Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА

РЯДЫ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2021

УДК 517.521
ББК 22.161
К78

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Крашенинникова, О. В.
К78 Ряды : учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 87 с.
ISBN 978-5-9984-1483-1

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты по числовым и функциональным рядам.

Предназначено для студентов бакалавриата очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых трех семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 7. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.521
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-1483-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия соответствует программе второго курса обучения и включает раздел «Числовые и функциональные ряды».

Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемому разделу, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты, включающие 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей их защитой во время рейтинговой недели).

Обозначения и терминология, используемые в пособии, являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы по теории числовых и функциональных рядов, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с изданием предполагает параллельное изучение этой темы по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЯДА И СУММЫ РЯДА. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СХОДИМОСТИ

Рассмотрим произвольную числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и бесконечную сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$. Эта сумма называется числовым рядом и обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ или $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$, a_n называется общим членом ряда.

Рассмотрим новую последовательность: $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$. Эта последовательность называется последовательностью частичных сумм ряда. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, то он называется суммой ряда, а сам ряд в этом случае называется сходящимся. Пишут: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если предела не существует или он равен бесконечности, то ряд называется расходящимся.

Примеры. 1) Рассмотрим ряд 1–1+1–1+…

Распишем последовательность его частичных сумм: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$. То есть $S_{2k+1} = 1$, а $S_{2k} = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует, поэтому ряд расходится.

2) Рассмотрим ряд геометрической прогрессии:

$b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^{n-1} + \ldots$.

Имеем $S_n = b_0 + b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^{n-1}$, $S_n q = b_0 q + b_0 q^2 + \ldots + b_0 q^n$. Вычтем из первого равенства второе, получим $S_n - S_n q = b_0 - b_0 q^n$. Отсюда

$S_n = \dfrac{b_0(1-q^n)}{1-q}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{b_0}{1-q}, & \text{если} \quad |q|<1 \\ \infty, & \text{если} \quad |q|>1 \\ \text{не} \quad \text{сущ.}, & \text{если} \quad q=-1. \end{cases}$$

Если $q=1$, то получаем ряд с постоянными членами: $b_0+b_0+b_0+\ldots+b_0+\ldots$. Его n-ая частичная сумма равна $S_n = nb_0 \to \infty$ при $n\to\infty$, то есть ряд расходится. Таким образом, ряд геометрической прогрессии, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_0 q^n$ сходится, если $|q|<1$ и его сумма равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_0 q^n = \dfrac{b_0}{1-q}$, и расходится, если $|q|\geq 1$.

3) Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4n^2+8n-5}$.

Разложим знаменатель на множители: $4n^2+8n-5=(2n-1)(2n+5)$, а затем общий член разложим на сумму двух дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{1}{4n^2+8n-5} = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+5} = \frac{A(2n+5)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+5)}.$$

Приравняем числители в левой и правой частях последнего равенства: $1=A(2n+5)+B(2n-1)$. Отсюда при $n=\dfrac{1}{2}$ находим $1=6A$, $A=\dfrac{1}{6}$. А при $n=-\dfrac{5}{2}$ находим $1=-6B$, $B=-\dfrac{1}{6}$. Тогда n-ая частичная сумма равна

$$S_n = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{5}-\frac{1}{11}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+5}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right).$$ Следовательно,

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{23}{15}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right) = \frac{23}{90}.$$

Теорема 1.1. (необходимый признак сходимости ряда)

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится , то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Если ряд сходится, то существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$. Отсюда $a_n = S_n - S_{n-1}$, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. Теорема доказана.

Замечание. С помощью необходимого признака можно доказать только расходимость ряда. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n+1}{n}$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0$, то есть необходимое условие выполнено. Найдем n-ую частичную сумму $S_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(n+1) - \ln n = \ln(n+1)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, то есть ряд расходится.

2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Теорема 2.1. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то сходятся и ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k a_n$ причем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Докажем, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и ряд сходится.

Частичная сумма первого ряда равна $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, второго ряда $S'_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. По условию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $\lim\limits_{n\to\infty} S'_n = S'$.

Поскольку n-ая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ равна $S''_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = S_n + S'_n$, отсюда получаем $\lim\limits_{n \to \infty} S''_n = S + S'$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Добавление или отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Доказательство проведем для случая с отбрасыванием. Рассмотрим следующие ряды:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ - ряд (1),

$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots$ - ряд (2).

Ряд (2) получен из ряда (1) путем отбрасывания m первых членов. Докажем, что они сходятся или расходятся одновременно. Рассмотрим n-ые частичные суммы этих рядов:

$S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,

$S_n^{(2)} = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n}$.

Очевидно, что $S_n^{(2)} = S_{n+m}^{(1)} - S_m^{(1)}$.

Если ряд (1) сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} S_{n+m}^{(1)} = S$, следовательно,

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n^{(2)} = S - S_m^{(1)}$ (3), следовательно, ряд (2) тоже сходится. Если ряд (1) расходится, то ряд (2) тоже расходится. Теорема доказана.

Обозначим через $r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+n} + \ldots$. Этот ряд называется m-ым остатком ряда (1). В теореме 2.2. мы доказали, что ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится m-ый остаток ряда.

Теорема 2.3. Ряд сходится тогда и только тогда, когда m-ый остаток ряда стремится к нулю при $m \to \infty$, то есть $\lim\limits_{m \to \infty} r_m = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда по теореме 2.2. ряд

$r_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+m}$ тоже сходится. Из равенства (3) вытекает, что

$r_m = S - S_m^{(1)}$. Устремим m к бесконечности, тогда $\lim\limits_{m\to\infty} S_m^{(1)} = S$ и $\lim\limits_{m\to\infty} r_m = 0$. Таким образом, если остаток сходится, то и сам ряд сходится. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$.

Докажем, что этот ряд расходится. Рассмотрим m-ый остаток ряда: $r_m = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots > \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots \frac{1}{m+m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$, то есть $\lim\limits_{m\to\infty} r_m \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

3. ПРИЗНАКИ СРАВНЕНИЯ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. Тогда $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$, то есть $S_n \geq S_{n-1}$. Последовательность частичных сумм в этом случае возрастает. А возрастающая последовательность имеет предел, если она ограничена сверху. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Ряд с положительными членами сходится тогда и только тогда, когда его последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Теорема 3.2. (первый признак сравнения)

Пусть даны два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд (2), причем $0 \leq a_n \leq b_n$.

Тогда из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Пусть $S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n^{(2)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. Если ряд (2) сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S = \sup\left\{S_n^{(2)}\right\}$, и $S_n^{(2)} \leq S$, но $S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)} \leq S$, поэтому по теореме 3.1. первый ряд сходится.

Пусть ряд (1) расходится, то есть $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^{(1)} = +\infty$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} S_n^{(2)} = +\infty$, так как $S_n^{(2)} \ge S_n^{(1)}$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. (второй признак сравнения)

Пусть заданы два ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд (1) и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ - ряд (2), причем $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$. Обозначим $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$. Тогда:

1) если $0 \le K < +\infty$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1);
2) если $0 < K \le +\infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Доказательство. Пусть $0 \le K < +\infty$, то есть конечное число. По определению предела $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$ имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon$, или, $b_n (K - \varepsilon) < a_n < b_n (K + \varepsilon)$. Воспользуемся неравенством $a_n < b_n (K + \varepsilon)$ при $\forall n > N$. То есть выполнены условия теоремы 3.2., правда, начиная с некоторого номера N. Но отбрасывание конечного числа слагаемых не влияет на сходимость ряда. Таким образом, из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Пусть теперь $0 < K < +\infty$. Воспользуемся неравенством $a_n > b_n (K - \varepsilon)$. Положим $\varepsilon = \frac{K}{2}$, тогда $a_n > \frac{K}{2} b_n$ при $\forall n > N$. Отсюда и из теоремы 3.2. вытекает, что если ряд (2) расходится, то и ряд (1) тоже расходится.

Пусть $K = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, то есть $\forall E > 0\ \exists N$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} > E$, или $a_n > E b_n$, поэтому из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1). Теорема доказана.

Замечание. Если $0 < K < +\infty$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Имеем $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд тоже расходится.

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Имеем $\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}$ начиная с $n=2$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд тоже сходится.

4. ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА, РАДИКАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ, ПРИЗНАК РААБЕ

Признаки Даламбера и радикальный признак Коши основаны на сравнении ряда с положительными членами с рядом геометрической прогрессии: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится, если $|q|<1$ и расходится, если $|q|\ge 1$.

Теорема 4.1. (радикальный признак Коши)

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительные числа и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда:

- если $0 \le q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;
- если $q = 1$, то неизвестно.

Доказательство. Распишем определение предела $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left|\sqrt[n]{a_n} - q\right| < \varepsilon$ или $q-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon$.

Пусть $0 \le q < 1$, тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q + \varepsilon = q_1 < 1$. Следовательно, $\sqrt[n]{a_n} < q_1$ или $a_n < q_1^n$ при $n > N$, где $q_1 < 1$. Таким образом, члены нашего ряда, начиная с некоторого номера N меньше членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_1 < 1$, то есть меньше членов сходящегося числового ряда, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пусть $q > 1$, тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $q - \varepsilon = q_2 > 1$. Тогда получим $\sqrt[n]{a_n} > q_2$ или $a_n > q_2^n$ при $n > N$, где $q_2 > 1$. При этом $q_2^n \to \infty$ при $n \to \infty$, следовательно, $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости и ряд расходится.

Пусть $q = 1$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Он расходится. Найдем $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x}} =$

$$= \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\ln x}} = (\text{по правилу Лопиталя}) \frac{1}{e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x}}} = 1.$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Он сходится. Найдем для него $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^2}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. (признак Даламбера)

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ положительные числа и существует $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тогда:

- если $0 \le q < 1$, то ряд сходится;
- если $q > 1$, то ряд расходится;

- если $q=1$, то неизвестно.

Доказательство. Распишем определение предела $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-q\right|<\varepsilon$ или $q-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon$.

Пусть $0\le q<1$, тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $q+\varepsilon=q_1<1$. Тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<q_1$ при $\forall n>N$. Следовательно,

$\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q_1$, $\dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<q_1$, … , $\dfrac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}<q_1$.

Перемножим левые и правые части этих неравенств, получим: $\dfrac{a_{N+m}}{a_{N+1}}<q_1^{m-1}$, $a_{N+m}<a_{N+1}\cdot q_1^{m-1}=a_{N+1}\cdot\dfrac{q_1^{N+m}}{q_1^{N+1}}$.

Отсюда видно, что $a_n<C\cdot q_1^n$ при $\forall n>N$, причем $q_1<1$. Таким образом, члены нашего ряда, начиная с некоторого номера N меньше членов геометрической прогрессии со знаменателем $q_1<1$, то есть меньше членов сходящегося числового ряда, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд сходится.

Пусть $q>1$, тогда найдется $\varepsilon>0$ такое, что $q-\varepsilon=q_2>1$. Тогда получим $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>q_2$ при $n>N$, где $q_2>1$. Имеем

$\dfrac{a_{N+2}}{a_{N+1}}>q_2$, $\dfrac{a_{N+3}}{a_{N+2}}>q_2$, … , $\dfrac{a_{N+m}}{a_{N+m-1}}>q_2$.

Перемножим левые и правые части этих неравенств, получим: $\dfrac{a_{N+m}}{a_{N+1}}>q_2^{m-1}$, $a_{N+m}>a_{N+1}\cdot q_2^{m-1}$. Отсюда видно, что $a_{N+m}\to\infty$ при $m\to\infty$, то есть не выполнено необходимое условие сходимости, поэтому исходный ряд расходится.

Пусть $q=1$. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Он расходится. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Он сходится. Найдем для него $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. (признак Раабе)

Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительные числа и существует $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=q$. Тогда:

- если $q>1$, то ряд сходится;
- если $q<1$, то ряд расходится;
- если $q=1$, то неизвестно.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}}{2^n}$.

Применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{100}}{2}\frac{1}{2}<1$, следовательно, ряд сходится.

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$.

Применим признак Даламбера:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{100^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{100}{n+1}=0<1$, следовательно, ряд сходится.

3) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)!}$.

Применим признак Раабе:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{(2n+1)!(2n)!(2n+1)}{(2n+2)!(2n-1)!(2n+3)}\right)=$$

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{6n+5}{(2n+2)(2n+3)}=\dfrac{3}{2}>1$, следовательно, ряд сходится.

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ПРИЗНАК КОШИ-МАКЛОРЕНА

Теорема 5.1. Пусть функция $f(x)$ убывает на $[k;+\infty)$ и $f(x)\geq 0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению имеем $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int\limits_{k}^{a} f(x)dx$. Если $f(x)\geq 0$, то $\int\limits_{k}^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\int\limits_{k}^{a} f(x)dx$ ограничен сверху. Пусть $m\geq k$, тогда для $m\leq x\leq m+1$ имеем $f(m+1)\leq f(x)\leq f(m)$ (4).

Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$:

$f(k)+f(k+1)+\ldots f(k+n)=S_{n+1}$. Из неравенства (4) следует, что

$\int\limits_{m}^{m+1} f(m+1)dx\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(m)dx$, или, $f(m+1)\leq \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx\leq f(m)$.

При $m=k$ имеем $f(k+1)\leq \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx\leq f(k)$, при $m=k+1$ имеем $f(k+2)\le\int\limits_{k+1}^{k+2}f(x)dx\le f(k+1)$,

…

при $m=k+n$ имеем $f(k+n+1)\le\int\limits_{k+n}^{k+n+1}f(x)dx\le f(k+n)$.

Сложим левые и правые части этих неравенств, получим:

$$S_{n+2}-f(k)\le\int\limits_{k}^{k+n+1}f(x)dx\le S_{n+1}. \qquad (5)$$

Если ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty}f(n)$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_{n+1}=S$, $S_{n+1}\le S$. Из правой части неравенства (5) следует, что $\int\limits_{k}^{k+n+1}f(x)dx\le S$, то есть интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty}f(x)dx$ сходится. Если ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty}f(n)$ расходится, то $S_{n+2}\to\infty$. Тогда из левой части неравенства (5) следует, что $\int\limits_{k}^{k+n+1}f(x)dx\to\infty$, то есть интеграл $\int\limits_{k}^{+\infty}f(x)dx$ расходится. Теорема доказана.

Примеры. 1) Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Функция $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$, поэтому можно по интегральному признаку Коши можно рассмотреть соответствующий несобственный интеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \to +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(A^{1-\alpha} - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1}, \ \text{если } \alpha > 1 \\ \infty, \ \text{если } \alpha < 1. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \lim_{A \to +\infty} \ln|A| = \infty$. Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится, если } \alpha > 1 \\ \text{расходится, если } \alpha \le 1. \end{cases}$

2) Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ неотрицательна и монотонно убывает на промежутке $[2; +\infty)$, поэтому по интегральному признаку Коши можно рассмотреть соответствующий несобственный интеграл: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{A \to +\infty} \ln|\ln x| \Big|_2^A = \infty$, который расходится, значит и ряд расходится.

6. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ

Определение. **Знакочередующимся рядом** называется ряд вида $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ (или $-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots$), где $a_i \ge 0$. Его можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (или $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$).

Теорема 6.1. (признак Лейбница)

Пусть задан знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n \geq 0$ и последовательность $\{a_n\}$, убывая, стремится к нулю при $n \to \infty$, тогда ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм ряда с четными номерами: $S_2 = a_1 - a_2$, $S_4 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4), \ldots$, $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots (a_{2m-1} - a_{2m})$, $S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq S_{2m}$, то есть эта последовательность возрастает. Докажем, что эта последовательность ограничена сверху:

$S_{2m} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots (a_{2m-2} - a_{2m-1}) + a_{2m}) \leq a_1$, так как из a_1 вычитается положительное число. Мы доказали, что последовательность $\{S_{2m}\}$ возрастает и ограничена сверху, следовательно, существует $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m} = S$. Далее, $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, но по условию, $\lim\limits_{m \to \infty} a_{2m+1} = 0$, поэтому $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m \to \infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = S$. Последовательности частичных сумм с четными и нечетными номерами имеют одинаковый предел, следовательно, ряд сходится. Теорема доказана.

Определение. Ряды, удовлетворяющие признаку Лейбница, называются **рядами Лейбница**.

Оценим остаток ряда Лейбница.

Теорема 6.2. Для ряда Лейбница модуль n-го остатка не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов: $|r_n| \leq a_{n+1}$.

Доказательство. Распишем n-й остаток ряда Лейбница: $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots$. Рассмотрим два случая:

1) $n=2m$, тогда $r_{2m} = (a_{2m+1} - a_{2m+2}) + (a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \ldots \geq 0$,
   $r_{2m} = a_{2m+1} - ((a_{2m+2} - a_{2m+3}) + (a_{2m+4} - a_{2m+5}) + \ldots) \leq a_{2m+1}$, то есть $0 \leq r_{2m} \leq a_{2m+1}$ и для четных номеров мы формулу доказали.
2) $n=2m+1$, тогда $r_{2m+1} = -a_{2m+2} + a_{2m+3} - a_{2m+4} + \ldots =$
   $= -((a_{2m+2} - a_{2m+3}) + (a_{2m+4} - a_{2m+5}) + \ldots) \leq 0$,

$r_{2m+1} = -a_{2m+2} + ((a_{2m+3} - a_{2m+4}) + \ldots) \geq -a_{2m+2}$, то есть $-a_{2m+2} \leq r_{2m+1} \leq 0$ или по определению модуля $\left| r_{2m+1} \right| \leq a_{2m+2}$.

Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве теоремы мы по-разному расставляли скобки, то есть группировали члены. Можно доказать, что для сходящихся рядов это можно делать, при этом сумма ряда не меняется.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)^3}$.

Проверим выполнение условий признака Лейбница:

1) $1 > \dfrac{1}{3^3} > \dfrac{1}{5^3} > \ldots$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(2n-1)^3} = 0$, то есть ряд сходится.

Критерий Коши для последовательностей и рядов

Теорема 6.3. (Критерий Коши для последовательностей)

Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m -$ натурального $\Rightarrow \left| x_{n+m} - x_n \right| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Дано: последовательность $\{x_n\}$ сходится, то есть $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. По определению предела имеем $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N \Rightarrow \left| x_n - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Если $\forall n > N$ и $m -$ натуральное число, то $n + m > N$, поэтому $\Rightarrow \left| x_{n+m} - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$\left| x_{n+m} - x_n \right| = \left| x_{n+m} - a + a - x_n \right| \leq \left| x_{n+m} - a \right| + \left| x_n - a \right| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ при $\forall n > N$ и $\forall m -$ натуральном. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow \left|x_{n+m}-x_n\right|<\varepsilon$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Возьмем $\varepsilon=1$, тогда $\exists N$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow \left|x_{n+m}-x_n\right|<1$.

Возьмем $n=N+1$, тогда $\left|x_{N+m+1}\right|=\left|x_{N+m+1}-x_{N+1}+x_{N+1}\right|\le$
$\le\left|x_{N+m+1}-x_{N+1}\right|+\left|x_{N+1}\right|<1+\left|x_{N+1}\right|$. Мы доказали, что $\left|x_n\right|\le 1+\left|x_{N+1}\right|$ для $n\ge N+1$. При $\forall n$ имеем $\left|x_n\right|\le\max\left(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|,\ldots,\left|x_n\right|,1+\left|x_{N+1}\right|\right)$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_{n_k}\right\}$. Пусть $\lim\limits_{n_k\to\infty}x_{n_k}=a$. Вернемся к неравенству $\left|x_{n+m}-x_n\right|<\varepsilon$. Будем выбирать m так, чтобы $x_{n+m}=x_{n_k}$, тогда $\left|x_{n_k}-x_n\right|<\varepsilon$. В неравенстве можно переходить к пределу. Перейдем к пределу при $n_k\to\infty$, получим $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left|x_{n_k}-x_n\right|=\left|a-x_n\right|\le\varepsilon$ для $\forall n>N$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Теорема доказана.

Теорема 6.4. (Критерий Коши для рядов)

Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходился необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right|<\varepsilon$.

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$. Применим критерий

Коши для последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ ряда. Последовательность $\{S_n\}$ сходится тогда и только тогда, когда $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow \left|S_{n+m}-S_n\right|<\varepsilon$. Но $\left|S_{n+m}-S_n\right|=$ $=\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right|$. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$. Применим критерий Коши для рядов: $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}\right|>\frac{1}{n+m}+\frac{1}{n+m}+\ldots+\frac{1}{n+m}=$ $=\frac{m}{n+m}$. Возьмем $m=n$, тогда $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+m}>\frac{1}{2}$, то есть для $\varepsilon\le\frac{1}{2}$ критерий Коши не выполняется, значит ряд расходится.

Теорема 6.5. Если ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то сам ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ тоже сходится.

Доказательство. Так как ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|$ сходится, то по критерию Коши $\forall\varepsilon>0\,\exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall m-$ натурального $\Rightarrow\left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\ldots+\left|a_{n+m}\right|<\varepsilon$. Но по свойству модуля $\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}\right|\le\left|a_{n+1}\right|+\left|a_{n+2}\right|+\ldots+\left|a_{n+m}\right|<\varepsilon$, то есть опять по критерию Коши ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится. Теорема доказана.

Определение. Если ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то будем говорить, что сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится абсолютно. Если ряд из модулей расходится, а сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то будем говорить, что он сходится условно.

Пример. Исследовать на абсолютную или условную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Этот ряд сходится по признаку Лейбница, а ряд из модулей расходится как гармонический, следовательно, этот ряд сходится условно.

Доказанная теорема 6.5. позволяет к любым рядам применять доказанные ранее признаки, например, радикальный признак Коши: если $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$, то

1) если $0<q<1$, то ряд сходится абсолютно;
2) если $q>1$, то ряд расходится;
3) если $q=1$, то неизвестно.

7. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Пусть дана последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$,…, ,$u_n(x)$,….

Предположим, что все они определены на некотором множестве *D*. Если взять любую точку $x_0\in D$, то получится числовая последовательность $\{u_n(x_0)\}$. Можно выяснить, существует ли $\lim_{n\to\infty}u_n(x_0)$.

Определение. Множество тех x, для которых существует предел числовой последовательности $\{u_n(x)\}$, называется областью сходимости функциональной последовательности.

Функция $u(x) = \lim\limits_{n \to \infty} u_n(x)$ называется предельной функцией.

Пример. Рассмотрим последовательность функций $\{x^n\}$.

$$\lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad |x| < 1 \\ \infty, & \textit{если} \quad |x| > 1 \\ 1, & \textit{если} \quad x = 1 \\ \textit{не сущ.}, & \textit{если} \quad x = -1. \end{cases}$$

Следовательно, областью сходимости является промежуток (-1;1].

Предельная функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad |x| < 1 \\ 1, & \textit{если} \quad x = 1. \end{cases}$

Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Определение. Областью сходимости функционального ряда называется множество тех x, для которых ряд сходится, то есть существует конечный $\lim\limits_{n \to \infty} S_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$.

Пример. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Применим радикальный признак Коши: $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{|x|^n}{n^2}} = \dfrac{|x|}{\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = |x|$.

Следовательно, при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, при $|x| > 1$ ряд расходится, при $|x| = 1$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который сходится. Таким образом, областью сходимости будет отрезок [-1;1].

Определение. Будем говорить, что последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D*, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in D \Rightarrow \left|u_n(x)-u(x)\right|<\varepsilon$.

Примеры. 1) Рассмотрим последовательность функций $u_n(x)=x^n$ на отрезке $|x|\le q<1$. Тогда $u(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. Докажем, что сходимость будет равномерной: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x: |x|\le q \Rightarrow \left|x^n\right|<\varepsilon$.

Пусть $|x|^n\le q^n<\varepsilon$. Прологарифмируем последнее неравенство: $n\ln q<\ln\varepsilon$, тогда $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln q}$ и в качестве N возьмем $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln q}\right]+1$.

2) Рассмотрим последовательность функций $u_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$.

Она определена при любых *x*, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+n^2x^2}=0$. Докажем, что сходимость будет равномерной: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N$ и $\forall x\in\mathbf{R}$ $\Rightarrow\left|\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right|<\varepsilon$ или $\dfrac{|x|}{1+n^2x^2}<\varepsilon$. Возьмем $\forall x\in[0;+\infty)$, тогда нужно решить неравенство $\dfrac{x}{1+n^2x^2}<\varepsilon$. Найдем максимум функции $f(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ на промежутке $[0;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1+n^2x^2-2n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=\dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, $f'(x)=0$ при $1-n^2x^2=0$, $x^2=\dfrac{1}{n^2}$, $x=\pm\dfrac{1}{n}$. Далее, $f'(x)>0$ при $x\in\left(0;\dfrac{1}{n}\right)$, $f'(x)<0$ при $x\in\left(\dfrac{1}{n};+\infty\right)$, следовательно, $x=\dfrac{1}{n}-$ точка максимума функции. Поэтому

$$\frac{x}{1+n^2x^2} \le \frac{\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$. Отсюда $n > \frac{1}{2\varepsilon}$, тогда $N = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве *D*, если его последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве.

Необходимые и достаточные условия равномерной сходимости для последовательностей и рядов

Теорема 7.1. (Критерий Больцано-Коши для последовательностей) Для того, чтобы последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходилась равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D* необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$, $\forall m -$ натурального и $\forall x \in D$ $\Rightarrow \left|u_{n+m}(x) - u_n(x)\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве *D*. По определению это означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in D$ $\Rightarrow \left|u_n(x) - u(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $m -$ натуральное число, тогда $n + m > N$ тоже натуральное число и $\left|u_{n+m}(x) - u(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим

$\left|u_{n+m}(x) - u_n(x)\right| = \left|u_{n+m}(x) - u(x) + u(x) - u_n(x)\right| \le \left|u_{n+m}(x) - u(x)\right| +$ $+ \left|u(x) - u_n(x)\right| < \varepsilon$. Необходимость доказана.

Достаточность. Дано: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$, $\forall m -$ натурального и $\forall x \in D$ $\Rightarrow \left|u_{n+m}(x) - u_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что для любого фиксированного $x \in D$ последовательность $\{u_n(x)\}$ удовлетворяет критерию Коши для числовых последовательностей и, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$. В неравенстве $\left|u_{n+m}(x) - u_n(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ зафиксируем $n > N$ и $x \in D$. После этого перейдем к пределу при $m \to \infty$, $u_{n+m}(x) \to u(x)$ и мы получим неравенство $\left|u(x) - u_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ при $n > N$ и $x \in D$, а это и означает, что последовательность функций $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на множестве D. Достаточность доказана.

Теорема 7.2. (Критерий Больцано-Коши для рядов)

Для того чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$, $\forall m-$ натурального и $\forall x \in D \Rightarrow \left|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве D к функции $S(x)$. Это означает, что последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве к функции $S(x)$. Далее критерий Больцано-Коши для рядов вытекает из критерия Больцано-Коши для последовательностей, если учесть, что $S_{n+m}(x) - S_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)$. Теорема доказана.

Теорема 7.3. (признак Вейерштрасса)

Пусть члены функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ удовлетворяют неравенству $\left|u_n(x)\right| \le b_n$ на множестве D и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, тогда функциональный ряд сходится равномерно. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ называется рядом мажоранта для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по критерию Коши для числовых рядов $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$, $\forall m -$ натурального $\Rightarrow b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+m} < \varepsilon$ (модуль опускаем, так как члены ряда являются положительными числами). Поскольку $|u_n(x)| \le b_n$ на множестве D, то $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+m}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \ldots |u_{n+m}(x)| \le$
$\le b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+m} < \varepsilon \quad \forall n > N$, $\forall m -$ натурального и $\forall x \in D$. И по критерию Больцано-Коши ряд сходится равномерно. Теорема доказана.

Пример. Доказать, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на отрезке [-1;1].

Так как $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ сходится равномерно на отрезке [-1;1] по признаку Вейерштрасса.

Непрерывность предельной функции и суммы ряда

Теорема 7.4. Пусть все члены последовательности $\{u_n(x)\}$ непрерывны на промежутке $(a;b)$ и последовательность сходится равномерно к функции $u(x)$, тогда функция $u(x)$ непрерывна на промежутке $(a;b)$.

Доказательство. Так как последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $u(x)$ на промежутке $(a;b)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall x \in (a;b) \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Возьмем $n > N$ и зафиксируем, тогда функция $u_n(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in (a;b)$, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что $\forall x : |x - x_0| < \delta$ $\Rightarrow |u_n(x) - u_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Пусть $|x - x_0| < \delta$.

Рассмотрим $|u(x) - u(x_0)| = |u(x) - u_n(x) + u_n(x) - u_n(x_0) + u_n(x_0) - u(x_0)| \leq$ $\leq |u(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u_n(x_0)| + |u_n(x_0) - u(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. Здесь первое и третье слагаемые меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ в силу равномерной сходимости, второе – в силу непрерывности $u_n(x)$. Теорема доказана.

Теорема 7.5. Если все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывные функции на промежутке $(a;b)$ и ряд сходится равномерно на этом промежутке, то сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет функцией, непрерывной на $(a;b)$.

Доказательство. Так как ряд сходится равномерно, то последовательность частичных сумм ряда $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, сходится равномерно на этом множестве к функции $S(x)$. Функция $S_n(x)$ будет непрерывной функцией как сумма конечного число непрерывных функций. Далее теорема вытекает из теоремы 7.4. Теорема доказана.

Теорема 7.6. Пусть все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и ряд сходится равномерно на этом отрезке, тогда сумма ряда $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет интегрируемой на этом отрезке и $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(t)dt$, то есть равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{n^2}$.

Так как $\left|\frac{\sin(2nx)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Рассмотрим ряд, составленный из производных: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}\cdot 2n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}$.

Подставим вместо $x=\pi$, получим числовой ряд $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. То есть равномерно сходящиеся ряды почленно дифференцировать нельзя.

Теорема 7.7. Пусть все члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеют на отрезке $[a;b]$ непрерывные производные и ряд, составленный их производных $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $S(x)$. Ряд без производных сходится в какой-нибудь точке $x_0\in[a;b]$. Тогда:

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ к функции $S(x)$;

2) сумма этого ряда $S(x)$ будет функцией дифференцируемой и $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, то есть ряд можно почленно дифференцировать.

Пример. Законно ли почленное дифференцирование ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\,\dfrac{x}{n^2}$.

Найдем $\left(arctg\,\dfrac{x}{n^2}\right)'=\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{n^4}}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{n^2}{n^4+x^2}$ непрерывная на $\boldsymbol{R}$. Рассмотрим ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^4+x^2}$. Имеем $\dfrac{n^2}{n^4+x^2}\le\dfrac{n^2}{n^4}=\dfrac{1}{n^2}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, следовательно по признаку Вейерштрасса ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{n^4+x^2}$ сходится равномерно. Исходный ряд сходится, например, в точке $x=1$. Действительно, так как $arctg\,\dfrac{1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$ при $n\to\infty$, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, поэтому по второму признаку сравнения исходный ряд сходится. Следовательно, исходный ряд можно почленно дифференцировать.

8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Степенные ряды – одни из самых простейших функциональных рядов.

Определение. **Степенным рядом** называется ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Рассмотрим частный случай $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Теорема 8.1. (Абеля)

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_1, то он сходится равномерно и абсолютно на любом отрезке $|x| \le r$, где $r < |x_1|$.

Доказательство. Так как ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_1, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$. Мы знаем, что сходящаяся последовательность будет ограничена, то есть существует константа M такая, что $\left|a_n x_1^n\right| \le M$ при $\forall n$. Пусть $|x| \le r$, где $r < |x_1|$, тогда $\left|a_n x^n\right| \le |a_n| r^n = |a_n| \cdot |x_1|^n \cdot \left(\frac{r}{|x_1|}\right)^n \le$

$\le M \cdot \left(\frac{r}{|x_1|}\right)^n = M \cdot q^n$, где $q = \frac{r}{|x_1|} < 1$.

Таким образом мы доказали, что члены нашего ряда по абсолютной величине не превосходят членов геометрической прогрессии со знаменателем меньше 1, которая сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно.

Следствие. Существует число $R \ge 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, при $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости. В точках $\pm R$ нужны дополнительные исследования, так как ряд может сходиться и расходиться. Промежуток $(-R; R)$ называется интервалом сходимости.

Выведем формулы для вычисления радиуса сходимости.

Применим к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} < 1 \\ \textit{расходится}, & \textit{если} > 1. \end{cases}$$

При $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ряд сходится, при $|x| > \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ряд расходится.

Таким образом, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Теперь применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|a_n x^n\right|} = |x| \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если} < 1 \\ \textit{расходится}, & \textit{если} > 1. \end{cases}$$

При $|x| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится, при $|x| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится. Таким образом, $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Примеры. 1) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

Имеем $a_n = \dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$, то есть ряд сходится на всей числовой оси.

2) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x-2)^n}{n}$.

Имеем $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$.

Следовательно, при $|x-2| < 1$ ряд сходится, при $|x-2| > 1$ ряд расходится. Неравенство $|x-2| < 1$ равносильно $-1 < x-2 < 1$ или $1 < x < 3$. Исследуем сходимость ряда в концевых точках: при $x = 3$ получаем числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится. При $x=1$ получаем знакочередующийся числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. Таким образом, областью сходимости будет промежуток [1;3).

3) Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Имеем $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, то есть ряд сходится в одной точке $x=0$.

Теорема 8.2. Внутри промежутка сходимости сумма степенного ряда будет функцией непрерывной и поэтому интегрируемой. Ряд, полученный путем почленного интегрирования, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x a_n t^n dt$ будет сходиться к интегралу $\int\limits_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt$. То есть степенной ряд можно почленно интегрировать.

Примеры. 1) Применяя почленное интегрирование, найти сумму ряда $x+2x^2+3x^3+\ldots$.

Вынесем x за скобку: $x+2x^2+3x^3+\ldots = x(1+2x+3x^2+\ldots)$ и рассмотрим ряд $1+2x+3x^2+\ldots$. Обозначим его сумму через $S_1(x)$. Проинтегрируем почленно этот ряд, получим $x+x^2+x^3+\ldots = \frac{x}{1-x}$ при $|x|<1$. Тогда $S_1(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Следовательно, сумма исходного ряда равна $x+2x^2+3x^3+\ldots = \frac{x}{(1-x)^2}$.

2) Применяя почленное интегрирование, найти сумму ряда $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$.

Имеем $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots=x(1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots)$.

Почленно проинтегрируем ряд $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots$, получим $2x+3x^2+4x^3+\ldots$. Вновь почленно проинтегрируем полученный ряд, получим $x^2+x^3+x^4+\ldots=\dfrac{x^2}{1-x}$ при $|x|<1$.

Тогда $2x+3x^2+4x^3+\ldots=\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)'=\dfrac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}$.

А сумма ряда $1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots=\left(\dfrac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=$

$$=\frac{(2-2x)(1-x)^2+2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{2(1-x)^2+2(2x-x^2)}{(1-x)^3}=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

Сумма исходного ряда равна $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots=\dfrac{2x}{(1-x)^3}$.

Теорема 8.3. Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ сходится при $|x|<R$, тогда внутри интервала сходимости сумма степенного ряда $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ будет функцией дифференцируемой. Ее производную можно находить путем почленного дифференцирования, то есть $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$. Ряд, полученный путем почленного дифференцирования, имеет тот же радиус сходимости, что и первоначальный.

Доказательство. Докажем сначала, что ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$ имеют одинаковый радиус сходимости. Пусть R – радиус первого ряда, R' – радиус второго ряда из производных. Нужно доказать, что $R=R'$.

Пусть $|x|<R'$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n x^{n-1}\right|$, следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n x^{n}\right|$, полученный путем умножения на *x*.

Так как $\left|a_n x^n\right| \le n|a_n x^n|$, то первый ряд будет сходиться как ряд с меньшими членами. При этом мы доказали, что $R' \le R$. Предположим, что $R' < R$. Выберем две точки x_1 и x_2 такие, что $R' < x_2 < x_1 < R$, тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_n x_1^n\right|$ сходится, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n x_1^n\right| = 0$, поэтому существует число *M* такое, что $\left|a_n x_1^n\right| \le M$ при $\forall n$.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n x_2^{n-1}\right|$. Оценим

$$n\left|a_n x_2^{n-1}\right| = n\left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{n-1}\cdot\frac{1}{|x_1|}\cdot\left|a_n x_1\right|^n \le n\cdot q^{n-1}\cdot\frac{M}{|x_1|},\ \text{где}\ q=\left|\frac{x_2}{x_1}\right|<1.$$

Убедимся, что ряд $\frac{M}{|x_1|}\sum\limits_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ сходится. Действительно,

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{nq^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot q^{1-\frac{1}{n}} = q < 1$, то есть ряд сходится по радикальному признаку Коши. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|na_n x_2^{n-1}\right|$ сходится, но $R' < x_2$, где R' – радиус сходимости любого ряда. В этой точке ряд должен расходиться. Получили противоречие, то есть $R = R'$. Далее теорема вытекает из соответствующей теоремы для функциональных рядов, так как члены степенного ряда будут функциями дифференцируемыми и на любом отрезке $|x| \le r < R$ оба степенных ряда сходятся равномерно. Теорема доказана.

Следствие. Сумма степенного ряда $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ внутри интервала сходимости будет иметь производные любого порядка, то есть будет бесконечно дифференцируемой. Производные можно находить путем почленного дифференцирования.

Доказательство. Пусть ряд $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится при $|x-x_0|<R$. В предыдущей теоремы мы доказали, что $S(x)$ дифференцируема и $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$ и этот ряд тоже сходится при $|x-x_0|<R$. Снова применим теорему. Получим, что $S''(x)$ дифференцируема и $S''(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2}$ и этот ряд тоже сходится при $|x-x_0|<R$ и т.д. Следствие доказано.

Пример. Найти сумму ряда $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$.

Продифференцируем этот ряд: $1-x^2+x^4-\ldots=\frac{1}{1+x^2}$ при $|x|<1$. Тогда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\int\frac{dx}{1+x^2}=arctg\,x.$$

9. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Вспомним теорему Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) непрерывна на отрезке [a,b];
2) дифференцируема на (a,b);
3) $f(a)=f(b)$. Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Теорема 8.1. (формула Тейлора)

Пусть на отрезке $[x_0-H,x_0+H]$, где $H>0$, функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го включительно, тогда $\forall x\in(x_0-H,x_0+H)$ существует точка $c\in(x_0,x)$ такая, что

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$+r_{n+1}(x)$, где $r_{n+1}(x)=\left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p(x-c)^{n+1}\frac{1}{n!\,p}f^{(n+1)}(c)$, $p>0-$ остаточный член.

Рассмотрим частные случаи:

$p=n+1$, $r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $-$ остаточный член в форме Лагранжа,

$p=1$, $r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)(x-c)^n$ $-$ остаточный член в форме Коши.

Доказательство. Имеем $r_{n+1}(x)=f(x)-$

$$-\left(f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\right).$$

Нужно найти $r_{n+1}(x)$. Возьмем $x_0<x<x_0+H$ и зафиксируем. Рассмотрим следующую функцию:

$\varphi(t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$, тогда $r_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x_0)$. Найдем

$$\varphi'(t)=f'(t)+\frac{f''(t)}{1!}(x-t)+\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+\ldots+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-$$

$$-\frac{f'(t)}{1!}-\frac{f''(t)}{1!}(x-t)-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$\psi(t)=f(x)-\varphi(t)-(x-t)^pQ(x)$, где $Q(x)=\frac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p}$.

Пусть $x_0 \le t \le x$. Проверим выполнение условий теоремы Ролля. Функция $\psi(t)$ непрерывна как разность непрерывных функций. Она дифференцируема и $\psi'(t) = -\varphi'(t) + p(x-t)^{p-1}Q(x)$. Найдем значения этой функции на концах отрезка $[x_0, x]$:

$$\psi(x_0) = f(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)^p \frac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p} = r_{n+1}(x) - r_{n+1}(x) = 0,$$

$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) = f(x) - f(x) = 0$. Применим теорему Ролля: существует точка $c \in (x_0, x)$ такая, что $\psi'(c) = 0$, то есть

$-\varphi'(c) + p(x-c)^{p-1}Q(x) = 0$, откуда $Q(x) = \dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}$. Тогда

$\dfrac{r_{n+1}(x)}{(x-x_0)^p} = \dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}$. Отсюда $r_{n+1}(x) = \dfrac{\varphi'(c)}{p(x-c)^{p-1}}(x-x_0)^p$,

$$r_{n+1}(x) = \left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^n \cdot \frac{(x-x_0)^p}{(x-c)^{p-1}}.$$

Запишем по другому остаточный член: $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$, тогда форма Лагранжа остаточного члена принимает вид:

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

а форма Коши: $r_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$. Теорема доказана.

Частный случай, когда $x_0 = 0$, называется формулой Маклорена.

Пример. Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ – многочлен степени n.

Тогда $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+2)}(x) = \ldots = 0$ и формула Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

то есть $r_{n+1}(x) = 0$.

Пусть $f(x)=x^3+2x^2-x+1$, $x_0=1$. Тогда $f'(x)=3x^2+4x-1$, $f''(x)=6x+4$, $f'''(x)=6$. Вычислим $f(1)=3$, $f'(1)=6$, $f''(1)=10$. Следовательно, $f(x)=3+6(x-1)+5(x-1)^2+(x-1)^3$.

Задача о разложении функции в ряд Тейлора

Пусть функция $f(x)$ является суммой сходящегося степенного ряда, то есть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots$.

Ряд сходится при $|x-x_0|<R$. Внутри интервала сходимости сумма ряда имеет производные любого порядка, которые можно находить путем почленного дифференцирования:

$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots,$

$f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+\ldots,$

$f'''(x)=3\cdot 2\cdot 1a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4(x-x_0)+\ldots,$

$\ldots$

$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(x-x_0)+\ldots$.

Подставим вместо $x=x_0$, получим $f(x_0)=a_0$, $f'(x_0)=a_1$, $f''(x_0)=2!a_2$, $f'''(x_0)=3!a_3,\ldots, f^{(n)}(x_0)=n!a_n$. В дальнейшем считаем, что 0!=1, $f^{(0)}(x)=f(x)$. Тогда $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка.

Составим ряд: $f(x_0)+\dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$. Этот ряд называется рядом Тейлора функции $f(x)$. В частном случае, когда $x_0=0$, его называют рядом Маклорена. Таким образом, доказана

Теорема 8.2. Если функция $f(x)$ есть сумма степенного ряда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, то есть этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.

Выясним, всегда ли ряд Тейлора сходится. Покажем, что не всегда.
По формуле Тейлора имеем

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$+r_{n+1}(x)$. Первые n+1 слагаемые представляют собой (n+1)-ую частичную сумму ряда. Ряд Тейлора будет сходиться к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)-S_{n+1}(x)=r_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.
Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 8.3. Для того чтобы ряд Тейлора сходился к функции необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора $r_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Приведем пример функции, для которой ряд Тейлора к ней не сходится. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{если} \quad x=0. \end{cases}$$

Докажем, что все производные в точке $x=0$ обращаются в нуль.

Пусть $x\neq 0$, тогда $f'(x)=2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}$,

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

То есть $f'(0)=0$. Далее

$$f''(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(\Delta x)^{-3}e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}-0}{\Delta x}=\left(\frac{1}{\Delta x}=t\right)=$$

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{t\to\infty}\frac{4t^3}{2te^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{2te^{t^2}}=4\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{t^2}}=0.$$

Мы получили, что $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$. Если использовать тот факт, что $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^n}{e^{t^2}}=0$, то можно доказать, что любая производная в нуле равна нулю и все коэффициенты ряда Тейлора равны нулю. Если бы ряд Тейлора сходился к функции в какой-нибудь точке $x\neq 0$, то $f(x)=0$, а у нас $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0$. То есть ряд Тейлора ни в какой точке не сходится к функции.

Рассмотрим разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

Разложение функции $y=e^x$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции: $y'=y''=\ldots=y^{(n)}=e^x$. Тогда $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{1}{n!}$ и ряд Тейлора принимает вид:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Найдем область сходимости ряда:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$, то есть ряд сходится при всех x. Отсюда, в частности, следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}=0$.

Докажем, что ряд Маклорена сходится к функции $y=e^x$. Воспользуемся формулой Маклорена:

$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$, $\left|\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|=\dfrac{|x|^{n+1}e^{\theta x}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, мы доказали, что $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Разложение функций $y=\sin x$, $y=\cos x$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции $y=\sin x$:

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,\ y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$y^{(n)}(0)=\sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$. Если $n=2k$, то $y^{(2k)}(0)=\sin(\pi k)=0$, если $n=2k+1$, то $y^{(2k+1)}(0)=\sin\left(\pi k+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\pi k=(-1)^k$. Далее, так как $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$, то находим $a_{2k}=0$, $a_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$. Поэтому,

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Найдем область сходимости ряда:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+2)(2n+3)=\infty$, то есть ряд сходится при всех *x*.

Докажем, что ряд Маклорена сходится к функции $y=\sin x$. Оценим остаточный член: $r_{n+1}(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\sin\left(\theta x+\dfrac{\pi(n+1)}{2}\right)\cdot\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$\left|r_{n+1}(x)\right|=\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$. Таким образом, мы доказали, что $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ для $\forall x\in\boldsymbol{R}$.

Продифференцируем левую и правую части предыдущего равенства, получим:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\ \text{для}\ \forall x\in\boldsymbol{R}.$$

Пример. Вычислить $\cos 1$ с точностью до 0,001.

$\cos 1=1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!}+\dfrac{1}{8!}-\ldots=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{720}+r$, причем $|r|<\dfrac{1}{8!}$. Тогда

$\cos 1 \approx 1 - 0{,}5 + 0{,}042 = 0{,}542 \pm 0{,}001.$

Разложение логарифмической функции $y = \ln(1+x)$ в ряд Маклорена

Найдем производные функции

$y' = (1+x)^{-1}$, $y'' = -(1+x)^{-2}$, $y''' = 2\cdot 1(1+x)^{-3}$, $y^{(4)} = -3\cdot 2\cdot 1(1+x)^{-4}$,

$\ldots$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$. Тогда $a_n = \dfrac{y^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$,

$a_0 = \ln 1 = 0$. То есть

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n .$$

Выясним, где ряд сходится:

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$. При $x = 1$ получаем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, который сходится по признаку Лейбница. При $x = -1$ получаем ряд $-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \ldots - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \ldots = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится. Следовательно, область сходимости $(-1;1]$.

Докажем, что на всей области он сходится к функции $y = \ln(1+x)$. Найдем остаточный член:

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!(1+\theta x)^{-(n+1)}x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|r_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{n+1}\left(\frac{|x|}{|1+\theta x|}\right)^{n+1}.$$

Нужно доказать, что $\left(\dfrac{|x|}{|1+\theta x|}\right)^{n+1}$ ограничена.

Если $0 \le x \le 1$, то $\frac{|x|}{|1+\theta x|} \le 1$ и, значит, $r_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. То есть на этом промежутке мы доказали, что ряд сходится к функции.

Пусть $-1 < x < 0$. Воспользуемся формулой Коши для остаточного члена:

$$r_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!(1+\theta x)^{-(n+1)}(1-\theta)x^{n+1}}{n!},$$

$$\left|r_{n+1}(x)\right| = \frac{(1-\theta)^n |x|^n}{|1+\theta x|^n} \cdot \frac{|x|}{|1+\theta x|} \le \left|\frac{(1-\theta)|x|}{1+\theta x}\right| \cdot \frac{|x|}{|1+\theta x|}.$$

При $-1 < x < 0$ $\frac{(1-\theta)|x|}{1+\theta x} \le \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1$, так как $1+\theta x > 1-\theta$, поэтому $r_{n+1}(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \quad \text{при}$$

$x \in (-1;1]$.

Примеры. 1) Разложить функцию $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд по степеням x и указать область сходимости.

Имеем $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$ при $-1 < -x \le 1$, то есть $-1 \le x < 1$. Тогда $y = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots =$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ при } -1 < -x < 1.$$

2) Вычислить приближенно $\ln 3$.

Пусть $\ln 3 = \ln\frac{1+x}{1-x}$, тогда $\frac{1+x}{1-x} = 3$, $1+x = 3-3x$, $4x = 2$, $x = \frac{1}{2}$, следовательно, $\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8 \cdot 3} + \frac{1}{32 \cdot 5} + \frac{1}{128 \cdot 7} + \ldots\right) =$

$$= 2(0{,}5 + 0{,}042 + 0{,}00625 + 0{,}0011 + \ldots) \approx 1{,}099.$$

Биномиальный ряд

Рассмотрим функцию $y=(1+x)^{\alpha}$. Найдем ее производные:

$y'=\alpha(1+x)^{\alpha-1}, y''=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, y'''=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}\ldots,$

$y^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Тогда

$$a_n=\frac{y^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Пусть $\alpha=m$, где $m-$натуральное число. Тогда $y^{(m+1)}=y^{(m+2)}=\ldots 0$.
В этом случае формула Тейлора дает точную формулу:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots+x^m.$$

Пусть $\alpha-$ ненатуральное число. Получим биномиальный ряд

$(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$. Выясним, где он сходится.
Найдем радиус сходимости:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|}=1.$$

Биномиальный ряд сходится при любом α и $|x|<1$. На концах исследовать не будем, так как это зависит от α.

Докажем, что биномиальный ряд сходится к функции $y=(1+x)^{\alpha}$. Оценим остаток ряда в форме Коши:

$$|r_{n+1}(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)x^{n+1}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x^n\right|\cdot|\alpha|\cdot|x|\cdot|1+\theta x|^{\alpha-1}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n.$$

Заметим, что $\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)}{n!}x^n\right|\to 0$ при $n\to\infty$ и $|x|<1$ как общий член ряда с показателем $\alpha-1$. Докажем, что остальные сомножители ограничены, тогда ряд будет сходиться к функции. Имеем

$|\alpha|\cdot|x|\cdot|1+\theta x|^{\alpha-1}\le C$, $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\le\left|\frac{1-\theta}{1-\theta}\right|^n=1$. Таким образом,

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \text{ при } |x|<1.$$

Применение степенных рядов для приближенных вычислений

Пусть число A представлено в виде ряда $A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$. Взяв конечное число слагаемых, можно приближенно найти A: $A\approx a_1$, $A\approx a_1+a_2$, $A\approx a_1+a_2+a_3,\ldots$. Нужно научиться оценивать ошибку, беря конечное число слагаемых.

Пусть $A=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+r_{n+1}$. Нужно оценить $|r_{n+1}|$. Легко оценивается остаток для рядов Лейбница: $|r_{n+1}|\le|a_{n+1}|$. Остаток можно оценить, используя формулу Тейлора.

Примеры. 1) Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Имеем $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$, $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$,

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3!\cdot 3}+\frac{x^5}{5!\cdot 5}-\frac{x^7}{7!\cdot 7}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3!\cdot 3}+\frac{1}{5!\cdot 5}-\frac{1}{7!\cdot 7}+\ldots=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+\ldots.$$

Так как $\frac{1}{35280}<0{,}001$, то $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx=1-0{,}0556+0{,}0017=0{,}946\pm 0{,}001$.

2) Разложить в ряд Тейлора функцию $y=arctg\, x$ и вычислить приближенно π.

Найдем

$$y'=(arctg\, x)'=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots,$$

$|x|<1$. Тогда

$$arctg\, x=\int_0^x (arctg\, t)'dt=\int_0^x\left(1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^n t^{2n}+\ldots\right)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots \text{ при } |x|<1.$$

Пусть $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7+\ldots=$

$=0{,}57735-0{,}06415+0{,}01283-0{,}00305+r_5$, где $r_5<\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^9$.

Тогда $\frac{\pi}{6}\approx 0{,}52298$, а $\pi\approx 3{,}13788$.

3)Вычислить приближенно e.

Имеем $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\ldots=$$

$$=2+0{,}5+0{,}166667+0{,}041667+0{,}008333+0{,}001389+0{,}000198+$$
$$+0{,}000025+0{,}000003+r_{10}.$$

$e\approx 2{,}718282.$

10. ПОНЯТИЕ О РЯДЕ ФУРЬЕ. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Пусть функция $y=f(x)$ является периодической функцией с периодом $T\neq 0$, то есть $f(x+T)=f(x)$ для всех x из области определения функции. Примерами таких функций являются тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\sin nx$, $\cos nx$,… Эти функции имеют основной период 2π.

Периодическими функциями с периодом 2π будут функции: $\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos x+b_1\sin x\right)+\ldots+\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=T_n(x)$. Постараемся любую функцию приблизить к функции вида $T_n(x)$, которая называется тригонометрическим многочленом.

Рассмотрим ряд $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$. Он называется тригонометрическим рядом. Предположим, что он сходится к некоторой функции $S(x)$, тогда $S(x)$ будет периодической функцией с периодом

2π. Предположим, что этот ряд сходится равномерно на отрезке $[-\pi;\pi]$. Найдем коэффициенты ряда. Для этого вычислим

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)dx.$$

Известно, что равномерно сходящиеся ряды можно почленно интегрировать. Получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = \frac{a_0}{2} x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right).$$ Далее,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0.$$

Следовательно, $\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx = a_0 \cdot \pi \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx$.

Найдем следующие интегралы:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot \cos mxdx = (n \neq m) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+m}\sin(n+m)x + \frac{1}{n-m}\sin(n-m)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cdot \sin mxdx = (n \neq m) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-m}\sin(n-m)x - \frac{1}{n+m}\sin(n+m)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cdot \sin mxdx = (n \neq m) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin(n+m)x + \cos(m-n)x\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n+m}\cos(n+m)x-\frac{1}{m-n}\cos(m-n)x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Умножим равенство $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ (6)

на $\cos mx$, $m\geq 1$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos mxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mxdx\right),$$

$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos mxdx=a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mxdx=\pi a_m$. Отсюда $a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\cos mxdx$, $m=0,1,2,\ldots$.

Умножим обе части равенства (6) на $\sin mx$, $m\geq 1$ и проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π, получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\sin mxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\sin mxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mxdx\right),$$

$\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\sin mxdx=b_m\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mxdx=\pi b_m$. Отсюда $b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(x)\sin mxdx$, $m=1,2,\ldots$. Таким образом, доказана

Теорема 10.1. Предположим, что функция $y=f(x)$ представима в виде суммы равномерно сходящегося тригонометрического ряда:

$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$, тогда его коэффициенты находятся по формулам:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=0,1,2,\ldots \text{ и } b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,\ n=1,2,\ldots \quad (7)$$

Предположим, что у нас есть периодическая функция с периодом 2π и что она абсолютно интегрируема, тогда по формулам (7) найдем коэффициенты a_n и b_n. Полученный ряд $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ называется **рядом Фурье** для функции $y=f(x)$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $y=x$ с периодом 2π, заданную на промежутке $(-\pi;\pi]$ (рис.1).

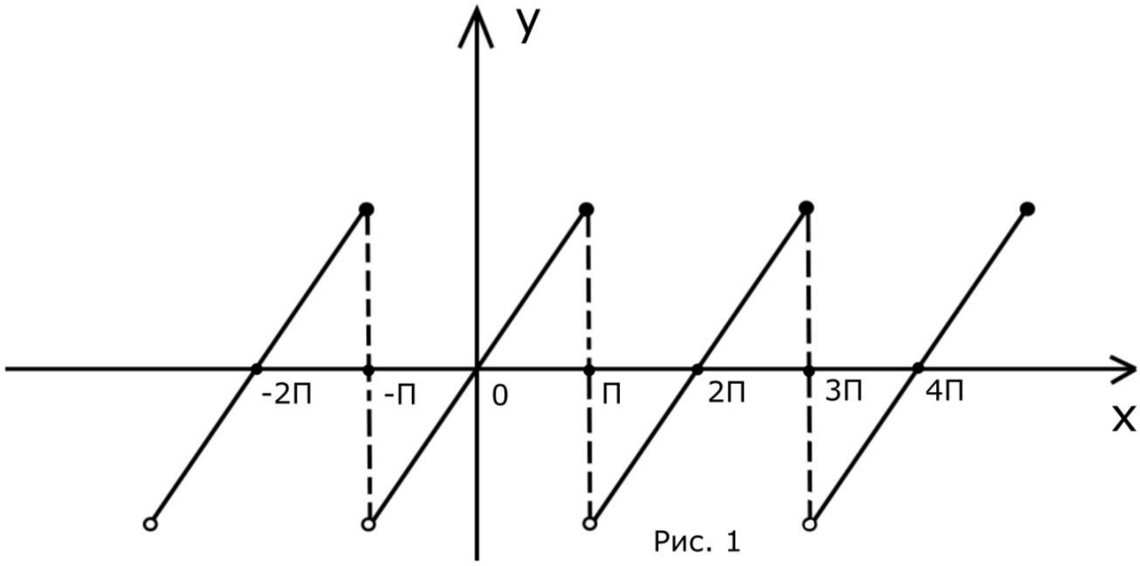

Рис. 1

Решение. По формулам (7) находим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\,dx=\left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\cos nx\,dx\\ du=dx & v=\dfrac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x}{n}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=\left.\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx & v=-\dfrac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x}{n}\cos nx\right|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n-\frac{\pi}{n}\cos\pi n+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_{-\pi}^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos\pi n=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Таким образом, получаем ряд:

$$y = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right).$$

Одно замечание о разложении периодической функции в ряд Фурье

Отметим следующее свойство периодической функции $y = f(x)$ с периодом 2π:

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int\limits_{l}^{l+2\pi} f(x)dx$ какого бы ни было число *l*.

Действительно, так как $f(t-2\pi) = f(t)$, то, полагая $x = t-2\pi$, можем написать при любых *c* и *d*:

$$\int\limits_{c}^{d} f(x)dx = \int\limits_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(t-2\pi)dt = \int\limits_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(t)dt = \int\limits_{c+2\pi}^{d+2\pi} f(x)dx.$$

В частности, принимая $c = -\pi$, *d*=*l*, получим:

$\int\limits_{-\pi}^{l} f(x)dx = \int\limits_{\pi}^{l+2\pi} f(x)dx$, поэтому $\int\limits_{l}^{l+2\pi} f(x)dx = \int\limits_{l}^{-\pi} f(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx +$

$$+ \int\limits_{\pi}^{l+2\pi} f(x)dx = -\int\limits_{-\pi}^{l} f(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{l} f(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Указанное свойство означает, что интеграл от периодической функции $y = f(x)$ по любому отрезку, длина которого равна периоду, имеет всегда одно и тоже значение. Этот факт легко иллюстрируется и геометрически: площади, заштрихованные на рисунке 2 равны.

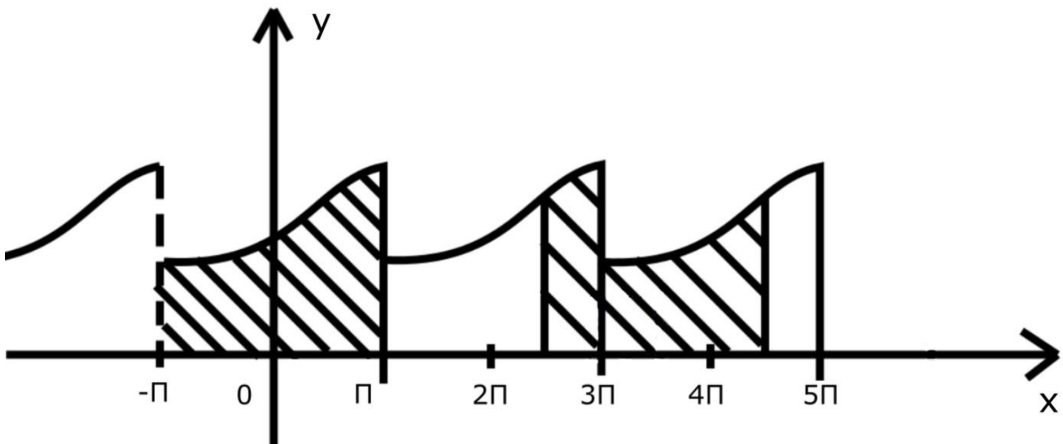

Рис. 2

Из доказанного свойство следует, что при вычислении коэффициентов Фурье можно заменить промежуток интегрирования $(-\pi;\pi)$ промежутком $(l;l+2\pi)$, то есть можно положить

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{l}^{l+2\pi} f(x)\cos nx dx,\ n=0,1,2,\dots, b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{l}^{l+2\pi} f(x)\sin nx dx,\ n=1,2,\dots, \quad (8)$$

где l – любое число.

Это следует из того, что функция $y = f(x)$ является, по условию, периодической с периодом 2π, следовательно, и функции $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ являются периодическими с периодом 2π.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ с периодом 2π, заданную на промежутке $(0;2\pi]$ (рис.3).

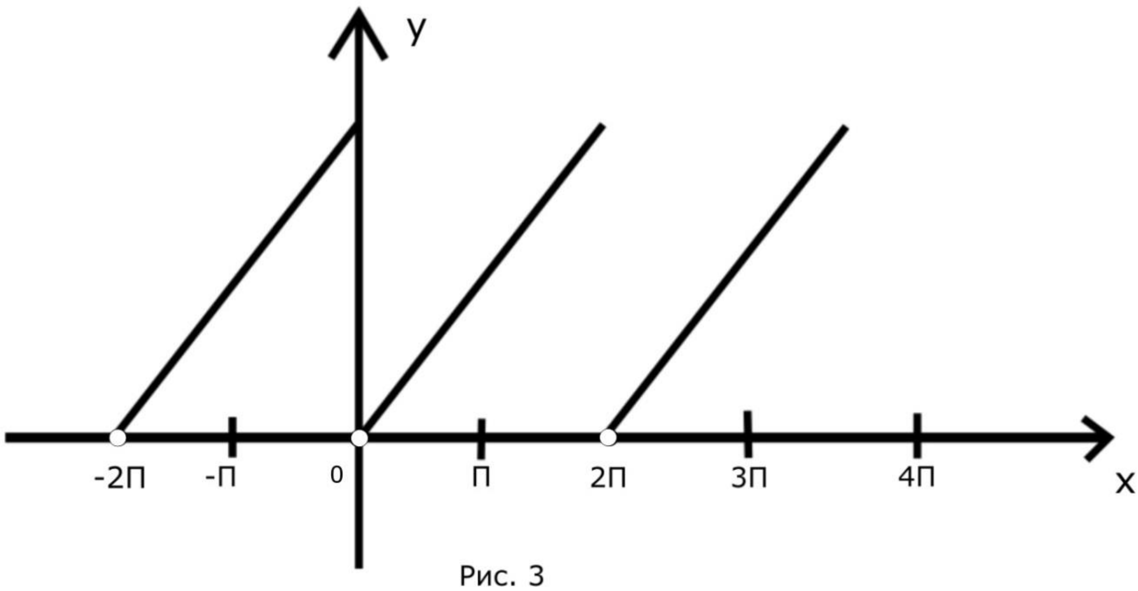

Рис. 3

Решение. На отрезке $[-\pi;\pi]$ эта функция задается двумя формулами:

$$f(x) = \begin{cases} x+2\pi, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Для разложения в ряд Фурье воспользуемся формулами (8), положив в них $l=0$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}xdx=\left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_0^{2\pi}=\frac{4\pi^2}{2\pi}=2\pi\,,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\cos nx\,dx\\ du=dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x}{n}\sin nx\right|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=\left.\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\right|_0^{2\pi}=0\,,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin nx\,dx\\ du=dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x}{n}\cos nx\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos 2\pi n+\left.\frac{1}{n^2}\sin nx\right|_0^{2\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{n}\cos 2\pi n=-\frac{2}{n}\,.$$

Таким образом, получаем ряд:

$$f(x)=\pi-2\sin x-\sin 2x-\frac{2}{3}\sin 3x-\ldots.$$

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть функция $y=f(x)$ с периодом 2π разложена в ряд Фурье: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Мы доказали, что коэффициенты находятся по формулам (7).

Лемма. Если функция $F(x)-$четная, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=2\int\limits_0^{\pi}F(x)dx$, если функция $F(x)-$нечетная, то $\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(x)dx=0$.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \int\limits_{-\pi}^{0} F(x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} F(x)dx = \begin{bmatrix} x=-t \\ dx=-dt \end{bmatrix} = -\int\limits_{\pi}^{0} F(-t)dt + \int\limits_{0}^{\pi} F(x)dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} F(-x)dx + \int\limits_{0}^{\pi} F(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} \left(F(x)+F(-x)\right)dx.$$

Если $F(x)-$четная функция, то $F(-x)=F(x)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} F(x)dx$.

Если $F(x)-$нечетная функция, то $F(-x)=-F(x)$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = 0$. Лемма доказана.

Предположим, что $f(x)-$четная функция, тогда $f(x)\cdot\cos nx-$четная функция, а $f(x)\cdot\sin nx-$нечетная функция. Поэтому из леммы вытекает

Теорема 10.2. Если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом 2π и четная, то для нее $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $n=0,1,2,\ldots$ и $b_n=0$, $n=1,2,\ldots$.

Предположим, что $f(x)-$нечетная функция, тогда $f(x)\cdot\cos nx-$нечетная функция, а $f(x)\cdot\sin nx-$четная функция.

Теорема 10.3. Если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом 2π и нечетная, то для нее $a_n=0$, $n=0,1,2,\ldots$ и $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx$, $n=1,2,\ldots$

В задачах иногда требуется разложить в ряд Фурье функцию, заданную не на всем отрезке $[-\pi;\pi]$, а на его части. Тогда функцию мы продолжаем произвольным образом на весь отрезок и ищем разложение в ряд Фурье (рис.4).

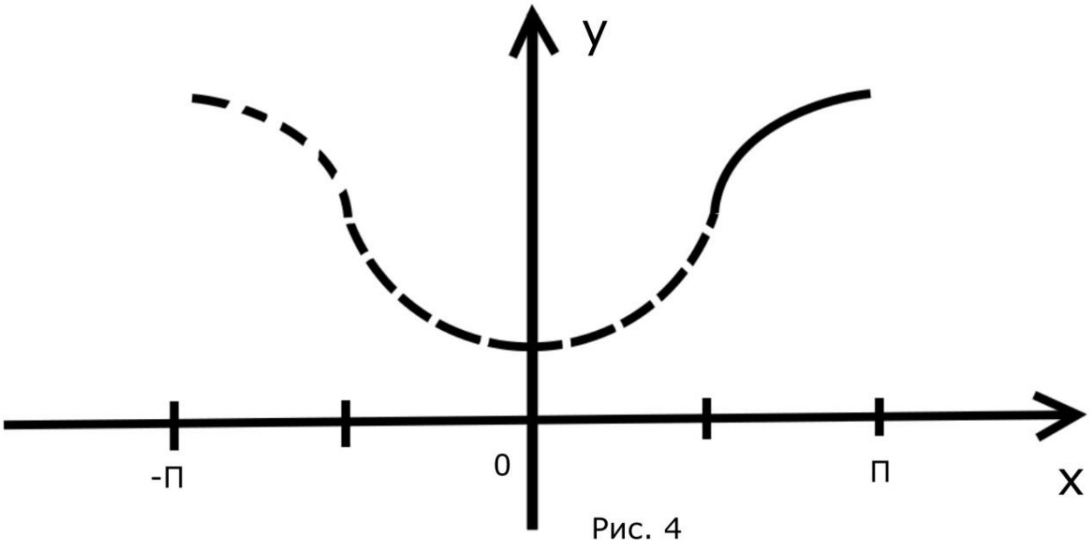

Рис. 4

Предположим, что функция задана на отрезке $[0;\pi]$, тогда наиболее удобно продолжить ее либо по четной функции, либо по нечетной (рис.5).

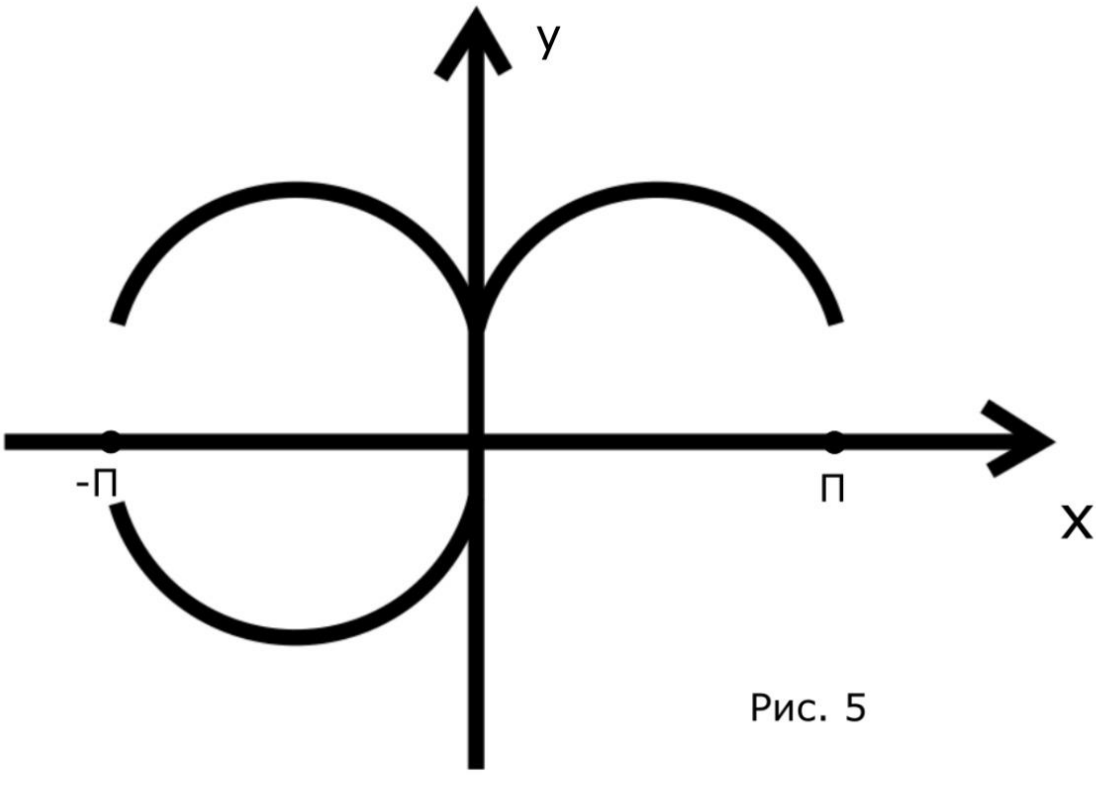

Рис. 5

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|\sin x|, x\in[-\pi;\pi]$, периодическую с периодом 2π (рис.6). Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда $S=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$.

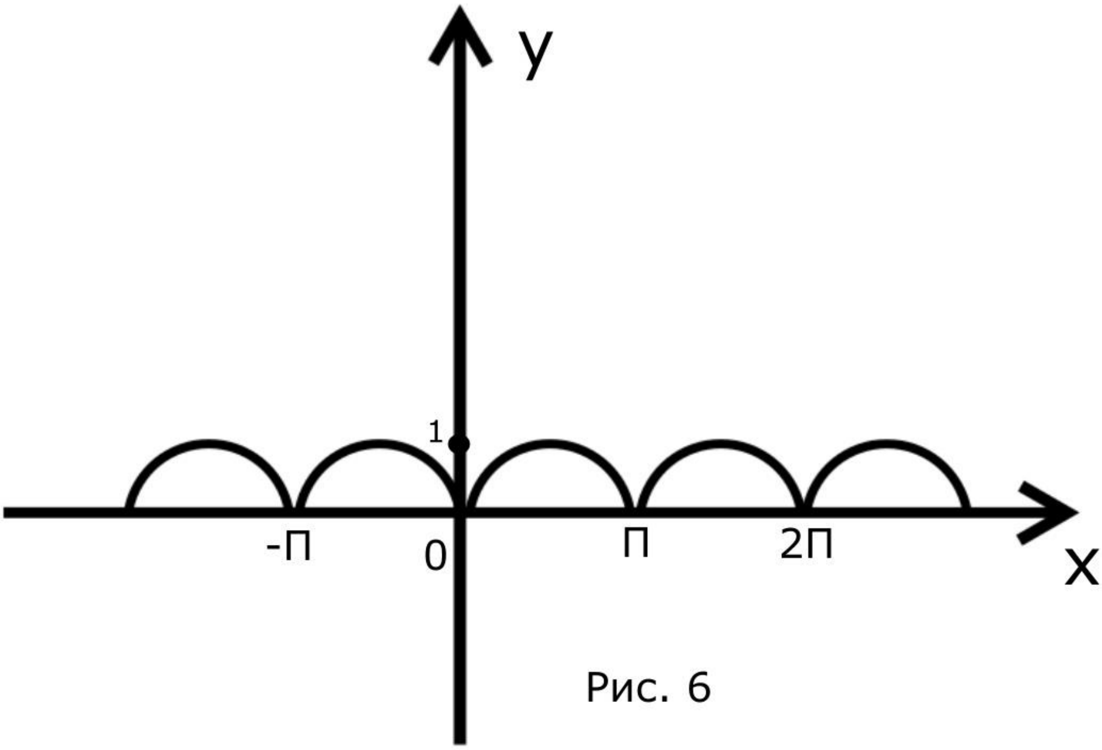

Рис. 6

Решение. Данная функция четная, поэтому все $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$. На отрезке $[0; \pi]$ функция определяется формулой $f(x) = \sin x$, поэтому

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}\cos(1+n)x - \frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}(\cos(1+n)\pi - 1) - \frac{1}{1-n}(\cos(1-n)\pi - 1)\right).$$

Если $n = 2k$, то $\cos(1 \pm 2k)\pi = -1$, следовательно,

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n}\right) = \frac{2}{\pi(1-n^2)} = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}.$$

Если $n = 2k+1$, $n \neq 1$, то $a_n = 0$. При $n = 1$ полученное выражение для a_n не имеет смысла, поэтому a_1 вычисляем отдельно:

$a_1=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin x\cdot\cos x dx=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sin 2x dx=-\dfrac{1}{2\pi}\cos 2x\Big|_0^{\pi}=0$. Таким образом,

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\frac{\cos 6x}{35}+\ldots+\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right).$$

При $x=0$ имеем: $0=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\ldots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots\right)$, следовательно, $S=\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots=\dfrac{1}{2}$.

11. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ С ПЕРИОДОМ 2*l*. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ

До сих пор мы рассматривали периодические функции с периодом 2π. Предположим, что $f(x)-$периодическая функция с периодом $2l$. Выясним, какой вид будет иметь ряд Фурье для функции с таким периодом.

Рассмотрим функцию $\varphi(t)=f\left(\dfrac{l}{\pi}\cdot t\right)$. Проверим, что $\varphi(t)-$ периодическая с периодом 2π. Действительно,

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Следовательно, $\varphi(t)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right)$, где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos nt\,dt,\ n=0,1,2,\ldots \text{ и } b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin nt\,dt,\ n=1,2,\ldots.$$

Сделаем обратную замену: $x=\dfrac{l}{\pi}t$, $t=\dfrac{\pi}{l}x$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{l}x\right)=f(x)$, тогда

$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{\pi n}{l}x+b_n\sin\dfrac{\pi n}{l}x\right)$. Найдем a_n и b_n:

$$a_n = \begin{bmatrix} t = \frac{\pi}{l}x, \quad dt = \frac{\pi}{l}dx \\ npu \quad t = -\pi \quad x = -l \\ npu \quad t = \pi \quad x = l \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} \varphi\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\frac{\pi}{l}dx =$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \ n = 0,1,2,\ldots \text{ и } b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx, \ n = 1,2,\ldots.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом $2l$, которая на отрезке $[-l;l]$ задана равенством $f(x) = |x|$ (рис.7).

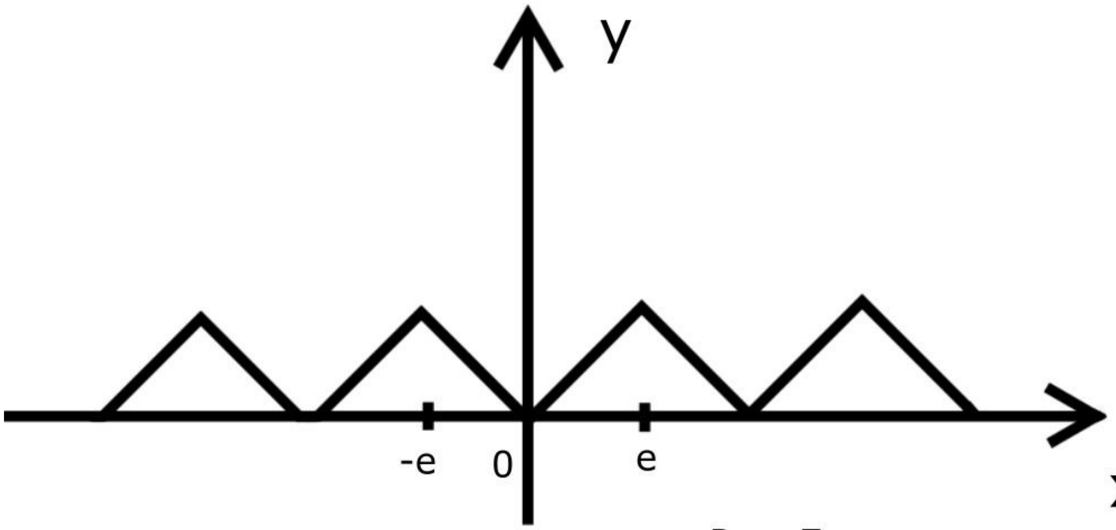

Рис. 7

Решение. Данная функция четная, поэтому $b_n = 0$ $n = 1,2,\ldots$. Вычислим

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = \left.\frac{x^2}{l}\right|_0^l = l,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx \\ du = dx & v = \frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{2}{l}\left(x\cdot\frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\Bigg|_0^l-\int_0^l\frac{l}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx\right)=\frac{2}{l}\cdot\frac{l^2}{\pi^2 n^2}\cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\Bigg|_0^l=$$

$$=\frac{2l}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n-1)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4l}{\pi^2 n^2}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Следовательно, $|x|=\dfrac{l}{2}-\dfrac{4l}{\pi^2}\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{l}x}{1}+\dfrac{\cos\frac{3\pi}{l}x}{3^2}+\ldots+\dfrac{\cos\frac{(2k+1)\pi}{l}x}{(2k+1)^2}+\ldots\right).$

Интеграл Дирихле

Поставим вопрос: какими свойствами должна обладать функция, чтобы построенный для нее ряд Фурье сходился и чтобы сумма построенного ряда Фурье равнялась значениям данной функции в соответствующих точках?

Выведем формулу, выражающую n-ую частичную сумму ряда Фурье через некоторый интеграл. Пусть функция $f(x)-$ периодическая с периодом 2π. Рассмотрим n-ую частичную сумму ее ряда Фурье:

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\cdot\cos kxdt+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\cdot\sin kxdt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt-kx)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\cos(t-x)+\cos 2(t-x)+\ldots+\cos n(t-x)\right)dt.$$

Обозначим $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=A_n$. Найдем

$$2A_n\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2}+\ldots+\sin\left(n\alpha+\frac{\alpha}{2}\right)-\sin\left(n\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}.$$

Следовательно, $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Тогда $S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(t-x)\right)}{2\sin\frac{t-x}{2}}dt=\begin{bmatrix}t-x=\alpha\\ dt=d\alpha\end{bmatrix}=$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha.$$

Подынтегральная функция будет периодической с периодом 2π, поэтому интегралы по любому отрезку длиной 2π равны между собой:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha)\cdot\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha.$$

Интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, называется **интегралом Дирихле**. Положим в этой формуле $f(x)\equiv 1$, тогда

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx=2,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0,\quad n=1,2,\ldots,$$

следовательно, $S_n(x)\equiv 1$ при любом n и мы получаем тождество:

$$1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha.$$

Стремление к нулю коэффициентов ряда Фурье

Лемма. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и на интервале (a,b) имеет ограниченную непрерывную производную, тогда

$\int\limits_a^b f(x)\cos nxdx \to 0$, $\int\limits_a^b f(x)\sin nxdx \to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\cos nxdx = \begin{bmatrix} u=f(x) & dv=\cos nxdx \\ du=f'(x)dx & v=\frac{1}{n}\sin nx \end{bmatrix} = f(x)\cdot\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_a^b -$$

$$-\int\limits_a^b f'(x)\cdot\frac{\sin nx}{n}dx.$$

Так как функция интегрируема, то она ограничена, то есть $|f(x)|\le M$, по условию $|f'(x)|\le K$, поэтому $\left|\int\limits_a^b f(x)\cos nxdx\right| \le \frac{2M}{n}+\frac{K(b-a)}{n}$.

Теорема 11.1. Пусть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π такова, что отрезок от $-\pi$ до π можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых функция интегрируема и имеет непрерывную ограниченную производную. Тогда коэффициенты ряда Фурье этой функции $a_n, b_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Имеем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\pi}\int\limits_{a_i}^{b_i} f(x)\cos nx\,dx.$$

На $[a_i,b_i]$ выполнены условия предыдущей леммы. Отсюда и из леммы следует утверждение теоремы.

Сходимость ряда Фурье к кусочно-гладкой функции

Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом 2π и удовлетворяет следующим условиям:

1) отрезок $[-\pi;\pi]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция имеет ограниченную непрерывную производную;

2) если x_0 – точка разрыва функции, то она будет точкой разрыва первого рода, то есть существуют конечные пределы слева $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 -)$ и справа $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0 +)$, то

$$f(x) = \frac{f(x_0 -) + f(x_0 +)}{2} \lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 -).$$

Такую функцию будем называть кусочно-гладкой.

Теорема 11.2. Если периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π является кусочно-гладкой, то ее ряд Фурье сходится к $f(x)$ в любой точке x.

Доказательство. Надо доказать, в любой точке x $\left|S_n(x) - f(x)\right| \to 0$ при $n \to \infty$, где $S_n(x) -$ n-я частичная сумма ряда Фурье.

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha + \int_{0}^{\pi} f(x+\alpha) \cdot \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha = -z \\ d\alpha = -dz \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha + \int_{0}^{\pi} f(x-z) \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\left(-\frac{z}{2}\right)\right)}{\sin\left(-\frac{z}{2}\right)} (-dz) \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi} f(x+\alpha) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} d\alpha + \int_{0}^{\pi} f(x-z) \cdot \frac{\sin\left((2n+1)\cdot\frac{z}{2}\right)}{\sin\frac{z}{2}} dz \right) =$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha = z\\ d\alpha = dz\end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\right)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha .$$

Положим в этой формуле $f(x)\equiv 1$, получим

$$1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}2\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha .$$

Умножим обе части на $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}2f(x)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha \text{, следовательно,}$$

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2f(x)\right)\frac{\sin\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha .$$

Интеграл, стоящий в правой части, разобьем на два:

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\ldots+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\ldots=I_1+I_2,\text{ где } \delta>0 .$$

Имеем $\left|S_n(x)-f(x)\right|\le\left|I_1\right|+\left|I_2\right|$ (*). Рассмотрим разность $f(x+\alpha)-f(x+0)$. Выберем δ настолько малым, что на интервалах $(-\delta;0)$ и $(0;\delta)$ функции $f(x+\alpha)$ и $f(x+0)$ имели непрерывную ограниченную производную. Тогда по формуле Лагранжа получим: $f(x+\alpha)-f(x+0)=\lim\limits_{u\to 0+}\left(f(x+\alpha)-f(x+u)\right)=\lim\limits_{u\to 0+}f'(\xi)(\alpha-u)$. Отсюда, учитывая, что $\left|f'(\xi)\right|\le K$, получим $\left|f(x+\alpha)-f(x+0)\right|\le K\alpha$. Аналогично, $\left|f(x+\alpha)-f(x-0)\right|\le K\alpha$. Следовательно,

$$\left|I_1\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\left(\left|f(x+\alpha)-f(x+0)\right|-\left|f(x-\alpha)-f(x-0)\right|\right)\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}d\alpha\le$$

$\le \dfrac{2K}{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\dfrac{\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}d\alpha = \dfrac{4K}{2\pi}\int\limits_0^{\delta}\dfrac{\alpha/2}{\sin\alpha/2}d\alpha$. Далее, $\dfrac{\alpha/2}{\sin\alpha/2}\to 1$ при $\alpha\to 0$, поэтому можно выбрать δ таким образом, чтобы $\dfrac{\alpha/2}{\sin\alpha/2}\le 2$ при $0<\alpha\le\delta$. Окончательно, $\left|I_1\right|\le\dfrac{8K}{2\pi}\delta$. Выберем δ удовлетворяющее условию $\dfrac{8K}{2\pi}\delta<\dfrac{\varepsilon}{2}$ и зафиксируем. Покажем, что $\left|I_2\right|\to 0$.

$$I_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2f(x)\right)\frac{\sin\left(n\alpha+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2f(x)\right)\frac{\sin n\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos n\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2f(x)\right)\sin n\alpha\, ctg\frac{\alpha}{2}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\left(f(x+\alpha)+f(x-\alpha)-2f(x)\right)\cos n\alpha d\alpha.$$

Функция $ctg\dfrac{\alpha}{2}$ на отрезке $(\delta;\pi]$ непрерывна и имеет непрерывную производную. Функции, стоящие в скобках таковы, что $(\delta;\pi]$ можно разбить на конечное число интервалов, на которых они имеют непрерывные ограниченные производные и сами ограничены. Поэтому существует номер N такой, что $\forall n>N\Rightarrow\left|I_2\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Возвращаясь к неравенству (*), получим $\left|S_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ при $\forall n>N$. Теорема доказана.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. Найти сумму ряда.

1. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{2}{n^2-14n+48}$

2. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{18}{n^2-n-2}$

3. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{18}{n^2-13n+40}$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{16}{n^2+4n+3}$

5. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{4}{n^2-12n+35}$

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{36}{n^2+7n+10}$

7. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{36}{n^2-11n+28}$

8. $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \dfrac{30}{n^2-14n+48}$

9. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{6}{n^2-10n+24}$

10. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{54}{n^2-11n+28}$

11. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{54}{n^2-9n+18}$

12. $\sum\limits_{n=9}^{\infty} \dfrac{36}{n^2-12n+35}$

13. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{8}{n^2-8n+15}$

14. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{72}{n^2-9n+18}$

15. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{72}{n^2-7n+10}$

16. $\sum\limits_{n=8}^{\infty} \dfrac{12}{n^2-10n+24}$

17. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{10}{n^2-6n+8}$

18. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{18}{n^2-7n+10}$

19. $\sum\limits_{n=5}^{\infty} \dfrac{90}{n^2-5n+4}$

20. $\sum\limits_{n=7}^{\infty} \dfrac{60}{n^2-8n+15}$

21. $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \dfrac{12}{n^2-4n+3}$

22. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{36}{n^2-5n+4}$

23. $\sum\limits_{n=6}^{\infty} \dfrac{48}{n^2-6n+8}$

24. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{36}{n^2+n-2}$

25. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{54}{n^2+n-2}$

26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{72}{n^2+6n+8}$

27. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{6}{n^2-4n+3}$

28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{54}{n^2+5n+4}$

29. $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{18}{n^2-n-2}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{72}{n^2+5n+4}$

2. Исследовать на сходимость ряд по первому признаку сравнения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n+3}{\sqrt{n^2-n}}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{n^3}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n+1}{n^2+2}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^2 n}{n(n+1)(n+2)}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2 n}{n^3+5}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(\cos n+3)}{n^2-3}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\sin n}{n}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{n^3(2+\cos \pi n)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n}{n^3+2}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{\sqrt[4]{n^3}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+\cos \pi n)}{2n^2-1}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3+n+2}$

15. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3+\sin n}{\sqrt[3]{n^3-n}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+2}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg^3 n}{n^4+3}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos \pi n)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7+5}}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^4-1}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n(n+2)}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+n}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3-\sin n}{\sqrt[3]{n^3-n}}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5+n}}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\, n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2-\cos n}{\sqrt{n^2-n}}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^3+n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg^2 n}{n(n+1)}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(\sin n+2)}$

3. Исследовать на сходимость ряд по второму признаку сравнения

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n+1}\right)$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \arcsin \frac{n+1}{n^3-2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} arctg \frac{1}{\sqrt{n}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n^2}-1\right)$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+4}} \sin\frac{1}{n+1}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} tg \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} arctg \frac{1}{\sqrt{n-1}}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, tg \frac{n-1}{n^3-1}$

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\dfrac{n^2+3}{n^2-n}$

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}}\sin\dfrac{1}{n-1}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\left(\sqrt{n}-1\right)/n^3}-1\right)$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}+2}\arcsin\dfrac{n+3}{n^2+5}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{2n+3}{n^2(n+1)^2}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n^2+1}{n^2-n+2}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n}\, arctg\,\dfrac{1}{n^3}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin\dfrac{n+3}{(n^2+5)^{5/2}}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{n^3+2}{n^3+1}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$

23. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n^3\, tg^5\,\dfrac{\pi}{n}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)^2$

25. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+2}{\left(\sqrt[3]{n}-1\right)\left(n\sqrt[4]{n^3}-1\right)}$

26. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} tg\,\dfrac{1}{(n-1)\sqrt[7]{n^2+1}}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\dfrac{\pi}{n+1}\right)$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+4}$

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(e^{\sqrt{n}/\left(n^2-1\right)}-1\right)$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$

4. Исследовать на сходимость ряд по признаку Даламбера

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+2}{2^n(n-1)!}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+5}{n!}\sin\dfrac{2}{3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n^2}{(n+2)!}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} arctg \frac{5}{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3}{(n+1)!}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} tg \frac{1}{5^n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{2^n (2n+5)}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n n^2}{n!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n!}{(3n)!}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3^n (n+1)!}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (2n+5)}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n+3}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{n!}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n^2}}{3^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$

5. Исследовать на сходимость ряд по радикальному признаку Коши

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n^2}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{2n+1}\right)^{n^2}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$

11. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{5^n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{n^2}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{2n+1}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n^n}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{3n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+5}\right)^{n^3}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 arctg^n\frac{\pi}{3n}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty}n^4 arctg^{2n}\frac{\pi}{4n}$

6. Исследовать на сходимость ряд по интегральному признаку Коши

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$

2. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(2n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\ln^2(\sqrt{5}n+1)}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}n+1)\ln^2(\sqrt{3}n+1)}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}$

9. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(2n-1)}$

10. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$

12. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+1)\ln^2 n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(2n)}$

14. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}$

15. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n}$

16. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)\ln^2(n/2)}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\ln(n+1)}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+3)\ln n}$

19. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+2)\ln^2 n}$

20. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$

21. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln n}$

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln n}$

25. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n-1)}$

26. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{(n^2-1)\ln n}$

27. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$

28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln(2n)}$

29. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{\ln(3n+1)}}$

30. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$

7. Исследовать на абсолютную или условную сходимость знакочередующийся ряд

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}(n+1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n+3)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(n+1)}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n(n+1)}$

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \ln(\ln n)}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4 - n^2 + 1}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)!}{3^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{5n-1}} tg \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[4]{2n+3}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n+1}(2n+1)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+1}} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{n}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n-1}{n}\right)^n$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n^2+1)}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\ln(2n)}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^n \frac{\pi}{2n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg \frac{1}{n}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n+3}}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot tg \frac{1}{n}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$

8. Вычислить сумму ряда с точностью α

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n^2}$, $\alpha = 0{,}01$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n$, $\alpha = 0{,}01$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha = 0{,}01$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{7^n}$, $\alpha = 0{,}0001$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$, $\alpha = 0{,}001$

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$, $\alpha = 0{,}01$

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha = 0{,}001$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\alpha = 0{,}0001$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}$, $\alpha = 0{,}00001$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n^3(n+1)}$, $\alpha = 0{,}01$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!n!}$, $\alpha = 0{,}001$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$, $\alpha = 0{,}01$

16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha = 0{,}01$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$, $\alpha = 0{,}01$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$, $\alpha = 0{,}001$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2-1)^2}$, $\alpha = 0{,}001$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!}$, $\alpha = 0{,}0001$

21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$, $\alpha = 0{,}0001$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}$, $\alpha = 0{,}00001$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha = 0{,}001$

24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$

25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$, $\alpha = 0{,}001$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{n^2(n+3)}$, $\alpha = 0{,}01$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$, $\alpha=0{,}01$

28. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}$, $\alpha=0{,}001$

29. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}$, $\alpha=0{,}001$

30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3}$, $\alpha=0{,}01$

9. Найти сходимости функционального ряда

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n\left(x^2-6x+13\right)^n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}2^{n/(4-x)}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{n^2}\sin^{3n}x$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n\left(x^2-5x+10\right)^n}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n 2^{n/(x-1)}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}}\sin^{2n}(2x)$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2-4x+6\right)^n$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}8^n n^2\sin^{3n}x$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(x^2-6x+12\right)^n}{4^n(n^2+1)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}tg^{2n}x$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2+1)^n}{2^n(n+1)}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-n/\cos x}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}tg^{n}x$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2\left(x^2+2\right)^n}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n5^{n/(3-x)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^4}\sin^{n}(3x)$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2\left(x^2-4x+5\right)^n}$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 4^{n/(x-2)}$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{n/2}} tg^n x$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x-e)}{n-e}$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^2} \sin^{2n} x$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2x+2)^n}{2^n(n^2+2)}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n/2}}{\sqrt{n}} tg^n(2x)$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} tg^n(2x)$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{n \sin x}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n \sin x}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3 \left(x^2-4x+7\right)^n}$

10. Найти область сходимости степенного ряда

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} (x+3)^{2n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+2)3^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} (x-3)^n$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{(2n-1)4^n}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n9^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^{2n}}{(2n^2-5n)4^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^n} (x+7)^n$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+1)2^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} (x-2)^{2n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{(5n-3)^3} (x-2)^n$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{3n+8}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}(x+6)^n$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n}(x+3)^n$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(3n+1)^3}(x-1)^n$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(3n+1)^3}(x-4)^{2n}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+1)!}(x+4)^{2n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n}(x+2)^n$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n-1)^3}(x-1)^{3n}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}(x+2)^n$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n}(x-3)^n$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n+2)!}(x+1)^{2n}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n^4+1)^2}(x-3)^n$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n}(x+3)^n$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{2n+1}x^{2n}$

11. Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням x и указать область сходимости

1. $f(x)=\frac{9}{20-x-x^2}$

2. $f(x)=\frac{\arcsin x}{x}-1$

3. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$

4. $f(x)=\frac{7}{12-x-x^2}$

5. $f(x)=\ln\left(1-x-x^2\right)$

6. $f(x)=x^2\sqrt{4-3x}$

7. $f(x)=2x\cos^2\frac{x}{2}-x$

8. $f(x)=2x\sin^2\frac{x}{2}-x$

9. $f(x)=\frac{sh2x}{x}-2$

10. $f(x)=(x-1)sh\,x$

11. $f(x)=\frac{7}{12+x-x^2}$

12. $f(x)=\frac{5}{6+x-x^2}$

13. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$

14. $f(x)=x\sqrt[3]{27-2x}$

15. $f(x)=\ln\left(1+x-6x^2\right)$

16. $f(x)=\ln\left(1+x-12x^2\right)$

17. $f(x)=(x-1)\sin 5x$

18. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$

19. $f(x)=\frac{ch3x-1}{x^2}$

20. $f(x)=\frac{arctg\,x}{x}$

21. $f(x)=\frac{6}{8+2x-x^2}$

22. $f(x)=\frac{5}{6-x-x^2}$

23. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$

24. $f(x)=\sqrt[4]{16-5x}$

25. $f(x)=\ln\left(1-x-12x^2\right)$

26. $f(x)=\ln\left(1-x-20x^2\right)$

27. $f(x)=\left(3+e^{-x}\right)^2$

28. $f(x)=\left(2-e^{x}\right)^2$

29. $f(x)=(x-1)ch\,x$

30. $f(x)=\frac{3}{2-x-x^2}$

12. Вычислить интеграл с точностью до 0,001.

1. $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$

2. $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$

3. $\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx$

4. $\int_0^{0,4} \frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$

5. $\int_0^{1} \cos x^2\,dx$

6. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

7. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

8. $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}\,dx$

9. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x} dx$

10. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

11. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+x/5)}{x} dx$

12. $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right) dx$

13. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

14. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

15. $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right) dx$

16. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x} dx$

17. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right) dx$

18. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x} dx$

19. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

20. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$

21. $\int\limits_0^{0,4} e^{-3x^2/4} dx$

22. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$

23. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right) dx$

24. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

25. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

26. $\int\limits_0^{0,5} e^{-3x^2/25} dx$

27. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$

28. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$

29. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

30. $\int\limits_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right) dx$

13. Функцию, определенную на интервале длиной 2π, разложить в тригонометрический ряд Фурье; определить сумму ряда в точках разрыва функции. Построить графики функции $f(x)$ и суммы ряда в области их существования.

1. $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ x-\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ \pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}x+1, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ 1-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}1-x, & -\pi<x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi<x<0,\\ -1, & 0\le x<\pi\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ 2\pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<\pi,\\ x-2\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}\pi-x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ x-\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}\pi, & 0<x<\pi,\\ 2\pi-x, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & 0<x<\pi,\\ x-2\pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0,\\ x-\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi<x<0,\\ x-2\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}x-\pi, & -\pi<x<0,\\ -\pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi<x<0,\\ (x+\pi)/2, & 0\le x<\pi\end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases}(\pi-x)/2, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases}(x-\pi)/2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}(\pi-x)/2, & 0<x<\pi,\\ 0, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}(\pi+x)/2, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ \pi, & 0\le x<\pi\end{cases}$ 30. $f(x)=\begin{cases}(\pi+x)/2, & 0<x<\pi,\\ \pi, & \pi\le x<2\pi\end{cases}$

14. Функцию, заданную на отрезке $[0;l]$, разложить в неполный ряд Фурье:

а) по синусам кратных дуг – для вариантов с нечетными номерами;

б) по косинусам кратных дуг – для вариантов с четными номерами.

Построить графики функции $f(x)$ и суммы соответствующего ряда в области их существования.

1. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1]$
2. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1]$
3. $f(x)=\sin(x/2)$, $x\in[0;\pi]$
4. $f(x)=\sin(x/2)$, $x\in[0;\pi]$
5. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1/2]$
6. $f(x)=\cos\pi x$, $x\in[0;1/2]$
7. $f(x)=\cos 2\pi x$, $x\in[0;1]$
8. $f(x)=\sin 2\pi x$, $x\in[0;1]$
9. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;2]$
10. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;2]$
11. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1/2]$
12. $f(x)=\sin\pi x$, $x\in[0;1/2]$
13. $f(x)=\cos 2\pi x$, $x\in[0;1/2]$
14. $f(x)=\sin 2\pi x$, $x\in[0;1/2]$
15. $f(x)=\cos 3x$, $x\in[0;\pi]$
16. $f(x)=\cos 3x$, $x\in[0;\pi]$
17. $f(x)=\cos(x/2)$, $x\in[0;\pi]$
18. $f(x)=\cos(x/2)$, $x\in[0;\pi]$
19. $f(x)=\sin(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$
20. $f(x)=\sin(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$
21. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$
22. $f(x)=\cos(\pi x/2)$, $x\in[0;1]$
23. $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi/2]$
24. $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi/2]$
25. $f(x)=\cos 3\pi x$, $x\in[0;1]$
26. $f(x)=\sin 3\pi x$, $x\in[0;1]$
27. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$
28. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi/2]$
29. $f(x)=\cos(\pi x/3)$, $x\in[0;3]$
30. $f(x)=\sin(\pi x/3)$, $x\in[0;3]$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «РЯДЫ»

1. Числовые ряды. Определение ряда и суммы ряда. Необходимое условие сходимости ряда.
2. Свойства сходящихся рядов.
3. Признаки сравнения рядов с положительными членами.
4. Признак Даламбера
5. Радикальный признак Коши.
6. Интегральный признак (Коши-Маклорена).
7. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
8. Критерий Коши для последовательностей и рядов. Абсолютно сходящиеся ряды.
9. Функциональные последовательности и ряды. Область сходимости функциональной последовательности и функционального ряда. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда.
10. Критерий Больцано-Коши для функциональной последовательности и функционального ряда. Признак Вейерштрасса.
11. Теоремы о непрерывности предельной функции и суммы функционального ряда.
12. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов.
13. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Формулы для вычисления радиуса сходимости.
14. Дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
15. Формула Тейлора.
16. Задача о разложении функции в ряд Тейлора.
17. Разложение $y = e^x$ в ряд Тейлора.

18. Разложение $y = \sin x$, $y = \cos x$ в ряд Тейлора.

19. Разложение логарифмической функции в ряд Тейлора.

20. Биномиальный ряд.

21. Понятие о ряде Фурье. Вычисление коэффициентов.

22. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных чисел.

23. Разложение в ряд Фурье периодической функции с периодом $2l$.

24. Интеграл Дирихле.

25. Стремление к нулю коэффициентов ряда Фурье.

26. Сходимость ряда Фурье к кусочно-гладкой функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие отражает опыт работы автора со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит раздел высшей математики «Ряды», изучаемый в третьем семестре.

Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала, поэтому в пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты второго курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа : в 2 ч. – М. : Наука, 1974. – Ч. 2.

2. Архипов Г. И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – ISBN 5-7107-8334-X.

3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с. – ISBN 5-02-013925-4.

4. Кузнецов Л. А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие. – 3-е изд., испр. – СПб. : Изд-во Лань, 2005. – 240 с. – ISBN 5-8114-0574-X.

5. Собакин В. П., Трубина О. И., Филинова Е. В. Числовые и функциональные ряды : практикум / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2003. – 56 с. – ISBN 5-89368-443-5.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

РЯДЫ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 20.10.21.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,12. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.