Владимирский государственный университет

А. Е. ДОДОНОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Владимир 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. Е. ДОДОНОВ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Владимир 2021

УДК 517
ББК 22.161
Д60

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры математики Национального исследовательского технологического университета «МИСиС»
А. С. Платов

Кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры вычислительной техники и систем управления Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. Б. Буланкин

Додонов, А. Е.
Д60 Теория функций комплексного переменного : учеб. пособие / А. Е. Додонов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 132 с.
ISBN 978-5-9984-1476-3

Приведены теоретические сведения и примеры выполнения заданий по дисциплине «Теория функций комплексного переменного».

Предназначено для студентов бакалавриата, обучающихся по направлениям 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.01 «Математика и компьютерные науки».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 33. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-1476-3

Оглавление

Введение

Предлагаемое пособие представляет собой стандартный курс теории функций комплексного переменного. Курс довольно краток, поэтому автор надеется, что читатель не ограничится изучением представленного в пособии материала и прочитает книги, предлагаемые в библиографическом списке.

Курс теории функций комплексного переменного основывается на понятиях и фактах, излагаемых в таких дисциплинах, как математический анализ, общая алгебра, линейная алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальная геометрия и топология. Предполагается, что они усвоены читателем в полной мере.

Параграфы, формулы, определения и теоремы нумеруются внутри каждой главы, пункты, примеры и примечания — внутри каждого параграфа. Все заголовки выделяются полужирным шрифтом. Определяемые слова и формулировки утверждений выделяются курсивом. В пособии используются стандартные для математической литературы обозначения. Знаком $\square$ отмечается конец доказательства утверждения. На плоских рисунках, если специально не указано иное, жирные линии означают кривые, пунктирные линии — границы открытых множеств, сплошные — границы замкнутых множеств и дополнительные построения, рассматриваемые множества обычно закрашены.

1 Комплексные числа

1.1 Комплексные числа

Определения и факты, излагаемые в этом параграфе, предполагаются известными из курса общей алгебры.

Определение 1.1. *Комплексным числом* z называется

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}, \qquad i\colon i^2 = -1.$$

При этом i называется *мнимой единицей*, а вещественные числа x и y называются соответственно *вещественной частью* (или *действительной частью*) и *мнимой частью* комплексного числа z и обозначаются

$$x = \operatorname{Re} z = \Re z, \qquad y = \operatorname{Im} z = \Im z.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то число z называется *чисто мнимым.* Если $\operatorname{Im} z = 0$, то число z отождествляется с вещественным числом $\operatorname{Re} z$. Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Далее всюду запись $z = x + iy$ означает, что $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$.

Определение 1.2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 + x_2 + iy_2$ называются *равными*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Определение 1.3. Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* с комплексным числом $z = x + iy$.

Определение 1.4. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 + x_2 + iy_2$ — два комплексных числа. Определим их *сумму*, *разность*, *произведение* и *частное* формулами

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2); \qquad z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_2 y_1 + x_1 y_2);$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \quad z_2 \neq 0.$$

Возведение числа $z \neq 0$ в *целую степень* определим формулами

$$z^0 = 1, \qquad z^m = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{m}, \qquad z^{-m} = \frac{1}{z^m}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно убедиться, что определенные таким образом арифметические операции имеют те же свойства, что и аналогичные операции над вещественными числами. Отсюда сразу следует, что для комплексных чисел остаются справедливыми все формулы сокращенного умножения и формула бинома Ньютона.

Определение 1.5. *Комплексной плоскостью* $\mathbb{C}$ называется плоскость, на которой следующим образом изображаются комплексные числа: вещественная часть числа является абсциссой, а мнимая — ординатой отождествляемой с этим числом точки. Ось абсцисс комплексной плоскости называется *вещественной осью* (или *действительной осью*), а ось ординат — *мнимой осью*. Также отождествляют число z с вектором, начало которого находится в начале координат, а конец — в точке z комплексной плоскости. При этом *модулем* числа $z = x + iy$ называется длина вектора z, а *аргументом* числа z называется угол φ, образуемый вектором z с положительным направлением вещественной оси (см. рис. 1). Легко видеть, что

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Ясно, что вектор не изменится, если его повернуть на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, поэтому если φ — аргумент числа z, то и $\varphi + 2\pi k$ — тоже аргумент числа z. Таким образом, аргумент неоднозначен. Выделяют *главное значение аргумента* $\arg z$, которое нам будет удобно считать принадлежащим промежутку $(-\pi; \pi]$. Если же речь идет обо всех значениях аргумента числа z, то его обозначают через $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k \colon k \in \mathbb{Z}\}$. Особо отметим, что в этом случае мы говорим о множестве значений аргумента.

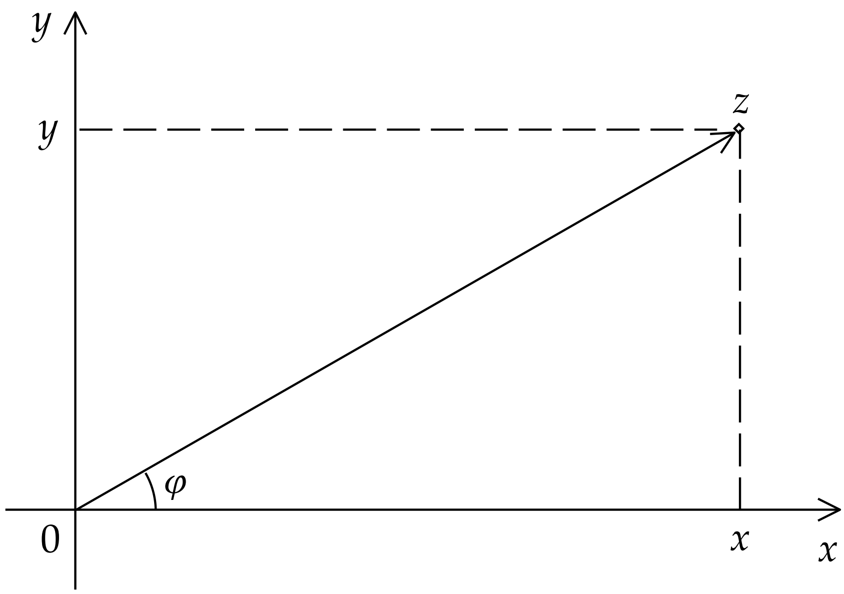

Рис. 1. Число $z = x + iy$ на комплексной плоскости

Из определений модуля и аргумента, очевидно, следует, что два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули и равны (с точностью до слагаемого $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) их аргументы.

Определение 1.6. *Тригонометрической формой записи* числа z называется его запись в виде

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \varphi = \arg z.$$

Воспользовавшись *формулой Эйлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

получим *показательную форму записи* числа z:

$$z = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi = \arg z.$$

Из определений операции сопряжения, модуля комплексного числа и формулы Эйлера легко получается

Теорема 1.1. *Для любых* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ *имеют место утверждения*

1. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$; 2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; 3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$;
4. $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}\big/\overline{z_2}$; 5. $\overline{\overline{z}} = z$; 6. $z\,\overline{z} = |z|^2$;
7. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; 8. $\big|z_1/z_2\big| = |z_1|\big/|z_2|$; 9. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
10. $|z| = 0 \iff z = 0$; 11. $|e^{i\varphi}| = 1$; 12. $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = 1\big/e^{i\varphi}$;
13. $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}$; 14. $e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}\big/e^{i\varphi_2}$; 15. $(e^{i\varphi})^m = e^{im\varphi}$.

Из этой теоремы следует, что при умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются; при делении — модули делятся, а аргументы вычитаются. Кроме того, из этой теоремы можно получить неравенство

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Наконец, из равенств

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = (e^{i\varphi})^m = e^{im\varphi} = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$$

вытекает

Теорема 1.2 (формула Муавра)**.** *Для любых* $\varphi \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ *имеет место равенство*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi.$$

Рассмотрим теперь вопрос об извлечении корней из комплексных чисел. Очевидно, извлечение корня степени n из числа z равносильно решению уравнения $w^n = z$ относительно w. Если $z = 0$, то рассматриваемая задача тривиальна: имеется единственный корень, равный 0.

Пусть теперь $z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi k)} \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда решения этого уравнения, т. е. корни степени n из числа z запишутся в виде

$$w_{k+1} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.1}$$

Ясно, что при $m = k \pmod n$ получим $w_{m+1} = w_{k+1}$, поэтому числа (1.1) — это все различные корни степени n из z. Таким образом, любое ненулевое комплексное число имеет n различных корней степени n.

Рассмотрим алгебраическое уравнение первой степени ($a \neq 0$)

$$az + b = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -b/a.$$

Таким образом, это уравнение имеет единственный корень.

Теперь решим алгебраическое уравнение второй степени ($a \neq 0$):

$$az^2 + bz + c = 0 \;\Leftrightarrow\; z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2},$$

откуда

$$z = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad D = b^2 - 4ac,$$

где знак корня означает оба корня второй степени. Таким образом, это уравнение имеет два (возможно, равных) корня.

Алгебраические уравнения третьей и четвертой степени можно решать при помощи формулы Кардано и метода Феррари соответственно, однако эти методы требуют трудоемких вычислений. Поэтому такие уравнения часто решают численно.

Корни алгебраических уравнений более высоких степеней в общем случае по теореме Абеля — Руффини и вовсе не выражаются в радикалах через коэффициенты этих уравнений.

1.2 Множества на комплексной плоскости

Определения и факты, излагаемые в этом параграфе, предполагаются известными из курса дифференциальной геометрии и топологии.

Определение 1.7. Любая функция $z(t) = x(t) + iy(t)$ вещественного переменного t, для которой на отрезке $[\alpha, \beta]$ определены и непрерывны вещественнозначные функции $x(t)$ и $y(t)$, задает *непрерывную кривую* Γ. Точки $a = z(\alpha)$ и $b = z(\beta)$ называются соответственно *началом* и *концом* кривой Γ. Если $a = b$, то кривая Γ называется *замкнутой* или *замкнутым контуром.* Кривая Γ, у которой все точки проходятся только один раз (кроме, разумеется, совпадающих начала и конца для замкнутой кривой), называется *жордановой.* Ясно, что две различные функции, определенные на разных отрезках, могут иметь один и тот же образ. Если непрерывной и строго монотонной заменой параметра одна из них сводится к другой, соответствующие кривые называются *тождественными.* Если при этом функция, осуществляющая эту замену, возрастающая, кривые имеют *одинаковое направление*; если же убывающая — *разное.* Если существует такая постоянная C, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для любого разбиения кривой Γ точками $a = z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_n = b$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \leqslant C,$$

то кривая Γ называется *спрямляемой*, а точная верхняя грань таких сумм называется *длиной* Γ. Если среди всех функций, задающих непрерывную кривую Γ, найдется такая $z(t) = x(t) + iy(t)$, что функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем $\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 \neq 0$, то кривая Γ называется *гладкой.* Если же кривая Γ состоит из конечного числа гладких дуг, то она называется *кусочно гладкой.*

Теорема 1.3. *Кусочно гладкая кривая* $\Gamma\colon z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, *спрямляема, ее длина* l *равна*

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt.$$

Легко видеть, что *окружностью*, *открытым кругом* и *замкнутым кругом* с центром в точке z_0 радиуса r являются соответственно следующие множества (см. рис. 2):

$$\{z\colon |z - z_0| = r\}, \qquad \{z\colon |z - z_0| < r\}, \qquad \{z\colon |z - z_0| \leqslant r\}.$$

Кольцом называется множество

$$\{z\colon r < |z - z_0| < R\}, \qquad \text{где} \qquad 0 \leqslant r < R \leqslant \infty.$$

Окружности, открытые и замкнутые круги и кольца часто обозначают только соответствующими равенствами или неравенствами, опуская фигурные скобки.

Определение 1.8. Назовем *ε-окрестностью* (или просто *окрестностью*) точки z_0 открытый круг радиуса ε с центром в этой точке: $|z - z_0| < \varepsilon$. *Проколотой окрестностью* точки z_0 назовем множество таких точек z, что $0 < |z - z_0| < \varepsilon$.

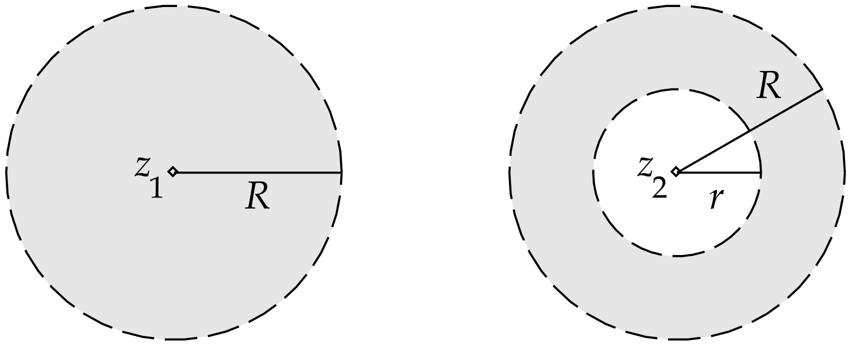

Рис. 2. Круг $|z - z_1| < R$ и кольцо $r < |z - z_2| < R$

Определение 1.9. *Точкой прикосновения* множества G называется точка, в любой окрестности которой лежит хотя бы одна точка из G. *Предельной точкой* множества G называется точка, в любой окрестности которой лежит бесконечно много точек из G. *Внутренней точкой* множества G называется такая точка, для которой найдется окрестность, целиком лежащая в G. *Граничной точкой* множества G называется точка, в любой окрестности которой есть как точки из G, так и точки, не принадлежащие G. *Изолированной точкой* множества G называется такая точка, принадлежащая G, для которой найдется проколотая окрестность, не имеющая общих точек с G.

Определение 1.10. Множество G, содержащее все свои предельные точки, называется *замкнутым*. Множество G, все точки которого являются для него внутренними, называется *открытым*. Множество G называется *ограниченным*, если оно целиком лежит в некотором круге $|z| < r$, где $r < \infty$. Множество G называется *связным*, если при любом его разбиении на два непустых непересекающихся подмножества, хотя бы одно из этих подмножеств содержит предельную точку другого.

Теорема 1.4. *Множество точек непрерывной кривой* Γ *является ограниченным, замкнутым и связным.*

Определение 1.11. Пусть G и F — множества, z — произвольная точка. *Расстоянием от точки z до множества G* и *расстоянием между множествами F и G* называются соответственно числа $\rho(z, G)$ и $\rho(F, G)$, определяемые формулами

$$\rho(z, G) = \inf_{\zeta \in G} |z - \zeta|, \qquad \rho(F, G) = \inf_{z \in F} \rho(z, G). \tag{1.2}$$

Диаметром ограниченного множества G называется число

$$d(G) = \sup_{z, \zeta \in G} |z - \zeta|.$$

Определение 1.12. *Областью* называется открытое связное множество. Совокупность граничных точек области D называется *границей* этой области. Область D с присоединенной к ней границей называется *замкнутой областью* $\overline{D}$. Замкнутая область, очевидно, является замкнутым множеством. Область D называется *односвязной*, если ее граница связна, и *многосвязной* в противном случае. Если граница многосвязной области D состоит из m связных частей, то область D называется *m-связной.*

Например, открытый круг является односвязной областью, а кольцо — двусвязной.

Теорема 1.5. *Открытое множество D является областью тогда и только тогда, когда любые две точки из D можно соединить целиком лежащей в D непрерывной кривой.*

Теорема 1.6. *Открытое множество D является областью тогда и только тогда, когда любые две точки из D можно соединить целиком лежащей в D ломаной.*

Теорема 1.7 (Жордан). *Замкнутая жорданова кривая Γ разбивает плоскость на две и только две различные области. При этом Γ является общей границей этих областей.*

Определение 1.13. Ограниченная область, смежная с замкнутой жордановой кривой Γ, называется *внутренностью* кривой Γ, а неограниченная — *внешностью* кривой Γ.

Теорема 1.8. *Если Γ — замкнутая жорданова кривая, принадлежащая односвязной области D, то внутренность Γ тоже принадлежит D.*

1.3 Числовые последовательности и ряды

Определение 1.14. *Числовой последовательностью* $\{z_n\}$ называется комплекснозначная функция натурального переменного. Комплексное число z называется *пределом* числовой последовательности $\{z_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \text{или} \qquad z_n \to z \text{ при } n \to \infty,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N$ точки z_n лежат в ε-окрестности точки z, т. е. выполняется неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$. В этом случае последовательность $\{z_n\}$ называется *сходящейся* к z.

Лемма 1.1. *Для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы неравенства*

$$\max\big\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\big\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$. Имеем

$$x^2 \leqslant x^2 + y^2, \quad y^2 \leqslant x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 = \big(|x| + |y|\big)^2,$$

откуда и получаются доказываемые неравенства. □

Теорема 1.9. *Пусть $z_n = x_n + iy_n$, $z = x + iy$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Доказательство. 1. Пусть $\{z_n\}$ сходится к z. Тогда для $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant N$ выполнено неравенство $|z_n - z| < \varepsilon$. Но по лемме 1.1

$$|x_n - x| = \big|\operatorname{Re}(z_n - z)\big| \leqslant |z_n - z| < \varepsilon,$$

откуда сразу получаем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к x. Аналогично, последовательность $\{y_n\}$ сходится к y.

2. Обратно, пусть $\{x_n\}$ сходится к x, $\{y_n\}$ сходится к y. Тогда для $\varepsilon > 0$ при $n \geqslant N_1$ выполнено неравенство $|x_n - x| < \varepsilon/2$, при $n \geqslant N_2$ выполнено неравенство $|y_n - y| < \varepsilon/2$. Очевидно, оба неравенства будут выполнены при $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда по лемме 1.1

$$|z_n - z| \leqslant \big|\operatorname{Re}(z_n - z)\big| + \big|\operatorname{Im}(z_n - z)\big| = |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon,$$

т. е. последовательность $\{z_n\}$ сходится к z. □

Из теоремы 1.9 и известных свойств предела вещественной последовательности легко получается следующая теорема.

Теорема 1.10. *Если последовательности $\{z_n\}$ и $\{w_n\}$ сходятся, то существуют и пределы*

$$\lim_{n\to\infty}(z_n \pm w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \pm \lim_{n\to\infty} w_n; \qquad \lim_{n\to\infty}(z_n w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \lim_{n\to\infty} w_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}, \qquad \text{если} \qquad \lim_{n\to\infty} w_n \neq 0.$$

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, поскольку сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 1.11. *Если $z_n \to z$ при $n \to \infty$, то и $|z_n| \to |z|$ при $n \to \infty$. Обратное верно при $z = 0$ и, вообще говоря, неверно при $z \neq 0$.*

Теорема 1.12. *Последовательность* $\{z_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такой номер* $N = N(\varepsilon)$, *что при* $n, m \geqslant N$ *выполнено* $|z_n - z_m| < \varepsilon$.

Теорема 1.13. *Любая последовательность вложенных друг в друга ограниченных замкнутых множеств, диаметры которых стремятся к нулю, имеет одну и только одну общую точку.*

Определение 1.15. *Числовым рядом* называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k. \tag{1.3}$$

Сумма S_n первых n членов последовательности $\{z_k\}$ называется *n-й частичной суммой* ряда (1.3). Если существует предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то ряд (1.3) называется *сходящимся*, а число S называется *суммой* этого ряда. В противном случае ряд (1.3) называется *расходящимся*.

Из теоремы 1.9 сразу следует

Теорема 1.14. *Пусть* $z_k = x_k + iy_k$. *Ряд* (1.3) *сходится и имеет сумму* $S = X + iY$ *тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

и их суммы равны X *и* Y *соответственно.*

Отсюда легко получается

Теорема 1.15. *Справедливы равенства*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k \pm w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \qquad \lambda\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda z_k,$$

если ряды в правых частях сходятся.

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, т. к. сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 1.16 (необходимый признак сходимости)**.** *Если ряд* (1.3) *сходится, то* $z_k \to 0$ (*и, следовательно,* $|z_k| \to 0$) *при* $k \to \infty$. *Обратное, вообще говоря, неверно.*

Теорема 1.17. *Если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|, \tag{1.4}$$

то сходится и ряд (1.3). *Обратное, вообще говоря, неверно.*

Определение 1.16. Ряд (1.3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (1.4). Если же ряд (1.4) расходится, но (1.3) сходится, то (1.3) называется *условно сходящимся* рядом.

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, поскольку сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 1.18. *Сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов.*

Теорема 1.19. *Если абсолютно сходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = Z \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} w_k = W,$$

то абсолютно сходятся и ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k \pm w_k) = Z \pm W \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c_n = ZW, \quad \text{где} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} z_k w_{n-k+1}.$$

Пример. Число e^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$, можно определить равенством

$$e^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!}.$$

Проверим выполнение аналогичного равенства для $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \varphi^{2l}}{(2l)!} + i \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \varphi^{2l+1}}{(2l+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \varphi^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}.$$

2 Функции комплексного переменного

2.1 Функции комплексного переменного

Определение 2.1. Будем говорить, что на множестве G задана *функция* f, если задано правило, по которому каждой точке $z \in G$ ставится в соответствие точка или множество точек $w = f(z)$. Множество G при этом называется *множеством определения* функции $f(z)$, а множество E всех возможных значений функции $f(z)$ называется ее *множеством значений.* Если каждой точке $z \in G$ соответствует только одна точка $w \in E$, то функция $f(z)$ называется *однозначной.* В противном случае функция $f(z)$ называется *многозначной.* Если любым двум различным точкам z_1 и z_2 множества H соответствуют различные значения функции $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$, то функция $f(z)$ называется *однолистной* на множестве H. Функция $f(z)$ называется *ограниченной* на множестве H, если существует такое вещественное число M, что $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M$ для всех $z \in H$.

Изображая точки z на одной плоскости, а соответствующие точки $w = f(z)$ — на другой, мы получим, что функция f представляет собой отображение множества G плоскости z на множество E плоскости w.

Если обозначить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то, очевидно, задание функции $w = f(z)$ будет равносильно заданию двух функций двух вещественных переменных: ее вещественной части $u(x, y)$ и ее мнимой части $v(x, y)$. Всюду далее запись $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ будет означать, что $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — вещественнозначные функции двух вещественных переменных x и y.

Определение 2.2. Пусть задана функция $w = f(z)$, множеством определения которой является множество G, а множеством значений — множество E. Функция $z = \tilde{f}(w)$, ставящая каждой точке $w \in E$ совокупность всех таких точек $z \in G$, что $w = f(z)$, называется *обратной* к функции $w = f(z)$.

Определение 2.3. Пусть заданы две функции: $w = f(z)$ и $s = g(w)$, причем G — множество определения f, E — множество значений f и множество определения g, B — множество значений g. Тогда функция $s = g\bigl(f(z)\bigr)$, множеством определения которой является G, а множеством значений — B, называется *сложной* функцией или *суперпозицией* функций f и g.

Определение 2.4. Пусть однозначная функция $f(z)$ определена в проколотой окрестности точки z_0. Число A называется *пределом функции $f(z)$ в точке z_0*:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \qquad \text{или} \qquad f(z) \to A \text{ при } z \to z_0,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех z из проколотой δ-окрестности точки z_0 точки $f(z)$ лежат в ε-окрестности точки A, т. е. для всех z: $0 < |z - z_0| < \delta$ выполняется неравенство $\bigl|f(z) - A\bigr| < \varepsilon$.

Примечание. Отметим, что определение 2.4 подразумевает существование единого предела A функции $f(z)$ в точке z_0 для всех «маршрутов» приближения к точке z_0.

Теорема 2.1. *Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = \alpha + i\beta$. Тогда*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} u(x,y) = \alpha \quad \text{и} \quad \lim_{z\to z_0} v(x,y) = \beta. \tag{2.1}$$

Доказательство. 1. Пусть $f(z) \to A$ при $z \to z_0$. Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех z: $0 < |z - z_0| < \delta$ выполнено неравенство $\bigl|f(z) - A\bigr| < \varepsilon$. Но по лемме 1.1 имеем

$$\bigl|u(x,y) - \alpha\bigr| = \bigl|\operatorname{Re}\bigl(f(z) - A\bigr)\bigr| \leqslant \bigl|f(z) - A\bigr| < \varepsilon$$

при $0 < |z - z_0| < \delta$, а также аналогичное неравенство для $v(x,y)$. Значит, справедливы равенства

$$\lim_{z\to z_0} u(x,y) = \alpha \qquad \text{и} \qquad \lim_{z\to z_0} v(x,y) = \beta.$$

2. Обратно, пусть выполнены равенства в правой части (2.1). Тогда для $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что для всех x и y, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta_1$, выполнено неравенство $\bigl|u(x,y) - \alpha\bigr| < \varepsilon/2$, и найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всех x и y, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta_2$, выполнено неравенство $\bigl|v(x,y) - \beta\bigr| < \varepsilon/2$. Очевидно, оба неравенства будут выполнены при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда по лемме 1.1 имеем

$$\bigl|f(z) - A\bigr| \leqslant \bigl|u(x,y) - \alpha\bigr| + \bigl|v(x,y) - \beta\bigr| < \varepsilon$$

при $0 < |z - z_0| < \delta$. Но это и означает, что $f(z) \to A$ при $z \to z_0$. $\square$

Из теоремы 2.1 и свойств предела функции двух вещественных переменных получается

Теорема 2.2. *Если пределы функций $f(z)$ и $g(z)$ при $z \to z_0$ существуют, то*

$$\lim_{z\to z_0} \big(f(z) \pm g(z)\big) = \lim_{z\to z_0} f(z) \pm \lim_{z\to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0} \big(f(z)g(z)\big) = \lim_{z\to z_0} f(z) \lim_{z\to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}, \qquad \text{если} \qquad \lim_{z\to z_0} g(z) \neq 0.$$

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, поскольку сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 2.3. *Функция $f(z)$ имеет предел A в точке z_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, последовательность $\big\{f(z_n)\big\}$ сходится к A.*

Теорема 2.4. *Функция $f(z)$ имеет предел A в точке z_0 тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде $f(z) = A + \eta(z)$, где $\eta(z)$ — бесконечно малая (т. е. $\eta(z) \to 0$) при $z \to z_0$.*

Теорема 2.5. *Если функция $f(z) \to A$ при $z \to z_0$, то и $\big|f(z)\big| \to |A|$ при $z \to z_0$. Обратное верно при $A = 0$ и, вообще говоря, неверно при $A \neq 0$.*

Теорема 2.6. *Если функция имеет предел в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Определение 2.5. Однозначная функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *непрерывной* в точке z_0, если существует

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функция $f(z)$ называется *непрерывной на множестве* G, если она определена в G и для любой предельной точки z_0 множества G, принадлежащей G, предел $f(z)$ при $z \to z_0$, где z все время остается в G, равен $f(z_0)$. Функция $f(z)$ называется *непрерывной на жордановой кривой* Γ *по ее внутренности* D, если для любой точки z_0 кривой Γ предел $f(z)$ при $z \to z_0$ по точкам z области D равен $f(z_0)$.

Сначала рассмотрим локальные свойства непрерывных функций. Из теоремы 2.1 легко получается

Теорема 2.7. *Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, поскольку сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 2.8. *Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0, последовательность $\big\{f(z_n)\big\}$ сходится к $f(z_0)$.*

Теорема 2.9. *Функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому (т. е. стремящемуся к нулю) приращению h переменной соответствует бесконечно малое приращение $f(z_0 + h) - f(z_0)$ функции.*

Теорема 2.10. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке z_0, то функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ и $f(z)\big/g(z)$ (последняя — при условии, что $g(z_0) \neq 0$) тоже непрерывны в этой точке. Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $g(w)$ непрерывна в точке $w_0 = f(z_0)$, то сложная функция $g\big(f(z)\big)$ непрерывна в точке z_0.*

Рассмотрим теперь свойства функций, непрерывных на ограниченном и замкнутом множестве. Такие множества на комплексной плоскости являются компактами. Для этого нам потребуется следующее

Примечание. По теореме 2.9 функция $|z|$ комплексного переменного $z = x + iy$ непрерывна в любой точке, поскольку ее приращение $|z + h| - |z| \leqslant |z| + |h| - |z| = |h|$. Тогда если функция $f(z)$ комплексного переменного z непрерывна в некоторой точке, то по теореме 2.10 и функция $\big|f(z)\big|$ комплексного переменного z непрерывна в этой точке. А поскольку $\big|f(z)\big| = \operatorname{Re}\big|f(z)\big|$, по теореме 2.7 функция $\big|f(z)\big|$ является непрерывной функцией двух вещественных переменных x и y.

Определение 2.6. Функция $f(z)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве G, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что для любой пары точек $z_1, z_2 \in G$, удовлетворяющих неравенству $|z_1 - z_2| < \delta$, выполняется неравенство $\big|f(z_1) - f(z_2)\big| < \varepsilon$.

Теорема 2.11. *Пусть функция $f(z)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве G. Тогда*

1. *$f(z)$ ограничена на G;*

2. *$f(z)$ достигает на G своих наибольшего и наименьшего по модулю значений, т. е. существуют такие $z_1, z_2 \in G$, что для любого $z \in G$ выполнены неравенства $\big|f(z_1)\big| \leqslant \big|f(z)\big| \leqslant \big|f(z_2)\big|$;*

3. *$f(z)$ равномерно непрерывна на G.*

Доказательство. Модуль непрерывной функции комплексного переменного является непрерывной функцией двух вещественных переменных. Отсюда сразу следуют утверждения 1 и 2.

Докажем утверждение 3. Пусть

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2.$$

Поскольку $f(z)$ непрерывна на G, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ непрерывны на G. Следовательно, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ равномерно непрерывны на G. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, что при $|z_1 - z_2| < \delta_1$ выполнено неравенство $\big|u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2)\big| < \varepsilon/2$, и найдется такое $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$, что при $|z_1 - z_2| < \delta_2$ выполнено неравенство $\big|v(x_1,y_1) - v(x_2,y_2)\big| < \varepsilon/2$. Очевидно, оба неравенства будут выполняться при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено

$$\big|f(z_1) - f(z_2)\big| \leqslant \big|u(x_1,y_1) - u(x_2,y_2)\big| + \big|v(x_1,y_1) - v(x_2,y_2)\big| < \varepsilon,$$

откуда и следует равномерная непрерывность $f(z)$. □

Пример. Покажем, что если G и F — ограниченные замкнутые множества, то в равенствах (1.2), определяющих расстояние от точки до G и расстояние между G и F, точные нижние грани достигаются.

Поскольку, очевидно, $|z - \zeta|$ — непрерывная функция от ζ, точная нижняя грань в первом равенстве в (1.2) достигается в некоторой точке $\zeta_0 \in G$. Теперь покажем, что $\rho(z, G)$ — непрерывная функция от z. Пусть $\rho(z, G) = |z - \zeta_0|$, $\zeta_0 \in G$. Тогда

$$\rho(z_1, G) \leqslant |z_1 - \zeta_0| = |z_1 - z + z - \zeta_0| \leqslant |z_1 - z| + |z - \zeta_0| = |z_1 - z| + \rho(z, G),$$

откуда $\rho(z_1, G) - \rho(z, G) \leqslant |z_1 - z|$. Аналогичным образом получается неравенство $\rho(z, G) - \rho(z_1, G) \leqslant |z - z_1|$. Значит, для $\varepsilon > 0$ и $\delta = \varepsilon$ при $|z_1 - z| < \delta$ выполнено

$$\big|\rho(z_1, G) - \rho(z, G)\big| \leqslant |z_1 - z| < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность $\rho(z, G)$. Значит, и во втором равенстве в (1.2) точная нижняя грань достигается в некоторой точке $z_0 \in F$.

2.2 Производная. Условия Коши — Римана

Для комплекснозначной функции $f(x) = u(x) + iv(x)$ вещественного переменного x ее производная равна

$$f'(x_0) = u'(x_0) + iv'(x_0).$$

Определим теперь производную функции комплексного переменного.

Определение 2.7. Пусть функция $f(z)$ комплексного переменного z определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0. Если существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h},$$

то функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z_0, а сам этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается через $f'(z_0)$.

Теорема 2.12 (условия Коши — Римана). *Определенная в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$ функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ дифференцируема в точке z_0 (как функция комплексного переменного) тогда и только тогда, когда в точке (x_0, y_0) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы (как функции двух вещественных переменных) и выполнены равенства*

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x. \tag{2.2}$$

Доказательство. 1. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, т. е. существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

Воспользуемся примечанием к определению предела функции комплексного переменного: предел функции в точке не зависит от способа приближения к этой точке.

Пусть сначала $h = \alpha + i\cdot 0$. Тогда

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(z_0+\alpha) - f(z_0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{u(x_0+\alpha, y_0) + iv(x_0+\alpha, y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{\alpha} = \\ &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{u(x_0+\alpha, y_0) - u(x_0,y_0)}{\alpha} + i\lim_{\alpha\to 0} \frac{v(x_0+\alpha, y_0) - v(x_0,y_0)}{\alpha} = \\ &\qquad = u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Теперь пусть $h = 0 + i\beta$. Тогда

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\beta\to 0} \frac{f(z_0 + i\beta) - f(z_0)}{i\beta} = \\
&= \lim_{\beta\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) + iv(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\beta} = \\
&= \lim_{\beta\to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0)}{i\beta} + \lim_{\beta\to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0)}{\beta} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0).
\end{aligned}
$$

Сравнивая вещественные и мнимые части полученных выражений для $f'(z_0)$, получаем, что в точке (x_0, y_0) равенства (2.2) выполнены.

Дифференцируемость функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ следует из теоремы 3.14, которую мы докажем независимо от теоремы 2.12.

2. Докажем теперь обратное утверждение. Поскольку $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0), их приращения можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
u(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - u(x_0, y_0) &= u'_x(x_0, y_0)\alpha + u'_y(x_0, y_0)\beta + \varepsilon_1|h|, \\
v(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - v(x_0, y_0) &= v'_x(x_0, y_0)\alpha + v'_y(x_0, y_0)\beta + \varepsilon_2|h|,
\end{aligned}
$$

где $h = \alpha + i\beta$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ при $h \to 0$. Умножая второе равенство на i и складывая оба равенства, получаем

$$
\begin{aligned}
&f(z_0 + h) - f(z_0) = \\
&\qquad = u'_x(x_0, y_0)\alpha + u'_y(x_0, y_0)\beta + i\big(v'_x(x_0, y_0)\alpha + v'_y(x_0, y_0)\beta\big) + \varepsilon|h|,
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$. Перегруппируем слагаемые в правой части последнего равенства:

$$
\begin{aligned}
&f(z_0 + h) - f(z_0) = \\
&\quad = \big(u'_x(x_0, y_0)\alpha + iv'_y(x_0, y_0)\beta\big) + \big(u'_y(x_0, y_0)\beta + iv'_x(x_0, y_0)\alpha\big) + \varepsilon|h|,
\end{aligned}
$$

воспользуемся равенствами (2.2):

$$
\begin{aligned}
&f(z_0 + h) - f(z_0) = \\
&= \big(u'_x(x_0, y_0)\alpha + iu'_x(x_0, y_0)\beta\big) + \big(-v'_x(x_0, y_0)\beta + iv'_x(x_0, y_0)\alpha\big) + \varepsilon|h|.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
f(z_0 + h) - f(z_0) = u'_x(x_0, y_0)h + iv'_x(x_0, y_0)h + \varepsilon|h|,
$$

так что

$$
\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) + \varepsilon\frac{|h|}{h}.
$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$, учитывая, что $\varepsilon \to 0$ при $h \to 0$:

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0),$$

т. е. функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0. □

Из (2.3) и (2.2) получается

Следствие 2.1. *Имеют место формулы*

$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0), \qquad f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0),$$
$$f'(z_0) = u'_x(x_0, y_0) - iu'_y(x_0, y_0), \qquad f'(z_0) = v'_y(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

Следующие теоремы сохраняются из вещественного анализа, поскольку сохраняются и все необходимые для их доказательства утверждения.

Теорема 2.13. *Из дифференцируемости функции в точке следует ее непрерывность в этой точке. Обратное, вообще говоря, неверно.*

Теорема 2.14. *Имеют место правила дифференцирования:*

$$\big(f(z) \pm g(z)\big)' = f'(z) \pm g'(z), \qquad \big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$
$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \quad \big(f\big(g(z)\big)\big)' = f'_g\big(g(z)\big)g'(z).$$

Теорема 2.15. *Если $f(z)$ и $\tilde{f}(w)$ — взаимно обратные функции, однолистные в окрестностях точек z и w соответственно, то*

$$\tilde{f}'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

Определение 2.8. Функция $f(z)$, дифференцируемая во всех точках области D, называется *аналитической* в области D.

Примечание. В определении 2.8 подразумевается однозначность аналитической функции.

Пример. Для функции $f = 6x - xy + y^2 + i(y + xy + x)$ найдем все точки, в которых она дифференцируема. Вычислим значения ее производной в них.

Из условий Коши — Римана получаем

$$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - y = 1 + x, \\ -x + 2y = -y - 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5, \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

Эта система линейных алгебраических уравнений имеет единственное решение $x = 4$, $y = 1$. Значит, функция f дифференцируема в единственной точке $4 + i$.

Вычислим теперь значение производной функции f в точке $4 + i$:

$$f'(4 + i) = u'_x(4, 1) + iv'_x(4, 1) = 5 + 2i.$$

2.3 Основные элементарные функции

Подробнее об основных элементарных функциях можно узнать в книгах [1, 2].

1. *Степенная функция $w = z^n$ с натуральным показателем n* комплексного переменного z определена нами ранее. Эта функция однозначна. Она, очевидно, является однолистной в любой области, которая не содержит никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $|z_1| = |z_2|$ и $\arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k/n$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку для любого $z \in \mathbb{C}$ существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z + h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C_n^1 z^{n-1} h + C_n^2 z^{n-2} h^2 + \ldots}{h} = nz^{n-1},$$

функция $w = z^n$ аналитична во всей плоскости.

2. *Степенная функция $w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ с показателем $1/n$, $n \in \mathbb{N}$,* обратная к функции $z = w^n$, также рассматривалась нами ранее.

Как мы видели, функция $w = z^{1/n}$ при $z \neq 0$ является n-значной. Из формулы (1.1) для корней из комплексного числа ясно, что значение $\sqrt[n]{z}$ определяется значением аргумента числа z. Выберем точку $z_0 \neq 0$, одно значение ее аргумента (корень при этом значении аргумента обозначим w_0) и замкнутую жорданову кривую Γ, содержащую эту точку и не проходящую через начало координат. Будем обходить Γ, начиная с z_0, причем значение аргумента текущей точки z выбираем так, чтобы оно изменялось непрерывно, начиная с выбранного значения аргумента z_0. Тогда и значение $w = \sqrt[n]{z}$, которое полностью определяется сделанным выбором аргумента, будет изменяться непрерывно.

Если внутренность кривой Γ не содержит начало координат, то значение $w = \sqrt[n]{z}$ опишет замкнутую кривую γ_0 и вернется к исходному, поскольку выбираемое нами значение аргумента z вернется к выбранному нами значению аргумента z_0. Значения корня, определяемые другими значениями аргумента z_0, при обходе Γ будут описывать другие замкнутые кривые γ_k, отличающиеся от γ_0 поворотом на угол $2\pi k/n$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Если же внутренность кривой Γ содержит начало координат, при полном обходе Γ значение корня не вернется к исходному, а станет равным $w_0 e^{2\pi i/n}$, ибо аргумент при таком обходе получит приращение 2π. К своему исходному значению корень вернется лишь при n-кратном обходе кривой Γ. На рис. 3 изображены образы окружностей $|z-1-i|=1$ и $|z-1-i|=2$ при отображении $w=\sqrt[3]{z}$; разные типы линий соответствуют разному выбору аргумента числа z.

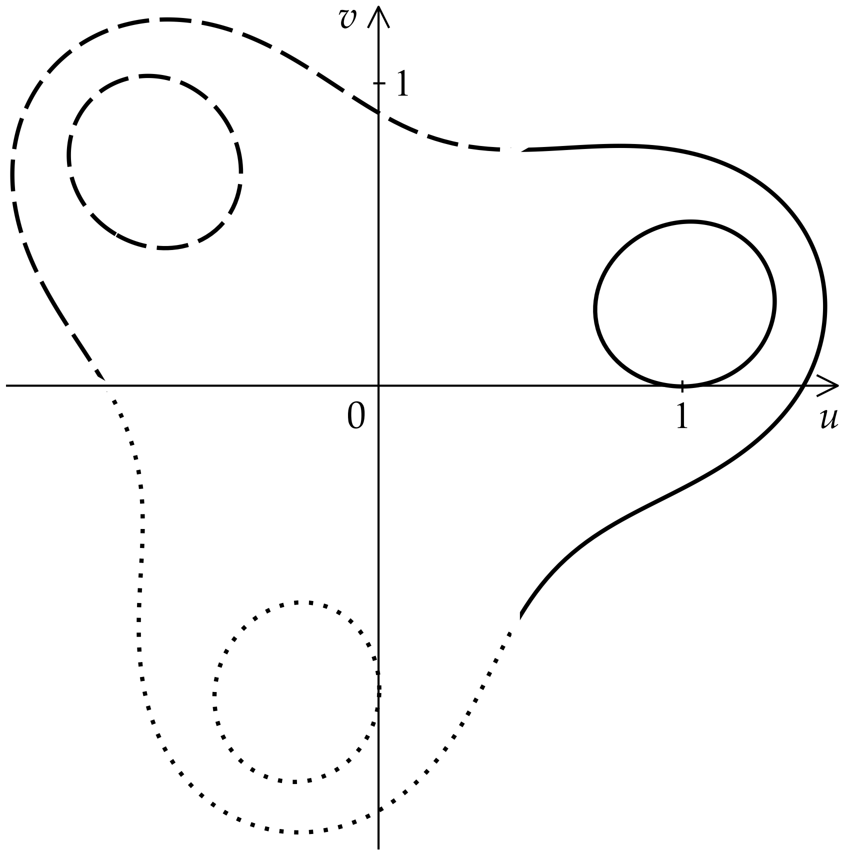

Рис. 3. Образы окружностей при отображении $w=\sqrt[3]{z}$

Таким образом, в любой ограниченной области D, не содержащей замкнутых жордановых кривых с началом координат во внутренности, можно выделить n однозначных непрерывных функций $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, принимающих каждая одно из значений $\sqrt[n]{z}$. Эти n функций называются *ветвями* многозначной функции $w=\sqrt[n]{z}$. Каждая такая ветвь будет в D однолистной, поэтому к ним можно применить правило дифференцирования обратной функции:

$$\left(\left(\sqrt[n]{z}\right)_k\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n}\frac{\left(\sqrt[n]{z}\right)_k}{z},$$

где и для функции, и для производной берется одна и та же ветвь. Тем самым, каждая из этих ветвей в D аналитична.

Если же область содержит замкнутую жорданову кривую с началом координат во внутренности, ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$ друг от друга отделить не получится. Тем самым, точка $z = 0$ является *точкой ветвления* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Мы введем строгое определение точки ветвления позднее.

3. *Показательная функция* $w = e^z$ комплексного переменного $z = x + iy$ определяется формулой

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{2.4}$$

Эта функция однозначна. Определение (2.4), очевидно, совпадает с обычным при $y = 0$. Далее, имеем $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$, откуда $u'_x = v'_y = e^x \cos y$, $v'_x = -u'_y = e^x \sin y$, т. е. условия Коши — Римана выполняются в любой точке комплексной плоскости, а значит функция $w = e^z$ аналитична во всей плоскости. Найдем теперь производную показательной функции:

$$(e^z)' = u'_x + iv'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Проверим теперь основные свойства показательной функции: если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2},$$

$$e^{-z} = e^{-x}e^{-iy} = \frac{1}{e^x} \cdot \frac{1}{e^{iy}} = \frac{1}{e^z}, \qquad e^{z_1-z_2} = e^{z_1}e^{-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}},$$

$$(e^z)^m = e^{mx}e^{imy} = e^{mz}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что $|e^z| = e^x \neq 0$, так что $e^z \neq 0$ при любом $z \in \mathbb{C}$.

Кроме того, отметим, что функция $w = e^z$ периодична с основным периодом $2\pi i$: действительно, $e^{z+T} = e^z \;\Leftrightarrow\; e^T = 1 \;\Leftrightarrow\; T = 2\pi ki,\; k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку $e^{z_1} = e^{z_2} \;\Leftrightarrow\; e^{z_1-z_2} = 1 \;\Leftrightarrow\; z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$, функция $w = e^z$ однолистна в любой области, которая не содержит никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. *Логарифмическая функция* $w = \operatorname{Ln} z$ определяется для $z \neq 0$ как функция, обратная к $z = e^w$. Решая уравнение $z = e^w$ относительно w, получаем $|z|e^{i \operatorname{Arg} z} = e^w$, т. е. $e^{\ln|z| + i \operatorname{Arg} z} = e^w$, откуда

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z. \tag{2.5}$$

Функция $w = \operatorname{Ln} z$ многозначна: каждому $z \neq 0$ соответствует бесконечно много логарифмов, отличающихся друг от друга на слагаемое вида $2\pi ki$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приведем основные свойства логарифмов:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \\ = \ln|z_1 z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \\ = \ln|z_1| - \ln|z_2| + i(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\frac{1}{z} = \operatorname{Ln} 1 - \operatorname{Ln} z = 2\pi k i - \ln|z| - i\operatorname{Arg} z = \\ = -\ln|z| - i(\arg z + 2\pi m - 2\pi k) = -\ln|z| - i\operatorname{Arg} z = -\operatorname{Ln} z.$$

Эти равенства являются равенствами множеств, т. е. означают, что множества в левой и правой частях состоят из одних и тех же чисел.

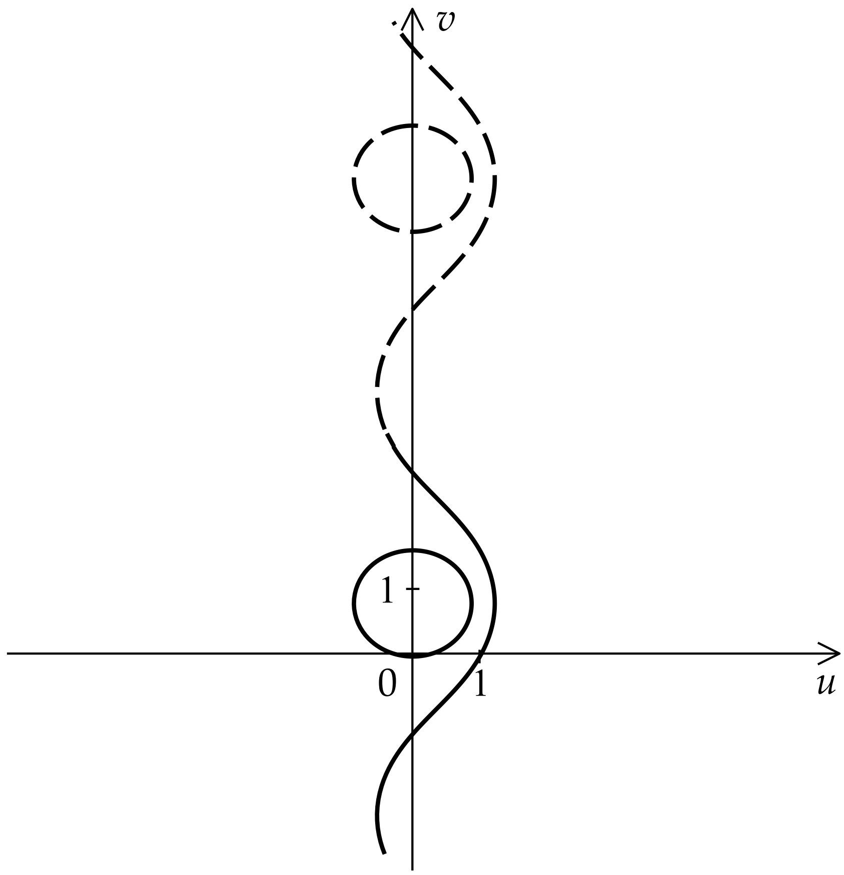

Рис. 4. Образы окружностей при отображении $w = \operatorname{Ln} z$

Из формулы (2.5) ясно, что значение логарифма определяется значением аргумента числа z. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным ранее для корня, получим, что в любой ограниченной области D, не содержащей замкнутых жордановых кривых с началом координат во внутренности, можно выделить бесконечно много однозначных непрерывных функций, принимающих каждая одно из значений логарифма z, т. е. ветвей многозначной функции $w = \operatorname{Ln} z$. На рис. 4 изображены образы окружностей $|z-1-i| = 1$ и $|z-1-i| = 2$ при отображении $w = \operatorname{Ln} z$; разные типы линий соответствуют разному выбору аргумента числа z. Обозначим конкретную ветвь через $\ln_k z$. Каждая такая ветвь будет в D однолистной, поэтому к ним применимо правило дифференцирования обратной функции:

$$(\ln_k z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{z},$$

причем для всех ветвей производная одна и та же. Таким образом, все ветви логарифма в D аналитичны. Мы будем обозначать *главное значение логарифма*, т. е. ветвь, для которой выбрано главное значение аргумента, через $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Если же область D содержит замкнутую жорданову кривую с началом координат внутри, то, как и в случае с корнем, ветви функции $w = \operatorname{Ln} z$ друг от друга отделить не получится. Точка $z = 0$ является точкой ветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$. Разницу между точками ветвления у корня и логарифма мы строго опишем позднее.

5. *Тригонометрические функции*: *синус*, *косинус*, *тангенс* и *котангенс* определяются следующими формулами:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

При $x \in \mathbb{R}$ эти определения согласуются с определениями вещественных тригонометрических функций, поскольку

$$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Найдем точки, в которых эти функции обращаются в ноль.

$$\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iz} - e^{-iz} = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2iz} = 1 \;\Leftrightarrow\; 2iz = 2\pi k i \;\Leftrightarrow\; z = \pi k,\; k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда $\operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогично, $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \pi/2 + \pi k$, откуда $\operatorname{ctg} z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Основное тригонометрическое тождество легко получается из определений синуса и косинуса:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

Из определений очевидны и формулы

$$\sin(-z) = -\sin z, \qquad \cos(-z) = \cos z,$$
$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z, \qquad \operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg} z.$$

Теперь проверим формулы синуса и косинуса суммы.

$$\begin{aligned}
\cos(z_1+z_2) + i\sin(z_1+z_2) &= e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} = \\
&= (\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) = \\
&= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2 + i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2), \\
\cos(z_1+z_2) - i\sin(z_1+z_2) &= \cos(-z_1-z_2) + i\sin(-z_1-z_2) = \\
&= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2 - i(\cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2),
\end{aligned}$$

так что складывая и вычитая почленно эти две формулы, получаем

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2,$$
$$\sin(z_1+z_2) = \cos z_1\sin z_2 + \sin z_1\cos z_2.$$

Все тригонометрические тождества следуют из основного тригонометрического тождества, нечетности синуса, тангенса и котангенса, четности косинуса и формул синуса и косинуса суммы. Таким образом, они остаются справедливыми и для комплексных тригонометрических функций. Из тригонометрических тождеств следует, что эти функции периодичны, причем синус и косинус имеют основной период 2π, а тангенс и котангенс — основной период π.

Из теоремы 2.14 следует, что синус и косинус аналитичны во всей плоскости, тангенс аналитичен во всей плоскости, кроме точек $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, котангенс аналитичен во всей плоскости, кроме точек πk, $k\in\mathbb{Z}$. Найдем их производные:

$$(\sin z)' = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \cos z, \qquad (\cos z)' = \frac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2} = -\sin z,$$
$$(\operatorname{tg} z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (\operatorname{ctg} z)' = \left(\frac{\cos z}{\sin z}\right)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Заметим, что $|\sin z|$ и $|\cos z|$ для невещественного z могут быть больше 1. Например, $\cos i = (e+e^{-1})/2 > 1$.

Синус однолистен в любой области, которая не содержит никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $z_1-z_2 = 2\pi k$ или $z_1+z_2 = \pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Действительно,

$$\sin z_1 = \sin z_2 \;\Leftrightarrow\; \cos\frac{z_1+z_2}{2}\sin\frac{z_1-z_2}{2} = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} z_1+z_2 = \pi+2\pi k, \\ z_1-z_2 = 2\pi k. \end{array}\right.$$

Аналогично, косинус однолистен в любой области, которая не содержит никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $z_1 - z_2 = 2\pi k$ или $z_1 + z_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тангенс аналитичен и однолистен в любой области, которая не содержит точек $\pi/2 + \pi k$ и никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $z_1 - z_2 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Действительно, если z_1 и z_2 не равны $\pi/2 + \pi k$,

$$\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2 \;\Leftrightarrow\; \sin z_1 \cos z_2 = \sin z_2 \cos z_1 \;\Leftrightarrow\; \sin(z_1 - z_2) = 0,$$

т. е. $z_1 - z_2 = \pi k$. Аналогично, котангенс аналитичен и однолистен в любой области, которая не содержит точек πk и никаких двух таких точек z_1 и z_2, что $z_1 - z_2 = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. *Гиперболические функции*: *гиперболический синус*, *гиперболический косинус*, *гиперболический тангенс* и *гиперболический котангенс*:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Для них справедливо *основное гиперболическое тождество*:

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = \frac{e^{2z} + 2 + e^{-2z} - e^{2z} + 2 - e^{-2z}}{4} = 1$$

Найдем производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} z)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z, \qquad (\operatorname{ch} z)' = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \operatorname{sh} z,$$

$$(\operatorname{th} z)' = \left(\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, \qquad (\operatorname{cth} z)' = \left(\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}\right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

Приведем еще несколько формул, связывающих тригонометрические и гиперболические функции.

$$\sin z = \frac{\operatorname{sh} iz}{i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} =$$
$$= \frac{\sin x(e^y + e^{-y}) + i \cos x(e^y - e^{-y})}{2} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

откуда

$$|\sin z| = \sqrt{(1 - \cos^2 x) \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}.$$

Аналогично,

$$\cos z = \operatorname{ch} iz = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \qquad |\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x},$$

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y, \qquad |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y},$$

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y, \qquad |\operatorname{ch} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$$

С помощью указанных равенств из тригонометрических тождеств можно получить тождества для гиперболических функций.

7. *Обратные тригонометрические и гиперболические функции.* Поскольку *арксинус* — это функция, обратная к синусу, выражение для него можно найти, решив относительно w уравнение $\sin w = z$:

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z \;\Leftrightarrow\; e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

откуда

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Аналогично, для обратного к косинусу *арккосинуса*, обратного к тангенсу *арктангенса* и обратного к котангенсу *арккотангенса* имеем соответственно

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \qquad \operatorname{Arcctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}.$$

Таким же образом можно получить определения для обратного к гиперболическому синусу *ареасинуса*, обратного к гиперболическому косинусу *ареакосинуса*, обратного к гиперболическому тангенсу *ареатангенса* и обратного к гиперболическому котангенсу *ареакотангенса*: соответственно

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Все эти функции многозначны.

8. Пусть $a \in \mathbb{C}$. *Общая степенная функция* и *общая показательная функция* определяются соответственно формулами

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \qquad a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$$

Эти функции многозначны.

3 Интеграл

3.1 Определение интеграла

Определение 3.1. Пусть Γ — спрямляемая кривая с началом a и концом b, а $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — непрерывная на Γ функция комплексного переменного $z = x + iy$. Разобьем Γ на n дуг произвольными точками $a = z_0$, z_1, …, $z_n = b$ и на каждой дуге кривой Γ от z_k до z_{k+1} выберем произвольно точку ζ_k. Положим

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k, & \Delta x_k &= x_{k+1} - x_k, & \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k, \\ \zeta_k &= \xi_k + i\eta_k, & u_k &= u(\xi_k, \eta_k), & v_k &= v(\xi_k, \eta_k). \end{aligned}$$

Составим *интегральную сумму*

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k). \end{aligned}$$

Заметим, что суммы в правой части этого равенства являются интегральными для соответствующих вещественных криволинейных интегралов второго рода, причем в наших условиях (кривая интегрирования спрямляема, а функции на ней непрерывны) эти интегралы существуют. Значит, существует не зависящий от способа разбиения и выбора точек ζ_k предел интегральных сумм при неограниченном измельчении разбиения, т. е. число

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \lim \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k) = \\ = \int_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i \int_\Gamma u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx, \end{aligned}$$

которое и называется *интегралом* от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ.

Если Γ — замкнутый контур, то для интеграла от функции $f(z)$ вдоль контура Γ применяется обозначение

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

Приведем формулы для вычисления интеграла от функции комплексного переменного.

Пусть сначала Γ — отрезок вещественной оси $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда переменная $z = x$, так что $f(z) = f(x) = u(x) + iv(x)$ — функция вещественного переменного. Тогда

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \big(u(\xi_k) + iv(\xi_k)\big)\Delta x_k = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Пусть теперь Γ — заданная уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, кусочно гладкая кривая. По формуле вычисления криволинейного интеграла второго рода, известной из курса математического анализа, получаем

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_\Gamma u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx = \\ &= \int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt + \\ &+ i\int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t),y(t)\big)y'(t) + v\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\Big)\,dt = \\ &= \int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t),y(t)\big) + iv\big(x(t),y(t)\big)\Big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,dt = \\ &= \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Аналогичная формула, очевидно, справедлива и в случае, когда кривая Γ задана явно уравнением $z(x) = x + iy(x)$, $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, или уравнением $z(y) = x(y) + iy$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие свойства*:

1. $\displaystyle\int_\Gamma \lambda f(z)\,dz = \lambda\int_\Gamma f(z)\,dz,\ \lambda = \text{const};$
2. $\displaystyle\int_\Gamma \big(f(z) + g(z)\big)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Gamma g(z)\,dz;$
3. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, *где* Γ *состоит из* Γ_1 *и* Γ_2;
4. $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = -\int_{\Gamma^-} f(z)\,dz$, *где* Γ^- *— кривая* Γ *с противоположным направлением*;
5. $\displaystyle\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant Ml$, *где* $\displaystyle M = \max_{z=\Gamma}\big|f(z)\big|$, l *— длина* Γ.

Доказательство. Утверждения 1–4 сразу следуют из определения интеграла. Утверждение 5 легко получается из неравенств

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(z_{k+1}-z_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \bigl|f(\zeta_k)\bigr| \cdot |z_{k+1}-z_k| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1}-z_k|$$

предельным переходом. □

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл от функции $f(z) \equiv 1$ вдоль некоторой спрямляемой кривой Γ:

$$\int_\Gamma dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}-z_k) = \lim (z_n - z_0) = b - a.$$

В частности, если кривая Γ замкнута, то

$$\oint_\Gamma dz = 0.$$

2. Рассмотрим интеграл от функции $f(z) = z$ вдоль некоторой спрямляемой кривой Γ. Этот интеграл не зависит от способа выбора точек ζ_k, поэтому возьмем в интегральных суммах в одном случае $\zeta_k = z_{k+1}$, а в другом — $\zeta_k = z_k$:

$$\int_\Gamma z\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1}-z_k) = \lim \sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1}-z_k).$$

Эти пределы равны, значит, тому же числу будет равен и предел среднего:

$$\int_\Gamma z\,dz = \lim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z_{k+1}(z_{k+1}-z_k) + z_k(z_{k+1}-z_k)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim \sum_{k=0}^{n-1} \left(z_{k+1}^2 - z_k^2\right) = \frac{1}{2} \lim \left(z_n^2 - z_0^2\right) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

В частности, если кривая Γ замкнута, то

$$\oint_\Gamma z\,dz = 0.$$

3. Вычислим

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0},$$

где Γ — окружность $|z-z_0| = r$, проходимая против часовой стрелки.

Поскольку параметрическое уравнение окружности Γ имеет вид $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, получаем $z'(t) = ire^{it}$ и по формуле вычисления интеграла имеем

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}\,dt}{re^{it}} = 2\pi i.$$

4. Вычислим

$$\int_{\Gamma} \overline{z}\,dz, \qquad \Gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases} \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi.$$

На кривой Γ имеем $z = 2\cos t + 3i\sin t$ и $dz = (-2\sin t + 3i\cos t)\,dt$, откуда

$$\int_{\Gamma} \overline{z}\,dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos t - 3i\sin t)(-2\sin t + 3i\cos t)\,dt =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (5\sin t\cos t + 6i)\,dt = \frac{5}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t\,dt + 6i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dt = -\frac{5}{2} + 3\pi i.$$

3.2 Теорема Коши

Пусть D — односвязная область, а $f(z)$ — аналитическая в области D функция. Нас будет интересовать интеграл от $f(z)$ вдоль спрямляемого контура, целиком лежащего в D.

1. Рассмотрим сначала целиком лежащий в D двухугольник Γ, т. е. замкнутый контур, представляющий собой отрезок, проходимый сначала в одном направлении, а потом — в противоположном. По свойству 4 интеграла сразу получаем, что

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

2. Рассмотрим теперь проходимую против часовой стрелки лежащую в D границу Γ замкнутого треугольника T. Отметим, что T целиком лежит в D. Обозначим через l длину контура Γ. Положим

$$\left|\oint_{\Gamma} f(z)\,dz\right| = M.$$

Ясно, что $M \geqslant 0$. Разобьем наш треугольник отрезками, соединяющими середины его сторон, и получим четыре замкнутых треугольника T_1, T_2, T_3 и T_4 с границами Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 соответственно (см. рис. 5). Каждый контур Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 мы тоже будем проходить против часовой стрелки. При этом каждый из отрезков, с помощью которых строилось разбиение, будет находиться в двух контурах, но проходиться в разных направлениях. Значит,

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_3} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_4} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

поскольку интегралы по не входящим в Γ отрезкам взаимно уничтожатся. Значит, справедливо неравенство

$$M \leqslant \left|\oint_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Gamma_3} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{\Gamma_4} f(z)\,dz\right|.$$

Следовательно, модуль хотя бы одного из интегралов в правой части должен быть не меньше, чем $M/4$. Обозначим соответствующий этому интегралу треугольник через $T^{(1)}$, а его границу через $\Gamma^{(1)}$. Заметим, что длина контура $\Gamma^{(1)}$ равна $l/2$.

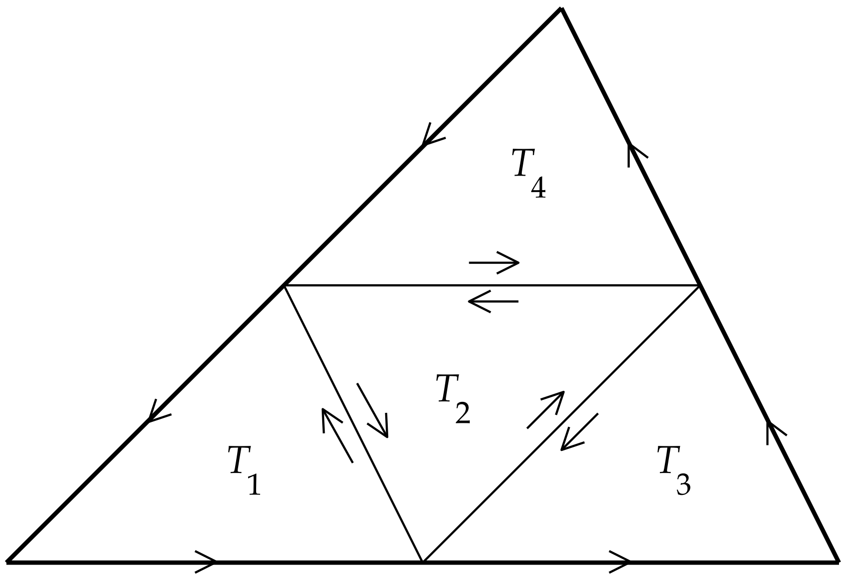

Рис. 5. Разбиение треугольника T на T_1, T_2, T_3 и T_4

С треугольником $T^{(1)}$ сделаем то же самое, что делали с T: разобьем его тем же образом на четыре треугольника и обозначим через $T^{(2)}$ тот из них, модуль интеграла вдоль границы $\Gamma^{(2)}$ которого не меньше четверти модуля интеграла вдоль $\Gamma^{(1)}$.

Продолжая построение, мы получим последовательность замкнутых треугольников $T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}, \ldots$ с границами $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(n)}, \ldots$, удовлетворяющих следующим свойствам:

1. треугольник $T^{(n)}$ содержится в $T^{(n-1)}$, причем длина контура $\Gamma^{(n)}$ в два раза меньше длины $\Gamma^{(n-1)}$ и равна $l/2^n$;

2. каждый из этих треугольников целиком лежит в D;

3. $\left|\oint_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz\right| \geqslant \dfrac{M}{4^n}$.

Из свойства 1 и теоремы 1.13 следует, что существует точка ζ, лежащая во всех треугольниках $T^{(n)}$. Из свойства 2 вытекает, что $\zeta \in D$. Но функция $f(z)$ аналитична в D, следовательно, $f(z)$ дифференцируема в ζ. Из определения производной вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ мы можем указать такое $\delta > 0$, что при $|z-\zeta| < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta} - f'(\zeta)\right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Легко видеть, что для достаточно большого N все треугольники $T^{(n)}$ при $n \geqslant N$ будут целиком лежать в круге $|z-\zeta| < \delta$, так что всюду в $T^{(n)}$ неравенство (3.1) будет выполнено. Перепишем его в виде

$$\bigl|f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\bigr| < \varepsilon|z-\zeta|.$$

Отсюда, учитывая, что длина $\Gamma^{(n)}$ равна $l/2^n$ и $|z-\zeta| < l/2^n$, так как расстояние между двумя точками треугольника не превосходит длину его границы, получаем по свойству 5 интеграла

$$\left|\oint_{\Gamma^{(n)}} \bigl(f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\bigr)\,dz\right| < \frac{\varepsilon l}{2^n}\cdot\frac{l}{2^n} = \frac{\varepsilon l^2}{4^n}.$$

С другой стороны,

$$\oint_{\Gamma^{(n)}} \bigl(f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\bigr)\,dz =$$
$$= \oint_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz + \bigl(\zeta f'(\zeta)-f(\zeta)\bigr)\oint_{\Gamma^{(n)}} dz - f'(\zeta)\oint_{\Gamma^{(n)}} z\,dz = \oint_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz,$$

поскольку (см. примеры 1 и 2 параграфа 3.1)

$$\oint_{\Gamma^{(n)}} dz = 0, \qquad \oint_{\Gamma^{(n)}} z\,dz = 0.$$

Итак,

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \left|\oint_{\Gamma^{(n)}} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\Gamma^{(n)}} \bigl(f(z)-f(\zeta)-f'(\zeta)(z-\zeta)\bigr)\,dz\right| < \frac{\varepsilon l^2}{4^n},$$

откуда, умножая на 4^n, получаем $M < \varepsilon l^2$. Устремляя здесь ε к нулю, получаем $M = 0$, но тогда и

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

3. Пусть теперь Γ — проходимая против часовой стрелки лежащая в D граница замкнутого выпуклого n-угольника ($n > 3$). Тогда этот n-угольник целиком лежит в D. Выберем одну вершину этого n-угольника и проведем из нее диагонали ко всем остальным вершинам (см. рис. 6). Мы получим $n-2$ треугольника, границы которых также будем проходить против часовой стрелки. Каждая диагональ n-угольника будет находиться в двух треугольниках, но проходиться будет в разных направлениях. Значит, интеграл от $f(z)$ вдоль Γ будет равен сумме интегралов от $f(z)$ вдоль границ всех получившихся треугольников, т. е.

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

4. Далее, пусть Γ — произвольная замкнутая ломаная, лежащая в D, не имеющая самопересечений, проходимая однократно против часовой стрелки. Иными словами, Γ — граница не обязательно выпуклого замкнутого многоугольника, целиком лежащего в D.

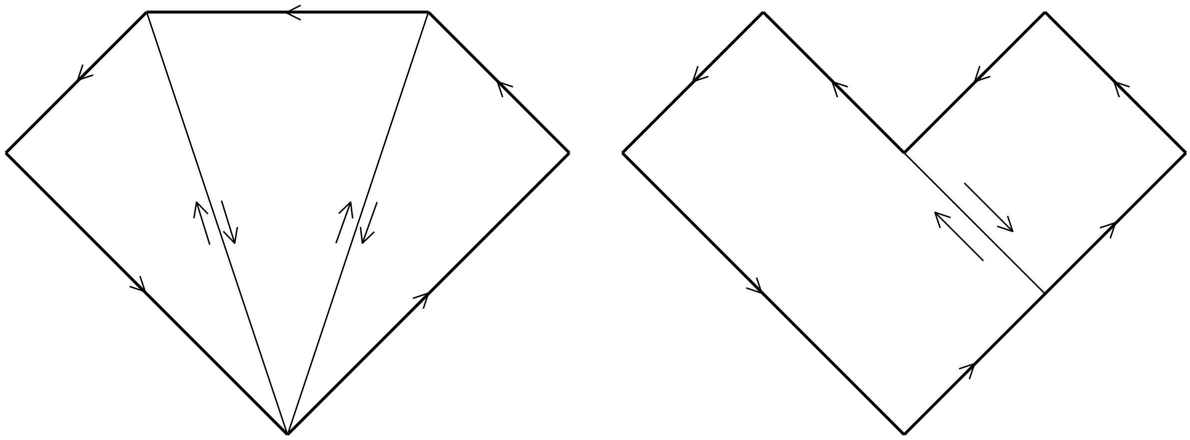

Рис. 6. Разбиение многоугольников

Рассуждения для выпуклого многоугольника мы уже провели. Рассмотрим теперь случай невыпуклого многоугольника. Заметим, что выпуклый многоугольник характеризуется отсутствием у него сторон, продолжения которых за соответствующие вершины вновь попадают внутрь этого многоугольника; невыпуклый многоугольник же должен иметь такие стороны. Тогда продолжая такие стороны нашего невыпуклого многоугольника до пересечения с границей, мы тем самым разрежем его на конечное число выпуклых многоугольников (см. рис. 6). Как и ранее, интеграл от $f(z)$ вдоль Γ равен сумме интегралов от $f(z)$ вдоль границ всех получившихся выпуклых многоугольников, проходимых против часовой стрелки. Но мы только что доказали, что каждый из этих интегралов равен нулю. Следовательно, и в этом случае

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

5. Теперь пусть Γ — произвольная замкнутая ломаная, лежащая в D. Случай отсутствия самопересечений и проходимых однократно прямолинейных звеньев мы только что разобрали. Рассмотрим оставшийся случай.

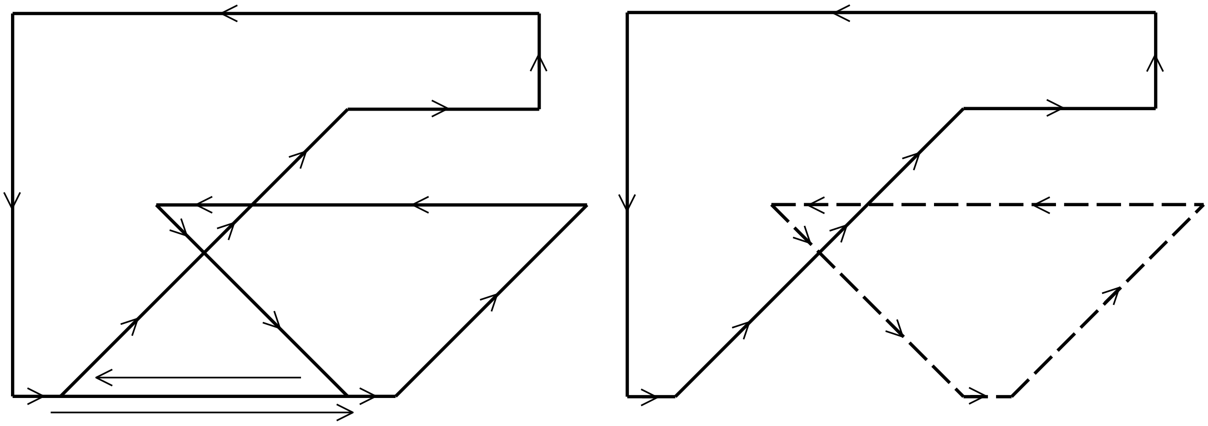

Рис. 7. Произвольная ломаная

Отбросим части звеньев, проходимые двукратно в разные стороны. Это не изменит интеграл, поскольку эти части представляют собой двухугольники. Далее, двигаемся по полученной кривой Γ_1, пока новое звено не встретит уже пройденное. Тогда часть ломаной от первой встречи с точкой самопересечения до второй встречи с этой точкой будет ломаной без самопересечений. Интеграл от $f(z)$ вдоль этой части равен нулю. Поэтому интегралы от $f(z)$ вдоль Γ и вдоль ломаной Γ_2, полученной из Γ_1 отбрасыванием этой части, совпадут. При этом ломаная Γ_2 имеет по крайней мере на одну вершину и на одно звено меньше, чем Γ_1. Далее эту процедуру мы проводим с Γ_2. Таким образом, после конечного числа шагов мы получим ломаную без самопересечений (см. рис. 7; разные типы линий соответствуют отбрасываемым на разных шагах частям контура). Но тогда интеграл будет равен нулю. Поэтому снова

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

6. Перейдем к общему случаю: пусть Γ — произвольная замкнутая спрямляемая кривая, лежащая в D. Докажем сначала две леммы.

Лемма 3.1. *Для произвольного ограниченного замкнутого множества G, целиком лежащего в области D, найдется такое целиком лежащее в D ограниченное замкнутое множество E, что каждая точка из G будет лежать в E вместе с замкнутым кругом некоторого фиксированного радиуса r с центром в этой точке.*

Доказательство. Если D — вся плоскость, а G лежит в некотором круге $|z| \leqslant r$, то $E\colon |z| \leqslant 2r$ — искомое множество.

Если же D — не вся плоскость, то граница D — непустое множество. Тогда пусть d — расстояние от G до границы D. Ясно, что $d > 0$. Пусть E — множество точек, расстояние от которых до G не превосходит $d/2$ (см. рис. 8). Такое E, очевидно, ограничено и содержит любую точку из G вместе с замкнутым кругом радиуса $r = d/2$ с центром в этой точке. Осталось доказать, что E замкнуто.

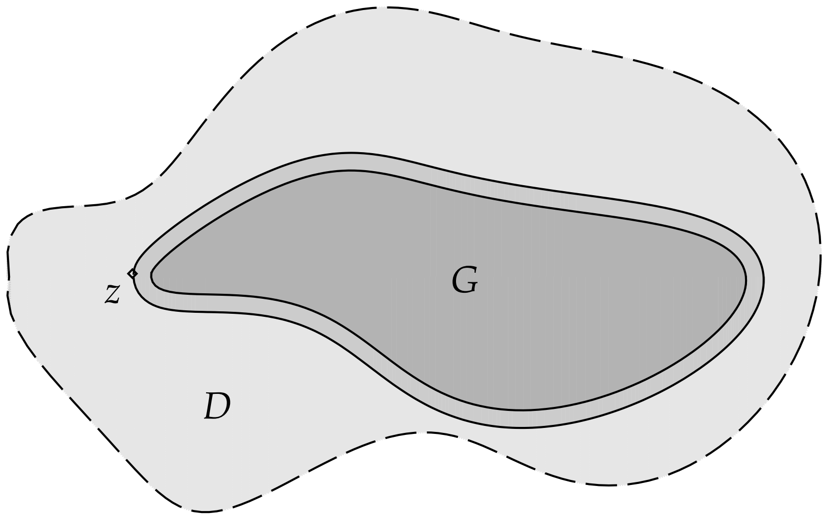

Рис. 8. Чертеж к доказательству леммы 3.1

Пусть z — предельная точка E. Тогда в любой окрестности z имеется бесконечно много точек из E, так что можно выбрать последовательность точек $z_n \in E$, сходящуюся к z. Последовательность расстояний $\rho(z_n, G)$ сходится к расстоянию $\rho(z, G)$ (поскольку расстояние от точки до множества есть непрерывная функция). При этом все $\rho(z_n, G) \leqslant d/2$, так как все $z_n \in E$. Значит, и $\rho(z, G)$ тоже не превосходит $d/2$. Следовательно, $z \in E$. Значит, E содержит все свои предельные точки, т. е. E замкнуто. □

Лемма 3.2. *Пусть $g(z)$ — непрерывная в области D функция, а Γ — лежащая в области D спрямляемая кривая с началом a и концом b. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при любом таком разбиении Γ точками $a = z_0$, z_1, ..., $z_n = b$, что длины соединяющих z_k и z_{k+1} дуг меньше δ, ломаная γ с вершинами в этих точках будет содержаться в области D, причем*

$$\left| \int_\Gamma g(z)\, dz - \int_\gamma g(z)\, dz \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть l — длина Γ. Поскольку множество точек непрерывной кривой замкнуто, по лемме 3.1 в области D найдется такое ограниченное замкнутое множество E, что любая точка кривой Γ будет лежать в E вместе с замкнутым кругом радиуса r с центром в этой точке. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $\delta_1 > 0$, чтобы для любой пары точек $z_1, z_2 \in E$, удовлетворяющих условию $|z_1 - z_2| < \delta_1$, было выполнено $\bigl|g(z_1) - g(z_2)\bigr| < \varepsilon/(2l)$ (мы можем это сделать, так как $g(z)$ непрерывна и, значит, равномерно непрерывна на E).

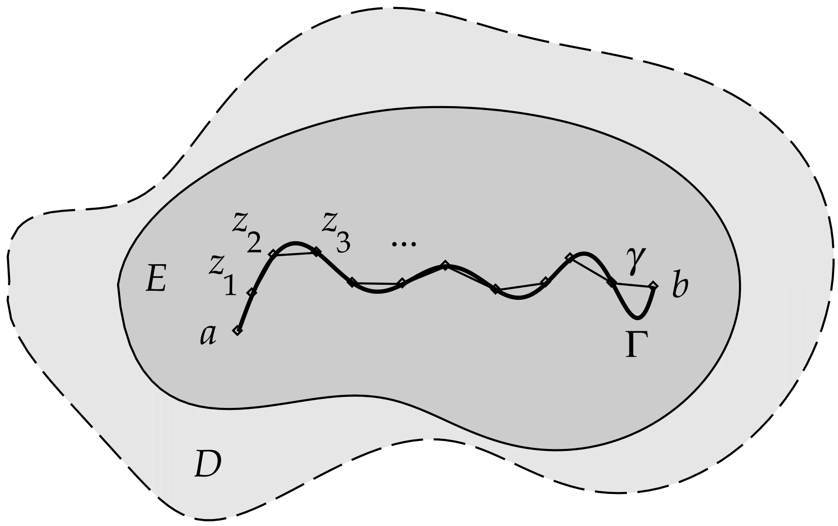

Рис. 9. Чертеж к доказательству леммы 3.2

Далее, пусть положительное число $\delta < \min\{\delta_1, r\}$. Разобьем Γ точками $a = z_0$, z_1, ..., $z_n = b$ на дуги Γ_k с длинами, меньшими δ. Обозначим через γ ломаную с вершинами в этих же точках, а ее звенья обозначим через γ_k (см. рис. 9). Тогда

$$\left|\int_\Gamma g(z)\,dz - \int_\gamma g(z)\,dz\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\Gamma_k} g(z)\,dz - \int_{\gamma_k} g(z)\,dz\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\Gamma_k} g(z)\,dz - \int_{\gamma_k} g(z)\,dz\right|.$$

Поскольку (см. пример 1 параграфа 3.1)

$$\int_{\Gamma_k} g(z_k)\,dz = g(z_k)\int_{\Gamma_k} dz = g(z_k)(z_{k+1} - z_k) = g(z_k)\int_{\gamma_k} dz = \int_{\gamma_k} g(z_k)\,dz,$$

справедливо

$$\left|\int_{\Gamma_k} g(z)\,dz - \int_{\gamma_k} g(z)\,dz\right| =$$

$$= \left| \int_{\Gamma_k} \big(g(z) - g(z_k)\big)\, dz - \int_{\gamma_k} \big(g(z) - g(z_k)\big)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\Gamma_k} \big(g(z) - g(z_k)\big)\, dz \right| + \left| \int_{\gamma_k} \big(g(z) - g(z_k)\big)\, dz \right|.$$

При этом $|g(z) - g(z_k)| < \varepsilon/(2l)$, поскольку расстояние от z_k до любой точки Γ_k и расстояние от z_k до любой точки γ_k меньше δ_1. Тогда если l_k — длина Γ_k, а $\tilde{l}_k$ — длина γ_k, то

$$\left| \int_{\Gamma_k} g(z)\, dz - \int_{\gamma_k} g(z)\, dz \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2l} \cdot l_k + \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \tilde{l}_k < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l_k,$$

поскольку, очевидно, $\tilde{l}_k < l_k$. Значит,

$$\left| \int_{\Gamma} g(z)\, dz - \int_{\gamma} g(z)\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} l_k = \varepsilon,$$

что и требовалось. □

У нас $f(z)$ — аналитическая функция в D, следовательно $f(z)$ непрерывна в D. Найдем для Γ ломаную γ с указанными в лемме 3.2 свойствами. Тогда

$$\left| \oint_{\Gamma} f(z)\, dz - \oint_{\gamma} f(z)\, dz \right| < \varepsilon,$$

но мы уже доказали, что

$$\oint_{\gamma} f(z) = 0.$$

Следовательно,

$$\left| \oint_{\Gamma} f(z)\, dz \right| < \varepsilon.$$

Но поскольку ε — произвольно малое положительное число, а левая часть последнего неравенства от ε не зависит, получаем отсюда

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Итак, нами доказана

Теорема 3.2 (Коши). *Если D — односвязная область, а $f(z)$ — аналитическая в D функция, то для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ, лежащей в D,*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Примечание. Условие односвязности области D в теореме Коши по существу. Привемем пример лежащей в многосвязной области кривой, интеграл вдоль которой от аналитической в этой области функции не равен нулю: в кольце $1 < |z| < 3$ функция $1/z$ аналитична, а окружность $|z| = 2$ лежит в этом кольце, но (см. пример 3 параграфа 3.1)

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

3.3 Обобщения теоремы Коши

Теорема 3.3. *Пусть область D является внутренностью замкнутой кусочно гладкой жордановой кривой Γ. Если функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. 1. Пусть сначала кривая Γ обладает свойством звездности, т. е. найдется такая точка z_0, что любой луч, выходящий из z_0, пересекает Γ один и только один раз. Очевидно, тогда контур Γ может быть задан функцией $z = z_0 + \lambda(\theta)$, где $\theta \in [0, 2\pi]$ — полярный угол в полярной системе координат с полюсом в точке z_0. Тогда при любом ρ, $0 < \rho < 1$, кривая Γ_ρ: $z = z_0 + \rho\lambda(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, подобная Γ относительно точки z_0, лежит в D (см. рис. 10). По теореме Коши

$$\oint_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = 0.$$

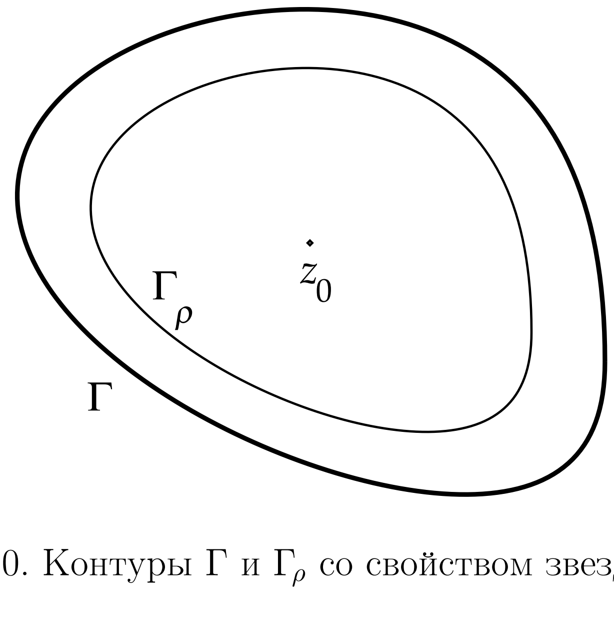

Рис. 10. Контуры Γ и Γ_ρ со свойством звездности

Если выражение
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\zeta_k)(\zeta_{k+1}-\zeta_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f\big(z_0+\lambda(\theta_k)\big)\big(\lambda(\theta_{k+1})-\lambda(\theta_k)\big)$$
является интегральной суммой для интеграла от $f(z)$ вдоль Γ, то в силу подобия кривых Γ и Γ_ρ выражение
$$\sum_{k=0}^{n-1} f\big(z_0+\rho\lambda(\theta_k)\big)\big(\rho\lambda(\theta_{k+1})-\rho\lambda(\theta_k)\big)$$
будет интегральной суммой для интеграла от $f(z)$ вдоль Γ_ρ; но оно же является интегральной суммой для интеграла от $\rho f\big(z_0+\rho\lambda(\theta_k)\big)$ вдоль Γ. Значит,
$$0 = \oint_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz = \oint_{\Gamma} \rho f\big(z_0+\rho\lambda(\theta)\big)\,dz.$$
Теперь преобразуем
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz =$$
$$= \oint_\Gamma f\big(z_0+\lambda(\theta)\big)\,dz = \oint_\Gamma \Big(f\big(z_0+\lambda(\theta)\big) - \rho f\big(z_0+\rho\lambda(\theta)\big)\Big)\,dz =$$
$$= \oint_\Gamma \Big((1-\rho) f\big(z_0+\lambda(\theta)\big) + \rho\big(f(z_0+\lambda(\theta)) - f(z_0+\rho\lambda(\theta))\big)\Big)\,dz.$$
Пусть l — длина кривой Γ,
$$M = \max_{z\in\overline{D}} \big|f(z)\big|, \qquad m = \max_{\theta\in[0,2\pi]} \big|\lambda(\theta)\big|.$$
Поскольку $f(z)$ непрерывна и, следовательно, равномерно непрерывна на $\overline{D}$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $\big|f(z_1)-f(z_2)\big| < \varepsilon$ выполнено для любых двух точек $z_1, z_2 \in \overline{D}$, удовлетворяющих неравенству $|z_1-z_2| < \delta$. Пусть $z_1 = z_0+\lambda(\theta)$, $z_2 = z_0+\rho\lambda(\theta)$ при некотором θ. Тогда
$$|z_1-z_2| = (1-\rho)\big|\lambda(\theta)\big| \leqslant m(1-\rho).$$
Положив $1-\rho < \delta/m$, будем иметь
$$\Big|f\big(z_0+\lambda(\theta)\big) - f\big(z_0+\rho\lambda(\theta)\big)\Big| < \varepsilon$$
и, следовательно,
$$\left|\oint_\Gamma f(z)\,dz\right| < \big((1-\rho)M+\rho\varepsilon\big)l.$$
Устремляя здесь ρ к 1, а затем ε к 0, получаем утверждение теоремы.

2. Перейдем к случаю произвольной кусочно гладкой жордановой кривой Γ. Заметим, что в достаточно малой окрестности точки, не являющейся точкой возврата, дуга кусочно гладкой кривой обладает свойством звездности. Поэтому построим область D_ε, границей которой является кривая Γ_ε без точек возврата, следующим образом: выбросим из D замкнутые круги радиуса ε с центрами в точках возврата кривой Γ. Тогда, проводя конечное число кусочно гладких дуг γ_k, мы можем разбить область D_ε на конечное число областей D_k, границы которых Γ_k будут обладать свойством звездности (см. рис. 11). Тогда для всех k имеем

$$\oint_{\Gamma_k} f(z)\,dz = 0.$$

Суммируя все эти интегралы, мы будем проходить каждую дугу γ_k дважды, но в разных направлениях. Значит, все интегралы вдоль γ_k уничтожатся, а оставшиеся части кривых Γ_k составят кривую Γ_ε. Итак,

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0.$$

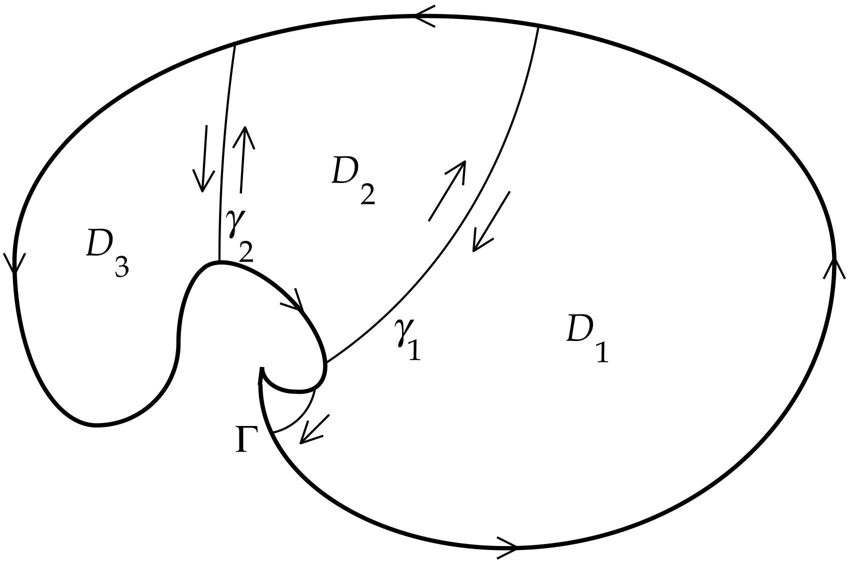

Рис. 11. Случай произвольной кусочно гладкой жордановой кривой

Далее, поскольку Γ отличается от Γ_ε лишь на конечное число малых дуг, а $f(z)$ непрерывна и, следовательно, ограничена на этих дугах, интегралы вдоль этих малых дуг произвольно малы, но тогда и интеграл вдоль Γ сколь угодно мало отличается от интеграла вдоль Γ_ε. Значит,

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

что и требовалось. □

Примечание. Отметим, что при доказательстве части 1 теоремы 3.3 мы не пользовались кусочной гладкостью жорданова контура Γ, обладающего свойством звездности. Для наших выкладок было достаточно спрямляемости Γ. Более того, теорема 3.3 верна для любого спрямляемого жорданова контура Γ (доказательство можно найти в [3]). Все результаты, опирающиеся на теорему 3.3, будут верны и для произвольных спрямляемых жордановых кривых, не обязательно кусочно гладких. Тем не менее, мы будем пользоваться именно доказанным нами утверждением.

Теорема 3.4. *Рассмотрим при* $n \in \mathbb{N}_0$ *такие замкнутые кусочно гладкие жордановы кривые* $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, *что*

1. *кривые* γ_k *лежат во внутренности* Γ;
2. *кривая* γ_k *лежит во внешности кривой* γ_j *при* $k \neq j$.

Пусть D — *область, полученная выбрасыванием* n *кривых* γ_k *и их внутренностей из внутренности кривой* Γ. *Тогда если* $f(z)$ — *аналитическая в области* D *и непрерывная в замкнутой области* $\overline{D}$ *функция, то справедливо равенство*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)\,dz,$$

где все кривые проходятся в одном направлении. Иными словами, интеграл от $f(z)$ *вдоль границы* ∂D *области* D, *проходимой так, чтобы область* D *все время оставалась с одной стороны, равен нулю*:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. При $n = 0$ утверждение теоремы уже доказано. Пусть теперь $n > 0$. Соединим Γ с γ_1 кусочно гладкой дугой δ_1, γ_1 с γ_2 кусочно гладкой дугой δ_2, и далее до соединения γ_{n-1} с γ_n кусочно гладкой дугой δ_n; наконец, соединим γ_n с Γ кусочно гладкой дугой δ_{n+1}. При этом дуги δ_k выбираются непересекающимися и принадлежащими области D.

Составим две замкнутые кривые Ω_1 и Ω_2 следующим образом. Для Ω_1 обходим Γ от пересечения с δ_1 до пересечения с δ_{n+1}, далее двигаемся по δ_{n+1} до пересечения с γ_n, далее двигаемся по γ_n в обратном направлении до пересечения с δ_n, далее двигаемся по δ_n до пересечения с γ_{n-1}, так же далее; доходим до пересечения δ_1 с Γ. Для Ω_2 обходим непройденную при построении Ω_1 часть Γ от пересечения с δ_{n+1} до пересечения с δ_1, далее двигаемся по δ_1 в обратном направлении до пересечения с γ_1, далее двигаемся по непройденной при построении Ω_1 части γ_1 в обратном направлении до пересечения с δ_2, далее двигаемся по δ_2 в обратном направлении до пересечения с γ_2, далее двигаемся по непройденной части γ_2 в обратном направлении до пересечения с δ_3, так же далее; наконец двигаемся по δ_{n+1} в обратном направлении до пересечения с Γ (см. рис. 12).

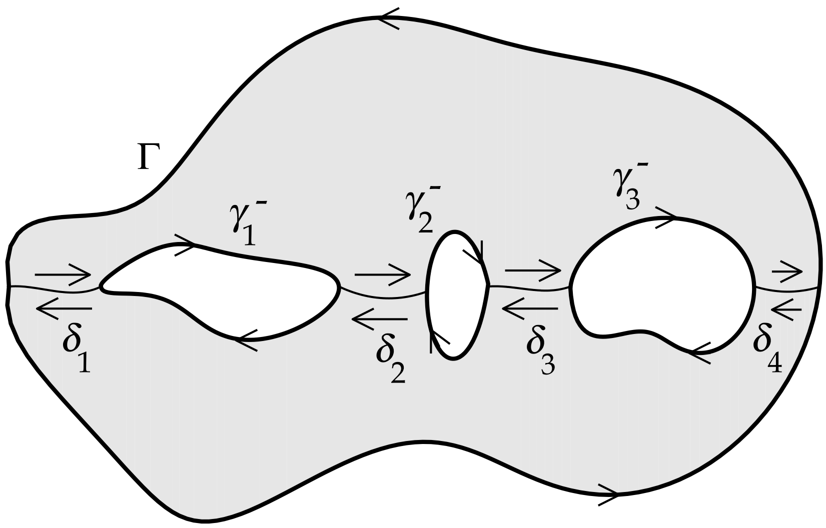

Рис. 12. Случай многосвязной области

Тогда область, ограниченная Ω_1, является односвязной, как и область, ограниченная Ω_2. По теореме 3.3 интегралы от $f(z)$ вдоль Ω_1 и вдоль Ω_2 равны нулю. Но сумма этих интегралов равна

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz + \oint_{\gamma_1^-} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{\gamma_n^-} f(z)\,dz = 0,$$

поскольку сумма интегралов вдоль δ_k и вдоль δ_k^- равна нулю (здесь, как и ранее, верхний индекс «$-$» у кривой означает, что эта кривая проходится в противоположном направлении). □

3.4 Интеграл как функция верхнего предела

Теорема 3.5. *Пусть D — односвязная область, а $f(z)$ — аналитическая в области D функция. Тогда интеграл от $f(z)$ в D не зависит от пути интегрирования, т. е. для любых двух лежащих в D спрямляемых кривых Γ и γ, имеющих общие начало a и конец b, справедливо равенство*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

Доказательство. Пусть кривая Ω составлена из Γ и γ^-, где γ^- — кривая γ, проходимая в обратном направлении (см. рис. 13). Тогда Ω — замкнутый контур, так что по теореме Коши

$$0 = \oint_\Omega f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz.$$

Но отсюда и получается утверждение теоремы. $\square$

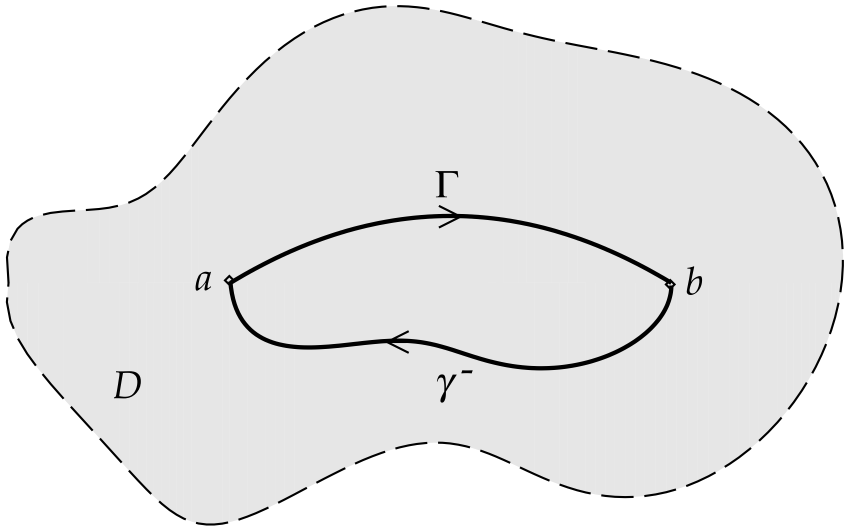

Рис. 13. Кривые с общими началом и концом

В силу этой теоремы для интеграла от аналитической в односвязной области D функции $f(z)$ вдоль произвольной спрямляемой кривой Γ с началом a и концом b, лежащей в области D, можно применять обозначение

$$\int_a^b f(z)\,dz,$$

поскольку он зависит только от начала и конца пути интегрирования, но не зависит от самого этого пути.

Определение 3.2. Функция $F(z)$, производная которой равна заданной функции $f(z)$, называется *первообразной* функции $f(z)$.

Теорема 3.6. *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл*

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)\,d\zeta, \qquad a \in D,$$

рассматриваемый как функция своего верхнего предела в D, также является аналитической в D функцией, причем $F'(z) = f(z)$, т. е. $F(z)$ — первообразная $f(z)$.

Доказательство. Имеем

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Поскольку $f(z)$ непрерывна в D, имеем $f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta)$, где $\eta(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to z$. Значит

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(z)\, d\zeta + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(z)\cdot h}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta = f(z) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta.$$

При этом

$$\left|\frac{1}{h} \int_z^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta\right| = \frac{1}{|h|} \cdot \left|\int_z^{z+h} \eta(\zeta)\, d\zeta\right| \leqslant \frac{|h| \cdot \max\left|\eta(\zeta)\right|}{|h|} \to 0,$$

так что $F'(z) = f(z)$, что и требовалось. $\square$

Теорема 3.7. *Любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга не более, чем на постоянное слагаемое.*

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ — первообразные функции $f(z)$. Положим $\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z)$. Отсюда

$$\Phi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0.$$

Пусть $\Phi(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Тогда

$$\Phi'(z) = u_x' + iv_x' = v_y' - iu_y' \equiv 0 \ \Leftrightarrow \ u_x' \equiv 0,\ u_y' \equiv 0,\ v_x' \equiv 0,\ v_y' \equiv 0.$$

Значит, $u(x,y)$ и $v(x,y)$ постоянны, т. е. постоянна $\Phi(z)$. $\square$

Теорема 3.8. *Если $F(z)$ — первообразная аналитической в односвязной области D функции $f(z)$, то в D*

$$\int_a^z f(\zeta)\, d\zeta = F(z) - F(a), \qquad a \in D.$$

Доказательство. Поскольку и $F(z)$, и функция

$$F_1(z) = \int_a^z f(\zeta)\, d\zeta$$

являются первообразными $f(z)$, то, в силу теоремы 3.7, $F_1(z) = F(z) + C$, где C — некоторая постоянная. Иными словами,

$$\int_a^z f(\zeta)\, d\zeta = F(z) + C.$$

Полагая здесь $z = a$, получим $C = -F(a)$. $\square$

Примечание. Заметим, что даже в случае, когда D — многосвязная область, если спрямляемые кривые Γ и γ ограничивают односвязную область, целиком лежащую в D, то интегралы от аналитической в D функции $f(z)$ вдоль этих кривых равны. Значит, интеграл от аналитической в области D функции не меняется, если кривая интегрирования непрерывно деформируется так, что ее концы неподвижны и она все время остается в D.

Примеры. 1. Применяя теорему 3.8, для интегралов от аналитических функций получаем те же формулы, что и в математическом анализе:

$$\int_a^b z^n\,dz = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1;$$

$$\int_a^b e^z\,dz = e^b - e^a;$$

$$\int_a^b \sin z\,dz = \cos a - \cos b; \qquad \int_a^b \cos z\,dz = \sin b - \sin a;$$

$$\int_a^b \operatorname{sh} z\,dz = \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a; \qquad \int_a^b \operatorname{ch} z\,dz = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a;$$

и т. д.

2. Пусть область D — кольцо $0 < |z| < R$ при некотором большом R. Рассмотрим интеграл функции $f(\zeta) = 1/\zeta$ вдоль лежащей в D спрямляемой кривой Γ с началом z_0 и концом z. Любую такую кривую можно непрерывно деформировать в путь, состоящий из жордановой кривой γ с началом z_0 и концом z, не имеющей общих точек с отрицательной частью вещественной оси (кроме начала z_0 и конца z, если они лежат в этой части), и целое число k раз проходимой против часовой стрелки окружности $\gamma_0\colon |\zeta| = |z_0|$. При этом k может быть отрицательным или нулем (см. рис. 14). Тогда

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} + k \oint_{\gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Второй интеграл в правой части этого равенства будет равен $2\pi i$ (см. пример 3 параграфа 3.1). Для первого интеграла имеем

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z - \ln z_0,$$

где $\ln z$ — главное значение логарифма, поскольку любая ветвь логарифма является первообразной функции $f(\zeta) = 1/\zeta$, так что по теореме 3.8

этот интеграл равен разности значений одной и той же ветви логарифма в точках z и z_0. Итак,

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z - \ln z_0 + 2\pi k i,$$

где k — количество прохождений окружности γ_0 против часовой стрелки (если окружность проходить не нужно, то $k = 0$; если же окружность проходится по часовой стрелке, то $k < 0$).

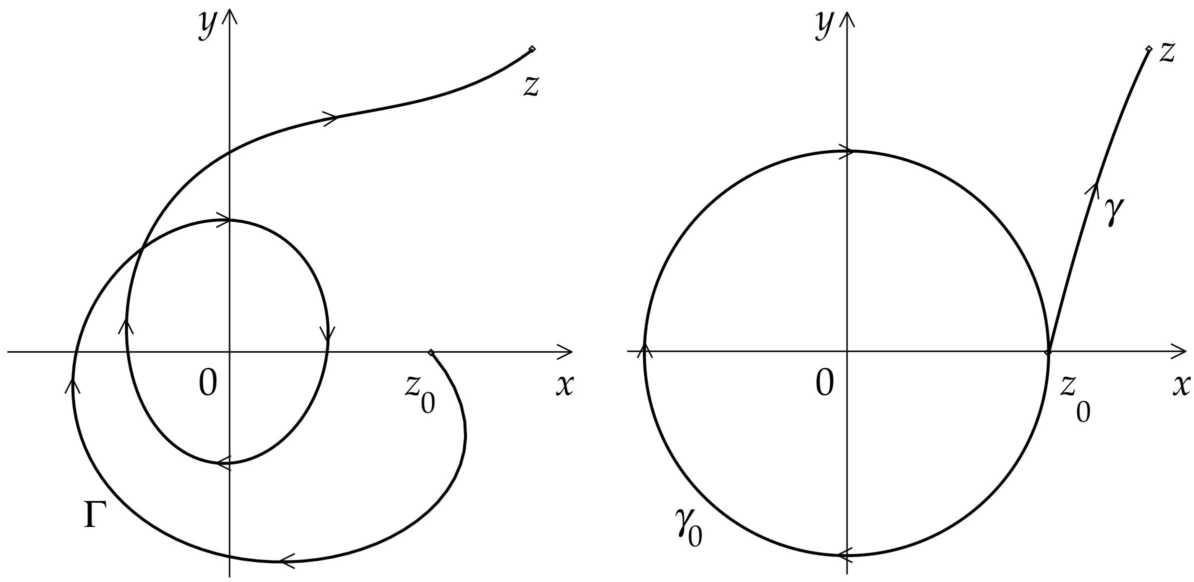

Рис. 14. Кривая Γ и результат ее деформации (здесь $k = -2$)

3.5 Интегральная формула Коши

Теорема 3.9 (интегральная формула Коши). *Пусть область D определена так же, как в теореме 3.4, ∂D — граница области D, а функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда для любой точки $z \in D$ справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

где ∂D проходится так, что D все время остается слева.

Доказательство. Пусть область E получена из D выбрасыванием замкнутого круга радиуса r с центром в точке z (см. рис. 15). В области E функция $f(\zeta)/(\zeta - z)$ переменной ζ аналитична, а в замкнутой области $\overline{E}$ — непрерывна, так что по теореме 3.4 имеем

$$\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z},$$

где $\gamma_r\colon |\zeta - z| = r$ проходится против часовой стрелки. Имеем (см. пример 3 параграфа 3.1)

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z).$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta - z} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{\big(f(\zeta) - f(z)\big)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Отсюда, поскольку на γ_r имеем $|\zeta - z| = r$, получаем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{\gamma_r}\frac{\big(f(\zeta) - f(z)\big)\,d\zeta}{\zeta - z}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\max\limits_{\zeta\in\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|}{r}\cdot 2\pi r = \max_{\zeta\in\gamma_r}|f(\zeta) - f(z)|.$$

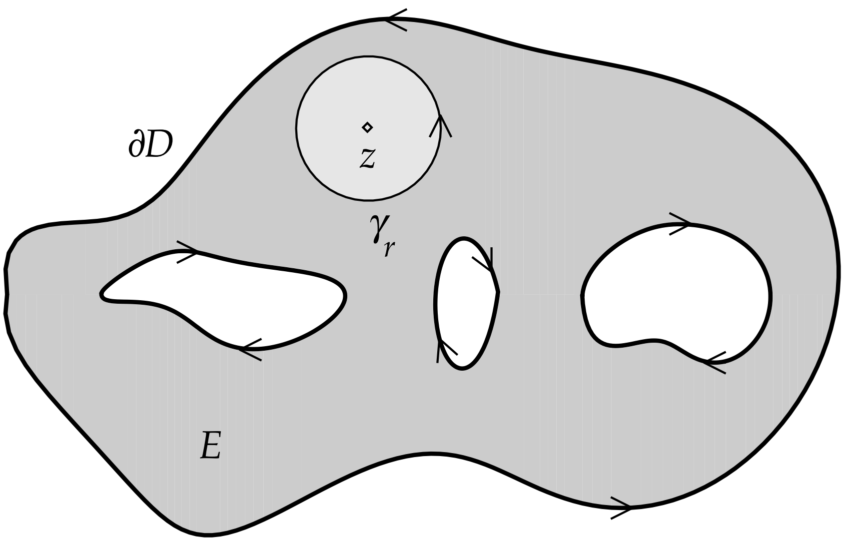

Рис. 15. Чертеж к доказательству интегральной формулы Коши

При этом функция $f(\zeta)$ непрерывна в точке z, поэтому бесконечно малому приращению переменной $\zeta - z$ соответствует бесконечно малое приращение функции $f(\zeta) - f(z)$. Значит, устремляя здесь r к 0, получим $\zeta - z \to 0$, откуда $f(\zeta) - f(z) \to 0$, следовательно

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - f(z)\right| = 0,$$

откуда и получается утверждение теоремы. □

Пример. Вычислим
$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+1},$$
где Γ — окружность $|z-i|=1$, проходимая против часовой стрелки.

Функция $1/(z+i)$ аналитична внутри Γ, точка $z=i$ лежит внутри Γ, так что по интегральной формуле Коши
$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} = \oint_\Gamma \frac{\frac{1}{z+i}\,dz}{z-i} = 2\pi i\cdot \frac{1}{z+i}\bigg|_{z=i} = \pi.$$

3.6 Теорема о среднем. Принцип максимума модуля

Следующая важная теорема легко получается из интегральной формулы Коши.

Теорема 3.10 (о среднем). *Пусть $f(\zeta)$ — функция, аналитическая в круге $|\zeta-z|<R$ и непрерывная в круге $|\zeta-z|\leqslant R$. Тогда*
$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Доказательство. Из интегральной формулы Коши получаем
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-z} =$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+Re^{i\varphi})iRe^{i\varphi}\,d\varphi}{Re^{i\varphi}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi,$$
поскольку $\zeta=z+Re^{i\varphi}$ на окружности $|\zeta-z|=R$. □

Лемма 3.3. *Если в области D постоянна вещественная часть аналитической функции $f(z)$ или постоянен модуль этой функции, то сама функция $f(z)$ постоянна в D.*

Доказательство. 1. Пусть $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, причем $u(x,y)$ постоянна в D. Тогда $u'_x=u'_y=0$ в D. Но тогда из условий Коши — Римана $v'_x=v'_y=0$ в D, т. е. $v(x,y)$ постоянна в D. Итак, $f(z)$ постоянна в области D.

2. Если $\big|f(z)\big|\equiv 0$ в области D, то утверждение леммы очевидно. Если же $\big|f(z)\big|$ постоянен в D, но не равен нулю, то рассмотрим функцию $\ln f(z)=\ln\big|f(z)\big|+i\arg f(z)$. Она аналитична в D и ее вещественная часть в D постоянна. Значит, $\ln f(z)$ постоянна в области D. Но тогда и $f(z)$ постоянна в D. □

Теорема 3.11 (принцип максимума модуля). *Если функция $f(z)$ аналитична в области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и не равна тождественно постоянной в D, то наибольшее в $\overline{D}$ значение ее модуля не может достигаться во внутренней точке области D и достигается в граничной точке этой области.*

Доказательство. Поскольку $\bigl|f(z)\bigr|$ непрерывен, он достигает своего максимума в замкнутой области $\overline{D}$. Предположим противное утверждению теоремы: $\bigl|f(z)\bigr|$ достигает своего максимума M внутри D.

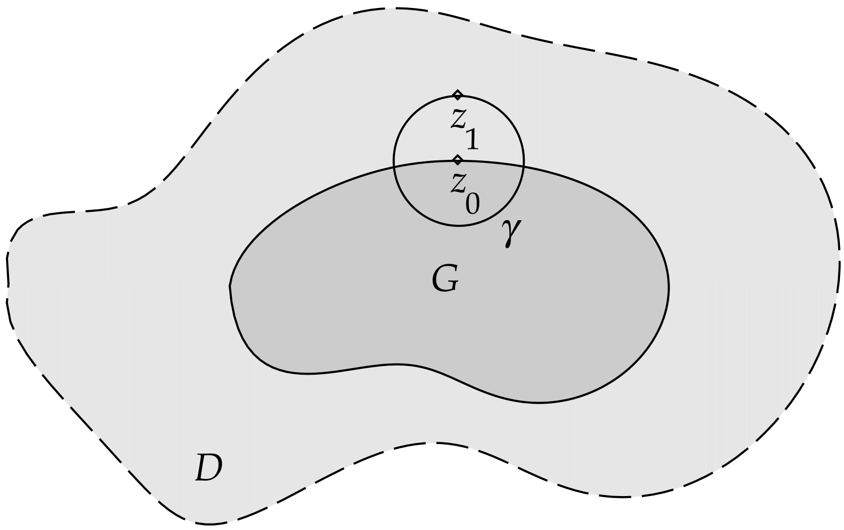

Рис. 16. Чертеж к доказательству принципа максимума модуля

Обозначим $G = \bigl\{z \in D\colon \bigl|f(z)\bigr| = M\bigr\}$. Поскольку функция $f(z)$ не равна тождественно постоянной в области D, множество $G \neq D$, иначе бы нарушилась лемма 3.3. Значит, существует граничная точка z_0 множества G, являющаяся внутренней точкой области D. Поскольку z_0 — граничная точка множества G, найдется последовательность точек из G, сходящаяся к z_0. Значит, по непрерывности, $\bigl|f(z_0)\bigr| = M$. Построим окружность $\gamma\colon |z - z_0| = r$, лежащую в области D и содержащую хотя бы одну точку $z_1 \notin G$, что можно сделать, т. к. точка z_0 — внутренняя для D и граничная для G (см. рис. 16). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая дуга γ_1 этой окружности, содержащая точку z_1, что $\bigl|f(z)\bigr| < M - \varepsilon$ на дуге γ_1. Оставшуюся дугу окружности обозначим через γ_2; длины дуг γ_1 и γ_2 обозначим через l_1 и l_2 соответственно. По теореме о среднем

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,ds + \int_{\gamma_2} f(z)\,ds\right),$$

где $ds = r\,d\varphi$ — элемент длины окружности γ. Отсюда, оценивая эти интегралы, получаем

$$M = \left|f(z_0)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi r}\left|\int_{\gamma_1} f(z)\,ds + \int_{\gamma_2} f(z)\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi r}\big((M-\varepsilon)l_1 + Ml_2\big) = M - \frac{\varepsilon l_1}{2\pi r},$$

что невозможно. □

3.7 Семейства функций, зависящих от параметра

Этот параграф является вспомогательным: в нем доказываются две теоремы, полностью аналогичные соответствующим теоремам из курса математического анализа и необходимые только для доказательства теоремы 3.14. Можно пропустить этот параграф и вернуться к нему позднее при необходимости.

Определение 3.3. Пусть $\{f_\alpha(z)\}$ — семейство функций, зависящих от комплексного параметра α. Тогда $f_\alpha(z)$ стремится к $f(z)$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно z в области D (на кривой Γ), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, что при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ сразу для всех z из области D (на кривой Γ) выполнено $\left|f_\alpha(z) - f(z)\right| < \varepsilon$.

Теорема 3.12. *Если $f_\alpha(z)$ стремится к $f(z)$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно z в области D (на кривой Γ) и все $f_\alpha(z)$ непрерывны в D (на Γ), то $f(z)$ непрерывна в D (на Γ).*

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$, а z_0 — произвольная точка из области D.

Поскольку $f_\alpha(z)$ стремится к функции $f(z)$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно z в области D, найдется такое число $\delta_1 > 0$, что при $|\alpha - \alpha_0| < \delta_1$ для всех точек z из области D сразу выполнено неравенство $\left|f_\alpha(z) - f(z)\right| < \varepsilon/3$ и, в частности, неравенство $\left|f_\alpha(z_0) - f(z_0)\right| < \varepsilon/3$.

Далее, поскольку функция $f_\alpha(z)$ непрерывна в точке z_0, найдется такое число $\delta_2 > 0$, что при $|z - z_0| < \delta_2$ выполнено неравенство $\left|f_\alpha(z) - f_\alpha(z_0)\right| < \varepsilon/3$.

Тогда при $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ имеем

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| \leqslant \left|f(z) - f_\alpha(z)\right| + \left|f_\alpha(z) - f_\alpha(z_0)\right| + \left|f_\alpha(z_0) - f(z_0)\right| < \varepsilon,$$

откуда и следует непрерывность.

Доказательство для кривой Γ аналогично. □

Теорема 3.13. *Если $f_\alpha(z)$ стремится к $f(z)$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно z на спрямляемой кривой Γ и все $f_\alpha(z)$ непрерывны на Γ, то*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Gamma f_\alpha(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz. \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, а l — длина кривой Γ.

Поскольку $f_\alpha(z)$ стремится к $f(z)$ при $\alpha \to \alpha_0$ равномерно относительно z на кривой Γ, найдется такое число $\delta > 0$, что при $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ сразу для всех z на кривой Γ выполнено неравенство $\bigl|f_\alpha(z) - f(z)\bigr| < \varepsilon/l$. Тогда при таких δ

$$\left|\int_\Gamma f_\alpha(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma \bigl(f_\alpha(z) - f(z)\bigr)\,dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{l}\cdot l = \varepsilon,$$

откуда и следует (3.2). □

3.8 Производные высших порядков

Определение 3.4. *Производной порядка n* функции $f(z)$ называется функция

$$f^{(n)}(z) = \bigl(f^{(n-1)}(z)\bigr)',$$

где для удобства $f^{(0)}(z) = f(z)$, $f^{(1)}(z) = f'(z)$, $f^{(2)}(z) = f''(z)$, $f^{(3)}(z) = f'''(z)$.

Теорема 3.14. *Пусть область D определена так же, как в теореме* 3.4, *∂D — граница области D, а функция $f(z)$ аналитична в области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. Тогда $f(z)$ имеет в каждой точке области D производные всех порядков, причем*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{3.3}$$

где ∂D проходится так, что D все время остается слева.

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Если $z \in D$, то

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i h}\left(\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z - h} - \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^2},
\end{aligned}$$

ибо $(\zeta - z - h)^{-1}$ стремится при $h \to 0$ к $(\zeta - z)^{-1}$ равномерно относительно ζ на всех кривых из ∂D. Таким образом, формула (3.3) доказана при $n = 1$.

Предположим, что формула (3.3) верна при n, равном некоторому $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f^{(m+1)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(m)}(z+h) - f^{(m)}(z)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{m!}{2\pi i h} \left(\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)^{m+1}} - \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} \right) =$$

$$= \frac{m!}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\big(C^1_{m+1}(\zeta - z)^m - hC^2_{m+1}(\zeta - z)^{m-1} + \ldots\big)\,d\zeta}{(\zeta - z - h)^{m+1}(\zeta - z)^{m+1}} =$$

$$= \frac{(m+1)!}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{m+2}},$$

поскольку при $h \to 0$

$$\frac{C^1_{m+1}(\zeta - z)^m - hC^2_{m+1}(\zeta - z)^{m-1} + \ldots}{(\zeta - z - h)^{m+1}(\zeta - z)^{m+1}} \to \frac{m+1}{(\zeta - z)^{m+2}}$$

равномерно относительно ζ на всех кривых из ∂D. Тем самым формула (3.3) верна и при $n = m + 1$.

Итак, теорема доказана методом математической индукции. □

Из этой теоремы, в частности, следует непрерывность всех производных аналитической функции. Отсюда, в свою очередь, вытекает непрерывность частных производных вещественной и мнимой частей аналитической функции, которая была необходима при доказательстве условий Коши — Римана.

Примеры. 1. Вычислим

$$\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz,$$

где Γ — проходимая против часовой стрелки окружность $|z| = 1$.

Функция $\cos z$ внутри Γ аналитична, точка $z = 0$ лежит внутри Γ, так что

$$\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz = \oint_\Gamma \frac{\cos z}{(z-0)^{2+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{2!} \cdot (\cos z)''\Big|_{z=0} = -\pi i.$$

2. Воспользуемся аналитичностью и, следовательно, непрерывностью производной аналитической в области D функции $f(z)$ для доказательства формулы замены переменной $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в

интеграле:

$$\int_{f(\Gamma)} \Phi(w)\,dw = \int_\Gamma \Phi\bigl(f(z)\bigr) f'(z)\,dz, \tag{3.4}$$

где $f(\Gamma)$ — образ при отображении $w = f(z)$ спрямляемой кривой Γ, лежащей в D. Обозначим через l длину Γ, а через M — максимум модуля $f'(z)$ на Γ.

Сначала покажем, что если Γ: $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, — спрямляемая кривая, то и ее образ $f(\Gamma)$: $w = f\bigl(z(t)\bigr)$ — тоже спрямляемая кривая. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ точками $t_0 = \alpha$, t_1, ..., $t_n = \beta$ и положим $z_k = z(t_k)$, $w_k = w(t_k)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |w_{k+1} - w_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(z)\,dz \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |dz| \leqslant lM,$$

так что кривая $f(\Gamma)$ спрямляема.

Теперь выберем на $f(\Gamma)$ точки $w_k = f(z_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и рассмотрим интегральные суммы

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(w_k)(w_{k+1} - w_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \Phi\bigl(f(z_k)\bigr) \int_{z_k}^{z_{k+1}} f'(z)\,dz.$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(w_k)(w_{k+1} - w_k) - \int_\Gamma \Phi\bigl(f(z)\bigr) f'(z)\,dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi\bigl(f(z_k)\bigr) \int_{z_k}^{z_{k+1}} f'(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Phi\bigl(f(z)\bigr) f'(z)\,dz =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Bigl(\Phi\bigl(f(z_k)\bigr) - \Phi\bigl(f(z)\bigr)\Bigr) f'(z)\,dz.$$

При достаточно мелком разбиении разность $\Phi\bigl(f(z_k)\bigr) - \Phi\bigl(f(z)\bigr)$ может быть сделана меньшей по модулю любого ε. Тогда

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \Bigl(\Phi\bigl(f(z_k)\bigr) - \Phi\bigl(f(z)\bigr)\Bigr) f'(z)\,dz \right| \leqslant M\varepsilon l.$$

Значит, при неограниченном измельчении разбиения

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(w_k)(w_{k+1} - w_k) \to \int_\Gamma \Phi\bigl(f(z)\bigr) f'(z)\,dz,$$

откуда и следует (3.4).

3.9 Оценки производных. Теорема Лиувилля. Теорема Мореры

Пусть $f(\zeta)$ непрерывна на окружности $|\zeta - z_0| = r$. Обозначим
$$M = \max_{|\zeta - z_0| = r} \bigl|f(\zeta)\bigr|.$$
Тогда
$$\left|\oint_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^k \, d\zeta\right| \leqslant 2\pi M r^{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.5}$$
Отсюда и из (3.3) получается

Теорема 3.15 (неравенства Коши)**.** *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < r$ и непрерывна в замкнутом круге $|z - z_0| \leqslant r$, то*
$$\bigl|f^{(n)}(z_0)\bigr| \leqslant \frac{Mn!}{r^n}, \quad \text{где} \quad M = \max_{|z - z_0| \leqslant r} \bigl|f(z)\bigr|. \tag{3.6}$$

Теорема 3.16 (Лиувилль)**.** *Если функция аналитична и ограничена во всей плоскости, то она постоянна.*

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u + iv$ аналитична во всей плоскости и всюду $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M$. Тогда при любом $r > 0$ в любой точке z из (3.6) при $n = 1$ имеем
$$\bigl|f'(z)\bigr| \leqslant \frac{M}{r}.$$
Но в этом неравенстве левая часть от r не зависит, а правая увеличением r может быть сделана сколь угодно малой. Значит всюду $\bigl|f'(z)\bigr| = 0$, откуда всюду $f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y = 0$. Тогда всюду $u'_x = u'_y = v'_x = v'_y = 0$, т. е. функции u и v постоянны, а значит, постоянна и $f(z)$. $\square$

Определение 3.5. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *целой*. Функция, которую можно представить в виде отношения двух целых функций, называется *мероморфной*.

Теорема Лиувилля означает, что целая функция, ограниченная во всей плоскости, постоянна. Из этой теоремы и принципа максимума модуля следует, что для целой неконстантной функции $f(z)$ величина
$$M(r) = \max_{|z| = r} \bigl|f(z)\bigr|$$
возрастает и $M(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Теорема 3.17 (Морера)**.** *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и для любой замкнутой спрямляемой кривой Γ, лежащей в D,*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = 0,$$

то $f(z)$ аналитична в D.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что в области D интеграл

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \qquad z_0 \in D,$$

не зависит от пути интегрирования, т. е. определяет некоторую однозначную функцию $F(z)$. Далее, повторяя доказательство теоремы 3.6, в котором мы пользовались только непрерывностью $f(z)$, получаем $F'(z) = f(z)$ в D. Но тогда $F(z)$ имеет в D и вторую производную, которая равна $f'(z)$, так что $f(z)$ аналитична в D. $\square$

Примечание. Как мы видели при доказательстве теоремы Коши, достаточным условием равенства нулю интеграла непрерывной функции вдоль произвольной замкнутой спрямляемой кривой, лежащей в односвязной области D, является равенство нулю интеграла этой функции вдоль границы любого треугольника, лежащего в D. Следовательно, теорему Мореры можно переформулировать следующим образом: *если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл $f(z)$ вдоль границы любого треугольника, лежащего в D, равен нулю, то $f(z)$ аналитична в D.*

4 Функциональные ряды. Особые точки

4.1 Равномерная сходимость

Определение 4.1. *Функциональным рядом* называется ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z), \tag{4.1}$$

где $f_k(z)$ — некоторые функции. Суммы

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z), \qquad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z),$$

называются соответственно *n-й частичной суммой* и *остатком* ряда (4.1). Если при каждом фиксированном z из множества G существует предел $S(z)$ последовательности частичных сумм ряда (4.1), то $S(z)$ называется суммой ряда (4.1) в множестве G, а сам ряд называется *сходящимся* в множестве G.

Определение 4.2. Ряд (4.1) называется *равномерно сходящимся* к своей сумме $S(z)$ в области D (на кривой Γ), если последовательность $\{S_n(z)\}$ его частичных сумм сходится в D (на Γ) к $S(z)$ равномерно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий только от ε, что при всех $n \geqslant N$ для всех z из D (на Γ) сразу выполнено $\left|R_n(z)\right| = \left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon$.

Теорема 4.1. *Если для всех z из замкнутой области $\overline{D}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнено неравенство $\left|f_k(z)\right| \leqslant a_k$, а числовой ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tag{4.2}$$

сходится, то ряд (4.1) *сходится в $\overline{D}$ абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Из неравенства $\left|f_k(z)\right| \leqslant a_k$ и признака сравнения следует, что в любой фиксированной точке $z \in \overline{D}$ сходится ряд, составленный из $\left|f_k(z)\right|$, а значит, и ряд (4.1). Имеем не зависящую от $z \in \overline{D}$ оценку

$$\left|S(z) - S_n(z)\right| \leqslant \left|f_{n+1}(z)\right| + \left|f_{n+2}(z)\right| + \ldots \leqslant a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots .$$

Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geqslant N$ для всех $z \in \overline{D}$ сразу $\left|S(z) - S_n(z)\right| < \varepsilon$, поскольку ряд (4.2) сходится, а, следовательно, его остаток стремится к нулю. □

Следующие теоремы 4.2 и 4.3 полностью аналогичны ранее доказанным теоремам 3.12 и 3.13.

Теорема 4.2. *Если ряд* (4.1) *сходится в области* D (*на кривой* Γ) *к своей сумме* $S(z)$ *равномерно и все* $f_k(z)$ *непрерывны в* D (*на* Γ), *то* $S(z)$ *непрерывна в* D (*на* Γ).

Доказательство. Пусть число $\varepsilon > 0$, а z_0 — произвольная точка из области D.

Поскольку ряд (4.1) сходится к функции $S(z)$ равномерно в области D, найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ для всех z из D сразу выполнено неравенство $\bigl|S(z) - S_n(z)\bigr| < \varepsilon/3$ и, в частности, неравенство $\bigl|S(z_0) - S_n(z_0)\bigr| < \varepsilon/3$.

Далее, поскольку функции $f_k(z)$ непрерывны в точке z_0, функции $S_n(z)$ тоже непрерывны в точке z_0, так что найдется такое число $\delta > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ выполнено неравенство $\bigl|S_n(z) - S_n(z_0)\bigr| < \varepsilon/3$.

Тогда имеем

$$\bigl|S(z) - S(z_0)\bigr| \leqslant \bigl|S(z) - S_n(z)\bigr| + \bigl|S_n(z) - S_n(z_0)\bigr| + \bigl|S_n(z_0) - S(z_0)\bigr| < \varepsilon,$$

откуда и следует непрерывность.

Доказательство для кривой Γ аналогично. □

Теорема 4.3. *Если ряд* (4.1) *сходится на спрямляемой кривой* Γ *к своей сумме* $S(z)$ *равномерно и все* $f_k(z)$ *непрерывны на* Γ, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f_k(z)\, dz = \int_{\Gamma} S(z)\, dz. \tag{4.3}$$

Доказательство. Существование интеграла в правой части равенства (4.3) следует из непрерывности суммы ряда в наших условиях, которая, в свою очередь, следует из предыдущей теоремы. Теперь докажем само равенство (4.3).

Пусть число $\varepsilon > 0$, а число l — длина кривой Γ.

Поскольку ряд (4.1) сходится к функции $S(z)$ равномерно на кривой Γ, найдется такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ для всех z на Γ сразу выполнено неравенство $\bigl|S(z) - S_n(z)\bigr| < \varepsilon/l$. Тогда при таких n имеем

$$\left|\int_{\Gamma} S_n(z)\, dz - \int_{\Gamma} S(z)\, dz\right| = \left|\int_{\Gamma} \bigl(S_n(z) - S(z)\bigr)\, dz\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon,$$

откуда и следует равенство (4.3). □

Рассмотрим теперь вопрос об аналитичности суммы функционального ряда в области, в которой слагаемые аналитичны.

Теорема 4.4. *Если ряд* (4.1) *сходится в односвязной области* D *к своей сумме* $S(z)$ *равномерно и все* $f_k(z)$ *аналитичны в* D, *то* $S(z)$ *аналитична в* D.

Доказательство. Поскольку все функции $f_k(z)$ аналитичны в области D, то все они непрерывны в области D. Тогда по теореме 4.2 сумма $S(z)$ непрерывна в области D. Пусть Γ — замкнутый спрямляемый контур, целиком лежащий в области D. Поскольку по теореме 4.3 ряд можно почленно интегрировать вдоль кривой Γ, а все функции $f_k(z)$ аналитичны в области D,

$$\oint_\Gamma S(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0.$$

Итак, функция $S(z)$ непрерывна в области D, а ее интеграл вдоль любого замкнутого спрямляемого контура, целиком лежащего в области D, равен нулю. Значит, по теореме Мореры функция $S(z)$ является аналитической в области D. □

Наконец, выясним, при каких условиях функциональный ряд можно почленно дифференцировать.

Теорема 4.5. *Пусть область* D *— внутренность замкнутой кусочно гладкой жордановой кривой* Γ. *Ряд* (4.1), *составленный из аналитических в области* D *и непрерывных в замкнутой области* $\overline{D}$ *функций, сходящийся равномерно в* $\overline{D}$, *можно почленно дифференцировать в* D *любое число раз.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in \Gamma$, $z \in D$ — произвольные точки. При фиксированном z разность $\zeta - z$ ограничена по модулю снизу положительным числом, так что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{m+1}}, \qquad m \in \mathbb{N},$$

сходится равномерно относительно ζ на Γ. Значит, его можно почленно интегрировать вдоль Γ и сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f_k(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(z),$$

причем в силу равномерной сходимости можно поменять порядок операций суммирования и интегрирования:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{S(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}} = S^{(m)}(z),$$

что и требовалось. □

Примечание. Из принципа максимума модуля следует, что для равномерной сходимости ряда из аналитических функций в замкнутой области достаточно его равномерной сходимости на границе области.

4.2 Степенные ряды

Определение 4.3. *Степенным рядом* или *рядом по степеням* $z - z_0$ называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{4.4}$$

где c_k — комплексные числа — *коэффициенты* ряда (4.4).

Теорема 4.6 (Абель). *Если степенной ряд* (4.4) *сходится в точке* $z = a$, *то он сходится абсолютно в любой такой точке* z, *что* $|z - z_0| < |a - z_0|$, *причем в любом круге* $|z - z_0| \leqslant \theta |a - z_0|$, $0 < \theta < 1$, *сходимость ряда* (4.4) *равномерна.*

Доказательство. Пусть для z выполнено $|z - z_0| \leqslant \theta |a - z_0|$, $0 < \theta < 1$. Представим k-й член ряда (4.4) в виде

$$c_k (z - z_0)^k = c_k (a - z_0)^k \frac{(z - z_0)^k}{(a - z_0)^k}.$$

Ряд (4.4) сходится в точке $z = a$, значит его общий член в этой точке стремится к нулю и, следовательно, ограничен в этой точке, т. е. $\left|c_k (a - z_0)^k\right| \leqslant M$ для всех $k \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\left|c_k (z - z_0)^k\right| = \left|c_k (a - z_0)^k\right| \cdot \left|\frac{z - z_0}{a - z_0}\right|^k \leqslant M\theta^k,$$

а ряд с общим членом $M\theta^k$ сходится как геометрическая прогрессия с общим членом, меньшим 1. Отсюда в силу теоремы 4.1 ряд (4.4) сходится абсолютно и равномерно в круге $|z - z_0| \leqslant \theta |a - z_0|$. Число θ можно взять сколь угодно близким к 1, так что ряд (4.4) сходится абсолютно в круге $|z - z_0| < |a - z_0|$. □

Следствие 4.1. *Существует такое вещественное неотрицательное число* R *(возможно, равное* 0 *или* ∞*), что ряд* (4.4) *сходится внутри окружности* $|z - z_0| = R$ *и расходится во внешности этой окружности. Если* $R = \infty$*, то ряд* (4.4) *сходится во всей комплексной плоскости; если же* $R = 0$*, то ряд* (4.4) *сходится в единственной точке* $z = z_0$.

Определение 4.4. *Радиусом сходимости* ряда (4.4) называется число R, определенное в следствии 4.1. Круг $|z - z_0| < R$ (или вся комплексная плоскость при $R = \infty$) называется *кругом сходимости* ряда (4.4).

Теорема 4.7 (формула Коши — Адамара)**.** *Радиус сходимости* R *ряда* (4.4) *можно найти по формуле*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \tag{4.5}$$

Доказательство. Покажем, что при любом z, удовлетворяющем неравенству $|z-z_0| \leqslant \theta R$, $0 < \theta < 1$, ряд (4.4) сходится. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $k \geqslant N$ выполнено $\sqrt[k]{|c_k|} < R^{-1} + \varepsilon$. Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{R} + \varepsilon < \frac{1}{R^{\frac{\theta+1}{2}}}.$$

Тогда при $k \geqslant N$ и $|z - z_0| \leqslant \theta R$ имеем

$$\left|c_k(z-z_0)^k\right| < \left(\frac{1}{R^{\frac{\theta+1}{2}}}\right)^k \theta^k R^k = \left(\frac{2\theta}{\theta+1}\right)^k, \qquad \frac{2\theta}{\theta+1} < 1.$$

Значит, ряд (4.4) сходится в $|z - z_0| \leqslant \theta R$ равномерно. Число θ может быть взято сколь угодно близким к 1, так что ряд (4.4) сходится в круге $|z - z_0| < R$.

Теперь покажем, что при любом таком z, что $|z-z_0| > R$, ряд (4.4) расходится. По определению верхнего предела для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая подпоследовательность $\{c_{k_m}\}$, для которой выполняется неравенство $\sqrt[k_m]{\left|c_{k_m}\right|} > R^{-1} - \varepsilon$. Тогда

$$\left|c_{k_m}(z-z_0)^{k_m}\right| > \left(\left(\frac{1}{R} - \varepsilon\right)|z-z_0|\right)^{k_m}.$$

Но ε всегда можно подобрать так, чтобы $(R^{-1} - \varepsilon)|z - z_0| > 1$. Тогда ряд (4.4) будет расходиться. $\square$

Из признака Даламбера сходимости знакоположительных числовых рядов следует, что если последовательность $|c_{k+1}|\big/|c_k|$ имеет предел, то этот предел равен тому же числу, что и (4.5). Таким образом, для нахождения радиуса сходимости ряда (4.4) можно воспользоваться еще и формулой

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|c_k|}{|c_{k+1}|}, \tag{4.6}$$

если соответствующий предел существует.

Теорема 4.8. *Сумма степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.*

Доказательство. Пусть $|z-z_0|<R$ — круг сходимости ряда (4.4). По теореме Абеля в любом круге $|z-z_0|<\theta R$, $0<\theta<1$, сходимость ряда равномерна; члены ряда, очевидно, аналитичны. Значит, в круге $|z-z_0|<\theta R$ сумма ряда (4.4) аналитична. Но любая внутренняя точка круга сходимости попадает в круг $|z-z_0|<\theta R$ при некотором θ, достаточно близком к единице. Тем самым, сумма ряда (4.4) аналитична во всем круге сходимости. □

Пример. Найдем радиус сходимости и круг сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+i)^{2k+1}}{2^k}.$$

Имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+i)^{2k+1}}{2^k} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n, \qquad c_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n-1)/2}}, & \text{если } n \text{ — нечетное;} \\ 0, & \text{если } n \text{ — четное.} \end{cases}$$

Верхний предел в формуле Коши — Адамара, очевидно, равен

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Тогда радиус сходимости равен $\sqrt{2}$, а круг сходимости: $|z+i|<\sqrt{2}$.

Тот же результат можно получить, пользуясь формулой (4.6). Для этого положим $w=(z+i)^2$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+i)^{2k+1}}{2^k} = (z+i)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{2^k}.$$

Радиус сходимости последнего ряда равен

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2,$$

т. е. круг сходимости этого ряда: $|w| < 2$. Но тогда $|z+i| < \sqrt{2}$, т. е. радиус сходимости исходного ряда равен $\sqrt{2}$.

Отметим, что на границе $|z+i| = \sqrt{2}$ круга сходимости модуль общего члена ряда

$$\left|\frac{(z+i)^{2k+1}}{2^k}\right| = \frac{|z+i|^{2k+1}}{2^k} = \frac{\left(\sqrt{2}\,\right)^{2k+1}}{2^k} = \sqrt{2},$$

так что всюду на $|z+i| = \sqrt{2}$ ряд расходится, ибо необходимый признак сходимости нарушен.

4.3 Ряды Тейлора

Заметим, что для комплексного q справедлива формула

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Пусть z_0 и z — точки односвязной области D, в которой функция $f(z)$ аналитична, а ζ — точка замкнутой кусочно гладкой жордановой кривой Γ, проходимой против часовой стрелки, целиком лежащей в D и содержащей во внутренности точки z_0 и z (см. рис. 17). Тогда

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{\zeta - z_0}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta - z}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right) + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}\right).$$

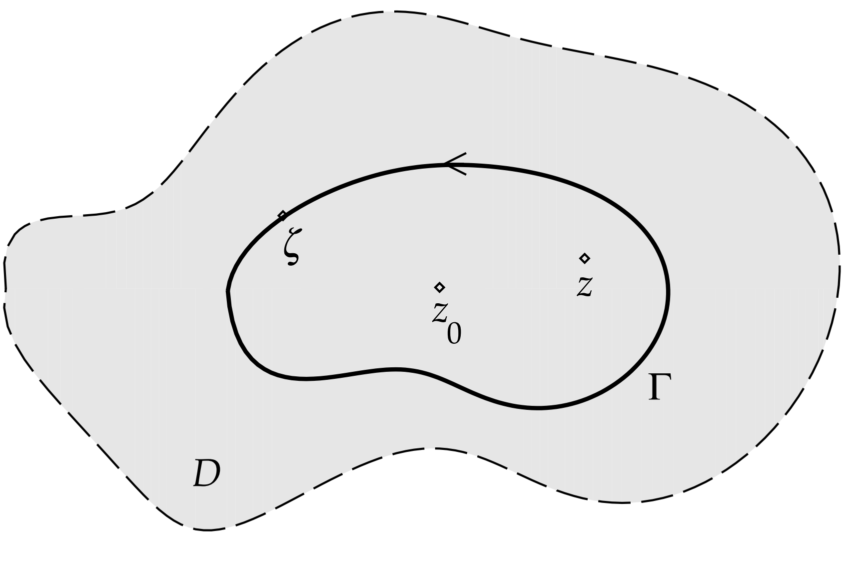

Рис. 17. Чертеж к доказательству формулы Тейлора

Умножим обе части последнего равенства на $f(\zeta)$, поделим на $2\pi i$ и проинтегрируем по ζ вдоль Γ:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z_0} + \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n + R_n(z).$$

Таким образом, нами получена *формула Тейлора*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + R_n(z)$$

с *остаточным членом*

$$R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^{n+1}}. \qquad (4.7)$$

Теорема 4.9. *Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z-z_0| < R$, то в этом круге она представляется своим рядом Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \qquad (4.8)$$

В любой замкнутой области, целиком лежащей в этом круге, ряд (4.8) *сходится равномерно.*

Доказательство. Рассмотрим сначала круг $|z - z_0| \leqslant \theta R'$, где $0 < \theta < 1$, $0 < R' < R$, и проходимую против часовой стрелки окружность Γ: $|\zeta - z_0| = R'$ (см. рис. 18). Имеем

$$|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geqslant R' - \theta R' = (1 - \theta)R'.$$

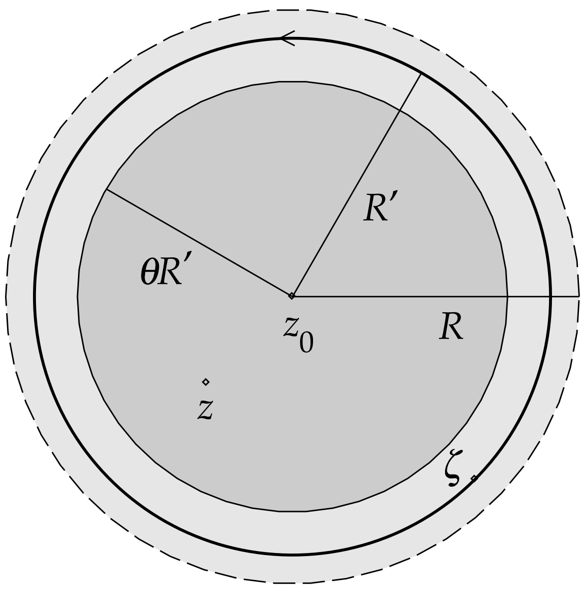

Рис. 18. Чертеж к доказательству теоремы 4.9

Обозначим $M = \max\limits_{\zeta\in\Gamma} \bigl|f(\zeta)\bigr|$. Оценим остаточный член (4.7):

$$\bigl|R_n(z)\bigr| = \left|\frac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{(\theta R')^{n+1} 2\pi R' M}{2\pi(1-\theta)R'(R')^{n+1}} = \frac{M\theta^{n+1}}{1-\theta},$$

причем это неравенство выполнено для всех z сразу. Значит, при всех z из круга $|z-z_0| \leqslant \theta R'$ остаточный член (4.7), т. е. остаток ряда (4.8), может быть сделан сколь угодно малым по модулю. Итак, ряд (4.8) сходится равномерно в круге $|z-z_0| \leqslant \theta R'$.

Произвольная замкнутая область, лежащая в круге $|z - z_0| < R$, будет лежать в круге $|z-z_0| \leqslant \theta R'$ при θ, достаточно близком к 1. Таким образом, в такой замкнутой области ряд (4.8) сходится равномерно.

Любая точка из круга $|z - z_0| < R$ попадет в круг $|z - z_0| \leqslant \theta R'$ при θ, достаточно близком к 1. Значит, ряд (4.8) сходится во всем круге $|z - z_0| < R$. □

Теорема 4.10. *Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Тогда при $z = z_0$ получаем $f(z_0) = c_0$. Дифференцируя почленно и подставляя $z = z_0$, получаем $f'(z_0) = c_1$. Дифференцируя почленно дважды и подставляя $z = z_0$, получаем $f''(z_0) = 2c_2$. Продолжая этот процесс, на k-м шаге получим $f^{(k)}(z_0) = k!c_k$ и т. д. Итак, при любом $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $c_k = f^{(k)}(z_0)\big/k!$, т. е. этот степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы $f(z)$. □

Следствие 4.2. *Радиус сходимости степенного ряда* (4.4) *равен расстоянию от z_0 до ближайшей точки, где нарушается аналитичность его суммы.*

Примеры. 1. Имеем при $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!};$$

а при $|z| < 1$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad \ln(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k+1}}{k+1},$$

где $\ln(1+z)$ — главное значение логарифма.

2. Найдем тейлоровское разложение по степеням z функции

$$\frac{1}{z^2+3z+2}.$$

Имеем при $|z| < 1$

$$\frac{1}{z^2+3z+2} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2+z} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k.$$

3. Найдем тейлоровское разложение по степеням $z+1$ функции

$$\frac{1}{z^2+5z+6}.$$

Пусть $w = z+1$, тогда из предыдущего примера

$$\frac{1}{z^2+5z+6} = \frac{1}{w^2+3w+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) w^k$$

при $|w| < 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{z^2+5z+6} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) (z+1)^k, \qquad |z+1| < 1.$$

4. Найдем тейлоровское разложение по степеням $z - i$ функции e^{z+1+2i}:

$$e^{z+1+2i} = e^{z-i+1+3i} = e^{1+3i} \cdot e^{z-i} = e^{1+3i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{k!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

4.4 Нули. Теорема единственности

Определение 4.5. *Нулем* функции $f(z)$ называется такая точка z_0, что $f(z_0) = 0$. Число $n \in \mathbb{N}$ называется *порядком нуля* z_0 функции $f(z)$, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \ f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Нуль первого порядка называется также *простым нулем.*

Пусть функция $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля z_0 порядка n и не равна тождественно нулю ни в какой его окрестности. Из определения нуля следует, что в окрестности этого нуля тейлоровское разложение $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n\varphi(z), \qquad c_n \neq 0,$$

где функция $\varphi(z)$ имеет в этой окрестности тейлоровское разложение

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \ldots,$$

так что $\varphi(z)$ аналитична в этой окрестности и, следовательно, непрерывна в ней. При этом $\varphi(z_0) = c_n \neq 0$. Значит, в силу непрерывности $\varphi(z)$ существует некоторая окрестность точки z_0, в которой $\varphi(z) \neq 0$. Значит, справедлива

Теорема 4.11. *Если функция $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля z_0 и не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки z_0, то существует окрестность точки z_0, в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме z_0.*

Теорема 4.12 (единственности)**.** *Пусть $f(z)$ и $g(z)$ — функции, аналитические в некоторой области D, а $\{z_n\}$ — некоторая последовательность точек из D, сходящаяся к внутренней точке z_0 области D. Тогда если $f(z_n) = g(z_n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то $f(z) \equiv g(z)$ в D.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$. Она имеет нули в точках z_n, аналитична и, следовательно, непрерывна в D. Тогда по непрерывности $h(z_0) = 0$, так что z_0 — нуль $h(z)$. Но тогда существует некоторая окрестность точки z_0, в которой $h(z) \equiv 0$. Действительно, иначе бы нарушилась теорема 4.11, ибо последовательность $\{z_n\}$ сходится к z_0, так что в любой окрестности z_0 есть другие нули z_n функции $h(z)$. Значит, множество нулей $h(z)$ в D имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

Обозначим через G совокупность всех внутренних точек множества нулей $h(z)$ в D. Если $G = D$, то теорема доказана. Если же $G \neq D$, то найдется граничная точка a множества G, лежащая в D. Поскольку в любой окрестности точки a есть точки из G, существует последовательность $\{a_n\}$ точек из G, сходящаяся к a. Значит, по непрерывности $h(a) = 0$ и по теореме 4.11 в некоторой окрестности O точки a функция $h(z)$ либо не имеет других нулей, кроме a, либо тождественно равна нулю (см. рис. 19). Но и то, и другое невозможно, ибо a — граничная точка множества G. $\square$

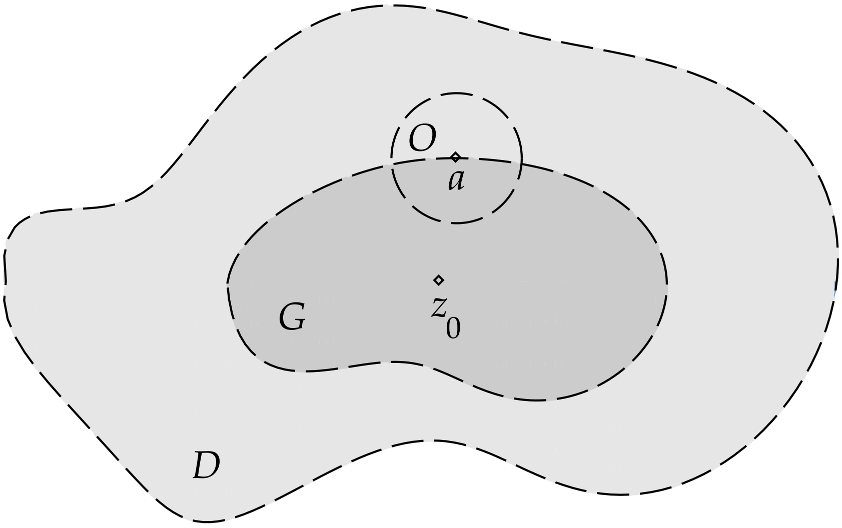

Рис. 19. Чертеж к доказательству теоремы единственности

Следствие 4.3. *Аналитическая в области D и не равная тождественно нулю в этой области функция не может быть тождественно равной нулю ни в какой области, целиком лежащей в D, ни на какой кривой, целиком лежащей в области D, ни на какой последовательности точек из D, сходящейся к внутренней точке этой области.*

4.5 Ряды Лорана

Пусть $f(z)$ — аналитическая в кольце $K\colon r < |z - z_0| < R$, где $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, функция. Выберем произвольно такие числа r', R' и θ, что $r < r' < R' < R$, $0 < \theta < 1$. Рассмотрим кольцо $K'\colon \theta^{-1}r' < |z - z_0| < \theta R'$. Пусть z — внутренняя точка кольца K'. Из интегральной формулы Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{4.9}$$

где обе окружности $\Gamma\colon |\zeta - z_0| = R'$ и $\gamma\colon |\zeta - z_0| = r'$ проходятся против часовой стрелки (см. рис. 20).

Для $\zeta \in \Gamma$ имеем

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < \frac{\theta R'}{R'} = \theta < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \ldots\right).$$

Умножив обе части последнего равенства на $f(\zeta)$, поделив на $2\pi i$ и про-

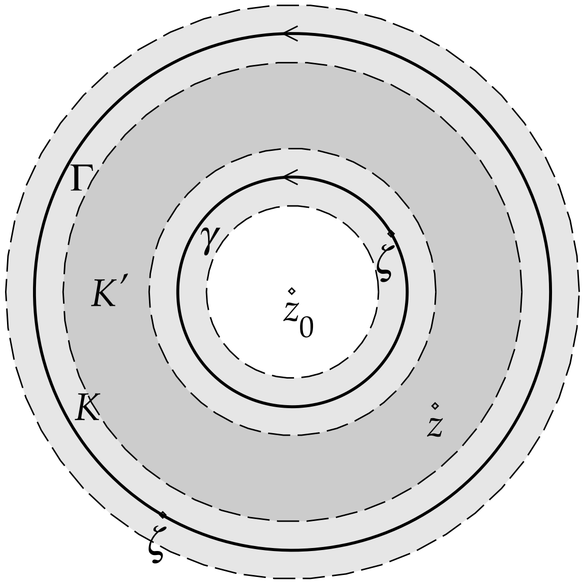

Рис. 20. Чертеж к доказательству теоремы Лорана

интегрировав почленно по ζ (что можно сделать, т. к. ряд равномерно сходится), получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}}, \tag{4.10}$$

где $k \in \mathbb{N}_0$.

Для $\zeta \in \gamma$ имеем

$$\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < \frac{\theta r'}{r'} = \theta < 1,$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} = -\frac{1}{z-z_0}\left(1 + \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \ldots\right).$$

Умножив обе части последнего равенства на $-f(\zeta)$, поделив на $2\pi i$ и проинтегрировав почленно по ζ (что можно сделать, т. к. ряд равномерно сходится), получаем

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k},\ c_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)(\zeta-z_0)^{k-1}\,d\zeta, \tag{4.11}$$

где $k \in \mathbb{N}$.

Заменим индексы в (4.10) и (4.11) так, чтобы индекс k пробегал целые значения $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Кроме того, в кольце между окружностями γ и $C\colon |\zeta - z_0| = \rho$, где $r' < \rho < R'$, функции $f(\zeta)\big/(\zeta-z_0)^{k+1}$ аналитичны, а на самих окружностях непрерывны, так что по теореме 3.4 их интегралы вдоль γ и вдоль проходимой против часовой стрелки окружности C равны. Аналогично, равны интегралы вдоль окружностей Γ и C. Тогда из равенства (4.9) получаем разложение

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \qquad c_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

Т. к. числа r' и R' могут быть взяты сколь угодно близкими к числам r и R соответственно, а число θ может быть взято сколь угодно близким к 1, разложение (4.12) установлено для всех внутренних точек z кольца K.

Определение 4.6. Разложение (4.12) называется *лорановским разложением по степеням* $z - z_0$ функции $f(z)$ или ее *лорановским разложением с центром в точке* z_0. Часть лорановского разложения функции $f(z)$, соответствующая неотрицательным индексам k, называется его *правильной частью*, а часть, соответствующая отрицательным k, — его *главной частью.*

Правильная часть разложения (4.12) по теореме Абеля сходится всюду в круге $|z - z_0| < R$, причем в круге $|z - z_0| \leqslant \theta R$, $0 < \theta < 1$, ее сходимость равномерна. Главная часть разложения (4.12) является степенным рядом относительно $Z = 1\big/(z-z_0)$, так что по теореме Абеля она сходится при $|Z| < 1/r$, т. е. во внешности окружности $|z - z_0| = r$, причем в круге $|z - z_0| \geqslant r/\theta$, $0 < \theta < 1$, ее сходимость равномерна. Таким образом, нами доказана

Теорема 4.13 (Лоран)**.** *В любом кольце $K\colon r < |z - z_0| < R$, в котором функция $f(z)$ аналитична, эта функция может быть представлена своим рядом Лорана* (4.12), *равномерно сходящимся к ней в любой замкнутой области, лежащей в кольце K.*

Докажем теперь аналог теоремы 4.10 для рядов по целым (в том числе и отрицательным) степеням $z - z_0$.

Теорема 4.14. *Если ряд*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad (4.13)$$

сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$, то его сумма $f(z)$ аналитична в этом кольце, а сам ряд (4.13) *является рядом Лорана своей суммы $f(z)$, т. е. его коэффициенты c_k равны коэффициентам в разложении* (4.12) *суммы $f(z)$.*

Доказательство. Аналитичность суммы $f(z)$ ряда (4.13) легко доказать, рассматривая правильную и главную части этого ряда так же, как это было сделано перед формулировкой теоремы Лорана, и пользуясь для них теоремой 4.4.

На любой окружности $C\colon\ |\zeta - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$, ряд (4.13) сходится равномерно и это не меняется при умножении на $(\zeta - z_0)^{-n-1}$ для любого целого n. Почленно интегрируя, получаем

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,d\zeta = 2\pi i c_n,$$

где окружность C проходится против часовой стрелки, поскольку

$$\oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при } k \geqslant n+1 \text{ по теореме Коши;} \\ 2\pi i & \text{при } k = n \text{ (см. пример 3 параграфа 3.1);} \\ 0 & \text{при } k < n \text{ по формуле (3.3).} \end{cases}$$

Итак, ряд (4.13) является лорановским разложением функции $f(z)$. $\square$

Примеры. 1. Из известного тейлоровского разложения получаем

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,z^k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \ldots, \qquad 0 < |z| < \infty.$$

2. Найдем все лорановские разложения по степеням z функции

$$\frac{5}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+2}.$$

В круге $|z| < 2$ имеем $\bigl|z/2\bigr| < 1$ и $\bigl|z/3\bigr| < 1$, так что

$$\frac{5}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-z^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}}\right) z^k.$$

В кольце $2 < |z| < 3$ имеем $\bigl|2/z\bigr| < 1$ и $\bigl|z/3\bigr| < 1$, так что

$$\frac{5}{z^2 - z - 6} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{z^{k+1}}.$$

Наконец, в кольце $3 < |z| < \infty$ имеем $\bigl|2/z\bigr| < 1$ и $\bigl|3/z\bigr| < 1$, так что

$$\frac{5}{z^2 - z - 6} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{z^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{z^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k - (-2)^k}{z^{k+1}}.$$

3. Найдем все лорановские разложения по степеням $z+2i$ функции
$$\frac{5}{z^2-(1-4i)z-10-2i}.$$
Пусть $w=z+2i$. Тогда
$$\frac{5}{z^2-(1-4i)z-10-2i}=\frac{5}{w^2-w-6}.$$
Из предыдущего примера в круге $|w|<2$, т. е. $|z+2i|<2$, имеем
$$\frac{5}{z^2-(1-4i)z-10-2i}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}-\frac{1}{3^{k+1}}\right)(z+2i)^k,$$
в кольце $2<|w|<3$, т. е. $2<|z+2i|<3$, имеем
$$\frac{5}{z^2-(1-4i)z-10-2i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k+1}}{(z+2i)^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^k}{3^{k+1}},$$
и наконец, в кольце $3<|w|<\infty$, т. е. $3<|z+2i|<\infty$, имеем
$$\frac{5}{z^2-(1-4i)z-10-2i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k-(-2)^k}{(z+2i)^{k+1}}.$$

4. Разложим в ряд Лорана по степеням $z-i$ функцию
$$f(z)=(z+2)\operatorname{ch}\frac{1}{z-i}.$$

Имеем при $0<|z-i|<\infty$
$$f(z)=(z-i+2+i)\operatorname{ch}\frac{1}{z-i}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!\,(z-i)^{2k-1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2+i}{(2k)!\,(z-i)^{2k}}.$$

4.6 Особые точки функции

Определение 4.7. Точка z_0 называется *правильной точкой* функции $f(z)$, если существует некоторая окрестность $|z-z_0|<r$ этой точки, в которой $f(z)$ аналитична. Точка z_0 называется *особой точкой* функции $f(z)$, если в ней нарушается аналитичность функции $f(z)$. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *изолированной*, если существует некоторая проколотая окрестность $0<|z-z_0|<r$ этой точки, в которой нет особых точек функции $f(z)$. Изолированная особая точка z_0 называется

- *устранимой особой точкой*, если существует конечный $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;
- *полюсом*, если существует $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, т. е. $\lim\limits_{z\to z_0}\bigl|f(z)\bigr|=\infty$;
- *существенно особой точкой*, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Если точка z_0 является изолированной особой точкой функции $f(z)$, то в некоторой ее проколотой окрестности функция $f(z)$ аналитична и ее можно разложить в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k. \tag{4.14}$$

Теорема 4.15. *Изолированная особая точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в лорановском разложении (4.14) функции $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0 нет главной части.*

Доказательство. 1. Если (4.14) не содержит главной части, то имеет место разложение $f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots$. Правая часть в этом равенстве — аналитическая в окрестности точки z_0 функция, так что она непрерывна в этой окрестности, и ее предел в точке z_0 равен сумме ряда в этой точке, т. е. c_0. Но тогда и предел функции $f(z)$ в точке z_0 существует и равен $c_0 \neq \infty$.

2. Обратно, если z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$, то $f(z)$ имеет в этой точке конечный предел. Тогда $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0. Тогда из (3.5) получаем для коэффициентов ряда Лорана (4.14) оценки $|c_k| \leqslant M\rho^{-k}$. Но здесь левая часть от ρ не зависит, а правую часть при отрицательных k можно выбором ρ сделать сколь угодно малой. Значит, $c_k = 0$ при $k < 0$, т. е. ряд (4.14) не содержит главной части. □

Примечание. Из теоремы 4.15 следует, что устранимую особую точку z_0 функции $f(z)$ легко сделать правильной точкой, положив $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Теорема 4.16. *Изолированная особая точка z_0 является устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. 1. Если z_0 — устранимая особая точка $f(z)$, то $f(z)$ имеет при $z \to z_0$ конечный предел. Тогда $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0.

2. Обратно, если $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0, то, как и при доказательстве теоремы 4.15, в силу (3.5) ряд (4.14) не содержит главной части. Значит, по теореме 4.15, z_0 является устранимой особой точкой $f(z)$. □

Пусть z_0 — полюс функции $f(z)$. Тогда $f(z) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки z_0, ибо в этой проколотой окрестности $f(z)$ аналитична и, следовательно, непрерывна, а $f(z) \to \infty$. Значит, в этой проколотой окрестности аналитична и функция $g(z) = 1/f(z)$, а в точке z_0 функция $g(z)$ имеет предел, равный нулю. Итак, z_0 — устранимая особая точка $g(z)$, причем доопределяя $g(z_0) = 0$, мы получаем, что $g(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, а z_0 — нуль $g(z)$. Обратно, если функция $g(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, не равна в этой окрестности тождественно нулю и $g(z_0) = 0$, то $g(z)$ не имеет в окрестности точки z_0 других нулей. Тогда $f(z) = 1/g(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки z_0 и $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$. Значит, z_0 — полюс функции $f(z)$.

Определение 4.8. *Порядком* полюса z_0 функции $f(z)$ называется порядок нуля z_0 функции $g(z) = 1/f(z)$. Полюс первого порядка называется также *простым* полюсом.

Теорема 4.17. *Изолированная особая точка z_0 является полюсом порядка n функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения* (4.14) *этой функции в некоторой проколотой окрестности точки z_0 содержит лишь конечное число слагаемых, причем номер старшего члена главной части равен n:*

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots, \quad c_{-n} \neq 0. \tag{4.15}$$

Доказательство. 1. Пусть z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$. Тогда функция $g(z) = 1/f(z)$ с доопределенным значением $g(z_0) = 0$ имеет в точке z_0 нуль порядка n. Следовательно, в окрестности точки z_0 функцию $g(z)$ можно представить в виде $g(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — аналитическая в этой окрестности функция, причем $\varphi(z_0) \neq 0$. Тогда $\varphi(z)$ по непрерывности не имеет нулей в некоторой окрестности точки z_0 и $1/\varphi(z)$ — аналитическая в этой окрестности функция, так что ее можно разложить в ряд Тейлора в этой окрестности:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + c_0(z-z_0)^n + \ldots,$$

причем $c_{-n} \neq 0$, т. к., очевидно $1/\varphi(z_0) \neq 0$. Значит, в этой окрестности (кроме самой z_0)

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots,$$

что и требовалось.

2. Обратно, пусть в некоторой проколотой окрестности точки z_0 имеет место разложение (4.15). Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{\varphi(z)} = (z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \ldots + c_0(z-z_0)^n + \ldots,$$

которая аналитична в этой окрестности. При этом

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{\varphi(z)} = c_{-n} \neq 0 \quad \text{т. е.} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left(\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}\right) = \infty,$$

т. е. точка z_0 является полюсом функции $f(z)$. При этом функция $g(z) = 1/f(z) = (z-z_0)^n\varphi(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка n. Следовательно, точка z_0 — полюс функции $f(z)$ порядка n. □

Из теорем 4.15 и 4.17 сразу получается

Теорема 4.18. *Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения* (4.14) *этой функции в некоторой проколотой окрестности этой точки содержит бесконечно много членов.*

Теорема 4.19 (Сохоцкий). *Если точка z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа A найдется такая сходящаяся к z_0 последовательность $\{z_n\}$, что $f(z_n) \to A$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Покажем сначала, что найдется такая сходящаяся к z_0 последовательность $\{z_n\}$, что $f(z_n) \to \infty$, т. е. $\left|f(z_n)\right| \to \infty$. Действительно, если бы не было ни одной такой последовательности, функция была бы ограничена в некоторой окрестности точки z_0. Значит, z_0 была бы устранимой особой точкой, а не существенно особой.

Пусть теперь A — произвольное комплексное число. Тогда если в любой проколотой окрестности точки z_0 существуют точки, в которых значение функции равно A, то теорема доказана. Если же в некоторой проколотой окрестности точки z_0 таких точек нет, то рассмотрим, очевидно, аналитическую в этой проколотой окрестности функцию $g(z) = 1/\big(f(z) - A\big)$. Точка z_0 является существенно особой точкой $g(z)$, ибо иначе бы существовал конечный или бесконечный предел функции $g(z)$ в этой точке и, следовательно, конечный или бесконечный предел функции $A + 1/g(z) = f(z)$ в этой точке. Но тогда найдется такая сходящаяся к z_0 последовательность $\{z_n\}$, что $g(z_n) \to \infty$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{1}{g(z_n)}\right) = A,$$

что и требовалось. □

Примеры. 1. Для функции $f(z) = \sin z/z$ точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой. Лорановское разложение $f(z)$ при $0 < |z| < \infty$:

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k+1)!}.$$

2. Для функций $f(z) = 1/z$ и $g(z) = 1/z^2$ точка $z_0 = 0$ является полюсом. Лорановские разложения $f(z)$ и $g(z)$ при $0 < |z| < \infty$ совпадают с самими функциями, так что $z_0 = 0$ — полюс первого порядка для $f(z)$ и второго порядка для $g(z)$.

3. Для функции $f(z) = e^{1/z}$ точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой. Лорановское разложение $f(z)$ при $0 < |z| < \infty$ мы установили в примере 1 предыдущего параграфа:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, z^k}.$$

4. Для функции $f(z) = 1\big/\big(e^{1/z} - 1\big)$ точки $z_k = 1\big/(2\pi k i)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, являются простыми полюсами, ибо функция $e^{1/z} - 1$ в этих точках имеет простые нули. Функция $f(z)$ имеет еще особую точку $z_0 = 0$, которая не является изолированной: в любой ее окрестности имеются полюса z_k. Точка z_0 является *предельной точкой последовательности полюсов.*

5. Функция

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3 \sin z}$$

теряет аналитичность в точках πk, $k \in \mathbb{Z}$, ибо эти точки — нули знаменателя $z^3 \sin z$. Поскольку $(\sin z)' = \cos z$ не обращается в ноль при $z = \pi k$, точки πk, $k \neq 0$, — простые нули знаменателя, а точка $z_0 = 0$ — нуль четвертого порядка знаменателя. Точки πk, $k \neq 0$, могут быть либо простыми полюсами функции $f(z)$, либо ее устранимыми особыми точками. Точка 0 может быть полюсом порядка не больше 4 функции $f(z)$, либо ее устранимой особой точкой. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. При $k = 2m$ точки πk являются нулями второго порядка числителя $1 - \cos z$, а при $k = 2m+1$ эти точки нулями числителя не являются. Значит, точки $2m\pi$, $m \neq 0$, — устранимые особые точки $f(z)$, точки $(2m+1)\pi$ — простые полюсы $f(z)$, а точка 0 — полюс второго порядка $f(z)$.

4.7 Вычеты. Теорема о вычетах

Определение 4.9. *Вычетом* функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)\, dz,$$

где γ — окружность достаточно малого радиуса с центром в этой точке, проходимая против часовой стрелки (по теореме 3.4 при достаточно малом радиусе значение вычета от радиуса не зависит).

Из формулы для коэффициентов ряда Лорана, очевидно, вытекает, что вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту лорановского разложения $f(z)$ в проколотой окрестности этой точки при $(z-z_0)^{-1}$:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}.$$

Отсюда сразу следует, что вычет функции в устранимой особой точке равен 0. Исходя из этого соображения находят и вычет функции в существенно особой точке. Теперь приведем несколько формул для вычисления вычета функции в полюсе.

Теорема 4.20. *Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \big((z-z_0)^n f(z)\big)^{(n-1)}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Если z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$, то

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots .$$

Умножим это разложение на $(z-z_0)^n$ и продифференцируем $n-1$ раз:

$$\big((z-z_0)^n f(z)\big)^{(n-1)} = (n-1)!\, c_{-1} + n(n-1)\ldots 2c_0(z-z_0) + \ldots .$$

Предельным переходом при $z \to z_0$ получаем (4.16). □

Следствие 4.4. *Если z_0 — простой полюс функции $f(z)$, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \big((z-z_0) f(z)\big). \tag{4.17}$$

Следствие 4.5. *Если точка z_0 является простым полюсом функции $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в окрестности точки z_0, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то*

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Доказательство. Действительно, по формуле (4.17),

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}},$$

откуда и получается требуемая формула. □

Теорема 4.21 (о вычетах)**.** *Пусть* Γ *— замкнутая кусочно гладкая жорданова кривая, а функция* $f(z)$ *непрерывна на* Γ *по ее внутренности* D *и аналитична в* D *всюду, кроме конечного числа изолированных особых точек* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in D$*. Тогда*

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где Γ *проходится против часовой стрелки.*

Доказательство. Окружим каждую изолированную особую точку z_k окружностью γ_k: $|z-z_k| = r_k$ (см. рис. 21).

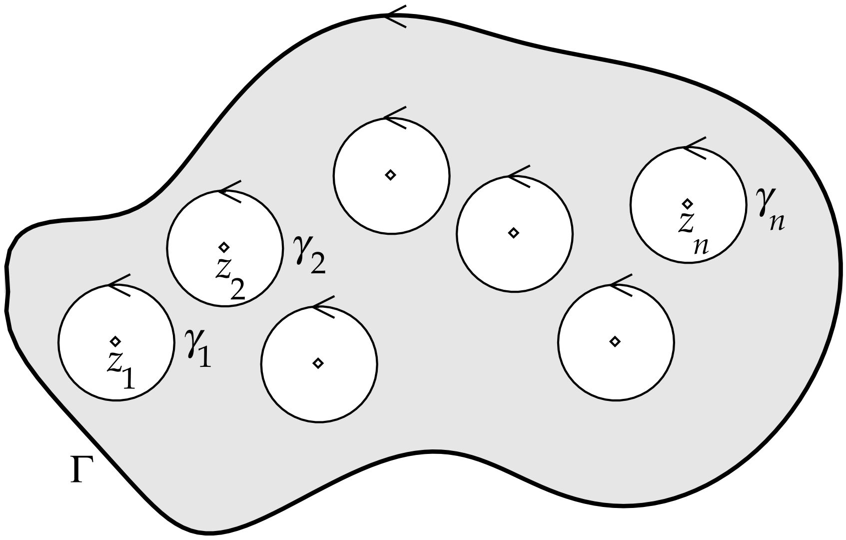

Рис. 21. Чертеж к доказательству теоремы о вычетах

Тогда, обозначая через γ_k^- проходимую по часовой стрелке окружность γ_k, по теореме 3.4

$$0 = \oint_{\Gamma\cup\gamma_1^-\cup\ldots\cup\gamma_n^-} f(z)\,dz = \oint_\Gamma f(z)\,dz - \oint_{\gamma_1} f(z)\,dz - \ldots - \oint_{\gamma_n} f(z)\,dz =$$
$$= \oint_\Gamma f(z)\,dz - 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

откуда и получается утверждение теоремы. □

Примеры. 1. Из примеров 1–3 параграфа 4.6 имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin z}{z}=0,\qquad \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z}=1,\qquad \operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2}=0,\qquad \operatorname*{Res}_{z=0}e^{\frac{1}{z}}=1.$$

2. Определим тип особенности и найдем вычет в точке $z_0=0$ для

$$f(z)=\frac{z(1+\sin z)}{e^{2z^5}-1}.$$

Имеем

$$f(z)=\frac{z+z^2-\dfrac{z^4}{3!}+\dfrac{z^6}{5!}-\ldots}{2z^5+\dfrac{2^2z^{10}}{2!}+\dfrac{2^3z^{15}}{3!}+\ldots}=\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1+z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots}{2+\dfrac{2^2z^5}{2!}+\dfrac{2^3z^{10}}{3!}+\ldots}.$$

Итак, для функции $f(z)$ точка $z_0=0$ является полюсом четвертого порядка. Можно найти вычет с помощью формулы (4.16), но придется три раза дифференцировать и вычислять предел. Проще воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Учитывая, что лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности этой точки должно начинаться с z^{-4}, имеем

$$\frac{1}{z^4}\cdot\frac{1+z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\ldots}{2+\dfrac{2^2z^5}{2!}+\dfrac{2^3z^{10}}{3!}+\ldots}=\frac{c_{-4}}{z^4}+\frac{c_{-3}}{z^3}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+\ldots,$$

так что

$$1+z-\frac{z^3}{3!}+\ldots=\left(2+\frac{2^2z^5}{2!}+\frac{2^3z^{10}}{3!}+\ldots\right)\left(c_{-4}+c_{-3}z+c_{-2}z^2+c_{-1}z^3+\ldots\right).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях z вплоть до третьей, находим

$$2c_{-4}=1,\qquad 2c_{-3}=1,\qquad 2c_{-2}=0,\qquad 2c_{-1}=-\frac{1}{3!},$$

откуда

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=0}f(z)=-\frac{1}{12}.$$

3. Определим тип особенности и найдем вычет в точке $z_0=\pi/2$ для функции

$$f(z)=\frac{2z-\pi}{\cos^4 z}.$$

Мы будем действовать аналогично предыдущему примеру. Поэтому нам понадобится понизить степень косинуса и, поскольку раскладывать нам придется по степеням $z-\pi/2$, записать $f(z)$ так, чтобы в ней была явная зависимость от $z-\pi/2$. Имеем

$$f(z)=\frac{4(2z-\pi)}{(1+\cos 2z)^2}=\frac{8(2z-\pi)}{3+4\cos 2z+\cos 4z}=$$

$$=\frac{8(2z-\pi)}{3+4\cos\left(2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right)+\cos\left(4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi\right)}=$$

$$=\frac{16\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{3-4\cos 2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+\cos 4\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{16\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{3-4\left(1-\frac{2^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\ldots\right)+1-\frac{4^2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\ldots}=$$

$$=\frac{16\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\left(4^4-4^3\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}-\frac{\left(4^6-4^4\right)\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^6}{6!}+\ldots}=$$

$$=\frac{16}{8\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{16\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5}{3}+\ldots},$$

так что точка $z_0=\pi/2$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$. Значит, в проколотой окрестности этой точки лорановское разложение функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{2}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3-\frac{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^5}{3}+\ldots}=\frac{c_{-3}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^3}+\frac{c_{-2}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}+\frac{c_{-1}}{z-\frac{\pi}{2}}+\ldots,$$

откуда так же, как и в предыдущем примере, получаем

$$\left(1-\frac{2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}{3}+\ldots\right)\cdot\left(c_{-3}+c_{-2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)+c_{-1}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2+\ldots\right)=2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $z-\pi/2$, находим

$$c_{-3}=2,\qquad c_{-2}=0,\qquad c_{-1}-\frac{2c_{-3}}{3}=0,$$

откуда

$$c_{-1}=\operatorname*{Res}_{z=\pi/2}f(z)=\frac{4}{3}.$$

4. Найдем вычеты во всех изолированных особых точках функции

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3 \sin z}.$$

Изолированные особые точки функции $f(z)$ были найдены в примере 5 параграфа 4.6. Для устранимых особых точек $2m\pi$, $m \neq 0$, имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=2m\pi} f(z) = 0, \qquad m \neq 0;$$

для простых полюсов $(2m+1)\pi$ имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=(2m+1)\pi} f(z) = \frac{\frac{1-\cos(2m+1)\pi}{(2m+1)^3\pi^3}}{(\sin z)'\big|_{z=(2m+1)\pi}} = \frac{\frac{1-\cos(2m+1)\pi}{(2m+1)^3\pi^3}}{\cos(2m+1)\pi} = -\frac{2}{(2m+1)^3\pi^3};$$

для полюса 0 второго порядка имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\left(z^2 \cdot \frac{1-\cos z}{z^3 \sin z}\right)' = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z\sin^2 z - \sin z - z\cos z + \sin z\cos z + z\cos^2 z}{z^2 \sin^2 z} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z - z\cos z + \sin z \cos z}{z^4} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z - \cos z(z - \sin z)}{z^4} = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{(z-\sin z)(1-\cos z)}{z^4} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{z^3}{6}\cdot\frac{z^2}{2}}{z^4} = 0.
\end{aligned}$$

5. Вычислим интеграл

$$I = \oint_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2},$$

где Γ — проходимая против часовой стрелки окружность $|z-1-i| = \sqrt{2}$.

Подынтегральная функция $f(z)$ имеет простые полюсы $\pm i$ и полюс второго порядка 1, но внутри Γ лежат только 1 и i. Найдем вычеты:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\left((z-1)^2 \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\right)' = \lim_{z\to 1} \frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{\frac{1}{(z+i)(z-1)^2}}{(z-i)'}\right|_{z=i} = \frac{1}{4}.$$

Тогда по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

4.8 Принцип аргумента. Теорема Руше

Определение 4.10. *Логарифмической производной* функции $f(z)$ называется функция

$$\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)' = \frac{f'(z)}{f(z)}, \tag{4.18}$$

а *логарифмическим вычетом* функции $f(z)$ — вычет ее логарифмической производной.

Если точка z_0 — нуль порядка n функции $f(z)$, то в окрестности точки z_0 имеем

$$f(z) = c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots,$$
$$f'(z) = nc_n(z-z_0)^{n-1} + (n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n + \ldots,$$
$$\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)' = \frac{1}{z-z_0}\cdot\varphi(z), \qquad \varphi(z) = \frac{nc_n + (n+1)c_{n+1}(z-z_0)+\ldots}{c_n + c_{n+1}(z-z_0)+\ldots},$$

причем функция $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, а $\varphi(z_0) = n$, так что в этой окрестности имеет место следующее разложение:

$$\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)' = \frac{1}{z-z_0}\cdot\big(d_0 + d_1(z-z_0)+\ldots\big), \qquad d_0 = n,$$

т. е. в точке z_0 функция $\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)'$ имеет простой полюс, а ее вычет в этой точке равен n.

Пусть теперь точка z_0 — полюс порядка n функции $f(z)$. Тогда точка z_0 является нулем порядка n функции $g(z) = 1/f(z)$, $g(z_0) = 0$. Тогда в точке z_0 функция $\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)'$ имеет полюс первого порядка, а вычет в ней равен $-n$. Действительно, в точке z_0, как мы уже показали, функция $\big(\operatorname{Ln} g(z)\big)'$ имеет простой полюс, а вычет в ней равен n, но

$$\big(\operatorname{Ln} g(z)\big)' = \big(-\operatorname{Ln} f(z)\big)' = -\big(\operatorname{Ln} f(z)\big)'.$$

Итак, нами доказана

Теорема 4.22. *В нулях и полюсах функции $f(z)$ ее логарифмическая производная имеет простые полюсы, причем в нуле логарифмический вычет равен порядку нуля, а в полюсе — порядку полюса со знаком минус.*

Определение 4.11. *Полным изменением аргумента функции $f(z)$ при обходе замкнутой кривой* Γ называется умноженное на 2π количество оборотов, которое делает вектор $w = f(z)$ вокруг начала координат $w = 0$ при обходе точкой z контура Γ против часовой стрелки.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D всюду, кроме, может быть, конечного числа полюсов и имеет в D конечное число нулей, а Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая, целиком вместе с внутренностью лежащая в D и не проходящая через нули и полюсы $f(z)$. Пусть $f(z)$ имеет внутри Γ полюсы $b_1, b_2, \ldots, b_m$ порядков $p_1, p_2, \ldots, p_m$ соответственно и нули $a_1, a_2, \ldots, a_l$ порядков $n_1, n_2, \ldots, n_l$ соответственно. По теореме о вычетах и теореме 4.22 имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P, \qquad N = \sum_{k=1}^{l} n_k, \qquad P = \sum_{k=1}^{m} p_k,$$

где контур Γ проходится против часовой стрелки.

С другой стороны, этот интеграл заменой переменной $w = f(z)$ сводится к интегралу

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{f(\Gamma)}\frac{dw}{w},$$

который мы рассматривали в примере 2 параграфа 3.4. Начало и конец пути интегрирования здесь совпадают. Значит, количество k прохождений окружности, в которую деформируется $f(\Gamma)$, и количество оборотов вокруг начала координат $w = 0$, которое делает вектор $w = f(z)$ при обходе Γ точкой z против часовой стрелки, равны. Тем самым, наш интеграл равен

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{f(\Gamma)}\frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2\pi k i = k.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.23 (принцип аргумента)**.** *Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D, кроме, может быть, конечного числа полюсов и имеет в D конечное число нулей, а Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая, целиком лежащая в D и не проходящая через нули и полюсы $f(z)$. Тогда полное изменение аргумента $f(z)$ при обходе Γ равно умноженной на 2π разности между количествами нулей и полюсов (с учетом порядков) функции $f(z)$, лежащих внутри Γ.*

На рис. 22 приведены кривая Γ, внутренность которой содержит два простых нуля и четыре простых полюса функции $f(z)$, и ее образ $f(\Gamma)$ при отображении $f(z)$. Как мы видим, кривая $f(\Gamma)$ совершает два оборота по часовой стрелке вокруг начала координат $w = 0$, т. е. полное изменение аргумента функции $f(z)$ при обходе кривой Γ равно -4π.

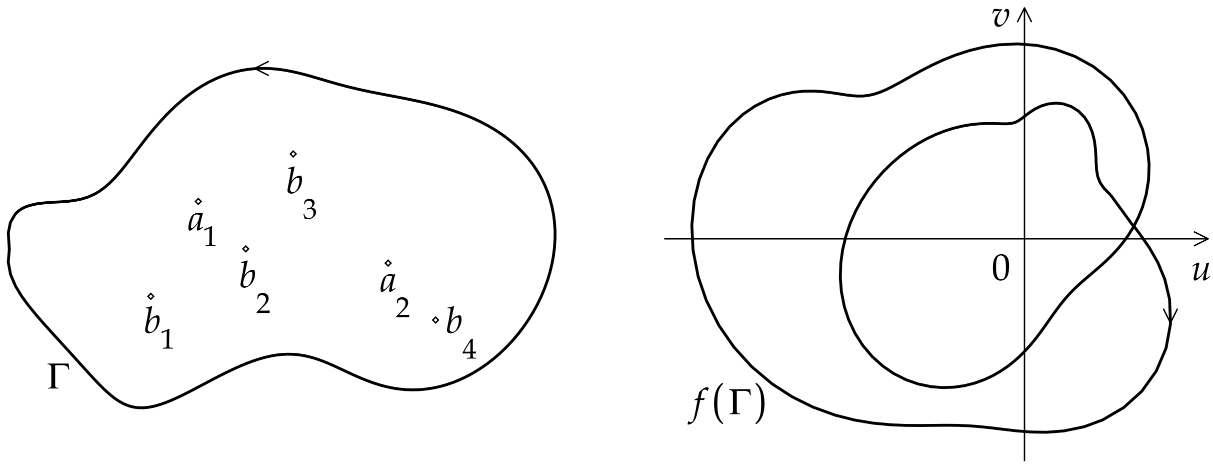

Рис. 22. Замкнутая кривая и ее образ

Теорема 4.24 (Руше). *Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области D, а Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая, целиком вместе с внутренностью лежащая в D. Тогда если $\big|f(z)\big| > \big|g(z)\big|$ всюду на Γ, то функции $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют внутри Γ одинаковое число нулей (с учетом порядков).*

Доказательство. Поскольку $\big|f(z)\big| > \big|g(z)\big|$ на Γ, функции $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ на Γ не обращаются в 0, так что внутри Γ эти функции в силу следствия 4.3 имеет лишь конечное число нулей. На Γ имеем

$$\operatorname{Arg}\big(f(z)+g(z)\big) = \operatorname{Arg}\left(f(z)\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right)\right) = \operatorname{Arg} f(z) + \operatorname{Arg}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

При этом $\big|g(z)/f(z)\big| < 1$, так что конец вектора $1 + g(z)/f(z)$ описывает замкнутую кривую, целиком лежащую внутри круга радиуса 1 с центром в точке 1. Значит, этот вектор не делает ни одного оборота вокруг начала координат. Тогда полные изменения аргумента $f(z)+g(z)$ и $f(z)$ при обходе Γ и, по принципу аргумента, количества нулей этих функций внутри Γ совпадают (полюсов внутри Γ они не имеют). □

Теорема 4.25 (основная теорема алгебры). *Многочлен степени $n \neq 0$ имеет ровно n комплексных корней с учетом кратности.*

Доказательство. Рассмотрим $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$. Пусть $f(z) = a_n z^n$, $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$. При достаточно большом R для всех $r \geqslant R$ имеем $\big|f(r)\big| > \big|g(r)\big|$, так что по теореме Руше в любом круге $|z| < r$ при $r \geqslant R$ функции $f(z)$ и $P_n(z) = f(z) + g(z)$ будут иметь одинаковое количество нулей с учетом порядков, т. е. n. При этом $P_n(z) \to \infty$ при $|z| \to \infty$, так что при достаточно большом R вне круга $|z| < r$ при $r \geqslant R$ нули многочлена лежать не могут. □

Пример. Рассмотрим многочлен $P(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ в круге $|z| < 1$. Положим $f(z) = -5z^5 + 1$, $g(z) = z^8 - 2z$. На границе $|z| = 1$ круга имеем $\big|f(z)\big| \geqslant 5|z|^5 - 1 = 4$, $\big|g(z)\big| \leqslant |z|^8 + 2|z| = 3$. Итак, по теореме Руше $P(z) = f(z) + g(z)$ имеет в $|z| < 1$ столько же корней, сколько и $f(z)$, т. е. 5.

4.9 Применение вычетов к вычислению интегралов

1. Интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

где $R(\xi, \eta)$ — рациональная функция, заменой

$$z = e^{ix}, \quad dx = \frac{dz}{iz}, \quad [0, 2\pi] \mapsto |z| = 1, \quad \sin x = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}, \quad \cos x = \frac{z + \frac{1}{z}}{2},$$

сводится к вычисляемому по теореме о вычетах интегралу

$$\oint_{|z|=1} \tilde{R}(z)\, dz,$$

где окружность $|z| = 1$ проходится против часовой стрелки, а $\tilde{R}(z)$ — рациональная функция.

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(3 + 2\cos x)^2}$$

Сделаем указанную замену. Получаем

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{dz/iz}{\left(3 + 2\frac{z+1/z}{2}\right)^2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z\, dz}{(z^2 + 3z + 1)^2}.$$

Легко видеть, что особыми точками подынтегральной функции $R(z)$ являются точки $z_{1,2} = \big(-3 \pm \sqrt{5}\big)/2$, но внутри окружности $|z| = 1$ лежит только $z_1 = \big(-3 + \sqrt{5}\big)/2$. При этом z_1 — полюс второго порядка, а

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} R(z) = \lim_{z \to z_1} \left(\left(z - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 \frac{z}{\left(z - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(z + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2} \right)' = \frac{3}{5\sqrt{5}},$$

откуда по теореме о вычетах

$$I = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{25}\pi.$$

2. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx, \quad R(x) = \frac{q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_0}{p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_0}, \quad n \leqslant m-2,$$

где $q_n \neq 0$, $p_m \neq 0$ и многочлен $p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \ldots + p_0$ не имеет вещественных корней. Сразу отметим, что в наших условиях интеграл I сходится, так что он сходится и в смысле главного значения, причем к тому же числу.

Пусть $r > 0$. Обозначим через Γ_r проходимый против часовой стрелки контур, составленный из отрезка $[-r, r]$ вещественной оси и полуокружности $\gamma_r = \{z\colon |z| = r,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ (см. рис. 23). Тогда

$$\int_{-r}^{r} R(x)\, dx = \oint_{\Gamma_r} R(z)\, dz - \int_{\gamma_r} R(z)\, dz.$$

Поскольку

$$\bigl|R(z)\bigr| = \left|\frac{q_n z^n + q_{n-1} z^{n-1} + \ldots + q_0}{p_m z^m + p_{m-1} z^{m-1} + \ldots + p_0}\right| = \left|\frac{q_n}{p_m z^{m-n}}\right| \cdot \left|\frac{1 + \ldots + \frac{q_0}{q_n z^n}}{1 + \ldots + \frac{p_0}{p_m z^m}}\right|,$$

при достаточно больших r на γ_r имеем

$$\bigl|R(z)\bigr| < \frac{2|q_n|}{|p_m|\, r^2}.$$

Отсюда

$$\left|\int_{\gamma_r} R(z)\, dz\right| < \pi r \cdot \frac{2|q_n|}{|p_m|\, r^2} = \frac{2\pi |q_n|}{|p_m|\, r} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

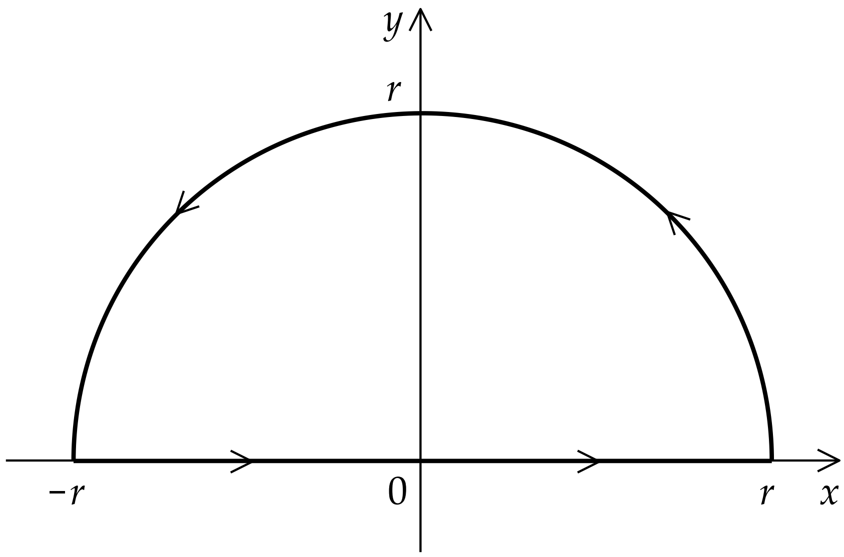

Рис. 23. Контур Γ_r

Но тогда

$$I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,dx = \lim_{r\to\infty} \oint_{\Gamma_r} R(z)\,dz.$$

Интеграл функции $R(z)$ вдоль Γ_r равен сумме вычетов в особых точках, попавших внутрь Γ_r, умноженной на $2\pi i$. Поскольку особыми точками функции $R(z)$ являются корни знаменателя и только они, а корней многочлен имеет лишь конечное число, все они при достаточно большом r попадут внутрь контура Γ_r. Значит, при достижении такого r интеграл меняться не будет. Таким образом, получаем

$$I = 2\pi i \sum_{z_k\in\mathbb{C}^+} \operatorname*{Res}_{z=z_k} R(z), \tag{4.19}$$

где сумма берется по всем полюсам z_k функции $R(z)$, лежащим в *верхней полуплоскости* $\mathbb{C}^+ = \{z\colon\ \operatorname{Im} z > 0\}$.

Этот метод, как мы убедимся ниже, применяется для вычисления и других несобственных интегралов.

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3}.$$

Заметим, что подынтегральная функция является четной. Отсюда и из формулы (4.19) имеем

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4)^3} = \pi i \sum_{z_k\in\mathbb{C}^+} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{z^2}{(z^2+4)^3}.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются точки $\pm 2i$, но только $2i$ лежит в верхней полуплоскости. Эта точка является, очевидно, полюсом третьего порядка. Найдем в ней вычет подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2+4)^3} &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^3 \frac{z^2}{(z-2i)^3(z+2i)^3}\right)'' = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 2i} \frac{(4i-2z)(z+2i)^4 - 4(4iz - z^2)(z+2i)^3}{(z+2i)^8} = \\
&= \frac{1}{2}\cdot \left.\frac{2(2i-z)(2i+z) - 4z(4i-z)}{(z+2i)^5}\right|_{z=2i} = \frac{-2\cdot 2i\cdot 2i}{(4i)^5} = \frac{8}{4^5 i}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$I = \frac{8\pi i}{4^5 i} = \frac{\pi}{128}.$$

3. Рассмотрим интеграл

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\, dx, \qquad \lambda > 0,$$

где $f(z)$ — функция, аналитическая в $\mathbb{C}^+$ всюду, кроме конечного количества полюсов, непрерывная на вещественной оси по $\mathbb{C}^+$ и удовлетворяющая условию $f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Знак v. p. перед интегралом означает, что он берется в смысле главного значения, т. е.

$$I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{i\lambda x} f(x)\, dx.$$

Рассмотрим такой же, как и в предыдущем случае, контур Γ_r. Тогда

$$\int_{-r}^{r} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = \oint_{\Gamma_r} e^{i\lambda z} f(z)\, dz - \int_{\gamma_r} e^{i\lambda z} f(z)\, dz.$$

Поскольку $f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, справедливо $\left|f(re^{i\varphi})\right| < \varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$, $\varphi \in [0, \pi]$. Тогда при $r \to \infty$

$$\left|\int_{\gamma_r} e^{i\lambda z} f(z)\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} e^{\lambda ir\cos\varphi - \lambda r \sin\varphi} f(re^{i\varphi})\, ire^{i\varphi} d\varphi\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} re^{-\lambda r\sin\varphi}\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi < \varepsilon(r) \int_0^{\pi} re^{-\lambda r\sin\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\,\varepsilon(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-\lambda r\sin\varphi}\, d\varphi < 2\,\varepsilon(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-\frac{2}{\pi}\lambda r\varphi}\, d\varphi < \frac{\pi\varepsilon(r)}{\lambda} \to 0.$$

Но тогда

$$I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} e^{i\lambda x} f(x)\, dx = \lim_{r\to\infty} \oint_{\Gamma_r} e^{i\lambda z} f(z)\, dz.$$

Интеграл функции $e^{i\lambda z} f(z)$ вдоль Γ_r равен сумме вычетов в особых точках, попавших внутрь Γ_r, умноженной на $2\pi i$. Поскольку особыми точками функции $e^{i\lambda z} f(z)$ является только конечное число полюсов, все они при достаточно большом r попадут внутрь контура Γ_r, и интеграл по достижении такого r меняться не будет. Итак,

$$I = 2\pi i \sum_{z_k\in\mathbb{C}^+} \operatorname*{Res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} f(z), \tag{4.20}$$

где сумма берется по всем лежащим в $\mathbb{C}^+$ полюсам функции $e^{i\lambda z} f(z)$.

Если функция $f(x)$ вещественнозначна, с помощью (4.20) можно вычислить также интегралы

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos\lambda x\, dx = \operatorname{Re} I, \qquad \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin\lambda x\, dx = \operatorname{Im} I.$$

Пример. Вычислим интеграл

$$I = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2}\, dx.$$

Особыми точками подынтегральной функции являются простые полюсы $1 \pm i$, но только точка $1 + i$ лежит в верхней полуплоскости. Найдем в ней вычет:

$$\operatorname*{Res}_{z=1+i} \frac{(z+1)e^{iz}}{z^2 - 2z + 2} = \frac{\frac{(z+1)e^{iz}}{z-1+i}}{(z-1-i)'}\bigg|_{z=1+i} = \frac{2+i}{2i} e^{i-1}.$$

Тогда по формуле (4.20) имеем

$$I = \pi(2+i)e^{i-1} = \frac{\pi}{e}\big(2\cos 1 - \sin 1 + i(\cos 1 + 2\sin 1)\big).$$

4. Покажем, что при любом вещественном $b > 0$ справедливо равенство

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}. \tag{4.21}$$

Пусть $0 < r < R$. Обозначим через $\Gamma_{r,R}$ проходимый против часовой стрелки контур, составленный из отрезка $[-R, -r]$ вещественной оси, полуокружности $\gamma_r = \{z\colon |z| = r,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, отрезка $[r, R]$ вещественной оси и полуокружности $\gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ (см. рис. 24). По теореме Коши и свойству интеграла имеем

$$0 = \oint_{\Gamma_{r,R}} \frac{e^{ibz}}{z}\, dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx + \int_{\gamma_r} \frac{e^{ibz}}{z}\, dz + \int_r^R \frac{e^{ibx}}{x}\, dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{ibz}}{z}\, dz.$$

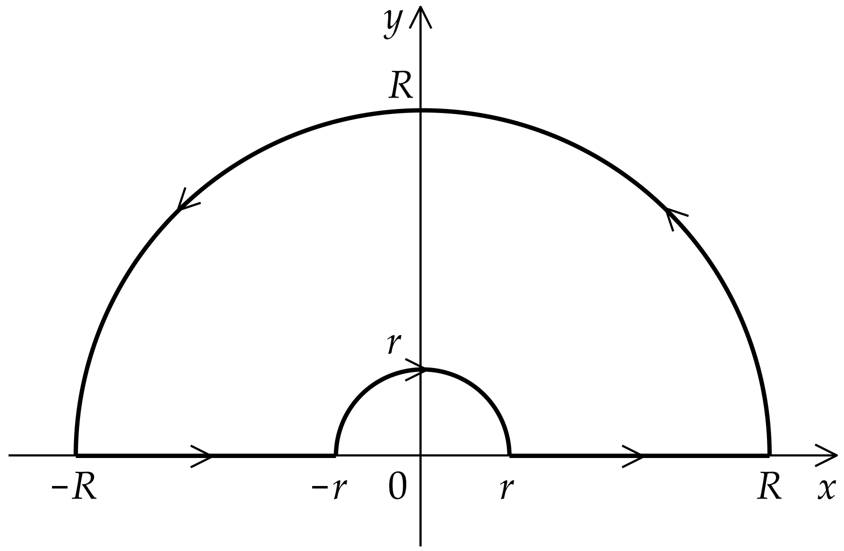

Рис. 24. Контур $\Gamma_{r,R}$

При этом, как и в предыдущем пункте, интеграл вдоль γ_R стремится к 0 при $R \to \infty$, а из разложения

$$\frac{e^{ibz}}{z} = \frac{1}{z} + f(z), \qquad \text{где} \qquad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ib)^k z^{k-1}}{k!},$$

и того факта, что длина γ_r стремится к 0 при $r \to 0$, получаем, что

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{ibz}}{z}\, dz = \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_r} f(z)\, dz \to -\pi i + 0$$

при $r \to 0$. Далее, заменой x на $-x$ получаем

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx = -\int_{r}^{R} \frac{e^{-ibx}}{x}\, dx,$$

так что при $r \to 0$ и $R \to \infty$ получаем

$$0 = -\int_0^{\infty} \frac{e^{-ibx}}{x}\, dx - \pi i + \int_0^{\infty} \frac{e^{ibx}}{x}\, dx + 0 = 2i \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x}\, dx - \pi i,$$

откуда и следует доказываемое равенство.

4.10 Бесконечно удаленная точка

Определение 4.12. *Стереографической проекцией* сферы, касающейся комплексной плоскости южным полюсом, на эту комплексную плоскость называется отображение, ставящее каждой точке Z сферы в соответствие точку z пересечения плоскости и луча, проведенного из северного полюса сферы через точку Z (см. рис. 25). *Бесконечно удаленная точка* $z = \infty$ вводится как точка, соответствующая северному полюсу сферы при такой проекции. Комплексная плоскость с присоединенной к ней бесконечно удаленной точкой называется *расширенной комплексной плоскостью* $\overline{\mathbb{C}}$, а без этой точки (т. е. плоскость, которую мы рассматривали ранее) — *конечной комплексной плоскостью.*

Как известно из курса дифференциальной геометрии и топологии, стереографическая проекция является гомеоморфным (т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным) отображением сферы на расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$.

Определение 4.13. *Окрестностью бесконечно удаленной точки* и *проколотой окрестностью бесконечно удаленной точки* называются проекции соответствующих окрестностей северного полюса сферы. Очевидно, можно считать окрестностью точки $z = \infty$ круг $|z| > M$, а проколотой окрестностью точки $z = \infty$ — кольцо $M < |z| < \infty$.

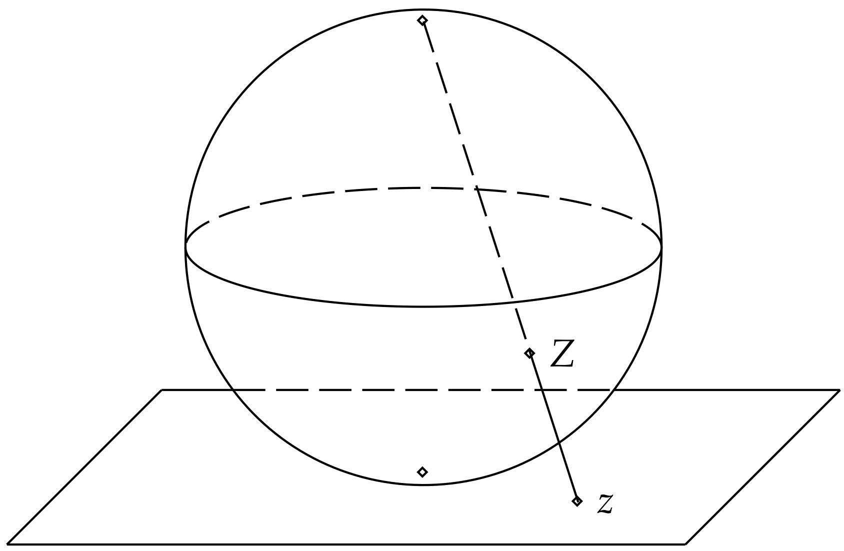

Рис. 25. Стереографическая проекция

Непрерывные кривые расширенной плоскости определяются как проекции соответствующих кривых на сфере. Области расширенной плоскости определяются как проекции соответствующих областей сферы, что, как легко видеть, эквивалентно данному ранее определению области. Неограниченные области могут иметь бесконечно удаленную точку в качестве внутренней или граничной. В последнем случае ее надо учитывать при определении одно- или многосвязности области. Так, внешность замкнутого жорданова контура является односвязной, если она содержит бесконечно удаленную точку, а иначе — двусвязной.

Определение 4.14. *Бесконечный предел последовательности*, *бесконечный предел функции* и *предел функции в бесконечно удаленной точке* определяются так же, как и в определениях 1.14 и 2.4, с использованием окрестности бесконечно удаленной точки. Так, например, $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$ означает, что $\bigl|f(z)\bigr| \to \infty$ при $z \to z_0$.

Определение 4.15. Тип особенности функции в бесконечно удаленной точке определяется так же, как и в определении 4.7. Говорят, что функция $f(z)$ *аналитична в бесконечности*, если бесконечно удаленная точка является устранимой особой точкой $f(z)$. При этом предел $f(z)$ при $z \to \infty$ принимают за $f(\infty)$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности бесконечно удаленной точки. Положим $z = 1/\zeta$. Тогда функция $\varphi(\zeta) = f\bigl(1/\zeta\bigr) = f(z)$ будет аналитичной в проколотой окрестности нуля. При этом пределы $f(z)$ при $z \to \infty$ и $\varphi(\zeta)$ при $\zeta \to 0$ совпадают, так что типы особых точек ∞ для $f(z)$ и 0 для $\varphi(\zeta)$ совпадают. Лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки ∞ получается заменой $\zeta = 1/z$ в лорановском разложении функции $\varphi(\zeta)$ в проколотой окрестности нуля, но при такой замене главная часть заменяется правильной и наоборот. Итак, из теорем 4.15, 4.17 и 4.18 получается

Теорема 4.26. *Бесконечно удаленная точка является*

• *устранимой особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности этой точки не содержит положительных степеней z;*

• *полюсом порядка n тогда и только тогда, когда лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности этой точки содержит конечное число положительных степеней z, причем старшая из них z^n;*

• *существенно особой точкой функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда лорановское разложение $f(z)$ в проколотой окрестности этой точки содержит бесконечно много положительных степеней z.*

Легко видеть, что теорема 4.16 и теорема Сохоцкого сохраняются для случая изолированной особой точки $z_0 = \infty$.

Примеры. 1. Функции $f(z) = z$ и $g(z) = z^2$ имеют в бесконечно удаленной точке полюсы первого и второго порядка соответственно. Иных особых точек эти функции не имеют.

2. Функции $f(z) = 1/z$ и $g(z) = 1/z^2$ аналитичны в бесконечности, причем бесконечно удаленная точка является для них нулем первого и второго порядка соответственно.

3. Для функции $f(z) = e^z$ бесконечно удаленная точка является существенно особой точкой. Иных особых точек эта функция не имеет.

4. Для функции $f(z) = 1\big/\big(e^{1/z} - 1\big)$ бесконечно удаленная точка является простым полюсом.

5. Функция $f(z) = \operatorname{ctg} z$ имеет в бесконечно удаленной точке предельную точку последовательности полюсов.

Определение 4.16. *Вычетом функции $f(z)$ в бесконечно удаленной точке* называется число

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z)\,dz,$$

где γ^- — окружность $|z| = \rho$ достаточно большого радиуса ρ, проходимая по часовой стрелке.

Из этого определения сразу следует, что вычет функции в бесконечно удаленной точке равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении этой функции в проколотой окрестности точки $z = \infty$, взятому с обратным знаком. А из теоремы о вычетах легко получается

Теорема 4.27. *Если функция $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет в бесконечно удаленной точке, равна нулю.*

Пример. Найдем

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{5z-5+i}{z^2-2z+2}.$$

Имеем

$$\frac{5z-5+i}{z^2-2z+2} = \frac{3}{z-1-i} + \frac{2}{z-1+i},$$

так что эта функция имеет только две конечные особые точки — простые полюсы $1 \pm i$. При этом

$$\operatorname*{Res}_{z=1+i} \frac{5z-5+i}{z^2-2z+2} = 3, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1-i} \frac{5z-5+i}{z^2-2z+2} = 2,$$

так что искомый вычет равен $-(3+2) = -5$.

5 Операционный метод

5.1 Преобразование Лапласа

Определение 5.1. Комплекснозначная функция $f(t)$ вещественного переменного t удовлетворяет *условию Гёльдера* на некотором промежутке оси t, если существуют такие постоянные $A > 0$, $h_0 > 0$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, что для всех t из этого промежутка при любом h, не превосходящем по модулю h_0, выполнено неравенство

$$\big|f(t+h) - f(t)\big| \leqslant A|h|^\alpha.$$

Определение 5.2. *Оригиналом* называется такая комплекснозначная функция $f(t)$ вещественного переменного t, что

1) функция $f(t)$ на оси t всюду, кроме, может быть, отдельных исключительных точек, являющихся для $f(t)$ точками разрыва первого рода, удовлетворяет условию Гёльдера, причем на любом конечном промежутке оси t функция $f(t)$ имеет лишь конечное число таких исключительных точек;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) существуют такие постоянные $M > 0$, $s_0 \geqslant 0$, что для всех $t \geqslant 0$

$$\big|f(t)\big| < Me^{s_0 t}; \tag{5.1}$$

число s_0 при этом называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Отметим, что условие 2 не является искусственным, поскольку операционный метод применяется в основном для решения задач, связанных с физическими процессами, начинающимися в определенный момент времени, который можно считать равным нулю.

Определение 5.3. *Изображением* оригинала $f(t)$ называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + i\sigma$, которая получается из $f(t)$ с помощью *преобразования Лапласа*:

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt. \tag{5.2}$$

При этом запись $f(t) \risingdotseq F(p)$ означает, что оригиналу $f(t)$ соответствует изображение $F(p)$, а запись $F(p) \fallingdotseq f(t)$ означает, что изображению $F(p)$ соответствует оригинал $f(t)$.

Теорема 5.1. *Для любого оригинала $f(t)$ существует его изображение $F(p)$, которое определено и аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 — показатель роста оригинала $f(t)$.*

Доказательство. Из неравенства (5.1) следует оценка

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty \bigl|f(t)\bigr|e^{-pt}\,dt \leqslant \int_0^\infty Me^{-s_0t}e^{-pt}\,dt = \frac{M}{s-s_0},$$

так что интеграл (5.2) при $\operatorname{Re} p = s > s_0$ мажорируется сходящимся интегралом и, следовательно, абсолютно сходится, а значит, изображение $F(p) \risingdotseq f(t)$ определено в этой полуплоскости. Кроме того, в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p = s \geqslant s_1 > s_0$ для интеграла, полученного из (5.2) дифференцированием по переменной p, получаем оценку

$$\left|\int_0^\infty f(t)te^{-pt}\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty \bigl|f(t)\bigr|te^{-pt}\,dt \leqslant \int_0^\infty Mte^{-s_0t}e^{-pt}\,dt = \frac{M}{(s_1-s_0)^2},$$

так что этот интеграл мажорируется сходящимся интегралом, не зависящим от p, и, следовательно, сходится равномерно относительно p в указанной полуплоскости. Значит, функция $F(p)$ имеет в этой полуплоскости производную. □

Следствие 5.1. *Если $p \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} p = s$ неограниченно возрастает, то изображение $F(p)$ стремится к* 0.

Примеры. 1. *Функция Хевисайда*

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

очевидно, является оригиналом. Ее изображение

$$H(p) = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}.$$

Если функция $f(t)$ не является оригиналом только из-за невыполнения свойства 2, то функция $f(t)h(t)$, очевидно, будет оригиналом. Всюду в этой главе мы будем писать $f(t)$, подразумевая $f(t)h(t)$.

2. Найдем изображение функции e^{at}:

$$e^{at} \risingdotseq \int_0^\infty e^{-(p-a)t}\,dt = \frac{1}{p-a}.$$

Теперь получим формулу для восстановления оригинала по известному изображению. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 5.1. *Для любой интегрируемой на отрезке $[\alpha,\beta]$ функции $\varphi(x)$ вещественного переменного x справедливо равенство*

$$\lim_{b\to\infty}\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx = 0.$$

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то из формулы интегрирования по частям имеем

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx = -\frac{\varphi(x)\cos bx}{b}\bigg|_\alpha^\beta + \frac{1}{b}\int_\alpha^\beta \varphi'(x)\cos bx\,dx \to 0$$

при $b \to \infty$. Если же $\varphi(x)$ не является непрерывно дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ функция $\varphi_\varepsilon(x)$, что

$$\int_\alpha^\beta \big|\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\big|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\sin bx\,dx = \int_\alpha^\beta \big(\varphi(x) - \varphi_\varepsilon(x)\big)\sin bx\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi_\varepsilon(x)\sin bx\,dx,$$

где в правой части первый интеграл при всех b не превосходит $\varepsilon/2$, ибо $|\sin bx| \leqslant 1$, а второй, как уже доказано, при достаточно больших b меньше $\varepsilon/2$. $\square$

Теорема 5.2. *Если функция $f(t)$ является оригиналом с показателем сходимости s_0, а функция $F(p)$ — ее изображением, то в любой точке t, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, имеет место равенство*

$$2\pi i f(t) = \mathrm{v.\,p.}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,dp = \lim_{b\to\infty}\int_{s-ib}^{s+ib} F(p)e^{pt}\,dp,$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$I_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-ib}^{s+ib} F(p)e^{pt}\,dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-ib}^{s+ib}\left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau\right)e^{pt}\,dp.$$

Изменим порядок интегрирования, что можно сделать, т. к. в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant s$ интеграл

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau$$

сходится равномерно относительно p. Получаем

$$I_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,d\tau\int_{s-ib}^{s+ib} e^{p(t-\tau)}\,dp = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)e^{s(t-\tau)}\,\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,d\tau.$$

Сделаем замену $\xi = \tau - t$, обозначим $g(t) = f(t)e^{-st}$ и учтем, что при $t < 0$ имеем $g(t) = 0$. Тогда

$$I_b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-t}^{\infty} f(\xi+t)e^{-s\xi}\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi+t)e^{st}\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi = \frac{e^{st}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\big(g(\xi+t)-g(t)+g(t)\big)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi =$$
$$= \frac{e^{st}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\sin b\xi\,d\xi + \frac{f(t)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Но по формуле (4.21) второй интеграл равен π (подынтегральная функция четная). Первый интеграл представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\,\sin b\xi\,d\xi =$$
$$= \int_{-B}^{B}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\,\sin b\xi\,d\xi + \int_{-\infty}^{-B} g(\xi+t)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi +$$
$$+ \int_{B}^{\infty} g(\xi+t)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi + g(t)\int_{-\infty}^{-B}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi + g(t)\int_{B}^{\infty} g(\xi+t)\,\frac{\sin b\xi}{\xi}\,d\xi.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Все интегралы с бесконечными пределами в правой части последнего равенства сходятся, так что при достаточно большом B каждый из них будет меньше $\varepsilon/5$. В оставшемся интеграле множитель при $\sin b\xi$ — интегрируемая на отрезке $[-B, B]$ функция, поскольку в окрестности точки $\xi = 0$ имеем из условия Гёльдера

$$\left|\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\right| \leqslant \frac{A}{|\xi|^{1-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha \leqslant 1,\ A > 0.$$

Значит, при достаточно большом b он тоже будет меньше $\varepsilon/5$ в силу леммы 5.1. Итак,

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\xi+t)-g(t)}{\xi}\,\sin b\xi\,d\xi = 0,$$

так что $I_b(t) \to f(t)$ при $t \to \infty$, что и требовалось. $\square$

Следствие 5.2. *Оригинал полностью определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва первого рода.*

Так же, как и формула (4.20), получается еще

Следствие 5.3. *Пусть функция $f(t)$ является оригиналом, а функция $F(p)$ — ее изображением. Если $F(p)$ аналитична всюду, кроме полюсов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, и $F(p) \to 0$ при $p \to \infty$, то в любой точке t, в которой $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, имеет место равенство*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}.$$

5.2 Свойства преобразования Лапласа

Теорема 5.3 (линейность). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $g(t) \risingdotseq G(p)$, *а* α *и* β *— произвольные комплексные постоянные, то*

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \risingdotseq \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Доказательство. Действительно,

$$\int_0^\infty \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big)e^{-pt}\,dt = \alpha\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt + \beta\int_0^\infty g(t)e^{-pt}\,dt,$$

что и требовалось. □

Теорема 5.4 (подобие). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *а* $\alpha > 0$ *— постоянная, то*

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Доказательство. Действительно, сделав замену $\tau = \alpha t$, получаем

$$\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\tau p/\alpha}\,d\tau = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right),$$

что и требовалось. □

Последующие свойства представляют собой двойственные пары.

Теорема 5.5 (производные оригинала). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $f'(t)$ *является оригиналом, то*

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \qquad \text{где} \qquad f(0) = \lim_{t\to+0} f(0).$$

Вообще, если $f^{(n)}(t)$ *является оригиналом, то*

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(0)$.

Доказательство. Действительно, из формулы интегрирования по частям имеем

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt,$$

но $\operatorname{Re} p = s > s_0$, так что $\left|f(t)e^{-pt}\right| \leqslant Me^{(s-s_0)t}$, откуда первое слагаемое равно $-f(0)$, а второе слагаемое равно $pF(p)$. Формула для $f^{(n)}(t)$ получается из этой $(n-1)$-кратным применением. □

Теорема 5.6 (производные изображения). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n t^n f(t).$$

Доказательство. Действительно, $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ является аналитической функцией, а интегралы, полученные из

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$$

дифференцированием по p, сходятся равномерно относительно p, так что

$$F'(p) = -\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}\,dt, \quad \ldots, \quad F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t)e^{-pt}\,dt,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 5.7 (интеграл оригинала). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то*

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}.$$

Доказательство. Легко видеть, что функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

является оригиналом, причем $g(0) = 0$. Положим $G(p) \fallingdotseq g(t)$. Тогда

$$f(t) = g'(t) \risingdotseq pG(p).$$

Значит, $F(p) = pG(p)$, откуда и следует доказываемое утверждение. $\square$

Теорема 5.8 (интеграл изображения). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и*

$$\int_p^\infty F(q)\,dq$$

сходится, то

$$\int_p^\infty F(q)\,dq \fallingdotseq \frac{f(t)}{t}.$$

Доказательство. Если в интеграле

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_p^\infty dq \int_0^\infty f(t)e^{-qt}\,dt$$

путь интегрирования лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} q = s \geqslant s_1 > s_0$, то

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-qt}\,dt\right| \leqslant M \int_0^\infty e^{-(s_1 - s_0)t}\,dt.$$

Значит, внутренний интеграл равномерно сходится относительно q. Тогда можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_p^\infty F(q)\,dq = \int_0^\infty f(t)\,dt \int_p^\infty e^{-qt}\,dq = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,e^{-pt}\,dt,$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

Теорема 5.9 (запаздывание). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *а* $\tau > 0$, *то*

$$f(t-\tau)h(t-\tau) \risingdotseq e^{-p\tau}F(p).$$

Доказательство. Поскольку $f(t-\tau)h(t-\tau) = 0$ при $t < \tau$, заменой $t_1 = t - \tau$ получаем

$$f(t-\tau)h(t-\tau) \risingdotseq \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau)e^{-pt}\,dt = \int_0^{\infty} f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}\,dt_1 = e^{-p\tau}F(p),$$

что и требовалось. □

Теорема 5.10 (смещение). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *а* $a \in \mathbb{C}$, *то*

$$e^{at}f(t) \risingdotseq F(p-a).$$

Доказательство. Действительно,

$$e^{at}f(t) \risingdotseq \int_0^{\infty} f(t)e^{-t(p-a)}\,dt = F(p-a),$$

что и требовалось. □

Теорема 5.11 (произведение изображений). *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $g(t) \risingdotseq G(p)$, *то* $F(p)G(p)$ *является изображением, причем*

$$F(p)G(p) \fallingdotseq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau = (f * g).$$

Интеграл $(f * g)$ *называется сверткой функций* $f(t)$ *и* $g(t)$.

Доказательство. Покажем сначала, что $(f * g)$ является оригиналом. Свойства 1 и 2 очевидны, а 3 получается из оценки

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right| < M\left|\int_0^t e^{s_0\tau}e^{s_0(t-\tau)}\,d\tau\right| = Mte^{s_0 t},$$

где s_0 — наибольший из показателей роста функций $f(t)$ и $g(t)$. Далее,

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-pt}\,dt \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Этот двукратный интеграл в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ сходится абсолютно, так что можно изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^{\infty} f(\tau)\,d\tau \int_{\tau}^{\infty} g(t-\tau)e^{-pt}\,dt.$$

Сделаем замену $t_1 = t - \tau$, тогда

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau}\,d\tau \int_0^{\infty} g(t_1)e^{-pt_1}\,dt_1,$$

что и требовалось. □

Следствие 5.4 (формула Дюамеля)**.** *Если функции* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и* $g(t) \risingdotseq G(p)$, *то*

$$pF(p)G(p) \fallingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Имеем

$$pF(p)G(p) = f(0)G(p) + \big(pF(p) - f(0)\big)G(p) \fallingdotseq$$
$$\fallingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)\,d\tau,$$

что и требовалось. □

Пользуясь симметричностью свертки, а также меняя местами функции $F(p)$ и $G(p)$, получаем из формулы Дюамеля еще и следующие формулы

$$pF(p)G(p) \fallingdotseq f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau,$$
$$pF(p)G(p) \fallingdotseq g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)\,d\tau,$$
$$pF(p)G(p) \fallingdotseq g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau.$$

Теорема 5.12 (произведение оригиналов)**.** *Пусть* $f(t)$ *и* $g(t)$ *— два оригинала с показателями роста* s_1 *и* s_2 *соответственно,* $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. *Тогда* $f(t)g(t)$ *тоже является оригиналом и*

$$2\pi i f(t)g(t) \risingdotseq \text{v. p.} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(q)G(p-q)\,dq.$$

Доказательство. Произведение $f(t)g(t)$, очевидно, является оригиналом. При $s > s_1$ имеем

$$2\pi i f(t)g(t) \risingdotseq 2\pi i \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-pt}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty \left(\text{v. p.} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(q)e^{qt}\,dq\right) g(t)e^{-pt}\,dt =$$
$$= \text{v. p.} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \left(F(q)\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}\,dt\right)dq,$$

где изменение порядка интегрирования правомерно. У нас $\operatorname{Re} q = s$, так что при $\operatorname{Re} p > s_2 + s$ мы будем иметь $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$, а значит, внутренний интеграл равен $G(p-q)$. □

Примеры. 1. Из свойства линейности имеем

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$\cos \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \qquad \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \qquad \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2 - \omega^2}.$$

Далее, из свойства смещения

$$e^{at} \sin \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}, \qquad e^{at} \cos \omega t \risingdotseq \frac{p - a}{(p-a)^2 + \omega^2},$$

$$e^{at} \operatorname{sh} \omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}, \qquad e^{at} \operatorname{ch} \omega t \risingdotseq \frac{p - a}{(p-a)^2 - \omega^2}.$$

Дифференцируя соответствующие изображения, получаем при $n \in \mathbb{N}$

$$t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}, \qquad t^n e^{at} \risingdotseq \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},$$

$$t^n e^{at} \sin \omega t \risingdotseq n! \frac{\operatorname{Im}(p - a + i\omega)^{n+1}}{\big((p-a)^2 + \omega^2\big)^{n+1}},$$

$$t^n e^{at} \cos \omega t \risingdotseq n! \frac{\operatorname{Re}(p - a + i\omega)^{n+1}}{\big((p-a)^2 + \omega^2\big)^{n+1}}$$

и, в частности,

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \qquad t \sin \omega t \risingdotseq \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}, \qquad t \cos \omega t \risingdotseq \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

Эти и другие равенства включают в таблицу оригиналов и их изображений (см., например, [1]).

2. Найдем изображение $F(p)$ функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \text{ и при } t \geqslant 4, \\ -1, & \text{при } 0 \leqslant t < 1, \\ t - 5, & \text{при } 1 \leqslant t < 3, \\ 1, & \text{при } 3 \leqslant t < 4. \end{cases}$$

Запишем $f(t)$ в виде

$$f(t) = -h(t) + h(t-1) + (t-5)h(t-1) - (t-5)h(t-3) + \\ + h(t-3) - h(t-4) = -h(t) + (t-1)h(t-1) - 3h(t-1) - \\ - (t-3)h(t-3) + 3h(t-3) - h(t-4).$$

Тогда из свойства запаздывания

$$F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{3e^{-p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p^2} + \frac{3e^{-3p}}{p} - \frac{e^{-4p}}{p}.$$

5.3 Применение операционного метода

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) \tag{5.3}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}. \tag{5.4}$$

Пусть решение $y(t)$ задачи (5.3), (5.4) вместе со всеми производными до n-го порядка включительно и функция $f(t)$ являются оригиналами, причем $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда уравнению (5.3) с учетом начальных условий (5.4) будет соответствовать операторное уравнение

$$\begin{aligned} a_n\big(p^n Y(p) - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_1 - \ldots - y_{n-1}\big) &+ \\ + a_{n-1}\big(p^{n-1}Y(p) - p^{n-2}y_0 - p^{n-3}y_1 - \ldots - y_{n-2}\big) &+ \\ + \ldots + a_0 Y(p) &= F(p). \end{aligned}$$

Отсюда легко найти изображение $Y(p)$ решения $y(t)$ задачи (5.3), (5.4). После этого мы можем восстановить $y(t)$ по известному $Y(p)$. Метод, который мы здесь применяем, называется *операционным.*

Пусть теперь требуется найти решение $y(t)$ задачи (5.3), (5.4) с $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$ и известно решение $x(t)$ задачи

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 1, \quad x(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0.$$

Тогда, обозначая $Y(p) \fallingdotseq y(t)$, $X(p) \fallingdotseq x(t)$, имеем

$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0)Y(p) = F(p),$$
$$(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0)X(p) = \frac{1}{p},$$

откуда $Y(p) = pX(p)F(p)$. Значит, в силу формулы Дюамеля

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)x'(t-\tau)\,d\tau. \tag{5.5}$$

Можно также воспользоваться формулой

$$y(t) = x(t)f(0) + \int_0^t x(\tau)f'(t-\tau)\,d\tau$$

Операционный метод применяется и для решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

В некоторых случаях операционный метод упрощает решение линейных дифференциальных уравнений и их систем с зависящими от t коэффициентами.

Примеры. 1. Найдем решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = e^t, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Имеем

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \qquad y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p),$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - y(0)p - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Тогда

$$p^2Y(p) - 1 - 2pY(p) + Y(p) = \frac{1}{p-1},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{p}{(p-1)^3}.$$

Функция $Y(p)$ имеет одну особую точку — полюс $p = 1$ порядка 3. Значит, решение нашей задачи имеет вид

$$y(t) = \operatorname*{Res}_{p=1} \frac{pe^{pt}}{(p-1)^3} = \frac{1}{2} \lim_{p\to 1} \left((p-1)^3 \cdot \frac{pe^{pt}}{(p-1)^3} \right)'' = te^t + \frac{t^2e^t}{2}.$$

2. Найдем решение задачи Коши

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0,$$

где

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin [0,1], \\ 1 & \text{при } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Снова пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Имеем

$$f(t) = h(t) - h(t-1) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p},$$
$$y'(t) \risingdotseq pY(p) - y(0) = pY(p),$$
$$y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - y(0)p - y'(0) = p^2Y(p).$$

Тогда

$$p^2Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^2+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p^2+1)}.$$

Заметим, что дроби в $Y(p)$ отличаются друг от друга лишь множителем e^{-p}, который можно учесть с помощью свойства запаздывания. Поэтому

сначала найдем оригинал, соответствующий изображению
$$Y_1(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$
Функция $Y_1(p)$ имеет три особые точки: простые полюсы $p = \pm i$ и $p = 0$. Найдем вычеты функции $e^{pt}Y_1(p)$:
$$\operatorname*{Res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{p(p^2+1)} = \left.\frac{e^{pt}/p}{(p^2+1)'}\right|_{p=i} = -\frac{e^{it}}{2},$$
$$\operatorname*{Res}_{p=-i} \frac{e^{pt}}{p(p^2+1)} = \left.\frac{e^{pt}/p}{(p^2+1)'}\right|_{p=-i} = -\frac{e^{-it}}{2},$$
$$\operatorname*{Res}_{p=0} \frac{e^{pt}}{p(p^2+1)} = \left.\frac{e^{pt}\big/(p^2+1)}{p'}\right|_{p=0} = 1.$$
Значит,
$$Y_1(p) \risingdotseq 1 - \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = 1 - \cos t.$$
Из свойства запаздывания получаем
$$Y_2(p) = \frac{e^{-p}}{p(p^2+1)} = e^{-p}Y_1(p) \risingdotseq \big(1-\cos(t-1)\big)h(t-1).$$
При этом $Y(p) = Y_1(p) - Y_2(p)$, так что
$$y(t) = (1-\cos t)h(t) - \big(1-\cos(t-1)\big)h(t-1).$$

3. Найдем решение задачи Коши
$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -x + 2y + 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
Пусть $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $y(t) \fallingdotseq Y(p)$. Тогда, учитывая, что $3 \fallingdotseq 3/p$, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:
$$\begin{cases} pX(p) - 1 = 2X(p) - Y(p), \\ pY(p) = -X(p) + 2Y(p) + \dfrac{3}{p}, \end{cases}$$
решая которую, находим
$$X(p) = \frac{p+1}{p(p-1)}, \qquad Y(p) = \frac{2}{p(p-1)}.$$
Находя вычеты функций $e^{pt}X(p)$ и $e^{pt}Y(p)$ в простых полюсах $p = 0$ и $p = 1$, получаем
$$x(t) = 2e^t - 1, \qquad y(t) = 2e^t - 2.$$

4. Найдем решение задачи Коши

$$y'' - 4y' = \frac{16e^{8t}}{4+e^{4t}}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x'' - 4x' = 1, \qquad x(0) = 0, \qquad x'(0) = 0.$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$. Перейдем к операторному уравнению:

$$p^2X(p) - 4pX(p) = \frac{1}{p}, \qquad \text{откуда} \qquad X(p) = \frac{1}{p^2(p-4)}.$$

Находя вычеты функции $e^{pt}X(p)$ в простом полюсе $p = 4$ и полюсе $p = 0$ второго порядка, получаем $x(t) = (e^{4t} - 4t - 1)\big/16$. Тогда по формуле (5.5) находим

$$y(t) = \int_0^t \frac{16e^{8t}}{4+e^{4t}} \cdot \frac{e^{4(t-\tau)} - 1}{4}\, d\tau = (e^{4t}+4)\ln\frac{e^{4t}+4}{5} - e^{4t} + 1.$$

2. Рассмотрим частный случай уравнения Вольтерры

$$y(t) = \int_0^t \kappa(t-\tau)y(\tau)\, d\tau + \varphi(t). \tag{5.6}$$

Если решение $y(t)$ уравнения (5.6) и функции $\kappa(t)$ и $\varphi(t)$ являются оригиналами, причем $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $\kappa(t) \risingdotseq \mathrm{K}(p)$ и $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(t)$, то уравнение (5.6) сводится к операторному уравнению

$$Y(p) = \mathrm{K}(p)Y(p) + \Phi(p), \qquad \text{откуда} \qquad Y(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - \mathrm{K}(p)}.$$

По известному изображению $Y(p)$ можно восстановить оригинал $y(t)$.

Пример. Найдем решение уравнения

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)y(\tau)\, d\tau + \cos t.$$

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Имеем

$$\kappa(t) = t \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \qquad \varphi(t) = \cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1},$$

так что из нашего уравнения получается операторное уравнение вида

$$Y(p) = \frac{Y(p)}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}, \quad \text{откуда} \quad Y(p) = \frac{p^3}{p^4-1}.$$

Находя вычеты функции $e^{pt}Y(p)$ в простых полюсах $p = \pm 1$, $p = \pm i$, получаем

$$y(t) = \frac{\cos t + \operatorname{ch} t}{2}.$$

3. Операционный метод широко применяется в электротехнике для анализа цепей. Для примера рассмотрим простейшую последовательную RLC-цепь на рис. 26. Чтобы различать ток и мнимую единицу, условимся обозначать ток буквой ι (в электротехнике в тех же целях мнимая единица обозначается буквой j, а ток — буквой i).

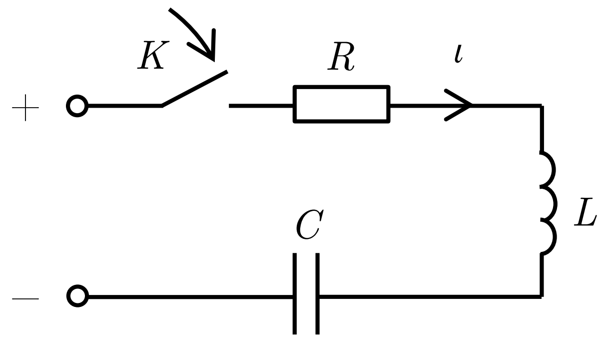

Рис. 26. Последовательная RLC-цепь

Пусть $\iota_0 = \iota(0)$ — начальное значение тока, а q_0 — начальный заряд на обкладках конденсатора. По второму закону Кирхгофа

$$u(t) = R\iota(t) + L\iota'(t) + \frac{1}{C}\left(\int_0^t \iota(\tau)\,d\tau + q_0\right).$$

Тогда если $\iota(t)$ и $u(t)$ являются оригиналами и $\iota(t) \risingdotseq I(p)$, $u(t) \risingdotseq U(p)$, то мы получаем операторное уравнение

$$U(p) = RI(p) + L\bigl(pI(p) - \iota_0\bigr) + \frac{I(p)}{pC} + \frac{q_0}{pC}.$$

Отсюда

$$I(p) = \frac{CpU(p) + \iota_0 LCp - q_0}{LCp^2 + RCp + 1}.$$

По найденному изображению $I(p)$ можно восстановить ток $\iota(t)$.

6 Конформные отображения и гармонические функции

6.1 Теорема о сохранении области

Теорема 6.1 (о сохранении области). *Если $f(z)$ — неконстантная функция, аналитическая в области D расширенной плоскости всюду, кроме, может быть, полюсов, то образ $f(D)$ этой области также является областью расширенной плоскости.*

Доказательство. Если Γ — непрерывная кривая, целиком лежащая в D и соединяющая точки $z_1, z_2 \in D$, то, очевидно, ее образ $f(\Gamma)$ — непрерывная кривая расширенной плоскости, которая целиком лежит в множестве $f(D)$ и соединяет $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Итак, любые две точки множества $f(D)$ можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этом множестве.

Остается доказать, что $f(D)$ — открытое множество, т. е. любая его точка является для него внутренней. Рассмотрим точки $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0) \in f(D)$.

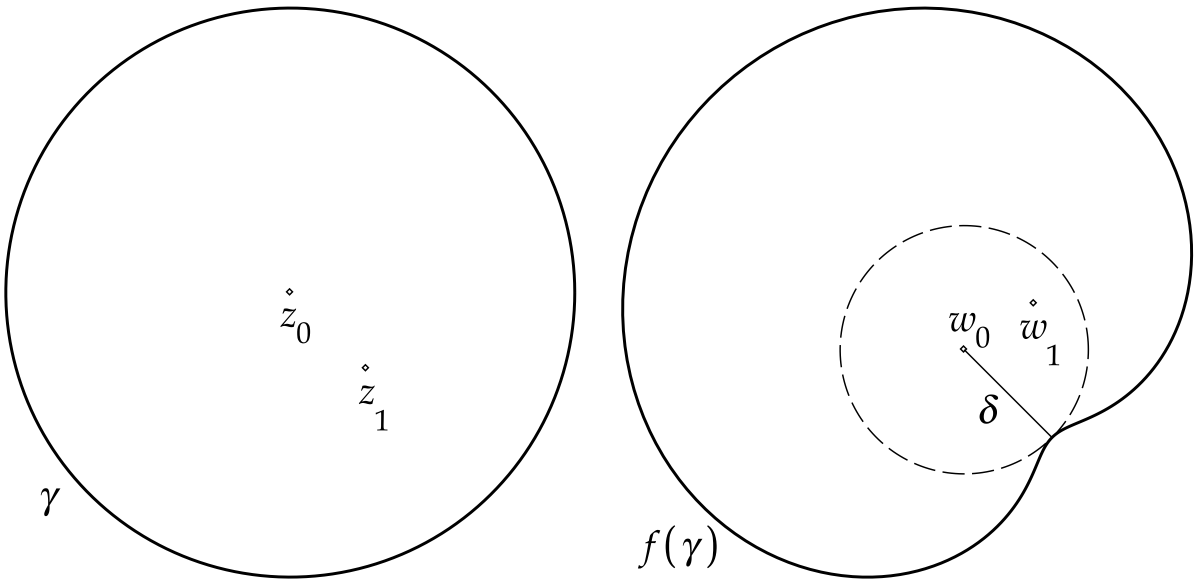

Рис. 27. Чертеж к доказательству теоремы о сохранении области

Пусть сначала $z_0 \neq \infty$ и $w_0 = f(z_0) \neq \infty$. Построим (см. рис. 27) достаточно малый круг $|z - z_0| \leqslant \rho$, целиком лежащий в D, так, чтобы в нем при всех $z \neq z_0$ было выполнено $f(z) \neq w_0$ (это можно сделать в силу теоремы 4.11, ибо функция $f(z) - f(z_0)$ аналитична в окрестности своего нуля z_0 и не равна тождественно нулю ни в какой окрестности z_0).

Обозначим $\gamma\colon |z-z_0| = \rho$. Образ $f(\gamma)$ этой окружности будет находиться в плоскости w на расстоянии

$$\delta = \min_{z\in\gamma} \bigl|f(z) - f(z_0)\bigr| > 0$$

от точки w_0. Покажем, что окрестность $|w - w_0| < \delta$ целиком лежит в $f(D)$. Если w_1 лежит в этой окрестности, то при $z \in \gamma$ имеем $\bigl|f(z) - w_0\bigr| > |w_1 - w_0|$. Значит, по теореме Руше, уравнения $f(z) - w_0 = 0$ и $f(z) - w_1 = 0$ имеют внутри γ одинаковое число корней. Но $f(z) - w_0 = 0$ имеет внутри γ хотя бы один корень z_0, так что $f(z) - w_1 = 0$ также имеет хотя бы один корень, который мы обозначим z_1. Но тогда $f(z_1) = w_1$, т. е. $w_1 \in f(D)$.

Пусть теперь $z_0 = \infty$ и $w_0 = f(z_0) \neq \infty$. Положим $\zeta = 1/z$ и рассмотрим функцию $g(\zeta) = f\bigl(1/\zeta\bigr) = f(z)$. При этом $z_0 = \infty$ соответствует $\zeta_0 = 0$, так что для функции $g(\zeta)$ подходит предыдущий случай. Тем самым $g(0) = f(\infty) = w_0$ — внутренняя точка множества значений функции $g(\zeta)$. Но тогда w_0 — внутренняя точка и для $f(D)$.

Далее, пусть $z_0 \neq \infty$ и $w_0 = f(z_0) = \infty$. Тогда $f(z)$ имеет в точке z_0 полюс. Значит, $g(z) = 1\big/f(z)$ имеет в точке z_0 нуль, причем, из доказанного ранее следует, что $g(z_0) = 0$ — внутренняя точка множества значений $g(z)$. Но отображение $g \mapsto 1/w$ взаимно однозначно и непрерывно переводит окрестность нуля в окрестность точки $w = \infty$, так что w_0 — внутренняя точка $f(D)$.

Наконец, случай $z_0 = \infty$ и $w_0 = f(z_0) = \infty$ преобразованием $\zeta = 1/z$ сводится к только что рассмотренному. $\square$

Из доказательства теоремы о сохранении области можно сделать еще и следующий вывод. Пусть в обозначениях этого доказательства z_0 — такая точка, что $f'(z_0) = 0$. Тогда z_0 — нуль функции $f(z) - w_0$ порядка $k \geqslant 2$. Иными словами, внутри γ уравнение $f(z) - w_0 = 0$ имеет один k-кратный корень. Но для w_1 из круга $|w - w_0| < \delta$ уравнение $f(z) - w_1 = 0$ имеет внутри γ столько же корней с учетом кратности, т. е. k корней. Часть этих корней может совпадать в точке z_1, но только при условии $f'(z_1) = 0$. Значит, если выбрать окрестность $|z-z_0| < r < \rho$ так, чтобы производная $f'(z)$ обращалась в ней в 0 только в точке z_0, для точек w_1 из образа этой окрестности уравнение $f(z) - w_1 = 0$ будет иметь ровно k различных корней, т. е. найдутся такие точки $z_1 \neq z_2$ из этой окрестности, что $f(z_1) = f(z_2) = w_1$. Итак, если $f'(z_0) = 0$, то $f(z)$ неоднолистна в некоторой окрестности точки z_0. Таким образом, нами получена

Теорема 6.2. *Если $f(z)$ — аналитическая и однолистная в области D функция, то $f'(z) \neq 0$ в конечных точках области D.*

Из теоремы 6.2, в частности, следует, что если функция в области D однолистна, аналитична и имеет в D нуль, то порядок этого нуля равен 1. Отсюда вытекает, что если функция в области D однолистна и аналитична в D всюду, кроме одного полюса, то порядок этого полюса равен 1.

Примечание. Обратное к теореме 6.2 утверждение, вообще говоря, неверно. Например, производная $2z$ функции z^2 не равна нулю в любой области, не содержащей начало координат, но не в любой такой области функция z^2 однолистна.

6.2 Конформные отображения

Рассмотрим *линейное отображение* плоскости $z = x + iy$ на плоскость $w = u + iv$:

$$\begin{cases} u = ax + by + l, \\ v = cx + dy + m, \end{cases} \tag{6.1}$$

где коэффициенты a, b, c, d, l, m не зависят от x и y. Отображение (6.1), очевидно, однозначно определено во всей плоскости z. Если $\Delta = ad - bc \neq 0$, то обратное к (6.1) отображение

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta}\,(du - bv - dl + bm), \\ y = \dfrac{1}{\Delta}\,(-cu + av + lc - am) \end{cases} \tag{6.2}$$

тоже однозначно определено во всей плоскости w. Таким образом, при $\Delta \neq 0$ отображение (6.1) является взаимно однозначным.

Пусть отображение (6.1) переводит заданную точку $z_0 = x_0 + iy_0$ в точку $w_0 = u_0 + iv_0$. Подставим в (6.1) $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, и вычтем из (6.1) полученные равенства. Тогда (6.1) перепишется в виде

$$\begin{cases} u - u_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 = c(x - x_0) + d(y - y_0). \end{cases} \tag{6.3}$$

Аналогично, (6.2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x - x_0 = \dfrac{d}{\Delta}\,(u - u_0) - \dfrac{b}{\Delta}(v - v_0), \\ y - y_0 = -\dfrac{c}{\Delta}\,(u - u_0) + \dfrac{a}{\Delta}(v - v_0). \end{cases} \tag{6.4}$$

Подставив (6.2) в уравнение прямой $y = kx + C$, получим прямую

$$-cu + av + lc - am = kdu - kbv - kdl + kbm + C\Delta,$$

т. е. пучок параллельных прямых с угловым коэффициентом k отображение (6.1) переводит в пучок параллельных прямых с угловым коэффициентом $(c + kd)\big/(a + kb)$. Значит, при (6.1) квадраты переходят в параллелограммы.

Подставив (6.4) в уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0) = r^2$, получим

$$(d^2 + c^2)(u - u_0)^2 - 2(bd + ac)(u - u_0)(v - v_0) + (b^2 + a^2)(v - v_0)^2 = r^2\Delta^2,$$

т. е. отображение (6.1) переводит окружности в эллипсы. Значит, чтобы при отображении (6.1) окружности переходили в окружности, надо потребовать

$$bd + ac = 0, \qquad d^2 + c^2 = b^2 + a^2. \tag{6.5}$$

Из первого равенства в (6.5) получаем

$$\frac{a}{d} = -\frac{b}{c} = \lambda, \quad \text{т. е.} \quad a = \lambda d,\ b = -\lambda c.$$

Подставляя это во второе равенство из (6.5), получим $d^2+c^2 = \lambda^2 d^2+\lambda^2 c^2$, т. е. $\lambda^2 = 1$, откуда $\lambda = \pm 1$.

При $\lambda = 1$ имеем

$$a = d, \qquad b = -c, \qquad \Delta = a^2 + b^2 > 0. \tag{6.6}$$

Поскольку при этом имеем $\big(a/\sqrt{\Delta}\,\big)^2 + \big(b/\sqrt{\Delta}\,\big)^2 = 1$, то можно положить $a = d = \sqrt{\Delta}\cos\alpha$, $c = -b = \sqrt{\Delta}\sin\alpha$. Тогда (6.1) перепишется в виде

$$\begin{cases} u = \sqrt{\Delta}(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + l, \\ v = \sqrt{\Delta}(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + m, \end{cases}$$

откуда $w = u + iv = \sqrt{\Delta}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(x + iy) + l + im$, т. е. (6.1) — это отображение вида

$$w = Az + B, \quad \text{где} \quad A = \sqrt{\Delta}e^{i\alpha}, \quad B = l + im.$$

Значит, отображение (6.1) с условиями (6.6) сводится к повороту на угол $\alpha = \arg A$, подобному растяжению с коэффициентом $|A| = \sqrt{\Delta}$ и сдвигу плоскости z на вектор B. Очевидно, при таком отображении направление обхода замкнутой кривой не изменяется.

При $\lambda = -1$ аналогичным образом получим, что (6.1) имеет вид

$$w = \sqrt{-\Delta}e^{i\alpha}\overline{z} + B, \qquad \text{где} \qquad \Delta = -a^2 - b^2 < 0.$$

Значит, при $\lambda = -1$ к описанным выше преобразованиям плоскости добавляется еще переход от z к $\overline{z}$, т. е. симметрия относительно вещественной оси. Очевидно, при таком отображении направление обхода замкнутой кривой меняется на противоположное.

Таким образом, отображение (6.1) с условиями (6.5) сохраняет подобие геометрических фигур: оно сохраняет углы между прямыми, квадраты переводит в квадраты, круги — в круги и т. д.

Определение 6.1. Линейное отображение (6.1), удовлетворяющее условиям (6.5), называется *ортогональным*. Если ортогональное отображение не изменяет направление обхода замкнутых кривых, т. е. выполнены условия (6.6), то оно называется *сохраняющим ориентацию*. Если же ортогональное отображение изменяет направление обхода замкнутых кривых на противоположное, то это отображение называется *меняющим ориентацию*.

Пусть области D_1 и D_2 не содержат бесконечно удаленную точку. Рассмотрим произвольное взаимно однозначное отображение

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{6.7}$$

области D_1 на область D_2, где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в D_1. Зафиксируем $z_0 \in D_1$. Тогда (6.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} u - u_0 = u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1 r, \\ v - v_0 = v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_2 r, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$ при $r \to 0$. Отбросив здесь малые высших порядков, мы заменим приращения дифференциалами, а отображение (6.7) — его *главной линейной частью*, т. е. линейным отображением

$$\begin{cases} u - u_0 = u'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + u'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \\ v - v_0 = v'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + v'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \end{cases} \tag{6.8}$$

Определение 6.2. Пусть области D_1 и D_2 не содержат бесконечно удаленную точку. Взаимно однозначное отображение (6.7) области D_1 на область D_2 называется *конформным*, если в окрестности любой точки из области D_1 его главная линейная часть является ортогональным отображением, сохраняющим ориентацию.

Из сказанного перед определением ортогонального отображения вытекает

Теорема 6.3. *Справедливы следующие свойства*:

1. *при конформном отображении бесконечно малые окружности переводятся в окружности с точностью до малых высших порядков* (*круговое свойство*);

2. *конформное отображение сохраняет углы между кривыми в точках их пересечения* (*свойство сохранения углов*).

Доказательство. Первое свойство очевидно. Под углом между кривыми понимается угол между их касательными, так что для доказательства второго свойства достаточно заметить, что главная линейная часть дифференцируемого отображения переводит касательную к кривой в касательную к ее образу. □

На рис. 28 видим, что углы между прямыми, составляющими сетку, сохраняются при конформном отображении этой сетки.

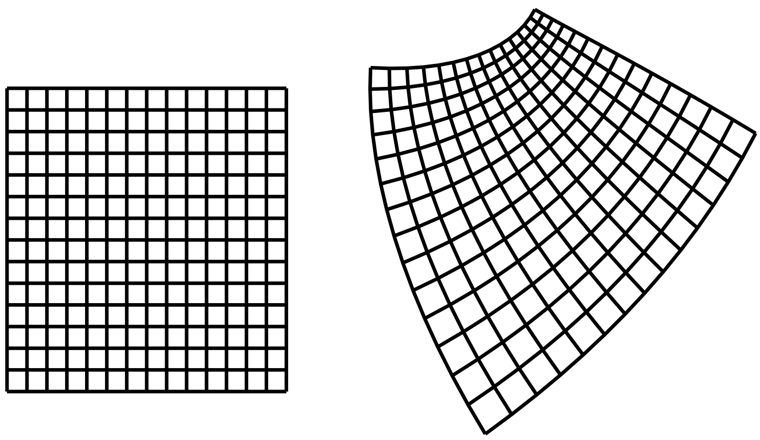

Рис. 28. Сетка и ее образ при конформном отображении

Из определения следует, что отображение (6.7) конформно отображает D_1 на D_2 тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ однозначна и однолистна, а отображение (6.8) ортогонально для всех $z_0 \in D_1$. Последнее означает, что при всех $z_0 \in D_1$ для (6.7) выполнены условия (6.6), т. е. для всех точек из D_1

$$u'_x = v'_y, \qquad u'_y = -v'_x, \qquad (u'_x)^2 + (v'_x)^2 \neq 0.$$

Первое и второе равенства совпадают с условиями Коши — Римана, а третье означает, что $\left|f'(z)\right| \neq 0$, Итак, функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области D_1 на область D_2 тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна и аналитична в области D_1, а $f'(z) \neq 0$ в D_1. Но по теореме 6.2 условие $f'(z) \neq 0$ в D_1 следует из однолистности $f(z)$. Значит, справедлива

Теорема 6.4. *Пусть области D_1 и D_2 не содержат бесконечно удаленную точку. Функция $w = f(z)$ осуществляет конформное отображение области D_1 на область D_2 тогда и только тогда, когда $f(z)$ однолистна и аналитична в области D_1.*

Теорема 6.4 позволяет обобщить понятие конформного отображения на области, содержащие бесконечно удаленную точку. Введем соответствующее определение.

Определение 6.3. Если область D_2 не содержит бесконечно удаленную точку, то функция $f(z)$ осуществляет *конформное отображение* области D_1 на D_2, если она однолистна и аналитична в D_1. Если область D_2 содержит бесконечно удаленную точку, то функция $f(z)$ осуществляет *конформное отображение* области D_1 на D_2, если она однолистна в D_1 и аналитична в D_1 всюду, кроме одной и только одной особой точки, являющейся простым полюсом.

Примечание. Для односвязных областей из довольно широкого класса можно найти конформное отображение, переводящее их друг в друга. Именно, справедлива теорема Римана: *для любых двух односвязных областей D_1 и D_2 расширенной плоскости, граница каждой из которых состоит более чем из одной точки, существует конформное отображение D_1 на D_2*. Доказательство этой теоремы можно найти в книге [3].

Конформные отображения часто применяются в механике сплошных сред для перехода от сложной области к более простой. Приведем одно из самых известных приложений теории конформных отображений. Пусть заданы три вещественных положительных параметра: a, h и d. Положим $r = |a - ih|$ и рассмотрим в плоскости z окружность $\Gamma\colon |z - ih| = r$. На прямой $x/a + y/h = 1$ выберем точку z_0, лежащую в левой полуплоскости на расстоянии d от ih, и положим $R = |a - z_0|$. Построим окружность $\Gamma_1\colon |z - z_0| = R$. Эта окружность отображением

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right)$$

взаимно однозначно переводится на кривую Γ_2 плоскости w. Функция, осуществляющая это отображение, называется *функцией Жуковского*. Она однозначна и аналитична вне Γ_1 всюду, кроме простого полюса в точке $z = \infty$, и осуществляет конформное отображение внешности кривой Γ_1, т. е. круга $|z - z_0| > R$, на внешность кривой Γ_2. Кривая Γ_2 напоминает профиль крыла самолета (см. рис. 29).

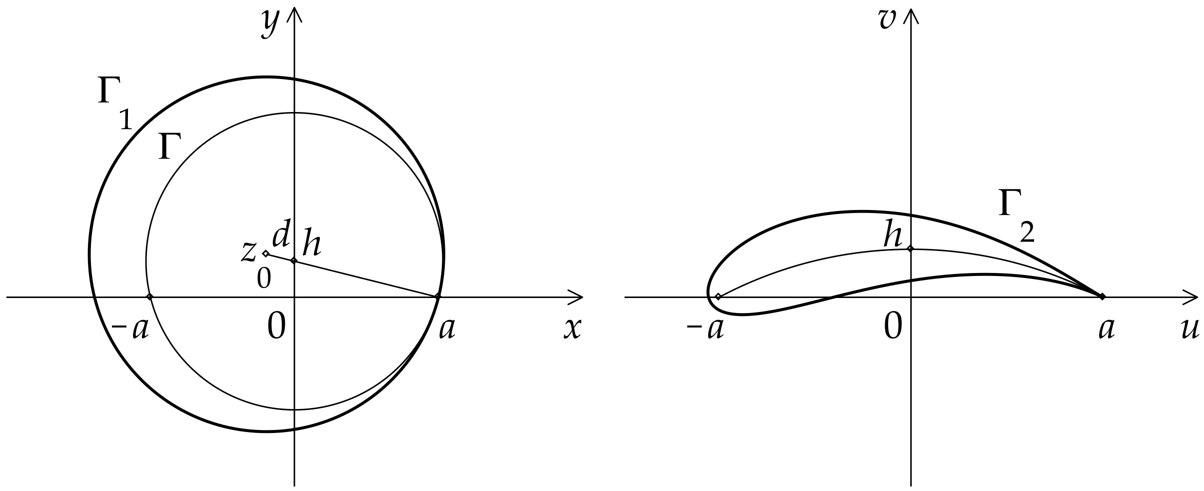

Рис. 29. Профиль Жуковского

Этим методом получают удобные для расчетов профили крыльев самолета, которые называются *профилями Жуковского*. Параметр a характеризует ширину крыла, d — его толщину, а h — его искривление.

Отметим еще геометрический смысл производной функции комплексного переменного. В наших обозначениях имеем $u'_x = \sqrt{\Delta}\cos\alpha$, $u'_y = -\sqrt{\Delta}\sin\alpha$. Значит, $f'(z) = u'_x - iu'_y = \sqrt{\Delta}e^{i\alpha}$, т. е. $\left|f'(z)\right| = \sqrt{\Delta}$, $\arg f'(z) = \alpha$. Итак, модуль $f'(z)$ означает коэффициент растяжения, а аргумент $f'(z)$ — угол поворота при отображении $w = f(z)$ в точке z.

6.3 Гармонические функции

Определение 6.4. Функция $u(x, y)$ двух вещественных переменных называется *гармонической* в области D, не содержащей бесконечно удаленную точку, если она имеет в D непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в D *уравнению Лапласа*:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Теорема 6.5. *Пусть область D не содержит бесконечно удаленную точку, а функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$ аналитична в D. Тогда вещественная и мнимая части функции $f(z)$ являются гармоническими в области D функциями.*

Доказательство. Из условий Коши — Римана

$$\begin{cases} u'_x = v'_y, \\ u'_y = -v'_x, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u''_{xx} = v''_{xy}, \\ u''_{yy} = -v''_{xy}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u''_{xx} + u''_{yy} = 0,$$

и аналогично для v. □

Определение 6.5. Две гармонические в области D, не содержащей бесконечно удаленную точку, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, связанные условиями Коши — Римана, называются *сопряженными.*

Теорема 6.6. *Любую гармоническую в односвязной области D, не содержащей бесконечно удаленную точку, функцию можно рассматривать как вещественную или мнимую часть некоторой аналитической в области D функции комплексного переменного $f(z)$, которая определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — функция, гармоническая в односвязной области D. Рассмотрим интеграл

$$\int_{z_0}^{z} -u'_y\,dx + u'_x\,dy,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — фиксированная, а $z = x + iy$ — переменная точка области D. Поскольку $u(x, y)$ — гармоническая, $-u''_{yy} = u''_{xx}$, так что этот интеграл не зависит от пути интегрирования и зависит только от z. Обозначим его через $\tilde{v}(x, y)$. Тогда

$$\tilde{v}'_x = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{v}(x+h, y) - \tilde{v}(x, y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{z}^{z+h} -u'_y\,dx = -u'_y$$

(мы берем интеграл по прямолинейному отрезку от z до $z+h$, на котором $dy = 0$). Аналогично, $\tilde{v}'_y = u'_x$. Итак, функция $\tilde{f}(z) = u(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ — аналитическая функция комплексного переменного z. Поскольку функция определяется своими частными производными с точностью до постоянного слагаемого, совокупность всех гармонических функций, сопряженных с $u(x, y)$ имеет вид

$$v(x, y) = \int_{z_0}^{z} -u'_y\,dx + u'_x\,dy + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Тогда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. $\square$

Пример. Задана гармоническая функция

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + 13x - 11y + 30.$$

Найдем с точностью до постоянного слагаемого сопряженную к ней функцию $v(x, y)$ и запишем $f = u + iv$ как функцию комплексного переменного $z = x + iy$.

Имеем $v'_y = u'_x = 3x^2 - 3y^2 - 2x + 13$. Проинтегрируем по y:

$$v(x, y) = \int (3x^2 - 3y^2 - 2x + 13)\,dy = 3x^2y - y^3 - 2xy + 13y + C_1(x),$$

где $C_1(x)$ не зависит от y. С другой стороны, $v'_x = -u'_y = 6xy - 2y + 11$. Проинтегрируем по x:

$$v(x,y) = \int (6xy - 2y + 11)\,dx = 3x^2y - 2xy + 11x + C_2(y),$$

где $C_2(y)$ не зависит от x. Тогда $C_1(x) = 11x + C$, $C_2(y) = -y^3 + 13y + C$,

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2xy + 13y + 11x + C.$$

Отсюда

$$f = x^3 - 3xy^2 - x^2 + y^2 + 13x - 11y + 30 + i(3x^2y - y^3 - 2xy + 13y + 11x + C).$$

Подставляя сюда $x = (z + \overline{z})/2$, $y = (z - \overline{z})/(2i)$ и приводя подобные в полученном выражении, окончательно имеем

$$f(z) = z^3 - z^2 + (13 + 11i)z + 30 + Ci.$$

Теорема 6.7. *Пусть области D_1 и D_2 не содержат бесконечно удаленную точку. Тогда гармоническая в области D_1 функция при конформном отображении D_1 на область D_2 переходит в функцию, гармоническую в D_2.*

Доказательство. Пусть $U(x,y)$ — гармоническая в области D_1 функция, а функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D_1 плоскости $z = x + iy$ на область D_2 плоскости $w = u + iv$. Тогда

$$U(x,y) = U\big(x(u,v), y(u,v)\big) = \tilde{U}(u,v).$$

Имеем

$$\begin{aligned} U'_x &= \tilde{U}'_u u'_x + \tilde{U}'_v v'_x, \qquad U'_y = \tilde{U}'_u u'_y + \tilde{U}'_v v'_y, \\ U''_{xx} &= \tilde{U}''_{uu}(u'_x)^2 + \tilde{U}''_{vv}(v'_x)^2 + 2\tilde{U}''_{uv}u'_x v'_x + \tilde{U}'_u u''_{xx} + \tilde{U}'_v v''_{xx}, \\ U''_{yy} &= \tilde{U}''_{uu}(u'_y)^2 + \tilde{U}''_{vv}(v'_y)^2 + 2\tilde{U}''_{uv}u'_y v'_y + \tilde{U}'_u u''_{yy} + \tilde{U}'_v v''_{yy}, \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $f = u + iv$ — аналитическая функция, а значит, $v'_y = u'_x$, $v'_x = -u'_y$, $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, получаем

$$0 = U''_{xx} + U''_{yy} = \tilde{U}''_{uu}\left((u'_x)^2 + (u'_y)^2\right) + \tilde{U}''_{vv}\left((v'_x)^2 + (v'_y)^2\right).$$

Но $(u'_x)^2 + (u'_y)^2 = (v'_x)^2 + (v'_y)^2 = \left|f'(z)\right|^2 \neq 0$ в D, так что $\tilde{U}''_{uu} + \tilde{U}''_{vv} = 0$, т. е. функция $\tilde{U}(u,v)$ является гармонической в D_2. □

Изложение других фактов о гармонических функциях оставим курсу уравнений математической физики.

7 Аналитическое продолжение

7.1 Аналитическое продолжение

Определение 7.1. Пусть области D_0 и D_1 не имеют общих точек, но имеют общий участок γ границы (см. рис. 30; общий участок границы выделен жирным), в D_0 задана аналитическая функция $f_0(z)$, а в D_1 — аналитическая функция $f_1(z)$. Функция $f_1(z)$ называется *непосредственным аналитическим продолжением* функции $f_0(z)$ в область D_1, если в $D_0 \cup \gamma \cup D_1$ является аналитической функция

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{при } z \in D_0; \\ f_1(z) & \text{при } z \in D_1. \end{cases}$$

По теореме единственности для фиксированных D_0, D_1 и γ непосредственное аналитическое продолжение определяется единственным образом, если оно вообще существует.

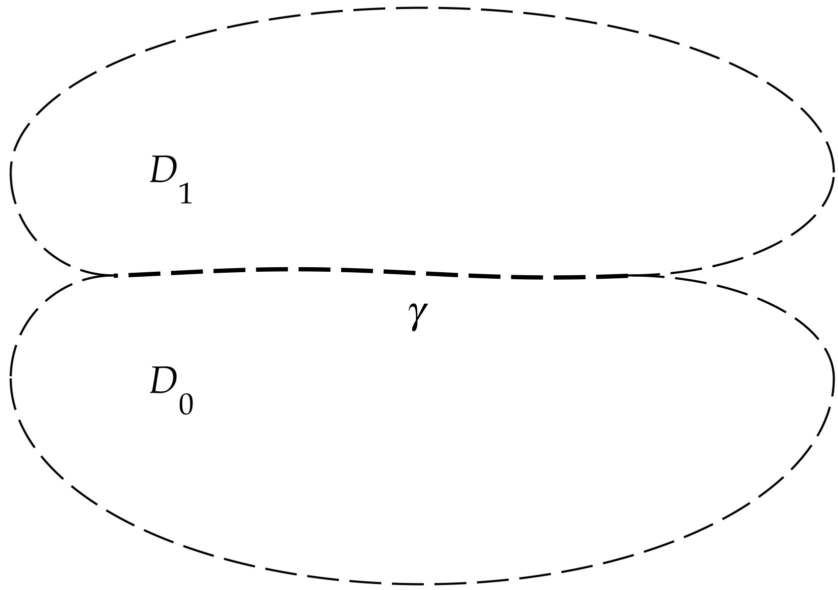

Рис. 30. Области D_0 и D_1 с общим участком γ границы

Приведем достаточное условие аналитичности продолжения.

Теорема 7.1 (принцип непрерывного продолжения)**.** *Пусть D_0 и D_1 — односвязные области без общих точек с одним общим участком γ границы, а $f_0(z)$ и $f_1(z)$ — аналитические в D_0 и D_1 соответственно функции. Если $f_0(z)$ непрерывна на $D_0 \cup \gamma$, $f_1(z)$ непрерывна на $D_1 \cup \gamma$ и $f_0(z) = f_1(z)$ всюду на γ, то $f_1(z)$ — непосредственное аналитическое продолжение $f_0(z)$ в D_1.*

Доказательство. Заметим, что из условий теоремы сразу следует, что функция

$$f(z) = \begin{cases} f_0(z) & \text{при } z \in D_0; \\ f_0(z) = f_1(z) & \text{при } z \in \gamma; \\ f_1(z) & \text{при } z \in D_1 \end{cases} \tag{7.1}$$

непрерывна в области $D = D_0 \cup \gamma \cup D_1$. Пусть Γ — произвольная замкнутая спрямляемая жорданова кривая, целиком лежащая в области D. Если Γ не имеет общих точек с одной из областей D_0 или D_1, то $f(z)$ равна на Γ соответственно $f_0(z)$ или $f_1(z)$ и по теореме 3.3 интеграл функции $f(z)$ вдоль кривой Γ равен нулю. В оставшемся случае рассмотрим кривые Γ_0 и Γ_1 — части контура Γ, лежащие в областях D_0 и D_1 соответственно. Обозначим через γ_{01} часть кривой γ, лежащую внутри кривой Γ. По теореме 3.3 имеем

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_{\Gamma_0 \cup \gamma_{01}} f(z)\,dz + \oint_{\Gamma_1 \cup \gamma_{01}^-} f(z)\,dz =$$
$$= \oint_{\Gamma_0 \cup \gamma_{01}} f_0(z)\,dz + \oint_{\Gamma_1 \cup \gamma_{01}^-} f_1(z)\,dz = 0 + 0 = 0,$$

где γ_{01}^- — кривая γ_{01}, проходимая в обратном направлении. Итак, в любом случае интеграл функции $f(z)$ вдоль кривой Γ равен нулю. Следовательно, по теореме Мореры функция $f(z)$ аналитична в области D, что и требовалось. □

Принцип непрерывного продолжения означает, что аналитическая функция, непрерывно продолжающая аналитическую функцию, является аналитическим продолжением последней. Обобщим определение 7.1.

Определение 7.2. Пусть две области D_0 и D_1 имеют общий участок границы γ, в D_0 задана аналитическая функция $f_0(z)$, а в D_1 — аналитическая функция $f_1(z)$. Функция $f_1(z)$ называется *непосредственным аналитическим продолжением* функции $f_0(z)$ в область D_1, если $f_0(z)$ непрерывна на $D_0 \cup \gamma$, $f_1(z)$ непрерывна на $D_1 \cup \gamma$ и на γ всюду $f_0(z) = f_1(z)$.

Области D_0 и D_1 в определении 7.2 могут иметь общие точки (см. рис. 31; общий участок границы выделен жирным, а общая часть областей D_0 и D_1 закрашена). В этом случае функция $f(z)$, определяемая формулой (7.1), вообще говоря, будет двузначной в их пересечении $D_0 \cap D_1$.

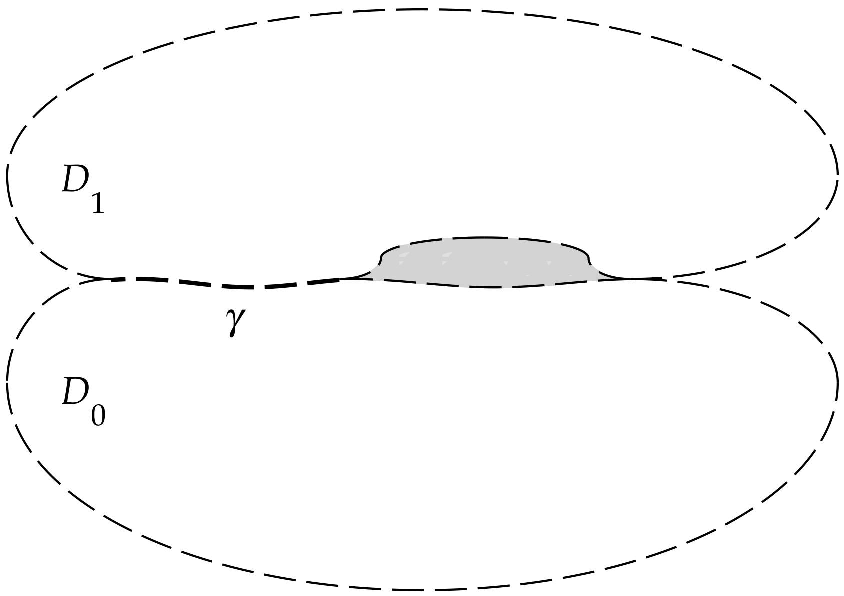

Рис. 31. Пересекающиеся области D_0 и D_1 с общим участком γ границы

Введем теперь определение аналитического продолжения функции в область, не обязательно имеющую общую часть границы с исходной. Для этого нам придется строить продолжение через такую цепочку областей, что соседние области имеют общие участки границ.

Определение 7.3. Пусть D_0, D_1, ..., D_n — такая цепочка односвязных областей, что каждая пара D_k и D_{k+1} имеет общий участок γ_{k+1} границы (см. рис. 32), и пусть в каждой области D_k задана аналитическая функция $f_k(z)$. Функция $f_n(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f_0(z)$ в область D_n через цепочку областей D_0, D_1, ..., D_n с общими участками γ_1, ..., γ_n границ, если при каждом $k = 0, 1, \ldots, n-1$ функция $f_k(z)$ непрерывна на $D_k \cup \gamma_{k+1}$, функция $f_{k+1}(z)$ непрерывна на $D_{k+1} \cup \gamma_{k+1}$ и $f_k(z) = f_{k+1}(z)$ всюду на общем участке γ_{k+1} их границ.

Если цепочка областей D_0, D_1, ..., D_n и общие участки γ_1, ..., γ_n границ соседних областей фиксированы, то аналитическое продолжение функции в область D_n через эту цепочку и общие участки границ тоже определяется единственным образом. Но при изменении какой-либо из промежуточных областей или какого-либо общего участка границ другим это продолжение может измениться.

Здесь снова в случае, когда области D_0 и D_n пересекаются, в общих точках этих областей значения функции и ее аналитического продолжения могут отличаться.

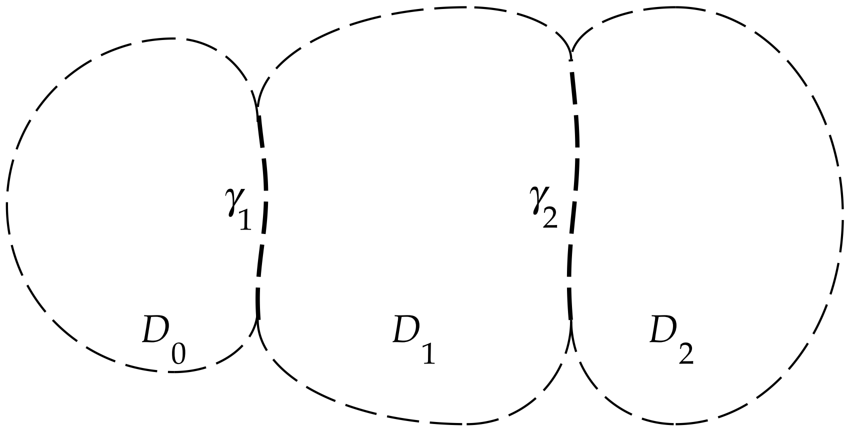

Рис. 32. Цепочка областей D_0, D_1, D_2 с общими участками γ_1, γ_2 границ

7.2 Обобщение понятия аналитической функции

Определение 7.4. Пусть в некоторой области D_0 задана однозначная аналитическая функция $f_0(z)$. Если $f_0(z)$ непродолжаема ни через один участок границы области D_0, то область D_0 называется *областью существования* $f_0(z)$, граница области D_0 — *естественной границей* функции $f_0(z)$, а сама $f_0(z)$ — *полной аналитической функцией.* Если же $f_0(z)$ может быть продолжена за границы D_0, то рассмотрим все возможные аналитические продолжения $f_0(z)$ по всевозможным цепочкам областей, считая их значениями одной функции $f(z)$. Область D, полученная объединением всех областей и участков границ при всех этих продолжениях, называется *областью существования* функции $f(z)$, однозначные функции, из которых составлена $f(z)$, называются *ветвями* функции $f(z)$, а сама функция $f(z)$ в D называется *полной аналитической функцией.* Функцию $f(z)$ можно рассматривать в некоторой части ее области существования, при этом $f(z)$ называется просто *аналитической функцией.*

Определение 7.4 обобщает определение 2.8, поскольку допускает многозначные функции. Обобщим теперь определения особой точки и изолированной особой точки.

Определение 7.5. Точка z_0, принадлежащая области существования функции $f(z)$ или границе этой области, называется *особой точкой* функции $f(z)$, если в ней нарушается аналитичность хотя бы одной ветви $f(z)$. Особая точка z_0 функции $f(z)$ называется *изолированной*, если существует такая проколотая окрестность точки z_0, что $f(z)$ продолжаема вдоль любой цепочки областей, входящих в эту проколотую окрестность.

Определение 7.6. Пусть z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, область D_0 — разрезанное по некоторому радиусу кольцо $0 < |z - z_0| < R$, $f_0(z)$ — однозначная ветвь функции $f(z)$, аналитическая в D_0. Тогда если значения $f_0(z)$ на обоих «берегах» разреза совпадают, то точка z_0 — изолированная особая точка *однозначного характера* ветви $f_0(z)$; при этом по теореме единственности аналитическое продолжение $f_0(z)$ через разрез области D_0 совпадает с $f_0(z)$. Если же значения $f_0(z)$ на разных «берегах» разреза не совпадают, то точка z_0 — изолированная особая точка *многозначного характера* или *точка ветвления.*

Рис. 33. Области D_k

Определение 7.7. Пусть z_0 — точка ветвления функции $f(z)$. В обозначениях определения 7.6 рассмотрим при $k \in \mathbb{Z}$ цепочку областей D_k, каждая из которых совпадает с D_0 (см. рис. 33). Тогда если существует такая цепочка областей D_0, D_1, $\ldots$, D_{n-1}, соединенных последовательно (например, «верхний берег» разреза в D_0 соединяется с «нижним берегом» разреза в D_1, «верхний» в D_1 — с «нижним» в D_2 и т. д.), что на оставшихся свободными «берегах» разрезов в D_0 и D_{n-1} совпадают значения $f_0(z)$ и продолжения $f_{n-1}(z)$ функции $f_0(z)$ через эту цепочку, то z_0 — точка ветвления *конечного порядка* n. При этом по теореме единственности ветви $f_k(z)$ — продолжения функции $f_0(z)$ в D_k через эту цепочку — периодически повторяются: $f_k(z) = f_m(z)$ при $k = m \pmod{n}$. Точка ветвления конечного порядка называется:

- *алгебраической*, если все ветви $f_k(z)$ при $z \to z_0$ имеют один и тот же (конечный или бесконечный) предел;
- *трансцендентной*, если указанный общий предел не существует.

Определение 7.8. Если в обозначениях определения 7.7 нет ни одной такой конечной цепочки областей D_k, что на оставшихся свободными «берегах» разрезов значения функции $f_0(z)$ и ее продолжения через эту цепочку совпадают, то z_0 — *логарифмическая точка ветвления.* Логарифмические точки ветвления функции также считаются трансцендентными.

Теорема 7.2. *В проколотой окрестности своей точки ветвления* $z_0 \neq \infty$ *конечного порядка* n *функция* $f(z)$ *допускает разложение в обобщенный степенной ряд*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k/n}. \tag{7.2}$$

При этом ряд (7.2) *содержит лишь конечное число* (*возможно, равное* 0) *членов с отрицательными* k *тогда и только тогда, когда* z_0 — *алгебраическая точка ветвления функции* $f(z)$, *и бесконечное число таких членов тогда и только тогда, когда* z_0 — *трансцендентная точка ветвления функции* $f(z)$.

Доказательство. Мы будем использовать обозначения из определения 7.7. Сделаем замену переменной $z - z_0 = \zeta^n$, при этом указанной в определении 7.7 цепочке областей D_0, D_1, ..., D_{n-1} плоскости z на плоскости ζ будет соответствовать цепочка смежных секторов Δ_0, Δ_1, ..., Δ_{n-1} кольца $0 < |\zeta| < \sqrt[n]{R}$ с центральными углами $2\pi/n$. Рассмотрим функцию $\varphi(\zeta) = f(z_0 + \zeta^n)$, где в каждой области Δ_m мы выбираем соответствующую ветвь $f_m(z)$ функции $f(z)$. Функция $\varphi(z)$ непрерывно продолжается из Δ_0 в Δ_1, ..., Δ_{n-1}, ее значения на оставшихся свободными берегах разрезов в Δ_0 и Δ_{n-1} совпадают. Значит, точка $\zeta = 0$ является для функции $\varphi(\zeta)$ изолированной особой точкой однозначного характера, так что в проколотой окрестности точки $\zeta = 0$ функция $\varphi(\zeta)$ представляется рядом Лорана

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \zeta^k.$$

причем количество членов с отрицательным k в этом ряде зависит от типа особенности функции $\varphi(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$: устранимая особая точка или полюс, если z_0 — алгебраическая точка ветвления функции $f(z)$; существенно особая точка, если z_0 — трансцендентная точка ветвления функции $f(z)$. Подставляя в этот ряд $\zeta = (z - z_0)^{1/n}$, получаем разложение (7.2). □

Случай, когда z_0 — бесконечно удаленная точка, заменой $Z = 1/z$ сводится к уже рассмотренному, так что справедлива

Теорема 7.3. *В проколотой окрестности своей точки ветвления $z_0 = \infty$ конечного порядка n функция $f(z)$ допускает разложение в обобщенный степенной ряд*:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{k/n}. \tag{7.3}$$

При этом ряд (7.3) *содержит лишь конечное число* (*возможно, равное* 0) *членов с положительными k тогда и только тогда, когда z_0 — алгебраическая точка ветвления функции $f(z)$, и бесконечное число таких членов тогда и только тогда, когда z_0 — трансцендентная точка ветвления функции $f(z)$.*

Определение 7.9. Обобщенные степенные ряды вида (7.2) и (7.3) называются *рядами Пюизе.*

Примеры. 1. Приведем сначала пример функции, непродолжаемой ни через один участок границы некоторой области. Рассмотрим в единичном круге функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}.$$

Точка $z = 1$, очевидно, является особой для функции $f(z)$. Далее, заметим, что

$$f(z) = z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^2\right)^{2^k} = z^2 + f\left(z^2\right),$$

$$f(z) = z^2 + z^4 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^4\right)^{2^k} = z^2 + z^4 + f\left(z^4\right)$$

и, вообще, при любом $n \in \mathbb{N}$

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^{2^n}\right)^{2^k} = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f\left(z^{2^n}\right).$$

Отсюда следует, что при любом $n \in \mathbb{N}$ точки $z\colon z^{2^n} = 1$ являются особыми для функции $f(z)$. Таким образом, на дуге любой длины $\varepsilon > 0$ окружности $|z| = 1$ найдется особая точка функции $f(z)$, так что функция $f(z)$ не продолжаема ни через какую дугу этой окружности. Итак, круг $|z| < 1$ — область существования функции $f(z)$.

2. Для функций $f(z) = \sqrt[n]{z}$ и $g(z) = 1/\sqrt[n]{z}$ точки $z = 0$ и $z = \infty$ — алгебраические точки ветвления порядка n; разложения (7.2) и (7.3) при $0 < |z| < \infty$ для $f(z)$ и $g(z)$ совпадают с самими этими функциями.

3. Функция $f(z) = 1/\bigl(1 - \sqrt{z}\bigr)$ имеет три особые точки. Точка $z = 1$ — полюс той ветви, для которой $\sqrt{1} = 1$, вторая ветвь в этой точке аналитичность не теряет. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ — алгебраические точки ветвления порядка 2; разложения (7.2) и (7.3) имеют вид

$$\frac{1}{1-\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k/2}, \quad 0 < |z| < 1; \qquad \frac{1}{1-\sqrt{z}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^{k/2}}, \quad 1 < |z| < \infty.$$

4. Для функции $f(z) = e^{\sqrt[n]{z}}$ точка $z = 0$ — алгебраическая точка ветвления порядка n, а точка $z = \infty$ — трансцендентная точка ветвления порядка n; разложения (7.2) и (7.3) при $0 < |z| < \infty$ для $f(z)$ имеют вид

$$e^{\sqrt[n]{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k/n}}{k!}.$$

5. Для функции $f(z) = \operatorname{Ln} z$ точки $z = 0$ и $z = \infty$ — логарифмические точки ветвления.

Заключение

Приведены все основные понятия и факты теории функций комплексного переменного. Тем не менее в силу краткости курса многие темы были лишь частично затронуты, а некоторые и вовсе не освещены. Так, о широко применяемых на практике конформных отображениях и гармонических функциях, а также о многозначных аналитических функциях предложен лишь необходимый минимум материала. Кроме того, полностью опущен раздел, в котором изучаются целые и мероморфные функции. Не попали в курс и важные для приложений формулы Сохоцкого. Эти пробелы компенсируются магистерским курсом дополнительных глав, однако автор настоятельно рекомендует студентам самостоятельно ознакомиться с теоретическими сведениями по упомянутым темам в книгах [1–3] и задачами по ним в книгах [4, 5].

Библиографический список

1. *Лаврентьев, М. А.* Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Лань, 2002. — 688 с. — ISBN 978-5-9511-0014-3.

2. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 1: Начала теории / А. И. Маркушевич. — СПб. : Лань, 2009. — 486 с. — ISBN 978-5-8114-0928-0.

3. *Маркушевич, А. И.* Теория аналитических функций. В 2 т. Т. 2: Дальнейшее построение теории / А. И. Маркушевич. — СПб. : Лань, 2009. — 624 с. — ISBN 978-5-8114-0929-7.

4. Сборник задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов [и др.]. — М. : Наука, 1972. — 415 с.

5. *Пантелеев, А. В.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. — СПб. : Лань, 2015. — 446 с. — ISBN 978-5-8114-1921-0.

Учебное издание

ДОДОНОВ Артур Евгеньевич

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 29.11.21.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,67. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.