Владимирский государственный университет

Р. Н. Тихомиров

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
## Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, ряды

Учебное пособие

Владимир 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Р. Н. Тихомиров

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
## Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, ряды

Учебное пособие

*Электронное издание*

Владимир 2021

ISBN 978-5-9984-1435-0

УДК 517
ББК 22.161

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института Федеральной службы
исполнения наказаний (ВЮИ ФСИН России)
*А. В. Хорошева*

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры общей и теоретической физики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
*А. А. Мокрова*

**Тихомиров, Р. Н.** МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, ряды [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Р. Н. Тихомиров ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 161 с. – ISBN 978-5-9984-1435-0. – Электрон. дан. (824 Кб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана

Содержит разделы, изучаемые в курсе "Математический анализ": дифференциальное исчисление функций одной переменной, интегральное исчисление функций одной переменной и ряды.

Предназначено для студентов направления подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование. Может быть полезно преподавателям высшей школы.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций с соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 28. Библиогр.: 7 назв.

ISBN 978-5-9984-1435-0

# Оглавление

# ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие посвящено основам математического анализа. В первых параграфах вводятся обозначения, которые применяются при изучении данного раздела математики, а также такие основополагающие понятия как множество и операции над множествами; рассматриваются основные числовые множества (натуральные, целые, рациональные, иррациональные и действительные числа) и их свойства, понятия inf и sup.

Следующая часть пособия посвящена теории предела числовой последовательности, так как понятие предела занимает центральное место среди основных понятий математического анализа. Предельный переход является новым действием по сравнению со школьной математикой. Здесь предел вводится сначала для последовательностей (на бесконечности), а потом для функций (в точке). Довольно подробно рассмотрены свойства пределов и свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин. Понятие предела будет применяться и последующих параграфах посвящённых дифференциальному и интегральному исчислению.

Вводится ещё одно основополагающее понятие – непрерывность функции. Рассмотрены свойства функций непрерывных в точке, на отрезке и приведены основные теоремы о непрерывных на отрезке функциях. Введено определение равномерной непрерывности функции.

Следующие параграфы знакомят читателя с дифференциальным исчислением функций и основными теоремами дифференциального исчисления. Показаны приложения теории для исследования функций и построения графиков. Дифференциальное исчисление имеет широкое применение в физике, экономике и многих других дисциплинах.

Далее рассматриваются неопределённый и определённый интегралы. Приведены необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Перечислены и доказаны их свойства. Определённый интеграл вводится и как площадь криволинейной трапеции, и как путь материальной точки. Введено определение интеграла в смысле Римана. Рассмотрены приложения определённого интеграла такие как длина дуги кривой, площадь поверхности вращения и другие.

Оставшуюся часть пособия занимает теория рядов, которая включает в себя числовые и функциональные ряды, а также их приложения. Здесь числовой ряд представляет собой новую форму числовой последовательности. Изучение числовых рядов подразумевает нахождение суммы ряда и исследование их сходимости. Для функциональных же рассматриваются вопросы, связанные с областью сходимости ряда и свойствами их сумм. Отметим, что функциональные ряды включают в себя степенные и тригонометрические ряды, в частности ряды Тейлора и Фурье. Они часто используются в приближённых вычислениях значений функций и определённых интегралов.

В пособии по всем рассматриваем темам приведены разнообразные примеры и их решения, а также предлагается набор упражнений для самостоятельных занятий.

Изложение имеет целостный характер и может быть использовано всеми желающими для знакомства с данными разделами математического анализа как в плане теории, так и плане вычислительных приложений. Приведённые теория, примеры и задачи позволяют успешно овладеть знаниями в этой области.

# 1. ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Почти все математические тексты используют наряду с обычным языком и ряд специальных символов принятых в этой науке.

## 1.1. Кванторы

$\exists$ – квантор сущствования ,котрый употребляется, когда говорят: есть, существует, найдётся;

$\forall$ – квантор общности употребляется в тех случаях, когда говорят: любой, всякий, каждый;

$\exists!$ – существует и единственный.

Логические утверждения – это такие утверждения, относительно которых можно сказать справедливы они или нет.

$a$, $b$ – логическе утверждения;

$\bar{a}$ – отрицание утверждения $a$;

$a \Rightarrow b$ (импликация) – из утверждения $a$ следует утверждение $b$;

$a \Leftrightarrow b$ – утверждения $a$ и $b$ равносильны;

$a \vee b$ – $a$ или $b$;

$a \wedge b$ – $a$ и $b$.

## 1.2. Множества

**Определение.** *Множество – это совокупность определённых и различных между собой элементов.*

Строгого определения "множества" не существует.

Множества обозначают большими латинскими буквами, элементы маленькими.

Чтобы сказать, что элемент $a$ принадлежит множеству $A$ используют обозначение

$$a \in A,$$

если элемент не принадлежит $A$, то

$$a \notin A.$$

**Подмножество**

**Определение.** *Множество $A$ является подмножеством множества $B$, если из того, что элемент $a \in A$ следует, что $a \in B$:*

$$A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \subset B \;\wedge\; B \subset A.$$

Рассмотрим различные формы записи множеств.
Если множество задано явно и состоит из элементов $a$, $b$, $c$, то

$$A = \{a,\, b,\, c\}.$$

В случае, когда невозможно перечислить все элементы, например, множество $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1,\, 2,\, 3,\; \ldots,\, n,\; \ldots\}\,.$$

Если множество не содержит ни одного элемента, то такое множество называется пустым – $\varnothing$.

Пустое множество является подмножеством любого множества. Таким образом, у всякого множества существует два подмножества – это само множество и пустое множество.

Рассмотрим основные операции над множествами.

1. Объединение множеств $A$ и $B$ – это множество всех таких элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из данных множеств

   $$C = A \cup B = \{x :\; x \in A \;\vee\; x \in B\}\,.$$

   Операция объединения обладает свойствами:

   (a) $A \cup B = B \cup A$ – коммутативность;

   (b) $A \cup (B \cup C)$ – ассоциативность.

2. Пересечение множеств $A$ и $B$ – множество всех такх элементов, каждый из которых принадлежит одновременно $A$ и $B$:

   $$C = A \cap B = \{x :\; x \in A \;\wedge\; x \in B\}\,.$$

   Свойства персечения:

   (a) $A \cap B = B \cap A$;

   (b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Следующий вопрос, котрый возникает при изучении множеств – число элементов.

**Определение.** *Множество A конечное тогда и только тогда, когда оно содержит натуральное число элементов.*

**Определение.** *Множество A бесконечное тогда и только тогда, когда оно не является конечным.*

Примеры бесконечных множеств:

1. $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ – натуральные числа;
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$ – целые числа;
3. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \ m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\}$ – рациональные числа;
4. $\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{Q}\}$ – иррациональные числа;
5. $\mathbb{R}$ – действительные числа.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу* 2.

**Доказательство.** Предположим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью, квадрат которого равен 2. Тогда имеем

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Отсюда следует, что $m^2$ и $m$ – чётное число, то есть $m = 2p$. Подставив $m = 2p$ в равенство, получаем

$$4p^2 = 2n^2 \Rightarrow 2p^2 = n^2,$$

то есть $n^2$ – чётное число или $n = 2q$.

Таким образом, дробь

$$\frac{m}{n} = \frac{2p}{2q}$$

сократима, что противоречит предположению.

$\square$

### Взаимно однозначное соответствие

Пусть на множествах $A$ и $B$ задано соответствие, то есть некоторому элементу $a$ множества $A$ по правилу $f$ ставится в соответствие элемент $b \in B$

$$a \in A \xrightarrow{f} b \in B.$$

Тогда $f$ – взаимно однозначное соответствие, если выполнены следующие условия:

a)
$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow b_1 \neq b_2,$$
то есть двум различным элементам множества $A$ соответствуют два различных элемента множества $B$;

b) для любого элемента множества $B$ существует его прообраз в множестве $A$
$$\forall b \in B \exists a \in A: \ a \xrightarrow{f} b.$$

### Эквивалентность множеств

**Определение.** *Два множества называются эквивалентными, если существует взаимно однозначное соответствие между ними:*

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists f: \ A \to B.$$

**Определение.** *Множество эквивалентное множеству* $\mathbb{N}$ *– натуральных чисел называется счётным, то есть*

$$A \sim \mathbb{N} \Leftrightarrow A \ - \ \textit{счётно}.$$

# 2. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

## 2.1. Абсолютная величина

**Определение.** *Абсолютной величиной (или модулем) $|a|$ числа $a$ называется число, равное $a$, если $a$ положительно, нулю, если $a$ равно нулю и равное $-a$, если $a$ отрицательно:*

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ 0, \text{ если } a = 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля следует утверждение

$$\forall\ a > 0 \quad |x| < a \ \Leftrightarrow\ -a < x < a.$$

Свойства модуля:

1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$;

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$;

4) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

**Доказательство.** Первые два свойства выводятся непосредственно из определения. Остановимся на доказательстве третьего и четвёртого свойства. Воспользуемся определением модуля

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

Складывая приведённые неравенства, получим

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b| \text{ или } |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Покажем справедливость четвёртого свойства. Действительно,

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|,\ |a| \leq |a - b| + |b|,\ |a| - |b| \leq |a - b|,$$

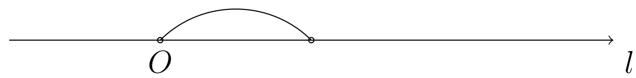
$$|b| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,\ |b| \leq |a - b| + |a|,\ |a| - |b| \geq -|a - b|.$$

Таким образом, из полученных неравенств, следует

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Понятие модуля помогает построить взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и числовой прямой.

Нарисуем некоторую прямую $l$ и зададим на ней направление



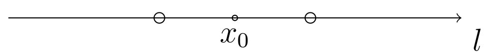

Поставим на ней точку $O$ и зададим масштаб. Тогда любому вещественному числу будем ставить точку следующим образом:

✓ если $a > 0$, то $a \xrightarrow{f} M \in l$, точка $M$ справа от точки $O$, длина отрезка $|OM|$ будет равна числу $a$ в принятом масштабе;

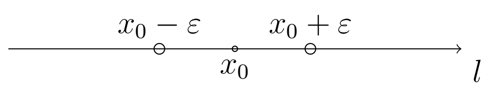
✓ если $a < 0$, то $a \xrightarrow{f} M \in l$, точка $M$ слева от точки $O$, длина отрезка $|OM| = a$;

✓ если $a = 0$, то $a \xrightarrow{f} O$.

Если на прямой $l$ задана точка $x_0$, то любой интервал, который содержит эту точку называется окрестностью




Частным случаем окрестности является $\varepsilon$-окрестность




Для этого интервала равносильны неравенства

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - x_0| < \varepsilon.$$

## 2.2. Точная нижняя и верхняя грани множества

Рассмотрим некоторое множество $E$, которое является подмножеством $\mathbb{R}$ или $E \subset \mathbb{R}$.

**Определение.** *Множество ограничено сверху, если найдется такое вещественное число $b \in \mathbb{R}$, что для любого элемента $x \in E$ справедливо неравенство $x \leq b$:*

$$\exists\ b \in \mathbb{R}:\ \forall x \in E\ x \leq b.$$

**Определение.** *Множество называется ограниченным снизу, если:*

$$\exists\ a \in \mathbb{R}:\ \forall x \in E\ x \geq a.$$

**Определение.** *Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу:*

$$\exists\ a,b \in \mathbb{R}:\ \forall x \in E\ a \leq x \geq b,\ E \subset [a,b].$$

Среди всех чисел, которыми мы можем ограничить данное множество можно выделить одно – точная верхняя грань множества.

**Определение.** *Число $M$ называется точной верхней гранью множества $E$ или коротко $M = \sup E$, если выполнены условия*

– $\forall x \in E,\ x \le M$;

– $\forall \varepsilon > 0\ \exists x^* \in E:\ M - \varepsilon < x^* \le M$.

*Иначе, $M$ – наименьшая из верхних граней.*

Если множество неограничено сверху, то

$$\sup E = +\infty.$$

**Определение.** *Число $m$ называется точной нижней гранью множества или $m = \inf E$, если*

– $\forall x \in E,\ x \ge m$;

– $\forall \varepsilon > 0\ \exists x^* \in E:\ m \le x^* < m + \varepsilon$.

*Другими словами, $m$ – наибольшая из нижних граней.*

## *Задания для самостоятельной работы*

1. Покажите, что $A \subset B \subset C$, если

$$A = \{(x,y): \ |x| + |y| < \delta\}, \quad B = \{(x,y): \ \sqrt{x^2 + y^2} < \delta\},$$

$$C = \{(x,y): \ \max\{|x|,|y|\} < \delta\}.$$

2. Изобразите на координатной плоскости множество $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^2 > 0\}$.

3. Определите множества $A \cap B$, $A \cup B$, если

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < x < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ 1 \leq x \leq 3\}.$$

4. Представьте числа в виде правильных рациональных дробей:

   (a) 1,(2);

   (b) 3,00(3).

5. Докажите, что число $\sqrt{5}$ иррационально.

6. Докажите, что сумма и разность рационального числа $\alpha$ и иррационального числа $\beta$ есть число иррациональное.

7. Найдите все рациональные значения $x$, при которых $y = \sqrt{x^2 + x + 3}$ есть рациональное число.

8. Решите урравнение

$$|-x^2 + 2x - 3| = 1.$$

9. Решите неравенство

$$|x - 2| \geq 1.$$

10. Пусть $n = 999\ldots9$ (2020 девяток). Сколько девяток в десятичной записи числа $n^2$?

# 3. ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

## 3.1. Понятие числовой последовательности

Пусть на множестве натуральных чисел задана некоторая функция, областью значений которой является вещественная прямая

$$\forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{f} a_n \in \mathbb{R}.$$

В этом случае последовательность чисел

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

есть числовая последовательность, $a_n$ – общий член последовательности.

Зная правило, по которому строится последовательность, можно восстановить любой член последовательности.

**Пример.**

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, 2, \ldots;$

$\{2^n\} = 2, 4, \ldots;$

$\{1\} = 1, 1, \ldots.$

## 3.2. Предел последовательности

**Определение.** *Число $A$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N$, что как только $n > N$ будет справедливо неравенство*

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

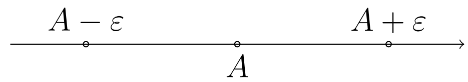
*Коротко это можно записать так*

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{a_n\}$ называют сходящейся, если существует предел этой последовательности и он равен конечному числу.

Свойства пределов числовой последовательности.

1) Предел последовательности есть предельная точка последовательности




Из определения следует, что $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Вне любой $\varepsilon$-окрестности предела $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ находится конечное число элементов последовательности $\{a_n\}$.

2) Если последовательность $\{a_n\}$ – сходится и предел её при $n\to\infty$ равен числу $A$, то этот предел единственен

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Longleftrightarrow \forall B \neq A,\ B \neq \lim_{n\to\infty} a_n.$$

**Доказательство.** Пусть данная последовательность $\{a_n\}$ сходящаяся и предел её равен $A$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмём отличное от $A$ число $B$, $A \neq B$. Тогда по определению предела

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ a_n \in (A-\varepsilon,A+\varepsilon).$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{|B-A|}{3}$ – чтобы $\varepsilon$-окрестности точек не пресекались. Так как вне $(A-\varepsilon,A+\varepsilon)$ лежит конечное число точек

$$a_1, a_2, \ldots, a_N \notin (A-\varepsilon,A+\varepsilon).$$

Тогда интервал $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ содержит конечное число элементов, а значит не может быть пределом

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq B.$$

3) Пусть даны две сходящиеся последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Тогда последовательности

$$\{a_n \pm b_n\},\ \{a_n \cdot b_n\},\ \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}, b_n \neq 0$$

сходятся и справедливы тождества

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

**Доказательство.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, тогда

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N_1:\ n > N_1 \Longrightarrow |a_n - A| < \varepsilon, \tag{$*$}$$

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists N_2 : \ n > N_2 \Longrightarrow |b_n - A| < \varepsilon. \tag{**}$$

Выберем $N = \max\{N_1,N_2\}$. Отсюда $\forall n > N$ справедливы $(*)$ и $(**)$. Запишем

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |a_n - A + b_n - B| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon.$$

4) Предел промежуточной последовательности. Пусть заданы последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $n$-е члены которых связаны неравенством

$$y_n \le x_n \le z_n.$$

Кроме того, последовательности $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же числу $A$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится и её предел равен $A$:

$$y_n \le x_n \le z_n \ \forall n \ \exists \lim_{n\to\infty} y_n = A, \ \lim_{n\to\infty} z_n = A \Longrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

**Доказательство.** Пусть

$$y_n \le x_n \le z_n \quad \exists \lim_{n\to\infty} y_n = A \quad \text{и} \quad \exists \lim_{n\to\infty} z_n = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \ n > N_1 \Longrightarrow |y_n - A| < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < y_n < A_n + \varepsilon, \ n > N_1,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \ n > N_2 \Longrightarrow |z_n - A| < \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < z_n < A + \varepsilon, \ n > N_2.$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда

$$\forall > 0 \ \exists N = \max\{N_1,N_2\} : A - \varepsilon < y_n < x_n < z_n < A + \varepsilon \Longleftrightarrow |x_n - A| < \varepsilon.$$

Отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

## 3.3. Ограниченная последовательность

**Определение.** *Последовательность называется ограниченной, если найдутся такие числа $m$, $M$, что выполнено условие*

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : \ m \le a_n \le M \quad \forall n.$$

Это определение эквивалентно тому, что все элементы последовательности $\{a_n\}$ принадлежат отрезку $a_n \in [m,M]$ $\forall n$.

**Пример.** *Рассмотрим последовательность* $\{a_n\} = \left\{\frac{n+1}{n}\right\}$ *с общим членом* $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. *Видно, что* $1 \leq a_n \leq 2$, *то есть ограничена.*

**Пример.** *Последовательность* $\{b_n\} = \{2^n\}$ *неограничена, так как*

$$\forall K \in R, \quad \exists n: \ |a_n| > K.$$

*Для этого*

$$a_n = 2^n \Longrightarrow \exists n: \ 2^n > K \Longrightarrow n > \log_2 K.$$

**Определение.** *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется бесконечно большой, если для любого сколь угодно большого числа* $M$ *найдётся номер* $N$, *что для всех номеров больших* $N$ *выполнено неравенство* $|a_n| > M$.

Если последовательность бесконечно большая, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Если последовательность бесконечно малая, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

## 3.4. Свойства бесконечно малой и бесконечно большой последовательности

1) Если $\{a_n\}$ – бесконечно малая, а $\{b_n\}$ – ограниченная последовательности, то $\{a_n \cdot b_n\}$ будет бесконечно малой последовательностью.

   **Пример.** *Вычислим предел последовательности*

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

   *Имеем*

   $$\lim_{n\o\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = 0,$$

   *так как* $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ *бесконечно малая последовательность, а* $\{\sin n\}$ *– ограниченная.*

2) Если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая, то она неограничена. **Доказательство.** Из определения бесконечно большой последовательности следует, что

   $$\forall\, M \text{ существует } N: \ \forall\, n > N \ |a_n| > M.$$

   Откуда следует, что для $n = N + 1$ будет справедливо $|a_n| > M$. Причём обратное утверждение неверно, например

   $$\{n \cdot \sin\frac{\pi n}{2}\} = \{\sin\frac{\pi}{2}, 2\sin\pi, \ 3\sin\frac{3\pi}{2}, \ldots\} = \{0, 1, \ -3, \ \ldots\}.$$

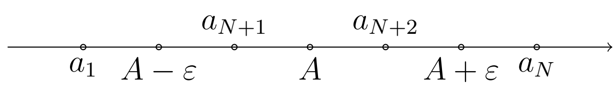
**Теорема.** *Любая сходящаяся последовательность ограничена, то есть из*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

*следует, что найдется такое* $M \in \mathbb{R}$

$$M \in \mathbb{R}: \ |a_n| \leq M \quad \forall n.$$

**Доказательство.** Рассмотрим геометрический смысл предела




Элементы $a_1, a_2, \ldots, a_N \notin (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Выберем $a_- = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ и $a_+ = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$. Тогда $m = \min\{a_-, A-\varepsilon\}$, так как неизвестно левее или правее $A-\varepsilon$ находится $a_-$, а качестве $M = \max\{a_+, A+\varepsilon\}$. Поэтому $a_1, a_2, \ldots, a_N \in [m,M]$. Таким образом, для

$$n \geq N+1 \quad a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \in [m,M]$$

откуда следует, что для всех $n$ $a_n \in [m,M]$.

Ограниченность последовательности является необходимым, но не является достаточным условием сходимости. Этот факт можно проиллюстрировать на следующем примере.

**Пример.** *Последовательность* $\{a_n\} = \{-1, 1, -1, \ldots,\}$ *ограничена, но не сходится.*

**Доказательство.** Последовательность ограничена. Предположим, что она имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

что по определению означает

$$\forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ существует } N\ \forall n > N\ |a_n - A| < \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$|-1-A| < \frac{1}{2} \text{ или } |1+A| < \frac{1}{2}.$$

С другой стороны

$$|1-A| < \frac{1}{2}.$$

Составим цепочку соотношений

$$2 = |1+A+1-A| \leq |1+A| + |1-A| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

## 3.5. Монотонная последовательность

**Определение.** *Последовательность называется монотонной, если она неубывающая или невозрастающая.*

**Определение.** *Последовательность называется невозрастающей, если элементы, начиная со второго меньше или равны предыдущему.*

Свойства монотонных последовательностей

1) Неубывающая последовательность ограничена, если она ограничена сверху.

2) Невозрастающая последовательность ограничена, если она ограничена снизу.

Сформулируем достаточное условие сходимости

**Теорема.** *Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

**Доказательство.** Пусть $\{a_n\}$ ограничена, то есть существуют точная верхняя $M$ и точная $m$ нижняя грани последовательности. Пусть $\{a_n\}$ неубывающая. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M,$$

где $M$ – точная верхняя грань, то есть

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ найдется } a_N: \ M - \varepsilon < a_N \le M.$$

Так как $\{a_n\}$ неубывающая, то

$$\forall n \ge N \quad 0 \le M - a_n \le M - {}_N.$$

Откуда получаем, что $0 \le M - a_n < \varepsilon$ или $|a_n - M| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

## 3.6. Теорема Больцано – Вейерштрасса

**Определение.** *Подпоследовательностью для последовательности $\{a_n\}$ называется подмножество $a_{n_k}$ элементов данной последовательности,*

$$k = 1, 2, 3, \dots : \ n_1 < n_2 < \dots.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** **(Больцано – Вейерштрасса)** *Любая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

**Доказательство.** Пусть $\{a_n\}$ ограниченная, тогда

$$|a_n| \leq K \quad \text{или} \quad -K \leq Ka_n \leq K.$$

Все элементы последовательности $\{a_n\}$ принадлежат отрезку $[-K,K] = I_0$.

Разделим отрезок $I_0$ пополам и рассмотрим ту его часть, которая содержит бесконечное множество точек $a_n$: $I_1 = \frac{I_0}{2}$. Рассмотрим на $I_1$ точку $b_1 = a_{n_1} \in I_1$. Аналогично поступим и с отрезком $I_1$, обозначив через $I_2 = \frac{I_1}{2}$. Возьмем $b_2 = a_{n_2} \in I_2$. Причём выберем так, чтобы $n_2 > n_1$.

Продолжая этот процесс, получим последовательности

$$\{b_k\} \quad \text{и} \quad \{I_k\}.$$

По построению $I_k$ – последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. Точки $b_k \in I_k$, $b_k = a_{n_k}$ по построению. Таким образом, $\{b_k\}$ – подпоследовательность $a_{n_k}$, а $\{I_k\}$ – последовательность вложенных отрезков. Тогда существует точка $c$ принадлежащая всем отрезкам, то есть $c \in \bigcap\limits_k I_k$. Откуда уже следует, что

$$\lim_{k\to\infty} b_k = c.$$

**Следствие 1.** *Любое бесконечное подмножество ограниченной последовательности имеет предел.*

**Следствие 2.** *Если все подпоследовательности сходятся к одному пределу $A$, то и последовательность сходится к $A$.*

**Следствие 3.** *Если две различных подпоследовательности сходятся к разным пределам, то последовательность расходящаяся.*

## 3.7. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности, или критерий Коши

Пусть задана числовая последовательность

$$\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашёлся такой номер $N$, что как только $n > N$ и $m > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Последовательность, удовлетворяющие условию Коши, называется *фундаментальной.*

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Покажите, что:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+2} = 2$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2. Вычислите пределы

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3}{n^7+2}$;

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+3}{n+2}$;

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+5}+\sqrt{5n+2}}{\sqrt[3]{8n^3+n}+n}$;

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n}\right)$;

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$;

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n-2}{4n^2+2n+7}\right)^3$;

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$;

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n^3}+n\right)$.

3. Докажите, что последовательность

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \ldots, \quad x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

сходится и найдите её предел.

# 4. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

## 4.1. Понятие функции

Пусть заданы два подмножества множества действительных чисел $X, Y \subset \mathbb{R}^d$ и задано некоторое отношение между ними, $f$: $f : X \to Y$.

**Определение.** *Функцией называется отношение $f : X \to Y$, при котором каждому элементу множества $X$ соответствует единственный элемент множества $Y$: $y = f(x)$, где*

- *множество $X$, где определена функция, называется областью определения функции;*

- *множество $Y$ – область значений функции.*

**Пример.** *Последовательность $\{a_n\}$ – функция:*

$$f; \mathbb{N} \to \mathbb{R}^d, \quad f(n) = a_n.$$

**Пример.** $y = n!$, $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}^d$, $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

**Пример.** $sgn\, x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1 & \text{если } x < 0. \end{cases}$

## 4.2. Способы задания функции

1. Аналитическое задание функции:

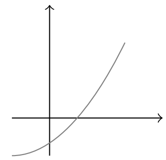
- явно заданные функции, $y = f(x)$;

- неявно заданные функции, $F(x,y) = 0$;

- параметрически заданные функции

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

2. Графический способ задания функции



3. Табличный способ задания функции

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\ldots$ | $y_n$ |

Свойства функций

- монотонность;
- чётность или нечётность;
- периодичность;
- нули функции.

## 4.3. Предел функции в точке

**Определение.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ в точке $a$ если, для любого $\varepsilon > 0$, найдётся такое $\delta > 0$, что при всех $x$ из области определения и $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству*

$$|x - a| < \delta$$

*верно неравенство*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

*Записывается это следующим образом*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) : \, \forall x \, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Дадим определение предела функции в точке в терминах окрестностей

**Определение.** *Число $A$ есть предел $f(x)$ при $x$ стремящемся к $a$, если для любой $\varepsilon$-окрестности точки $A$ найдётся такая $\delta$-окрестность точки $a$, что для любого значения $x \neq a$ принадлежащего $\delta$-окрестности точки $a$, значение функции $y = f(x)$ принадлежит $\varepsilon$-окрестности точки $A$.*

Значение функции в точке $a$ не влияет на предел функции в точке. Это означает, что если две функции в окрестности точки $a$ равны, а в самой точке различны или не существуют, то пределы этих функций равны.

Приведём ещё одно определение предела функции в точке.

**Определение.** *Число $A$ называется пределом функции $f(x)$ при $x \to$ , если для любой последовательности $\{x_n\}toa$ соответствующая числовая последовательность $\{f(x_n)\} \to A$.*

## 4.4. Ограниченная функция

Функция называется ограниченной в окрестности точки $a$, если существует такое число $M > 0$ и $\delta > 0$ такое, что справедливо тождество

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in (x - \delta, x + \delta).$$

Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки $a$ и имеет в точке $a$ конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки. **Доказательство.** Запишем определение предела функции $f(x)$ в точке $a$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \neq a \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Если взять $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $|f(x) - A| < \frac{1}{2}$. Откуда имеем

$$|f(x)| - |A| \leq ||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \frac{1}{2}$$

или

$$|f(x)| \leq |A| + |f(x) - A| < \frac{1}{2}$$

Выбирая $M = \max\{|A| + \frac{1}{2}, f(a)\}$, так как $x \neq a$, то получаем, что для любого $x \in (a - \delta, a + \delta)$ справедливо неравенство $|f(x)| < M$.

## 4.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в окрестности точки $a$, кроме самой точки $a$. Тогда $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

1) Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть бесконечно малая функция.

2) Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, а $f(x)$ ограничена в окрестности точки $a$, то произведение $\alpha(x) \cdot f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$.

3) Для того чтобы число $A$ было пределом функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в окрестности точки $a$, кроме, может быть, самой точки.

Если для любого, какого угодно большого, числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x)| > M.$$

В этом случае функцию $f(x)$ называют бесконечно большой функцией при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} = \infty$.

Справедливо следующая

**Теорема.** *Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и в некоторой окрестности точки $a$ функция $\alpha(x) \neq 0$, то функция*

$$F(x) = \frac{1}{\alpha(x)} - \text{ бесконечно большая функция при } x \to a.$$

*И, наоборот, если $F(x)$ - бесконечно большая функция при $x \to a$, то*

$$\alpha(x) = \frac{1}{F(x)} - \text{ бесконечно малая функция.}$$

## 4.6. Односторонние пределы

Пусть функция $f(x)$ определена только слева или только справа от точки $a$.

**Определение.** *Число $A$ называется левосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \to a - 0$ $(x < a)$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \to a-} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

**Определение.** *Число $A$ называется правосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \to a+0$ $(x > a)$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \; a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A, \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Выполнена следующая

**Теорема.** *Для того, чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке $a$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы функции в точке $a$ справа и слева, и они были равны между собой.*

## 4.7. Непрерывность функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в окрестности точки $x_0$.

Функцию называют непрерывной в точке $x_0$, если она имеет предел в точке $x_0$, и это предел равен значению функции $f(x)$ в точке $x_0$, то есть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0).$$

Для непрерывной функции символ $\lim$ и символ $f$ можно менять местами

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$. Зададим точку $x_0 + \Delta x$ также принадлежащую этой окрестности. Величина $\Delta x$ называется приращением аргумента, а выражение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

приращением функции $f(x)$ в точке $x_0$.

**Определение.** *Функция называется непрерывной в точке $x_0$, если приращение $\Delta y$ функции в этой точке, соответствующее приращению $\Delta x$ аргумента стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.*

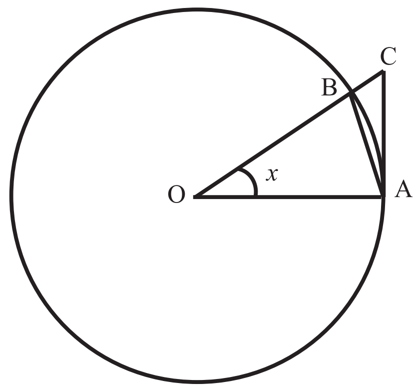
Дадим общее определение непрерывности.

**Определение.** *Пусть функция определена на подпространстве $E \subset \mathbb{R}^d$ и точка $x_0 \in E$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\} \in E$, сходящейся к точке $x_0 \in E$, соответствующая последовательность значений функции*

$$\{f(x_n)\} \to f(x_0).$$

## 4.8. Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Рассмотрим окружность радиуса $R$.




Здесь $OA=R$, $\angle AOB=x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$. Сравним площади полученных фигур

$$S_{\triangle AOB}<S_{\text{сектор}AOB}<S_{\triangle AOC},$$

то есть

$$\frac{1}{2}R^2\sin x<\frac{1}{2}xR^2<\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}x.$$

Откуда, поделив всё на $\frac{1}{2}R^2\sin x$, получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Это неравенство справедливо и для $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$, а $\cos(-x)=\cos x$. Функция $y=\cos x$ непрерывна в любой очке, в том числе и при $x=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

## 4.9. Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

Известно, что $\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\}$ при $n\to\infty$ стремится к числу $e$ или

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Установим это утверждение для всех $x\in\mathbb{R}$. Для этого рассмотрим случай, когда $x\to+\infty$. Пусть $n<x<n+1$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{n},\quad \frac{1}{n+1}+1<\frac{1}{x}+1<\frac{1}{n}+1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Таким образом, по теорем о пределе промежуточной последовательности, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть, теперь $x \to -\infty$. Тогда сделаем замену $t = -(x+1)$. Отсюда, если $x \to -\infty$, то $t \to +\infty$ и

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\left(1+\frac{1}{t}\right) = e$$

## 4.10. Арифметические операции над непрерывными функциями

Справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x_0$. Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, то также непрерывны в точке $x_0$ и их:*

- *сумма $f(x)+g(x)$;*
- *разность $f(x)-g(x)$;*
- *произведение $f(x)g(x)$;*
- *частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$.*

**Доказательство.** Докажем для частного $\frac{f(x)}{g(x)}$. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x_0$, $g(x_0) \neq 0$. Тогда существует окрестность $x_0$, в которой $g(x) \neq 0$. Определим в этой окрестности функцию $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Из непрерывности $f(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, а также $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме о пределе частного

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = F(x_0).$$

Таким образом, $F(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

## 4.11. Сложная функция

Пусть функция $u = \varphi(x)$ задана на множестве $E \subset \mathbb{R}$. Множество $E_1 = \{u \in \mathbb{R} : u = \varphi(x), x \in E\}$ – множество значений функции $u$.

Рассмотрим на $E_1$ функцию $y = f(u)$, заданную на $E_1 \subset \mathbb{R}$. Тогда $y = f(u) = f(\varphi(x))$ задана на $E$.

Справедлива следующая

**Теорема. (О переходе к пределу под знаком непрерывной функции)** *Если*

1) *функция $u = \varphi(x)$ в точке $x_0$ имеет конечный предел $A$;*

2) *функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то функция $y = f(\varphi(x))$ в точке $x_0$ имеет предел равный $f(A)$.*

*Другими словами,*

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(A),$$

*а отсюда можно получить, что*

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x)\right).$$

Верно и следующее утверждение.

**Теорема.** *Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, а функция $y - f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x_0$.*

## 4.12. Точки разрыва функции и их классификация

Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x_0$, то

- $f(x)$ разрывна в точке;

- точка $x_0$ – точка разрыва функции.

Существуют различные типы точек разрыва.

1) Устранимые точки разрыва.
Пусть в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет предел справа и слева, то есть

$$\exists \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x).$$

В самой точке разрыва функция либо неопределена, либо если и определена, но

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) \neq f(x_0).$$

Такая точка $x_0$ называется устранимой точкой разрыва. Достаточно рассмотреть функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \forall x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & x = x - 0. \end{cases}$$

Тогда $F(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то есть ее доопределили в точке $x_0$, $F(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \infty$.

2) Неустранимая точка разрыва.
Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, то есть не существует, тогда $x_0$ является точкой неустранимого разрыва.

Устранимые очки разрыва называются точками разрыва $I$-го рода.
Неустранимые точки разрыва – точки разрыва $II$-го рода.

## 4.13. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Рассмотрим понятие непрерывности не только в точке, но и на каком-то интервале или отрезке. Введём обозначение $C[a,b]$ – множество функций непрерывных на отрезке $[a,b]$.

**Определение.** *Функцию назовём непрерывной на интервале $(a,b)$, если она непрерывна на в каждой точке этого интервала.*

**Определение.** *Функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, если она:*
*во-первых: непрерывна на интервале $(a,b)$;*
*во-вторых: непрерывна в точке $a$ и в точке $b$.*

1. **Теорема. (Больцано – Коши)** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а на концах отрезка имеет значения противоположные по знаку, то $f(x) = 0$ хотя бы в одной точке $(a,b)$.*

   **Доказательство.** Пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$. Зададим некоторую точку $\xi = \frac{a+b}{2}$, которая делит отрезок $[a,b]$ пополам. Найдём $f(\xi)$. Если $f(\xi) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\xi) \neq 0$, то $f(a) \cdot f(\xi) < 0$ или $f(\xi) \cdot f(b) < 0$. Поэтому опять можно выбрать отрезок $[a_1,b_1] = [a,\xi]$ или $[a_1,b_1] = [\xi,b]$. Зададим $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$, если $f(\xi_1) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\xi_1) \neq 0$, то возьмём отрезок $[a_2,b_2]$.

   В итоге получаем систему вложенных отрезков

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \ldots \supset [a_n,b_n] \supset \ldots,$$

$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Тогда существует единственная точка $\alpha \in \bigcap\limits_n [a_n,b_n]$. Проверим, что $f(\alpha) = 0$. Пусть $f(\alpha) \neq 0$. Поскольку $f(x) \in C[a,b]$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $\alpha \in [a,b]$. Тогда существует окрестность $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ такая, что $f(x)$ сохраняет знак в любой точке окрестности. С другой стороны $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$. Поэтому существует отрезок $[a_N,b_N] \cup (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$ и $f(a_N) \cdot f(b_N) > 0$, то есть $f(a_N)$ и $f(b_N)$ одного знака. По построению $f(a_N)$ и $f(b_N)$ разного знака и мы получили противоречие.

□

**Замечание.** *Требование непрерывности функции $f(x)$ здесь существенно.*

**Замечание.** *Всякий многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами*

$$P_{2n+1}(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_0$$

*имеет по крайней мере один действительный корень.*

**Доказательство.** Пусть, для определённости, $a_{2n+1} > 0$, тогда при достаточно больших значениях аргумента $x$, $P_{2n+1}(x) > 0$, а при отрицательных значениях – $P_{2n+1}(x) < 0$. Поскольку $P_{2n+1}(x)$ – непрерывная функция, то существует число $a \in \mathbb{R}$ такое, что $P_{2n+1}(a) = 0$. □

2. **Теорема. (Теорема о промежуточном значении непрерывной функции)** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и значение в точке a равно $f(a) = A$, а в точке b – $f(b) = B$, то для любого числа $C \in [A,B]$ найдётся число αß$[a,b]$ такое, что $f(\alpha) = C$. Другими словами непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между её значениями на концах отрезка.*

   **Доказательство.** Пусть, для определённости, $A < B$. Рассмотрим любую точку $C \in [A,B]$. Зададим некоторую функцию $\varphi(x) = f(x) - C$, при этом $A < C < B$. Поскольку, полученная функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

   $$\begin{aligned} \varphi(a) &= f(a) - C = A - C < 0; \\ \varphi(b) &= f(b) - C = B - C > 0, \end{aligned}$$

   то есть знаки функции на концах разные. Тогда существует точка $\alpha \in [a,b]$ такая, что $\varphi(\alpha) = f(\alpha) - C = 0$ или $f(\alpha) = C$. □

3. **Теорема. (Первая теорема Вейерштрасса)** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена нём, то есть*

   $$\exists K > 0 : \quad \forall x \in [a,b] \Longrightarrow |f(x)| < K.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку отрезка $x_0 \in [a,b]$, в которой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Из определения непрерывности следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{или} \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Выбрав число $M$ как $M = \max\{f(x_0) + \varepsilon, f(x_0)\}$, получаем

$$-M < f(x) < M \quad \text{или} \quad |f(x)| < M.$$

□

Теперь введём такое понятие как *точные грани функции*.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на некотором множестве $E$.

Точной верхней гранью $M$ функции $f(x)$ на множестве $E$ называется:
– точная верхняя грань множества значений функции $f(x)$ на множестве $E$,

$$M = \sup_{x \in E} f(x).$$

Аналогично вводится понятие нижней грани $m$ функции,

$$m = \inf_{x \in E} f(x).$$

4. **Теорема. (Вторая теорема Вейерштрасса)** *Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она достигает на этом отрезке своих точной нижней и точной верхней граней.*

Совместно с понятиями точного верхнего и нижнего значений функции идут такие понятия как *наибольшее и наименьшее значение функции.*

Наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется точная верхняя грань функции.

Наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется точная нижняя грань функции.

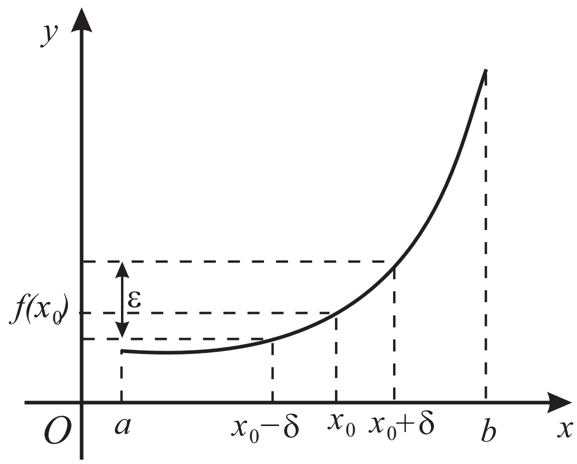
Исходя из этих определений вторую теорему Вейерштрасса можно перефразировать как

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке принимает свои наименьшее и наибольшее значения.*

## 4.14. Равномерная непрерывность

Из непрерывности функции на отрезке следует её непрерывность на интервале и в точке, принадлежащей этому интервалу. В обратную строну, непрерывность на интервале означает, что функция будет непрерывна в любой точке этого интервала. Чтобы функция была непрерывна на отрезке, нужно к непрерывности на интервале добавить непрерывность справа и слева в граничных точках.

Рассмотрим функцию непрерывную на интервале $(a,b)$.




Видно, что если взять $\varepsilon$ для точек $x_0$ и $x_0'$ одинаковые, то $\delta$ и $\delta'$ – разные. Поэтому для выбора $\delta$ существенными являются – $\varepsilon$ и $x_0$. Но существует понятие, которое позволяет из всего класса выбрать те, для которых в независимости от выбора точек $x_0$ рассматривается число $\delta$.

**Определение.** *Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на интервале $(a,b)$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $x', x' \in (a,b)$ удовлетворяющих условию*

$$|x' - x''| < \delta$$

*верно неравенство*

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

**Пример.** *Покажем, что функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.*

**Решение.** Будем исходить из определения:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\ \forall x',x'' \in \mathbb{R}:\ |x' - x''| < \delta \Rightarrow |x' - x''| < \varepsilon.$$

Найдем $\delta$. Предположим, что $\delta = \varepsilon$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta\ \forall x',x'' \in \mathbb{R}:\ |x' - x''| < \varepsilon \Rightarrow |x' - x''| < \varepsilon.$$

□

Из непрерывности на отрезке следует непрерывность на интервале. Из равномерной непрерывности на отрезке следует равномерная непрерывность на интервале. Обратное для обоих утверждений неверно.

**Пример.** *Покажите, что функция $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на* $(0{,}1)$.

**Решение.** Покажем, что найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $x', x'' \in (0{,}1)$, для которых будут справедливы неравенства

$$|x' - x''| < \delta, \quad |f(x') - f(x'')| > \varepsilon \quad \forall\delta > 0.$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда для произвольного $\delta > 0$ положим, что $x' = \frac{1}{n}$, а $x'' = \frac{2}{2n+1}$. Отсюда

$$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}\right| = \frac{1}{n(2n+1)}$$

и для любого $\delta > 0$ можно найти $n$ такое, что

$$\frac{1}{n(2n+1)} < \delta.$$

Найдём $|f(x') - f(x'')|$,

$$|f(x') - f(x'')| = \left|\sin\pi n - \sin\frac{\pi(2n+1)}{2}\right| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, заданная функция не является равномерно непрерывной. □

Справедлива следующая

**Теорема.** **(Теорема Кантора)** *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a{,}b]$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

**Доказательство.** Проведём доказательство от противного. Запишем определение равномерной непрерывности на отрезке

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad \forall x'{,}x'' \in [a{,}b], \quad |x' - x''| < \delta \longrightarrow |f(x') - fx''| < \varepsilon.$$

Поскольку мы доказываем от противного, то

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad \exists x'{,}x'' \in [a{,}b], \quad |x' - x''| < \delta \longrightarrow |f(x') - f(x'')| > \varepsilon.$$

Возьмём некоторое $\varepsilon > 0$ последовательность $\{\delta_n\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Найдутся соответствующие пары $x'_n, x''_n \in [a,b]$ такие, что

$$|x'_n - x''_n| < \delta, \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| > \varepsilon.$$

Рассмотрим числовые последовательности из пар. По построению $\{x'_n\} \in [a,b]$. Откуда последовательность $\{x'_n\}$ ограничена и по теореме Больцано – Вейерштрасса найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{x'_{n_k}\} \to x_0$, причём $x_0 \in [a,b]$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим последовательность $\{x''_{n_k}\}$. Для неё справедливо соотношение

$$|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \delta_{n_k}.$$

Последовательность $\{\delta_{n_k}\} \to 0$. Тогда

$$0 < x'_{n_k} - x''_{n_k} < 0$$

при $k \to \infty$. Отсюда $(x'_{n_k} - x''_{n_k}) \to 0$. Следовательно $\{x''_{n_k}\} \to x_0$.

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то непрерывна и в точке $x_0$. В нашем случае $\{x'_{n_k}\} \to x_0$ и $\{x''_{n_k}\} \to x_0$. Откуда следует, что $f(x'_{n_k}) \to f(x_0)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$. Тогда по определению

$$\varepsilon \leq |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})|.$$

Перейдя к пределу получим,

$$\varepsilon \leq \lim_{k\to\infty} |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

то есть $\varepsilon \leq 0$, что невозможно. □

## 4.15. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to a$. Если предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка чем $\beta(x)$. Записывается это как

$$\alpha(x) = o(\beta(x))$$

при $x \to a$.

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малые функции одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует ни конечного, ни бесконечного, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ не сравнимы.

Если $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^m} = \beta \neq 0$, то бесконечно малая функция $\alpha(x)$ имеет порядок малости $m \in \mathbb{N}$, относительно основной бесконечно малой функции $x - a = \omega(x)$.

**Определение.** *Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными, если предел их отношения в точке $a$ равен единице,*

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

*Обозначают это следующим образом $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Другими словами, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ равны асимптотически при $x \to a$.*

Выпишем свойства эквивалентности.

1. $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ при $x \to a$ – рефлексивность.
2. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Longleftrightarrow \beta(x) \sim \alpha(x)$ – симметричность.
3. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ и $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ – транзитивность.

Основные эквивалентности бесконечно малых функций.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1$, $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$, $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.
5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{mx} = 1$, $(1+x)^m - 1 \sim mx$ при $x \to 0$.

Если для функции $f(x)$ можно подобрать числа $a$ и $m$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что $f(x) \sim ax^m$, $x \to 0$, то говорят, что функция $ax^m$ есть главный степенной член функции $f(x)$ при $x \to 0$.

Рассмотрим вопрос замены бесконечно малых функции эквивалентными.

**Теорема.** *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$, причём*

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x).$$

*Если в точке $x_0$ отношение*

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

*имеет конечный или бесконечный предел, то он не изменяется при замене $\alpha(x)$ на $\alpha_1(x)$ и $\beta(x)$ на $\beta_1(x)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим отношение
$$\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta x} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}.$$
Перейдём к пределу при $x \to x_0$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta x} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}.$$
По условию $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ и $\beta(x) \sim \beta_1(x)$. Поэтому
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$
Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ по условию. Пусть $C$ конечно. Тогда
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta x} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = C.$$
Пусть $C$ бесконечно. Тогда $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ – бесконечно большая функция при $x \to x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \infty$. В итоге получаем,
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$
□

Сформулируем условие эквивалентности в виде теоремы.

**Теорема.** *Для того, чтобы бесконечно малые при $x \to x_0$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными необходимо и достаточно, чтобы $\alpha(x) - \beta(x)$ при $x \to x_0$ была бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем они сами, то есть*
$$\alpha(x) = o(\alpha(x) - \beta(x)), \quad \beta(x) = o(\alpha(x) - \beta(x)).$$

**Доказательство.**
*Необходимость.* Зададим функцию $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$. По условию $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Сравним $\alpha(x)$ и $\gamma(x)$ или $\beta(x)$ и $\gamma(x)$:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right) = 0,$$
то есть $\beta(x) = o(\gamma(x))$.

*Достаточность.* Зададим функцию $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$. Поскольку $\beta(x) = o(\gamma(x))$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 0$. Вычислим $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x) + \gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \left(1 + \frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right).$$
Таким образом, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$. □

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Вычислите предел

   (a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$,

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^x$,

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$,

   (d) $\lim\limits_{x\to 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$,

   (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$,

   (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x-1}$,

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{\operatorname{tg} x}$,

   (h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$,

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$,

   (j) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$,

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$,

   (l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$,

   (m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1-ctgx}$,

   (n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{x}$,

   (o) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$,

   (p) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$,

   (q) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$,

   (r) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}$,

   (s) $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$,

   (t) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$,

   (u) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.

2. Установите, в каких точках и какого рода разрывы имеет функция

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{при } x<0,\\ 2x, & \text{при } 0\le x\le \frac{\pi}{2},\\ \operatorname{tg} x & \text{при} x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

3. Установите в каких точках и какого рода разрывы имеет функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{при } -2\le x<0,\\ 4, & \text{при } x=0,\\ \frac{1}{x} & \text{при} 0<x\le 2.\end{cases}$$

4. Можно ли устранить разрывы функций

   (a) $f(x)=\frac{1}{x-a}$ в токе $x=a$;

   (b) $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\le 2,\\ x-3, & x>2\end{cases}$ в точке $x=2$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ в точке $x = 1$.

5. Доопределите функцию $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x = 0$ так, чтобы она стала непрерывной.

6. Переопределите функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$ так, чтобы она стала непрерывной.

7. Доопределите функцию

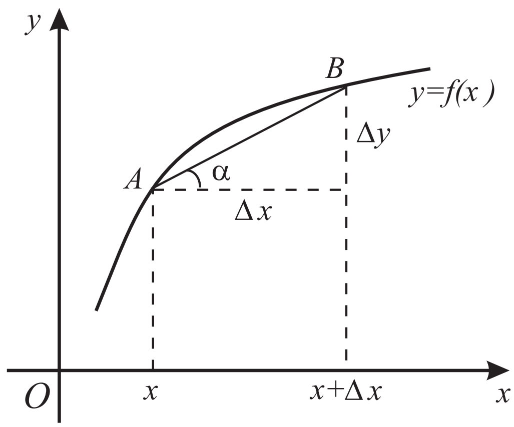
$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

в точке $x = 0$ так, чтобы она стала непрерывной.

# 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 5.1. Определение производной функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, областью определения которой является некоторый интервал $(a,b)$. Нарисуем схематично график этой функции и отметим точку $x$ из области определения.




Придадим точке $x$ приращение, $x+\Delta x$, таким образом, чтобы $x+\Delta x$ также принадлежала $(a,b)$. Рассмотрим на графике две точки $A$ и $B$: $A(x, f(x))$, $B(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Тогда прямая $AB$ будет секущей графика функции $y = f(x)$.

Обозначим через $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – приращение функции. При $\Delta x \neq 0$ можно рассматривать отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для треугольника $\triangle ABC$ это отношение является тангенсом угла $\angle A$. Изменяя $\Delta x$, получаем, что разностное отношение $f(x+\Delta x) - f(x)$ является функцией переменной $\Delta x$.

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Этот предел может существовать и не существовать. В том случае, когда он существует, может быть конечным и бесконечным. Рассмотрим случай, когда предел существует и он конечен.

**Определение.** *Производной функции в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю ($\Delta x \to 0$):*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Можно рассмотреть равносильное определение, где вместо приращения аргумента будем брать разность точек

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

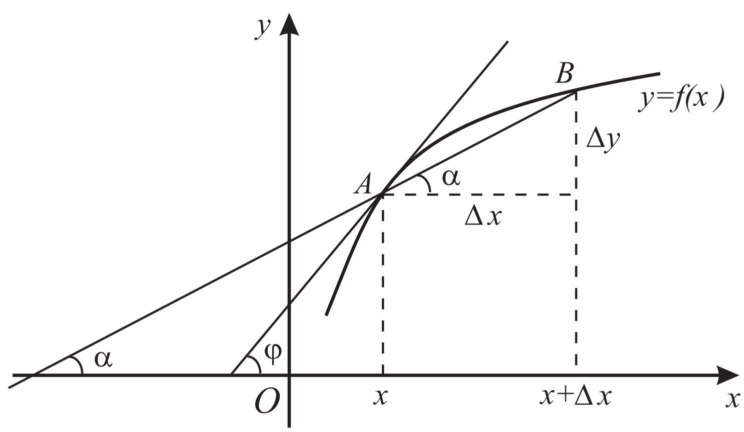
Производная обозначается как

$$f'(x) = y'(x) = y'_x.$$

Отметим, что можно расширить определение производной в точке на весь интервал. Если для любой точки интервала можно вычислить производную, то таким образом вычисляется производная на интервале.

## 5.2. Геометрический смысл производной

По определению $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



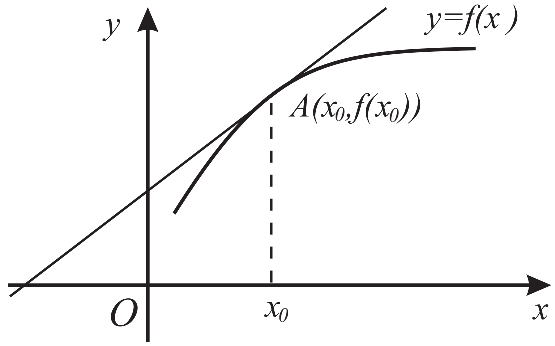

$A(x, f(x))$, $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.
Секущая $AB$ пересекает ось $Ox$ под углом $\alpha$. Чтобы написать уравнение секущей, необходимо указать её угловой коэффициент. В нашем случае $k$ будет равен $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\delta x}$.

Устремим точку $B$ к точке $A$ по прямой $AB$, то есть $\Delta x \to 0$. Секущая займёт крайнее положение – касательная $AC$. Чтобы определить уравнение касательной $AC$, вычислим ее угловой коэффициент:

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \operatorname{tg}\varphi = f'(x).$$

Таким образом, геометрический смысл производной состоит в следующем: производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной проведенной к данной кривой в этой точке.

## 5.3. Касательная и нормаль к кривой




Рассмотрим точку $x_0$, принадлежащую области определения функции $y = f(x)$. Тогда на графике будем иметь точку $A(x_0, f(x_0))$. Уравнение прямой можно записать следующим образом

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где угловой коэффициент $k = f'(x_0)$. Откуда уравнение касательной примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y_0 = f(x_0)$$

и окончательно

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Одновременно с касательной можно рассматривать и другие прямые, например перпендикулярные касательной – нормали.

**Определение.** *Нормаль – это прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной:*

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f(x_0)}(x - x_0). \quad f'(x_0) \neq 0.$$

## 5.4. Механический смысл производной

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки, которое задано некоторым законом $S = S(t)$. Путь, который проделает точка с момента времени $t$ до $t + \Delta t$ будет равен

$$\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t).$$

Средняя скорость будет равна отношению

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t},$$

а мгновенная

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t).$$

## 5.5. Односторонние производные

Если функция задана на отрезке, то для неё можно ввести понятия правая и левая производные.

*Правая производная.*

$$f'(x+0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0+}.$$

*Левая производная.*

$$f'(x-0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x \to 0-}.$$

Если существует производная в точке, то существует левая и правая производные и они равны. Справедливо и обратное утверждение

$$f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x).$$

**Пример.** *Покажите, что не существует производной функции*

$$y = |x|$$

*в точке* $x = 0$.

**Решение.** рассмотрим производную в точке $x = 0$. По определению имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|0+\Delta x| - 0}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Откуда

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1, \quad f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

и $f'(0+0) \neq f'(0-0)$, то есть производная в точке $x = 0$ не существует. □

## 5.6. Бесконечные производные

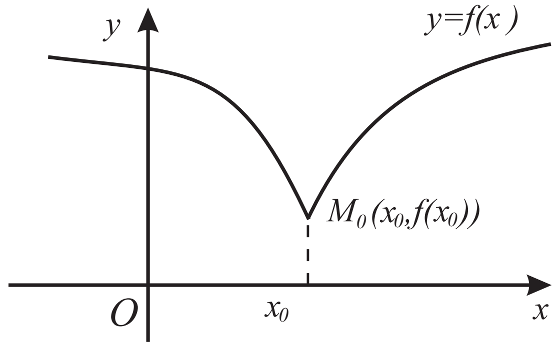
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty.$$

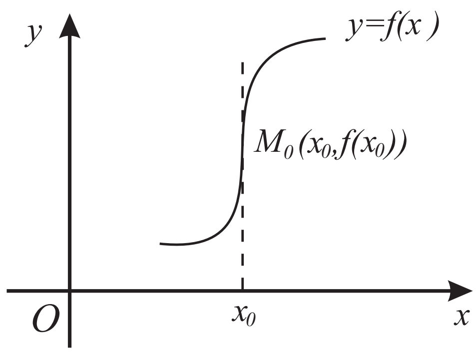
Сведём все геометрические смыслы производной воедино:

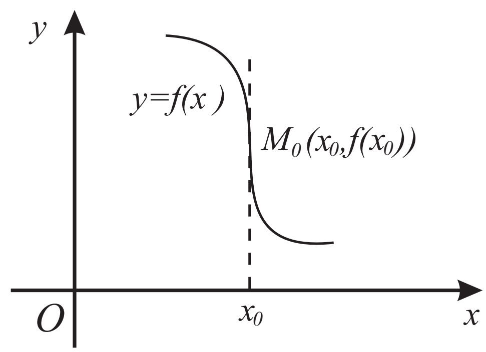
– пусть $f'(x_0) = A < \infty$. Тогда в точке $x_0$ можно провести касательную, уравнение которой $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Кривые такого вида называются гладкими, а функции гладкими функциями: $f(x)$, $f'(x) \in C^1(a,b)$, то есть непрерывные вместе со своей производной;

– пусть в точке $x_0$ существуют производные слева и справа, но они не равны: $f'(x_0+0) \neq f'(x_0 - 0)$.

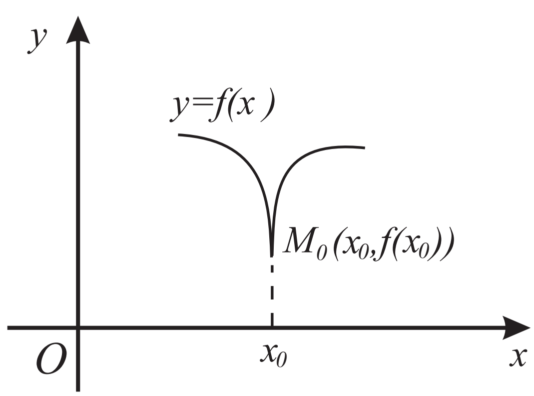


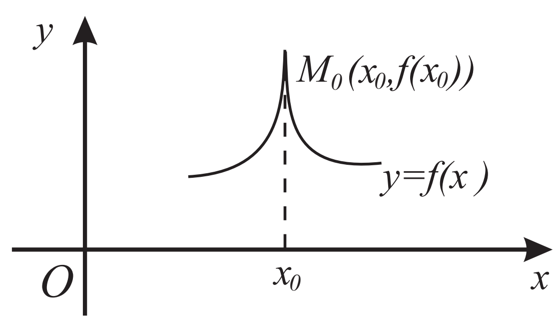

В точке $x_0$ не существует касательной. Точка $M_0(x_0.f(x_0))$ – угловая точка;
– пусть для $f(x) \in C(a,b)$ существует бесконечная производная, например $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$. В этом случае графическое представление будет вида




Также рассмотрим пример, когда
a) $f'(x_0 + 0) = +\infty$, а $f'(x_0 - 0) = -\infty$;
b) $f'(x_0 + 0) = -\infty$, а $f'(x_0 - 0) = +\infty$.




## 5.7. Дифференцируемость функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(a,b)$. Тогда приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Функция называется дифференцируемой в точке ,если приращение функции можно записать как

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $A = const$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то есть $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция.

**Пример.** *Проверим, будет ли $y = x^2$ дифференцируемой функцией.*

**Решение.** Запишем приращение функции

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\Delta x + \Delta x \cdot \Delta x,$$

$$A = 2x, \quad \alpha(\Delta x) = \Delta x, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.$$

□

Сформулируем терему, которая даёт необходимое условие для дифференцируемости в точке.

**Теорема.** *Функция дифференцируема в точке тогда и только тогда, когда существует конечная производная в этой точке.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Поскольку функция дифференцируема в точке, то приращение

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad A = const, \quad \alpha(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$. Вычислим предел при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Исходя из определения, предел функции можно представить в виде числа (предела) и бесконечно малой функции

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

*Достаточность.* Пусть производная функции равна $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$. Из определения, что предел функции представим в виде суммы числа и бесконечно малой функции, где где число и есть предел имеем

$$f'(x) + \alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Откуда

$$f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y \quad \text{или} \quad A\Delta x\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y.$$

□

Для дифференцируемых функций справедливо следующее утверждение

**Теорема.** *Если функция дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.*

**Доказательство.** Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$.Приращение дифференцируемой функции равно

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad A = const, \quad \alpha(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Вычислим предел этого выражения при $\Delta x \to 0$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} (A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x) = 0$$

или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что является определением непрерывности. □

Отметим, что обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует её дифференцируемость.

**Пример.** *Дифференцируема ли функция $f(x) = |x|$ на всей числовой оси.*

**Решение.** Производной в точке $x = 0$ у функции $f(x) = |x|$ не существует, а следовательно функция не является дифференцируемой в этой точке. □

## 5.8. Дифференциал функции

Рассмотрим дифференцируемую в точке функцию $y = f(x)$. Тогда, используя определение, можно записать

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad A = const, \quad \alpha(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Дифференциалом функции называется выражение вида

$$dy = A \cdot \Delta x.$$

Определим связь дифференциала с приращением функции. Имеем

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

то есть дифференциал $dy$ – главная линейная часть приращения функции, а $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция более высокого порядка чем $\Delta x$. Другими словами дифференциал функции равен произведению производной функции на приращение аргумента: $dy = f'(x) \cdot \Delta x$. Обозначим $\Delta x$ через $dx$. Тогда

$$dy = f'(x)dx \quad \text{или} \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} \; - \; \text{обозначение Лейбница.}$$

## 5.9. Дифференцирование суммы, произведения и частного

Пусть даны две дифференцируемые функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$. Тогда функции полученные из этих функций сложение ,умножение, делением и вычитанием: $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ при условии, что $v(x) \neq 0$ тоже дифференцируемы и справедливы формулы:

$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;

$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$, $v(x) \neq 0$.

**Доказательство.** Докажем произведение. Зафиксируем точку $x$ и придадим ей приращение $\Delta x$. Рассмотрим приращение $\Delta(u \cdot v)$ равное

$$\Delta(u \cdot v) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x),$$

где $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$, $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$. Тогда

$$\Delta(u \cdot v) = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) - u \cdot v = u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v = u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Найдём отношение

$$\frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \frac{u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}$$

и вычислим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Вычичислим каждй из полученных пределов. Имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u \cdot v',$$

так как $v(x)$ – диффеернцируемая функция;

$$\lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = v \cdot u',$$

так как $u = u(x)$ – дифференцируемая функция;

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = 0.$$

Откуда получаем, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Предел правой части существует и конечен, то существует и предел левой чвасти, то есть

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

□

**Замечание.** *Постоянный множитель можно вносить за знак производной*

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

**Замечание.** *Формула суммы и произведения справедлива для любого конечного количества функций:*

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n',$$

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'.$$

## 5.10. Производные некоторых элементарных функций

a) Производная показательной функции $y = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$.
Вычислим приращение

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \left(a^{\Delta x} - 1\right).$$

Найдём тношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

и вычислим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Такми образом, $(a^x)' = a^x \ln a$.

b) Производная логарифмической функции $y = \ln x$, $x > 0$.
Зафиксируем точку $x$ и придадим ей прращение $\Delta x$ так, чтобы $x + \Delta x$ принадлежал области определения функции. Вычислим приращение

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - lnx = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Рассмотрим отношение
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$
и вычислим предел
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x},$$
где воспользовались соотношением эквивалентности $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x) \sim x$. Окончательно,
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

c) Производная степенной функции $y = x^n$, $x > 0$ и $n \in \mathbb{R}$.
Рассмотрим фиксированную точку $x$ и $x+\Delta x$ из области определения. Найдём приращение
$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n - 1\right].$$
Вычислим предел
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\Delta x} = x^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1\right]}{\Delta x} =$$
$$x^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^n\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n}{x} = nx^{n-1},$$
где воспользовались эквивалентностью $(1+x)^n - 1 \sim nx$, при $x\to 0$. В итоге получаем,
$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

## 5.11. Дифференцирование сложной функции

Справедлива следующая

**Теорема.** *Если функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $y=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x_0$ и выполняется следующее равенство*
$$\left(f(\varphi(x))\right)'|_{x=x_0} = f'(u_0)\varphi(x_0).$$

**Доказательство.** Известно, что функция $y=f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$ функция $u=\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$.

Зададим приращение $\Delta x$, из которого получим приращение $\Delta u$ и $\Delta y$ (когда $\Delta u \neq 0$). Запишем $\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$, где $\alpha(\Delta u)\to 0$ при $\Delta u \to 0$. Поскольку в общем случае $\alpha(0)$ неопределено, то доопределим её в нуле, например, пусть $\alpha(0) = 0$. Следовательно, $\alpha(\Delta u)$ непрерывна в нуле. Вычислим

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

и найдём предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[ f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \right] = f'(u_0)\varphi'(x_0).$$

Так как $u(x)$ – дифференцируема, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} = \varphi'(x_0)$$

и $u(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{x \to 0} \Delta u = 0$.

В итоге,

$$(f(\varphi(x)))' |_{x=x_0} = f'(u_o)\varphi'(x_0).$$

Иначе это можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

□

**Пример.** *Вычислите производную функции* $y = \ln|x|$, $x \neq 0$.

**Решение.** Рассмотрим несколько случаев.

a) Пусть $x > 0$, тогда $|x| = x$ и $\ln|x| = \ln x$. Откуда

$$y'(x) = (\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

b) Пусть $x < 0$. В этом случае $|x| = -x$ и $\ln|x| = \ln(-x)$. Представим в виде сложной функции

$$y = \ln u, \quad u = -x.$$

Тогда

$$y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}(-1) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$. □

**Замечание.** *Формула производной сложной функции справедлива не только в случае двух функций, но и для любого конечного числа, например*

$$y = f(u), \quad u = \varphi(z), \quad z = \psi(x),$$

$$y = f\left[\varphi\left(\psi(x)\right)\right].$$

*Тогда* $y'_x = y'_u \cdot u'_x \cdot z'_x$.

## 5.12. Инвариантность формулы дифференциала

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Рассмотрим несколько случаев:

a) если $u$ – независимая пременная, то $dy = f'(u)du$, где $du = \Delta x$;

b) если $u$ – некторая функция – $u = \varphi(x)$, то получим сложную функцию $y = f(\varphi(x))$.

Откуда

$$dy = (f(\varphi(x)))'_x \, dx = f'(u)\varphi'(x) = f'(u)du, \quad \text{где} \quad du = \varphi'(x)dx.$$

Приведём основные формулы дифференцирования:

a) $(x^n)' = nx^{n-1}$,

b) $(a^x)' = a^x \ln a$,

c) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,

d) $(\sin x)' = \cos x$,

e) $(\cos x)' = -\sin x$,

f) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

g) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

h) $(e^x)' = e^x$,

i) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

## 5.13. Понятие обратной функции

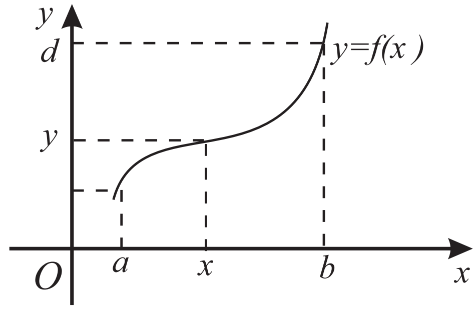
В таблице производных элементарных функций не содержится функций

$$y = \arcsin x, \quad y = arccosx, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arcctg} x.$$

Для того, чтобы вычислить их производные, необходимо знать как вычисляются производные обратных функций.

### Обратная функция.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a{,}b]$ и значение её принадлежат отрезку $[c{,}d]$.



Пусть любому элементу из множества значений $[c,d]$ соответствует единственный элемент из $[a,b]$ такой, что $y = f(x)$. Если это условие выполнено, то можно на отрезке $[c,d]$ задать функцию $\varphi(x)$ такую, что она любому значению $y$ из $[c,d]$ ставит его прообраз при отображении $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. Такую функцию называют обратной к $y = f(x)$. Тогда, если $x = \varphi(x)$ обратная для $y = f(x)$, то и $y = f(x)$ обратная для $x = \varphi(y)$, то есть

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\left(f(x)\right) = \varphi(y) = x, \\ f\left(\varphi(y)\right) = f(x) = y \end{array}\right\} \quad \text{взаимно обратные.}$$

Для практического нахождения функций, пользуются некоторым правилом:

– считают, что $y = f(x)$ – это уравнение, решают которое относительно перменной $x$;

– если полученно выражение $\varphi(y)$ является функцией, то есть для любого $y$ будет существовать единственный прообраз, тогда полученная функция будет обратной.

**Пример.** *Найдите обратную функцию к* $y = 5x$ *на* $[0,1]$.

**Решение.** Решим $y = 5x$ относительно $x$. Откуда $x = \frac{y}{5}$ на промежутке $[0,5]$.

□

Если функция $y = f(x)$ имеет обратную $x = \varphi(y)$, то их график симметричны относительно биссектрисы 1-го и 2-го координатных углов. Тогда возникает естественный вопрос: какими свойствами должна обладать функция, чтобы для неё существовала обратная.

Рассмотрим понятия возрастающая и убывающая функции.

**Определение.** *Функция* $y = f(x)$ *называется возрастающей, если для любых* $x_1$, $x_2 \in [a,b]$ *и* $x_1 < x_2$ *справедливо, что и* $f(x_1) < f(x_2)$. *Функция будет убывающей, если из* $x_1 < x_2$ *следует, что* $f(x_1) > f(x_2)$.

Справедливы следующие теоремы

**Теорема.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена на отрезке* $[a,b]$, *а также непрерывна и возрастает или убывает на нём. Тогда, если рассмотреть отрезок* $[c,d] = [f(a),f(b)]$, *то на этом отрезке можно рассматривать функцию* $x = \varphi(y)$, *которая будет обратной к функции* $y = f(x)$. *Функция* $x = \varphi(y)$ *будет непрерывной на отрезке* $[c,d]$ *и возрастать или убывать на нём.*

**Теорема.** **(Теорема о производной обратной функции)** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна в некоторой окрестности точки* $x_0$ *и возрастает или убывает. Кроме* *того существует производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ отличная от нуля. Тогда для обратной функции $x = \varphi(y)$ существует производная $\varphi'(y)$ в точке $y_0$, $y = f(x_0)$ и эта производная равна*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \textit{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Перейдём к вычислению первообразных функций

a) $y = \arcsin x, \quad x \in [-1{,}1]$. Функция $y = \arcsin x$ обратная к $x = \sin y$, $y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Вычислим производную $x'_y = (\sin y)' = \cos y$. Рассмотрим на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ функцию $\cos y > 0$. Откуда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Таким образом,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

b) $y = \operatorname{arctg} x, \quad x \in (-\infty,\infty)$. Обратная к $y = \operatorname{arctg} x$ есть $x = \operatorname{tg} y$, где $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \quad x'_y = (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y},$$

$$y'_x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty,\infty).$$

c) $y = \arccos x$. Воспользуемся свойством $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. Откуда

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

d) $y = \operatorname{arcctg} x$. Воспользуеммся соотношением $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Tfким образом,

$$y' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = -(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## 5.14. Логарифмическое дифференцирование

Предположим, что функция $y = f(x) > 0$ и нужно вычислить её производную. Возьмём логарифм от правой и левой части

$$\ln y = \ln f(x) = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \ln y.$$

Вычислим производную $\varphi'(x) = (\ln y)'$ по переменной $x$

$$\varphi'(x) = \frac{y'}{y}, \quad y' = \varphi'(x)y,$$

что даёт $y = y\,(\ln f(x))'$.

Для примера, вычислим производную показательно – степенной функции,

$$y = (u(x))^{v(x)}, \quad u(x) > 0,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы. Прологарифмируем правую и левую части

$$\ln y = \ln\,(u(x))^{v(x)} = v(x)\ln u(x)$$

и вычислим производную

$$(\ln y)' = (v(x)\ln u(x))'.$$

Откуда

$$\frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

и окончательно

$$y' = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

## 5.15. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале $(a,b)$ и дифференцируема на нём, тогда существует производная $y' = f(x)$, которая определена на этом же интервале и является функцией от $x$. Для полученной функции также можно ставить вопрос о дифференцировании, тогда существует вторая производная

$$y'' = f''(x) = (f'(x))'.$$

Так можно определить производную $n$-го порядка

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

**Пример.** *Вычислите $n$-ю производную функции $y = e^{kx}$, $k = const$.*

**Решение.** Вычислим производную первого и второго порядка

$$y' = \left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}, \quad y'' = \left(ke^{kx}\right)' = k^2 e^{kx}.$$

Пусть $y^{(n-1)} = k^{n-1}e^{kx}$ и возьмём от неё производную

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \left(k^{n-1}e^{kx}\right)' = k^{n-1}\left(e^{kx}\right)' = k^{n-1}ke^{kx} = k^n e^{kx}.$$

□

**Пример.** *Вычислите $n$-ю производную функции $y = \sin x$.*

**Решение.** Вычислим производную первого и второго порядка

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin x(x+\pi) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $y^{(n-1)} = \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$ и вычислим производную

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right) = \left(\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

В итоге,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Обозначим через $C^n(a,b)$ множество функций, которые непрерывны месте со своими производными до порядка $n$ включительно на интервале $(a,b)$, то есть

$$C^n(a,b) = \{f(x),\, x \in (a,b):\ \forall x \in (a,b)\ \exists f^{(n)}(x) \in C(a,b)\}.$$

Обозначим, аналогично, через $C^\infty(a,b)$ множество бесконечно дифференцируемых функций. Примерам таких функций будут:

$$y = e^x, \quad y = \sin x, \quad y = \cos x.$$

Все они принадлежат $C^\infty(-\infty,\infty)$.

## 5.16. Дифференциалы высших порядков

Понятие дифференциала тесно связано с производной. Таким образом, дифференциал $n$-го поряка можно вычислить по формуле

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Пусть задана функция $y = f(x)$. Найдём, например, дифференциал второго порядка:

$$d^2 y = d\,(dy) = d\,(f'(x)dx) = d\,(f'(x))\,dx.$$

Откуда уже $d\,(f'(x)) = (f'(x))'\,dx = f''(x)dx$. И окончательно

$$d^2 y = f''(x)dx^2, \quad (dx)^2 = dx^2.$$

Для $n$-мерного случая

$$d^n y = f''(x)dx^2, \quad f^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{летние}, \quad f^(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \quad \text{где} \quad dx^n = (dx)^n.$$

## 5.17. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть на отрезке $[\alpha,\beta]$ заданы непрерывные функции $\varphi(t)$, $\varphi(t) \in C[\alpha,\beta]$. Если считать, что $t$ – это время, то функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

задают координаты точки $x$ и $y$ некоторой точки $M$, то есть закон движения точки $M$.

**Определение.** *Множества точек* $\{M(x,y):\ x = \varphi(t), y = \psi(t)\}$ *называется плоской кривой.*

**Пример.** *Рассмотрим следующее множество, заданное как*

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \quad 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

*Имеем уравнение окружности, так как* $x^2 + y^2 = r^2$.

Пусть кривая задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – дифференцируемые функции на $[\alpha,\beta]$. Поскольку $y = \psi(t)$, а $x = \varphi(t)$, то $t = g(x)$ функция обратная к $\varphi(t)$. Тогда можно рассмотреть сложную функцию

$$y = \psi(t) = \psi\left(g(x)\right).$$

Так как $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ по условию дифференцируемые, то существуют производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$. Это в свою очередь означает существование производной и обратной функции $g'(x)$. Таким образом, существует производная сложной функции, то есть

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad \text{так как} \quad t'_x = g'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{1}{x'_t}.$$

Окончательно имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)}, \quad \varphi'(t) \neq 0.$$

По другому эту формулу можно получить, используя следующее соотношение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \varphi'(t) \neq 0.$$

Вычислим $n$-ю производную от функции, заданной параметрически. Пусть существуют $n$-е производные $\varphi^{(n)}(t)$ и $\psi^{(n)}(t)$. Тогда будет существовать $n$-ая производная от функции $g = \psi\left(g(x)\right)$ по переменной $x$. Например, для второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Здесь воспользовались производной сложной функции, то есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Откуда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^2}\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

Иначе полученное выражение можно переписать в более компактном виде

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

и для $n$-ой производной будет иметь вид

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.$$

## 5.18. Дифференциальные теоремы о среднем

**Теорема. (Теорема Ролля.)** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема хотябы на интервале $(a,b)$ и значения функции на концах отрезка совпадают $f(a) = f(b)$. Тогда найдётся такая точка $\xi \in (a,b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

**Доказательство.** По условию $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда по теореме Вейерштрасса она достигает на $[a,b]$ своего минимального и максимального значения: $\eta \in [a,b]$ и $\xi \in [a,b]$, что $f(\eta) = \min\limits_{[a,b]} f(x) = m$ и $f(\xi) = \max\limits_{[a,b]} f(x) = M$. Откуда получаем

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Рассмотрим несколько ситуаций:

a) если $m = M$, то $f(x) = const$ и $f'(x) = 0$ для любой точки из $(a,b)$;

b) если $m \neq M$, то возможны различные расположения точек $\eta$ и $\xi$.

Предположим, что $\eta = a$, а $\xi = b$, но тогда $f(a) \neq f(b)$.

Пусть, например, $\xi$ находится внутри интервала $(a,b)$ и $f(\xi) = M$. Вычислим $f'(\xi)$. По определению $\Delta x > 0$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} = f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Оценим $f(\xi - \Delta x)$, $f(\xi)$, $f(\xi + \Delta x)$. Имеем

$$f(\xi) = M = \max_{[a,b]} f(x), \quad f(\xi - \Delta x) \leq f(\xi) \geq f(\xi + \Delta x).$$

Откуда получаем,

$$f(\xi - \Delta x) - f(\xi) \leq 0, \quad f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0.$$

Тогда

$$0 \leq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} = f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0,$$

а это означает, что $f'(\xi) = 0$. □

**Теорема. (Теорема Лагранжа)** *Пусть задана непрерывная на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемая на интервале $(a,b)$ функция. Тогда найдётся такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию следующего вида

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Нетрудно проверить, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно,

a) $F(x) \in C[a,b]$, так как $f(x)$ и $(x - a)$ непрерывны на $[a,b]$;

b) $F(x)$ дифференцируема на $(a,b)$, поскольку

$$F'(x) = \left(f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)\right)' = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

c) $F(a) = F(b)$.

Поэтому по теореме Ролля получаем, что найдётся такая точка $\xi$, в которой $F'(\xi) = 0$. Откуда

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

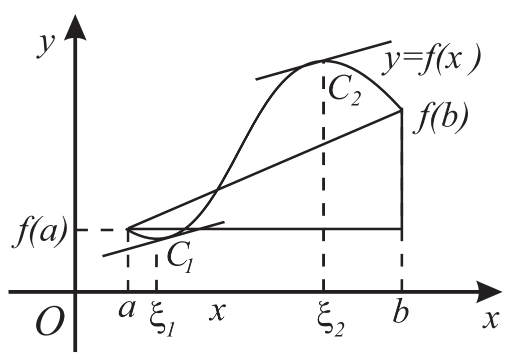
и

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что найдутся такие точки $c_1$ и $c_1$, в которых касательные будут параллельны хорде $AB$:

$$f'(\xi) = k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$




Из теоремы Лагаранжа следует формула Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b.$$

Так как точка $\xi$ внутренняя для $(a,b)$, то её можно описать уравнением

$$\xi = a + t(b-a), \quad 0 < t < 1.$$

Тогда

$$f(b) - f(a) = f'\left(a + t(b-a)\right)(b-a).$$

Если зафиксировать переменную $x$ и придать ей приращение $\Delta x$, обозначив $a = x$, а $b = x + \Delta x$, то получим формулу, называемую формулой конечных приращений

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) = f(x) = f'(x + t \cdot \Delta x)\Delta x.$$

**Теорема.** **(Теорема Коши)** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на $(a,b)$ и $g'(x) \neq 0$. Тогда найдётся такая точка $\xi \in (a,b)$, что*

$$\frac{f'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \ - \ \textit{формула Коши.}$$

**Доказательство.** Разобьём доказательство на два этапа.

1. Предположим, что $g(b)-g(a) = 0$. Откуда получаем, что $g(x)$ довлетворяет теореме Ролля. Тогда сущтсвует такая точка $\xi \in (a,b)$, что $g'(\xi) = 0$. По предположению $g'(x) \neq 0$ для всех точек из $(a,b)$. Откуда получаем, что $g(b) - g(a) \neq 0$ для всех точек из $(a,b)$;

2. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Это выражение имеет смысл, так как $g(b) - g(a) \neq 0$. Выбранная функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Это означает, что найдётся такая точка $\xi \in (a,b)$, в которой $F'(\xi) = 0$. Откуда нерудно получить, что

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

**Замечание.** *Из теоермы Коши следует теорема Лагранжа, если положить, что $g(x) = x$ и из теоремы Лагранжа следует теорема Ролля, если положить, что $f(b) = f(a)$.*

## 5.19. Формула Тейлора

Выведем формулу Тейлора, когда функция записана в виде многочлена степени $n$:

$$P(x) = b_0 + b_1 x + \dots b_n x^n.$$

Этот же многочлен можно представить в виде степеней $(x-a)^n$. Пусть $x = a + t$. Тогда

$$P(a+t) = b_0 + b_1(a+t) + b_2(a+t)^2 + \dots + b_n(a+t)^n.$$

Преобразуем полученное выражение. Имеем

$$P(a+t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n.$$

Сделаем обратную замену $t = x - a$. Тогда

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n.$$

Найдём неизвестные коэффициенты: $A_0$, $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$. Продифференцируем функцию $P(x)$:

$$P'(x) = A_1 + 2 \cdot A_2(x-a) + \dots + n \cdot A_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''(x) = 2{\cdot}1{\cdot}A_2 + 3{\cdot}2{\cdot}A_3(x-a) + \dots n{\cdot}(n-1){\cdot}A_n(x-a)^{n-2}, \quad \dots, \quad P^{(n)}(x) = n{\cdot}(n-1){\cdot}\dots{\cdot}2{\cdot}1{\cdot}A_n.$$

Вычислим значения выражений в точке $x = a$:

$$P(a) = A_0, \quad P'(a) = A_1, \quad \dots, \quad P^{(n)} = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot A_n.$$

Откуда получаем, что

$$A_0 = P(a), \quad A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, \quad \dots, \quad A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Подставив полученные выражения в $P(x)$, будем иметь

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n$$

формулу Тейлора.

Если в формуле Тейлора положить $a = 0$, то получаем формулу Маклорена

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)(0)}}{n!}x^n$$

**Пример.** *Разложите многочлен*

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

*по степеням: а) $x$, б) $(x-1)$.*

**Решение.** Вычислим производные от $P(x)$ до второго порядка включительно:

$$P(x) = x^2 - 3x + 2, \quad P'(x) = 2x - 3, \quad P''(x) = 2.$$

Найдём значения полученных функций в точках $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Имеем:

$$P(0) = -2, \quad P'(0) = -3, \quad P''(0) = 2,$$

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = -1, \quad P''(1) = 2.$$

Откуда получаем:

$$x: \quad P(x) = 2 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 2 - 3x + x^2,$$

$$x-1: \quad P(x) = 0-1\cdot(x-1)+\frac{2}{2!}(x-1)^2 = -x+1+(x^2-2x+1) = -x+1+x^2-2x+1 = 2-3x+x^2.$$

$\square$

Рассмотрим общий случай, когда функция не является каким либо многочленом степени $n$. Пусть задана функция $y = f(x)$ определённая в окрестности точки $a$ и известно, что она имеет производные до порядка $n$ включительно в этой же окрестности

$$f'(x), \quad f''(x), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(x).$$

Вычислим значения производной и самой функции в точке $x = a$:

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \quad \ldots, \quad f^{(n)}(a).$$

Зададим функцию

$$Q_{n-1}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1},$$

которую назовём многочленом Тейлора для $y = f(x)$. Если функция $f(x) = P_{n-1}(x)$, то она будет равна многочлену Тейлора $f(x) = Q_{n-1}(x)$.

Если $f(x) \neq P_{n-1}(x)$, то представим её в виде

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x),$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен Тейлора, $R_n(x)$ – некоторая функция. В этом случае $f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x)$ называют формулой Тейлора функции $f(x)$, а $R_n(x)$ – остаточный член заданной функции.

Определим остаточный член $R_n(x)$. Пусть дана функция определённая и имеющая производные до порядка $(n-1)$ включительно на отрезке $[a,b]$ и на $(a,b)$ существует $n$-ая производная. Тогда можно задать формулу Тейлора

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x).$$

Рассмотрим значение функции в точке $b$,

$$f(b) = Q_{n-1}(b) + R_n,$$

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{f^{(n_1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n.$$

Будем искать остаточный член в виде

$$R_n = M(b-a)^n.$$

Найдём $M$. Для этого рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(b) - \left( f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \ldots + \frac{f^{(n_1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + M(b-x)^n \right).$$

Вычислим производную

$$\varphi'(x) = -\Bigg( f'(x) - \frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}2(b-x) + \ldots$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}\left((b-x)^{n-1} - Mn(b-x)^{n-1}\right)\Bigg)$$

или после приведения подобных

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + Mn(b-x)^{n-1}.$$

Если $\varphi'(x)$ на $(a,b)$ равна нулю, то можно найти $M$.

Действительно, поскольку функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условия теоремы Ролля, то найдётся точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$. Откуда получаем

$$\varphi'(\xi) = -(b-\xi)^{n-1}\left(\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn\right) = 0.$$

Следовательно

$$M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

так как $a < \xi < b$. Таким образом,

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$$

и

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n,$$

$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$ – остаточный член в форме Лагранжа

При $n = 1$ из формулы Тейлора следует формула Лагранжа, поскольку

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(b-a), \quad a < \xi < b$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Для произвольных точек $x$, $x_0 \in [a,b]$ можно записать

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x).$$

Здесь

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \xi \in [x_0,x].$$

По другому остаточный член можно записать в следующем виде для $0 < \theta < 1$, так как $\xi \in [x_0,x]$, то точку $\xi$ можно описать

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пусть $x_0 = 0$, то

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n-1)}(\theta x)}{n!}x^n, \quad 0 < \theta < 1.$$

Мы получили формулу Маклорена.

## *Задания для самостоятельной работы*

1. Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите производные следующих функций

   (a) $y = \sin^3 x$,

   (b) $y = \ln \operatorname{tg} x$.

   (c) $y = 5^{\cos x}$,

   (d) $y = \ln \sin(x^3 + 1)$,

   (e) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$,

   (f) $y = \ln^5(\operatorname{tg} 3x)$,

   (g) $y = \sin^2 \sqrt{\frac{1}{1-x}}$,

   (h) $y = \arccos \sqrt{x}$,

   (i) $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$,

   (j) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

2. Найдите производные $n$-го от следующих функций

   (a) $y = \ln x$,

   (b) $y = \sin x$,

   (c) $y = e^{kx}$,

   (d) $y = \sin x \cos x$.

3. Найдите указанные производные

   (a) $y = 2x^3 + 3x^5 + x$, найдите $x'_y$;

   (b) $y = 3x - \frac{\cos x}{2}$, найдите $x'_y$;

   (c) $y = x + e^x$, найдите $x'_y$.

4. Для следующих функций, заданных параметрически, найдите производные первого порядка от $y$ по $x$

   (a)
   $$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t; \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^2 - 3t + 1; \end{cases}$$

   (c)
   $$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t); \end{cases}$$

   (d)
   $$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

5. Применяя правило Лопиталя, найдите предел функций

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$,

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln\cos(2x^2 - x)}$,

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\operatorname{arctg} x^2 - \pi}$,

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$,

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

(i) $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x \quad (n > 0)$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\ln(1+\sin^2 x)\operatorname{ctg}\ln^2(1+x)\right)$,

(k) $\lim\limits_{x\to +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$,

(l) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{a^{\ln x} - x}{\ln x}$,

(n) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$,

(o) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1 - 4\sin^2\frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$,

(p) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin\frac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$,

# 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## 6.1. Признаки возрастания и убывания функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$ и на этом отрезке точки $x_1$, $x_2$. Предположим, что $x_1 < x_2$, то возникает вопрос: каково соотношение между $f(x_1)$ и $f(x_2)$? Ответ на этот вопрос указывает поведение функции. В том случае, если $x_1 < x_2$ и $f(x_1) \leq f(x_2)$ – функция неубывающая на отрезке $[a,b]$; если $x_1 < x_2$, а $f(x_1) < f(x_2)$ – возрастающая; если $f(x_1) \geq f(x_2)$ – невозрастающая, если $f(x_1) > f(x_2)$ – убывающая. Зная, что такое невозрастающая и неубывающая функция можно ввести понятие монотонная функция.

**Определение.** *Монотонная функция – это функция либо убывающая, либо возрастающая.*

Справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $(a,b)$. Тогда функция $y = f(x)$ неубывающая на отрезке тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ для любой точки $(a,b)$.*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть $f(x)$ неубывающая, докажем, что $f'(x) \geq 0$ на $(a,b)$. Рассмотрим график $y = f(x)$. Возьмём точки $x$, $x + \Delta x$ из $(a,b)$. Рассмотрим значения функции в этих точках: $f(x)$, $f(x+\Delta x)$. Если $\Delta x > 0$, то $x < x+\Delta x$, сравним $f(x)$ и $f(x+\Delta x)$. Так как $f(x)$ неубывающая, то $f(x) \leq f(x+\Delta x)$ или $f(x+\Delta x)-f(x) \geq 0$. Если $-\Delta x < 0$, то $x - \Delta x < x$ и $f(x - \Delta x) - f(x) \geq 0$. Рассмотрим соотношение

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Вычислим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

а это и есть производная функции $y = f(x)$ в любой точке $(a,b)$.

*Достаточность.* Пусть $f'(x) \geq 0$ при $x \in (a,b)$. Докажем, что $f(x)$ неубывающая на $[a,b]$. Возьмём две точки $x_1$, $x_2 \in [a,b]$ и $x_1 < x_2$. Сравним с нулём разность $f(x_2) - f(x_1)$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

для $x_1 < \xi < x_2$. Отсюда получаем, что $x_2 - x_1 > 0$ и $f'(\xi) \geq 0$. Таким образом,

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

$\square$

Аналогичную теорема существует и для невозрастающей функции.

**Теорема.** *Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на $(a,b)$. Тогда $f(x)$ невозрастающая на $[a,b]$ функция тогда и только тогда, когда $f'(x) \le 0$ для любой точки $(a,b)$.*

Из теорем следует, что интервалы монотонности совпадают с интервалами знакопостоянной производной от заданной функции.

В этом случае справедливо утверждение.

**Теорема.** *Функция $f(x)$ возрастающая на $[a,b]$, если $f'(x) > 0$ при любом $x \in (a,b)$ и $f(x)$ убывающая на $[a,b]$, если $f'(x) < 0$ при любом $x \in (a,b)$.*

## 6.2. Экстремум функции

Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки $x_0$.

**Определение.** *Точка $x_0$ называется точкой локального максимума, если можно найти такое $\delta > 0$, что как только аргумент находится в $\delta$-окрестности точки $x_0$, то $\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0$.*

Аналогично определяется точка локального минимума.

**Определение.** *Точка $x_0$ – точка локального минимума, если*

$$\exists \delta > 0: \ \forall x \quad |x - x_0| < \delta, \quad \Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0.$$

Локальный максимум и локальный минимум определяют локальные экстремумы функции $y = f(x)$.

**Теорема. (Необходимое условие экстремума)** *Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или не существует: $f'(x_0) = \infty$.*

**Доказательство.** Предположим, что $f'(x_0) \ne 0$. Для определённости $f'(x_0) > 0$. Откуда следует, что $f(x)$ возрастает в точке $x_0$, то есть существует $\delta$-окрестность, $\delta > 0$ $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)$, а для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, $f(x) > f(x_0)$. Поэтому

$$f(x_0) \ne \left\{ \begin{array}{l} \max f(x) \text{ на } (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ \min f(x) \text{ на } (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \end{array} \right)$$

и $x_0$ не является ни точкой максимума, не точкой минимума. $\square$

Точки, в которых производная равна нулю или не существует называются критическими.

**Теорема. (Достаточные условия максимума и минимума функции)** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и является критической для данной функции. Если в окрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$, а в окрестности $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то $f(x_0)$ есть максимум функции.*

**Доказательство.** Рассмотрим таблицу

| $f'(x)$ | $(x_0 - \delta, x_0)$ | $(x_0, x_0 + \delta)$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | возрастает на $[x_0 - \delta, x_0]$ | убывает на $[x_0, x_0 + \delta]$ |

Отсюда следует, что в точке $x_0$ есть локальный максимум. □

Верна и аналогичная теорема для локального минимума функции.

**Теорема.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $f'(x_0) = 0$. Если в $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$, а в окрестности $(x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то $f(x_0)$ есть минимум функции.*

## 6.3. Исследование функций на максимум и минимум при помощи второй производной

**Теорема.** *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x_0$ и $f'(x_0) = 0$, а значение $f''(x_0) \neq 0$. Если $f''(x_0) < 0$, то $f(x_0)$ есть максимум функции, а если $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ – минимум функции.*

**Доказательство.** Пусть $f'(x_0) = 0$, то $x_0$ – критическая точка функции. Предположим, что $f''(x_0) < 0$. Тогда $f'(x_0)$ убывает в точке $x_0$, а поэтому в окрестности $(x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > f'(x_0) = 0$ и в $(x_0.x_0 + \delta)$ $f'(x < f'(x_0)$. Это и означает, что точка $x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$. □

## 6.4. Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Обозначим через:
$m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ – наименьшее значение функции на отрезке;
$M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ – наибольшее значение функции на отрезке.

Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, то есть существуют точки $x_0, x_1 \in [a,b]$ такие, что $m = f(x_1)$ и $M = f(x_0)$.

Рассмотрим случай, когда функция достигает своего наибольшего значения:

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = M = f(x_0), \quad x_0 \in [a,b].$$

В этом случае точка $x_0$ может быть либо крайней, то есть $x_0 = a$ или $x_0 = b$, либо находится внутри интервала $a < x_0 < b$. В крайних точках $f(x_0) = f(a)$ или $f(x_0) = b$, а если $x_0 \in (a,b)$, то $x_0$ – точка локального максимума.

**Правило нахождения наибольшего и наименьшего значения функции**

1. Найти все критические точки на $(a,b)$.

2. Вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка $f(a)$, $f(b)$.

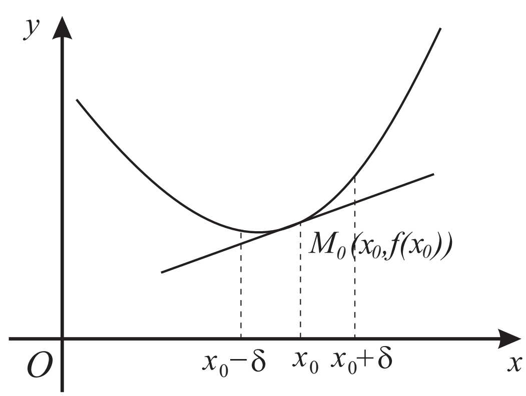
3. Сравнить полученные значения

$$m = \min\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(a),f(b)\},$$

$$M = \max\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(a),f(b)\}.$$

## 6.5. Направление выпуклости и точки перегиба кривой

Пусть задана функция $y = f(x)$. Проведём в точке $M_0(x_0,y_0)$ касательную к графику. Это означает ,что в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$.




В том случае выпуклость функции направлена вниз, если в $\delta$-окрестности точки $x_0 \in (x_0 - \delta,x_0 + \delta)$ кривая находится выше касательной

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta,x_0) \cup (x_0,x_0 + \delta).$$

Определим выпуклость вверх

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x \in (x_{-}\delta,x_0) \cup (x_0,x_0 + \delta).$$

Рассмотрим понятие выпуклости на интервале. В этом случае график функции лежит не выше или не ниже любой своей касательной проведённой в точке интервала.

**Определение.** *Точку называют точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если найдётся такая $\delta$-окрестность этой точки, что выпуклость меняет знак при переходе через эту точку.*

Дадим необходимое и достаточное условие существования точки перегиба. Пусть функция, для определённости, выпукла вниз. Обозначим через $M(x,y)$ произвольную точку, а через $Y$ – значение касательной в точке $x$. В этом случае $y > Y$ или $y - Y > 0$. Если функция выпукла вверх, то $y < Y$ или $y - Y < 0$.

Найдём способ определения знака выражения $y - Y$. Запишем уравнение касательной $Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Тогда

$$y - Y = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)).$$

Преобразуем полученное выражение. Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в точке $x_0$. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + t(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2, \quad 0 < t < 1.$$

Следовательно

$$y - Y = \frac{f''(x_0 + t(x - x_0))}{2}(x - x_0)^2,$$

то есть всё зависит от знака второй производной в точке $x_0$.

Таким образом,

– если $f''(x_0) > 0$, то $y - Y > 0$ и функция выпукла вниз;

– если $f''(x_0) < 0$, то $y - Y < 0$ и функция выпукла вверх.

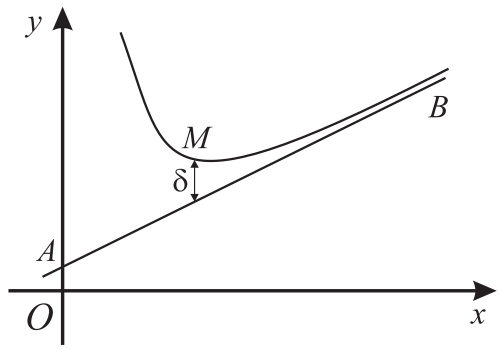
Справедливы следующие

**Теорема. (Необходимое условие существование точки перегиба)** *Точка $M_0(x_0,f(x_0))$ называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если в этой точке $f''(x_0) = 0$ или не существует.*

**Теорема. (Достаточное условие существования точки перегиба)** *Пусть задана функция $y = f(x)$, у которой существует непрерывная вторая производная в точке $x_0$. Если $f''(x_0) = 0$ и вторая производная меняет знак при переходе через точку $x_0$, то точка $M_0(x_0,f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.*

## 6.6. Асимптоты графика функции

Пусть задана функция $y = f(x)$.




**Определение.** *Прямая $AB$ называется асимптотой кривой $y = f(x)$, если расстояние $\delta$ от кривой $f(x)$ до прямой $AB$ стремится к нулю ($\delta \to 0$) при стремлении $M \to \infty$ по кривой $y = f(x)$.*

Асимптоты могут быть наклонными, вертикальными и горизонтальными.

Рассмотрим случай вертикальной асимптоты: $x = x_0$. Пусть дана кривая $y = f(x)$. Найдём условие, когда $x = x_0$ является вертикальной асимптотой.

Вычислим пределы справа и слева от точки $x_0$ функции $f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty$, либо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота.

## 6.7. Общее исследование функции и построение графика

**План исследования функции:**

– Найти область определения функции.

– Выяснить, является ли функция чётной, нечетной или периодической.

– Найти точки пресечения графика функции с осями координат.

– Установить интервалы монотонности функции и найти точки экстремума.

– Найти асимптоты графика функции.

– Найти точки перегиба графика функции.

– Построение графика функции, при необходимости вычислив несколько контрольных точек.

**Пример.** *Проведите полное исследование функции и постройте график*

$$y = \frac{2x^3}{x^2-4}.$$

**Решение.**

**1.** Функция определена и непрерывна на всей оси, кроме точек $x = \pm 2$.

**2.** Функция нечётная, так как

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2-4} = -\frac{2x^3}{x^2-4} = -f(x).$$

График этой функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно исследовать функцию в промежутке $[0,\infty)$.

**3.** Найдем точки пересечения с осями координат. С осью $Ox$, то есть $y = 0$. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{2x^3}{x^2-4} = 0,$$

решение которого служит значение $x = 0$. Получили точку $O(0,0)$.

Найдем точку пересечения с осью $Oy$, то есть $x = 0$. Тогда, подставив её в функцию, имеем $y = 0$. Снова получили точку $O(0,0)$. **4.** Вычислим первую производную функции

$$y' = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

В промежутке $[0,\infty)$ производная обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = 2\sqrt{3}$, а в точке $x = 2$ не существует. Определим знаки производной на интервалах $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3},\infty)$. На интервале $(0,2)$ производная отрицательна, а это означает, что функция тут убывает.

На интервале $(2,2\sqrt{3})$ производная отрицательна, а это означает, что функция тут убывает.

На интервале $(\sqrt{3},\infty)$ производная положительна, а это означает, что функция возрастает на этом интервале.

При переходе через точку $x = 2\sqrt{3}$ производная меняет знак с минуса на плюс, то есть в этой точке мы имеем минимум функции. Вычислим значение функции в этой точке

$$f(2\sqrt{3}) = \frac{2\cdot(2\sqrt{3})^3}{(2\sqrt{3})^2-4} = 6\sqrt{3}.$$

Получили точку $A(2\sqrt{3},6\sqrt{3})$. **5.** Найдем вертикальную асимптоту. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{2x^3}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2+0} \frac{2x^3}{x^2-4} = +\infty.$$

Вычислим наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-4} = 2, \quad b = \lim_{x\to\infty} (y - 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0.$$

Заданная кривая имеет наклонную асимптоту $y = 2x$.

**6.** Вычислим вторую производную функции

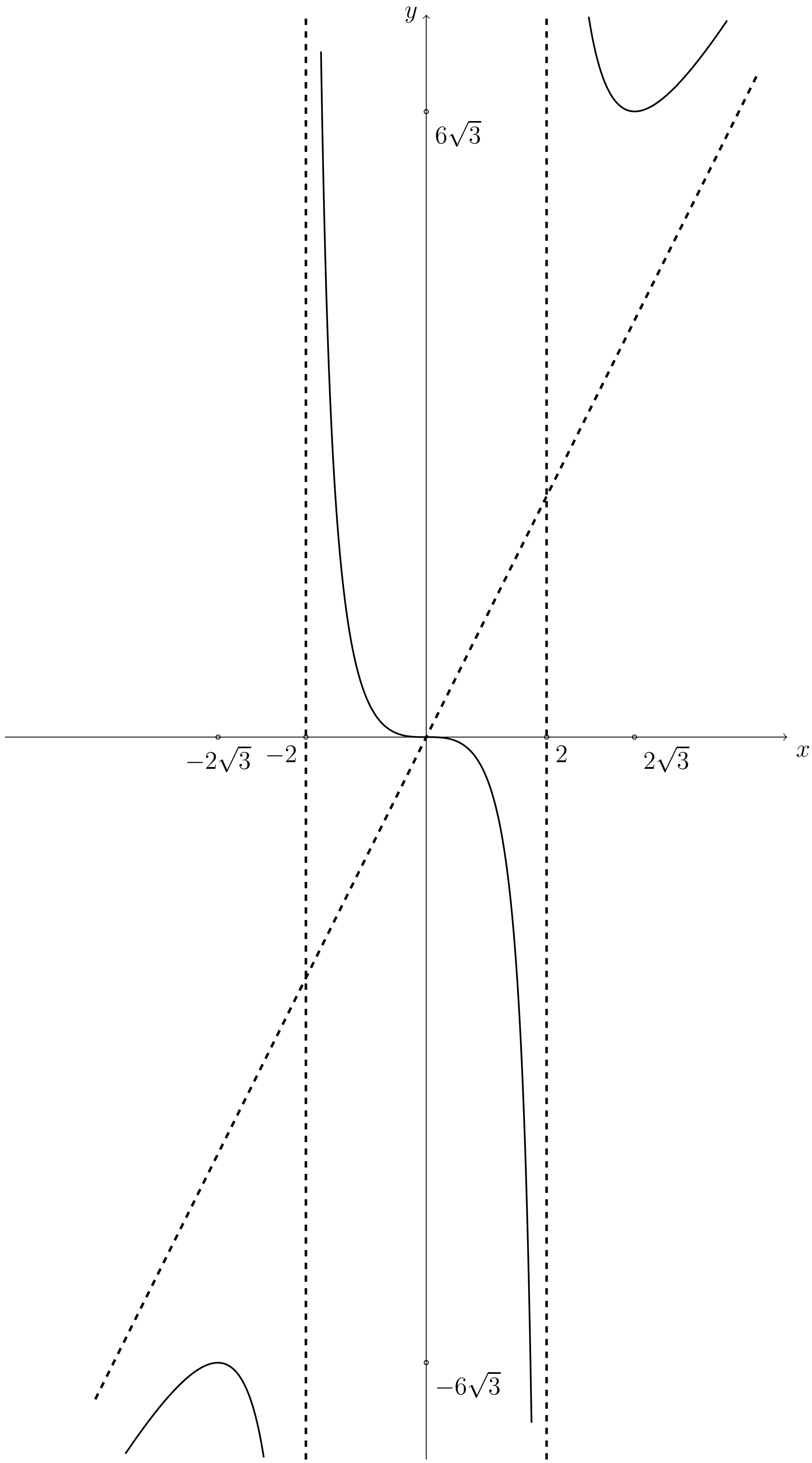
$$y'' = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3},$$

которая обращается в нуль в точке $x = 0$ и не существует в точке $x = 2$. Определим знаки второй производной на интервалах $(0,2)$ и $(2,\infty)$.

На интервале $(0,2)$ вторая производная отрицательна, то есть график функции на этом интервале выпуклый вверх.

На интервале $(2,\infty)$ вторая производная положительна, то есть график функции на этом интервале выпуклый вниз.

**7.** Используя результаты исследования, строим график.



$y$
$6\sqrt{3}$
$-2\sqrt{3}$
$-2$
$2$
$2\sqrt{3}$
$x$
$-6\sqrt{3}$

# *Задания для самостоятельной работы*

Проведите полное исследование функции и постройте график

1. $y = \frac{x^3}{3-x^2}$,
2. $y = \frac{\sin^2 x}{2+\sin x}$,
3. $y = \frac{x^2+1}{x^2-8x+16}$,
4. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$,
5. $y = x + \ln(x^2 - 1)$,
6. $y = \frac{\sin x}{x}$.

# 7. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 7.1. Понятие первообразной

**Определение.** *Функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на $(a{,}b)$, если $F(x)$ дифференцируема на $(a{,}b)$ и её производная равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Рассотрим*

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = F(x) + C$, где $C = const$, то $\Phi(x)$ также является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$\Phi(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Справедлива следующая

**Теорема.** *Пусть функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ первообразные для $f(x)$ на $(a{,}b)$. Тогда $F(x)$ и $\Phi(x)$ отличаются друг от друга на константу*

$$F(x) - \Phi(x) = C, \quad C = const.$$

**Доказательство.** Пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ первообразные для $f(x)$. По определению $F'(x) = \Phi'(x) = f(x)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = F(x) - \Phi(x)$. Вычислим её производную

$$\varphi'(x) = F'(x) - \Phi'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in (a{,}b).$$

Зафиксируем две точки $x_0{,}x_1 \in (a{,}b)$ и пусть $x_0 < x_1$, то есть имеем отрезок $[x_0{,}x_1]$. Воспользуемся формулой Лагранжа для приращений:

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = (x_1 - x_0)\varphi'(\xi), \quad \xi \in (x_0{,}x_1),$$

но $\varphi'(x) = 0$ для всех $x \in (a{,}b)$. Следовательно

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_0) = (x_1 - x_0)\varphi'(\xi) = 0.$$

Таким образом,

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_0) = const \quad \forall x \in (a{,}b)$$

и

$$\Phi(x) - F(x) = C, \quad C = const.$$

$\square$

## 7.2. Неопределённый интеграл

**Определение.** *Множество всех первообразных* $\{F(x)\}r$ *функции* $f(x)$ *называют неопределённым интегралом функции* $f(x)$*:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad c + const, \quad f(x) = F'(x).$$

Выражение $f(x)dx$ – подынтегральное выражение. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $(a,b)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C = const.$$

Справедлива следующая

**Теорема.** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $(a,b)$*, то существует первообразная* $F(x)$ *и существует неопределённый интеграл* $\in f(x)dx$*.*

## 7.3. Свойства неопределённого интеграла

Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a,b)$.

1. Дифференциал от интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

**Доказательство.** Вычислим дифференциал от неопределённого интеграла

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

$\square$

**Следствие 1.** *Следствием этого свойства будет*

$$\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

2. Интеграл от дифференциала равен диффеернцируемой функции

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

**Доказательство.** Проинтегрируем дифференциал функции $F(x)$. Имеем

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \in f(x)dx = F(x) + C,$$

где воспользовались тем, что $F'(x) = f(x)$. $\square$

3. Константу можно выносить за знак интеграла

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \quad a = const.$$

**Доказательство.** Продифференцируем выражение $\int a \cdot f(x)dx$. Имеем

$$\left(\int a \cdot f(x)dx\right)' = a \cdot f(x) \ - \ \text{левая часть}$$

и

$$\left(a \cdot \int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x) \ - \ text.$$

□

4. Интеграл от суммы разности двух функций равен сумме или разности интегралов от этих функций

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x) \pm \int \varphi dx.$$

**Доказательство.** Продифференцируем левую часть заданного выражения

$$\left(\int (f(x) \pm \varphi(x))dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

Продифференцируем правую часть заданного выражения

$$\left(\int f(x) \pm \int \varphi dx\right)' = \left(\int f(x)\right)' \pm \left(\int \varphi dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

□

**Таблица основных интегралов**

1. $\int x^n dx = \frac{x^n+1}{n+1} + C, \quad n \neq -1, \quad x > 0.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$
4. $\int e^x dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

8. $\int \frac{1}{\cos^2} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \mathbb{Z}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < |a|.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{a^2 \pm x^2}| + C, \quad |x| < a.$

12. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$

Приведём примеры интегралов, которые не вычисляются в элементарных функциях:

- $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона. Этот интеграл существует, так как функция $e^{-x^2}$ непрерывна.

- $\int \frac{dx}{\ln x}$, $x > 0$ и $x \neq 1$ – интегральный логарифм.

- $\int \sin x^2 dx$, $\int \cos x^2$ – интегралы Френеля.

- $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $x \neq 0$ – интегральный синус и интегральный косинус.

**Пример.** *Вычислите интеграл*

$$\int \left( \sqrt{x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} \right)^2 dx.$$

**Решение.** Воспользуемся таблицей интегралов. Имеем

$$\int \left( \sqrt{x^3 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}} \right)^2 dx = \int \left( x^3 + \frac{1}{x^3} - 2 \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} - 2x + C.$$

□

## 7.4. Интегрирование заменой переменной

Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$. Вычислим интеграл $\int f(x)dx$. Возьмём вместо аргумента $x$ функцию $\varphi(t)$, $x = \varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – непрерывная функция и существует обратная функция $t = \psi(x)$. В этом случае

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

Проверим справедливость формулы. Вычислим производные по от левой и правой части:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x),$$

$$\left(\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\right)'_x = \left(\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\right)'_t t'_x = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f\left(\varphi(t)\right) = f(x),$$

так как $t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}$.

Такой способ интегрирования носит название "интегрирование заменой переменной или постановкой".

Если подынтегральное выражение можно представить как

$$f(x)dx = g\left(\psi(x)\right)\psi'(x)dx,$$

то

$$f(x)dx = g\left(\psi(x)\right)\psi'(x)d\left(\psi(x)\right),$$

так как $\psi'(x)dx = d\left(\psi(x)\right)$. Тогда

$$\int f(x)dx = \int g\left(\psi(x)\right)\psi'(x)dx = F\left(\psi(x)\right) + C$$

Этот способ называется "внесение под знак дифференциала".

## 7.5. Интегрирование по частям

Пусть даны непрерывные функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, причём они имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда существует производная их произведения

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Проинтегрируем полученное выражение, используя свойства неопределённого интеграла. Имеем

$$\int\left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx = u(x)v(x) + C.$$

Откуда получаем

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Заметим, что $v'(x)dx = d(v(x))$, $u'(x)dx = d(u(x))$. Окончательно

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Эта формула называется формулой *интегрирования по частям.*

**Пример.** *Вычислите интеграл*
$$\int \operatorname{arctg} x dx.$$

**Решение.** Положим здесь
$$u = \operatorname{arctg} x, \quad dv = dx,$$
откуда
$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$
Тогда
$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$
□

## 7.6. Интегрирование рациональных функций

Простейшей рациональной функцией является многочлен
$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$
при этом $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Число $b \in \mathbb{R}$ есть корень многочлена $Q_n(x)$, если $Q_n(b) = 0$. В этом случае многочлен $Q_n(x)$ можно разложить на множители
$$Q_n(x) = (x-b) \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q),$$
причём $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$. В итоге получим
$$Q_n(x) = (x-a)^{\alpha} \cdot (x-b)^{\beta} \cdot \ldots \cdot (x-m)^{\lambda}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{\mu_s}.$$
Здесь $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{N}$ и
$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda + 2(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_s) = n.$$
Если $\alpha = 1$, то $a$ – простой корень, если $\alpha > 1$, то $a$ – корень кратности $\alpha$.

Рациональной функцией называют соотношение
$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$
при этом предполагается, что у многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ нет одинаковых корней.

### Простейшие дроби

К простейшим дробям относятся:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A_k}{(x-a)^k}$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

IV. $\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}$.

Здесь $A$, $M$, $N$, $a$, $p$, $q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Любая дробь вида* $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(m < n)$ *может быть единственным образом представлена как*

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \ldots +$$

$$+\frac{M-1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots + \frac{M_s+N_s}{(x^2+p_sx+q_s)^s},$$

$A_1, \ldots, A_\alpha, B-1, \ldots, B_\beta, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_s, N_s \in \mathbb{R}$.

Проиллюстрируем применение этого метода на следующем примере.

**Пример.** *Разложите на простейшие дроби выражение*

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}.$$

**Решение.** Представим выражение следующим образом

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2},$$

так как $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$. Найдём коэффициенты $A$, $B$ и $C$:

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x-1).$$

Два многочлена равны, тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих степенях равны:

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A+B+C=3, \\ x: & -3A-2B-C=-6, \\ x^0: & A=2. \end{array}\right\}$$

Откуда получаем, что $A=1$, $B=1$, $C=1$. В итоге

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$$

$\square$

**Интегрирование простейших дробей**

I. Рассмотрим первую дробь $\frac{A}{x-a}$, где $A$, $a \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

II. Проинтегрируем вторую дробь $\frac{A}{(x-a)^k}$:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \frac{dx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) =$$

$$= A\cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

III. Вычислим интеграл от выражения $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Имеем

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \left(x^2+2x\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2\right) + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right), \\ \text{где } q-\frac{p^2}{4} > 0, \\ \text{обозначим } x+\frac{p}{2} = t,\ a^2 = q-\frac{p^2}{4}, \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+a^2} + \left(N+\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C = \frac{M}{2}\ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2\right) +$$

$$\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$$

И окончательно,

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

**Пример.** *Вычислите интеграл*

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx.$$

**Решение.**

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{p^2}{4} - q = -2 < 0, \\ x^2+4x+6 = (x^2+4x+4)+2 = (x+2)^2+2, \\ t = x+2,\ dx = dt,\ x = t-2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt = \int \frac{4-t}{t^2+2}dt = 4\int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+2} =$$

$$= 4\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg} t\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C = \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + C.$$

$\square$

IV. Вычислим интеграл от $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $\frac{p^2}{4} - q < 0$. Имеем

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{array}{l} x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right) = t^2+a^2, \\ t = x+\frac{p}{2},\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{MP}{2}\right)}{(t^2+a^2)^l}dt = \int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^k}dt + \int \frac{N + \frac{Mp}{2}}{(t^2+a^2)^k}dt =$$

$$= \frac{M}{2}\int (t^2+a^2)^{-k}d(t^2+a^2) + \left(N + \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{M}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \left(N + \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Обозначим через $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$. Преобразуем данное выражение как

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k}dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^k} =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}.$$

Вычислим интеграл $\int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}$ по частям. Имеем

$$\int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \left| \begin{array}{ll} u = t, & du = dt \\ dv = \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k}, & v = \frac{1}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

В итоге

$$I_k = \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k}I_{k-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{1}{2(1-k)}\right)I_{k-1} - \frac{1}{2a^2}\frac{t}{(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

и получили так называемую рекуррентную формулу.

**Пример.** *Вычислите интеграл*

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx.$$

**Решение.** Запишем

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-4x+5=(x^2-4x+4)+1=(x-2)^2+1, \\ t=x-2,\, dx=dt,\, x=t+2 \end{array} \right| =$$

$$= \int t+3(t^2+1)^2dt = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} + 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Введём обозначение $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$. Тогда

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C.$$

Окончательно

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3I_2 = -\frac{1}{2(t^2+1)} + \frac{3t}{2(t^2+1)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{3x-7}{2(x^2-4x+5)} + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x-2) + C,$$

где сделали обратную замену переменных и выполнили преобразования. □

Справедлива следующая

**Теорема.** *Неопределённый интеграл от любой рациональной функции существует и выражается через конечное число элементарных функций, а именно он является алгебраической суммой, членами которой могут быть лишь многочлены, рациональные дроби, натуральные логарифмы и арктангенсы.*

## 7.7. Интегрирование иррациональных функций

Рассмотрим рациональную функцию

$$R(u_1,u_2,\ldots,u_k) = \frac{P_m(u_1,u_2,\ldots,u_k)}{Q_m(u_1,u_2,\ldots,u_k)},$$

где $P_m$ и $Q_n$ – многочлены от $u_1,u_2,\ldots,u_k$, а $u_1 = f_1(x)$, $u_2 = f_2(x)$, $\ldots$, $u_k = f_k(x)$. Тогда рациональная функция примет вид $R(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_k(x))$ .

I. Рассмотрим интеграл
$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$$
где $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $a{,}b{,}c{,}d \in RR$, $ad - bc \neq 0$.

Пусть $ad-bc=0$. Тогда $ad=bc$ и $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=k$. Откуда $\frac{ax+b}{cx+d}=k\frac{cx+d}{cx+d}=k$. В этом случае $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ не зависит от $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, то есть получаем обыкновенную рациональную функцию, которую уже несложно проинтегрировать.

Пусть $ad-bc\neq 0$. В том случае введём новую переменную
$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$
Отсюда получаем
$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^m - t}{a - ct^m}.$$
Здесь $x$ – рациональная функция от переменной $t$. Вычислим дифференциал
$$dx = \frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt.$$

Таким образом, поучили
$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx =\in R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m}, t\right)\frac{(ad-bc)mt^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt =$$
$$= \int R_1(t)dt = F(t) + C = F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) + C.$$

**Пример.** *Вычислите интеграл*
$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

**Решение.** Имеем
$$\int \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\frac{dx}{(2x+3)^2} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}} = t, \quad x = \frac{3}{2}\left(\frac{1+t^4}{1-t^4}\right), \\ dx = \frac{12t^4}{(1+t^4)^2}dt, \quad 2x+3 = \frac{6}{1-t^4} \end{array} \right| = \int t\frac{(1-t^4)^2}{36}\frac{12t^3}{(1-t^4)^2}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int^4 dt = \frac{1}{15}t^5 + C = \frac{1}{15}\left(\sqrt[4]{\frac{2x-3}{2x+3}}\right)^5 + C.$$

$\square$

II. Вычислим интеграл $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

Приведём несколько способов рационализации и вычисления этого интеграла.

a). *Первая подстановка Эйлера*

Сделаем следующую замену

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{a}x, \quad a>0.$$

Откуда получаем

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Вычислим дифференциал

$$dx=2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt.$$

Выразим через $t$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x=t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}=\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}.$$

Следовательно

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt=$$

$$=\int R_1(t)dt=F(t)+C.$$

b). *Вторая подстановка Эйлера*

Сделаем замену вида $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t$ или $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_2)t$, где $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ – корни уравнения. Вычислим переменную $x$ через $t$ и найдём дифференциал $dx$:

$$x=\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}, \quad dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Найдём

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-x_1)t=\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a}-x_1\right)t=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}.$$

Откуда получаем

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R\left(\frac{x_1t^2-ax_2}{t^2-a},\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt=$$

$$=\int R_1(t)dt=F(t)+C.$$

c). *Третья подстановка Эйлера*

Рассмотрим случай, когда $c > 0$. При этом замену будем брать в виде

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Откуда

$$x = \frac{1\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \quad dx = \frac{2(\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c})}{(a-t^2)^2}dt.$$

При этом

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}.$$

И окончательно получаем

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int R\left(\frac{1\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}\right)\frac{2(\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c})}{(a-t^2)^2}dt =$$

$$= \int R_1(t)dt = F(t) + C.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $a \neq 0$.

Выдели полный квадрат

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + p,$$

где $p$ – некоторое число. Введём новую переменную $t = x + \frac{b}{2a}$, $dx = dt$. Следовательно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{at^2+p}}$$

и вычисление интеграла будет зависеть от знаков коэффициентов $a$ и $p$.

II. $\int Mx + N\sqrt{ax^2+bx+c}dx$ .

Воспользуемся вычислениями первого случая. Таким образом,

$$\int Mx + N\sqrt{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{M\frac{1}{2a}\left((2ax+b)-b\right)+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \left[\ 2ax+b\ \text{ – это производная от } ax^2+bx+c\ \right] =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{M}{2a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(N-\frac{Mb}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

III. $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $P(x)$ – многочлен степени $n$. Вычислим это интеграл методом неопределённых коэффициентов. Введём эти коэффициенты следующим образом

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + A_n \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad (*)$$

Здесь $Q_{n-1}(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1}x^{n-1}$. Продифференцируем выражение $(*)$. Имеем

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q'_{n-1}\sqrt{ax^2+bx+c} + Q_{n-1}\frac{ax+\frac{b}{2}}{\sqrt{ax^2+bx+c}} + A_n\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Отсюда

$$P_n(x) = \underbrace{Q'_{n-1}(ax^2+bx+c)}_{\text{многочлен степени } n} + \underbrace{Q_{n-1}\left(ax+\frac{b}{2}\right)}_{\text{многочлен степени } n} + A_n.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, находим $A_0$, $A_1$, …, $A_n$. Таким образом, в выражении $(*)$ все коэффициенты определены, остаётся только вычислить

$$A_n \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = I.$$

## 7.8. Интегрирование тригонометрических функций

I. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx,$$

где $R$ – рациональная функция.

Рационализация данного интеграла достигается с помощью так называемой универсальной тригонометрической подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi.$$

При этом

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Тогда исходный интеграл примет вид

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

**Пример.** *Вычислите интеграл*

$$\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$$

**Решение.** Вычислим этот интеграл, используя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получим

$$\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x} = 2\int \frac{dt}{\left(5 - \frac{8t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{2-t} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

□

II. Если подынтегральную функцию $R(\sin x, \cos x)$ можно преобразовать в рациональную функцию от $\operatorname{tg} x$, то есть $R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x)$, то рационализация достигается с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$. Действительно, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Перепишем интеграл в виде

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\operatorname{tg} x)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Причём подстановку $t = \operatorname{tg} x$ целесообразно применять и в случае, когда выражение $R(\sin x, cosx)$ не меняется о перемены знака одновременно перед $\sin x$ и $\cos x$.

**Пример.** *Вычислите интеграл*

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$$

**Решение.** Рассмотрим подынтегральную функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sin^5 x \cos x}.$$

Если в ней заменить $\sin x$ на $-\sin x$, а $\cos x$ на $-\cos x$, то функция не изменится. Поэтому сделаем замену $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Откуда получаем

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^5}dt = -\frac{1}{4t^4} + \ln|t| + C = -\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

# *Задания для самостоятельной работы*

Вычислите интегралы

1. $\int \arcsin x dx$;
2. $\int x \cos x dx$;
3. $\int x^3 \ln x dx$;
4. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$;
5. $\int e^{5x} \cos 4x dx$;
6. $\int \cos(\ln x)\, dx$;
7. $\int x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$;
8. $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$;
9. $\int 3^x \cos x dx$;
10. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x}$.

# 8. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 8.1. Задачи, приводящие к определённому интегралу

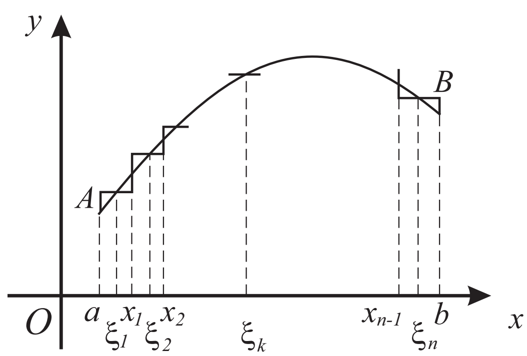
Задачи приводящие к определённому интегралу:

в геометрии – это задачи о вычислении площади плоской фигуры;

в физике – задача о вычислении пути пройденном материальной точкой.

*Первая задача.*

Рассмотрим в координатной плоскости $xOy$ функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Назовём криволинейной трапецией фигуру, ограниченную осью $Ox$, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, $aABb$ – криволинейная трапеция. Вычислим площадь фигуры $aABb$.




Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ упорядоченные точки

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Выберем на каждом из полученных отрезков по точке: $\xi_1$, $\xi_2$, ..., $\xi_n$. Вычислим значения функции $y = f(x)$ в этих точках. По построению получили прямоугольники. Основания прямоугольников – отрезки разбиения. Площадь прямоугольников равна

$$S_k = f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Мы получили некоторую ступенчатую фигуру, площадь которой равна

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots f(\xi_n)\Delta x_n \ - \ \text{интегральная сумма.}$$

Эта площадь приблизительно рана площади криволинейной трапеции.

Обозначим через $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ и устремим $\lambda$ к нулю, $\lambda \to 0$. В этом случае

$$\lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} S_n \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Это предел, если он существует, называют площадью криволинейной трапеции, причём результат не должен зависеть от разбиения $\Delta x_k$ и выбора точек $\xi_k$.

*Вторая задача.*

Пусть материальная точка движется со скоростью $v = f(t)$, с момента времени $t_0$ до $T$, $t \in [t_0,T]$. Разобьём отрезок $[t_0,T]$ на интервалы

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Обозначим длину каждого из отрезков через $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. На каждом из этих промежутков времени считаем, что скорость меняется незначительно, то есть равной, например $f(\tau_k)$, $\tau_k \in [t_{k-1},t_k]$. Тогда путь пройденный точкой за время $\Delta t_k$ равен $S_k = f(\tau_k)\Delta t_k$.

Рассмотрим сумму

$$S_n = f(\tau_1)\Delta t_1 + f(\tau_2)\Delta t_2 + f(\tau_3)\Delta t_3 + \ldots + f(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Выберем наибольший временной промежуток $\Delta t_k$ и назовём его
$\lambda = \max\{\Delta t_1,\Delta t_2,\Delta t_3,\ldots,\Delta t_n\}$. Пусть $\lambda \to 0$. Тогда можно рассмотреть предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

Обозначим полученный пределы как

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \text{ и } \int_{t_0}^{T} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k.$$

## 8.2. Понятие определённого интеграла

Пусть дана функция $y = f(x)$ заданная на промежутке $[a,b]$. Рассмотрим разбиение этого отрезка на $n$ частей

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

При этом длина каждого отрезка разбиения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$. На каждом из этих отрезков произвольным образом выберем точку $\xi_k$, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Запишем формально сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Записанная сумма называется интегральной суммой от функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Обозначим через $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$, $k = 1,2,\ldots,n$ и устремим $\lambda$ к нулю. Рассмотрим предел

$$I = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

называемый пределом интегральной суммы. Число $I$ называют пределом интегральной суммы, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, такое что для любого разбиения $\Delta x_k < \delta$ $(\lambda < \delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon \quad \forall\xi_k.$$

## 8.3. Понятие определённого интеграла в смысле Римана

Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a,b]$, если для любого разбиения $[x_{k-1},x_k]$ и любого выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ предел интегральных сумм один и тот же

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Это предел называют определённым интегралом в смысле Римана на отрезке $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Отсюда можно получить следствия.

**Следствие 1.** *Если функция $f(x)$ и*

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a,b] \text{ кроме } x = c, \\ C, & \text{при } x = c. \end{cases}$$

*В этом случае*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Это свойство справедливо для любого конечного числа точек из $[a,b]$.

Если $a < b$, то имеет смысл выражение

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если $a = b$, то

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

Если $a > b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

**Пример.** *Вычислите* $\int\limits_a^b dx$.

**Решение.** Составим интегральную сумму,

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{n-1} - x_{n-1}) + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Здесь подынтегральная функция $f(x) = 1$.

Вычислим предел интегральной суммы

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \lim_{\lambda \to 0}(b - a) = b - a.$$

□

## 8.4. Условие интегрируемости функций

Пусть на $[a,b]$ задана интегрируемая по Риману функция $y = f(x)$. Это означает, что существует определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда справедлива следующая

**Теорема.** *Если функция $y = f(x)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, то она ограничена на этом промежутке.*

**Доказательство.** Проведём доказательство от противного. Предположим, что $f(x)$ неограничена на $[a,b]$. Выберем один из отрезков разбиения, где она неограничена, например $[x_0,x_1]$. Составим интегральную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Здесь второе слагаемое есть некоторая константа, а первое слагаемое неограничено. Отсюда, при $\max \Delta x_k \to 0$, $k = 1,2,3,ldots,n$ не существует предела интегральных сумм. Следовательно функция $f(x)$ не интегрируема на $[a,b]$ мы получили противоречие.

□

Проверим является ли условие ограниченности достаточным условием интегрируемости по Риману, то есть следует ли из ограниченности интегрируемость по Риману.

Рассмотрим функцию Дирихле на [0,1]:

$$f(x) = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Эта функция ограничена, так как $D(x) \leq 1$. Составим интегральные суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \begin{cases} 1, & \xi \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \xi \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Следовательно $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n$ не существует, так как он равен либо 1, либо 0.

Таким образом, условие ограниченности не является достаточным для интегрируемости функции.

Справедлива следующие утверждения.

**Теорема. (Достаточное условие интегрируемости)** *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

**Теорема.** *Если функция определена и монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

**Теорема.** *Если функция ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нём конечное число точек разрыва, то функция интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

В итоге получили, что из интегрируемости следует ограниченность, а из ограниченности следует интегрируемость, если число точек разрыва конечно. Также из непрерывности и монотонности следует интегрируемость по Риману.

## 8.5. Свойства определённого интеграла

Рассмотрим на $[a,b]$ непрерывную функцию $y = f(x)$.

1. Определённый интеграл не зависит от переменной интегрирования.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла

$$\int\limits_a^b A \cdot f(x)dx = A \int\limits_a^b f(x)dx, \quad A = const.$$

**Доказательство.** Действительно, запишем определение определённого интеграла

$$\int_a^b A\cdot f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} A\cdot f(\xi_k)\Delta x_k = A\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} A\cdot f(\xi_k)\Delta x_k = A\int_a^b f(x)dx.$$

□

3. Интеграл от суммы или разности интегралов равен сумме или разности интегралов:

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

**Доказательство.** Из определения интеграла и свойств предела следует,

$$\int_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\left(f_1(\xi_k)\pm f_2(x)\right)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k)\Delta x_k \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

□

4. Для любых $a,b,c\in\mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

называемое аддитивностью определенного интеграла. **Доказательство.** Рассмотрим несколько случаев:

(a) пусть $a<c<b$, тогда из геометрического смысла определенного интеграла, где $x_m = c$, следует

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{m} f_(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

(b) пусть $a < b < c$. В этом случае

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx - \int\limits_b^c f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

□

5. Если для любой точки $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

6.

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

**Доказательство.** Для функции $y = f(x)$ проаведливо неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Проинтегрируем его по промежутку $[a,b]$

$$-\int\limits_a^b |f(x)|dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

или

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx,$$

что и требуется.

□

7. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, то она достогает на этом отрезке своего минималльно и максимальнго значения: $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда справедливо соотношение

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

8. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Тогда внутри этого промежутка найдётся тоска $\xi$ такая, что
$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$
**Доказательство.** Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, то на этом отрезке она примнимает свой наибольшее и наименьшее значение, то есть существую такие числа $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, то $m \leq f(x) \leq M$. Откуда получаем, что
$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$
Предположим, что $b - a > 0$. Следовательно
$$m \leq \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \leq M.$$
Обозначим через $\alpha$ выражение $\alpha = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда из непрерывности следует, что найдётся такая точка $\xi$, что $f(\xi) = \alpha$. В итоге получаем
$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi) \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$
$\square$

## 8.6. Замена переменных в определённом интеграле

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, при это будем считать, что подынтегральная функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Зададим функцию $x = \varphi(t)$, которая удовлетворяет условиям:

a) задана на отрезке $[\alpha,\beta]$ и непрерывна на нём, причём $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

b) производная $\varphi'(x)$ также непрерывна на $[\alpha,\beta]$.

Тогда
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

Докажем полученное соотношение.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b = F(b) - F(a), \quad \text{где} \quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Зададим функцию $\Phi(t) = F(\varphi(t))$. Тогда

$$\Phi'(t) = F'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t).$$

Таким образом, $\Phi(t)$ является первообразной для $f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)$.

Рассмотрим

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Из условия $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ получим, что

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Следовательно

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

□

**Пример.** *Вычислите определённый интеграл*

$$\int_0^\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}dx$$

**Решение.** Сделаем тригонометрическую подстановку. Имеем

$$\int_0^\alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{ll} x = \alpha\sin t, & \sqrt{\alpha^2 - x^2} = \alpha\cos t, \\ dx = \alpha\cos t dt, & x = 0,\, \alpha\sin t = 0, \\ x = \alpha,\, \alpha\sin t = \alpha & t_1 = 0,\, t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\alpha^2}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi\alpha^2}{4}.$$

□

Справедлива следующая

**Теорема.** *Если функция $y = f(x)$ интегрируема на симметричном промежутке $[-a,a]$, $a > 0$. Тогда справедливы равенства*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & f(x) - \text{чётная функция,} \\ 0 & f(x) - \text{нечётная функция.} \end{cases}$$

## 8.7. Интегрирование по частям

Пусть даны функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывные вместе со своими первыми производными на промежутке $[a,b]$, то есть $v,v \in C^1([a,b])$. Тогда для них справедливо соотношение

$$\int\limits_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Докажем справедливость приведённой формулы.

**Доказательство.** Нам дано, что $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции. Вычислим производную произведения $u(x)v(x)$. Имеем

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Откуда видно, что $u(x)v(x)$ первообразная для $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Это означает, что можно взять интеграл

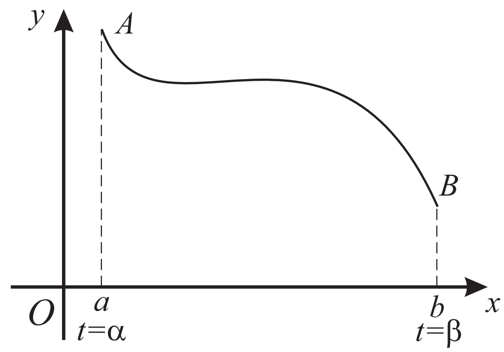
$$\int\limits_a^b \left(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b, \quad \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx + \int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx, \quad v'(x)dx = d\left(v(x)\right), \quad u'(x)dx = d\left(u(x)\right).$$

□

## 8.8. Площадь под кривой, заданной параметрически




Пусть кривая $AB$ задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывные на промежутке $[\alpha,\beta]$ функции, а также $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Известно, что площадь под кривой вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b y(x)dx.$$

Произведём замену переменных. Тогда будем иметь

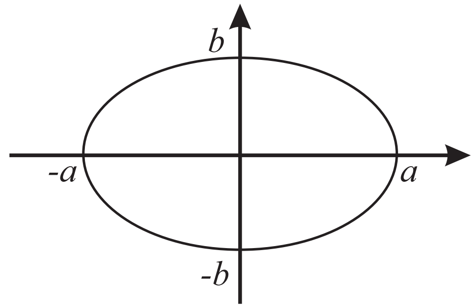
$$S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

**Пример.** *Вычислите площадь фигуры, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

*где* $a,b > 0$ *и* $t \in [0,dir\pi]$.

**Решение.**



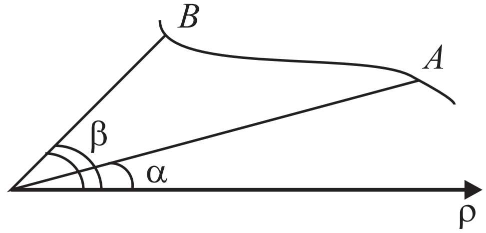
Воспользуемся формулой для вычисления площади криволинейной трапеции

$$S = 4\int\limits_0^a y(x)dx = \left| \begin{array}{lll} x=0, & a\cos t = 0, & t = \frac{\pi}{4}, \\ x=a, & a\cos t = a, & t=0 \end{array} \right| = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\cdot(-a)\sin tdt =$$

$$= -4ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 tdt = 4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \pi ab.$$

## 8.9. Площадь фигуры в полярных координатах

Пусть задана кривая в полярных координатах $\rho = f(\varphi)$




Функция $f(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и $f(\varphi) \geq 0$. Отметим, что $f(\alpha)$ – длина луча $OA$. Точка $B$ определяется лучом $OB = f(\beta)$. В итоге получили криволинейный сектор $OBAO$. Вычислим его площадь.

Разобьём сектор на $n$ секторов лучами

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta.$$

Введём обозначение $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. Возьмём $\tilde{\varphi}_k$ – угол, расположенный между $\varphi_{k-1}$ и $\varphi_k$. Откуда $\tilde{\rho}_k = f(\tilde{\varphi}_k)$.

Рассмотрим круговые сектора с радиусам $\tilde{\rho}_k$ и вычислим их площади

$$\Delta S_k = \frac{1}{2}\tilde{\rho}_k^2\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}f^2\left(\tilde{\varphi}_k\right)\Delta\varphi_k.$$

Тогда площадь всей фигуры будет приближённо равна

$$S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \ldots + \Delta S_n = \sum_{k=1}^n \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}f^2\left(\tilde{\varphi}_k\right)\Delta\varphi_k.$$

Обозначим через $\lambda$ наибольший из $\Delta\varphi_k$ устремим её к нулю $\lambda \to 0$. Откуда

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}f^2\left(\tilde{\varphi}_k\right)\Delta vp_k.$$

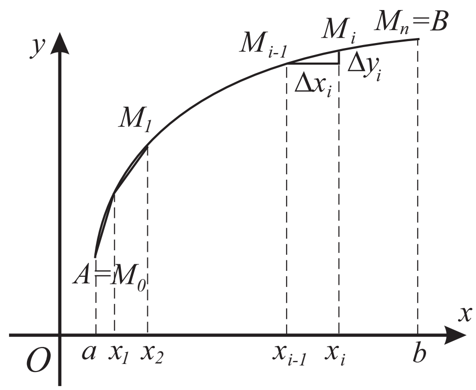
Таким образом, площадь фигуры в полярных координатах будет иметь вид

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2\left(\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi.$$

## 8.10. Вычисление длины дуги плоской кривой

I. Случай прямоугольной системы координат.

Пусть задана плоская кривая $AB$, уравнение которой $y = f(x)$, $a \le x \le b$.




Длина дуги $AB$ – это предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанная в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, причём длина наибольшего из звеньев стремится к нулю.

Если функция $y = f(x)$ и её производная $y' = f(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то длина дуги $AB$ вычисляется как

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Докажем эту формулу.

**Доказательство.** Разобьём отрезок $[a,b]$ точками

$$x_0 = a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n = b$$

на $n$ частей. Точкам разбиения на $AB$ будут соответствовать значения

$$M_0 = A,\ M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n = B.$$

Проведём хорды

$$M_0M_1,\ M_1M_2,\ \ldots, M_{n-1}M_n,$$

длины которых обозначим через $\Delta l_1$, $\Delta l_2$, $\Delta l_3$, $\ldots$, $\Delta l_n$.

Таким образом, получили ломаную $M_0M_1 \ldots M_n$, длина которой $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \ldots + \Delta l_n = l_n$. Найдём длину хорды $\Delta l_i$ по теореме Пифагора

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)},$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Из теоремы Лагранжа $\Delta y_i = f'(c_i)\Delta x_i$, где $c_i \in (x_{i-1},x_i)$. Тогда

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(c_i \Delta x_i))^2} = \sqrt{1 + (f'(c_i))^2} \Delta x_i.$$

Отсюда длина всей ломаной $l_n$ равна

$$l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \Delta x_i.$$

Из определения $l = \lim\limits_{\max \Delta l_i \to 0} l_n$. Поэтому при $\Delta l_i \to 0$ и $\Delta x_i \to 0$ в виду непрерывности функции $y = f(x)$ вместе со своей производной, существует предел

$$l = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0, \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx.$$

□

II. Параметрическое задание кривой $AB$.

Пусть уравнение кривой $AB$ задано в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

В этом случае длина дуги вычисляется как

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2} dt.$$

III. Кривая $AB$ задана уравнением в полярных координатах.

Пусть кривая $AB$ задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Будем считать, что $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны на $[a,b]$.

Запишем систему связывающую полярные и декартовы координаты

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Продифференцируем приведённую систему

$$\begin{cases} x'_\varphi = \rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \\ y' = \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Таким образом, имеем

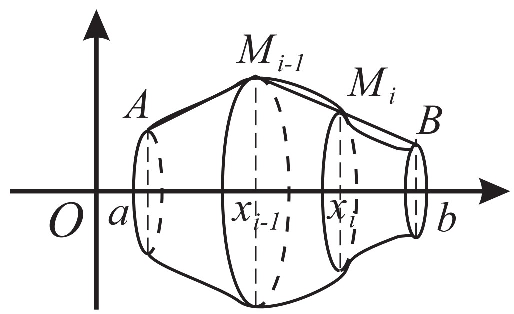
$$\sqrt{\left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2} = \sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2}.$$

Откуда

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2} d\varphi.$$

## 8.11. Площадь поверхности вращения

Пусть на плоскости $xOy$ задана непрерывная кривая $AB$ длины $l$: $y = f(x)$, $a \le x \le b$. На заданном промежутке производная функции $y = f(x)$ также непрерывна. Будем считать, что кривая $AB$ расположена над осью $Ox$.




Если кривую $AB$ вращать вокруг оси $Ox$, то она опишет некоторую поверхность – поверхность вращения. Вычислим площадь этой поверхности $S$.

Разобьём промежуток $[a,b]$ на $n$ произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b.$$

Впишем в кривую $AB$ ломаную с вершинами $M_i(x_i,y_i)$, $i = 0,1,2,\ldots,n$. Вращая ломаную вместе с кривой $AB$, получаем поверхность, составленную из $n$ усечённых конусов. Обозначим через $\lambda = \max|\Delta x_i|$ – длина наибольшего частичного промежутка, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Обозначим через $S_n$ площадь поверхности вращения ломаной. Площадь поверхности вращения кривой – $S = \lim\limits_{\lambda\to 0} S_n$.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса, образованного вращением $i$-го звена равна

$$2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} l_i,$$

где $l_i$ – длина хорды $\overline{M_iM_{i+1}} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)^2}$. По теореме Лагранжа

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Тогда

$$l_i = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i.$$

Следовательно площадь поверхности ломаной будет равна

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\sqrt{1 + \left(f'(\xi_i)\right)^2}\Delta x_i.$$

Представим полученную сумму в следующем виде:

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i + \pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i)+f(x_{i+1})-2f(\xi_i)\right)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Первая сумма является интегральной суммой для и нам осталось показать, что вторая сумма стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Поскольку каждая из разностей

$$|f(x_i - f(\xi_i))|, \quad |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)|$$

меньше $\varepsilon$, то

$$|f(x_i)+f(x_{i+1})-2f(\xi_i)| \; le |f(x_i)-f(\xi_i)| + |f(x_{i+1})-f(\xi_i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Откуда получаем, что

$$\left|\pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i)+f(x_{i+1})-2f(\xi_i)\right)\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i\right| \le$$

$$\le \pi \left|\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i)+f(x_{i+1})-2f(\xi_i)\right)\right| \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\Delta x_i < 2\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2} =$$

$$= 2\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} l_i \le 2\pi\varepsilon.$$

Легко заметить, что при $\varepsilon \to 0$ выражение $2\pi\varepsilon \to 0$.

Окончательно

$$S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Если кривая $AB$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то площадь вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int\limits_{t_0}^{t_1} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах, то

$$S = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + (\rho'_\varphi)^2}d\varphi.$$

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Вычислите интегралы:

   (a) $\int\limits_{-2}^{1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$;

   (b) $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$;

   (c) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

   (d) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{x^2+1} dx$;

   (e) $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$;

   (f) $\int\limits_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{5x+1}}$.

2. Найдите площадь фигуры заключенной между параболой $x^2 = 4y$ и локаном Аньези $y = \frac{8}{x^2+4}$.

3. Вычислите площадь фигуры, лежащей в первой четверти внутри круга

$$x^2 + y^2 = 3a^2,$$

   ограниченной параболами

$$x^2 = 2ay, \quad \text{и} \quad y^2 = 2ax, \quad (a > 0).$$

4. Найдите длину полукубической параболы $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 4$.

5. Найдите длину цепной линии

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

   от $x = 0$ до $x = a$.

6. Вычислите длину астроиды

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad a > 0.$$

# 9. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

## 9.1. Понятие числового ряда

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\ \ldots,\, a_n,\ \ldots.$$

Бесконечным рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \qquad (*)$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются членами ряда, $a_n$ при произвольном натуральном $n$ называется общим членом ряда.

Частичными суммами $S_n$ ряда $(*)$ называют суммы конечного числа его членов

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Число слагаемых бесконечно ,поэтому можно составить бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1,\, S_2,\, S_3,\ \ldots,\, S_n,\ \ldots$$

## 9.2. Сходимость ряда

**Определение.** *Бесконечный ряд $(*)$ сходится, если последовательность его частичных сумм стремится к какому-нибудь числу $S$ : $\quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Число $S$ называется, в этом случае, суммой ряда.*

*Если же последовательность частичных сумм стремится к бесконечности или вообще не имеет никакого предела, то ряд $(*)$ расходится.*

**Пример.** *Выясните, сходится или расходится числовой ряд*

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+1)}?$$

**Решение.** Запишем последовательность частичных сумм ряда

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3},$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4},$$

и

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} = 1,$$

то есть ряд сходится.

□

Другим важным примером будет

**Пример.** *Сходится или расходится числовой ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}?$$

**Решение.** Рассмотрим частичную сумму с номером, представляющим собой степень двойки, то есть $S_{2^k}$. Внутри этой суммы будем объединять следующим образом

$$S_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right).$$

Знаменатель последнего слагаемого в каждой скобке есть степень двойки, а число слагаемых в каждой скобке в два раза меньше последнего знаменателя. Поскольку слагаемые убываю по величине, то сумма слагаемых в каждой скобке больше, чем последнее слагаемое, умноженное на число слагаемых в скобке, то есть

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2},\\
\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8}\cdot 4 = \frac{1}{2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$S_{2^k} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 4 + \ldots + \frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2} = \frac{k+2}{2}.$$

Откуда следует, что $S_{2^k} \to \infty$ при $k \to \infty$.

□

Следующий знаковый пример это

**Пример.** *Исследуйте ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии*

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n.$$

**Решение.** Составим частичную сумму

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - g} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

При $n \to \infty$ изменяется только втрое слагаемое, причём характер изменения зависит от того, каково число $q$:

1. если $|q| < 1$, то $\frac{aq^n}{1-q} \to 0$ при $n \to \infty$, а поэтому

   $$S = \lim_{n\to\infty} S - n = \frac{a}{1-q},$$

   то есть ряд сходится;

2. если $|q| > 1$, то $\frac{aq^n}{1-q} \to \infty$ при $n \to \infty$ и $S_n$ не стремится ни к какому конечному пределу;

3. если $q = -1$, то последовательность $S_n$ не стремится ни к какому пределу, то есть

   $$S_n = \frac{a}{2} - \frac{a(-1)^n}{2}$$

   и последовательность $\{(-1)^n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ предела не имеет – ряд расходится;

4. если $q = 1$, то формула для $S_n$ не имеет смысла. Из построения геометрической прогрессии видно, что

   $$S_n = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} = na.$$

   В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд расходится.

□

## 9.3. Свойства сходящихся рядов

Сходящиеся ряды обладают рядом свойств, аналогичных свойствам конечных сумм.

**Теорема.** *Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$.*

**Доказательство.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится и сумма его равна $S$. Элемент $a_n = S - n - S_{n-1}$, но так как $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$ при $n \to \infty$, то $a_n \to 0$.

□

Из определения гармонического ряда следует, что эта теорема даёт только необходимый признак сходимости.

**Определение.** *Бесконечный ряд, который получается из данного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ путём отбрасывания некоторого конечного количества членов, взятых подряд, начиная с первого, называется остатком данного ряда.*

Если отброшено $n$ первых слагаемых, то остаток называется $n$-м остатком, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Если остаток является сходящимся рядом, то его обозначают $r_n$.

**Теорема.** *1. Если сходится бесконечный ряд, то сходится и любой его остаток;*

*2. если сходится какой-либо остаток ряда, то сходится и сам ряд.*

**Доказательство.**

1. Пусть дан сходящийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ имеющий сумму $S$. Покажем, что любой остаток этого ряда сходится. Возьмём $n$-й остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ и $m$-ю частичную сумму $\sigma_m = \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k$. Отсюда

   $$\sigma_m = a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m} = (a_1+a_2+\ldots+a_{n+m})-(a_1+a_2+\ldots+a_n) = S_{n+m}-S_n.$$

   При $m \to \infty$ слагаемое $S_{n+m} \to S$, так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Слагаемое $S_n$ не меняется с увеличением $m$.

   Итак, $\sigma_m$ при $m \to \infty$ стремится к конечному пределу, а поэтому и остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда после перехода к пределу в $\sigma_n$, $m \to \infty$

   $$r_n = S - S_n.$$

2. Пусть сходится какой-либо остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Проверим, что и сам ряд сходится. Возьмём частичную сумму с номером $p$ $(p > n)$. Тогда $p = n + m$ и

   $$S_p = S_{n+m} = S_m + S_m = S_n + \sigma_m.$$

Пусть $p \in \infty$, тогда $m \to \infty$. Сумма $S_m + \sigma_m$ стремится к конечному пределу $S_n + r_n$, следовательно и $S_p$ стремится к конечному пределу при $p \to \infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

□

**Теорема.** *Если ряд сходится, то его остаток $r_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$.*

**Доказательство.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму $S$. Запишем остаток $r_n = S - S - n$. Из сходимости ряда следует, что при $n \to \infty$ $S_n \to S$. Таким образом, $S - S_n \to 0$, то есть $r_n \to 0$.

□

Над любыми сходящимися рядами можно выполнить простые арифметические действия.

**Теорема.** *Пусть дан сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с суммой $S$, если все члены этого ряда умножить на одно и то же число $b$, то новый ряд также будет сходиться и сумма его будет равна $b \cdot S$, то есть будет равен сумме исходного ряда, умноженной на число $b$.*

**Доказательство.** Умножим все члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ на число $b$, получим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b \cdot a_n$. Возьмём частичную сумму $\sigma_n$ того ряда. Отсюда

$$\sigma_n = b \cdot a_1 + b \cdot a_2 + \ldots + b \cdot a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot b = b \cdot S_n.$$

При $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b \cdot S_n = b \cdot S$. Утверждение теоремы можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b \cdot a_n = b \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

это правило вынесения общего множителя за скобки можно обобщить на бесконечные сходящиеся ряды.

□

**Теорема.** *Пусть даны два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sigma$. Если составить ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ путём почленного сложения (или вычитания), то новый ряд будет сходящимся с суммой $S + \sigma$ $(S - \sigma)$.*

**Доказательство.** Преобразуем $n$-ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ следующим образом

$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = S_n \pm \sigma_n.$

При $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n + \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n + \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S + \sigma.$

□

## 9.4. Положительные ряды и их свойства

Положительным рядом называется ряд, все члены которого неотрицательны.

Если положительный ряд сходится, то это записывают как

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема.** *Для того чтобы положительный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы все его частичные суммы были ограничены сверху некоторым числом.*

**Доказательство.** *Достаточность.* Пусть все частичные суммы ограничены сверху $S_n \leq M$, $n = 1, 2, ldots$. В этом случае существует конечный предел последовательности $S_n$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

*Необходимость.* Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то есть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Последовательность $S_n$ стремится к $S$ возрастая, поэтому $S_n \leq S$, то есть $S_n$ ограничена сверху.

□

**Теорема.** *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Если выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

**Доказательство.** Так как $a_n \leq b_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то и частичные суммы связаны неравенством $S_n \leq \sigma_n$. Пусть сходится ряд с большими членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Тогда последовательность $\sigma_n$ ограничена сверху $\sigma_n \leq M$. Тем более и $S_n \leq M$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

$\square$

**Теорема.** *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Если выполнено неравенство $a_n \leq b_n$, то из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

**Теорема. (Признак сходимости Даламбера)** *Пусть дан положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, причём предположим, что все $a_n > 0$. Если существует предел отношения*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D,$$

*то*

1. *при $D < 1$ ряд сходится;*
2. *при $D > 1$ ряд сходится;*
3. *при $D = 1$ – необходимы дополнительные исследования.*

**Доказательство.** Пусть $D < 1$. Возьмём $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $D + \varepsilon < 1$. По определению предела

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - D\right| < \varepsilon \Leftrightarrow D - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon, \quad n > N.$$

Положив $n = N, N+1, \ldots, N+p$, выпишем $p$ неравенств

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < D + \varepsilon, \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < D + \varepsilon, \quad \ldots \quad \frac{a_{N+p}}{a_{N+p-1}} < D + \varepsilon, \quad \ldots.$$

Перемножив левые и правые части, получим

$$\frac{a_{N+p}}{a_N} < (D + \varepsilon)^p.$$

Откуда $a_{N+p} < a_N\,(D+\varepsilon)^p$.

Пусть $p = 1,\ 2,\ 3, \ldots$. Тогда $a_{N+1}$ – общий член ряда $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$, который является остатком ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Рассмотрим ряд с общим членом $a_N\,(D+\varepsilon)^p$. При переменном $p$ – это общий член геометрической прогрессии $q = D+\varepsilon$. Поскольку ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_N\,(D+\varepsilon)^p$ сходится, то и ряд $\sum\limits_{p=1}^{\infty} a_{N+p}$ сходится. Тогда и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

$\square$

**Теорема. (Признак сходимости Коши)** *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C,$$

*то*

1. *при* $C < 1$ *ряд сходится;*
2. *при* $C > 1$ *ряд расходится.*

**Доказательство.**

1. Пусть $c < 1$. Возьмём $\varepsilon > 0$ такое, что $c+\varepsilon < 1$. По определению предела найдётся такой номер $N$, что будет выполнено соотношение

$$c - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < c+\varepsilon.$$

   Отсюда получаем, что $a_n < (c+\varepsilon)^n$. Получившийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (c+\varepsilon)^n$ – убывающая геометрическая прогрессия. Известно, что она сходится и следовательно, исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, по признаку сравнения, также сходится.

2. Пусть $c > 1$. Тогда $\sqrt[n]{a_n} > 1$ и $a_n > 1$. Из необходимого условия следует, что ряд расходится.

$\square$

Признак сравнения представляет собой некоторые неудобства тем, что трудно сразу найти такое неравенство, которое обеспечивало бы использование признака.

**Теорема.** *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

*Если существует конечный, отличный от нуля предел отношения общих членов этих рядов*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A, \quad A \neq 0,$$

*то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.*

**Доказательство.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, $A \neq 0$. Возьмём $\varepsilon > 0$ так, что $A - \varepsilon > 0$. По определению предела последовательности

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon \qquad A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon.$$

1. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда

$$(A-\varepsilon)b_n < a_n$$

   и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)b_n$ сходится. Следовательно и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится.

2. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. В этом случае и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A+\varepsilon)b_n$$

   также сходится. Откуда $a_n < (A+\varepsilon)b_n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Таким образом, оба ряда могут быть сходящимися только одновременно. Следовательно, если один из рядов расходится, то расходится и другой.

□

Рассмотрим признак, основанный на понятии несобственного интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Справедлива следующая

**Теорема. (Интегральный признак сходимости Коши)** *Дан положительный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Если существует невозрастающая непрерывная функция* $f(x)$, *заданная при* $x \geq 1$, *такая что* $f(n) = a_n$, *то для сходимости ряда необходимо и достаточно существование несобственного интеграла*

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

## 9.5. Знакочередующиеся ряды

**Определение.** *Ряд называется знакочередующимся, если всякие два соседних члена ряда являются числам разных знаков*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} + \ldots.$$

Для знакочередующихся рядов существует достаточный признак сходимости.

**Теорема.** *Если общий член знакочередующегося ряда монотонно убывая по абсолютной величине, стремится к нулю, то ряд сходится.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала суммы с чётными номерами. Изучим их поведение

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}).$$

Так как члены монотонно убывают, то в скобках стоят положительные числа

$$S_{2n+2} = S_[2n] + (a_{2n+1} - a_{2n+2}).$$

Тогда $S_{2n} < S_{2n+2}$. Покажем, что эта последовательность ограничена сверху. Для этого запишем $S_{2n}$ в виде

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Поэтому получим, что $S_{2n}$ получается вычитанием из $a_1$ положительных чисел, то есть

$$S_{2n} < a_1 \forall n.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

$\square$

## 9.6. Абсолютно сходящиеся ряды

Рассмотрим ряд, членами которого могут быть числа любого знака, то есть в ряде есть бесконечное количество как положительных, так и отрицательных членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{$*$}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{$**$}$$

При этом возможно несколько вариантов:

1. ряд $(*)$ сходится, а ряд $(**)$ расходится;

2. ряд $(*)$ и ряд $(**)$ сходятся.

**Определение.** *Сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, составленный из абсолютных величин членов первого ряда.*

Справедлива следующая

**Теорема.** *Из сходимости ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Доказательство.** Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и известно, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Составим два положительных ряда по правилу:

1. первый положительный ряд получим из данного: оставим на своих местах все положительные члены, все отрицательные заменим нулям., причём нули будут выписываться как слагаемые:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

где

$$b_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } a_n > 0, \\ 0, & \text{если } a_n \le 0. \end{cases}$$

2. второй положительный ряд получим из данного ряда, заменив все положительные члены нулями, выписывая их как слагаемые, а отрицательные члены – абсолютными величинам отрицательных членов:

$$ {}_1 + {}_2 + {}_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} {}_n, $$

где

$$ {}_n = \begin{cases} 0, & \text{если } a_n \geq 0, \\ |a_n|, & \text{если } a_n < 0. \end{cases} $$

Для рядов справедливы неравенства

$$ b_n \leq |a_n| \quad \text{и} \quad c_n \leq |a_n|. $$

Отсюда следует, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходятся. Обозначим их суммы через $B$ и $C$.

Частичную сумму исходного ряда

$$ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n $$

запишем как

$$ S_n = (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n). $$

Перейдём к пределу при $n \to \infty$. Тогда

$$ \lim_{n\to\infty} S_n = B - C. $$

□

## 9.7. Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Сумма абсолютно сходящегося ряда равна разности сумм двух положительных рядов, составленных соответственно из всех положительных членов ряда и из абсолютных величин его отрицательных членов.

2. Абсолютно сходящиеся ряды обладают коммутативным свойством. **Доказательство.** Сделаем в абсолютно сходящемся ряде

$$ a_1 + a_1 + a_3 + \ldots $$

перстановку

$$ a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots . \qquad (*) $$

Сделаем такую же перстановку в ряде из абсолютных величин

$$|a_{n_1}| + |a_{n_2}| + \dots .$$

Полученный ряд останется сходящимся. Тогда $(*)$ сходится абсолютно.

$\square$

3. Если дан абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то верно неравенство

$$|S| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

**Доказательство.** Воспользуемся неравенством $|a+b| \leq |a| + |b|$, то есть

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Перейдём к пределу при $n \to \infty$, этот предел существует, так как ряд сходится абсолютно.

$\square$

4. Дан ряд с членами любого знака $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$; если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = d,$$

то

(a) при $d < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится;

(b) при $d > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

# Задания для самостоятельной работы

1. Докажите сходимость, используя радикальный признак Коши

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3^n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^n$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

2. Докажите сходимость, используя интегральный признак Коши

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

3. Исследуйте на сходимость ряды

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$,

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{10n+1}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2-1}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$.

4. Определите характер сходимости рядов (условно сходится, абсолютно сходится или ряд расходится)

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n^2-2}}$,

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^n}{(2n+1)^n}$,

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$,

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2n(2n-1)}{(2n+1)^4}$,

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}n2^{-n}$,

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{6n+5}$,

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-9}$,

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n\frac{\ln n}{n}$,

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cos 2n}{\sqrt[3]{n^7+3n+4}}$,

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$,

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \operatorname{arctg}\frac{\sin n}{n}$

# 10. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

## 10.1. Равномерная сходимость

Рассмотрим ряд, членами которого являются функции

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \qquad (*)$$

Такой ряд называется функциональным рядом.

**Определение.** *Множество всех значении $x$, при которых ряд $(*)$ сходится, называется областью сходимости функционального ряда.*

**Определение.** *Функциональный ряд сходится в промежутке, если он сходится как числовой ряд при каждом значении $x$ из этого промежутка.*

Частичные суммы ряда $(*)$ являются функциями от переменной $x$. При изменении $x$ в некотором промежутке последовательность частичных сумм будет последовательностью функций

$$S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x),\ \ldots,\ S_n(x),$$

определённых в этом промежутке.

**Определение.** *Последовательность функций $\{S_n(x)\}$ сходится в промежутке, если она сходится при каждом значении $x$ из этого промежутка. При этом последовательность функций имеет своим пределом функцию $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$.*

Поскольку суммой ряда является предел последовательности его частичных сумм, то и сумма функционального ряда есть функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x).$$

Рассмотрим в каком-либо промежутке сходящуюся к некоторой предельной функции последовательность

$$S_1(x),\ S_2(x),\ S_3(x), \ldots,\ S_n(x) \to S(x).$$

Если зафиксировать $x = x_0$, то для $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N$ такой, что при $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| \le \varepsilon.$$

Здесь $N$ зависит от $\varepsilon$. Если фиксировать $x = x_1$, то неравенство

$$|S_n(x_1) - S(x_1)| \le \varepsilon$$

будет выполняться с другого номера. Следовательно $N = N(\varepsilon, x)$.

**Определение.** *Последовательность функций $\{S_n(x)\}$ равномерно сходится в некотором промежутке к предельной функции $S(x)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $N(\varepsilon)$ и для всех $x$ из данного промежутка выполняется неравенство*

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

**Пример.** *Найдите предельную функцию последовательности*

$$x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

*на* $[0{,}1]$.

**Решение.** Если $0 \leq x \leq 1$, то при любом фиксированном $x$: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Если $x = 1$, то последовательность будет вида

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots.$$

Предельная функция

$$S(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & \quad x = 1. \end{cases}$$

Попытаемся найти помер $N$, начиная с которого выполняются неравенства

$$|x_n - 0| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |x_n - 1| < \varepsilon$$

для всех $x \in [0{,}1]$. Пусть сначала $0 < x < 1$. Тогда $x^n < \varepsilon$ и решим это неравенство относительно $n$: $n \ln x < \ln \varepsilon$, $n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}$. Отсюда видно, что при фиксированном $x$ можно брать $N = \left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right] + 1$, но при приближении $x$ к 1, $\ln x \to 0$ и $\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\right]$ неограниченно возрастает. Поэтому нельзя найти номер $N$, начиная с которого неравенство $x^n < \varepsilon$ выполнялось бы при всех $x \in (0{,}1)$. Таким образом, данная последовательность сходится к своей предельной функции неравномерно.

□

**Пример.** *Найдите предельную функцию последовательности*

$$\frac{1}{x+1},\ \frac{1}{x+2},\ \frac{1}{x+3},\ \ldots,\ \frac{1}{x+n},\ \ldots$$

*на* $[0{,}1]$.

**Решение.** Каково бы ни было $x \in [0{,}1]$, всегда верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x+n} = 0$. Поэтому предельная функция данной последовательности равна нулю на $[0{,}1]$:

$$S(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Возьмём $\varepsilon > 0$ и попробуем найти номер $N$, начиная с которого

$$\left|\frac{1}{x+n} - 0\right| < \varepsilon$$

сразу для всех $x \in [0,1]$. Отсюда получаем, что $\frac{1}{x+n} < \varepsilon$ и при всех $0 \leq x \leq 1$ будет справедливо неравенство

$$0 < \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и в качестве $N$ можно брать $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Отсюда видно, что $N$ зависит только от $\varepsilon$ и не зависит от $x \in [0,1]$.

Таким образом, рассматриваемая последовательность равномерно сходится в $[0,1]$ к своей предельной функции.

□

**Определение.** *Если последовательность частичных сумм ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$$

*сходится к $S(x)$ равномерно в некотором промежутке, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в этом промежутке. Иначе, разность между суммой ряда и какой-либо его частичной суммой есть остаток ряда*

$$S(x) - S_n(x) = r_n(x).$$

ряд равномерно сходится в некотором промежутке, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N$, что $n \geq N$ и для всех $x$ из данного промежутка

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

**Теорема. (Признак Вейерштрасса)** *Пусть дан функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$; если существует положительный сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geq 0)$ такой, что для всех $x$ из $[a,b]$ верны неравенства*

$$|u_n(x)| \leq b_n \quad (n = 1,2,\ldots),$$

*то данный фундаментальный ряд равномерно (и абсолютно) сходится в $[a,b]$.*

Положительный сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, связанный с функциональным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ неравенствами

$$|u_n(x)| \leq b_n,$$

называется *мажорирующим* или *мажорантным* рядом.

**Пример.** *Докажите, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

*сходится равномерно на всей оси* $(-\infty, +\infty)$.

**Решение.** Для всех $x$ имеем $|\sin nx| \leq 1$. Тогда мажорирующим рядом является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно функциональный ряд сходится равномерно.

□

## 10.2. Свойства равномерно сходящихся рядов

**1.** *Если функции $u_n(x)$ непрерывны в $[a,b]$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в $[a,b]$, то сумма ряда – непрерывная функция в $[a,b]$.*

**Доказательство.** Обозначим сумму ряда через $S(x)$ и будем проверять непрерывность $S(x)$ в каждой точке $[a,b]$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in [a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости ряда, найдем для $\frac{\varepsilon}{3}$ номер $N$, чтобы для $n \geq N$ было верно

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{для всех} \quad x \in (a,b).$$

Откуда $S(x_0) = S_n(x_0)+r_n(x_0)$ или $S(x) = S_n(x)+r_n(x)$ для любого $x \in [a,b]$. Рассмотрим разность

$$S(x) - S(x_0) = S_n(x_0) - S_n(x) + r_n(x_0) - r_n(x)$$

или

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S_n(x_0) - S_n(x)| + |r_n(x_0) - r_n(x)|.$$

Функция $S_n(x)$ непрерывна, как сумма $n$ непрерывных функций, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует $|S_n(x_0) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом,

$$|S(x_0) - S(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

для $|x - x_0| < \delta$. Это означает, что $S(x)$ непрерывна в точке $x_0$, так как $x_0$ – любая точка $[a,b]$.

□

**Определение.** *Дан сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$*, составленный из функций* $u_n(x)$*, интегрируемых в* $[a,b]$*: если имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \int_a^b S(x)dx,$$

*то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *можно почленно интегрировать в* $[a,b]$.

**2.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*, где* $u_n(x)$ *непрерывны в* $[a,b]$*, равномерно сходятся в* $[a,b]$*, то его можно почленно интегрировать в* $[a,b]$.

**Доказательство.** Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности следует, что по числу $\frac{\varepsilon}{b-a}$ найдется $N$, начиная с которого выполняется неравенство

$$|r_n(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{для всех} \quad x \in [a,b].$$

Возьмем фиксированное $n \ge N$ и запишем

$$S_n(x) + r_n(x) = S(x).$$

Здесь $S(x)$ – непрерывная функция, $S_n(x)$ – непрерывная функция, как сумма конечного числа непрерывных в $[a,b]$ функций. Тогда функция $r_n(x)$ также непрерывна в $[a,b]$.

Проинтегрируем равенство

$$\int_a^b S_n(x)dx + \int_a^b r_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx.$$

Перепишем первое слагаемое иначе:

$$\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left|\int_a^b r_n(x)\right| \leq \int_a^b |r_n(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

то есть его можно сделать сколь угодно малым, при $n \to \infty$, $\int\limits_a^b r_n(x)dx \to 0$. Тогда при $n \to \infty$

$$\int_a^b S_n(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx \to \int_a^b S(x)dx,$$

где $\sum\limits_{k=1}^n \int\limits_a^b u_k(x)dx$ – частичная сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty \int\limits_a^b u_n(x)dx$, то числовой ряд сходится и сумма его $\int\limits_a^b S(x)dx$.

□

**Определение.** *Дан сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) = S(x)$, *составленный из функций* $u_n(x)$, *дифференцируемых в точке* $x$; *если имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^\infty u_n'(x) = \left(\sum_{n=1}^\infty u_n(x)\right)' = S'(x),$$

*то ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)$ *можно почленно дифференцировать.*

**3.** *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x) = S(x)$ *рассматривается в промежутке* $[a,b]$, *причем:*

(a) *функции* $u_n(x)$ *дифференцируемы в* $[a,b]$;

(b) *функции* $u_n(x)$ *непрерывны в* $[a,b]$;

(c) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n'(x)$ *равномерно сходится в* $[a,b]$,

*то ряд* $\sum\limits_{n=1}^\infty u_n(x)$ *можно почленно дифференцировать в любой точке промежутка* $[a,b]$.

**Доказательство.** Введем обозначение

$$\sum_{n=1}^\infty u_n'(x) = g(x).$$

Этот ряд можно почленно интегрировать в промежутке $[a,x]$, где $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u'_n(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big|_a^x = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) = S(x) - S(a).$$

Отсюда $S(x) = \int_a^x g(t) + S(a)$. Продифференцировав по $x$, получим

$$S'(x) = \left(\int_a^x g(t)dt\right)' = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

□

## 10.3. Степенные ряды

ряды, членами которых являются целые положительные степени независимой переменной $x$ или двучлена $(x-a)$ (где $a$-постоянная), умноженные на числовые коэффициенты:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

называются степенными рядами.

Справедлива следующая

**Теорема. (Теорема Абеля)** *Дан степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$*:*

1) *если он сходится для некоторого значения* $x = x_0 \neq 0$*, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_0|$*;*

2) *если он расходится для некоторого значения* $x = x_1$*, то он расходится и для всех* $|x| > |x_1|$.

**Доказательство. 1).** Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ сходится. Тогда его общий или $n$-ый член при $n \to \infty$ стремится к нулю $c_n x_0^n \to 0$. Переменная $c_n x_0^n$ ограничена, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|c_n x_0^n| < M$. Возьмем $|x| < |x_0|$. Обозначим $\left|\frac{x}{x_0}\right| = g$, $0 < g < 1$. Отсюда

$$|c_0 x^n| = \left|c_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |c_n x_0^n| \cdot g^n < M \cdot g^n.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M g^n$ сходится как убывающая геометрическая прогрессия, то и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ также сходится.

**2).** Проведем доказательство от противного. Допустим, что при значении $|x| > |x_1|$, степенной ряд сходится. Тогда и при $x = x_1$ ряд должен сходиться, что противоречит условию.

$\square$

Геометрически сходимость степенного означает, что если ряд сходится в точке $x_0$, то он сходится во всех точках интервала $(-x_0,x_0)$.

**Теорема.** *Если степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *сходится не на всей числовой оси, но и не только в одной точке* $x = 0$, *то существует число* $R > 0$ *такое, что:*

*(a) ряд абсолютно сходится для* $|x| < R$*;*

*(b) ряд расходится для* $|x| > R$*.*

**Определение.** *Число* $R > 0$ *называется радиусом сходимости степенного ряда, а* $(-R,R)$ *– промежутком сходимости степенного ряда.*

Если степенной ряд сходится во всех точках числовой оси, то $R = +\infty$.
Если степенной ряд сходится только при $x = 0$, то $R = 0$.
Поведение степенного ряда в крайних точках $x = \pm R$ может быть различным:

(a) может быть, что степенной ряд расходится в обеих точках $x = \pm R$;

(b) может быть, что степенной ряд сходится в точках $x = \pm R$, тогда промежуток будет вида $[-R,R]$;

(c) может сходиться в одной из точек $x = \pm R$ и расходиться в другой.

Радиус сходимости степенного ряда вычисляется следующим образом: пусть существует конечный предел

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = d \cdot |x|$. Откуда видно, что степенной ряд сходится абсолютно при

$$|x|d < 1, \quad |x| < \frac{1}{d}$$

и расходится при

$$|x|d > 1, \quad |x| > \frac{1}{d}.$$

Таким образом, $R = \frac{1}{d}$. При этом полагается, что $R = +\infty$ при $d = 0$ и $R = 0$ при $d = +\infty$.

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найдите сумму ряда

   (a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

   (b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} + \ldots + \frac{n}{x^n} + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$,

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$,

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда и исследуйте сходимость ряда на концах

   (a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

   (b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-2)}$,

   (c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} n!x^n$,

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$,

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)2^n}$,

   (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$,

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$,

   (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(n+1)}$.

# 11. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННОЙ РЯД

## 11.1. Ряд Тейлора

Если функция является суммой степенного ряда в каком-либо промежутке, то функция в этом промежутке разлагается в степенной ряд.

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ разлагается в некотором промежутке в степенной ряд по степеням $x$, то это разложение единственно.*

**Доказательство.**

Пусть в промежутке $(-R,R)$ имеет место равенство

$$f(x) = c_0 \ + \ c_1 x \ + \ c_2 x^2 \ + \ \ldots .$$

Пусть $x = 0$, тогда $c_0 = f(0)$. Продифференцируем ряд почленно

$$f'(x) = c_1 \ + \ 2c_2 x \ + \ \ldots .$$

Радиус сходимости этого ряда также равен $R$. Пусть $x = 0$, тогда $c_1 = f'(0) = \frac{f'(0)}{1!}$. Продифференцируем еще раз по $x$

$$f''(x) = 2c_2 \ + \ 3 \cdot 2 \cdot c_3 x \ + \ 4 \cdot 3 \cdot c_4 x^2 \ + \ \ldots .$$

Пусть $x = 0$, тогда $c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$. Продолжая этот процесс, получим

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Следовательно, коэффициенты определяется единственным образом.

$\square$

**Определение.** *Степенной ряд с коэффициентами $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, вычисленными по некоторой функции $y = f(x)$, называется рядом Тейлора этой функции.*

Таким образом, для всякой бесконечно дифференцируемой на некотором интервале функции $f(x)$ можно составить ее ряд Тейлора:

$$f(0) \ + \ \frac{f'(0)}{1!}x \ + \ \frac{f''(0)}{2!}x^2 \ + \ \ldots \ + \ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ + \ \ldots .$$

Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) \ = \ f(0) \ + \ \frac{f'(0)}{1!}x \ + \ \frac{f''(0)}{2!}x^2 \ + \ \ldots \ + \ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \ + \ R_n(x),$$

$$R_n(x) \ = \ \frac{f^{(n+1)}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

**Теорема.** *Для того, чтобы ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$ сходился в $[-a,a]$ и имел своей суммой $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член формулы Тейлора для $f(x)$ стремился к нулю в $[-a,a]$ при $n \to \infty$.*

**Доказательство.** Запишем формулу Тейлора следующим образом

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x),$$

здесь $S_{n+1}(x)$ есть $(n+1)$-я частичная сумма ряда Тейлора.

Докажем необходимость. Пусть в $[-a,a]$ ряд сходится и сумма его равна $f(x)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ для любого $x \in [-a,a]$. Следовательно

$$f(x) - S_{n+1}(x) = R_n(x),$$

то $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Докажем достаточность. Пусть $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ в $[-a,a]$, тогда

$$f(x) - S_{n+1}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть $S_{n+1}(x) \to f(x)$ в $[-a,a]$.

□

## 11.2. Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена

Разложение заданной функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0$ распадается на два этапа.

1) Сначала мы вычисляем значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x_0$ и составляем ряд Тейлора для функции $f(x)$. При этом предполагается, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема.

2) Находим интервал, в котором составленный ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, т. е. устанавливаем, для каких значений $x$ остаточный член ряда $R_n(x)$ будет стремиться к нулю при $n \to \infty$.

**Теорема.** *Если в некотором интервале, окружающем точку $x_0$, абсолютные величины всех производных функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом, то функция $f(x)$ в этом интервале разлагается в ряд Тейлора.*

Часто используется разложение функции в ряд по степеням $x$. В этом случае, полагая $x_0 = 0$, получаем ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

Этот ряд является частным случаем ряда Тейлора; его называют *рядом Маклорена.*

Рассмотрим примеры разложения в ряд некоторых элементарных функций.

1. *Показательная функция* $e^x$. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$f(x) = e^x.$$

Все производные от функции $e^x$ тоже равны $e^x$ и в точке $x = 0$ обращаются в 1. По формуле Тейлора

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Рассмотрим интервал $[-N, N]$, где $N$ — любое фиксированное число. Для всех значений из этого интервала $e^x < e^N$. Следовательно, все производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом $= e^N$ и по теореме $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. По предположению $N$ — любое число, следовательно, функция $e^x$ разлагается в ряд Маклорена при всех значениях $x$ т. е. на всей оси $Ox$, поэтому

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \text{ на } (-\infty,\infty).$$

В частности, при $x = 1$ находим ряд для числа $e$:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

2. *Тригонометрические функции* $\sin x$ и $\cos x$. Разложим в ряд Маклорена функцию $\sin x$. Для этого находим последовательно значения ее производных в точке $x = 0$:

$$f(0) = \sin 0 = 0,\ f'(0) = \cos 0 = 1,$$

$$f''(0) = (-\sin x)_{x=0} = 0,$$

$$f'''(0) = (-\cos x)_{x=0} = -1,\ f^{IV}(0) = (\sin x)_{x=0} = 0,\ \ldots$$

Любая производная функции $\sin x$ по абсолютной величине не превосходит единицы. Следовательно, ряд Маклорена для функции $\sin x$ сходится к ней на всей числовой оси.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \quad \text{на} \quad (-\infty,\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ на } (-\infty,\infty).$$

## 11.3. Разложение дробно-рациональных функций в ряд Тейлора

Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степеней $n$ и $m$.

Разложение такой функции осуществляется следующими образом:

1) дробно-рациональная функция раскладывается на простейшие дроби;

2) каждая простейшая дробь сводится после соответствующих преобразований к сумме некоторой убывающей геометрической прогрессии или к результату $k$-кратного дифференцирования суммы геометрической прогрессии;

3) сопоставление полученных промежутков сходимости для прогрессий.

**Пример.** *Разложите в ряд Тейлора функцию*

$$f(x) = \frac{5-x}{12-x-x^2}.$$

**Решение.** Разложим заданную рациональную функцию на простейшие дроби. Имеем

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{5-x}{(x+4)(3-x)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{3-x}.$$

Определив коэффициенты $A$ и $B$ стандартным способом, получим

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{9}{7}\frac{1}{x+4} + \frac{2}{7}\frac{1}{3-x}.$$

Представим каждую из элементарных дробей правой части в виде убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4^2} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{4^n} + \ldots\right),$$

которая будет сходящейся при $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, то есть $|x| < 4$. Для второй дроби

$$\frac{1}{3-x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{3^n} + \ldots\right)$$

и ряд будет сходиться, если $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$. Откуда $|x| < 3$. Следовательно сумма сходится при $|x| < 3$. Таким образом, ряд Тейлора от заданной функции будет иметь вид:

$$\frac{5-x}{12-x-x^2} = \frac{9}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}} + \frac{2}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}.$$

□

Рассмотрим ещё один пример.

**Пример.** *Разложите в ряд Тейлора функцию*

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

**Решение.** Запишем разложение на простейшие дроби

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2}.$$

Откуда имеем

$$x = A(1-x) + B.$$

Определив коэффициенты $A$ и $B$, запишем

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Первая дробь допускает разложение вида

$$-\frac{1}{1-x} = -(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots), \quad |x| < 1,$$

а вторая дробь получается из первой дифференцированием, то есть

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = (1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots), \quad |x| < 1.$$

$\square$

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Найдите разложение в ряд Маклорена функции

   (a) $f(x) = \sin^2 x$;

   (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$;

   (c) $f(x) = \cos^2 x + e^{-x^2}$.

2. Разложите в ряд Тейлора рациональные функции

   (a) $f(x) = \frac{3-x}{2-x-x^2}$;

   (b) $f(x) = \frac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$,

   (c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3(x+2)}$.

# 12. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ РЯДОВ

## 12.1. Приближённые вычисления значений функций

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_0$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Если функцию $f(x)$ в интервале $(-R,R)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

и точка $x_1 \in (-R,R)$, то точное значение $f(x_1)$ равно сумме этого ряда при $x = x_1$, то есть

$$f(x_1) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_1^n + \ldots,$$

а приближенное значение – частичной сумме $S_n(x_1)$,

$$f(x_1) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_1^n.$$

Точность этого равенства увеличивается с ростом $n$, а абсолютная погрешность равна модулю остатка ряда

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |r_n(x_1)|,$$

где

$$r_n(x) = a_{n+1}x_1^{n+1} = a_{n+2}x_1^{n+2} + \ldots.$$

Таким образом, ошибка $|f(x_1) - S_n(x_1)|$ – оценка остатка $r_n(x_1)$.

**Пример.** *Найдите* $\sin 1$ *с точностью до* 0,001.

**Решение.** Разложим функцию $\sin x$ в ряд Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots.$$

Откуда

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!}1^3 + \frac{1}{5!}1^5 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}.$$

Полученный ряд сходится абсолютно. Так как

$$\frac{1}{5!} \approx 0{,}008(3) > 0{,}001, \quad \frac{1}{7!} \approx 0{,}0002 < 0{,}001,$$

то для нахождения $\sin 1$ с точностью 0,001 достаточно первых трёх членов ряда

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 0{,}842.$$

□

**Пример.** *Вычислите e с точностью до* 0,001.

**Решение.** Разложим $f(x) = e^x$ в ряд Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Возьмём $n$ слагаемых и оценим ошибку $r_n(x)$

$$r_n(x)|_{x=1} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, $r_n(x) < \frac{1}{n!n}$. Подберем наименьшее натуральное число $n$, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{n!n} < 0{,}001 \quad n \geq 6.$$

Откуда

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2\frac{517}{720} \approx 2{,}7128.$$

□

Остаток ряда можно посчитать иначе

$$|f(x_1) - S_n(x_1)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|,$$

где $\xi$ – число из $(0,x_1)$. В нашем случае

$$R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \quad e^{\xi} < e^1 < 3,$$

так как $0 < \xi < 1$, то $R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$. При $n = 6$ имеем

$$R_6(1) < \frac{3}{7!} < 0{,}001, \quad e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718.$$

## 12.2. Приближённое вычисление определённых интегралов

Пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по степеням $x$ и интервал сходимости $(-R,R)$ включает в себя отрезок $[a,b]$, то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда.

**Пример.** *Вычислите интеграл* $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$ *с точностью до* $\varepsilon = 0{,}001$.

**Решение.** Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Интегрируя обе части равенства на отрезке $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$\left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!7\cdot 4^7} + \ldots.$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Для него

$$|r_n(x)| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots| < |u_{n+1}(x)|.$$

Так как $\frac{1}{1!3\cdot 4^3} = 0{,}00532 > 0{,}001$, а $\frac{1}{2!5\cdot 4^5} < 0{,}001$, то с точностью до $0{,}001$ имеем

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

□

## 12.3. Применение рядов к раскрытию неопределённостей

Разложение функций в ряд можно использовать при раскрытии неопределённостей.

**Пример.** *Вычислите предел*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}.$$

**Решение.** Имеем неопределённость вида

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Разложим функции $\sin x$, $\cos x$ и $e^x$ в ряд Тейлора

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)}{x^2\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \ldots}{x^3\left(1 + \frac{x}{2} + \ldots\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(-\frac{1}{3} + x^2\left(\frac{1}{60} + \ldots\right)\right)}{x^3\left(1 + x\left(\frac{1}{2} + \ldots\right)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + x^2\left(\frac{1}{60} + \ldots\right)}{1 + x\left(\frac{1}{2} + \ldots\right)} = -\frac{1}{3}$$

□

# *Задания для самостоятельной работы*

1. Используя разложение в ряд Тейлора, вычислите пределы

   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{\operatorname{arctg} x-x}$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x^2(e^x-1)}$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x-e^{x^2}+1}{x^4}$.

   **Указание.**

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

2. Вычислите

   (a) $\sqrt{e}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$;

   (b) $\sin\frac{1}{2}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

3. Вычислите

$$\int\limits_0^1 \sin x^2 dx$$

   с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

4. Найдите интеграл $\int \frac{\sin x}{x} dx$ в виде степенного ряда и укажите его область сходимости.

# 13. РЯДЫ ФУРЬЕ

## 13.1. Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T \neq 0$, если

1. из того, что она определена в некоторой точке $x$ следует, что она определена во всех точках $x + kT$, $k = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots$;
2. для любого $x$ из области определения справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$.

Справедлива следующая

**Теорема.** *Если $T \neq 0$ является периодом функции $f(x)$, то для произвольного $k = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots$, число $kT$ также является периодом этой функции.*

**Доказательство.** Пусть $T \neq 0$ – период функции $f(x)$. тогда для любого $k > 0$ будет верна цепочка равенств

$$f(x+kT) = f(x+(k-1)T+T) = f(x+(k-1)T) = f(x+(k-2)T+T) =$$

$$= f(x+(k-2)T) = \ldots = f(x+T) = f(x).$$

Это означает, что $kT$, $k > 0$ является периодом функции $f(x)$. Теперь можно записать

$$f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x).$$

Откуда следует, что и $-T$ также является периодом $f(x)$ и $k(-T) = -kT$, $k > 0$ тоже период функции.

$\square$

Если $f(x)$ – непрерывная периодическая функция, отличная от константы, то она имеет наименьший положительный период, называемый основным периодом $f(x)$.

Постоянная функция $f(x) = C = const$ является периодической функцией, для неё любое число $T$ является периодом.

В физике простейшей периодической функцией считают гармонику

$$\xi(t) = A\sin(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < \infty,$$

где $A$ – амплитуда, $\omega$ – частота, $\varphi$ – начальная фаза. Период в этом случае $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

**Теорема.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – периодические функции с одним и тем же периодом $T$. Тогда функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x), \quad f(x)/g(x), \quad g \neq 0$$

*также являются периодическими с периодом $T$.*

**Доказательство.** Покажем, что функция $h(x) = f(x) + g(x)$ – периодическая с периодом $T$. Действительно,

$$h(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = h(x).$$

□

**Теорема.** *Пусть $f(x)$ – периодическая интегрируемая функция с периодом $T$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx,$$

*для любого действительного числа $a$.*

**Доказательство.** Запишем

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^T f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^T f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^T f(x)dx.$$

Здесь воспользовались заменой переменной ввиду периодичности $f(x)$

$$\int\limits_T^{a+T} f(x)dx = \int\limits_T^{a+T} f(x-T)d(x-T) = \int\limits_0^a f(t)dt.$$

□

## 13.2. Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы

**Определение.** *Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, определённые на отрезке $[a,b]$, называются ортогональными, если*

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$, определённых на отрезке $[a,b]$, называется ортогональной, если функции данной системы попарно ортогональны:

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0,$$

где $n,m = 0,1,2,\ldots$ и $n \neq m$. При этом предполагается, что

$$\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx > 0, \quad \text{для всех} \quad n = 0, 1, 2\ldots$$

Рассмотрим систему функций: $1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots$ называемую тригонометрической системой функций.

**Теорема.** *Тригонометрическая система является ортогональной на отрезке* $[-\pi,\pi]$.

**Доказательство.** Докажем попарную ортогональность функций

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x - \cos(n-m)x]dx = 0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 - \cos 2nx)dx = \pi, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2nx)dx = \pi.$$

□

## 13.3. Разложение в ряд Фурье чётных и нечётных функций

Если на отрезке $[-\pi,\pi]$ раскладывается в ряд Фурье функция являющаяся чётной или нечётной, то это отражается на формулах коэффициентов Фурье.

**1.** Если функция $f(x)$ чётная, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cosnx,$$

где

$$a_0 = \frac{}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)cosnxdx.$$

Если функция нечётная, то её ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx.$$

**Доказательство.** Действительно, если функция $f(x)$ интегрируема на симметричном отрезке $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(x) \text{ – чётная функция}, \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ – нечётная функция}. \end{cases}$$

Если $f(x)$ – чётная, то $f(x)\cos nx$ – чётная функция, так как $f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx$, а $f(x)\sin nx$ – нечётная функция, ввиду $f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx$.

Если же $f(x)$ – нечётная функция, то $f(x)\cos nx$ – нечётная, а $f(x)\sin nx$ – чётная. Откуда получаем требуемые представления. □

## 13.4. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье

**Определение.** *Ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

*где $a_0$, $a_n$, $b_n$ – действительные числа, называется тригонометрическим рядом.*

Если тригонометрический ряд сходится для всех значений аргумента $x$ и его сумма равна $f(x)$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

то функция раскладывается в тригонометрический ряд.

Для определения коэффициентов $a_0$, $a_n$, $b_n$ используют следующее утверждение.

**Теорема.** *Пусть функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

*Если это ряд сходится равномерно на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *то коэффициенты* $a_0$, $a_n$, $b_n$ *определяются по формулам:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,$$

**Доказательство.** Проинтегрируем выражение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

что возможно, так как ряд сходится равномерно, то его можно почленно интегрировать. Имеем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx = b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right] = a_0\pi.$$

Откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx/$$

Для определения $a_n$, умножим приведённое выражение на $\cos nx$ и проинтегрируем по $[-\pi,\pi]$. Получим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nxdx\right] =$$

$$a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx = a_n\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

Действуя схожим образом, вычислим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

□

Введём определения кусочно-непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции на отрезке $[a,b]$.

**Определение.** *Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме конечного числа точек разрыва первого рода.*

**Определение.** *Кусочно-непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ называется кусочно-дифференцируемой, если $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, может быть, конечного числа точек, в которых существуют конечные правые и левые предельные значения: $f'(x+0)$, $f'(x-0)$. При этом предполагается, что существуют предельные значения $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.*

**Теорема. (Теорема Дирихле)** *Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого отрезка, причём для суммы*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

*этого ряда выполняются равенства*

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x_0)}{2}, \quad x \in (-\pi,\pi)$$

*и*

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi+0)}{2}.$$

*Сумма $S(x)$ равна $f(x)$, если в этой точке $x \in (-\pi,\pi)$ функция непрерывна, так как $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, следовательно*

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Коэффициенты Фурье $a_0$, $a_n$, $b_n$ функции $f(x)$ удовлетворяет неравенству Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Для любой кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

**Пример.** *Разложите функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье.*

**Решение.** Функция $y = x$ –нечётная, следовательно $a_n = 0$ и $a_0 = 0$. Вычислим $b_n$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \cos nx dx\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

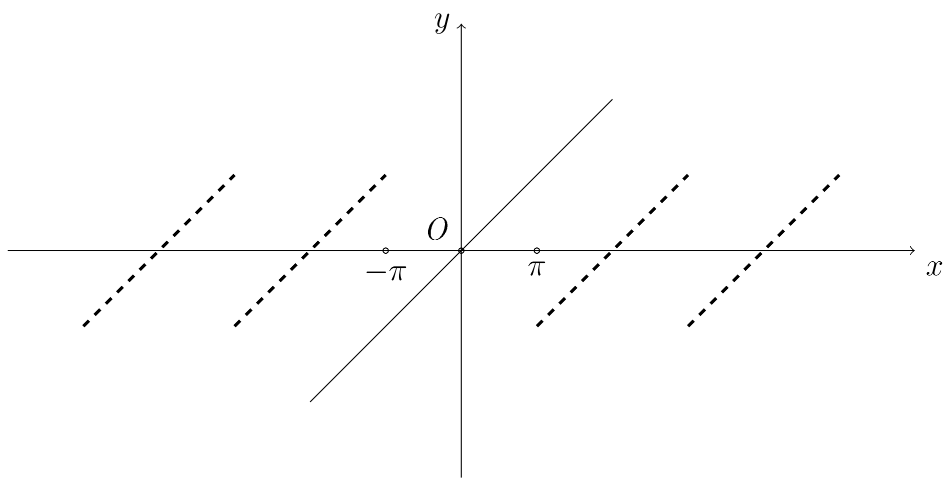
В промежутке $(-\pi,\pi)$

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right).$$

В точках $x = \pm\pi$ сумма ряда Фурье по теореме Дирихле [] определяется выражением

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Таким образом, в этих двух точках значение суммы ряда Фурье не совпадают со значениями функции $f(x) = \pi$. Вне промежутка $[-\pi,\pi]$ сумма ряда Фурье даёт периодическое продолжение своего графика из $[-\pi,\pi]$. График функции $f(x) = x$ вне $[-\pi,\pi]$ не имеет ничего общего, то есть не имеет ни одной общей точки, с продолжением.




□

**Пример.** *Разложите функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье в промежутке $(-\pi,\pi)$.*

**Решение.** Во-первых, заданная функция не имеет производной в точке $x = 0$. Во-вторых, функция чётная, а это означает, что $b_n = 0$. Вычислим $a_n = 0$ и $a_0 = 0$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x) cosnx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx dx = \left|\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = cosnx\, dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\pi\sin n\pi + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}((-1)^{n-1}-1), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi s dx = \pi.$$

Поскольку функция $f(x) = |x|$ непрерывна в $(-\pi,\pi)$, то сумма ряда Фурье совпадает с $|x|$ в этом промежутке, то есть можно записать

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left((-1)^{n-1}-1\right)\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

□

**Пример.** *Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на промежутке* $[-\pi,\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{для } -\pi \le x \le 0, \\ x, & \textit{для } o < x \le \pi. \end{cases}$$

**Решение.** Функция непрерывна и равномерно возрастает в промежутке $[-\pi,\pi]$. Вычислим коэффициенты разложения

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^0 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^0 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi = \frac{1}{\pi n^2}(cosnx - 1) = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^0 0\cdot dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi x\,\sin nx dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Найдём значение выражения

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Видно, что это число не совпадает со значениями функции $f(x)$ в точках $x = \pm\pi$. таким образом, равенство

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

справедливо только в $(-\pi,\pi)$. □

## 13.5. Ряды Фурье для $2l$-периодических функций

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-l,l]$. Требуется разложить эту функцию в ряд Фурье. Сделаем замену переменной $x = \frac{lt}{\pi}$. Получим новую функцию $\varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$, которая определена уже на отрезке $[-\pi,\pi]$. Для неё ряд Фурье будет

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Сделаем обратную замену $t = \frac{\pi x}{l}$. Тогда получим ряд Фурье функции $f(x)$ определённой на $[-l,l]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),$$

где коэффициенты $a_n$, $b_n$ и $a_0$ вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-i}^{i} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-i}^{i} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Покажем это на примере вычисления коэффициента $a_0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right) dt \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) d\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)dx.$$

**Пример.** *Разложите в тригонометрических ряд в промежутке* $[-4,4]$ *функцию*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x(4+x) & \textit{для } -4 \le x < 0, \\ \frac{1}{3}x(4-x) & \textit{для } 0 \le x \le 4. \end{cases}$$

**Решение.** Данная функция является нечётной и непрерывной в промежутке $[-4,4]$ и следовательно удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Разложим ее в ряд, причём

$$b_n = \frac{2}{3 \cdot 4} \int_{0}^{4} x(4-x) \sin \frac{n\pi x}{4} dx = \frac{128}{3n^3\pi^3}[1 + (-1)^{n-1}].$$

Значения функции в точках $x = \pm 4$ равны нулю, и значения суммы ряда

$$\frac{f(-4+0) + f(4-0)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0.$$

Таким образом, разложение

$$f(x) = \frac{128}{3n^3\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{4} + \ldots\right)$$

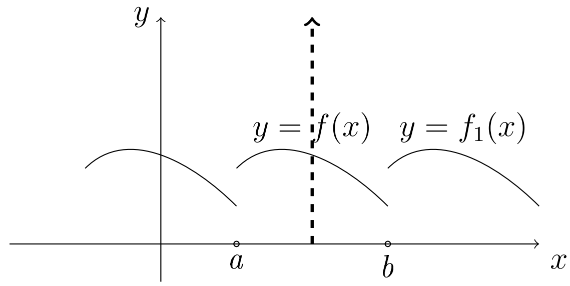
справедливо в промежутке $[-4,4]$. □

## 13.6. Представление непериодической функции рядом Фурье

Пусть $y = f(x)$ – непериодическая функция, заданная на всей числовой оси $Ox$. Такая функция не может быть разложена в ряд Фурье, так как сумма ряда – непериодическая функция.

Непериодическая функция $f(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье на любом конечном промежутке $[a,b]$, на котором она удовлетворяет условиям Дирихле [теорема ].

Поместим начало координат в середину отрезка $[a,b]$ и построим функцию $f_1(x)$ периода $T = 2l = |b - a|$ такую, что $f_1(x) = f(x)$ при $-l \leq x \leq l$.




Разложим функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье. Сумма этого ряда во всех точках отрезка $[a,b]$ совпадает с заданной $f(x)$. Вне этого промежутка сумма ряда и $f(x)$ являются совершенно различными.

Пусть требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[0,l]$. Эту функцию можно произвольным образом доопределить на отрезке $[-l,0]$ и осуществить её периодическое продолжение с периодом $T = 2l$. Раскладывая в ряд Фурье на отрезке $[-l,l]$, полученную таким образом периодическую функцию $f_1(x)$, получаем искомый ряд.

**Пример.** *Разложите функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье в промежутке $[0,\pi]$ по синусам.*

**Решение.** Вычислим коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\pi^2(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right) = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right).$$

Таким образом, функция $f(x) = x^2$ раскладывается в следующий ряд по синусам

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin nx =$$

$$= \left(2\pi - \frac{8}{\pi}\right)\sin x - \pi\sin 2x + \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{8}{27\pi}\right)\sin 3x - \frac{\pi}{2}\sin 4x + \ldots.$$

Поскольку функция $f(x) = x^2$ непрерывная и монотонно возрастающая в $(0,\pi)$, то разложение в ряд справедливо в $(0,\pi)$. Ввиду того что требовалось разложить $f(x) = x^2$ в ряд по синусам, продолжим её на $[-\pi,0)$ нечётным образом. Так как $f(0) = 0$, то разрыва в начале координат при таком продолжении не будет. Найдём значение суммы, полученного ряда, в точке $x = \pi$

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi^2 + \pi}{2} = 0.$$

Откуда видно, что значение суммы не совпадает со значением $f(\pi) = \pi^2$, и поэтому разложение справедливо в промежутке $[0,\pi]$.

$\square$

## *Задания для самостоятельной работы*

1. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x^3$ на промежутке $[-\pi,\pi]$.

2. Проверьте, удовлетворяют ли функции условиям теоремы Дирихле, и если да, то разложите эти функции в ряд Фурье и, по возможности, сделайте чертёж:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad -\pi \le x < 0, \\ x^2 & \text{для} \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{для} \quad -\pi \le x \le 0, \\ 3x & \text{для} \quad 0 < x \le \pi. \end{cases}$

3. Разложите в тригонометрический ряд по синусам в $(0,\pi)$ функцию

$$f(x) = \frac{x - \pi}{2}.$$

4. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = 3 - x$, заданную в интервале $(-2,2)$.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение курса математического анализа помимо решения "тактических" задач, связанных с непосредственным изучением понятий и методов математического анализа, играет важную роль и в решении "стратегической" задачи привития общей математической культуры, включающей умение давать чёткие определения, строго формулировать доказываемые утверждения и строить корректные доказательства.

Все темы пособия заслуживают полного и глубокого изучения. Безусловно, настоящее издание не сможет заменить учебники по полноте представленного материала. Однако студентам оно будет интересно тем, что в одном пособии изложен как теоретический материал, так и решение примеров и задач.

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


[1] Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учебное пособие / Георгий Николаевич Берман – [22-е изд.] – Москва : Кнорус, 2021 – 432 с. – ISBN 978-5-4365-0169-7.

[2] Бохан, К.А. Курс математического анализа. В 3-х томах. В 2-х томах. Том 1 / К.А. Бохан, И.А, Егорова, К.В. Лащенов – Москва : Просвещение, 1966. – 381 с.

[3] Геворкян, П.С. Высшая математика. Интегралы, ряды, ТФКП, дифференциальные уравнения. В 2-х частях. Часть 2 / Павел Самвелович Геворкян. – Москва : МАИК, 2007 – 272 с. – ISBN 978-5-9221-0710-5.

[4] Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Борис Павлович Демидович – [21-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2019 – 624 с. – ISBN 978-5-8114-3985-0.

[5] Зорич, В.А. Математический анализ. В 2-х частях. Часть 1 / Владимр Антонович Зорич. – [10-е изд., исп.] – Москва : МЦНМО, 2020 – 576 с. – ISBN 978-5-4439-4030-4.

[6] Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х частях. Часть 1 / Григорий Михайлович Фихтенгольц. – [11-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2020 – 464 с. – ISBN 978-5-8114-5339-9.

[7] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Том 1 / Григорий Михайлович Фихтенгольц. – [15-е изд., стер.] – Москва : Лань, 2021. – 608 с. – ISBN 978-5-8114-7061-7.

*Учебное электронное издание*

ТИХОМИРОВ Роман Николаевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференциальное и интегральное исчисление
функций одной переменной, ряды

Учебное пособие

*Издаётся в авторской редакции*

***Системные требования:*** Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

**Тираж 25 экз.**

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт, кафедра МОиИТ
romat81@yandex.ru