y = Ax^2 + Bx + C$ имеет две общие точки с осью Ox (или уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$ имеет два действительных корня), если $D > 0$.

График квадратного трёхчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ лежит выше оси абсцисс (или квадратный трёхчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ принимает только положительные значения, или неравенство $Ax^2 + Bx + C > 0$ выполнено для любого x) , если $\begin{cases} A > 0 \\ D < 0 \end{cases}$.

График квадратного трёхчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ лежит не ниже оси абсцисс (или квадратный трёхчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ не принимает отрицательных значений, или неравенство $Ax^2 + Bx + C \geq 0$ выполнено для любого x) , если $\begin{cases} A > 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$.

График квадратного трёхчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ лежит ниже оси абсцисс (или квадратный трёхчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ принимает только отрицательные значения, или неравенство $Ax^2 + Bx + C < 0$ выполнено для любого x) , если $\begin{cases} A < 0 \\ D < 0 \end{cases}$.

График квадратного трёхчлена $y = Ax^2 + Bx + C$ лежит не выше оси абсцисс (или квадратный трёхчлен $y = Ax^2 + Bx + C$ не принимает положительных значений, или неравенство $Ax^2 + Bx + C \leq 0$ выполнено для любого x) , если $\begin{cases} A < 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$.

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$.
Обозначим $f(x) = x^2 + px + q$; $D = p^2 - 4q$ – дискриминант.

1) При каких значениях параметров уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, меньшие данного значения x_0 ? Ответ на этот вопрос следующий:

$$\begin{cases} D \ge 0 & \text{(существование корней) ;} \\ -\dfrac{p}{2} < x_0 & \text{(абсцисса вершины параболы } y = f(x) \text{ находится слева от } x_0 \text{) ;} \\ f(x_0) > 0 \text{ .} \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D \ge 0$ следует писать $D > 0$.

2) При каких значениях параметров уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, большие данного значения x_0 ? Ответ на этот вопрос следующий:

$$\begin{cases} D \ge 0 & \text{(существование корней) ;} \\ -\dfrac{p}{2} > x_0 & \text{(абсцисса вершины параболы } y = f(x) \text{ находится справа от } x_0 \text{);} \\ f(x_0) > 0 \text{ .} \end{cases}$$

Замечание. Если в условии задачи явно написано, что уравнение имеет два корня, то вместо $D \ge 0$ следует писать $D > 0$.

3) При каких значениях параметров уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни, один из которых больше, а другой меньше, чем x_0 ? Ответ на этот вопрос следующий: $f(x_0) < 0$.

<u>*Пример 1.*</u> Найти количество целых значений параметра a , при которых абсцисса вершины параболы $y = x^2 - 4ax + 3a^2 - 4a + 12$ отрицательна, а ордината положительна.

Решение. Используем обозначения и сведения, указанные на стр. 69. Имеем:
$A = 1$; $B = -4a$; $C = 3a^2 - 4a + 12$; $D = 16a^2 - 4 \cdot (3a^2 - 4a + 12) = 4a^2 + 16a - 48$.

Система неравенств $\begin{cases} -\frac{B}{2A} = 2a < 0 \\ -\frac{D}{4A} = -a^2 - 4a + 12 > 0 \end{cases}$ имеет решения $a \in (-6 ; 0)$.

Целые решения: -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 . Их количество равно 5 . *Ответ:* 5 .

<u>*Пример 2.*</u> При каких значениях a квадратный квадратный трёхчлен $y = x^2 - (2a + 1)x + a^2 + 2$ можно представить в виде полного квадрата ?

Решение. Приравняем к нулю дискриминант: $D = (2a + 1)^2 - 4 \cdot (a^2 + 2) = 4a - 7 = 0$.

Отсюда $a = \dfrac{7}{4}$. *Ответ:* $\dfrac{7}{4}$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = a(4-a)x^2 + 2ax + 1$ не имеет общих точек с осью Ox.

Решение. I) Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т.е. $a(4-a) = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$.

При $a = 0$ получим функцию $y = 1$. График этой функции не имеет общих точек с осью Ox , что соответствует условию задачи. Следовательно, $a = 0$ нужно включить в ответ.

При $a = 4$ получим функцию $y = 8x + 1$. График этой функции имеет одну общую точку с осью Ox , что не соответствует условию задачи. Следовательно, $a \neq 4$.

II) Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a \neq 0$, $a \neq 4$. Тогда графиком данной функции является парабола. Так как она не имеет общих точек с осью Ox , то дискриминант $D = 4a^2 - 4a(4-a) < 0$. Следовательно, $a \in (\ 0\ ;2\ )$. *Ответ:* $[\ 0\ ;2\ )$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a+2)x^2 + 4x + 3 - a$ имеет с осью Ox только одну общую точку.

Решение. I) Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т.е. $a = -2$. Тогда получим функцию $y = 4x + 5$. График этой функции имеет одну общую точку с осью Ox , что соответствует условию задачи. Следовательно, $a = -2$ нужно включить в ответ.

II) Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a \neq -2$. Тогда графиком данной функции является парабола. Так как она имеет с осью Ox только одну общую точку, то дискриминант $D = 16 - 4 \cdot (a+2)(3-a) = 0$. Следовательно, $a = -1$ или $a = 2$. *Ответ:* $-1\ ; \pm 2$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = a(a+1)x^2 + 2(a+1)x - a - 1$ имеет с осью Ox более одной общей точки.

Решение. I) Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т.е. $a(a+1) = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = -1$.

При $a = 0$ получим функцию $y = 2x - 1$. График этой функции имеет одну общую точку с осью Ox , что не соответствует условию задачи. Следовательно, $a \neq 0$.

При $a = -1$ получим функцию $y = 0$. График этой функции совпадает с осью Ox , т.е. имеет с осью Ox бесконечно много общих точек, что соответствует условию задачи. Следовательно, $a = -1$ нужно включить в ответ.

II) Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a \neq 0$, $a \neq -1$. Тогда графиком данной функции является парабола. Так как она имеет более одной общей точки с осью Ox (точнее , две общие точки) , то дискриминант $D = 4(a+1)^2 - 4a(a+1)(-a-1) = 4(a+1)^3 > 0$. Следовательно, $a \in (\ -1\ ; +\infty\ )$. *Ответ:* $[\ -1\ ; 0\ ) \cup (\ 0\ ; +\infty\ )$.

Пример 6. Найти все значения параметра a, при которых для любого значения x выполнено неравенство $(a^2-1)x^2+4(a-1)x+1>0$.

Решение. I) Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т.е. $a^2-1=0$. Отсюда $a=1$ или $a=-1$.

При $a=1$ получим неравенство $0x^2+0x+1>0$, которое является истинным для любого значения x, что соответствует условию задачи. Следовательно, $a=1$ нужно включить в ответ.

При $a=-1$ получим неравенство $-8x+1>0$, которое является истинным не для любого значения x, что не соответствует условию задачи. Следовательно, $a\neq-1$.

II) Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a\neq1$, $a\neq-1$. Тогда нужно решить систему неравенств (см. стр. 69) :

$\begin{cases} A=a^2-1>0 \\ D=16(a-1)^2-4(a^2-1)<0 \end{cases}$. Отсюда следует, что $a\in\left(1;\dfrac{5}{3}\right)$. *Ответ:* $\left[1;\dfrac{5}{3}\right)$.

Пример 7. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+3)x^2+4x+2-a=0$ имеет только отрицательные корни.

Решение. I) Допустим, что коэффициент при x^2 равен нулю, т.е. $a=-3$. Тогда получим уравнение $4x+5=0$, корень которого $x=-1{,}25<0$, что соответствует условию задачи. Следовательно, $a=-3$ нужно включить в ответ.

II) Допустим, что коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a\neq-3$. Разделим уравнение на $a+3$ и введём обозначения:

$f(x)=x^2+\dfrac{4}{a+3}\cdot x+\dfrac{2-a}{a+3}=0$; $p=\dfrac{4}{a+3}$; $q=\dfrac{2-a}{a+3}$; $x_0=0$;

$D=p^2-4q=\dfrac{4a^2+4a-8}{(a+3)^2}$. Согласно изложенному на стр. 70 , нужно решить

систему $\begin{cases} D\geq0 \\ -\dfrac{p}{2}<x_0 \\ f(x_0)>0 \end{cases}$, т.е. $\begin{cases} \dfrac{4a^2+4a-8}{(a+3)^2}\geq0 \\ -\dfrac{2}{a+3}<0 \\ f(0)=\dfrac{2-a}{a+3}>0 \end{cases}$. Отсюда $a\in(-3;-2\,]\cup[\,1;2\,)$.

Ответ: $[-3;-2\,]\cup[\,1;2\,)$.

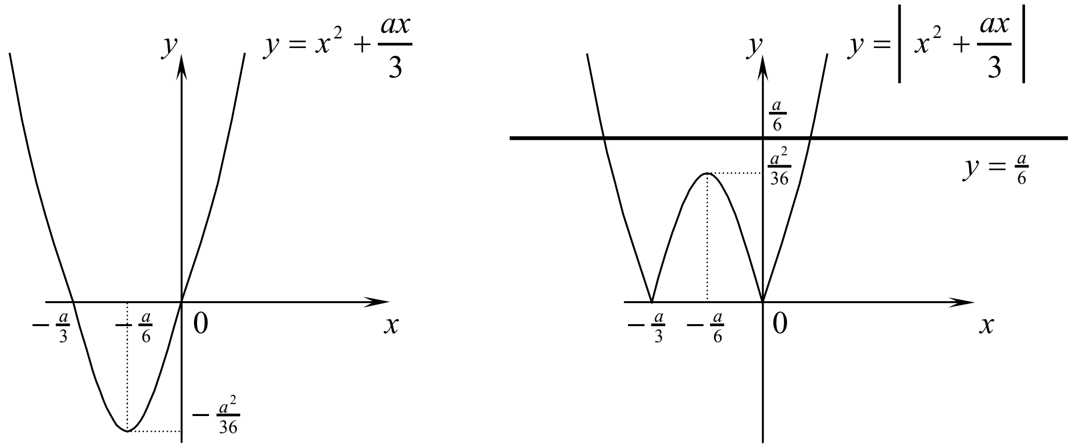
Пример 8. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2-6x+a-8=0$ больше, а другой меньше, чем 2 .

Решение. Так как уравнение имеет два корня, то коэффициент при x^2 не равен нулю, т.е. $a\neq0$. Разделим уравнение на a и обозначим:

$f(x)=x^2-\dfrac{6}{a}\cdot x+\dfrac{a-8}{a}=0$; $x_0=2$. Согласно изложенному на стр. 70 , нужно решить неравенство $f(x_0)=f(2)=4-\dfrac{12}{a}+\dfrac{a-8}{a}<0$. *Ответ:* $(0;4)$.

Пример 9. Найти все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y = \left| x^2 + \frac{ax}{3} \right|$ и $y = \frac{a}{6}$ имеют только две общие точки.

Решение. Графиком функции $y = x^2 + \frac{ax}{3}$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Вершина параболы находится в точке $\left(-\frac{a}{6} ; -\frac{a^2}{36} \right)$. Для того, чтобы найти точки пересечения параболы с осью Ox, нужно решить уравнение $x^2 + \frac{ax}{3} = 0$, из которого следует, что $x = 0$ или $x = -\frac{a}{3}$. Воспользуемся следующим общим соображением: если известен график функции $y = f(x)$, то для построения графика функции $y = |f(x)|$ нужно поступить так: ту часть графика, которая располагается выше оси Ox, оставить без изменения, а ту часть графика, которая располагается ниже оси Ox, симметрично отразить относительно оси Ox.



Так как, по условию, данные графики должны пересекаться ровно в двух точках, то прямая $y = \frac{a}{6}$ должна располагаться на более высоком уровне, чем $\frac{a^2}{36}$ (см. правый рисунок) . Следовательно, мы получаем неравенство $\frac{a}{6} > \frac{a^2}{36}$, из которого следует, что $a \in (0 ; 6)$. *Ответ:* $(0 ; 6)$.

Пример 10. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y = \frac{|x-7|}{x-7}$ и $y = |x + a|$ имеют одну общую точку.

Решение. I) Построим график функции $y = \frac{|x-7|}{x-7}$. *ОДЗ*: $x \neq 7$.

Если $x - 7 > 0$, т.е. $x > 7$, то $y = \frac{x-7}{x-7} = 1$.

Если $x-7<0$, т.е. $x<7$, то $y=\dfrac{-(x-7)}{x-7}=-1$.

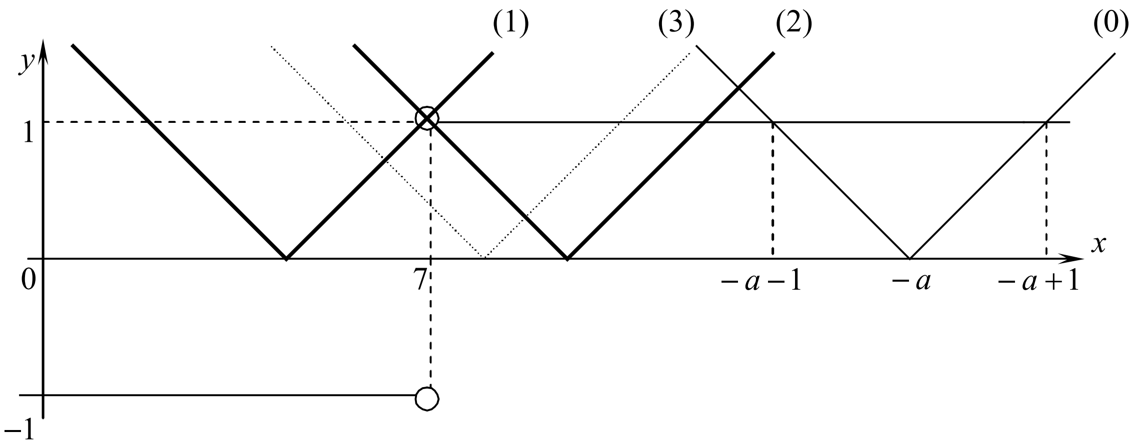
График функции $y=\dfrac{|x-7|}{x-7}$ состоит из двух горизонтальных сплошных полупрямых с выколотыми точками, как показано на рисунке.

II) Построим графики функции $y=|x+a|$ при различных значениях a .

Графиком функции $y=x+a$ является прямая, пересекающая ось Ox в точке $(-a\,;0)$. Для построения графика функции $y=|x+a|$ нужно ту часть прямой $y=x+a$, которая располагается выше оси Ox , оставить без изменения, а ту часть прямой $y=x+a$, которая располагается ниже оси Ox , симметрично отразить относительно оси Ox . В результате получится ломаная линия, обозначенная на рисунке символом (0) . При изменении параметра a эта линия перемещается параллельно оси Ox .

III) Найдём абсциссы точек пересечения линий $y=|x+a|$ и $y=1$.

Из того, что $|x+a|=1$, следует: $x+a=\pm 1$, $x=-a-1$ или $x=-a+1$.



Ломаная сплошная жирная линия (1) не пересекает график функции $y=\dfrac{|x-7|}{x-7}$, так как она проходит через выколотую точку. Для линии (1) имеем: $-a+1=7$, т.е. $a=-6$.

Ломаная сплошная жирная линия (2) пересекает график функции $y=\dfrac{|x-7|}{x-7}$ ровно в одной точке. Для линии (2) имеем: $-a-1=7$, т.е. $a=-8$.

Ясно, что графики, данные в условии задачи, имеют ровно одну общую точку в том и только в том случае, когда график функции $y=|x+a|$ занимает положение (3) , находясь «между» линиями (1) и (2) . При этом параметр a находится между значениями -6 и -8 . Уточним: параметр a не может принять значение -6 (не допускается, чтобы линия (3) совпала с линией (1)) ; параметр a может принять значение -8 (допускается, чтобы линия (3) совпала с линией (2)).

Ответ: $[-8\,;-6\,)$.

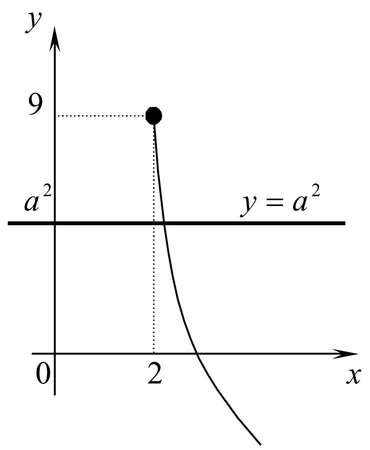
Пример 11. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{18-a^2x}=x-2$ имеет единственное решение.

Решение. Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной. Отсюда возникает дополнительное условие: $x-2\ge 0$ т.е. $x\ge 2$. Данное уравнение возведём в квадрат, а затем преобразуем таким образом, чтобы в левой части осталась только буква "*a*", а в правой – только буква "*x*": $18-a^2x=x^2-4x+4$; $-a^2x=x^2-4x-14$; $a^2=-x+4+\frac{14}{x}$.

Построим графики функций $y=-x+4+\frac{14}{x}$ и $y=a^2$ при $x\ge 2$.

Функция $y(x)=-x+4+\frac{14}{x}$ определена при всех $x\in[\,2\,;+\infty\,)$. $y(2)=9$.

$y'=-1-\frac{14}{x^2}<0$, следовательно, функция убывает. Если x стремится к $+\infty$, то $y(x)$ стремится к $-\infty$. Для того, чтобы это понять, подсчитайте значения $y(100)$, $y(1000)$, $y(10000)$ и т.д. Исходя из этих соображений, можно схематично построить график функции $y(x)$.



Уравнение, данное в условии задачи, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y=a^2$ и график функции $y(x)$ пересекаются в единственной точке. Следовательно, прямая $y=a^2$ должна располагаться на уровне *не выше* 9. Таким образом, мы должны решить неравенство $a^2\le 9$. Отсюда $a\in[\,-3\,;3\,]$.

Ответ: $[\,-3\,;3\,]$.

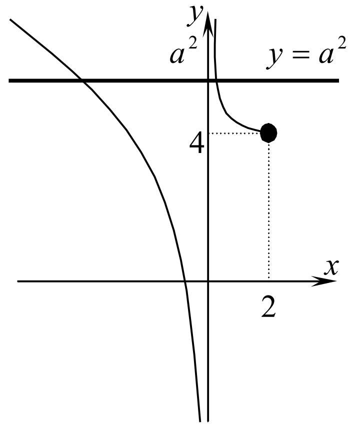
Пример 12. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{16-2a^2x}=2-x$ имеет два различных корня.

Решение. Так как левая часть данного уравнения неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной. Отсюда возникает дополнительное условие: $2-x\ge 0$ т.е. $x\le 2$. Данное уравнение возведём в квадрат, а затем преобразуем таким образом, чтобы в левой части осталась только буква "*a*", а в правой – только буква "*x*": $16-2a^2x=4-4x+x^2$; $-2a^2x=-12-4x+x^2$; $a^2=\frac{6}{x}+2-\frac{x}{2}$. Построим графики функций $y=\frac{6}{x}+2-\frac{x}{2}$ и $y=a^2$ при $x\le 2$.

Функция $y(x)=\frac{6}{x}+2-\frac{x}{2}$ определена при $x\in(\,-\infty\,;0\,)\cup(\,0\,;2\,]$. $y(2)=4$.

$y'=-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{2}<0$, следовательно, функция убывает на любом из промежутков $(\,-\infty\,;0\,)$ и $(\,0\,;2\,]$. Подсчитав значения $y(-100)$; $y(-1000)$; $y(-10000)$

и т.д. , нетрудно убедиться в том, что если x стремится к $-\infty$, то $y(x)$ стремится к $+\infty$. Подсчитав значения $y(-0{,}01)$; $y(-0{,}001)$; $y(-0{,}0001)$ и т.д. , нетрудно убедиться в том, что если x стремится к нулю слева (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом меньше 0) , то $y(x)$ стремится к $-\infty$. Подсчитав значения $y(0{,}01)$; $y(0{,}001)$; $y(0{,}0001)$ и т.д. , нетрудно убедиться в том, что если x стремится к нулю справа (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом больше 0) , то $y(x)$ стремится к $+\infty$. Исходя из этих соображений, можно схематично построить график функции $y(x)$.

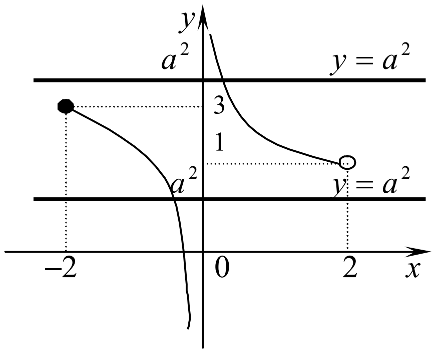


Уравнение, данное в условии задачи, имеет два различных корня тогда и только тогда, когда прямая $y = a^2$ и график функции $y(x)$ пересекаются в двух точках. Это возможно лишь в том случае, когда прямая $y = a^2$ располагается на уровне *не ниже* 4 . Таким образом, мы должны решить неравенство $a^2 \geq 4$. Отсюда $a \in (-\infty\,;-2\,] \cup [\,2\,;+\infty\,)$.

Ответ: $(-\infty\,;-2\,] \cup [\,2\,;+\infty\,)$.

<u>*Пример 13.*</u> Найти все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 + (a^2-2)x - 2 = 0$ имеет единственный корень на промежутке $[-2\,;2\,)$.

Решение. Преобразуем уравнение таким образом, чтобы в левой части осталась только буква “a” , а в правой – только буква “x” : $(a^2-2)x = 2 - x^2$; $a^2 - 2 = \dfrac{2}{x} - x$; $a^2 = \dfrac{2}{x} - x + 2$. Построим графики функций $y = \dfrac{2}{x} - x + 2$ и $y = a^2$ при $x \in [-2\,;2\,)$. Функция $y(x) = \dfrac{2}{x} - x + 2$ определена при $x \in [-2\,;0\,) \cup (\,0\,;2\,)$. $y(-2) = 3$, $y(2) = 1$. $y' = -\dfrac{2}{x^2} - 1 < 0$, следовательно, функция убывает на любом из промежутков $[-2\,;0\,)$ и $(\,0\,;2\,)$. Подсчитав значения $y(-0{,}01)$; $y(-0{,}001)$; $y(-0{,}0001)$ и т.д. , нетрудно убедиться в том, что если x стремится к нулю слева (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом меньше 0) , то $y(x)$ стремится к $-\infty$. Подсчитав значения $y(0{,}01)$; $y(0{,}001)$; $y(0{,}0001)$ и т.д. , нетрудно убедиться в том, что если x стремится к нулю справа (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом больше 0), то $y(x)$ стремится к $+\infty$. Исходя из этих соображений, можно схематично построить график функции $y(x)$. Из графика ясно, что требуемые значения a удовлетворяют неравенствам: $a^2 > 3$ или $a^2 \leq 1$.



Ответ: $(-\infty\,;-\sqrt{3}\,) \cup [-1\,;1\,] \cup (\sqrt{3}\,;+\infty\,)$.

Пример 14. При каких значениях параметра a уравнение $x^4 - 3ax + 3 = 0$ имеет два положительных корня ?

Решение. Из данного уравнения выразим параметр a : $3ax = x^4 + 3$; $a = \frac{x^4}{3x} + \frac{3}{3x}$; $a = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$. Так как уравнение, по условию, должно иметь два положительных корня, то графики функций $y = a\,(= Const)$ и $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$ должны пересекаться ровно в двух точках при положительных x .

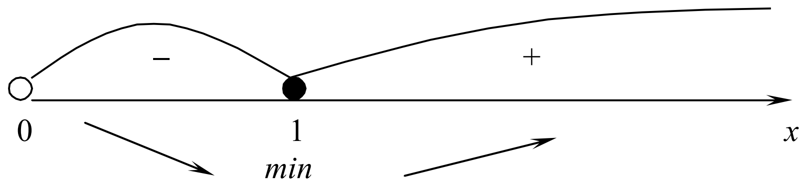
Обозначим $y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$. Заметим, что функция $y(x)$ не определена при $x = 0$.

Схематично построим график этой функции при положительных x .

В этих целях мы исследуем функцию с помощью производной на возрастание и убывание , наличие критических точек, а также выясним поведение функции на границах её области определения (с учётом того, при каких x следует строить график в условиях конкретной задачи) .

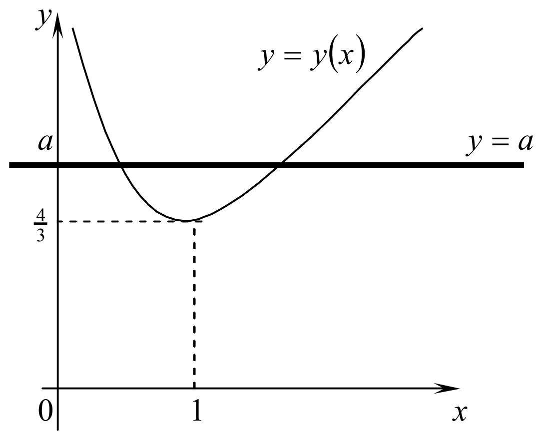
$y'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 1}{x^2}$. $y'(x) = 0$ при $x^4 - 1 = 0$, т.е. при $x = 1$.

На рисунке расставим знаки производной, укажем промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$ и тип критической точки.



$y_{\min} = y(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1}{1} = \frac{4}{3}$. Если x стремится к нулю справа (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом больше нуля) , то, после подсчёта значений типа $y(0{,}1)$, $y(0{,}01)$, $y(0{,}001)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $+\infty$.

Если x стремится к $+\infty$, то, после подсчёта значений типа $y(10)$, $y(100)$, $y(1000)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $+\infty$.



Линии $y = y(x)$ (тонкая кривая линия) и $y = a$ (жирная прямая линия) пересекаются в двух точках в точности тогда, когда прямая $y = a$ находится на уровне выше $\frac{4}{3}$, т.е. когда $a > \frac{4}{3}$. Другими словами, $a \in \left(\frac{4}{3}\,; +\infty\right)$

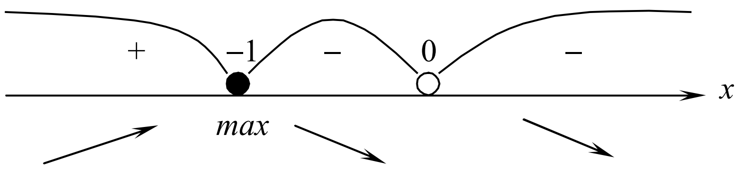
Ответ: $\left(\frac{4}{3}\,; +\infty\right)$.

Пример 15. При каких значениях параметра a уравнение $x^3+6ax-2=0$ имеет три различных корня ?

Решение. Из данного уравнения выразим параметр a : $6ax=2-x^3$; $a=\frac{2}{6x}-\frac{x^3}{6x}$; $a=\frac{1}{3x}-\frac{x^2}{6}$. Так как уравнение, по условию, должно иметь три различных корня, то графики функций $y=a\ (=Const)$ и $y=\frac{1}{3x}-\frac{x^2}{6}$ должны пересекаться ровно в трёх точках. Обозначим $y(x)=\frac{1}{3x}-\frac{x^2}{6}$. Заметим, что функция $y(x)$ не определена при $x=0$. Схематично построим график этой функции на всей числовой оси.

$y'(x)=-\frac{1}{3x^2}-\frac{x}{3}=\frac{-1-x^3}{3x^2}$. $y'(x)=0$ при $-1-x^3=0$, т.е. при $x=-1$.

На рисунке расставим знаки производной, укажем промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$ и тип критической точки.



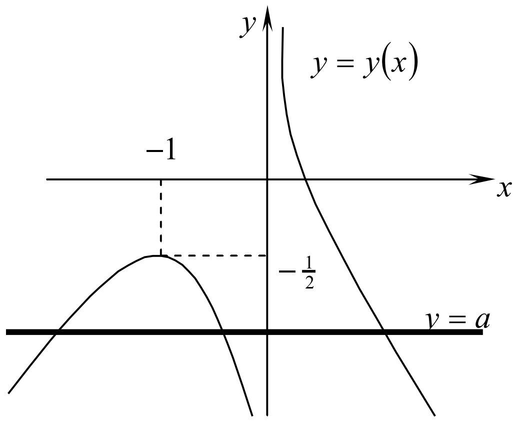
$y_{\max}=y(-1)=-\frac{1}{2}$.

Если x стремится к $-\infty$, то, после подсчёта значений типа $y(-10)$, $y(-100)$, $y(-1000)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $-\infty$.

Если x стремится к нулю слева (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом меньше нуля) , то, после подсчёта значений типа $y(-0{,}1)$, $y(-0{,}01)$, $y(-0{,}001)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $-\infty$.

Если x стремится к нулю справа (т.е. x стремится к нулю, оставаясь при этом больше нуля) , то, после подсчёта значений типа $y(0{,}1)$, $y(0{,}01)$, $y(0{,}001)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $+\infty$.

Если x стремится к $+\infty$, то, после подсчёта значений типа $y(10)$, $y(100)$, $y(1000)$ и т.д. легко убедиться в том, что $y(x)$ стремится к $-\infty$.



Линии $y=y(x)$ (тонкая кривая линия) и $y=a$ (жирная прямая линия) пересекаются в трёх точках в точности тогда, когда прямая $y=a$ находится на уровне ниже $-\frac{1}{2}$, т.е. когда $a<-\frac{1}{2}$. Другими словами, $a\in\left(-\infty\,;-\frac{1}{2}\right)$.

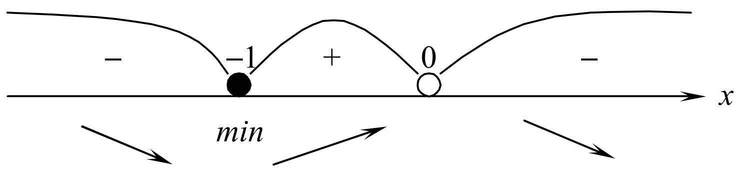
Ответ: $\left(-\infty\,;-\frac{1}{2}\right)$.

<u>Пример 16.</u> При каких значениях параметра a уравнение $ax^4 - 4x^3 - 1 = 0$ имеет единственный корень ?

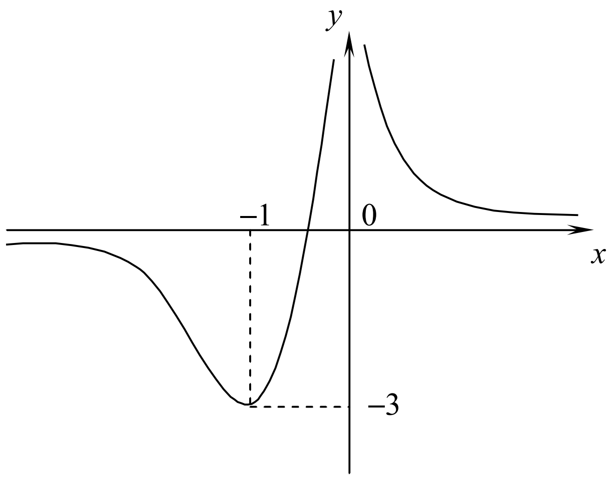
Решение. Из данного уравнения выразим параметр a : $a = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$. Так как уравнение, по условию, должно иметь единственный корень, то графики функций $y = a\ (= Const)$ и $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$ должны пересекаться ровно в одной точке. Обозначим $y(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$. Заметим, что функция $y(x)$ не определена при $x = 0$. Схематично построим график этой функции на всей числовой оси.

$y'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^5} = \frac{-4x^3 - 4}{x^5}$. $y'(x) = 0$ при $-4x^3 - 4 = 0$, т.е. при $x = -1$.

На рисунке расставим знаки производной, укажем промежутки возрастания и убывания функции $y(x)$ и тип критической точки.



$y_{\min} = y(-1) = -3$. Если x стремится к $-\infty$, то $y(x)$ стремится к 0 .
Если x стремится к нулю слева, то $y(x)$ стремится к $+\infty$.
Если x стремится к нулю справа, то $y(x)$ стремится к $+\infty$.
Если x стремится к $+\infty$, то $y(x)$ стремится к 0 .



Линии $y = y(x)$ и $y = a$ пересекаются в единственной точке в точности тогда, когда прямая $y = a$ находится на уровне 0 или -3 . Другими словами, $a = 0$ или $a = -3$.

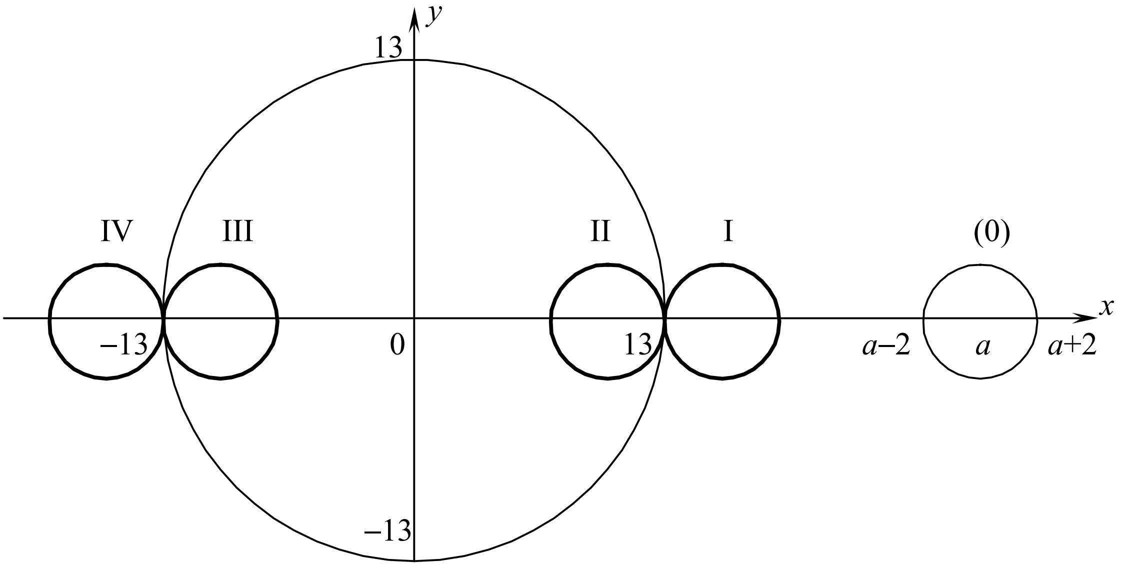
Ответ: $0 ; -3$.

Пример 17. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение ?

Решение. Первое уравнение данной системы – это уравнение окружности радиуса 13 с центром в точке $(0;0)$, второе уравнение данной системы – это уравнение окружности радиуса 2 с центром в точке $(a;0)$ (положение (0)) . Заметим, что при изменении параметра a большая окружность остаётся неизменной (её уравнение не зависит от a) , а маленькая окружность перемещается параллельно оси Ox . Крайняя левая точка маленькой окружности имеет x-координату, равную $a-2$, а крайняя правая точка маленькой окружности имеет x-координату, равную $a+2$.



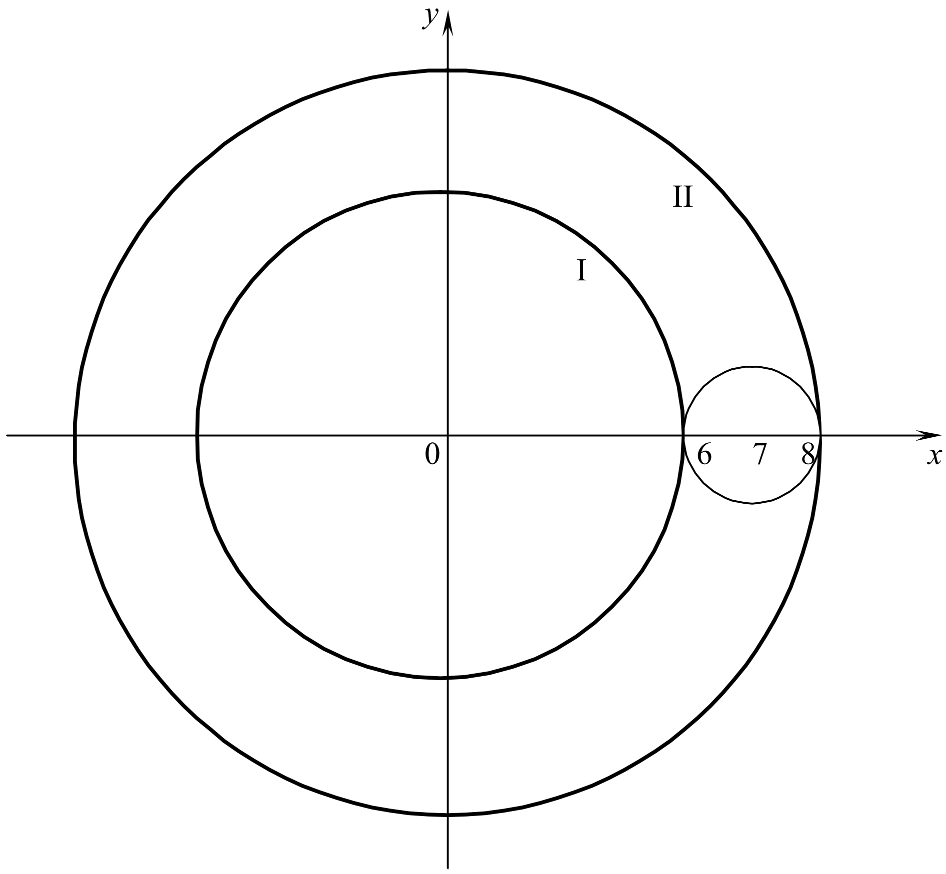
Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда большая и маленькая окружности пересекаются в единственной точке, а это возможно в следующих четырёх ситуациях:

I) левая точка маленькой окружности $a-2=13$, т.е. $a=15$ (положение I) ;
II) правая точка маленькой окружности $a+2=13$, т.е. $a=11$ (положение II) ;
III) левая точка маленькой окружности $a-2=-13$, т.е. $a=-11$ (положение III) ;
IV) правая точка маленькой окружности $a+2=-13$, т.е. $a=-15$ (положение IV) .

Ответ: ± 11 ; ± 15 .

Пример 18. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (x-7)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение ?

Решение. Первое уравнение данной системы – это уравнение окружности радиуса $\sqrt{a^2} = |a|$ с центром в точке $(0;0)$, второе уравнение данной системы – это уравнение окружности радиуса 1 с центром в точке $(7;0)$. Заметим, что при увеличении $|a|$ первая окружность «раздувается» , а вторая остаётся неизменной .



Данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда обе окружности пересекаются в единственной точке, а это возможно в следующих двух ситуациях:

I) первая окружность касается второй окружности в точке $(6\,;0)$; при этом $|a| = 6$; $a = \pm 6$ (положение I) ;

II) первая окружность касается второй окружности в точке $(8\,;0)$; при этом $|a| = 8$; $a = \pm 8$ (положение II) .

Ответ: ± 6 ; ± 8 .

<u>*Пример 19.*</u> Найти значение параметра a , при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax+8}{x} \le 2$ равно -8 .

Решение. Вместо неравенства рассмотрим уравнение $\frac{ax+8}{x} = 2$ и подставим в него значение $x = -8$. Получим $\frac{-8a+8}{-8} = 2$. Отсюда $a = 3$. Проверка показывает, что неравенство $\frac{3x+8}{x} \le 2$ имеет наименьшее решение $x = -8$

Ответ: 3 .

Задачи для самостоятельного решения

18. Найти количество целых значений параметра a, при которых абсцисса вершины параболы $y = x^2 - 16ax + 65a^2 - 8a + 15$ положительна, а ордината отрицательна.
19. При каких значениях a квадратный квадратный трёхчлен $y = x^2 + 2(a+1)x + 9a - 5$ можно представить в виде полного квадрата ?
20. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = a(a+1)x^2 + 2(a+1)x + 2$ не имеет общих точек с осью Ox.
21. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (2a+1)x^2 + 2(a-1)x + a + 1$ имеет с осью Ox только одну общую точку.
22. Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a+4)x^2 + 6x + a - 4$ имеет с осью Ox две общие точки.
23. Найти все значения параметра a, при которых квадратный трёхчлен $y = (a-1)x^2 + ax + a + 1$ не принимает отрицательных значений.
24. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 2(a-2)x + 1 = 0$ имеет только положительные корни.
25. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $(a+3)x^2 + 4x + 2 - a = 0$ больше, а другой меньше, чем -1 .
26. Найти все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y = \left| x^2 - 2ax \right|$ и $y = 3a$ имеют только две общие точки.
27. Найти все значения параметра a, при которых графики функций $y = \dfrac{|x+2|}{x+2}$ и $y = |x - a|$ имеют одну общую точку.
28. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{4 - a^2 x} = x - 1$ имеет единственное решение.
29. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{36 + 2a^2 x} = x + 2$ имеет два различных корня.
30. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + 2ax - 1 = 0$ имеет два различных корня на промежутке $(-3\,;1\,]$.
31. При каких значениях параметра a уравнение $27x^4 - ax + 16 = 0$ имеет два отрицательных корня ?
32. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - ax - 2 = 0$ имеет три различных корня ?
33. При каких значениях параметра a уравнение $ax^4 - 2x^3 + 4 = 0$ имеет единственный корень ?
34. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ (x-a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение ?
35. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 + (y+1)^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение ?
36. Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\dfrac{ax+8}{x} \geq -5$ равно -4 .

ВАРИАНТЫ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 1 / 2001

№	Задания	Ответы
А1	Дано: $\sqrt{3-t}-\sqrt{2-t}=1$. Вычислить $\sqrt{3-t}+\sqrt{2-t}$.	1
А2	Дано: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-4}$. Вычислить $f(x^2)-f(x+2)$.	$-\dfrac{5(x+1)}{x^2-4}$
А3	Найти сумму координат вершины параболы $y=x^2-4x+6$.	4
А4	Найти произведение корней уравнения $(x^2+x+1)(x^2+x-1)=3$.	–2
А5	Вычислить $2^{\log_4(\sqrt{3}-2)^2}+3^{\log_9(2+\sqrt{3})^2}$.	4
А6	Найти сумму корней уравнения $2^{x^2}+2^{x^2+3}-2^{x^2+1}=7\cdot 2^{5x+6}$.	5
А7	Найти произведение корней уравнения $\log^2_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{9}\right)+\log^2_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{3}\right)=1$.	27
А8	В арифметической прогрессии первый и девятый члены соответственно равны -6 и 10 . Найти сумму первых двенадцати членов прогрессии.	60
А9	Вычислить $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right)$.	$\dfrac{6\cdot\sqrt{61}}{61}$
А10	Вычислить $\dfrac{\cos 76^\circ-\cos 16^\circ}{1-2\sin^2 22^\circ}$.	–1
А11	Одна из сторон треугольника на 3 *см* меньше другой, высота делит третью сторону на отрезки длиной 5 *см* и 10 *см* . Найти периметр треугольника.	40
А12	Сфера проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 1 *см* , 2 *см* и 2 *см* . Найти объём шара, ограниченного этой сферой.	4,5π
Б1	Найти сумму корней уравнения $\left\|(x-1)^3-36\right\|=28$.	8
Б2	Найти число целых решений неравенства $\dfrac{x^2-9x+17}{(x-1)(x-3)}\le-\dfrac{1}{x-3}$.	2
Б3	Найти число целых решений неравенства $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}>1$.	1
Б4	Найти число целых решений неравенства $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6}<\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\pi}{6}\right)^{x^2-x-6}$.	4
Б5	Найти наименьшее целое решение неравенства $11^{\log_7 x}+x^{\log_7 11}\le 2\cdot x^{2\cdot\log_x 11}$.	2
Б6	Найти число решений уравнения $2\sin^2 x-5\cos x-4=0$, принадлежащих отрезку $\left[0;\frac{9\pi}{2}\right]$.	4
Б7	Найти сумму координат точки с положительной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x)=x^2-3x+4$ походит через начало координат.	4
Б8	Сколько точек $(x;y)$ с целыми координатами x , y лежат внутри прямоугольника с вершинами $A(1,5\;;\;1,5)$, $B(1,5\;;\;5,5)$, $C(5,5\;;\;5,5)$, $D(5,5\;;\;1,5)$?	16

Б9	$\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы. Найти $\left\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right\|$, если $\left\|\boldsymbol{a}\right\|=11$, $\left\|\boldsymbol{b}\right\|=23$, $\left\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right\|=30$.	20
Б10	Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\dfrac{ax+10}{x}\ge -3$ равно -5.	-1

Вариант № 9 / 2001

№	Задания	Ответы
А1	Дано: $\sqrt{11-t}-\sqrt{3-t}=1$. Вычислить $\sqrt{11-t}+\sqrt{3-t}$.	8
А2	Дано: $f(x)=\dfrac{5x-1}{x+3}$. Вычислить $f(x-5)-f(x-1)$.	$-\dfrac{64}{x^2-4}$
А3	Найти сумму координат вершины параболы $y=2x^2-8x+1$.	-5
А4	Найти произведение корней уравнения $x^3-4x^2-3x+12=0$.	-12
А5	Вычислить $125^{\log_5 \sqrt[3]{1+\sqrt{3}}}-5^{\log_{25}\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$.	2
А6	Найти произведение корней уравнения $2^{2\lvert x\rvert}-3\cdot 2^{\lvert x\rvert}-4=0$.	-4
А7	Найти произведение корней уравнения $\log_{0,5}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)+\log_{0,5}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)=1$.	8
А8	Третий и седьмой члены арифметической прогрессии соответственно равны 1,1 и 2,3. Найти шестнадцатый член прогрессии.	5
А9	Вычислить $\sin\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{7}{4}\right)$.	$\dfrac{4\cdot\sqrt{65}}{65}$
А10	Вычислить $2\sin 55^\circ\cos 10^\circ+2\sin^2 12^\circ 30'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.	$1+\sqrt{2}$
А11	В треугольнике две стороны равны 17 *см* и 25 *см*, высота делит третью сторону на отрезки, разность которых равна 12 *см*. Найти периметр треугольника.	70
А12	Диагональ куба равна 15 *см*. Найти площадь сферы, касающейся всех граней этого куба.	75π
Б1	Найти сумму корней уравнения $\left\|(x+4)^3+49\right\|=76$.	-10
Б2	Найти число целых решений неравенства $\dfrac{x^2+x-4}{(x+3)(x+5)}\le -\dfrac{1}{x+3}$.	2
Б3	Найти число целых решений неравенства $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}}<2$.	5
Б4	Найти сумму целых решений неравенства $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{4}\right)^{x^2-2x}>16^{x-2}$.	-5
Б5	Найти наибольшее целое решение неравенства $8^{\log_5 x}+5\cdot x^{\log_5 8}<6\cdot x^{\log_x 64}$.	24
Б6	Найти число решений уравнения $\cos^2 x+2\sin x=0$, принадлежащих отрезку $[-2\pi\,;2\pi]$.	4
Б7	Найти сумму координат точки с положительной абсциссой, касательная в которой к графику функции $f(x)=x^2-x+9$ проходит через начало координат.	18

Б8	Сколько точек $(x;y)$ с целыми координатами x, y лежат внутри прямоугольника с вершинами $A(0{,}5\ ;\ -2{,}5)$, $B(0{,}5\ ;-0{,}5)$, $C(4{,}5\ ;-0{,}5)$, $D(4{,}5\ ;-2{,}5)$?	8
Б9	$\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы. Найти $\lvert\boldsymbol{b}\rvert$, если $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=3$, $\lvert\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\rvert=18$, $\lvert\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rvert=12$.	15
Б10	Найти значение параметра a, при котором наибольшее отрицательное решение неравенства $\frac{ax+8}{x}\ge -5$ равно -4.	-3

Вариант № 11 / 2001

№	Задания	Ответы
А1	Дано: $\sqrt{16-t}-\sqrt{5-t}=3$. Вычислить $\sqrt{16-t}+\sqrt{5-t}$.	$\frac{11}{3}$
А2	Дано: $f(x)=\frac{3x+2}{x+5}$. Вычислить $f(x-1)-f(x-9)$.	$\frac{104}{x^2-16}$
А3	Найти сумму координат вершины параболы $y=-x^2-2x-2$.	-2
А4	Которому из промежутков $(-6;-4)$, $(-2;0)$, $(1;3)$, $(4;6)$, $(7;10)$ принадлежит корень уравнения $\frac{8x^3+27}{4x+6}=5x+21$?	$(4;6)$
А5	Вычислить $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{10+2\cdot\sqrt{21}}\right)$.	4
А6	Найти сумму корней уравнения $\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{x-1}\right)^{x+3}=\sqrt[5]{\left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}}$.	$-2{,}4$
А7	Найти произведение корней уравнения $\log_{\frac{1}{3}}(3x)^2+\log^2_{\frac{1}{3}}(9x)=5$.	$\frac{1}{9}$
А8	В арифметической прогрессии сумма третьего и седьмого членов равна 10, первый член равен -3. Найти разность прогрессии.	2
А9	Вычислить $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)$.	$\frac{5\cdot\sqrt{34}}{34}$
А10	Упростить выражение $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos 4\alpha}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos 3\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)$.	$4\operatorname{tg}\alpha$
А11	В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 15 *см*, периметр равен 54 *см*. Найти радиус вписанной окружности.	4
А12	Сфера проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 2 *см*, 5 *см* и 6 *см*. Найти площадь сферы.	65π
Б1	Найти сумму корней уравнения $\left\lvert\sqrt{x-4}-6\right\rvert=2$.	88
Б2	Найти число целых решений неравенства $\frac{x^2-3x+3}{(x-2)(x-4)}\le-\frac{1}{x-4}$.	2
Б3	Найти число целых решений неравенства $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}>1$.	1
Б4	Найти сумму целых решений неравенства $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{4-2x^2}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$.	1

Б5	Найти сумму целых решений неравенства $6^{\log_3 x} + 4 \cdot x^{\log_9 36} \le 5 \cdot x^{\log_x 6}$.	5
Б6	Найти число решений уравнения $2\cos^2 x - \sin x - 2 = 0$, принадлежащих отрезку $\left[0 ; \frac{5\pi}{2} \right]$.	5
Б7	Касательная к параболе $y = x^2 + mx + 9$ проходит через начало координат. Найти значение параметра m , при котором абсцисса точки касания положительна, а ордината равна 3 .	–5
Б8	Сколько точек $(x ; y)$ с целыми координатами x , y лежат внутри прямоугольника с вершинами A(0,5 ; –3,5) , B(0,5 ; 0,5) , C(2,5 ; 0,5) , D(2,5 ; –3,5) ?	8
Б9	$\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – векторы. Найти $\lvert \boldsymbol{a} \rvert + \lvert \boldsymbol{b} \rvert$, если $\lvert \boldsymbol{b} \rvert = 10$, $\lvert \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \rvert = 19$, $\lvert \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rvert = 17$.	25
Б10	Найти значение параметра a , при котором наименьшее решение неравенства $\frac{ax+4}{x} \le 8$ равно -1 .	12

Вариант № 22 / 2002

№	Задания	Ответы
А1	Указать все номера рациональных чисел данного множества: 1) $\sqrt{\sqrt[3]{5^2}} \cdot 25^{\frac{2}{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; 3) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^0$; 4) $5^{\log_{\frac{1}{3}} 9}$; 5) $\sqrt{19 - 8 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{3}$.	3 , 4 , 5
А2	Упростить выражение $\frac{8 - a \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{a + 2 \cdot \sqrt{a} + 4}{2 \cdot \sqrt{a} + a} \right)^{-1}$.	$2 - a$
А3	Которому из промежутков (0,2 ; 0,3) , (–0,3 ; –0,2) , (1,7 ; 1,8) , (–1,8 ; –1,7) , (–2,1 ; –1,9) принадлежит сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\frac{x+2}{4x^2+4x-8} = \frac{1}{3}$?	(1,7 ; 1,8)
А4	Найти скорость лодки в стоячей воде (в *км/час*) , если за 5 часов она прошла по реке 20 *км* и вернулась назад, а скорость течения 3 *км/час* .	9
А5	Которому из промежутков (2 ; 4) , (0 ; 2) , (4 ; 6) , (1 ; 2) , (–2 ; 0) принадлежит корень уравнения $\left(\sqrt{3}\right)^{5x+1} \cdot 13^{\frac{x-3}{2}} = 3 \cdot 3^{2x+1}$?	(2 ; 4)
А6	Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$, принадлежащих промежутку $[-\pi ; \pi]$.	$-\frac{\pi}{10}$
А7	Найти сумму ординат точек пересечения прямой $-5x + 2y = 7$ и параболы $2y = x^2 + 5x - 9$.	7
А8	Найти площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 3$, $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 5$ и осями координат.	64
А9	Даны векторы $\boldsymbol{AB} = \{ 3 ; 5 ; -4 \}$ и $\boldsymbol{BC} = \{ \alpha ; \beta ; 8 \}$. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Найти $\alpha + \beta$.	–16

А10	Около равнобедренной трапеции с основаниями 4 *см* и 14 *см* описана окружность с центром, лежащим на большем основании. Найти площадь трапеции.	$27 \cdot \sqrt{5}$
А11	Высота конуса равна 3 *см* , а угол при вершине осевого сечения равен $120°$. Найти объём конуса.	27π
А12	Найти все значения параметра $a \neq 0$, при которых графики функций $y = \left\| x^2 + 4ax \right\|$ и $y = 2a$ имеют только две общие точки.	$\left(0 ; \frac{1}{2} \right)$
Б1	Указать наименьшее целое число k , при котором дробь $\frac{12k^2 + 5k + 12}{4k + 3}$ является также целым числом.	-2
Б2	Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{(x-4)(x-5)}{(x+4)(x+5)} \leq \frac{x+6}{x-6}$.	7
Б3	Найти сумму корней уравнения $\left\| x+1 \right\| = 2 \cdot \left\| x-2 \right\|$.	6
Б4	Найти произведение корней уравнения $(x+1) \cdot \sqrt{x^2 + 4x - 8} = 2(x+1)$.	-12
Б5	Найти количество целых решений неравенства $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right)^{\sqrt{2-3x}-3} < \left(\sin \frac{\pi}{6} \right)^{\sqrt{2-3x}-3}$.	3
Б6	Найти корень уравнения $\log_4 (x^2 - x - 3) = \log_4 (x^2 - 5x + 4) - 0{,}5$ или сумму корней, если корень не единственный.	-5
Б7	Найти сумму всех целых чисел k , каждое из которых делится без остатка на 12 и удовлетворяет условию $-277 < k < 325$.	1224
Б8	Найти $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\frac{3 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha} = -2$.	-5
Б9	Найти в градусах значение угла $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 675°)$.	-45
Б10	Найти значение функции $y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$ в точке максимума.	0

Вариант № 33 / 2002

№	Задания	Ответы
А1	Указать все номера рациональных чисел данного множества: 1) $\sqrt[3]{49 \cdot \sqrt{7}} \cdot 7^{\frac{1}{6}}$; 2) $\left(\sqrt{2} \right)^{\log_{\frac{1}{2}} 121}$; 3) $\sqrt{7 + 2 \cdot \sqrt{6}} - 1$; 4) $\sqrt{\sqrt{5} - 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 2}$; 5) $(64)^{\frac{4}{9}}$.	1 , 2 , 4
А2	Упростить выражение $\frac{9x - 6 \cdot \sqrt{x} + 1}{3x + 5 \cdot \sqrt{x} - 2} : \frac{9x - 1}{2 + \sqrt{x}}$.	$\frac{1}{3 \cdot \sqrt{x} + 1}$
А3	Которому из промежутков (2,6 ; 2,7) , (1,3 ; 1,4) , (–0,9 ; –0,8) , (–1,4 ; –1,3) , [–4 ; –3,9] принадлежит сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\frac{4x^2 + 3x - 52}{x + 4} = x - 5$?	(2,6 ; 2,7)
А4	Найти скорость лодки в стоячей воде (в *км/час*) , если за 5 часов она прошла по реке 20 *км* и вернулась назад, а скорость течения 3 *км/час* .	9

А5	Найти сумму корней уравнения $\left(\sqrt[5]{6^{x-1}}\right)^{x+3} = 36^{x+1}$.	8
А6	Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $\cos^2 x + \sin x \cos x = 1$, принадлежащих промежутку $[-\pi ; \pi]$.	$-\dfrac{\pi}{10}$
А7	Найти произведение ординат точек пересечения прямой $3x - 2y = 4$ и гиперболы $y = \dfrac{3}{9x-7}$.	$-\dfrac{1}{2}$
А8	Найти площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $5x + 2y = 20$, $5x + 2y = 40$ и осями координат.	60
А9	Точки $A(\ 4\ ; -3\ ;\ 5\ )$, $B(\ 2\ ;\ 6\ ;\ 7\ )$, $D(\ 13\ ; -1\ ;\ 3\ )$ являются вершинами ромба $ABCD$. Найти длину диагонали AC .	$\sqrt{170}$
А10	В равнобедренном треугольнике основание равно проведённой к нему высоте и равно 12 *см* . Найти радиус описанной окружности.	7,5
А11	Объём конуса равен 64π $см^3$, а угол при вершине осевого сечения равен $120°$. Найти длину образующей конуса.	8
А12	Найти все значения параметра a , при которых графики функций $y = \dfrac{\lvert x-7 \rvert}{x-7}$ и $y = \lvert x + a \rvert$ имеют одну общую точку.	$[-8 ; -6)$
Б1	Указать наименьшее целое число k , при котором дробь $\dfrac{12k^2 + 5k + 23}{3k+2}$ является также целым числом.	–9
Б2	Найти наибольшее целое решение неравенства $1 - \dfrac{4}{(x+1)(x-3)} + \dfrac{4}{x-3} \le 0$.	2
Б3	Найти сумму корней уравнения $\lvert x+1 \rvert = 2 \cdot \lvert x-2 \rvert$.	6
Б4	Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.	3
Б5	Найти сумму целых решений неравенства $\left(\cos^2 \dfrac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{2x+5}} \ge 8^{\sqrt{3-z}}$.	6
Б6	Найти сумму целых решений неравенства $\log_6 (x+2) < \log_6 \dfrac{18}{7-x}$.	10
Б7	Найти сумму всех нечётных чисел k , каждое из которых делится без остатка на 31 и удовлетворяет условию $-404 < k < 589$.	1581
Б8	Найти значение выражения $\dfrac{7(\sin\alpha + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2} = 3$.	5
Б9	Найти в градусах значение угла $\arccos(\sin(-240°))$.	30
Б10	Найти значение функции $y = x + \dfrac{4}{x}$ в точке максимума.	–4

Вариант № 69 / 2002

№	Задания	Ответы
А1	Указать все номера рациональных чисел данного множества: 1) $\sqrt[4]{125\cdot\sqrt{5}}\cdot 5^{\frac{1}{8}}$; 2) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^{\log_5 16}$; 5) $\sqrt{28-10\cdot\sqrt{3}}-5$.	1 , 3 , 4
А2	Упростить выражение $\dfrac{a^{-2}+a}{\left(\sqrt{-a}\right)^{-1}-\sqrt{-a}}\cdot\left(1-a+a^2\right)^{-1}$.	$\dfrac{\sqrt{-a}}{a^2}$
А3	Которому из промежутков (1,95 ; 2,05) , (1,3 ; 1,4) , (3,3 ; 3,4) , (0,3 ; 0,4) , (2,3 ; 2,4) принадлежит сумма корней или корень (если он единственный) уравнения $\dfrac{4x^2-17x+18}{x-2}=x-5$?	(1,3 ; 1,4)
А4	Найти скорость лодки в стоячей воде (в *км/час*) , если за 5 часов она прошла по реке 20 *км* и вернулась назад, а скорость течения 3 *км/час* .	9
А5	Найти сумму корней уравнения $\left(\sqrt[5]{6^{x-1}}\right)^{x+3}=36^{x+1}$.	8
А6	Найти среднее арифметическое всех корней уравнения $\cos^2 x+\sin x\cos x=1$, принадлежащих промежутку $[-\pi\,;\pi\,]$.	$-\dfrac{\pi}{10}$
А7	Найти произведение абсцисс точек пересечения прямой $x+y=-2$ и окружности $x^2+y^2=\dfrac{18}{7}$.	$\dfrac{5}{7}$
А8	Найти площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми $2x+7y=-14$, $2x+7y=-28$ и осями координат.	21
А9	Даны векторы $\boldsymbol{AB}=\{-3\,;5\,;11\}$ и $\boldsymbol{BC}=\{6\,;m\,;n\}$. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Найти $m-n$.	12
А10	В прямоугольной трапеции меньшая боковая сторона равна 4 *см* , а меньшая диагональ перпендикулярна большей боковой стороне и равна $4\cdot\sqrt{5}$ *см* . Найти длину большего основания трапеции.	10
А11	Осевое сечение конуса – правильный треугольник с площадью $9\cdot\sqrt{3}$ *см*^{2} . Найти площадь боковой поверхности конуса.	18π
А12	Найти все значения параметра $a\neq 0$, при которых графики функций $y=\left\vert x^2-3ax\right\vert$ и $y=18a$ имеют только две общие точки.	(0 ; 8)
Б1	Найти сумму всех целых чисел k , при которых дробь $\dfrac{15k^2-2k-8}{3k-1}$ является также целым числом.	–2
Б2	Найти наибольшее целое решение неравенства $\dfrac{16}{x^2-3x}\geq x^2-3x$.	4
Б3	Найти сумму корней уравнения $\vert x+1\vert=2\cdot\vert x-2\vert$.	6
Б4	Найти значение выражения $(2x_0+1)x_0$, где x_0 – корень уравнения $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}}=\sqrt{3}$.	36

Б5	Найти сумму целых решений неравенства $\left(\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{3x+14}} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^2$.	18
Б6	Найти корень уравнения $\log_{16}\left(x^2-2x-4\right)=\log_{16}\left(x^2-5x-6\right)-0{,}25$ или сумму корней, если корень не единственный.	–2
Б7	Найти сумму всех целых чисел k, каждое из которых делится без остатка на 14 и удовлетворяет условию $-239<k<337$.	2058
Б8	Найти $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\dfrac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{2\sin\alpha+5\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}$.	4
Б9	Найти в градусах значение угла $\arccos(\sin(600°))$.	150
Б10	Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^4-2x^2+3$ на отрезке $[\,0\,;2\,]$.	13

ПИСЬМЕННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ

На письменном экзамене каждому поступающему предлагается тест, состоящий из 15 заданий, на выполнение которых отводится 180 минут. Мы приводим 30 вариантов теста вступительного экзамена 2002 г. и указываем ответы ко всем заданиям.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 1

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить неравенство $\frac{\log_{0,5}(1-x)}{\sqrt{4-x^2}} \le 0$.	$(-2\,;0\,]$	
2	Найти все значения k , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2+kx+3=0$ равна 19 .	± 5	
3	Апофема правильной треугольной пирамиды равна 6 см , а боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объём пирамиды.	81	
4	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\mid 5x+12 \mid > \mid 7x+18 \mid$.	0,5	
5	Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1.	963	
6	Найти все корни уравнения $\frac{\sin x}{1-\cos x}=0$ на отрезке $[\,0\,;2\pi\,]$.	π	
7	Решить уравнение $\log_3^2\left(3\cdot\sqrt{x}\right)=\log_3(9x)$.	$9\,;\frac{1}{9}$	
8	Через точку, которая делит диаметр круга в отношении 2 : 5 , проведена хорда длины 13 под углом 60° к диаметру. Найти радиус круга.	7	
9	Найти значение функции $y=3x^3-7x+19+\frac{2}{x}$ в точке минимума.	17	
10	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{3}:2$. Найти косинус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{2}{\sqrt{7}}$	
11	Упростить $\frac{x+y-1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{x+y}\right)^2-\left(\sqrt{3x+3y}+1\right)^2}$.	$-\frac{1}{2}$	
12	Найти целый корень уравнения $\sqrt{3^x-11}=5-\sqrt{4-x}$.	3	
13	Найти рациональные корни уравнения $\frac{4x^2-5}{x}-\frac{4x}{4x^2-5}=3$.	$1\ ;\ -\frac{5}{4}$	
14	Найти расстояние от точки $M\,(\,6\,;1\,)$ до середины отрезка AB , где $A\,(\,4\,;0\,)$, $B\,(\,-8\,;6\,)$.	$\sqrt{68}$	
15	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y=(2a+1)x^2+6x-1$ имеет с осью Ox две общие точки.	$\left(-5;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 2

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Составить уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 5x^2 + 4x - 7 + \frac{27}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.	$y = -x - 7$	
2	Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = 3ax^2 - 2(2a+1)x + \frac{12}{a}$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$	
3	Решить уравнение $\log_2(x^3) \cdot \log_2\left(\frac{x}{4}\right) = \log_2\left(\frac{2}{x^4}\right)$.	$2\ ;\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
4	Вычислить $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	
5	В правильной треугольной пирамиде угол между апофемами равен 60°. Найти апофему пирамиды, если площадь её боковой поверхности равна $\frac{4}{3}$.	$\frac{2}{3}$	
6	Решить уравнение $\frac{x}{x-2} = \frac{3x-8}{x^2 - 5x + 6}$.	4	
7	Найти наименьший корень уравнения $\lvert x+5 \rvert - \lvert 2x-6 \rvert = x+1$.	1	
8	Решить уравнение $3^{x+2} + 3^{-x} = 10$.	0 ; –2	
9	Найти целый корень уравнения $\sqrt{3x-17} + \sqrt{8-x} = \frac{x-4}{x-6}$.	7	
10	Решить неравенство $\frac{2^{\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{4}}{\sqrt{x+2}} \ge 0$.	$\left(0; \frac{3}{2}\right]$	
11	Вычислить $\frac{(2-\sqrt{3})^3 + 4}{\sqrt{7 - 4\cdot\sqrt{3}}}$.	15	
12	При каком значении параметра q угол между векторами $\boldsymbol{a} = \{2; q\}$ и $\boldsymbol{b} = \{3; 2\}$ острый?	$(-3; +\infty)$	
13	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{7} : 5$. Найти синус меньшего острого угла треугольника.	$\sqrt{\frac{7}{32}}$	
14	Арифметическая прогрессия содержит 10 членов. Сумма членов, стоящих на чётных местах, равна 50, а сумма членов, стоящих на нечётных местах, равна 35. Найти первый член прогрессии.	–5	
15	Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении 3 : 4. Найти большее основание трапеции, если её боковая сторона равна $5\cdot\sqrt{2}$.	8	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ________________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 3

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить неравенство $\frac{\sqrt{3-x}}{x+3} \le 1$.	$\left(-\infty\,;-3\right)\cup\left[-1\,;3\right]$	
2	Упростить $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$.	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
3	Найти натуральные корни уравнения $\frac{x^2+x}{x^2+x+2}=\frac{x^2+x-1}{2}$.	1	
4	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\left\vert 11x+31\right\vert<\left\vert 7x+17\right\vert$.	$\frac{5}{6}$	
5	Найти все значения параметра a , при которых неравенство $(a+1)x^2+6x+a-7\ge 0$ выполнено при всех x .	$\left[8\,;+\infty\right)$	
6	Даны три последовательные вершины $A(-3\,;2)$, $B(-5\,;-1)$, $C(4\,;0)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D .	$(6\,;3)$	
7	Решить неравенство $\frac{\log_3(x+1)}{\vert x\vert-2}\ge 0$.	$\left(-1\,;0\right]\cup\left(2\,;+\infty\right)$	
8	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{7}:3$. Найти синус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	
9	Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 4 *см* , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 30°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.	8	
10	Найти сумму первых двадцати нечётных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 4 .	2080	
11	Решить уравнение $x^{2\cdot\lg^2 x-1,5}=\sqrt{10}$.	$10\ ;\ \frac{1}{\sqrt{10}}$	
12	Острый угол ромба равен 60° , а радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt{21}$. Найти периметр ромба.	$16\cdot\sqrt{7}$	
13	Найти интервал возрастания функции $y=20x^3+25x^4-8x^5$.	$\left(-\frac{1}{2}\,;3\right)$	
14	Вычислить $\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)^3+2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}-5}$.	–9	
15	Решить уравнение $3^x-3^{1-x}=2$.	1	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 4

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить уравнение $3^{x+2}-3^{x+1}=18\cdot 27^x$.	–0,5	
2	Найти натуральные корни уравнения $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$.	2	
3	Найти угол в градусах $\arccos\frac{1}{\sqrt{28}}+\arccos\sqrt{\frac{3}{28}}$.	150	
4	Упростить выражение $\frac{x^2-y^2}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2y}\right)^2+\left(\sqrt{2x}+\sqrt{y}\right)^2}$.	$\frac{x-y}{3}$	
5	Найти величину $M+15m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y=5+24x+9x^2-2x^3$ на отрезке $[-2\,;4\,]$.	–3	
6	Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{a-2x}+x=0$ имеет два различных корня.	$(-1\,;0\,]$	
7	Решить неравенство $\frac{5-x}{\sqrt{x+1}}\geq 1$.	$(-1\,;3\,]$	
8	Через точку, которая делит диаметр круга в отношении $2:3$, проведена хорда под углом $45°$ к диаметру. Найти длину хорды, если радиус круга равен $25\cdot\sqrt{2}$.	70	
9	Решить уравнение $\lg^2\left(10x^2\right)=\lg\left(x^4\right)+2$.	$\pm\sqrt{10}$; $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$	
10	Решить неравенство $\left(4x^2-8x-5\right)\cdot\log_3(x+1)<0$.	$\left(-1;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0;\frac{5}{2}\right)$	
11	Найти сумму первых двадцати чётных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2 .	1180	
12	Найти все значения p , при которых угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{\,p-3\,;-2\,\}$ и $\boldsymbol{b}=\{\,p\,;2\,\}$ острый.	$(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$	
13	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $2:\sqrt{5}$. Найти косинус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	
14	Найти корень уравнения $\lvert 2x-3\rvert+\lvert 5x+10\rvert=24-x$, принадлежащий промежутку $[\,2\,;17\,]$.	$\frac{17}{8}$	
15	Площадь осевого сечения конуса равна $2\cdot\sqrt{6}$ $см^2$, а его объём равен 8π $см^3$. Найти образующую конуса.	5	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 5

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти рациональные корни уравнения $\left(2x^2+3x-1\right)^2+\left(2x^2+3x-4\right)^2=5$.	$-2\ ;\ \frac{1}{2}$	
2	Найти целый корень уравнения $\sqrt[4]{2^x}=\frac{x-4}{9-x}$.	8	
3	Вычислить $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^3+24}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)$.	16	
4	Решить неравенство $\frac{\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{1}{x}}-1}{x-5}\geq 0$.	$[-2\,;0\,)\cup(\,5\,;+\infty\,)$	
5	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y=(a-1)x^2+2(2a-4)x+4a$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$(-\infty\,;1\,)\cup\left(\,1\,;\frac{4}{3}\,\right)$	
6	Решить уравнение $\log_2\sqrt{x}\cdot\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)=\log_2\left(x^5\right)-9$.	4 ; 8	
7	В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит боковую сторону треугольника на части в отношении $6:5$, считая от основания треугольника. Найти синус угла при основании треугольника.	$\frac{4}{5}$	
8	Найти величину $x_1^2+x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2-15x+8=0$.	$\frac{59}{3}$	
9	Найти наибольшее значение функции $y=2x^3+3x^2-36x-4$ на отрезке $[-4\,;1\,]$.	77	
10	Найти сумму корней уравнения $7\sin^2 x+3\cos^2 x\sin x=7$, принадлежащих промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}\,;2\pi\,\right]$.	2π	
11	Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $6\cdot\sqrt{3}$ *см* , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $30°$. Найти объём пирамиды.	27	
12	Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 1 , а сумма последних двух равна 4 . Найти второй член прогрессии.	$\frac{2}{3}$	
13	Найти координаты точки M , лежащей на прямой $y=x$, равноудалённой от точек $A(\,6\,;1\,)$ и $B(\,-2\,;3\,)$.	$(\,2\,;2\,)$	
14	Найти корень уравнения $\left\|\,\left\|\,10x-3\,\right\|-12\,\right\|=4$, принадлежащий промежутку $\left(-\frac{3}{5}\,;1\,\right)$.	$-\frac{1}{2}$	
15	Диагональ равнобочной трапеции перпендикулярна её боковой стороне, а длины оснований относятся как $1:3$. Найти боковую сторону трапеции, если её высота равна $\sqrt{6}$.	3	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 6

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	При каких значениях a уравнение $(a-1)x^2+2(a-3)x+1=0$ имеет только отрицательные корни ?	$[\,5\,;+\infty\,)$	
2	Через точку, которая делит диаметр круга в отношении $2:5$, проведена хорда под углом $60°$ к диаметру. Найти длину хорды, если расстояние от центра круга до хорды равно $3\cdot\sqrt{3}$.	26	
3	Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB, где $A(4;1)$, $B(-2;9)$.	$(x-1)^2+(y-5)^2=25$	
4	Найти наименьший корень уравнения $\|2x+6\|+\|x-8\|=2x+7$.	7	
5	Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $2\cdot\sqrt{6}$ *см* и образует угол $45°$ с плоскостью основания пирамиды. Найти объём пирамиды.	18	
6	Вычислить $6^{\frac{x-2}{x-1}}\cdot 2^{\frac{3x}{2}}$ при $x=\log_2 12$.	$72\cdot\sqrt{3}$	
7	Числитель дроби увеличили на 26% , а знаменатель – на 20% . На сколько процентов изменилась дробь ?	увеличилась на 5%	
8	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{2^{-x}-4}}{x^2+5x}\le 0$.	$(\,-5\,;-2\,]$	
9	Упростить выражение $\dfrac{xy}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2-\left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)^2+x-y}$.	$\dfrac{\sqrt{2xy}}{8}$	
10	Решить уравнение $\sqrt{2x^2+4x+3}=x^2+2x$.	1 ; –3	
11	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $4:5$, а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Найти тангенс острого угла трапеции.	$2\cdot\sqrt{6}$	
12	Решить уравнение $9^x+2\cdot 3^x=3$.	0	
13	Составить уравнение касательной к графику функции $y=x^3+4x^2-7x-2+\dfrac{4}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=-2$.	$y=-10x+1$	
14	Решить уравнение $\dfrac{5x^2-12x-9}{x^2-9}=3x-6$.	$-\dfrac{7}{3}$	
15	Вычислить $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\right)\right)$.	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ________________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 7

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	При каких значениях параметра p угол между векторами $\boldsymbol{a} = \{ 2p ; 1 \}$ и $\boldsymbol{b} = \{ 3 ; 12 \}$ острый ?	$(-2 ; +\infty)$	
2	Цилиндр объёма 8π $см^3$ пересечён плоскостью, параллельной оси цилиндра и отстоящей от неё на расстоянии 2 $см$. Секущая плоскость отсекает от окружности основания дугу в 60°. Найти площадь сечения.	$2 \cdot \sqrt{3}$	
3	Острый угол ромба равен $60°$, а радиус вписанного в ромб круга равен 9 . Найти периметр ромба.	$48 \cdot \sqrt{3}$	
4	Найти наименьшее натуральное решение неравенства $x - 1 > \dfrac{12}{\lvert x - 2 \rvert}$.	6	
5	Решить неравенство $\dfrac{3 - 3^{x^2}}{\sqrt{1 - 2x}} \geq 0$.	$\left[-1 ; \dfrac{1}{2} \right)$	
6	Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 1\right)^3 + 40} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$.	8	
7	Найти величину $M + m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 4$ на отрезке $[-4 ; 1]$.	42	
8	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части в отношении $1 : \sqrt{7}$. Найти синус этого угла.	$\sqrt{\dfrac{6}{7}}$	
9	Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 6 , а сумма последних двух равна 54 . Найти первый член прогрессии.	1,5	
10	Решить уравнение $\lg^2 \left(\dfrac{x^2}{10} \right) = \lg\left(x^4\right) - 3$.	± 10	
11	Найти все значения k , при которых сумма квадратов корней уравнения $x^2 + kx - 3 = 0$ равна 22 .	± 4	
12	Найти среднее арифметическое корней уравнения $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$, принадлежащих промежутку $[-\pi ; \frac{\pi}{2}]$.	$-\dfrac{2\pi}{9}$	
13	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x + 3}}{3 - x} \geq 1$.	$[1 ; 3)$	
14	Найти все значения a , при которых неравенство $\left(a^2 - 1\right)x^2 + 4(a - 1)x + 1 > 0$ выполнено для любого значения x .	$\left[1 ; \dfrac{5}{3} \right)$	
15	Решить уравнение $\dfrac{x + 8}{x + 1} = \dfrac{x + 22}{x^2 + 5x + 4}$.	-10	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 8

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти натуральные корни уравнения $\left(x^2-6x\right)^2-2(x-3)^2=81$.	3	
2	Углы треугольника относятся как $1:2:9$. Найти площадь треугольника, если его большая сторона равна $2\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$.	1	
3	Найти наибольшее значение параметра p , при котором длина вектора $\boldsymbol{a}=\{\,5\,;\,2p\,\}$ равна длине вектора $\boldsymbol{AB}$, где $A(\,2\,;3\,)$, $B(\,4\,;8\,)$.	1	
4	Периметр осевого сечения цилиндра равен 8 *см* , а площадь полной поверхности равна 6π *см*^{2} . Найти высоту цилиндра.	2	
5	Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{xy+y}+1\right)^2}{y+1}$.	$x+2$	
6	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}\le 1$.	$\left[\,-5\,;-1\,\right]\cup\left(\,1\,;+\infty\,\right)$	
7	Найти все значения k , при которых корни уравнения $x^2+3x+k=0$ связаны соотношением $x_1-3x_2=-7$.	–4	
8	Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{3x^2+a}=2x-1$ имеет два различных корня.	$\left(\,-3\,;-\dfrac{3}{4}\,\right]$	
9	Найти наибольшее целое решение неравенства $\left\lvert\,x+1\,\right\rvert<\dfrac{25}{x+11}$.	1	
10	Найти значение функции $y=x^3-11x-5+\frac{4}{x}$ в точке максимума.	7	
11	Один из углов треугольника равен 150° , а высота треугольника, опущенная из вершины этого угла, делит сторону на части в отношении $5:9$. Найти тангенс меньшего угла треугольника.	$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$	
12	Разность арифметической прогрессии равна 1 , а сумма первых четырёх её членов равна 8 . Найти пятый член прогрессии.	4,5	
13	Решить уравнение $\log_2^2\left(\dfrac{x}{4}\right)=\log_2 x-2$.	4 ; 8	
14	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{1-x}}{8-2^{-x}}\ge 0$.	$\left(\,-3\,;1\,\right]$	
15	Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}=1$ на отрезке $\left[\,-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{3\pi}{2}\,\right]$.	$0\,;\,\pi$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 9

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Сумма второго и четвёртого членов арифметической прогрессии равна 6, а сумма первого и третьего равна 2. Найти пятый член прогрессии.	7	
2	Упростить выражение $\left(\sqrt{x+2y}-\sqrt{x-2y}\right)^2\cdot\left(x+\sqrt{x^2-4y^2}\right)$.	$8y^2$	
3	Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{3x-3}-\sqrt{x-2}=\sqrt{3}$.	5	
4	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_{0,5}(5x-2)}}{3x^2-1}<0$.	$\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$	
5	Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении 5 : 4, считая от вершины треугольника. Найти косинус угла при основании треугольника.	$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$	
6	Решить уравнение $3^{x+2}+3^{1-x}=12$.	$0;-1$	
7	Диагональ равнобочной трапеции равна $2\cdot\sqrt{6}$ и составляет с основанием угол $\frac{3\pi}{8}$. Найти площадь трапеции.	$6\cdot\sqrt{2}$	
8	Решить уравнение $\log_3^2(3x)=\log_3\left(3x^4\right)$.	$1;9$	
9	Найти значение функции $y=46+44x-x^3-\dfrac{64}{x}$ в точке минимума.	-50	
10	Найти корень уравнения $\lvert 7x+2\rvert-\lvert 3-x\rvert=2x+20$, принадлежащий промежутку $(3;5]$.	$\dfrac{15}{4}$	
11	Площадь полной поверхности конуса равна 4π *см*^{2}, а периметр осевого сечения равен 6 *см*. Найти высоту конуса.	1	
12	При каких значениях a уравнение $(a+4)x^2+6x+a-4=0$ имеет только положительные корни?	$[-5;-4]$	
13	Даны две точки $A(3;1)$, $B(-1;9)$. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении 3 : 1, считая от точки A.	$(0;7)$	
14	Найти угол в градусах: $\operatorname{arctg}\dfrac{2}{7}-\operatorname{arctg}\dfrac{9}{5}$.	$-45°$	
15	Найти натуральные корни уравнения $\left(x^2-4x+1\right)^2+\left(x^2-4x+3\right)^2=10$.	$2;4$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 10

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	При каких значениях a один из корней уравнения $(a-2)x^2-6x+a+6=0$ больше, а другой меньше, чем 1.	$(1;2)$	
2	Решить уравнение $10^{2x-1}\cdot 2^{x+1}=2^{2x-1}\cdot 8^x$.	0,5	
3	Углы треугольника относятся как $1:3:8$, а его большая сторона равна $3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}$. Найти меньшую сторону треугольника.	2	
4	Решить уравнение $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{20-5x}{x^2+x-6}$.	–10	
5	Площадь боковой поверхности конуса равна 65π $см^2$, а периметр осевого сечения равен 36 $см$. Найти высоту конуса.	12	
6	Найти наибольшее значение функции $y=6+36x+3x^2-2x^3$ на отрезке $[-1;4]$.	87	
7	Решить неравенство $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.	$(3;5]$	
8	Вычислить $4^{\frac{1}{x}}\cdot 6^{x+3}$ при $x=-\log_6 2$.	3	
9	Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{6}-1\right)^2-2\cdot\left(\sqrt{6}+2\right)}$.	2	
10	Найти разность арифметической прогрессии, если сумма первых трёх членов равна –21 , а шестой член равен 5 .	3	
11	Найти все корни уравнения $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}=1$ на отрезке $[0°;180°]$.	$18°$; $162°$	
12	Найти наибольшее значение параметра p , при котором длина вектора $\boldsymbol{a}=\{3;p-1\}$ равна длине вектора $\boldsymbol{AB}$, где $A(2;0)$, $B(4;3)$.	3	
13	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x}+7}{\log_{0,3}(6-x)}\le 0$.	$[0;5)$	
14	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части в отношении $4:5$. Найти тангенс этого угла.	$\dfrac{3}{4}$	
15	Найти наибольшее целое решение неравенства $\lvert x-2\rvert<\dfrac{25}{x+8}$.	4	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 11

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Вычислить $\left(\sqrt{3}-2\right)\cdot\sqrt{7+4\cdot\sqrt{3}}$	-1	
2	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $1:\sqrt{7}$. Найти синус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	
3	Найти интервалы возрастания функции $y=13-5x^2+10x+20\cdot\ln(x-2)$.	$(2;3)$	
4	Найти все корни уравнения $\frac{\cos x}{1+\sin x}=1$ на отрезке $[0;2\pi]$.	$0;2\pi$	
5	Разность арифметической прогрессии равна 2, а сумма первых четырёх её членов равна 6. Найти первый член прогрессии.	$-\frac{3}{2}$	
6	В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Найти апофему пирамиды, если её высота равна $2\cdot\sqrt{6}$.	6	
7	Решить уравнение $\log_2\sqrt{x}\cdot\log_2\left(8x^2\right)=\log_2\left(x\cdot\sqrt{2}\right)$.	$\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$	
8	Решить уравнение $\sqrt{5-x-2x^2}=2x^2+x+1$.	-1 ; $\frac{1}{2}$	
9	Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=\frac{a+2}{3-a}x^2+4x+1$ имеет с осью Ox две общие точки.	$(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup\cup(3;+\infty)$	
10	Найти рациональные корни уравнения $\frac{x}{3x^2-4}+\frac{6x^2-8}{x}=3$.	-1 ; $\frac{4}{3}$	
11	Решить уравнение $4^x-4^{x+1}+4^{x+2}=26$.	$\frac{1}{2}$	
12	В прямоугольную трапецию вписан круг радиуса 3. Найти площадь трапеции, если её меньшее основание равно 4.	48	
13	Решить неравенство $\frac{\sqrt{x}-1}{\log_2(7-x)}\le 0$.	$[0;1]\cup(6;7)$	
14	Найти корень уравнения $\lvert 6x+6\rvert-\lvert 6-12x\rvert=3x-17$, принадлежащий промежутку $(-3;-1]$.	$-\frac{5}{3}$	
15	Найти координаты точки M, лежащей на оси Ox, равноудалённой от точек $A(-2;1)$ и $B(8;11)$.	$(9;0)$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 12

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить уравнение $\frac{3x^2+2x-5}{x^2-1}=5x-1$.	$-\frac{6}{5}$	
2	Найти интервалы убывания функции $y=3x^2+24x-7-12\cdot\ln(x+3)$.	$(-3\,;-2)$	
3	Через точку, которая делит диаметр круга в отношении 1:5 , проведена хорда длины $8\cdot\sqrt{2}$ под углом 30° к диаметру. Найти радиус круга.	6	
4	В правильной четырёхугольной пирамиде угол между апофемами смежных боковых граней равен 60° . Найти высоту пирамиды, если её апофема равна $\sqrt{18}$.	3	
5	Вычислить $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2}-\frac{4}{\sqrt{3}-1}$.	–2	
6	Найти корень уравнения $\lvert\,\lvert 6-7x\rvert-17\,\rvert=9$, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{3}{7}\,;2\right)$.	$-\frac{2}{7}$	
7	При каком значении параметра p угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{p\,;3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{1\,;1\}$ тупой ?	$(-\infty\,;-3)$	
8	Решить уравнение $\log_4\left(\frac{8}{x}\right)\cdot\log_2 x-1=0$.	2 ; 4	
9	На сколько процентов изменится произведение двух чисел, если одно из них увеличить на 15% , а другое уменьшить на 12% ?	Увеличится на 1,2%	
10	Решить неравенство $\frac{\sqrt{2x+5}}{x+1}\le 1$.	$\left[-\frac{5}{2}\,;-1\right)\cup[\,2\,;\infty)$	
11	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y=a(a+1)x^2+2(a+1)x+2$ не имеет общих точек с осью Ox .	$(-\infty\,;-1\,]\cup(\,1\,;\infty)$	
12	Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-2^x}}{x^2-5x}\le 0$.	$(\,0\,;3\,]$	
13	Решить уравнение $4^{x-1}=3+2^{x-2}$.	2	
14	Найти все корни уравнения $\frac{\cos 5x+\cos x}{\cos 2x}=2$ на отрезке $\left[-\pi\,;\frac{\pi}{2}\right]$.	$-\frac{2\pi}{3}$; 0	
15	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части в отношении $\sqrt{3}:4$. Найти синус этого угла.	$\frac{\sqrt{13}}{4}$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 13

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Область, ограниченная линиями $y=6-x$, $y=6-2x$ и $y=0$, вращается вокруг оси Ox. Найти объём полученного тела вращения.	36π	
2	Решить неравенство $\dfrac{\log_5(2x+7)}{\lvert 3x\rvert-1}\le 0$.	$\left(-\dfrac{7}{2};-3\right]\cup\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$	
3	Решить уравнение $2\cdot 16^x+3\cdot 4^x=2$.	–0,5	
4	Острый угол ромба равен $60°$, а радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt{15}$. Найти площадь ромба.	$40\cdot\sqrt{3}$	
5	Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=4x^2+2(a+1)x+a^2+a-8$ не имеет общих точек с осью Ox.	$\left(-\infty;-\dfrac{11}{3}\right)\cup(3;\infty)$	
6	Найти угол в градусах $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{\sqrt{3}}$.	–30°	
7	Решить уравнение $\dfrac{x+5}{x+2}+\dfrac{5x+7}{x^2+5x+6}=0$.	–11	
8	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как 1 : 5, а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Найти синус острого угла трапеции.	$\dfrac{3}{5}$	
9	Найти величину $M+20m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y=4+9x+3x^2-x^3$ на отрезке $[-4;4]$.	60	
10	Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{b}=\{-3;4\}$, в 2 раза длиннее $\boldsymbol{b}$ и имеющего положительную первую координату.	$\{8;6\}$	
11	Решить уравнение $9^{\frac{1}{x}}\cdot 5^{x-1}=15$.	2 ; $\log_5 3$	
12	Найти корень уравнения $\lvert\lvert 12x+7\rvert-15\rvert=13$, принадлежащий промежутку $[-2;-\frac{1}{2})$.	$-\dfrac{3}{4}$	
13	Упростить $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2y}\right)^2+\left(\sqrt{2x}-\sqrt{y}\right)^2-\left(\sqrt{3x}+\sqrt{3y}\right)^2}{xy}$.	$-\dfrac{6}{\sqrt{xy}}$	
14	Седьмой член арифметической прогрессии в 5 раз больше первого, а второй член прогрессии равен 5. Найти четвёртый член прогрессии.	9	
15	Решить уравнение $\sqrt{2x^2+5x+1}=5-2x^2-5x$.	-3 ; $\dfrac{1}{2}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 14

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти интервалы убывания функции $y = 4x^2 + 24x + 9 - 16 \cdot \ln(x+2)$.	$(-2\,;-1)$	
2	В прямоугольную трапецию вписан круг радиуса 4. Найти площадь трапеции, если её большее основание равно 10 .	$\frac{200}{3}$	
3	Найти целый корень уравнения $\sqrt{x+4} + \sqrt{-x-2} = x^2 - 7$.	-3	
4	Вычислить $\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2} + \frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1}$.	$7\cdot\sqrt{3}$	
5	Решить уравнение $3^{\frac{x}{1-x}} \cdot 6^x = 4$.	$2\ ;\ \log_6 2$	
6	Найти угол в градусах $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4} - \mathrm{arctg}(5\cdot\sqrt{3})$.	$-60°$	
7	Решить уравнение $2^{x-1} + 2^{x+1} = 10 \cdot 4^x$.	-2	
8	Решить уравнение $\frac{x^2-1}{2x^2-5x+3} = x - 3$.	4	
9	Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Найти косинус угла при основании треугольника.	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
10	Найти знаменатель убывающей геометрической прогрессии, если произведение её первого и четвёртого членов равно 12 , а сумма второго и третьего членов равна 8 .	$\frac{1}{3}$	
11	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\lvert 7x+10 \rvert < \lvert 3x+4 \rvert$.	0,1	
12	Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $3\cdot\sqrt{2}$ *см* , а боковая грань составляет с плоскостью основания угол 45° . Найти объём пирамиды.	36	
13	Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{3x^2+a} = 2x+1$ имеет единственное решение.	$\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$	
14	Решить неравенство $\frac{x^2+6x}{\sqrt{3^{-x}-27}} \le 0$.	$[-6\,;-3)$	
15	Даны три последовательные вершины $A(7\,;3)$, $B(4\,;1)$ и $C(-2\,;-4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D .	$(1\,;-2)$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 15

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{a-2x}=x+2$ не имеет корней.	$(-\infty;-4)$	
2	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{2^{\lvert x\rvert}-4}\le 0$.	$[-11;-2)\cup(-2;2)$	
3	Вычислить $\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{15}-\sqrt{6}}+\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{10}+2}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$.	–4	
4	Даны три точки $A(1;1)$, $B(-1;0)$, $C(3;1)$. Найти длину вектора $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}+2\cdot\boldsymbol{AC}$.	$\sqrt{5}$	
5	Найти значение функции $y=x^3-26x-14+\dfrac{9}{x}$ в точке максимума.	34	
6	В правильной четырёхугольной пирамиде угол между апофемами противоположных боковых граней равен $90°$. Найти апофему пирамиды, если её боковое ребро равно $\sqrt{24}$.	4	
7	Решить уравнение $\log_4(2x)\cdot\log_2 x-6=0$.	8 ; $\dfrac{1}{16}$	
8	Найти рациональные корни уравнения $\dfrac{3}{2x^2+x-3}+\dfrac{5}{(2x-1)(x+1)}=2$.	–2 ; 1,5	
9	Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении 2 : 5, считая от вершины треугольника. Найти тангенс угла при вершине треугольника.	$\dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$	
10	На стороне квадрата взята точка, которая делит сторону в отношении 1 : 7. Найти площадь квадрата, если расстояние от этой точки до точки пересечения диагоналей квадрата равно 5.	64	
11	Решить уравнение $\sqrt{2x^2-4x+3}=x^2-2x+2$.	1	
12	Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 4, а сумма последних двух равна 16. Найти первый член прогрессии.	$\dfrac{4}{3}$	
13	Найти все значения k, при которых корни уравнения $x^2-4x+k=0$ связаны соотношением $x_1-2x_2=1$.	3	
14	Найти корень уравнения $\lvert 4x-7\rvert+\lvert 3+x\rvert=2x+9$, принадлежащий промежутку $(-1;1]$.	$\dfrac{1}{5}$	
15	Найти все корни уравнения $\sqrt{3}\cdot(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=4$ на отрезке $[-\pi;0]$.	$-\dfrac{2\pi}{3}$; $-\dfrac{5\pi}{6}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 16

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $2 : 3$, а диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найти меньшее основание трапеции, если высота трапеции равна $2\cdot\sqrt{3}$.	4	
2	Решить уравнение $\dfrac{x^2-9}{2x^2+15x+27}=3x+7$.	$-\dfrac{11}{3}$	
3	Найти величину $5M+m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-6x^2-15x+7$ на отрезке $[-2;4]$.	-10	
4	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $3 : 4$. Найти синус меньшего острого угла треугольника.	$\dfrac{3}{5}$	
5	Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна $17{,}5$, а знаменатель прогрессии равен 2. Найти третий член геометрической прогрессии.	10	
6	Решить уравнение $\log_3^2(3x)=4+\log_3(x^4)$.	$\dfrac{1}{3}$; 27	
7	Упростить $\dfrac{x-5}{6x-3x^2}+\dfrac{4(x+1)}{x^3+4x^2}\cdot\dfrac{x^3-16x}{9x^2-(x+4)^2}$.	$\dfrac{1}{6x}$	
8	Найти величину $x_1^3+x_2^3$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $2x^2+x-7=0$.	$-\dfrac{43}{8}$	
9	Решить неравенство $\dfrac{\lvert x\rvert-2}{\log_3(x+5)}\le 0$.	$(-5;-4)\cup[-2;2]$	
10	Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-2}>x-1$.	$(-\infty;-1]\cup(3;\infty)$	
11	Найти корень уравнения $\lvert\lvert 16x-5\rvert-14\rvert=11$, принадлежащий промежутку $(-1;\frac{1}{4}]$.	$\dfrac{1}{8}$	
12	Найти все корни уравнения $\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\cos x$ на отрезке $[0;2\pi]$.	$\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{5\pi}{3}$	
13	Площадь боковой поверхности конуса равна 20π *см*^{2}, а периметр осевого сечения равен 18 *см*. Найти высоту конуса.	3	
14	Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a+3)x^2+4x+2-a\ge 0$ выполнено при всех x.	$[-2;1]$	
15	При каких значениях параметра q угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{1;3\}$ и $\boldsymbol{b}=\{3q;1\}$ тупой?	$(-\infty;-1)$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 17

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Даны две точки $A(7;1)$ и $B(-2;4)$. Найти координаты точки C, которая делит отрезок AB в отношении $1:2$, считая от точки A.	$(4;2)$	
2	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $5:8$, а диагональ является биссектрисой её острого угла. Найти синус острого угла трапеции.	$\frac{4}{5}$	
3	Решить неравенство $\frac{2x+3}{3^x-4^x}\geq 0$.	$\left[-\frac{3}{2};0\right)$	
4	Область, ограниченная линиями $y=x$, $y=x-2$, $y=0$ и $y=5$, вращается вокруг оси Oy. Найти объём полученного тела вращения.	70π	
5	Решить уравнение $2^x-2^{x+1}+2^{x+2}=6\cdot\sqrt{2}$.	1,5	
6	Четыре числа составляют возрастающую геометрическую прогрессию, в которой сумма первых двух членов равна 3, а сумма последних двух равна 27. Найти второй член прогрессии.	$\frac{9}{4}$	
7	Найти все корни уравнения $\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\sqrt{3}\cdot\cos x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.	$\pm\frac{\pi}{6}$	
8	Решить уравнение $(x-3)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.	6 ; –3	
9	Вычислить $9^{\frac{1}{x}}\cdot 5^{x+1}$ при $x=-\log_5 3$.	$\frac{1}{15}$	
10	Найти все значения параметра a, при которых график функции $y=(2a+1)x^2+2(a-1)x+a+1$ имеет с осью Ox только одну общую точку.	$-\frac{1}{2};0;-5$	
11	Вычислить $\frac{(\sqrt{5}-3)^3+40}{\sqrt{5}-1}$.	32	
12	К графику функции $y=2x^3-7x^2+4x-9+\frac{8}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=2$ проведена касательная. Найти ординату точки этой касательной, если её абсцисса $x_1=7$.	–19	
13	Найти наименьшее целое решение неравенства $\frac{7}{2-x}\geq\lvert x+2\rvert$.	–3	
14	Найти рациональные корни уравнения $(2x^2+7x+4)^2=4x^2+14x+11$.	$-1;-\frac{5}{2}$	
15	Острый угол ромба равен $30°$, а радиус вписанного в ромб круга равен 5. Найти периметр ромба.	80	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 18

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти рациональные корни уравнения $\left(x^2-2x-3\right)^2+\left(x^2-2x-4\right)^2=25$.	0 ; 2	
2	Решить уравнение $2^x-2^{-x+2}=3$.	2	
3	При каких значениях a один из корней уравнения $(a+2)x^2-2ax+1=0$ больше, а другой меньше, чем 3 .	$\left(-\frac{19}{3};-2\right)$	
4	Найти наибольшее целое решение неравенства $\mid x-10\mid<\frac{16}{x-2}$.	11	
5	Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 21,5 , а знаменатель прогрессии равен 6 . Найти второй член геометрической прогрессии.	3	
6	Упростить $\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{y}-1\right)^2-2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{y^2-x^2}$.	$\frac{-1}{x+y}$	
7	Найти координаты точки M , лежащей на оси Ox и равноудалённой от точек $A(-3;2)$ и $B(7;6)$.	$(3{,}6;0)$	
8	Решить неравенство $\frac{2^{x^2}-2}{\sqrt{x+2}}\geq 0$.	$(-2;-1]\cup[1;\infty)$	
9	Вычислить $6^{\frac{x-1}{x}}\cdot 3^{x+1}$ при $x=-\log_3 6$.	9	
10	Найти величину $M+2m$, где M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+3x^2-24x-5$ на отрезке $[-3;3]$.	1	
11	В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь её боковой поверхности равна $6-\sqrt{12}$.	4	
12	Решить неравенство $\frac{\sqrt{x+2}}{x-4}\leq 1$.	$[-2;4)\cup[7;+\infty)$	
13	Упростить выражение $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,2\alpha-\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.	0	
14	Углы треугольника относятся как 1 : 2 : 9 , а его меньшая сторона равна $2\cdot\sqrt{3}-2$. Найти большую сторону треугольника.	4	
15	Один из углов треугольника равен $120°$, а высота треугольника, опущенная из вершины этого угла, делит сторону на части в отношении 2 : 5 . Найти тангенс меньшего угла треугольника.	$\frac{\sqrt{3}}{5}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 19

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении $3:22$, считая от вершины треугольника. Найти косинус угла при основании треугольника.	$\frac{\sqrt{11}}{5}$	
2	К графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \frac{4}{x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$ проведена касательная. Найти ординату точки этой касательной, если её абсцисса $x_1 = 4$.	38	
3	Найти рациональные корни уравнения $\frac{24}{(x-1)(x+2)} + x^2 + x - 12 = 0$.	$2\,;\,-3$	
4	Найти наибольшее целое решение неравенства $\frac{2}{\lvert x+3 \rvert} < \frac{1}{2x-1}$.	1	
5	Угол при вершине осевого сечения конуса равен $120°$, а площадь его боковой поверхности равна $2\pi \cdot \sqrt{3}$. Найти объём конуса.	π	
6	Найти все значения параметра a, при которых график функции $y = (a+4)x^2 + 6x + a - 4$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$(-5\,;-4) \cup (-4\,;5)$	
7	Упростить $x + \frac{3x^2 + 36x + 81}{x^2 + 3x} - \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x}$.	$\frac{18}{x}$	
8	Решить неравенство $\frac{\sqrt{5-2x}}{1-x} \geq 1$.	$[-2\,;1)$	
9	Найти сумму первых двадцати чётных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 1.	2820	
10	Решить неравенство $\frac{\lvert x \rvert - 4}{1 + \log_3 x} \leq 0$.	$\left(\frac{1}{3}\,;4\right]$	
11	При каких значениях параметра q угол между векторами $\boldsymbol{a} = \{3\,;1\}$ и $\boldsymbol{b} = \{q\,;6\}$ острый?	$(-2\,;\infty)$	
12	Решить уравнение $\log_2^2(8x) = \log_2(x^4) + 12$.	2 ; 0,125	
13	Найти все корни уравнения $\frac{2}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}\,;0\right]$.	$-\frac{7\pi}{6}$	
14	Углы треугольника относятся как $1:4:7$. Найти большую сторону треугольника, если его меньшая сторона равна $2 \cdot \sqrt{3} - 3$.	$\sqrt{3}$	
15	Решить уравнение $4^{\log_3 x} - 5 \cdot 2^{\log_3 x} + 4 = 0$.	1 ; 9	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 20

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить уравнение $\log_2^2\left(8x^2\right)=5+\log_2\left(x^4\right)$.	$\pm 0{,}5$	
2	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{7}:3$. Найти косинус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{3}{4}$	
3	Найти рациональные корни уравнения $\left(2x^2-x-3\right)^2+\left(2x^2-x-2\right)^2=1$.	-1 ; $1{,}5$	
4	Найти сумму всех двузначных натуральных чисел, которые при делении на 8 дают в остатке 4 .	572	
5	Через точку, которая делит диаметр круга в отношении $2:3$, проведена хорда длиной $14\cdot\sqrt{2}$ под углом $45°$ к диаметру. Найти радиус круга.	10	
6	Площадь полной поверхности конуса равна π $см^2$, а периметр осевого сечения равен $6\cdot\sqrt{2}$ $см$. Найти высоту конуса.	4	
7	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y=(a-2)x^2+2(a+4)x+a$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$\left(-\frac{8}{5};2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$	
8	Найти угол в градусах $\operatorname{arctg}\frac{7}{3}+\operatorname{arctg}\frac{5}{2}$.	$135°$	
9	Найти корень уравнения $\left\|7x+14\right\|-\left\|5-4x\right\|=9+2x$, принадлежащий промежутку $[-10;-2]$.	$-\frac{28}{5}$	
10	Решить уравнение $2^{x+1}+2^{2-x}=9$.	2 ; -1	
11	Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{2x+7}-\sqrt{x+1}=\sqrt{5}$.	19	
12	Найти наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2-15x+7$ на отрезке $[-2;4]$.	15	
13	Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=\{2;1\}$, в 3 раза длиннее $\boldsymbol{a}$ и имеющего положительную первую координату.	$\{3;-6\}$	
14	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\log_{0,4}(5-x)}\le 0$.	$[-2;4)$	
15	Сократить дробь $\dfrac{2xy-2x-y+1}{2x^2+x-1}$.	$\frac{y-1}{x+1}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________
Тест выдан _______________________________
Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 21

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти наименьшее целое решение неравенства $\lvert x+2 \rvert \le \dfrac{15}{4-x}$.	-3	
2	Даны три точки $A(\ 1\ ;\ 1\ )$, $B(\ -1\ ;\ 3\ )$, $C(\ 3\ ;\ 5\ )$. Найти длину медианы CM треугольника ABC .	$\sqrt{18}$	
3	Острый угол ромба равен 45° , а радиус вписанного в ромб круга равен 3 . Найти периметр ромба.	$24\cdot\sqrt{2}$	
4	Решить уравнение $\log_2^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\log_2\left(\dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{2}\right)=0$.	$1\,;\sqrt{2}$	
5	Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{4a-x^2}=4-x$ имеет два различных корня.	$(\ 2\ ;4\ ]$	
6	Решить уравнение $\dfrac{x^2-9x+14}{x-2}=x^2-11x+13$.	10	
7	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{3}:2$. Найти синус меньшего острого угла треугольника.	$\sqrt{\dfrac{3}{7}}$	
8	Решить неравенство $\dfrac{\log_2(x+3)}{x+1}\le 0$.	$[\,-2\,;-1\,)$	
9	Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2}$.	3	
10	Упростить $\dfrac{x^2}{3x-18}-\dfrac{2x}{x^2-5x-6}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{3+x}\right)$.	$\dfrac{x}{3}$	
11	Найти сумму первых двадцати чётных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 6 .	2780	
12	Найти все значения a , при которых корни уравнения $2x^2-10x+a=0$ связаны соотношением $x_1=4x_2$.	8	
13	Найти интервалы убывания функции $y=\dfrac{16}{x+1}+3\cdot\ln x$.	$\left(\dfrac{1}{3}\,;3\right)$	
14	Площадь боковой поверхности конуса равна 15π $см^2$, а периметр осевого сечения равен 16 $см$. Найти высоту конуса.	4	
15	Найти все корни уравнения $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,x}+\cos x=0$ на отрезке $\left[\,-\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$.	$-\dfrac{3\pi}{4}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 22

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Разность арифметической прогрессии равна 1 , а сумма первых восьми её членов равна 8 . Найти первый член прогрессии.	$-2{,}5$	
2	Найти целый корень уравнения $\sqrt{4^{x+3}-1}=\sqrt{3-12x}$.	-1	
3	Высота равнобедренного треугольника, проведённая к его боковой стороне, делит эту сторону на части в отношении 1 : 8 , считая от вершины треугольника. Найти тангенс угла при вершине треугольника.	$\sqrt{80}$	
4	Решить неравенство $\dfrac{3^x-2^x}{x-3}\le 0$.	$[\,0\,;3\,)$	
5	Найти корень уравнения $\left|\,7-\left|\,4-3x\,\right|\right|=2$, принадлежащий промежутку $(\,3\,;5\,)$.	$\dfrac{13}{3}$	
6	Решить уравнение $\log_2^2\left(\dfrac{x}{4}\right)=2-\log_2 x^7$.	$\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4}$	
7	Найти все корни уравнения $\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 2x}+\sqrt{2}=0$ на отрезке $\left[\,\dfrac{\pi}{2}\,;2\pi\,\right]$.	$\dfrac{3\pi}{4}$	
8	Найти все значения k , при которых корни уравнения $x^2+2x+k=0$ связаны соотношением $2x_1+x_2=1$.	-15	
9	Вычислить $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{5}-4}-\dfrac{2}{\sqrt{5}+3}$.	$\dfrac{3\cdot\sqrt{5}}{2}$	
10	Найти рациональные корни уравнения $\dfrac{8}{x^2-6x+9}+\dfrac{6}{x^2-6x+5}=1$.	$-1\,;\,7$	
11	Прямоугольный треугольник с катетами $a=\sqrt{6}$ *см* и $b=\sqrt{30}$ *см* вращается вокруг гипотенузы. Найти объём полученного тела вращения.	10π	
12	При каких значениях параметра p угол между векторами $\boldsymbol{a}=\{\,1\,;2\,\}$ и $\boldsymbol{b}=\{\,2\,;p\,\}$ тупой ?	$(\,-\infty\,;-1\,)$	
13	Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y=\frac{x}{8}+\frac{2}{x}$ на отрезке $[\,1\,;6\,]$.	$\dfrac{25}{8}$	
14	Через точку , которая делит диаметр круга в отношении 3 : 5 , проведена хорда длиной $6\cdot\sqrt{7}$ под углом 30° к диаметру. Найти радиус круга.	8	
15	Найти все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2+2(a-2)x+1\ge 0$ выполнено при всех x.	$[\,1\,;4\,]$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 23

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	При каких значениях a уравнение $ax^2-6x+a-8=0$ имеет только отрицательные корни ?	$(-\infty\,;0\,]$	
2	Найти интервалы убывания функции $y=4x^3-18x^2-21x-9$.	$\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$	
3	Найти натуральные корни уравнения $(x^2+x+2)^2+(x^2+x-3)^2=17$.	1	
4	Найти третий член убывающей геометрической прогрессии, если произведение её первого, четвёртого и седьмого членов равно $\frac{1}{8}$, а сумма третьего и пятого членов равна $\frac{13}{12}$.	$\frac{3}{4}$	
5	Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{3x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3}$.	4	
6	Найти величину $\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}$, где x_1 , x_2 – корни уравнения $2x^2-x-7=0$.	3	
7	Решить уравнение $27^{\frac{x}{x-1}}\cdot 4^{x+1}=6$.	$-\frac{1}{2};-\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$	
8	Упростить $\frac{2x^2}{x-2}+\frac{4x}{x^2-5x+6}-\frac{4x^2}{3x-9}$.	$\frac{2x}{3}$	
9	Найти все корни уравнения $\sin 2x+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin^2 x=0$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{6}\right]$.	$0;-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$	
10	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как 4 : 7 , а диагональ является биссектрисой её острого угла. Найти синус острого угла трапеции.	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	
11	В правильной треугольной пирамиде угол между апофемами равен $60°$. Найти апофему пирамиды, если площадь её боковой поверхности равна 3 .	1	
12	Найти корень уравнения $\lvert 4x+5\rvert-\lvert 2x-4\rvert=-7x-23$, принадлежащий промежутку $\left[-3;-\frac{3}{2}\right]$.	–2,8	
13	Решить неравенство $\frac{9^x-3^x}{x^2+4x}\geq 0$.	$(-4\,;0)\cup(0\,;+\infty)$	
14	Через точку , которая делит диаметр круга в отношении 1 : 5 , проведена хорда под углом $60°$ к диаметру. Найти длину хорды, если расстояние от центра круга до хорды равно $3\cdot\sqrt{2}$.	12	
15	Найти расстояние от точки $A(2;-1)$ до середины отрезка BC , где $B(3;4)$, $C(-7;-2)$.	$\sqrt{20}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________
Тест выдан ______________________________
Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 24

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти угол в градусах: $\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$.	135°	
2	Составить уравнение касательной к графику функции $y=2x^3-7x^2+4x-9+\frac{8}{x}$ в точке с абсциссой $x_0=2$.	$y=-2x-5$	
3	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части в отношении $2:\sqrt{7}$. Найти тангенс этого угла.	$\sqrt{\frac{11-4\cdot\sqrt{7}}{3}}=\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{3}}$	
4	В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны, а высота пирамиды равна 2 *см*. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.	18	
5	Решить неравенство $\frac{2^x-\sqrt{2^{x+2}}}{x^2-2x}\le 0$.	$(-\infty\,;0)$	
6	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\lvert 9x+26\rvert<\lvert 5x+9\rvert$.	$\frac{7}{4}$	
7	Третий член арифметической прогрессии в 4 раза больше первого, а пятый член прогрессии равен 14 . Найти второй член прогрессии.	5	
8	Решить неравенство $x+3\le\sqrt{3-x}$.	$(-\infty\,;-1]$	
9	Найти целые корни уравнения $\frac{3}{x^2-x-6}+\frac{5}{x^2-x-2}=1$.	4 ; –3	
10	Через точку , которая делит диаметр круга в отношении 3 : 5 , проведена хорда под углом 30° к диаметру. Найти длину хорды, если радиус круга равен $4\cdot\sqrt{7}$.	21	
11	Вычислить $3^{\frac{x-1}{x}}\cdot 6^{x-1}$ при $x=\log_6 3$.	$\frac{1}{4}$	
12	Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{2x+1-a}=x-1$ имеет единственное решение.	$(-\infty\,;3)\cup\{4\}$	
13	Решить уравнение $5^{3x+1}\cdot 4^x=2^{2x+1}\cdot 20^x$.	$-\frac{1}{2}$	
14	Упростить $\frac{1}{\sqrt{x}+x}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{x+4\cdot\sqrt{x}+3}\cdot\left(x+1+2\cdot\sqrt{x}\right)$.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
15	Составить уравнение окружности, диаметром которой является отрезок AB , где $A(-2\,;9)$, $B(6\,;-1)$.	$(x-2)^2+(y-4)^2=41$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 25

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти рациональные корни уравнения $\frac{3x^2+6x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}=2$.	$\frac{1}{3};-1;-\frac{1}{4}$	
2	Найти угол в градусах: $\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}+\arccos\sqrt{\frac{3}{28}}$.	120°	
3	Решить уравнение $2^{x+2}-2^x=6\cdot 8^{x+1}$.	–2	
4	Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 52,5 , а знаменатель прогрессии равен 4 . Найти второй член геометрической прогрессии.	10	
5	Решить уравнение $6^{\frac{x+1}{x}}\cdot 3^{1-x}=9$.	$-1;\log_3 6$	
6	Упростить $\frac{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}+\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$.	1	
7	Биссектриса прямого угла треугольника делит гипотенузу на части в отношении $\sqrt{11}:5$. Найти косинус меньшего острого угла треугольника.	$\frac{5}{6}$	
8	Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y=x^3-9x^2+15x+1$ на отрезке $[-2;6]$.	–65	
9	Найти координаты точки C , которая делит отрезок AB в отношении 3 : 1 , считая от точки A , если $A(1;-5)$, $B(9;-1)$.	$(7;-2)$	
10	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y=ax^2+2(a-2)x+a-1$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$(-\infty;0)\cup\left(0;\frac{4}{3}\right)$	
11	Найти целый корень уравнения $\sqrt{3x+22}+\sqrt{-2x-8}=\frac{x^2}{9}$.	–6	
12	Найти корень уравнения $\lvert 6x+2\rvert-\lvert 4x-3\rvert=-4x-6$, принадлежащий промежутку $\left[-3;-\frac{1}{3}\right)$.	$-\frac{1}{2}$	
13	Решить неравенство $\frac{\sqrt{\log_{0,3}(x-2)}}{2x-5}\geq 0$.	$\left(\frac{5}{2};3\right]$	
14	В равнобочную трапецию вписан круг радиуса 3 . Найти периметр трапеции, если её меньшее основание равно 4 .	26	
15	В правильной треугольной пирамиде угол между апофемами равен 60° . Найти апофему пирамиды, если площадь её полной поверхности равна $4\cdot\sqrt{3}+12$.	2	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 26

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти координаты точки M, лежащей на прямой $y = x$ и равноудалённой от точек $A(7;1)$ и $B(3;-5)$.	$\left(\frac{4}{5};\frac{4}{5}\right)$	
2	Основания прямоугольной трапеции равны 2 и 6 *см*. Найти радиус круга, вписанного в трапецию.	1,5	
3	Решить неравенство $\frac{\sqrt{1-x}}{x+5} \le 1$.	$(-\infty;-5)\cup[-3;1]$	
4	В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если площадь её боковой поверхности равна $3-\sqrt{3}$.	2	
5	Вычислить $9^{\frac{x-3}{x}} \cdot 6^{x-2}$ при $x = -\log_6 27$.	$\frac{1}{3}$	
6	Найти величину $x_1^2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $3x^2 - 3x - 1 = 0$.	$\frac{5}{3}$	
7	Решить неравенство $\sqrt{3x - x^2} \cdot \log_6(2x-4) \ge 0$.	$\left[\frac{5}{2};3\right]$	
8	Найти интервалы возрастания функции $y = -\frac{25}{x+1} - 4 \cdot \ln x$.	$\left(\frac{1}{4};4\right)$	
9	Медиана, проведённая к одному из катетов прямоугольного треугольника, составляет с этим катетом угол $30°$. Найти тангенс угла между этой медианой и гипотенузой треугольника.	$\frac{\sqrt{3}}{7}$	
10	Разность арифметической прогрессии равна 1, а сумма первых четырёх её членов равна -4. Найти четвёртый член прогрессии.	0,5	
11	Найти угол в градусах: $\arcsin\frac{5}{\sqrt{28}} + \arcsin\sqrt{\frac{27}{28}}$.	150°	
12	При каких значениях a один из корней уравнения $(a+3)x^2 + 4x + 2 - a = 0$ больше, а другой меньше, чем -1.	$(-\infty;-3)$	
13	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\lvert 5x+16 \rvert > \lvert 7x+12 \rvert$.	$\frac{13}{3}$	
14	Решить уравнение $\frac{x^2-4}{3x^2-10x+8} = 2x-2$.	$\frac{1}{2}$	
15	Упростить $\frac{x^2+2x-8}{x+1} + \frac{x-2}{x-4} - \frac{3x^2-16x+26}{x^2-3x-4}$.	$x-1$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________

Тест выдан ____________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 27

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти наибольший корень уравнения $\lvert 2x-1\rvert+\lvert x-6\rvert=2x+4$.	11	
2	Решить неравенство $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{3^{\frac{1}{x}}-1}\geq 0$.	$(\,0\,;2\,]\cup\{-2\}$	
3	Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 *см* , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $60°$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.	18	
4	Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на части в отношении $3:\sqrt{10}$. Найти синус этого угла.	$\dfrac{1}{\sqrt{10}}$	
5	Острый угол ромба равен $45°$, а радиус вписанного в ромб круга равен $3\cdot\sqrt{2}$. Найти площадь ромба.	$72\cdot\sqrt{2}$	
6	Найти значение функции $y=x^3-25x+21+\dfrac{18}{x}$ в точке минимума.	–21	
7	Решить уравнение $3^{x+1}-3^x=6\cdot 9^{x-1}$.	1	
8	Решить уравнение $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{2x-6}{x^2+10x+21}$.	–2	
9	Решить уравнение $x^2+3x-18+4\cdot\sqrt{x^2+3x-6}=0$.	–5 ; 2	
10	Вычислить $\dfrac{\left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)^3-7}{\sqrt{16+8\cdot\sqrt{3}}}$.	15	
11	Найти все значения параметра a , при которых неравенство $(a-5)x^2-4x-a<0$ выполнено при всех x .	$(\,1\,;4\,)$	
12	Вычислить $5^{\frac{x+1}{2x}}\cdot 2^{x+3}$ при $x=\log_2 5$.	$40\cdot\sqrt{10}$	
13	Найти угол в градусах: $\operatorname{arctg}\left(4\cdot\sqrt{3}\right)-\operatorname{arctg}\left(\dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{13}\right)$.	$60°$	
14	Найти координаты вектора на плоскости, перпендикулярного вектору $\boldsymbol{a}=\{\,-3\,;2\,\}$, в 2 раза длиннее $\boldsymbol{a}$ и имеющего положительную первую координату .	$\{\,4\,;6\,\}$	
15	Найти сумму первых двадцати чётных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 5 .	2900	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 28

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Найти длину промежутка, на котором выполнено неравенство $\lvert 6x+17 \rvert < \lvert 4x+10 \rvert$.	0,8	
2	Решить неравенство $\dfrac{x-4}{\log_2(x-2)} \le 0$.	$(3\,;4\,]$	
3	Сумма шестого и седьмого членов арифметической прогрессии равна 20 , а сумма второго и пятого равна 8 . Найти второй член прогрессии.	1	
4	Решить уравнение $3^{1+x} - 3^{2-x} = 26$.	2	
5	В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра взаимно перпендикулярны. Найти апофему пирамиды, если её высота равна $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$.	2	
6	Найти целый корень уравнения $\log_2(x-3) = \sqrt{6-x}$.	5	
7	Найти все корни уравнения $2\cos x \operatorname{ctg} x - 3 = 0$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\pi \right]$.	$\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}$	
8	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $3:5$, а диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найти меньшую диагональ трапеции, если высота трапеции равна $\sqrt{70}$.	14	
9	Решить уравнение $\log_9 x \cdot \log_3(27x) + 1 = 0$.	$\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{1}{9}$	
10	Найти интервалы возрастания функции $y = -\dfrac{32}{x+2} - 3 \cdot \ln x$.	$\left(\dfrac{2}{3}\,;6\right)$	
11	Найти целые корни уравнения $\dfrac{2}{2x^2+x-4} + \dfrac{54}{2x^2+x+3} = 7$	$-2\,;1$	
12	Точка N делит сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношении $2:1$ (от вершины B) . Обозначим $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{AD}$. Выразить вектор $\boldsymbol{AN}$ через векторы $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ в виде линейной комбинации.	$\boldsymbol{f} + \dfrac{2}{3}\boldsymbol{g}$	
13	Найти все значения a , при которых неравенство $a^3x^2 + 2(a-3)x + \dfrac{4}{a} \le 0$ выполнено для любого значения x .	$(-\infty\,;-3\,]$	
14	В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании делит боковую сторону треугольника на части в отношении $\sqrt{8}:3$, считая от основания треугольника. Найти синус угла при основании треугольника.	$\dfrac{\sqrt{7}}{3}$	
15	Вычислить $\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{2}+1\right)^3 + 8} \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)$.	$-\sqrt{11}$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ______________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 29

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Вычислить $\sqrt{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3-2\cdot\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.	3	
2	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как 3 : 5 , а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Найти тангенс острого угла трапеции.	$\frac{\sqrt{21}}{2}$	
3	Найти все значения параметра a , при которых неравенство $\frac{1}{a}x^2+2(a+2)x+9a>0$ выполнено при всех x .	$(0;1)$	
4	Найти натуральные корни уравнения $\frac{4}{x^2-6x+9}+\frac{9}{x^2-6x+5}=1$.	2 ; 4 ; 7	
5	Найти наибольший корень уравнения $\sqrt{3x+2}-\sqrt{x-1}=\sqrt{5}$.	6	
6	Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 *см* , а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $60°$. Найти объём пирамиды.	$9\cdot\sqrt{3}$	
7	Диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения в отношении 3 : 4 . Найти большее основание трапеции, если её боковая сторона равна 10 .	$8\cdot\sqrt{2}$	
8	Найти сумму первых двадцати нечётных натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 5 .	2760	
9	Решить неравенство $\frac{\log_2(5-x)}{\sqrt{\log_2(x-1)}}\geq 0$.	$(2;4]$	
10	Решить уравнение $5^{2x-1}\cdot 3^{x+4}=45^{x+1}$.	2	
11	Упростить выражение $\frac{(\sin\alpha-\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}$.	1	
12	Найти наибольшее целое решение неравенства $\frac{\lvert x-4\rvert+8}{x}<6-x$.	-1	
13	В трапеции $ABCD$: $A(5;-2)$, $B(4;0)$, $C(-2;8)$ и $\boldsymbol{AD}=2\cdot\boldsymbol{BC}$. Найти длину средней линии трапеции.	15	
14	Вычислить $3^{\frac{x+2}{x}}\cdot 2^{x+1}$ при $x=-\log_2 3$.	$\frac{1}{2}$	
15	Найти интервалы возрастания функции $y=8x^3+13x^4-4x^5$.	$\left(-\frac{2}{5};3\right)$	

Председатель предметной комиссии по математике ___________________________

Тест выдан ________________________________

Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕСТ ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ; 2002 г.

Вариант № 30

Сумма баллов	Оценка	Подпись проверяющего	Фамилия проверяющего

№	Условия задач	Ответы	Баллы
1	Решить уравнение $2^{\frac{x+2}{x}} \cdot 3^{x-1} = 12$.	$2\ ;\ \log_3 2$	
2	Найти все значения параметра a , при которых график функции $y = \dfrac{x^2}{a} + 2(2a-3)x + 9a$ имеет с осью абсцисс две общие точки.	$(-\infty\ ;\ 0\ ) \cup (\ 3\ ;\ +\infty\ )$	
3	Найти знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, у которой произведение первого и четвёртого членов равно 192 , разность между третьим и вторым членом равна 4 .	$\dfrac{4}{3}$	
4	Длины оснований прямоугольной трапеции относятся как $2 : 3$, а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Найти синус острого угла трапеции.	$\dfrac{\sqrt{8}}{3}$	
5	Найти корень уравнения $\lvert\, x-1 \,\rvert + \lvert\, 2x+3 \,\rvert = 2x+14$, принадлежащий промежутку $[\,-5\ ;\ -2\ ]$.	$-\dfrac{16}{5}$	
6	Решить уравнение $\dfrac{x+2}{x+4} = \dfrac{5x+30}{x^2+3x-4}$.	8	
7	Найти координаты точки M , лежащей на оси Oy и равноудалённой от точек $A(\ 6\ ;\ -1\ )$ и $B(\ -2\ ;\ 3\ )$.	$(\ 0\ ;\ -3\ )$	
8	Упростить $\dfrac{x \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{x}{\sqrt{3x}+\sqrt{3}} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{x} + 4x}{\sqrt{3}(x-1)}$.	$\sqrt{\dfrac{4x}{3}}$	
9	Найти интервалы возрастания функции $y = 7 - 4x^2 + 8x + 16 \cdot \ln(x-2)$.	$(\ 2\ ;\ 3\ )$	
10	Острый угол ромба равен $45°$, а радиус вписанного в ромб круга равен $\sqrt{6}$. Найти площадь ромба.	$24 \cdot \sqrt{2}$	
11	Площадь осевого сечения цилиндра равна $3\ см^2$, а площадь его полной поверхности равна $11\pi\ \ см^2$. Найти объём цилиндра.	3π	
12	Решить неравенство $\sqrt{9-x^2} \cdot \log_2(x+1) \ge 0$.	$[\ 0\ ;\ 3\ ]$	
13	Найти все корни уравнения $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = 1$ на отрезке $\left[\ -\pi\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\ \right]$.	$\dfrac{\pi}{4}\ ;\ -\dfrac{3\pi}{4}$	
14	Решить неравенство $4 - x \le \sqrt{x+2}$.	$[\ 2\ ;\ +\infty\ )$	
15	Решить уравнение $\dfrac{3^{2x}}{100^x} = 2 \cdot (0{,}3)^x + 3$.	$\log_{0{,}3} 3$	

Председатель предметной комиссии по математике ____________________________
Тест выдан ________________________________
Исправления в графе ответов не допускаются. Черновики работы не проверяются.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Издание учебное

КАЛЕБИН Александр Викторович
КСЕНОФОНТОВ Рудольф Сергеевич

МАТЕМАТИКА

Пособие для поступающих в ВлГУ

Ответственный за выпуск – директор подготовительных курсов Ю.Г. Ястребова
Рукопись печатается в авторской редакции

Изд. лиц. № 020275. Подписано в печать 02.04.03.
Формат 60×84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Times.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,37. Уч.-изд. 8,95. Тираж 1000 экз.
Заказ .
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета
600000, г. Владимир, ул. Горького, 87.