Владимирский государственный университет

Д. А. ПОЛЯНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

Управление динамическими показателями информационной безопасности

Учебное пособие

Владимир 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Д. А. ПОЛЯНСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

Управление динамическими показателями информационной безопасности

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2021

ISBN 978-5-9984-1356-8

УДК 004.056+519.85
ББК 22.18

Рецензенты:
Кандидат технических наук
зав. кафедрой цифрового образования и информационной безопасности
Владимирского института развития образования
имени Л. И. Новиковой
Д. В. Мишин

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры вычислительной техники и систем управления
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. В. Шутов

Полянский, Д. А.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ : Управление динамическими показателями информационной безопасности [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д. А. Полянский ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 174 с. – ISBN 978-5-9984-1356-8. – Электрон. дан. (3,94 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Представлен систематизированный материал по математическим основам построения, решения и анализа задач управления динамическими показателями информационной безопасности, многокритериального управления и принятия решений в условиях противостояния угрозам информационной безопасности.

Предназначено для студентов третьего курса направления 10.03.01 «Информационная безопасность» и специальности 10.05.04 «Информационно-аналитические системы безопасности» дневной формы обучения. Может быть полезно широкому кругу читателей, осваивающих вопросы обеспечения информационной безопасности.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 45. Ил. 14. Библиогр.: 18 назв.

ISBN 978-5-9984-1356-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

ЗИ – защита информации
ЗМУ – задача многокритериального управления
ЗНЛП – задача нелинейного программирования
ЗЛП – задача линейного программирования
ЗПР – задача принятия решений
ИБ – информационная безопасность
ИР – информационный ресурс
ИС – информационная система
ЛПР – лицо, принимающее решения
МГК – метод главного критерия
МИ – матрица игры
МИТ – метод идеальной точки
МОО – метод относительных отклонений
МПУ – метод последовательных уступок
ОДР – область допустимых решений
ОС – оптимальная стратегия
ОУ – объект управления
ПП – плановый период
РФЗМУ – решающая функция задачи многокритериального управления
СЗИ – система защиты информации
СрЗИ – средство защиты информации
ТПР – теория принятия решений
ТСЗИ – техническое средство защиты информации
ФВ – функция выбора
ЦФ – целевая функция

ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение ИБ в контексте управления только статическими показателями ИБ без учёта динамики различных процессов, протекающих в ИС, имеет три существенных недостатка.

Во-первых, при выборе оптимального решения в задачах, имеющих итерационную природу, такое управление либо приводит к громоздким решениям, либо вообще не может быть применено. Примером первого случая является задача выбора комплекса средств ЗИ, обладающих рядом разнотипных характеристик и одной общей накопительного характера (например, стоимость). Второй случай – это решение задачи обеспечения ИБ на длительный период в условиях физического и морального устаревания оборудования и технологий.

Во-вторых, показатели ИБ часто являются противоречивыми по своей природе, улучшение одного из них может ухудшать другие, что приводит к расширению условия задачи и придания ей статуса многокритериальной. Вместе с тем из теории и практики решения таких задач известно, что имеет значение не только само решение, но и его изменчивость при варьировании компромиссных ограничений между отдельными критериями, что вносит динамику в процесс решения.

И в третьих, статическое решение не даёт возможность учёта тех изменений во внешней среде, которые оказывают воздействие на защищаемую ИС и происходят уже после выбора оптимальных решений.

В связи с тем что СЗИ интегрирована в ИС и взаимосвязана с основными производственными, технологическими, управленческими и прочими процессами, протекающими в ней, невозможно оперативно изменить структуру или отдельные механизмы СЗИ, не остановив или, по крайней мере, не замедлив основные процессы. СЗИ становится инертной и не может оперативно реагировать на изменения стратегии действий злоумышленников.

Для устранения перечисленных недостатков статического управления в обеспечении ИБ необходимо применять соответственно динамическое программирование, многокритериальное управление и теорию игр.

Глава 1. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

1.1. Общая постановка задачи динамического программирования

Динамическим программированием называют такой процесс поиска оптимальных решений задач управления, который имеет обязательным атрибутом итерационность (многошаговость).

При построении комплексной СЗИ, состоящей из средств и механизмов защиты различных типов (организационно-правовых, методических, технических, программных, аппаратных) процесс принятия решений по выбору того или иного СрЗИ должен быть разделён на отдельные этапы.

Процессы планирования и управления ИБ можно разделить на шаги по продолжительности временного периода: год, квартал или месяц.

В учебном пособии по управлению статическими показателями [16] были рассмотрены примеры задач с однократным (одноэтапным, одношаговым) принятием решения. В отличие от них управление динамическими показателями ИБ требует последовательности принятых решений и является *многошаговым*.

Рассмотрим ИС, характеризуемую некоторым набором параметров ИБ, являющихся индикаторами её состояния. Управление ИС переводит её из начального состояния в конечное. Для описания этого процесса будем использовать следующие обозначения.

1. x_i – многомерный вектор, определяющий состояние ИС на i-м шаге управления. Переход ИС под действием управления в другие состояния не зависит от того, каким образом система перешла в данное состоянии, а зависит только от самого состояния.

2. На каждом шаге необходимо выбрать управляющее воздействие u_i, в результате реализации которого ИС переходит из предыдущего состояния x_{i-1} в данное состояние x_i. Этот переход определяется предыдущим состоянием x_{i-1} и управлением u_i на данном шаге:

$$x_i = x_i(x_{i-1}, u_i) \ .$$

3. Управление на каждом шаге создаёт некоторый положительный эффект (характеристика ИС, например, её защищённость изменяется так, как требует цель управления: растёт). Или, наоборот, эффект

будет отрицательным (показатель защищённости уменьшается). Эффект управления зависит только от предыдущего состояния ИС x_{i-1} и управления u_i на данном шаге. Приращение ЦФ F_i задачи в результате i-го шага также зависит от этих двух аргументов: $F_i = F_i(x_{i-1}, u_i)$. Количественное значение ЦФ при прохождении ИС всей последовательности шагов можно вычислить как сумму приращений по всем шагам:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_{i-1}, u_i) \qquad (1.1)$$

4. Векторы состояний x_i и управляющих воздействий u_i определяются всей совокупностью ограничений природного и ресурсного характера [16], объединение которых формирует область допустимых значений управляющих воздействий $u \in U$.

5. Искомым решением задачи будет такой допустимый вектор управляющих воздействий $u^* = \left(u_1^*, u_2^*, ..., u_n^*\right)$, который позволяет получить экстремальное значение ЦФ F^* в процессе реализации всей совокупности n-шагов.

Всякая последовательность управляющих воздействий, переводящая ИС из начального состояния в конечное, получила общее название *стратегии управления.*

Если множество допустимых стратегий управления не пустое, то в нём обязательно найдётся одна или несколько таких стратегий, при которых ЦФ принимает экстремальное значение. Такую стратегию называют *оптимальной стратегией* (ОС).

Метод динамического программирования состоит в последовательном получении ОС. На каждом шаге осуществляют поиск оптимального управление этого шага без учёта предыдущих шагов, но с учётом последствий такого выбора, т.к. управление, не учитывающее всей последовательности шагов, а оптимизирующее ЦФ только на одном шаге, не даёт оптимального решения всей задачи.

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Беллманом [2]: *если некоторая последовательность решений оптимальна, то на любом шаге последующие решения образуют оптимальную стратегию по отношению к результату предыдущих решений.*

Состояние системы на любом шаге не может оказывать влияния на предыдущие шаги, но определяет выбор управляющего воздействия на этом шаге таким образом, чтобы суммарный эффект от реализации управления на данном и всех последующих шагах был бы экстремальным.

Принцип оптимальности Беллмана позволяет построить алгоритм решения задачи динамического программирования [2]:

1) Обратный ход решения задачи: получение множества условно-оптимальных управляющих воздействий. Порядок их получения обратный: от последнего шага к первому.

2) Прямой ход решения задачи: от известного начального состояния к последнему из полученного множества условно-оптимальных управляющих воздействий формируют ОС.

ОС управления можно получить, последовательно собирая ряд управляющих воздействий. Сначала в ряду находится только воздействие, реализуемое на последнем (n-м шаге). Затем к нему добавляем воздействие для двух последних шагах. Затем – для трёх и т.д., вплоть до всех шагов.

Математическое выражение принципа оптимальности.

Обозначим через $f_1(x_{i-1})$, $f_2(x_{i-2})$, ..., $f_n(x_0)$ условно-оптимальные значения приращений ЦФ, соответственно, на последнем шаге, на двух последних, …, на всей последовательности шагов (индекс функции соответствует номеру шага с конца цепочки шагов).

При максимизации ЦФ функция последнего шага равна:

$$f_1(x_{n-1}) = \max_{u_n}\{F_n(x_{n-1}, u_n)\} \quad (1.2)$$

При минимизации ЦФ функция последнего шага равна:

$$f_1(x_{n-1}) = \min_{u_n}\{F_n(x_{n-1}, u_n)\} \quad (1.3)$$

где u_n – множество допустимых (возможных) управляющих воздействий на последнем, n-м шаге, x_{n-1} – возможные состояния системы перед n-м шагом.

При решении задачи максимизации функция двух шагов равна:

$$f_2(x_{n-2}) = \max_{u_{n-1}}\{F_{n-1}(x_{n-2}, u_{n-1}) + f_1(x_{n-1})\} \quad (1.4)$$

При решении задачи минимизации функция двух шагов равна:

$$f_2(x_{n-2}) = \min_{u_{n-1}}\{F_{n-1}(x_{n-2}, u_{n-1}) + f_1(x_{n-1})\} \quad (1.5)$$

При решении задачи максимизации функция i-последних шагов равна:

$$f_i(x_{n-i}) = \max_{u_{n-i+1}} \{F_{n-i+1}(x_{n-i}, u_{n-i+1}) + f_{i-1}(x_{n-i+1})\} \quad (1.6)$$

При решении задачи минимизации функция *i*-последних шагов равна:

$$f_i(x_{n-i}) = \min_{u_{n-i+1}} \{F_{n-i+1}(x_{n-i}, u_{n-i+1}) + f_{i-1}(x_{n-i+1})\} \quad (1.7)$$

При решении задачи максимизации функция всех *n* шагов равна:

$$f_n(x_0) = \max_{u_1} \{F_1(x_0, u_1) + f_{n-1}(x_1)\} \quad (1.8)$$

При решении задачи минимизации функция всех *n* шагов равна:

$$f_n(x_0) = \min_{u_1} \{F_1(x_0, u_1) + f_{n-1}(x_1)\} \quad (1.9)$$

Данные рекуррентные соотношения называют функциональными уравнениями Беллмана.

Согласно представлению задачи как многошагового процесса $f_n(x_0) = F^*$ – искомое оптимальное значение ЦФ.

Таким образом, общий подход к решению задач динамического программирования состоит в следующем [2]:

1. Разбиение задачи на этапы, на каждом из которых происходит решение оптимизационной подзадачи. Если общая задача состоит в совместном принятии множества решений, то её формулируют в виде последовательного процесса принятия решений.

2. Когда все подзадачи решены, или когда оптимальное решение частных подзадач известно, можно скомбинировать эти решения для получения оптимального решения всей задачи. Связь между задачей и подзадачей, как правило, является рекурсивной и определяется функциональным уравнением.

1.2. Задача выбора комплекса средств защиты информации

Постановка задачи.

В ИБ одной из задач, которая может быть решена рассматриваемым методом, является задача выбора комплекса СрЗИ. В общем виде задача заключается в выборе некоторого количества СрЗИ каждого из возможных типов в условиях заданного ограничения общего объёма финансирования. Комплекс выбранных средств должен удовлетворять требованию максимального общего эффекта защиты. При этом эффект комплекса прямо пропорционален эффекту отдельного СрЗИ, а коэффициентом пропорциональности является количество СрЗИ данного типа.

Под эффектом СрЗИ можно понимать, например, количество угроз ИБ, которое оно может успешно отразить за единицу времени или в определённых условиях.

Задача выбора комплекса СрЗИ имеет следующие три вида.

Первый вид задачи – **неограниченная**. Комплекс СрЗИ может содержать средства любых типов в любом количестве при условии, что общая стоимость не превышает установленного предела. Минимальное количество средств каждого типа не ограничено (средство данного типа может вообще отсутствовать). Максимальное количество средств каждого типа ограничено только опосредованно через его стоимость и общий объём финансирования.

Второй вид задачи – **ограниченная без обязательного применения**. Комплекс СрЗИ может содержать средства любых типов в количестве не более заданного при условии, что общая стоимость не превышает установленного предела. Минимальное количество средств каждого типа не ограничено (средство данного типа может вообще отсутствовать). Максимальное количество средств каждого типа ограничено $x_i \le b_i$, где b_i – заданные натуральные числа, указывающие максимальное количество СрЗИ каждого типа в комплексе.

Данное ограничение обусловлено тем, что увеличение количества однотипных средств повышает общий эффект только до определённого предела, после которого средства становятся избыточными.

Третий вид задачи – **ограниченная с обязательным применением**. Комплекс СрЗИ может содержать средства каждого типа в количестве не менее нижнего предела и не более верхнего при условии, что общая стоимость не превышает установленного предела. Минимальное количество средств каждого типа ограничено: $a_i \le x_i$, где a_i – заданные натуральные числа, указывающие минимальное количество СрЗИ каждого типа в комплексе.

Максимальное количество средств каждого типа также ограничено: $x_i \le b_i$, где b_i – заданные натуральные числа, указывающие максимальное количество СрЗИ каждого типа в комплексе.

Дополнительное ограничение обусловлено тем, что каждый тип СрЗИ, как правило, имеет назначение в противодействии только определённым видам угроз ИБ и при построении СЗИ должны быть задействованы средства различных типов.

Математическая модель задачи.

Неограниченная задача.

Заданы:

Y – максимальный общий объём финансирования,

$w_1, w_2, ..., w_m \le Y$ – стоимость СрЗИ каждого из m-типов,

$c_1, c_2, ..., c_m > 0$ – эффект применения (ценность) СрЗИ каждого из m-типов.

Необходимо максимизировать ЦФ:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max \qquad (1.10)$$

на множестве управляющих воздействий $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, задаваемых целыми неотрицательными значениями ($x_1, x_2, ..., x_m \in Z$).

При этом необходимо выполнение условия:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i x_i \le Y \qquad (1.11)$$

x_i – количество СрЗИ i-го типа.

Динамическая шкала решения задачи на прямом ходе формируется рекурсивно:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{0 \le x_i w_i \le y_i \\ y_i - x_i w_i \ge 0}} \{c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i)\}, \quad i = \overline{1,m} \\ f_0(y_0) = 0 \end{cases} \qquad (1.12)$$

где y_i – стоимость комплекса СрЗИ на i-м этапе (при выборе соответственно первых i-типов СрЗИ). $y_i \le Y, \ i = \overline{1,m}$.

Ограниченная (без обязательного применения) задача.

Заданы:

Y – максимальный общий объём финансирования,

$w_1, w_2, ..., w_m \le Y$ – стоимость СрЗИ каждого из m-типов,

$c_1, c_2, ..., c_m > 0$ – эффект применения (ценность) СрЗИ каждого из m-типов,

$b_1, b_2, ..., b_m > 0$ – максимальное количество СрЗИ каждого из m-типов, которое можно включить в комплекс.

Необходимо максимизировать ЦФ:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max \tag{1.13}$$

на множестве управляющих воздействий $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, задаваемых целыми неотрицательными значениями ($x_1, x_2, \ldots, x_m \in Z$).

При этом необходимо выполнение двух условий:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \le Y \\ x_i \le b_i, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \tag{1.14}$$

x_i – количество СрЗИ i-го типа.

Динамическая шкала решения задачи на прямом ходе формируется рекурсивно:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{0 \le x_i w_i \le y_i \\ y_i - x_i w_i \ge 0 \\ x_i \le b_i}} \{c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i)\}, \quad i = \overline{1, m} \\ f_0(y_0) = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

где y_i – стоимость комплекса СрЗИ на i-м этапе (при выборе соответственно первых i-типов СрЗИ). $y_i \le Y,\ i = \overline{1, m}$.

Ограниченная (с обязательным применением) задача.

Заданы:

Y – максимальный общий объём финансирования,

$w_1, w_2, ..., w_m \le Y$ – стоимость СрЗИ каждого из m-типов,

$c_1, c_2, ..., c_m > 0$ – эффект применения (ценность) СрЗИ каждого из m-типов,

$b_1, b_2, ..., b_m > 0$ – максимальное количество СрЗИ каждого из m-типов, которое можно включить в комплекс,

$a_1, a_2, ..., a_m \ge 0$ – минимальное количество СрЗИ каждого из m-типов, которое должно быть включено в комплекс.

Необходимо максимизировать ЦФ:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max \tag{1.16}$$

на множестве управляющих воздействий $x=(x_1, x_2, ..., x_m)$, задаваемых целыми неотрицательными значениями ($x_1, x_2, ..., x_m \in Z$).

При этом необходимо выполнение трёх условий:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} w_i x_i \le Y \\ a_i \le x_i \le b_i, \quad i=\overline{1,m} \end{cases} \qquad (1.17)$$

x_i – количество СрЗИ i-го типа.

Динамическая шкала решения задачи на прямом ходе формируется рекурсивно:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{0 \le x_i w_i \le y_i \\ y_i - x_i w_i \ge 0 \\ a_i \le x_i \le b_i}} \{c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i)\}, \quad i=\overline{1,m} \\ f_0(y_0) = 0 \end{cases} \qquad (1.18)$$

где y_i – стоимость комплекса СрЗИ на i-м этапе (при выборе соответственно первых i-типов СрЗИ). $y_i \le Y$, $i=\overline{1,m}$.

Для построения решения по динамической шкале для каждого вида задачи выполняют обратный ход рекурсивной функции.

Рассмотрим примеры решения задач каждого типа.

Пример 1.1. Соответствует неограниченной задаче.

Пусть общий объём финансирования комплекса СрЗИ составляет Y=80 тыс. рублей. Доступны три типа СрЗИ с характеристиками, представленными в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Исходные данные для примера 1.1

Номер типа СрЗИ, i	Эффект применения, c_i	Стоимость, w_i, тыс. руб.
1	25	10
2	80	30
3	65	20

Для формализации задачи введём обозначения:

i – номер этапа,

y_i – состояние на этапе, т.е. стоимость комплекса СрЗИ при выборе соответственно первых i-типов СрЗИ,

x_i – стратегия (управление) на этапе, которая выражает количество СрЗИ типа i, $0 \le x_i \le \left[Y / w_i \right]$.

Рекуррентное выражение Беллмана будет иметь вид:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{0 \le x_i \le \left[Y / w_i \right] \\ y_i - x_i w_i \ge 0}} \{ c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i) \}, \quad i = \overline{1, m} \\ f_0(y_0) = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

1 этап.

Выбираем СрЗИ только первого типа, количество которых лежит в пределах [0; 8]. Значение функции для первого этапа равно:

$$f_1(y_1) = \max_{0 \le x_1 \le 8} \{25 x_1\}, \quad 0 \le y_1 \le 80 \tag{1.20}$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Варианты выбора на первом этапе для примера 1.1

y_1	x_1=0	x_1=1	x_1=2	x_1=3	x_1=4	x_1=5	x_1=6	x_1=7	x_1=8	$f_1(y_1)$	x_1*
0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
10	0	25	–	–	–	–	–	–	–	25	1
20	0	25	50	–	–	–	–	–	–	50	2
30	0	25	50	75	–	–	–	–	–	75	3
40	0	25	50	75	100	–	–	–	–	100	4
50	0	25	50	75	100	125	–	–	–	125	5
60	0	25	50	75	100	125	150	–	–	150	6
70	0	25	50	75	100	125	150	175	–	175	7
80	0	25	50	75	100	125	150	175	200	200	8

Примечание 1. В таблицах 1.2 – 1.10 прочерки означают невозможность выбора данной стратегии (управления) для установленной стоимости СрЗИ в силу установленных ограничений.

Примечание 2. Стоимость СрЗИ указана в тысячах рублей с шагом, равным 10 тысячам. Шаг изменения стоимости может быть задан с точностью до рубля. Но слишком малый шаг приводит к избыточному количеству вариантов, среди которых разрешимых будет очень немного. А чтобы не потерять значимые варианты, шаг не должен превышать значение наибольшего общего делителя всех показателей x_i и

Y. Оптимальным будет шаг, равный этому наибольшему общему делителю, т.е. в данном примере 10 тысяч рублей.

2 этап.

Выбираем СрЗИ первого и второго типов. Количество средств второго типа лежит в пределах [0; 2]. Значение функции для второго этапа равно:

$$f_2(y_2) = \max_{0 \le x_2 \le 2} \{80x_2 + f_1(y_2 - 30x_2)\}, \quad 0 \le y_2 \le 80 \tag{1.21}$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Варианты выбора на втором этапе для примера 1.1

y_2	x_2=0	x_2=1	x_2=2	$f_2(y_2)$	(x_1*, x_2*)
0	0+0=0	–	–	0	0, 0
10	0+25=25	–	–	25	1, 0
20	0+50=50	–	–	50	2, 0
30	0+75=75	80+0=80	–	80	0, 1
40	0+100=100	80+25=105	–	105	1, 1
50	0+125=125	80+50=130	–	130	2, 1
60	0+150=150	80+75=155	160+0=160	160	0, 2
70	0+175=175	80+100=180	160+25=185	185	1, 2
80	0+200=200	80+125=205	160+50=210	210	2, 2

3 этап.

Выбираем СрЗИ первого, второго и третьего типов. Количество средств третьего типа лежит в пределах [0; 3]. Значение функции для третьего этапа равно:

$$f_3(y_3) = \max_{0 \le x_3 \le 4} \{65x_3 + f_2(y_3 - 20x_3)\}, \quad y_3 \to 80 \tag{1.22}$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.4.

Таким образом, для y_3=80 мы получаем оптимальное решение задачи: включить в комплекс СрЗИ четыре средства третьего типа. При этом суммарный эффект применения средств составляет F=260.

Таблица 1.4

Варианты выбора на третьем этапе для примера 1.1

y_3	x_3=0	x_3=1	x_3=2	x_3=3	x_3=4	$f_3(y_3)$	(x_1*, x_2, x_3*)
0	0+0=0	–	–	–	–	0	0, 0, 0
10	0+25=25	–	–	–	–	25	1, 0, 0
20	0+50=50	65+0=65	–	–	–	65	0, 0, 1
30	0+80=80	65+25=90	–	–	–	90	1, 0, 1
40	0+105= 105	65+50= 115	130+0= 130	–	–	130	0, 0, 2
50	0+130= 130	65+80= 145	130+25= 155	–	–	155	1, 0, 2
60	0+160= 160	65+105= 170	130+50= 180	195+0= 195	–	195	0, 0, 3
70	0+185= 185	65+130= 195	130+80= 210	195+25= 220	–	220	1, 0, 3
80	0+210= 210	65+160= 225	130+105= 235	195+50= 245	260+0= 260	260	0, 0, 4

Динамической шкалой решения задачи называют последовательность получаемых на каждом этапе значений функции:

$$f_i(y_i), \quad i = \overline{1, m} \tag{1.23}$$

В примере 1.1 динамическая шкала следующая:

$$f_i = \{200,\ 210,\ 260\}.$$

Пример 1.2. Соответствует ограниченной (без обязательного применения) задаче.

К условию задачи 1.1 добавим дополнительное требование, заключающееся в том, что должно быть выбрано средств каждого типа в количестве не более двух единиц.

Рекуррентное выражение Беллмана с дополнительным условием будет иметь вид:

$$\begin{cases} f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{0 \le x_i \le \max\left(\left[Y/w_i\right],\,2\right) \\ y_i - x_i w_i \ge 0}} \{c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i)\}, \quad i = \overline{1, m} \\ f_0(y_0) = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

1 этап. Выбираем СрЗИ только первого типа, количество которых лежит уже в пределах [0; 2]. Значение функции для первого этапа равно:

$$f_1(y_1) = \max_{0 \le x_1 \le 2} \{25x_1\}, \quad 0 \le y_1 \le 80 \qquad (1.25)$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.5.

Таблица 1.5

Варианты выбора на первом этапе для примера 1.2

y_1	x_1=0	x_1=1	x_1=2	$f_1(y_1)$	x_1*
0	0	–	–	0	0
10	0	25	–	25	1
20	0	25	50	50	2
30	0	25	50	50	2
40	0	25	50	50	2
50	0	25	50	50	2
60	0	25	50	50	2
70	0	25	50	50	2
80	0	25	50	50	2

2 этап. Выбираем СрЗИ первого и второго типов. Количество средств второго типа лежит в пределах [0; 2]. Значение функции для второго этапа равно:

$$f_2(y_2) = \max_{0 \le x_2 \le 2} \{80x_2 + f_1(y_2 - 30x_2)\}, \quad 0 \le y_2 \le 80 \qquad (1.26)$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6

Варианты выбора на втором этапе для примера 1.2

y_2	x_2=0	x_2=1	x_2=2	$f_2(y_2)$	(x_1*, x_2*)
0	0+0=0	–	–	0	0, 0
10	0+25=25	–	–	25	1, 0
20	0+50=50	–	–	50	2, 0
30	0+50=50	80+0=80	–	80	0, 1
40	0+50=50	80+25=105	–	105	1, 1
50	0+50=50	80+50=130	–	130	2, 1
60	0+50=50	80+50=130	160+0=160	160	0, 2
70	0+50=50	80+50=130	160+25=185	185	1, 2
80	0+50=50	80+50=130	160+50=210	210	2, 2

3 этап. Выбираем СрЗИ первого, второго и третьего типов. Количество средств третьего типа с учётом дополнительного ограничения лежит в пределах [0; 2]. Значение функции для третьего этапа равно:

$$f_3(y_3) = \max_{0 \le x_3 \le 2} \{65x_3 + f_2(y_3 - 20x_3)\}, \quad y_3 \to 80 \tag{1.27}$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7

Варианты выбора на третьем этапе для примера 1.2

y_3	x_3=0	x_3=1	x_3=2	$f_3(y_3)$	(x_1*, x_2*, x_3*)
0	0+0=0	–	–	0	0, 0, 0
10	0+25=25	–	–	25	1, 0, 0
20	0+50=50	65+0=65	–	65	0, 0, 1
30	0+80=80	65+25=90	–	90	1, 0, 1
40	0+105=105	65+50=115	130+0=130	130	0, 0, 2
50	0+130=130	65+80=145	130+25=155	155	1, 0, 2
60	0+160=160	65+105=165	130+50=180	180	2, 0, 2
70	0+185=185	65+130=195	130+80=210	210	0, 1, 2
80	0+210=210	65+160=225	130+105=235	235	1, 1, 2

Таким образом, для y_3=80 мы получаем оптимальное решение задачи: включить в комплекс СрЗИ одно средство первого типа, одно средство второго типа и два средства третьего типа. При этом суммарный эффект применения средств составляет F=235.

В примере 1.2 получилась следующая динамическая шкала:

$$f_i = \{50,\ 210,\ 235\}.$$

Пример 1.3. Соответствует ограниченной (с обязательным применением) задаче.

К условию задачи 1.2 добавим ещё одно дополнительное требование, заключающееся в том, что должно быть выбрано не менее одного средства каждого типа.

Рекуррентное выражение Беллмана с этим дополнительным условием будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
f_i(y_i) = \max\limits_{\substack{1 \le x_i \le \max\left(\left[\frac{Y}{w_i}\right], 2\right) \\ y_i - x_i w_i \ge 0}} \{c_i x_i + f_{i-1}(y_i - w_i x_i)\}, \quad i = \overline{1, m} \\
f_0(y_0) = 0
\end{cases}
\qquad (1.28)
$$

1 этап. Выбираем СрЗИ только первого типа, количество которых лежит теперь в пределах [1; 2]. Значение функции для первого этапа равно:

$$
f_1(y_1) = \max_{1 \le x_1 \le 2} \{25 x_1\}, \quad 0 \le y_1 \le 80 \qquad (1.29)
$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.8.

Таблица 1.8

Варианты выбора на первом этапе для примера 1.3

y_1	x_1=1	x_1=2	$f_1(y_1)$	x_1*
0	–	–	–	–
10	25	–	25	1
20	25	50	50	2
30	25	50	50	2
40	25	50	50	2
50	25	50	50	2
60	25	50	50	2
70	25	50	50	2
80	25	50	50	2

2 этап. Выбираем СрЗИ первого и второго типов. Количество средств второго типа с учётом дополнительных ограничений лежит в пределах [1; 2]. Значение функции для второго этапа равно:

$$
f_2(y_2) = \max_{1 \le x_2 \le 2} \{80 x_2 + f_1(y_2 - 30 x_2)\}, \quad 0 \le y_2 \le 80 \qquad (1.30)
$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.9.

Таблица 1.9

Варианты выбора на втором этапе для примера 1.3

y_2	x_2=1	x_2=2	$f_2(y_2)$	(x_1*, x_2*)
1	2	3	4	5
0	–	–	–	–
10	–	–	–	–
20	–	–	–	–

Продолжение таблицы 1.9

1	2	3	4	5
30	–	–	–	–
40	80+25=105	–	105	1, 1
50	80+50=130	–	130	2, 1
60	80+50=130	–	130	2, 1
70	80+50=130	160+25=185	185	1, 2
80	80+50=130	160+50=210	210	2, 2

3 этап. Выбираем СрЗИ первого, второго и третьего типов. Количество средств третьего типа с учётом дополнительных ограничений лежит в пределах [1; 2]. Значение функции для третьего этапа равно:

$$f_3(y_3) = \max_{1 \le x_3 \le 2} \{65x_3 + f_2(y_3 - 20x_3)\}, \quad y_3 \to 80 \qquad (1.31)$$

Все возможные варианты выбора представлены в таблице 1.10.

Таблица 1.10

Варианты выбора на третьем этапе для примера 1.3

y_3	x_3=1	x_3=2	$f_3(y_3)$	(x_1*, x_2*, x_3*)
0	–	–	–	–
10	–	–	–	–
20	–	–	–	–
30	–	–	–	–
40	–	–	–	–
50	–	–	–	–
60	65+105=165	–	165	1, 1, 1
70	65+130=195	–	195	2, 1, 1
80	65+130=195	130+105=235	235	1, 1, 2

Таким образом, для y_3=80 мы получаем оптимальное решение задачи: включить в комплекс СрЗИ одно средство первого типа, одно средство второго типа и два средства третьего типа. При этом суммарный эффект применения средств составляет F=235.

В примере 1.3 получилась следующая динамическая шкала:

$f_i = \{50,\ 210,\ 235\}$.

Общее замечание. Сравнивая решения примеров 1.1, 1.2 и 1.3, можно отметить, что ведение дополнительных ограничений существенно сокращает количество допустимых вариантов выбора, но это не обязательно ведёт к получению иного оптимального решения (как видно из второй и третьей задач).

1.3. Практическое задание № 1

Разработать общее программное средство для решения трёх задач методом динамического программирования с выводом на экран динамической шкалы для максимального значения объёма финансирования (Y) из предложенного диапазона в каждой задаче. Определены следующие исходные данные и требования к анализу решения задач.

1. Сформулирована первая задача: неограниченная задача выбора комплекса СрЗИ, в которой определены (по вариантам из таблицы 1.11):

– количество типов СрЗИ, m;

– общий объём финансирования (в условных единицах), принимающий целочисленные значения в заданном диапазоне, Y;

– стоимость СрЗИ каждого типа, $w_1, w_2, ..., w_i, ..., w_m$;

– эффект применения (в условных единицах) СрЗИ каждого типа, $c_1, c_2, ..., c_i, ..., c_m$.

2. В первой задаче необходимо определить количество СрЗИ каждого типа, выбор которых даёт максимальное значение ЦФ $f_j(Y_j)$, $j = \overline{1, n}$ для каждого значения объёма финансирования в заданных пределах, n – количество значений переменной Y в заданном диапазоне.

3. Изменить в первой задаче эффективность каждого СрЗИ, задав отклонения от исходных значений следующим образом: $w_i^{(1)} = w_i - 1$ и $w_i^{(2)} = w_i - 2$. Для изменённых данных определить новые значения ЦФ $f_j^{(1)}(Y_j)$ и $f_j^{(2)}(Y_j)$ во всём заданном диапазоне значений Y.

4. Для результатов решения первой задачи построить семейства графиков $f_j(Y_j)$, $f_j^{(1)}(Y_j)$ и $f_j^{(2)}(Y_j)$.

5. Сформулирована вторая задача: ограниченная (без обязательного применения) задача выбора комплекса СрЗИ, в которой определены (по вариантам из таблицы 1.12):

– количество типов СрЗИ, m=4 для всех вариантов;

– общий объём финансирования (в условных единицах), принимающий целочисленные значения в заданном диапазоне, Y;

– стоимость СрЗИ каждого типа, $w_1, w_2, ..., w_i, ..., w_m$;

– эффект применения (в условных единицах) СрЗИ каждого типа, $c_1, c_2, ..., c_i, ..., c_m$;

– максимальное количество СрЗИ каждого типа, которое можно включить в комплекс $b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_m$.

6. Во второй задаче необходимо определить количество СрЗИ каждого типа, выбор которых даёт максимальное значение ЦФ $f_j(Y_j)$, $j = \overline{1,n}$ для каждого значения объёма финансирования в заданных пределах в условиях их ограниченного применения, n – количество значений переменной Y в заданном диапазоне.

7. Изменить во второй задаче максимальное количество СрЗИ каждого типа, которое можно включить в комплекс, задав отклонения от исходных значений следующим образом: $b_i^{(-1)} = b_i - 1$ и $b_i^{(+1)} = b_i + 1$. Для изменённых данных определить новые значения ЦФ $f_j^{(-1)}(Y_j)$ и $f_j^{(+1)}(Y_j)$ во всём заданном диапазоне значений Y.

8. Для результатов решения второй задачи построить семейства графиков $f_j(Y_j)$, $f_j^{(-1)}(Y_j)$ и $f_j^{(+1)}(Y_j)$.

9. Сформулирована третья задача: ограниченная (с обязательным применением) задача выбора комплекса СрЗИ, в которой определены (по вариантам из таблицы 1.13):

– количество типов СрЗИ, m=4 для всех вариантов;

– общий объём финансирования (в условных единицах), принимающий целочисленные значения в заданном диапазоне, Y;

– стоимость СрЗИ каждого типа, $w_1, w_2, ..., w_i, ..., w_m$,

– эффект применения (в условных единицах) СрЗИ каждого типа, $c_1, c_2, ..., c_i, ..., c_m$,

– минимальное количество СрЗИ каждого типа, которое должно быть включено в комплекс, $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_m$,

– максимальное количество СрЗИ каждого типа, которое можно включить в комплекс, $b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_m$.

10. В третьей задаче необходимо определить количество СрЗИ каждого типа, выбор которых даёт максимальное значение ЦФ $f_j(Y_j)$, $j = \overline{1,n}$ для каждого значения объёма финансирования в заданных пределах в условиях их обязательного и ограниченного применения, n – количество значений переменной Y в заданном диапазоне.

11. Изменить в третьей задаче минимальное количество СрЗИ каждого типа, которое можно включить в комплекс, задав отклонения от исходных значений следующим образом: $a_i^{(+)} = a_i + 1$. Для изменённых данных определить новые значения ЦФ $f_j^{(+)}(Y_j)$ во всём заданном диапазоне значений Y.

12. Для результатов решения второй задачи построить семейства графиков $f_j(Y_j)$ и $f_j^{(+)}(Y_j)$.

13. Сделать выводы об изменениях значений ЦФ при варьировании исходных данных. В выводах путём сравнения семейств графиков п.4, п.8 и п.12 должно быть дано обоснование наличия скачкообразных отклонений одного графика от других либо обоснование отсутствия таких отклонений.

Таблица 1.11

Варианты исходных данных для п.1 практического задания №1

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
1	5	15	[14, 28]	1	4	40
				2	5	49
				3	7	50
				4	8	51
				5	9	53
2	5	17	[16, 32]	1	4	10
				2	5	19
				3	7	20
				4	8	21
				5	10	22

Продолжение таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
3	5	21	[20, 40]	1	8	10
				2	10	19
				3	11	20
				4	13	21
				5	14	23
4	5	23	[22, 44]	1	8	20
				2	10	29
				3	11	31
				4	13	30
				5	15	34
5	5	24	[23, 46]	1	8	50
				2	9	59
				3	13	60
				4	14	71
				5	15	69
6	5	26	[25, 50]	1	9	50
				2	10	59
				3	11	70
				4	13	71
				5	15	69
7	5	16	[15, 30]	1	5	50
				2	6	59
				3	8	70
				4	10	71
				5	11	69
8	5	20	[19, 38]	1	6	50
				2	7	59
				3	9	70
				4	10	71
				5	12	69

Продолжение таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
9	5	19	[18, 36]	1	6	50
				2	7	55
				3	9	60
				4	10	49
				5	12	61
10	5	24	[23, 46]	1	6	10
				2	7	25
				3	9	30
				4	10	29
				5	12	31
11	4	18	[17, 34]	1	4	40
				2	5	42
				3	6	45
				4	7	49
12	4	22	[21, 42]	1	4	10
				2	5	18
				3	7	19
				4	8	21
13	4	25	[24, 48]	1	8	10
				2	9	19
				3	11	21
				4	12	25
14	4	14	[13, 26]	1	3	20
				2	5	22
				3	8	28
				4	9	30
15	4	13	[12, 24]	1	4	3
				2	5	9
				3	6	12
				4	7	15

Продолжение таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
16	4	12	[11, 22]	1	5	40
				2	6	42
				3	9	70
				4	8	60
17	4	11	[10, 20]	1	3	21
				2	4	25
				3	6	28
				4	5	31
18	4	18	[17, 34]	1	6	23
				2	7	28
				3	8	31
				4	9	40
19	4	22	[21, 42]	1	6	22
				2	7	26
				3	8	28
				4	10	33
20	4	25	[24, 48]	1	6	10
				2	7	28
				3	9	33
				4	10	35
21	5	15	[14, 28]	1	4	40
				2	5	49
				3	3	20
				4	8	51
				5	6	28
22	5	20	[19, 38]	1	3	10
				2	5	19
				3	4	15
				4	8	21
				5	9	22

Продолжение таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
23	5	22	[21, 42]	1	8	10
				2	10	19
				3	9	12
				4	12	21
				5	7	9
24	5	23	[22, 44]	1	8	20
				2	10	29
				3	11	31
				4	13	30
				5	14	34
25	5	17	[16, 32]	1	8	50
				2	9	59
				3	10	53
				4	11	61
				5	13	65
26	5	26	[25, 50]	1	9	50
				2	10	55
				3	12	58
				4	13	71
				5	14	70
27	5	16	[15, 30]	1	5	50
				2	6	59
				3	8	60
				4	9	65
				5	10	66
28	5	15	[16, 32]	1	3	15
				2	4	18
				3	5	20
				4	6	22
				5	7	30

Продолжение таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
29	5	18	[19, 38]	1	6	50
				2	7	55
				3	9	56
				4	10	49
				5	11	59
30	5	23	[22, 44]	1	5	10
				2	6	22
				3	7	30
				4	8	25
				5	9	31
31	5	20	[19, 38]	1	6	50
				2	7	59
				3	9	70
				4	10	71
				5	12	65
32	5	19	[18, 36]	1	6	50
				2	7	55
				3	9	65
				4	10	70
				5	12	61
33	5	24	[23, 46]	1	6	10
				2	7	25
				3	9	30
				4	10	35
				5	12	31
34	4	18	[17, 34]	1	4	40
				2	5	41
				3	6	45
				4	7	50

Окончание таблицы 1.11

№ варианта	m	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i
35	4	22	[21, 42]	1	4	10
				2	5	18
				3	7	19
				4	8	30
36	4	25	[24, 48]	1	8	10
				2	9	20
				3	11	21
				4	12	25
37	4	14	[13, 26]	1	3	20
				2	5	22
				3	8	28
				4	9	35
38	4	13	[12, 24]	1	4	3
				2	5	8
				3	6	12
				4	7	15
39	4	12	[11, 22]	1	5	40
				2	6	42
				3	9	77
				4	8	60
40	4	11	[10, 20]	1	3	21
				2	4	26
				3	6	28
				4	5	31

Таблица 1.12

Варианты исходных данных для п.5 практического задания №1

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
1	29	[28, 56]	1	5	10	4
			2	6	15	2
			3	7	20	2
			4	9	29	3
2	24	[23, 46]	1	5	60	4
			2	7	75	2
			3	8	70	2
			4	9	89	3
3	19	[18, 36]	1	5	60	3
			2	6	75	2
			3	8	70	2
			4	9	89	3
4	20	[19, 38]	1	4	60	4
			2	5	75	2
			3	8	70	2
			4	9	89	3
5	26	[25, 50]	1	4	25	2
			2	5	20	4
			3	8	29	2
			4	9	31	5
6	28	[27, 54]	1	4	10	3
			2	6	15	2
			3	7	13	2
			4	9	24	3
7	23	[22, 44]	1	5	50	4
			2	6	70	2
			3	8	60	2
			4	9	79	3

Продолжение таблицы 1.12

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
8	17	[16, 32]	1	5	60	3
			2	6	70	2
			3	7	65	2
			4	8	69	3
9	19	[18, 36]	1	4	55	4
			2	5	75	2
			3	8	65	2
			4	9	69	3
10	25	[24, 48]	1	5	24	2
			2	6	21	4
			3	8	27	2
			4	9	33	4
11	28	[27, 54]	1	4	10	3
			2	5	15	2
			3	8	20	2
			4	9	29	3
12	23	[22, 44]	1	5	60	3
			2	7	75	3
			3	8	70	2
			4	9	89	3
13	20	[19, 38]	1	5	60	3
			2	6	75	2
			3	8	70	2
			4	9	89	3
14	21	[20, 40]	1	4	60	3
			2	5	75	2
			3	8	70	2
			4	9	89	3

Продолжение таблицы 1.12

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
15	25	[24, 48]	1	5	25	3
			2	6	20	2
			3	7	29	3
			4	9	31	3
16	27	[26, 52]	1	4	10	3
			2	6	15	2
			3	8	13	2
			4	9	24	3
17	22	[21, 42]	1	5	50	2
			2	6	70	2
			3	8	60	2
			4	9	79	3
18	18	[17, 34]	1	5	60	3
			2	6	70	2
			3	7	65	2
			4	8	69	3
19	20	[19, 38]	1	4	55	2
			2	5	75	2
			3	8	65	2
			4	9	69	3
20	24	[23, 46]	1	3	24	2
			2	4	21	2
			3	6	27	3
			4	9	33	3
21	24	[27, 54]	1	4	24	4
			2	5	21	4
			3	6	27	3
			4	9	33	3

Продолжение таблицы 1.12

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
22	20	[22, 44]	1	4	55	4
			2	5	75	4
			3	8	65	4
			4	9	69	3
23	18	[19, 38]	1	5	60	3
			2	6	70	4
			3	7	65	4
			4	8	69	3
24	22	[20, 40]	1	5	50	4
			2	6	70	4
			3	8	60	4
			4	9	79	3
25	27	[24, 48]	1	5	10	3
			2	6	15	4
			3	7	13	4
			4	9	24	3
26	25	[26, 52]	1	5	25	3
			2	6	20	4
			3	8	29	3
			4	9	31	3
27	21	[21, 42]	1	4	60	3
			2	5	75	4
			3	8	70	4
			4	9	89	3
28	20	[17, 34]	1	5	60	3
			2	6	75	4
			3	8	70	4
			4	9	89	3

Продолжение таблицы 1.12

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
29	23	[19, 38]	1	5	60	3
			2	6	75	3
			3	7	70	4
			4	8	89	3
30	28	[23, 46]	1	5	10	3
			2	7	15	4
			3	8	20	4
			4	9	29	3
31	28	[27, 54]	1	4	10	3
			2	9	29	1
			3	8	20	2
			4	5	15	2
32	23	[22, 44]	1	5	60	3
			2	9	89	1
			3	8	70	2
			4	7	75	1
33	20	[19, 38]	1	8	70	2
			2	6	75	2
			3	5	60	3
			4	9	89	3
34	21	[20, 40]	1	9	89	1
			2	5	75	2
			3	8	70	2
			4	4	60	3
35	25	[24, 48]	1	5	25	3
			2	7	29	3
			3	6	20	2
			4	9	31	1

Окончание таблицы 1.12

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	b_i
36	27	[26, 52]	1	9	24	3
			2	6	15	2
			3	8	13	3
			4	4	10	3
37	22	[21, 42]	1	6	70	2
			2	5	50	2
			3	8	60	2
			4	9	79	3
38	18	[17, 34]	1	5	60	3
			2	6	70	2
			3	8	69	4
			4	7	65	2
39	20	[19, 38]	1	8	65	2
			2	5	75	2
			3	4	55	2
			4	9	69	4
40	24	[23, 46]	1	3	24	2
			2	9	33	4
			3	6	27	3
			4	4	21	2

Таблица 1.13

Варианты исходных данных для п.9 практического задания №1

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
1	28	[123, 146]	1	5	10	2	4
			2	6	15	1	2
			3	7	20	1	2
			4	9	29	1	3

Продолжение таблицы 1.13

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
2	23	[119, 138]	1	5	60	2	4
			2	7	75	1	2
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
3	20	[117, 134]	1	5	60	2	3
			2	6	75	1	2
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
4	21	[121, 142]	1	4	60	2	4
			2	5	75	1	2
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
5	25	[126, 152]	1	4	25	1	2
			2	5	20	2	4
			3	8	29	1	2
			4	9	31	2	4
6	27	[124, 148]	1	4	10	2	3
			2	6	15	1	2
			3	7	13	1	2
			4	9	24	1	3
7	22	[120, 140]	1	5	50	2	4
			2	6	70	1	2
			3	8	60	1	2
			4	9	79	1	3
8	18	[119, 138]	1	5	60	2	3
			2	6	70	1	2
			3	7	65	1	2
			4	8	69	1	3
9	20	[122, 144]	1	4	55	2	4
			2	5	75	1	2
			3	8	65	1	2
			4	9	69	2	3

Продолжение таблицы 1.13

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
10	24	[127, 154]	1	5	24	1	2
			2	6	21	2	4
			3	8	27	1	2
			4	9	33	1	4
11	24	[123, 146]	1	4	10	2	3
			2	5	15	1	2
			3	8	20	1	2
			4	9	29	1	3
12	20	[119, 138]	1	5	60	2	3
			2	7	75	1	3
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
13	18	[117, 134]	1	5	60	2	3
			2	6	75	1	2
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
14	22	[121, 142]	1	4	60	2	3
			2	5	75	1	2
			3	8	70	1	2
			4	9	89	1	3
15	27	[126, 152]	1	5	25	2	4
			2	6	20	1	2
			3	7	29	1	3
			4	9	31	1	3
16	25	[124, 148]	1	4	10	2	4
			2	6	15	1	2
			3	8	13	1	2
			4	9	24	2	4
17	21	[120, 140]	1	5	50	1	2
			2	6	70	1	2
			3	8	60	1	2
			4	9	79	2	4

Продолжение таблицы 1.13

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
18	20	[119, 138]	1	5	60	2	4
			2	6	70	1	2
			3	7	65	1	2
			4	8	69	1	3
19	23	[122, 144]	1	4	55	2	4
			2	5	75	1	2
			3	8	65	1	2
			4	9	69	1	3
20	28	[127, 154]	1	3	24	1	2
			2	4	21	1	2
			3	6	27	2	3
			4	9	33	1	3
21	25	[124, 148]	1	4	24	1	4
			2	5	21	2	4
			3	6	27	1	3
			4	9	33	1	3
22	19	[118, 136]	1	4	55	1	4
			2	5	75	1	4
			3	8	65	1	4
			4	9	69	1	3
23	17	[116, 132]	1	5	60	1	3
			2	6	70	2	4
			3	7	65	1	4
			4	8	69	1	3
24	23	[122, 144]	1	5	50	2	4
			2	6	70	1	4
			3	8	60	1	4
			4	9	79	1	3
25	28	[127, 154]	1	5	10	1	3
			2	6	15	2	4
			3	7	13	1	4
			4	9	24	1	3

Продолжение таблицы 1.13

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
26	25	[124, 148]	1	5	25	2	3
			2	6	20	1	4
			3	8	29	1	3
			4	9	31	1	3
27	20	[119, 138]	1	4	60	1	3
			2	5	75	2	4
			3	8	70	1	4
			4	9	89	2	3
28	19	[118, 136]	1	5	60	2	3
			2	6	75	1	4
			3	8	70	2	4
			4	9	89	1	3
29	24	[123, 146]	1	5	60	2	3
			2	6	75	1	3
			3	7	70	2	4
			4	8	89	1	3
30	29	[128, 156]	1	5	10	1	3
			2	7	15	2	4
			3	8	20	2	4
			4	9	29	1	3
31	28	[123, 146]	1	5	10	2	3
			2	9	29	1	3
			3	7	20	1	2
			4	6	15	1	2
32	23	[119, 138]	1	5	60	2	3
			2	8	70	1	2
			3	7	75	1	2
			4	9	89	1	3
33	20	[117, 134]	1	8	70	1	2
			2	6	75	1	2
			3	5	60	2	3
			4	9	89	1	3

Окончание таблицы 1.13

№ варианта	n	Диапазон Y	i	w_i	c_i	a_i	b_i
34	21	[121, 142]	1	8	70	1	2
			2	5	75	1	2
			3	4	60	2	3
			4	9	89	1	3
35	25	[126, 152]	1	4	25	1	2
			2	8	29	1	2
			3	5	20	2	3
			4	9	31	2	3
36	27	[124, 148]	1	9	24	1	3
			2	6	15	1	2
			3	7	13	1	2
			4	4	10	2	3
37	22	[120, 140]	1	5	50	2	3
			2	6	70	1	2
			3	9	79	1	3
			4	8	60	1	2
38	18	[119, 138]	1	5	60	2	3
			2	7	65	1	2
			3	6	70	1	2
			4	8	69	1	3
39	20	[122, 144]	1	8	65	1	2
			2	5	75	1	2
			3	4	55	2	3
			4	9	69	2	3
40	24	[127, 154]	1	5	24	1	2
			2	8	27	1	2
			3	6	21	2	3
			4	9	33	1	3

1.4. Задача оптимального финансирования мероприятий по обеспечению информационной безопасности

Постановка задачи.

Вторая задача, которая может быть решена методами динамического программирования, является задача оптимального финансирования мероприятий по обеспечению ИБ. Требуется оптимально распределить заданный объём финансовых средств на проведение нескольких мероприятий по ЗИ.

Ожидаемый рост эффекта от проведения мероприятий зависит как от самого мероприятия, так и от объёма его финансирования [15]. В контексте данной задачи под эффектом следует понимать сокращение объёма средств (потенциально сэкономленные средства) на восстановление информации вследствие уменьшения количества и/или интенсивности угроз ИБ после проведения защитных мероприятий.

Все мероприятия различны и строго дифференцированы, поэтому прирост эффекта по отдельно взятому мероприятию не зависит от проведения других мероприятий. Общий прирост эффекта аддитивен, т.е. равен сумме всех приростов по отдельным мероприятиям.

В задаче необходимо определить такое распределение средств по отдельным (не обязательно всем) мероприятиям, которое максимизирует общий прирост эффекта.

Изначально задача не подразумевает динамической постановки, т.к. в ней не выделены какие-либо этапы, но её можно представить именно как задачу динамического программирования, если определение объёма финансирования мероприятий рассматривать последовательно, т.е. на каждом шаге к уже профинансированным мероприятиям добавлять следующее.

При таком подходе можно использовать функциональные уравнения Беллмана. Для их решения в виде таблицы общий объём финансовых средств необходимо представить дискретной шкалой из n-интервалов с шагом дискретизации Δ. Таким образом значения функций в уравнениях Беллмана будем вычислять только в дискретах Δ.

Математическая модель задачи.

C – общий объём распределяемых финансовых средств,

n – количество мероприятий,

x_i – объём средств, выделяемых на мероприятия на i-м шаге, $0 \le x_i \le C, \quad i = \overline{1,n}$.

$F_i(x_i)$ – ожидаемый прирост эффекта по i-му мероприятию при выделении на него x_i средств.

ЦФ определяется как:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) \to \max \tag{1.32}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \le C \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{1.33}$$

Схема решения задачи.

1 этап. Определение последовательности функций.

$g_1(x)$– максимальный эффект, если x-средств выделить только на одно первое мероприятие,

$g_2(x)$– максимальный эффект, если x-средств выделить и на первое, и на второе мероприятия, распределив между ними,

…

$g_n(x)$– максимальный эффект, если x-средств выделить на все мероприятия, распределив между ними,

Очевидно, что:

$$\begin{matrix} g_n(C) = \max F = F^* \\ g_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,n} \end{matrix} \tag{1.34}$$

2 этап. «Обратный ход».

При финансировании только первого мероприятия получим:

$$g_1(x) = F_1(x) \tag{1.35}$$

Теперь финансовые средства в объёме x распределим между вторым и первым мероприятиями, соответственно, на второе x_2, а на первое: $x_1 = x - x_2$. Общий эффект от их реализации будет:

$$g_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le C} \left(F_2(x_2) + g_1(x - x_2)\right) \tag{1.36}$$

Включая в распределение третье мероприятие, выделим на его реализацию финансы в объёме x_3. Тогда остаток $x - x_3$ необходимо оптимальным образом распределить между первым и вторым мероприятиями:

$$g_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le C} \left(F_3(x_3) + g_2(x - x_3) \right) \tag{1.37}$$

Пройдя весь процесс распределения, для n-го мероприятия получим следующее выражение:

$$g_n(x) = \max_{0 \le x_n \le C} \left(F_n(x_n) + g_{n-1}(x - x_{n-1}) \right) \tag{1.38}$$

3 этап. «Прямой ход».

Функциональные уравнения Беллмана (1.35) – (1.38) позволяют рассчитать значения функций g_i и F_i для всех возможных дискрет финансирования x. Среди них находим оптимальное значение ЦФ $g_n(C) = F^*$ и оптимальный вектор финансирования x_n^* такой, что $F_n\left(x_n^*\right) = F_n^*$, после чего выполняем обратный ход. Зная x_n^*, находим $C - x_n^*$ – объём средств, выделяемых на остальные n-1 мероприятия, а следовательно значение ЦФ для n-1 шага, F_{n-1}^* и оптимальный вектор для этого шага x_{n-1}^*, и т.д. до нахождения значений x_1^* и $F_1^* = F_1\left(x_1^*\right)$.

Пример 1.4. Задача оптимального финансирования четырёх мероприятий.

Условие задачи.

Пусть общий объём финансирования C составляет 210 тыс. рублей, а шаг его дискретизации Δ=30 тыс. рублей.

Ожидаемый прирост эффекта при соответствующем дискретном объёме финансирования мероприятий задан таблицей 1.14.

Таблица 1.14

Прирост эффекта при финансировании мероприятий для примера 1.4

№ мероприятия	Прирост эффекта для выделенных средств (x)							
	0	30	60	90	120	150	180	210
1	0	75	90	100	106	112	114	118
2	0	80	95	111	115	124	128	133
3	0	43	60	75	80	88	95	100
4	0	30	44	66	77	95	101	114

Решение задачи.

1 этап. Построим функциональные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&g_1(x) = F_1(x) \\
&g_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le 700} \left(F_2(x_2) + g_1(x - x_2) \right) \\
&g_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le 700} \left(F_3(x_3) + g_2(x - x_3) \right) \qquad (1.39) \\
&g_4(x) = \max_{0 \le x_4 \le 700} \left(F_4(x_4) + g_3(x - x_4) \right)
\end{aligned}
$$

2 этап. По «обратному ходу» заполняем таблицу вариантов распределения финансирования (таблица 1.15). В ячейках этой таблицы записываем соответствующие значения функций для каждого варианта.

Таблица 1.15

Варианты распределения финансирования мероприятий в примере 1.4

x	$g_1(x) = F_1(x)$	$F_2(x)$	g_2	$F_3(x)$	g_3	$F_4(x)$	$g_4 = F^*$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
30	75	80	80	43	80	30	80
60	90	95	155	60	155	44	155
90	100	111	170	75	198	66	198
120	106	115	186	80	215	77	228
150	112	124	201	88	230	95	245
180	114	128	211	95	246	101	264
210	118	133	217	100	261	114	281

Пояснения по процессу заполнения таблицы 1.15.

1. Назначение столбцов.

Первый столбец таблицы – это значения объёма финансирования мероприятий с шагом дискретизации Δ=30 тыс. рублей (первая строка из таблицы 1.14).

Второй, третий, пятый и седьмой столбцы – это значения эффекта при выделении финансирования исключительно на, соответственно, первое, второе, третье и четвёртое мероприятия.

Четвёртый столбец – значения ЦФ при финансировании первого и второго мероприятий.

Шестой столбец – значения ЦФ при финансировании первого, второго и третьего мероприятий.

Восьмой столбец – значения ЦФ при финансировании всех четырёх мероприятий, т.е. оптимальное решение задачи для каждого значения объёма финансирования.

2. Заполнение второго, третьего, пятого и седьмого столбцов.

Исходные данные взяты соответственно из первой, второй, третьей и четвёртой строк таблицы 1.14.

3. Заполнение четвёртого столбца.

Первая строка предполагает нулевое финансирование и определяется по второй части выражения (1.34).

Вторая строка: имеется два варианта (верхние индексы в скобках указывают номер варианта):

$g_2^{(1)}(30)=F_2(0)+g_1(30)=0+75=75$ и

$g_2^{(2)}(30)=F_2(30)+g_1(0)=80+0=80$.

2-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(30)=80$.

Третья строка: имеется три варианта:

$g_2^{(1)}(60)=F_2(0)+g_1(60)=0+90=90$,

$g_2^{(2)}(60)=F_2(30)+g_1(30)=80+75=155$ и

$g_2^{(3)}(60)=F_2(60)+g_1(0)=95+0=95$.

2-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(60)=155$.

Четвёртая строка: имеется четыре варианта:

$g_2^{(1)}(90)=F_2(0)+g_1(90)=0+100=100$,

$g_2^{(2)}(90)=F_2(30)+g_1(60)=80+90=170$,

$g_2^{(3)}(90)=F_2(60)+g_1(30)=95+75=170$ и

$g_2^{(4)}(90)=F_2(90)+g_1(0)=111+0=111$.

2-й и 3-й варианты имеют максимальное значение, следовательно $g_2(90)=170$.

Пятая строка: имеется пять вариантов:

$g_2^{(1)}(120)=F_2(0)+g_1(120)=0+106=106$,

$g_2^{(2)}(120)=F_2(30)+g_1(90)=80+100=180$,

$g_2^{(3)}(120) = F_2(60) + g_1(60) = 95 + 90 = 185,$

$g_2^{(4)}(120) = F_2(90) + g_1(30) = 111 + 75 = 186$ и

$g_2^{(5)}(120) = F_2(120) + g_1(0) = 115 + 0 = 115.$

4-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(120) = 186$.

Шестая строка: имеется шесть вариантов:

$g_2^{(1)}(150) = F_2(0) + g_1(150) = 0 + 112 = 112,$

$g_2^{(2)}(150) = F_2(30) + g_1(120) = 80 + 106 = 186,$

$g_2^{(3)}(150) = F_2(60) + g_1(90) = 95 + 100 = 195,$

$g_2^{(4)}(150) = F_2(90) + g_1(60) = 111 + 90 = 201,$

$g_2^{(5)}(150) = F_2(120) + g_1(30) = 115 + 75 = 190$ и

$g_2^{(6)}(150) = F_2(150) + g_1(0) = 124 + 0 = 124.$

4-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(150) = 201$.

Седьмая строка: имеется семь вариантов:

$g_2^{(1)}(180) = F_2(0) + g_1(180) = 0 + 114 = 114,$

$g_2^{(2)}(180) = F_2(30) + g_1(150) = 80 + 112 = 192,$

$g_2^{(3)}(180) = F_2(60) + g_1(120) = 95 + 106 = 201,$

$g_2^{(4)}(180) = F_2(90) + g_1(90) = 111 + 100 = 211,$

$g_2^{(5)}(180) = F_2(120) + g_1(60) = 115 + 90 = 205,$

$g_2^{(6)}(180) = F_2(150) + g_1(30) = 124 + 75 = 199$ и

$g_2^{(7)}(180) = F_2(180) + g_1(0) = 128 + 0 = 128.$

4-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(180) = 211$.

Восьмая строка: имеется восемь вариантов:

$g_2^{(1)}(210) = F_2(0) + g_1(210) = 0 + 118 = 118,$

$g_2^{(2)}(210) = F_2(30) + g_1(180) = 80 + 114 = 194,$

$g_2^{(3)}(210) = F_2(60) + g_1(150) = 95 + 112 = 207,$

$g_2^{(4)}(210) = F_2(90) + g_1(120) = 111 + 106 = 217,$

$g_2^{(5)}(210) = F_2(120) + g_1(90) = 115 + 100 = 215,$

$g_2^{(6)}(210) = F_2(150) + g_1(60) = 124 + 90 = 214,$

$g_2^{(7)}(210) = F_2(180) + g_1(30) = 128 + 75 = 203$ и

$g_2^{(8)}(210) = F_2(210) + g_1(0) = 133 + 0 = 133.$

4-й вариант имеет максимальное значение, следовательно $g_2(210) = 217$.

4. Заполнение шестого и восьмого столбцов.

Выполняется аналогично заполнению четвёртого столбца, при этом в каждой строке получается такое же количество вариантов, но исходные данные должны быть взяты соответственно:

– для шестого столбца – из пятого и четвёртого столбцов,
– для восьмого столбца – из седьмого и шестого столбцов.

3 этап. Полученное максимальное значение эффекта при финансировании всех четырёх мероприятий (281, последняя строка восьмого столбца) получено для варианта:

$g_4^{(4)}(210) = F_4(90) + g_3(120) = 66 + 215 = 281.$

Отсюда следует, что $x_4 = 90$.

Схема разложения функции g_4 на составляющие приведена на рисунке 1.1.

x	$g_1(x) = F_1(x)$	$F_2(x)$	g_2	$F_3(x)$	g_3	$F_4(x)$	$g_4 = F*$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
30	75	80	80	43	80	30	80
60	90	95	155	60	155	44	155
90	100	111	170	75	198	66	198
120	106	115	186	80	215	77	228
150	112	124	201	88	230	95	245
180	114	128	211	95	246	101	264
210	118	133	217	100	261	114	281

Рис. 1.1. Схема разложения функции g_4 в примере 1.4.

Далее значение функции для первых трёх мероприятий, равное 215, было получено для:

$g_3^{(3)}(120) = F_3(60) + g_2(60) = 60 + 155 = 215,$

следовательно $x_3 = 60$.

Схема разложения функции g_3 на составляющие приведена на рисунке 1.2.

x	$g_1(x)=F_1(x)$	$F_2(x)$	g_2	$F_3(x)$	g_3	$F_4(x)$	$g_4 = F^*$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
30	75	80	80	43	80	30	80
60	90	95	155	60	155	44	155
90	100	111	170	75	198	66	198
120	106	115	186	80	215	77	228
150	112	124	201	88	230	95	245
180	114	128	211	95	246	101	264
210	118	133	217	100	261	114	281

Рис. 1.2. Схема разложения функции g_3 в примере 1.4.

Значение функции для первых двух мероприятий, равное 155, было получено для:

$$g_2^{(2)}(60) = F_2(30) + g_1(30) = 80 + 75 = 155,$$

следовательно $x_2 = 30,\ x_1 = 30$.

Схема разложения функции g_2 на составляющие приведена на рисунке 1.3.

x	$g_1(x)=F_1(x)$	$F_2(x)$	g_2	$F_3(x)$	g_3	$F_4(x)$	$g_4 = F^*$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0
30	75	80	80	43	80	30	80
60	90	95	155	60	155	44	155
90	100	111	170	75	198	66	198
120	106	115	186	80	215	77	228
150	112	124	201	88	230	95	245
180	114	128	211	95	246	101	264
210	118	133	217	100	261	114	281

Рис. 1.3. Схема разложения функции g_2 в примере 1.4.

Ответ: $F^* = 281,\ \ x^* = (30,\ 30,\ 60,\ 90)$.

Анализ решения задачи.

Первое. Оценим эффективность реализации мероприятий. Эффективность всегда определяется как отношение результата (эффекта) к затратам на его достижение (объёму финансирования). В данной задаче это выражается формулой:

$$Eff = \frac{F^*}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (1.40)$$

Для примера 1.4 эффективность реализации мероприятий равна:

$$Eff = \frac{281}{210} = 1{,}34.$$

Второе. Сравним изменения эффекта, достигаемого пошаговым увеличением финансирования мероприятий. Введём обозначение: j – номер шага изменения объёма финансирования. Тогда прирост эффекта можно выразить как:

$$\delta F_j^* = F_j^* - F_{j-1}^*, \ \ j = \overline{1,k} \qquad (1.41)$$

где k – максимальный номер шага, при этом нулевой шаг соответствует отсутствию финансирования.

Для оценки динамики прироста введём показатель линейного предела эффекта при полном финансировании:

$$L_j = F_j^* \frac{C}{x_j}, \ \ j = \overline{1,k} \qquad (1.42)$$

где C – общий объём финансирования.

Линейный предела эффекта – это то его значение, которое было бы достигнуто при линейном характере прироста эффекта, что, конечно же, никогда не происходит (динамика прироста результата всегда отстаёт от динамики роста усилий для его достижения, что является одним из универсальных законов Вселенной).

Отношение эффекта к его линейному пределу – есть скорость прироста эффекта:

$$v_j = \frac{L_j}{L_1}, \ \ j = \overline{1,k} \qquad (1.43)$$

А величина, обратная скорости, – коэффициент затухания динамики прироста эффекта:

$$\eta_j = \frac{1}{v_j} = \frac{L_1}{L_j}, \ \ j = \overline{1,k} \qquad (1.44)$$

Результаты расчёта показателей (1.41)-(1.44) для примера 1.4 приведены в таблице 1.16.

Таблица 1.16

Показатели динамики прироста эффекта при увеличении финансирования мероприятий для примера 1.4

j	x_j	F_j^*	δF_j^*	L_j	v_j	η_j
1	30	80	80	560	1,00	1,00
2	60	155	75	543	0,97	1,03
3	90	198	43	462	0,83	1,21
4	120	228	30	399	0,71	1,40
5	150	245	17	343	0,61	1,63
6	180	264	19	308	0,55	1,82
7	210	281	17	281	0,50	1,99

Оценка и анализ показателей динамики прироста эффекта при увеличении финансирования мероприятий позволяет прогнозировать целесообразность дальнейшего увеличения объёма финансирования.

1.5. Практическое задание № 2

1. Решить задачу оптимального финансирования мероприятий по обеспечению ИБ. В таблице 1.17 по вариантам приведены исходные данные: количество мероприятий (n), общий объём финансирования (C) и величины эффекта от реализации каждого i-го мероприятия при объёме финансирования x_j (E_{ij}).

Примечание. Во всех вариантах разница между значениями объёмов финансирования мероприятий постоянна и равна:

$$x_j - x_{j-1} = \frac{C}{9} = \frac{x_9}{9}, \quad j = \overline{1,9}.$$

Эффект от нулевого финансирования равен нулю.

2. Рассчитать и проанализировать показатели динамики прироста эффекта при увеличении финансирования мероприятий:

– эффективность реализации мероприятий,

– прирост эффекта для всех значений объёма финансирования от минимального до полного,

– показатель линейного предела эффекта при полном финансировании,

– скорость прироста эффекта,

– коэффициент затухания динамики прироста эффекта.

3. Сделать выводы о целесообразности дальнейшего увеличения объёма финансирования мероприятий.

Таблица 1.17

Исходные данные для практического задания № 2

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
1	5	225	1	28	51	75	96	114	129	139	146	148
			2	32	56	83	110	127	142	153	162	164
			3	32	57	85	107	126	140	150	158	161
			4	31	55	84	105	121	134	143	152	153
			5	33	62	93	118	135	153	164	172	173
2	6	180	1	26	51	74	91	108	123	134	139	141
			2	24	45	63	84	98	113	121	127	129
			3	29	56	73	93	111	123	134	141	143
			4	21	43	63	83	100	113	120	124	126
			5	24	49	69	84	102	116	127	131	133
			6	26	52	76	93	108	123	134	139	140
3	5	270	1	39	73	106	130	155	171	182	188	191
			2	40	72	98	124	147	163	177	183	184
			3	34	62	98	128	148	169	184	194	196
			4	30	58	91	118	145	163	176	186	189
			5	30	67	93	120	145	163	180	187	190
4	6	225	1	28	61	85	109	126	139	151	159	162
			2	28	56	79	106	123	137	146	154	155
			3	35	64	89	115	134	151	162	167	170
			4	37	67	92	114	134	151	161	170	173
			5	30	64	88	110	128	144	157	162	164
			6	32	66	87	107	126	141	152	160	161

Продолжение таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
5	5	225	1	28	51	78	96	116	132	146	153	156
			2	28	56	83	110	133	151	160	169	172
			3	27	50	73	95	114	128	137	142	143
			4	33	64	93	115	136	154	163	172	173
			5	33	62	85	107	126	139	149	157	158
6	6	270	1	41	73	100	133	161	184	201	210	211
			2	36	76	111	141	165	183	199	206	207
			3	37	71	96	128	155	178	194	200	203
			4	40	68	96	124	145	161	172	178	179
			5	31	62	92	119	146	161	174	184	187
			6	44	79	104	126	149	172	189	195	196
7	5	135	1	15	31	47	59	69	78	86	91	92
			2	16	35	53	64	75	84	90	94	95
			3	16	33	47	61	73	84	91	94	95
			4	18	36	52	63	75	86	93	96	97
			5	21	39	57	71	82	91	99	103	104
8	6	270	1	45	82	113	138	159	174	189	195	197
			2	34	64	99	129	156	175	188	197	198
			3	43	74	109	137	160	175	191	200	201
			4	40	70	101	128	156	177	192	201	203
			5	40	81	112	144	164	183	195	205	206
			6	41	73	103	127	147	168	180	190	191
9	5	270	1	41	70	97	121	146	161	176	183	186
			2	34	74	108	133	160	176	189	196	198
			3	41	75	110	133	160	180	192	201	202
			4	43	76	113	136	162	179	191	199	200
			5	43	77	105	128	155	178	195	204	206
10	6	225	1	36	60	86	105	127	140	154	159	162
			2	32	61	83	105	122	141	150	159	160
			3	25	50	77	103	123	142	153	160	161
			4	25	48	73	97	116	133	143	150	152
			5	35	64	92	118	135	154	165	174	175
			6	30	58	83	106	125	141	155	164	167

Продолжение таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
11	5	180	1	23	45	63	84	100	110	118	123	124
			2	23	48	68	86	102	114	125	129	131
			3	30	54	72	88	105	119	127	134	136
			4	30	49	68	90	104	116	124	130	132
			5	23	46	64	86	104	114	124	129	130
12	6	225	1	35	59	87	112	132	146	158	166	168
			2	32	65	91	116	137	152	165	174	176
			3	29	56	78	100	118	132	144	153	154
			4	34	65	87	114	135	150	161	170	171
			5	32	60	88	112	131	148	157	166	167
			6	31	56	80	102	122	137	151	159	160
13	5	225	1	25	50	81	100	120	133	145	150	153
			2	26	58	81	107	123	140	149	155	158
			3	37	70	94	115	136	153	166	175	177
			4	35	60	82	108	126	142	155	164	165
			5	25	53	74	93	116	133	142	148	150
14	6	135	1	15	35	49	62	74	85	91	94	95
			2	16	36	54	68	79	87	94	98	99
			3	16	33	50	66	79	88	96	99	100
			4	22	42	57	73	83	93	101	106	107
			5	15	31	48	60	74	84	92	95	96
			6	18	32	49	62	74	85	92	96	97
15	5	225	1	37	61	88	112	131	150	159	167	168
			2	30	54	78	102	119	136	147	153	156
			3	31	63	84	103	121	140	153	158	160
			4	26	58	84	107	123	141	155	160	162
			5	25	58	84	107	124	140	151	160	161
16	6	270	1	30	63	98	121	147	166	179	185	186
			2	36	70	95	128	151	173	186	193	194
			3	41	81	108	139	163	180	194	202	204
			4	40	71	101	128	152	172	183	189	191
			5	42	82	111	135	163	184	196	203	204
			6	31	61	89	117	140	161	175	182	184

Продолжение таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
17	5	135	1	20	40	56	67	77	87	95	100	101
			2	19	33	49	65	79	88	95	98	99
			3	22	42	55	68	81	91	98	101	102
			4	17	32	49	62	74	85	92	95	96
			5	20	38	56	69	81	90	97	102	103
18	6	225	1	36	69	91	111	132	148	157	165	166
			2	34	66	94	120	141	156	167	172	175
			3	35	61	86	112	131	144	154	159	161
			4	35	66	91	118	140	156	165	173	175
			5	25	53	76	100	117	134	147	152	154
			6	33	64	87	110	126	140	150	157	159
19	5	270	1	31	67	101	129	152	174	185	194	197
			2	36	66	100	127	148	166	180	190	192
			3	44	79	116	148	176	197	210	218	220
			4	37	75	103	128	153	175	192	199	202
			5	42	71	106	135	161	176	191	201	202
20	6	180	1	25	46	63	82	99	113	121	127	128
			2	28	51	69	87	100	114	125	130	132
			3	27	51	69	90	104	117	124	129	131
			4	27	46	70	85	98	109	120	125	126
			5	26	47	67	85	100	113	121	125	126
			6	25	48	70	91	105	120	128	133	135
21	5	225	1	27	51	76	101	120	135	148	157	158
			2	32	66	88	111	130	147	156	164	167
			3	25	59	80	101	121	138	150	159	160
			4	31	59	80	106	124	139	152	160	162
			5	30	53	83	108	130	147	161	169	170
22	6	270	1	42	82	109	138	159	175	186	195	198
			2	32	65	100	132	151	166	180	188	189
			3	41	79	115	140	167	190	207	213	214
			4	32	61	94	122	142	158	169	175	176
			5	33	65	91	121	148	171	184	194	197
			6	37	70	102	127	149	165	178	187	190

Продолжение таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
23	5	135	1	18	33	47	58	68	77	83	87	88
			2	22	37	51	66	80	88	95	100	101
			3	16	36	54	68	79	90	96	101	102
			4	21	41	56	69	83	91	98	101	102
			5	15	30	43	54	67	75	83	86	87
24	6	225	1	36	69	96	118	138	152	163	168	170
			2	33	67	90	114	133	150	160	167	168
			3	35	64	87	108	129	142	152	158	159
			4	27	52	75	101	119	134	147	153	156
			5	26	53	76	99	118	135	149	156	157
			6	30	64	92	110	133	151	160	167	168
25	5	180	1	20	47	71	86	102	112	120	124	126
			2	29	55	79	97	114	129	136	140	141
			3	21	40	57	73	88	99	107	112	114
			4	29	50	73	92	105	117	126	130	131
			5	22	41	63	81	94	106	117	123	125
26	6	225	1	35	64	85	105	128	143	156	165	167
			2	33	62	85	112	128	141	155	161	163
			3	26	53	75	98	121	139	152	161	164
			4	30	54	81	104	120	138	150	156	157
			5	33	64	94	113	131	147	160	168	171
			6	34	62	93	117	136	154	167	174	176
27	5	225	1	27	57	85	112	128	142	153	162	165
			2	25	51	79	106	128	145	158	167	168
			3	36	67	88	112	132	151	164	170	171
			4	33	66	88	110	128	141	153	158	159
			5	33	66	88	110	127	146	156	161	162
28	6	270	1	31	68	99	128	151	171	183	192	193
			2	45	86	115	144	172	189	206	213	214
			3	42	76	109	138	160	177	192	201	203
			4	31	66	96	120	144	159	175	183	185
			5	45	74	100	122	149	164	177	183	185
			6	34	73	104	137	157	176	191	200	201

Продолжение таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
29	5	135	1	17	32	50	62	75	83	89	92	93
			2	16	32	45	60	74	85	93	96	97
			3	19	37	55	69	79	88	94	97	98
			4	15	35	51	66	77	87	95	98	99
			5	18	35	52	65	79	90	98	101	102
30	6	225	1	30	60	90	117	135	152	162	170	173
			2	27	53	84	103	122	139	148	155	158
			3	25	57	78	100	116	134	146	152	155
			4	27	55	77	100	122	141	155	162	165
			5	31	61	87	105	121	135	146	153	156
			6	37	71	93	115	132	149	163	171	172
31	5	135	1	20	40	55	71	81	89	97	100	101
			2	22	39	53	67	77	88	96	99	100
			3	18	34	49	62	76	87	93	98	99
			4	17	37	50	64	78	87	95	99	100
			5	22	38	53	68	78	87	95	99	100
32	6	180	1	20	44	67	85	98	110	117	121	123
			2	28	54	72	88	106	119	128	134	136
			3	23	44	64	80	94	105	114	118	119
			4	26	46	67	87	101	111	120	125	127
			5	21	45	66	87	102	114	122	126	128
			6	22	48	67	85	99	111	119	125	126
33	5	270	1	38	77	110	142	162	180	197	206	209
			2	30	64	96	124	150	165	178	188	189
			3	30	70	105	129	151	169	185	192	194
			4	37	77	108	136	157	177	191	198	201
			5	35	73	98	122	143	161	175	181	182
34	6	135	1	18	35	52	65	77	87	94	97	98
			2	16	32	48	64	77	86	93	97	98
			3	20	39	53	68	82	91	99	102	103
			4	21	38	56	72	83	91	98	102	103
			5	17	37	51	66	77	86	92	96	97
			6	16	35	50	65	79	87	95	98	99

Окончание таблицы 1.17

№ варианта	n	C	i	E_{i1}	E_{i2}	E_{i3}	E_{i4}	E_{i5}	E_{i6}	E_{i7}	E_{i8}	E_{i9}
35	5	225	1	30	54	81	104	121	137	149	155	157
			2	36	59	88	106	125	141	152	158	161
			3	31	55	80	99	116	133	142	147	150
			4	36	63	87	110	131	145	157	162	163
			5	33	61	84	111	133	149	160	165	166
36	6	135	1	16	34	51	67	77	87	95	100	101
			2	15	31	45	58	71	79	87	90	91
			3	21	40	58	69	82	91	99	103	104
			4	21	41	59	75	87	98	104	109	110
			5	22	38	52	64	76	85	92	97	98
			6	19	37	52	68	82	92	99	104	105
37	5	135	1	18	32	47	59	72	81	89	92	93
			2	20	40	56	72	83	91	97	102	103
			3	20	36	53	67	78	89	96	100	101
			4	19	34	52	68	79	88	96	100	101
			5	19	39	55	66	78	88	96	100	101
38	6	225	1	29	57	86	106	125	143	156	164	167
			2	26	50	72	93	110	126	136	142	144
			3	37	64	88	110	126	142	155	161	164
			4	33	63	91	114	131	144	155	162	164
			5	28	57	84	108	127	140	152	159	160
			6	30	56	77	99	121	139	152	161	164
39	5	135	1	17	35	51	66	77	88	95	98	99
			2	18	33	49	62	74	83	90	93	94
			3	17	33	50	61	75	85	91	96	97
			4	21	36	52	63	77	86	93	97	98
			5	20	34	51	66	77	86	94	97	98
40	6	225	1	25	52	82	101	121	135	144	150	153
			2	31	58	88	106	122	136	150	158	159
			3	26	59	81	105	123	141	154	160	163
			4	37	61	85	104	122	135	148	154	156
			5	25	48	79	98	114	133	146	152	154
			6	33	56	85	108	130	143	153	160	163

1.6. Задача о замене средств защиты информации

Постановка задачи.

СрЗИ в процессе эксплуатации теряют свои изначальные характеристики (эффективность защиты), т.к. физически и морально устаревают. При этом ещё и растут издержки на их ремонт и восстановление после инцидентов нарушения ИБ. В основном это относится к техническим СрЗИ (ТСЗИ). И на некотором этапе их эксплуатация становится более затратной, чем замена на новые [14].

Это ставит задачу определения оптимальной замены ТСЗИ в рассматриваемый временной промежуток (плановый период, который обычно составляет несколько лет – срок, на который рассчитана эксплуатация всей СЗИ в изначально спроектированном виде). ЦФ этой задачи определяет максимальный суммарный эффект от использования ТСЗИ за плановый период (ПП).

Математическая модель задачи.

Введём следующие обозначения:

n – число лет в рассматриваемом ПП.

$e(t)$ – положительный эффект от использования ТСЗИ за год при учёте его возраста t;

$z(t)$ – эксплуатационные затраты по средствам ЗИ возраста t за один год;

p – цена новых ТСЗИ, которыми можно заменить устаревшие;

$s(t)$ – остаточная стоимость ТСЗИ возраста t;

Аргументом в указанных функциях выступает возраст ТСЗИ, но можно отметить, что в связи с изменениями цен на различное оборудование можно ввести ещё и поправку на инфляцию.

Для дискретности решения задачи возраст ТСЗИ t будем отсчитывать с интервалом 1 год.

В начале каждого года (что соответствует одному этапу задачи динамического программирования) будем осуществлять выбор одного из двух возможных решений:

– *сохранение* – продолжить эксплуатацию имеющегося ТСЗИ в данном году,

– *замена* – приобрести новое ТСЗИ по цене p.

ЦФ $F \to \max$ определяет суммарный эффект за весь ПП. Критерий замены ТСЗИ будет следующим: если эффект при эксплуатации старого ТСЗИ меньше эффекта после его замены новым ТСЗИ с учётом всех издержек. Критерий замены фактически задаёт ограничения в данной задаче. При равенстве эффектов от эксплуатации старого ТСЗИ и от замены его новым отдадим предпочтение сохранению на текущий год старого ТСЗИ.

Схема решения.

Задачу решаем методом динамического программирования на основе принципа оптимальности Беллмана. В процессе «обратного хода» рассматриваем этапы от конца ПП к его началу.

Будем использовать следующий ряд функций, которые определяют максимальный эффект за последние i-лет ПП:

$g_i(t),\ \ i=\overline{1,n}$.

При этом, значение n-й функции задаёт ЦФ всей задачи:

$g_n(t_0)=\max F=F^*$, где t_0 – возраст ТСЗИ в начале ПП.

На первом шаге (i=1) рассматриваем только последний n-й год ПП. В начале n-го года ТСЗИ имеет возраст t-лет. Принятие решения состоит в выборе одно из двух действий:

1) *сохранение* ТСЗИ на текущий год, причём эффект за этот год составит $e(t)-z(t)$,

2) *замена* новым, продажа старого ТСЗИ, при этом эффект за этот год составит $s(t)-p+e(0)-z(0)$,

где $e(0)$ – эффект от применения нового ТСЗИ, которое будет в эксплуатации, соответственно, с возрастом, равным нулю.

$u(0)$ – расходы на его эксплуатацию.

Определяем выбор лучшего решения на основе критерия замены:

– если $s(t)-p+e(0)-z(0)\le e(t)-z(t)$, то *сохранить*,

– если $s(t)-p+e(0)-z(0)>e(t)-z(t)$, то *заменить*.

Функция выбора на первом шаге определяется максимумом эффекта:

$$g_1(t)=\max\begin{cases}e(t)-z(t) & \textit{сохранить}\\ s(t)-p+e(0)-z(0) & \textit{заменить}\end{cases} \qquad (1.45)$$

На втором шаге (i=2) включаем в рассмотрение (n–1)-й год. Вычислим значение эффект от использования ТСЗИ за последние два года $g_2(t)$. При этом возможны два варианта.

Первый вариант. Если в начале (n-1)-го года возраст ТСЗИ составляет t-лет и ТСЗИ было сохранено, то эффект от его применения к концу года будет равен $e(t)-z(t)$. Соответственно на начало n-го года средство уже будет иметь возраст (t+1)-лет, а следовательно, в последний год ПП оно даст эффект $g_1(t+1)$, а общий эффект за два последних года составит $e(t)-z(t)+g_1(t+1)$.

Второй вариант. Если в начале (n-1)-го года ТСЗИ было заменено, то эффект за последние два года составит с учётом продажи старого и покупки нового средства $s(t)-p+e(0)-z(0)+g_1(1)$.

Функция выбора для двух последних лет в общем виде равна:

$$g_2(t)=\max\begin{cases} e(t)-z(t)+g_1(t+1) & \textit{сохранить} \\ s(t)-p+e(0)-z(0)+g_1(1) & \textit{заменить} \end{cases} \quad (1.46)$$

Функция выбора для i-последних лет ПП:

$$g_i(t)=\max\begin{cases} e(t)-z(t)+g_{i\text{-}1}(t+1) & \textit{сохранить} \\ s(t)-p+e(0)-z(0)+g_{i\text{-}1}(1) & \textit{заменить} \end{cases} \quad (1.47)$$

На последнем шаге ($i=n$), включаем в рассмотрение весь ПП. $t=t_0$.

Далее следует «прямой ход».

Возраст ТСЗИ в начале ПП t_0 определён, как и продолжительность ПП. Найдём оптимальное значение ЦФ $F^*=g_n(t_0)$ и построим последовательность управлений, приводящих к получению такого значения, начиная с первого и до последнего года ПП.

Пример 1.5.

Условие задачи.

Пусть стоимость ТСЗИ p равна 17 условных единиц.

Плановый период n составляет 8 лет.

Возраст ТСЗИ в начале планового периода t_0 составляет 2 года.

Положительный эффект от использования ТСЗИ $e(t)$ за один год при учёте возраста t, остаточная стоимость ТСЗИ $s(t)$ и эксплуатационные затраты $z(t)$ заданы в таблице 1.18. Все показатели приведены в условных единицах.

Решение задачи.

Построим таблицу значений функций по формулам (1.45)-(1.47), в которую запишем для наглядности значения при сохранении и при замене ТСЗИ, а максимальное значение выделим полужирным шрифтом (при равных значениях будем выделять вариант с сохранением).

Таблица 1.18

Исходные данные для примера 1.5

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$e(t)$	52	51	50	49	47	45	43	40	37
$z(t)$	11	11	11	11	12	12	12	12	13
$s(t)$	15	13	11	10	9	9	9	9	8

Результаты построения «обратного хода» приведены в таблице 1.19.

Таблица 1.19

Построение функций в примере 1.5

	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
g_1	*сохр*	**41**	**40**	**39**	**38**	**35**	**33**	31	28	24
	замена	39	37	35	34	33	33	**33**	**33**	**33**
g_2	*сохр*	**81**	**79**	**77**	73	68	66	64	61	24
	замена	79	77	75	**74**	**73**	**73**	**73**	**73**	**73**
g_3	*сохр*	**120**	**117**	113	111	108	106	104	101	24
	замена	118	116	**114**	**113**	**112**	**112**	**112**	**112**	**112**
g_4	*сохр*	**158**	**154**	**152**	150	147	145	143	140	24
	замена	156	154	152	**151**	**150**	**150**	**150**	**150**	**150**
g_5	*сохр*	**195**	**192**	**190**	**188**	185	183	181	178	24
	замена	193	191	189	188	**187**	**187**	**187**	**187**	**187**
g_6	*сохр*	**233**	**230**	**227**	225	222	220	218	215	24
	замена	231	229	227	**226**	**225**	**225**	**225**	**225**	**225**
g_7	*сохр*	**271**	**267**	**265**	263	260	258	256	253	24
	замена	269	267	265	**264**	**263**	**263**	**263**	**263**	**263**
g_8	*сохр*	**308**	**305**	**303**	**301**	298	296	294	291	24
	замена	306	304	302	301	**300**	**300**	**300**	**300**	**300**

Выполним «прямой ход» по таблице 1.19.

Возраст ТСЗИ в начале планового периода составляет 2 года. Значение функции в первый год планового периода $g_8(2) = 303$ максимально для варианта *сохранение,* следовательно на второй год возраст ТСЗИ станет равен 3 годам.

Значение функции во второй год планового периода $g_7(3) = 264$ максимально для варианта *замена*, следовательно во второй год средство будет заменено новым, возраст которого в начале третьего года станет равен 1 году.

Значение функции в третий год планового периода $g_6(1) = 230$ максимально для варианта *сохранение*, следовательно на четвёртый год возраст ТСЗИ станет равен 2 годам.

Значение функции в четвёртый год планового периода $g_5(2) = 190$ максимально для варианта *сохранение*, следовательно на пятый год возраст ТСЗИ станет равен 3 годам.

Значение функции в пятый год планового периода $g_4(3) = 151$ максимально для варианта *замена*, следовательно в пятый год средство будет заменено новым, возраст которого в начале шестого года станет равен 1 году.

Значение функции в шестой год планового периода $g_3(1) = 117$ максимально для варианта *сохранение*, следовательно на седьмой год возраст ТСЗИ станет равен 2 годам.

Значение функции в седьмой год планового периода $g_2(2) = 77$ максимально для варианта *сохранение*, следовательно на восьмой год возраст ТСЗИ станет равен 3 годам.

Значение функции в восьмой год планового периода $g_1(3) = 38$ максимально для варианта *сохранение*. Конец планового периода.

Схема продвижения по функциям от g_8 до g_1 показана на рисунке 1.4.

Последовательность управляющих решений по годам планового периода представлена в таблице 1.20.

Таблица 1.20

Последовательность управляющих решений в примере 1.5.

год	1	2	3	4	5	6	7	8
решение	сохр	замена	сохр	сохр	замена	сохр	сохр	сохр

	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
g_1	*сохр*	**41**	**40**	**39**	**38**	**35**	**33**	31	28	24
	замена	39	37	35	34	33	33	**33**	**33**	**33**
g_2	*сохр*	**81**	**79**	**77**	73	68	66	64	61	24
	замена	79	77	75	**74**	**73**	**73**	**73**	**73**	**73**
g_3	*сохр*	**120**	**117**	113	111	108	106	104	101	24
	замена	118	116	**114**	**113**	**112**	**112**	**112**	**112**	**112**
g_4	*сохр*	**158**	**154**	**152**	150	147	145	143	140	24
	замена	156	154	152	**151**	**150**	**150**	**150**	**150**	**150**
g_5	*сохр*	**195**	**192**	**190**	**188**	185	183	181	178	24
	замена	193	191	189	188	**187**	**187**	**187**	**187**	**187**
g_6	*сохр*	**233**	**230**	**227**	225	222	220	218	215	24
	замена	231	229	227	**226**	**225**	**225**	**225**	**225**	**225**
g_7	*сохр*	**271**	**267**	**265**	263	260	258	256	253	24
	замена	269	267	265	**264**	**263**	**263**	**263**	**263**	**263**
g_8	*сохр*	**308**	**305**	**303**	**301**	298	296	294	291	24
	замена	306	304	302	301	**300**	**300**	**300**	**300**	**300**

Рис. 1.4. Схема продвижения по функциям в примере 1.5.

Последовательность является ответом в задаче. Максимальное значение ЦФ равно 303 условных единицы.

Анализ решения задачи.

Оценим общий среднегодовой эффект от использования ТСЗИ по формуле:

$$\overline{E} = \frac{F^*}{n} \tag{1.48}$$

В примере 1.5 получим $\overline{E} = \dfrac{303}{8} \approx 38$ условных единиц.

Для оценки эффективности применения ТСЗИ в течение всего планового периода необходимо учесть также стоимость исходного ТСЗИ p_0, стоимость приобретённых новых ТСЗИ во все годы планового периода, когда были произведены замены за вычетом остаточной стоимости ТСЗИ и издержки на эксплуатацию по всем годам с учётом возраста ТСЗИ в каждый год планового периода. Эффективность будет равна:

$$Eff = \frac{F^*}{p_0 + \sum_k p_k + \sum_m z(t_m) - \sum_k s(t_k)} \tag{1.49}$$

где $\sum_k p_k$ – сумма затрат на приобретение нового ТСЗИ по всем k-годам замены,

$\sum_m z(t_m)$ – сумма затрат на обслуживание ТСЗИ по всем m-годам планового периода с учётом возраста ТСЗИ в каждый год обслуживания,

$\sum_k s(t_k)$ – сумма возвращённой остаточной стоимости проданных (заменённых) ТСЗИ.

Положим, что стоимость исходного ТСЗИ p_0 равна 17 условных единиц.

В примере 1.5 замены были произведены во второй и пятый года планового периода. Стоимость приобретённых новых ТСЗИ в оба года равна 17 условных единиц: $\sum_k p_k = 17 + 17 = 34$.

С учётом замен и возраста используемого ТСЗИ по данным таблицы 1.18 можно построить таблицу затрат на обслуживание 1.21.

Таблица 1.21

Таблица затрат на обслуживание ТСЗИ для примера 1.5

год	1	2	3	4	5	6	7	8
возраст, t	2	0	1	2	0	1	2	3
$z(t)$	11	11	11	11	11	11	11	11

Общая сумма затрат на обслуживание равна $\sum_m z(t_m) = 88$.

Возвращённая остаточная стоимости проданных (заменённых) ТСЗИ во второй и пятый года замены при возрасте ТСЗИ в эти годы была равна 10 условным единицам: $\sum_k s(t_k) = 10 + 10 = 20$.

Тогда эффективность применения ТСЗИ в течение всего планового периода в примере 1.5 будет равна:

$$Eff = \frac{303}{17 + 34 + 88 - 20} = \frac{303}{119} \approx 2{,}55.$$

1.7. Практическое задание № 3

1. Решить задачу о замене средства защиты информации. В таблице 1.22 по вариантам приведены исходные данные: цена нового ТСЗИ, которым можно заменить устаревшее p, положительный эффект от использования ТСЗИ за год $e(t)$, остаточная стоимость ТСЗИ $s(t)$ и эксплуатационные затраты $z(t)$.

Примечание. Во всех вариантах продолжительность планового периода n составляет 8 лет.

2. Рассчитать и проанализировать показатели эффективности функционирования ТСЗИ:

– среднегодовой эффект от использования ТСЗИ,

– эффективность применения ТСЗИ в течение всего планового периода.

3. Сделать выводы.

Таблица 1.22

Исходные данные для практического задания № 2

№ варианта	p	t_0		t								
				0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	15	2	$e(t)$	40,0	38,9	38,0	37,0	35,6	35,0	34,4	32,8	31,2
			$s(t)$	8,0	8,2	8,4	8,8	9,1	9,3	9,5	9,9	10,2
			$z(t)$	9,6	8,1	6,9	5,8	4,9	4,1	3,4	2,9	2,4
2	15	1	$e(t)$	35,0	33,6	33,0	31,9	31,1	29,8	29,2	28,7	27,3
			$s(t)$	7,0	7,2	7,4	7,7	7,9	8,1	8,4	8,6	8,9
			$z(t)$	8,4	7,0	5,9	4,9	4,2	3,6	3,0	2,5	2,1
3	16	2	$e(t)$	38,0	37,5	35,9	34,7	33,6	32,6	31,1	29,7	28,6
			$s(t)$	7,6	7,8	8,1	8,4	8,6	8,8	9,2	9,5	9,8
			$z(t)$	9,1	7,6	6,5	5,4	4,6	3,9	3,3	2,8	2,4
4	16	1	$e(t)$	39,0	37,4	35,8	35,3	33,6	32,6	32,0	31,5	30,0
			$s(t)$	7,8	8,0	8,3	8,5	8,7	9,0	9,3	9,5	9,9
			$z(t)$	9,4	8,0	6,7	5,6	4,7	3,9	3,3	2,8	2,4

Продолжение таблицы 1.22

№ варианта	p	t_0		t								
				0	1	2	3	4	5	6	7	8
5	17	1	$e(t)$	37,0	35,4	33,8	32,6	31,2	30,8	30,4	29,9	29,3
			$s(t)$	7,4	7,7	8,0	8,3	8,6	8,8	9,0	9,2	9,5
			$z(t)$	8,9	7,6	6,3	5,3	4,4	3,7	3,1	2,6	2,2
6	17	2	$e(t)$	40,0	38,2	37,5	36,2	35,0	34,4	33,7	32,3	31,6
			$s(t)$	8,0	8,3	8,5	8,8	9,2	9,4	9,7	10,1	10,3
			$z(t)$	9,6	8,1	6,7	5,6	4,8	4,0	3,4	2,9	2,4
7	18	3	$e(t)$	38,0	37,5	37,0	36,2	35,5	34,5	34,1	33,5	32,0
			$s(t)$	7,6	7,8	8,1	8,4	8,6	9,0	9,4	9,6	9,8
			$z(t)$	9,1	7,8	6,5	5,5	4,7	3,9	3,3	2,8	2,4
8	18	1	$e(t)$	42,0	41,0	40,2	38,9	38,2	37,4	36,4	35,3	33,8
			$s(t)$	8,4	8,6	8,8	9,2	9,4	9,8	10,1	10,4	10,8
			$z(t)$	10,1	8,6	7,2	6,1	5,1	4,3	3,6	3,0	2,5
9	19	2	$e(t)$	40,0	38,8	38,0	37,3	36,2	35,1	34,0	33,1	31,9
			$s(t)$	8,0	8,2	8,5	8,9	9,2	9,5	9,7	10,1	10,4
			$z(t)$	9,6	8,1	6,8	5,7	4,8	4,1	3,5	3,0	2,5
10	19	1	$e(t)$	41,0	39,0	37,8	36,6	35,0	33,9	32,9	31,6	30,2
			$s(t)$	8,2	8,4	8,6	9,0	9,3	9,6	9,9	10,2	10,6
			$z(t)$	9,8	8,3	7,1	6,0	5,1	4,3	3,6	3,0	2,5
11	20	2	$e(t)$	41,0	40,5	38,9	37,1	36,0	34,7	33,0	31,5	30,8
			$s(t)$	8,2	8,4	8,8	9,0	9,3	9,7	10,0	10,2	10,6
			$z(t)$	9,8	8,1	6,8	5,7	4,8	4,0	3,4	2,9	2,4
12	20	1	$e(t)$	44,0	42,2	40,9	40,4	38,5	37,0	36,4	35,5	34,6
			$s(t)$	8,8	9,0	9,3	9,6	9,8	10,0	10,3	10,5	10,7
			$z(t)$	10,6	8,8	7,3	6,2	5,3	4,5	3,8	3,2	2,7
13	21	1	$e(t)$	46,0	44,2	43,4	42,5	41,8	40,5	38,6	36,8	36,2
			$s(t)$	9,2	9,5	9,9	10,3	10,6	10,8	11,3	11,6	11,8
			$z(t)$	11,0	9,1	7,6	6,5	5,4	4,5	3,8	3,2	2,7
14	21	2	$e(t)$	47,0	44,7	43,6	43,0	41,5	40,8	39,2	38,6	36,8
			$s(t)$	9,4	9,7	9,9	10,3	10,7	11,2	11,5	11,9	12,1
			$z(t)$	11,3	9,4	7,8	6,6	5,6	4,8	4,1	3,5	3,0

Продолжение таблицы 1.22

№ варианта	p	t_0		t								
				0	1	2	3	4	5	6	7	8
15	22	1	$e(t)$	48,0	45,9	43,9	43,4	42,7	40,8	39,3	38,1	37,3
			$s(t)$	9,6	9,9	10,2	10,5	10,7	11,2	11,5	12,0	12,4
			$z(t)$	11,5	9,7	8,2	7,0	5,9	5,0	4,2	3,6	3,0
16	22	2	$e(t)$	51,0	48,9	48,3	47,2	44,9	44,1	43,0	41,2	39,6
			$s(t)$	10,2	10,6	11,0	11,5	12,0	12,5	12,9	13,5	14,0
			$z(t)$	12,2	10,3	8,8	7,4	6,3	5,4	4,5	3,8	3,2
17	23	2	$e(t)$	50,0	48,4	46,7	45,5	44,2	43,1	41,4	39,7	38,7
			$s(t)$	10,0	10,3	10,6	10,9	11,3	11,7	12,1	12,4	12,8
			$z(t)$	12,0	10,2	8,7	7,4	6,3	5,3	4,4	3,7	3,1
18	23	1	$e(t)$	55,0	53,9	51,9	51,2	49,5	48,2	47,0	45,9	44,0
			$s(t)$	11,0	11,4	11,9	12,4	12,8	13,1	13,5	14,0	14,5
			$z(t)$	13,2	11,3	9,7	8,3	7,1	5,9	4,9	4,2	3,5
19	24	3	$e(t)$	52,0	51,3	50,6	49,7	47,3	45,5	44,5	42,9	41,6
			$s(t)$	10,4	10,8	11,0	11,2	11,7	12,0	12,4	12,9	13,5
			$z(t)$	12,5	10,5	8,9	7,4	6,3	5,2	4,4	3,7	3,1
20	24	2	$e(t)$	56,0	54,5	53,1	51,9	50,7	49,6	48,9	47,6	46,2
			$s(t)$	11,2	11,5	11,8	12,0	12,3	12,7	13,0	13,6	14,0
			$z(t)$	13,4	11,5	9,5	8,0	6,7	5,6	4,7	4,0	3,4
21	25	1	$e(t)$	59,0	57,1	56,2	54,5	53,9	51,9	50,9	49,4	47,7
			$s(t)$	11,8	12,1	12,6	13,2	13,5	13,9	14,3	14,9	15,4
			$z(t)$	14,2	12,1	10,2	8,6	7,1	6,0	5,0	4,2	3,5
22	25	2	$e(t)$	60,0	57,8	56,6	54,6	53,0	50,9	48,8	47,2	45,2
			$s(t)$	12,0	12,5	13,0	13,5	14,1	14,4	14,9	15,3	16,0
			$z(t)$	14,4	12,1	10,1	8,6	7,3	6,2	5,3	4,4	3,7
23	26	2	$e(t)$	48,0	47,3	45,0	43,3	41,4	39,7	38,9	38,1	37,5
			$s(t)$	9,6	9,8	10,0	10,2	10,5	10,7	10,9	11,4	11,9
			$z(t)$	11,5	9,8	8,3	7,1	5,9	4,9	4,2	3,5	2,9
24	26	4	$e(t)$	44,0	43,2	41,7	40,7	39,5	38,0	37,3	35,7	34,6
			$s(t)$	8,8	9,0	9,2	9,5	9,9	10,1	10,3	10,7	11,0
			$z(t)$	10,6	8,8	7,3	6,2	5,2	4,4	3,7	3,1	2,6

Продолжение таблицы 1.22

№ варианта	p	t_0		t								
				0	1	2	3	4	5	6	7	8
25	27	4	$e(t)$	40,0	38,6	38,0	36,7	36,1	34,6	33,7	32,8	32,3
			$s(t)$	8,0	8,2	8,5	8,9	9,1	9,4	9,6	9,8	10,0
			$z(t)$	9,6	8,0	6,8	5,8	4,9	4,2	3,6	3,0	2,5
26	27	2	$e(t)$	41,0	39,4	38,6	36,8	35,0	34,4	33,5	32,9	32,2
			$s(t)$	8,2	8,4	8,8	9,1	9,3	9,6	9,9	10,1	10,4
			$z(t)$	9,8	8,3	7,0	5,8	4,8	4,0	3,4	2,9	2,4
27	28	3	$e(t)$	41,0	39,2	38,1	36,6	35,6	34,6	33,5	33,1	31,9
			$s(t)$	8,2	8,4	8,6	9,0	9,4	9,7	10,1	10,3	10,6
			$z(t)$	9,8	8,3	6,9	5,8	4,9	4,1	3,5	3,0	2,5
28	28	4	$e(t)$	40,0	38,7	36,8	35,7	34,9	33,4	32,1	31,6	31,1
			$s(t)$	8,0	8,2	8,5	8,7	9,0	9,3	9,7	10,1	10,5
			$z(t)$	9,6	8,1	6,7	5,7	4,8	4,1	3,4	2,9	2,4
29	29	3	$e(t)$	42,0	40,7	39,2	38,6	38,0	36,6	35,6	34,3	33,8
			$s(t)$	8,4	8,8	9,2	9,4	9,6	9,9	10,3	10,7	11,2
			$z(t)$	10,1	8,4	7,1	6,0	5,0	4,2	3,5	3,0	2,5
30	29	2	$e(t)$	43,0	41,4	40,6	39,6	38,4	37,4	35,9	34,3	33,3
			$s(t)$	8,6	8,8	9,0	9,4	9,6	10,0	10,2	10,5	10,8
			$z(t)$	10,3	8,7	7,4	6,2	5,3	4,4	3,7	3,1	2,6
31	30	2	$e(t)$	50,0	48,9	46,7	45,2	44,5	43,5	42,0	41,3	39,3
			$s(t)$	10,0	10,2	10,5	10,8	11,0	11,4	11,8	12,3	12,6
			$z(t)$	12,0	10,1	8,5	7,1	6,0	5,1	4,3	3,6	3,0
32	30	3	$e(t)$	51,0	49,0	47,3	45,6	45,1	44,5	43,2	42,6	41,8
			$s(t)$	10,2	10,4	10,8	11,3	11,7	12,0	12,4	12,9	13,4
			$z(t)$	12,2	10,4	8,8	7,3	6,2	5,3	4,5	3,8	3,2
33	31	3	$e(t)$	52,0	50,9	49,4	47,5	46,4	45,6	43,4	42,7	41,8
			$s(t)$	10,4	10,7	11,0	11,2	11,6	12,0	12,3	12,6	12,9
			$z(t)$	12,5	10,4	8,8	7,3	6,1	5,1	4,3	3,6	3,0
34	31	2	$e(t)$	53,0	51,1	49,3	48,2	46,8	45,5	43,5	41,9	41,0
			$s(t)$	10,6	11,1	11,4	11,7	12,2	12,7	13,1	13,7	14,3
			$z(t)$	12,7	10,7	8,9	7,5	6,4	5,4	4,5	3,8	3,2

Окончание таблицы 1.22

№ варианта	p	t_0		t								
				0	1	2	3	4	5	6	7	8
35	32	2	$e(t)$	55,0	53,1	51,4	50,2	49,4	48,5	46,3	45,4	44,9
			$s(t)$	11,0	11,5	11,7	12,1	12,5	13,0	13,3	13,9	14,2
			$z(t)$	13,2	11,3	9,5	8,1	6,8	5,8	4,9	4,1	3,4
36	32	1	$e(t)$	54,0	51,8	49,7	48,6	47,5	46,9	45,7	44,1	43,6
			$s(t)$	10,8	11,1	11,5	11,9	12,4	12,9	13,4	13,7	14,2
			$z(t)$	13,0	10,8	9,0	7,7	6,4	5,4	4,6	3,8	3,2
37	33	3	$e(t)$	50,0	48,6	47,8	46,5	45,2	43,9	42,8	42,0	40,3
			$s(t)$	10,0	10,3	10,6	10,8	11,0	11,3	11,7	12,0	12,5
			$z(t)$	12,0	10,0	8,4	7,0	5,9	5,0	4,2	3,5	2,9
38	33	1	$e(t)$	49,0	48,2	46,2	45,2	43,1	41,3	39,3	38,2	37,5
			$s(t)$	9,8	10,2	10,6	11,0	11,3	11,6	12,1	12,5	13,0
			$z(t)$	11,8	10,1	8,5	7,3	6,2	5,3	4,4	3,7	3,1
39	34	1	$e(t)$	58,0	55,2	52,6	50,5	49,9	48,0	47,0	45,7	43,6
			$s(t)$	11,6	12,0	12,4	12,8	13,1	13,4	13,9	14,3	14,8
			$z(t)$	13,9	11,9	10,2	8,6	7,2	6,1	5,1	4,3	3,6
40	34	1	$e(t)$	57,0	55,8	53,6	51,6	49,3	47,8	47,2	46,1	44,5
			$s(t)$	11,4	11,6	11,9	12,4	12,7	13,3	13,7	14,0	14,4
			$z(t)$	13,7	11,7	10,0	8,5	7,1	5,9	4,9	4,2	3,5

Глава 2. ЗАДАЧИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

2.1. Общая постановка задачи многокритериального управления

Ранее были рассмотрены задачи, в которых сформулирована единственная цель (критерий) и тем самым задана единственная ЦФ. Расширим постановку задач тем, что качество управления объектом будем определять по нескольким критериям [18]. Тогда выбор наилучшего решения становится нетривиальной задачей, появляется новый вопрос: что является оптимальным решением при наличии нескольких целей?

Если критериев много и они, как правило, «конфликтующие», то объективно и однозначно неизвестно, какое решение будет лучшим. Поэтому нужно искать компромиссное решение, учитывающее значимость [13] каждой ЦФ в общей задаче управления ИБ.

Количество критериев в задаче многокритериального управления (ЗМУ) $k \geq 2$.

Критерии $f_i(X)$, $i = \overline{1,k}$ образуют комплексный (векторный) критерий $F(X) = (f_1(X), f_1(X), ..., f_k(X))$.

Пусть D – ОДР и некоторое решение является допустимым, т.е. $X_1 \in D$, тогда

$f_1(X_1)$ – *локальная оценка решения* X_1 по 1-му критерию F_1;

$f_2(X_1)$ – *локальная оценка решения* X_1 по 2-му критерию F_2;

…

$f_k(X_1)$ – *локальная оценка решения* X_1 по k-му критерию F_k;

$F(X_1) = (f_1(X_1), f_1(X_1), ..., f_k(X_1))$ – векторная ЦФ для решения X_1.

Решение задачи многокритериального управления (ЗМУ) можно представить геометрически. В задаче будет использовано n-мерное пространство E^n управляемых параметров и k-мерное пространство E^k ЦФ. Каждой точке пространства E^n и E^k соответствуют векторы X (значения управляемых параметров) и Y (значения ЦФ).

Следовательно, области допустимых управляющих воздействий D можно поставить в соответствие некоторое множество оценок Y_D, называемое *критериальным пространством*. Это множество оценок $Y_D = F(D)$ является прообразом ОДР.

Математическая формулировка ЗМУ для случая максимизации вектора ЦФ имеет вид:

$$\begin{cases} F(X) \underset{X \in D}{\to} \max \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \forall i = \overline{1,\text{m}}, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in X, \quad \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.1}$$

$F(X) \underset{X \in D}{\to} \max$ – краткая форма записи множества ЦФ $f_i(X) \underset{X \in D}{\to} \max, \quad i = \overline{1,k}$.

ЗМУ для минимизации вектора ЦФ:

$$\begin{cases} F(X) \underset{X \in D}{\to} \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad \forall i = \overline{1,\text{m}}, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in X, \quad \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.2}$$

$F(X) \underset{X \in D}{\to} \min$ – краткая форма записи множества ЦФ $f_i(X) \underset{X \in D}{\to} \min, \quad i = \overline{1,k}$.

Также можно отметить, что в большинстве задач одни критерии требуют максимизации, а другие – минимизации. Но при этом для любой ЦФ всегда можно осуществить переход от максимизации к минимизации и наоборот сменой знака перед частным критерием, т.е. привести задачу к форме (2.1) или (2.2).

Основной вопрос ЗМУ состоит в том, существует ли решение, которое даёт экстремумы всех ЦФ и удовлетворяет всем ограничениям? Как правило, нет [18]. Решение, приводящее к экстремуму один из показателей, может не обращать ни в минимум, ни в максимум другие показатели.

Пример 2.1.

Пусть в ОДР $D=\{-2\le x_1\le 2;\ -2\le x_2\le 2\}$ заданы два критерия $f_1(x_1,x_2)=3x_1^2+x_2^2$ и $f_2(x_1,x_2)=5|x_1|+6|x_2|$, которые нужно минимизировать. Решая по отдельности ЗНЛП для $f_1(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in D$ и $f_2(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in D$, получим одинаковое решение для обеих задач: $f_1^*=f_1(0,0)$ и $F_2^*=F_2(0,0)$.

Пример 2.2.

Пусть теперь в той же ОДР $D=\{-2\le x_1\le 2;\ -2\le x_2\le 2\}$ заданы два критерия $f_1(x_1,x_2)=3x_1^2+x_2^2$ и $f_2(x_1,x_2)=(x_1+2)^2+(x_2-1)^2$, которые также нужно минимизировать. Решая по отдельности ЗНЛП для $f_1(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in D$ и $f_2(x_1,x_2)$, $x_1,x_2\in D$, получим разные решения для обеих задач: $f_1^*=f_1(0,0)$ и $f_2^*=f_2(-2,1)$. При этом в точке (-2, 1) первый критерий не принимает ни минимальное, ни максимальное значение, равно как и второй – в точке (0, 0).

Случай, когда на множестве *D* будет найдено единственное решение ЗМУ, для которого все *k*-критериев принимают наилучшие значения, имеет место только в задачах с зависимыми критериями, которые очень редки. В большинстве же задач возникает вопрос, как осуществлять выбор, когда критерии *противоречивы*. Противоречивость критериев означает, что в некотором подмножестве ОДР уменьшение одного критерия ведёт к увеличению других (и наоборот), но существует подмножество (или подмножества) ОДР, где динамика изменений ЦФ одинакова и можно найти общее оптимальное решение.

Главная особенность ЗМУ заключается в том, что некоторые частные критерии не только противоречивы, но и *конфликтны,* т.е. улучшение одного приводит к ухудшению другого (других) критериев во всей ОДР (или, по крайней мере, в той её части, которая содержит практически реализуемые решения), а наилучшее решение для одного из критериев является наихудшим для другого.

Пример 2.3. Продемонстрируем отличие противоречивых критериев от конфликтных на примере рисунка 2.1.

Пусть все три ЦФ требуют максимизации. Максимум функций f_1 и f_2 существует в точке *b*, однако она же определяет минимум третьей функции f_3, что не соответствует условию задачи, т.к. максимум этой функции существует в точке a.

Функции f_1 и f_2 являются противоречивыми (можно выделить ряд областей между точками a и b, где их динамика изменения совпадает, а также динамика полностью совпадает на последнем участке (в направлении точки b). И точка b является их общим оптимальным решением. Хотя если мы будем сдвигать границу ОДР от точки b влево, то очень скоро столкнёмся с ситуацией, когда эти функции не будут иметь общего оптимального решения.

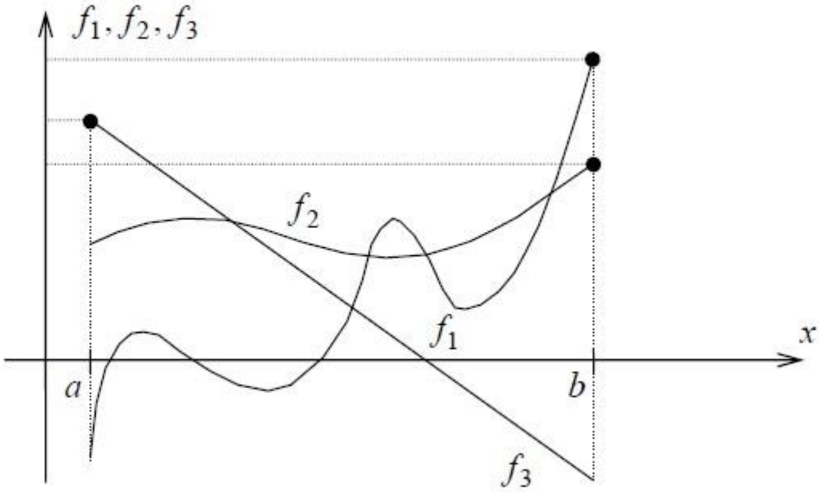

Рисунок 2.1. Пример противоречивости критериев

Функции f_1 и f_3, а также f_2 и f_3 являются конфликтными, т.к. невозможно выделить такое подмножество в ОДР, где мы найдём общее решение для этих пар функций.

Пример 2.4.

Рассмотрим задачу проектирования СЗИ. Её оптимальность определяется следующими частными критериями:

– количество видов угроз, от которых обеспечена защита (f_1),
– интенсивность отражения угроз (f_2),
– время реакции на действия нарушителей ИБ (f_3),
– степень замедления основных производственных процессов (f_4),
– стоимость разработки (f_5),
– время интеграции в производственные процессы (f_6),
– стоимость эксплуатации (обслуживания) (f_7).

Задача векторной оптимизации для данного примера примет следующий вид:

$$f_1(X) \underset{X \in D}{\to} \max, \quad f_2(X) \underset{X \in D}{\to} \max, \quad f_3(X) \underset{X \in D}{\to} \max,$$

$$f_4(X) \underset{X \in D}{\to} \min, \quad f_5(X) \underset{X \in D}{\to} \min, \quad f_6(X) \underset{X \in D}{\to} \min, \quad f_7(X) \underset{X \in D}{\to} \min.$$

где D – область работоспособности.

В примере 2.4 конфликтными являются те критерии, для которых на рисунке 2.2 показаны связи.

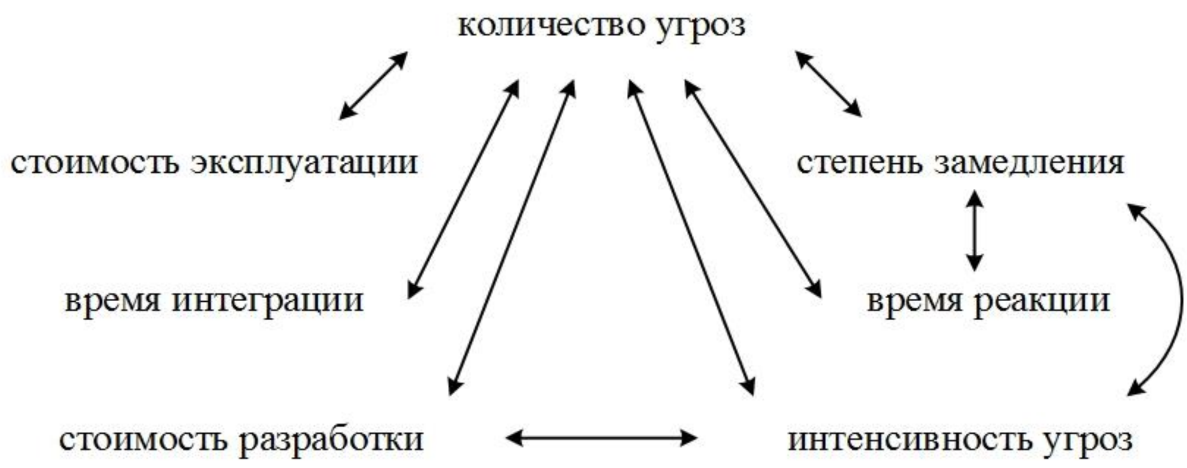

Рисунок 2.2. Конфликтность критериев в примере 2.4

При разработке методов решения многокритериальных задач приходится решать ряд специфических проблем. Рассмотрим их подробнее [18].

Проблемы оптимальности в ЗМУ

Неоднозначность выбора решений. В отличие от однокритериальных задач, в ЗМУ проявляется *эффект несравнимости* альтернатив, что не позволяет однозначно выбрать какую-либо из них.

Любая пара решений X_1 и X_2 однокритериальной задачи порождает два значения ЦФ $F(X_1)$ и $F(X_2)$, которые находятся в одном из трёх возможных отношений: $F(X_1) < F(X_2)$, $F(X_1) > F(X_2)$ либо $F(X_1) = F(X_2)$. Для случая минимизации ЦФ первый случай однозначно выбирает решение X_1, второй – решение X_2, а третий – любое из них. Для максимизации тоже всё однозначно: соответственно X_2, X_1 или любое.

В ЗМУ превосходство одного решения над другим по одной ЦФ не означает, а как правило, наоборот, не позволяет получить превосходство по другим ЦФ.

Пример 2.4.

Пусть заданы два критерия f_1 и f_2, требующие максимизации, а ОДР D включает в себя четыре возможных решения: X_1, X_2, X_3, X_4. Пусть получены следующие векторные оценки решений:

$$F(X_1)=(3,2),\ F(X_2)=(3,6),\ F(X_3)=(5,3),\ F(X_4)=(4,2).$$

Решение X_2 предпочтительнее решения X_1 (по второму критерию). Решение X_4 предпочтительнее решения X_1 (по первому критерию). Решение X_3 предпочтительнее решения X_1 (по обоим критериям). Решение X_3 предпочтительнее решения X_4 (также по обоим критериям). Вместе с тем, решения X_2 и X_3, а также X_2 и X_4 несравнимы между собой, т.к. в каждой паре один критерий указывает на одно лучшее решение, а другой – на другое.

Анализ позволяет выявить и отбросить единственное недоминирующее решение, которое хуже всех остальных. Это X_1. Но из оставшихся трёх невозможно выбрать однозначно доминирующее (лучшее) решение. Это происходит из-за несравнимости пары X_2 и X_3.

Несравнимость решений является другой формой неопределённости, которая, в отличие от неопределённости, вызванной воздействием среды, связана со стремлением лица, принимающего решение, достичь противоречивых целей и может быть названа *ценностной неопределённостью*. Выбор между несравнимыми решениями является сложной концептуальной проблемой и составляет основное содержание многокритериальной оптимизации [18].

Масштабные расхождения критериев. В большинстве ЗМУ разные критерии имеют разный же физический смысл, разные единицы измерения и разные масштабы единиц измерения. Следовательно превосходство на n-единиц по разным критериям описывает разную степень отличия решений по ним. Например, количество выявляемых типов угроз одной СЗИ большее, чем другой на 5 штук, а её стоимость выше другой на 5 тысяч рублей – это совершенно разные описания, хотя и выраженные одним и тем же числом.

Операция приведения масштабов локальных критериев к единому, обычно безразмерному масштабу, носит название *нормализации критериев*.

Приведение к одному масштабу (нормализации частных критериев) порождает новое свойство векторного критерия: любая перестановка частных критериев не меняет векторную оценку. Это позволяет построить итерационные математические алгоритмы сужения исходной ОДР до единственного решения. Нормализацию частных критериев используют, например, при построении аддитивного критерия оптимальности [18].

Неоднозначность выбора принципа оптимальности. Данная неоднозначность возникает при выборе решения из несравнимой пары. Это является основной проблемой ЗМУ. Формально описать выбор принципа оптимальности для любой ЗМУ невозможно в силу следующего:

– ОУ по своей природе, назначению, и прочим характеристикам чрезвычайно разнообразны; установить общие подходы к выбору принципа оптимальности для любого класса ЗМУ невозможно.

– Участники процессов принятия решений имеют разные и зачастую противоположные цели (как противоположны цели защиты информации и цели злоумышленников).

– Оптимальное решение задачи зависит не только от её цели и характера, но и объективности выбора критериев (ЦФ в задаче). Выбор любого принципа оптимальности из множества возможных приводит к проблеме получения существенно разных результатов (по разным принципам могут быть выбраны не только разные решения, но и разные классы решений).

– Сложность выбора решения зачастую определяется самой постановкой задачи, если она требует достижение несовместимых результатов. Например, получение максимального эффекта при минимальных затратах ресурсов.

Но в целом, все рассматриваемые принципы прямо или косвенно отражают идеи *устойчивости, результативности и равновесия* (*компромисса*). Устойчивость решения предполагает малые его отклонения при малых отклонениях воздействия внешней среды. Результативность требует получения некоторого обоснованного решения либо установления факта невозможности его получения в поставленных условиях.

Равновесие (компромисс) является следствием незыблемого во всей реальности Закона Сохранения, т.к. невозможно получить реальное решение, не жертвуя при этом какими-то менее значимыми в данных условиях аспектами управления.

Необходимость учёта приоритета критериев. Из физического смысла задачи следует, что локальные критерии имеют различную значимость при решении задачи, т.е. один локальный критерий имеет какой-то приоритет над другим локальным критерием. Это следует учитывать при выборе принципа оптимальности и определении области возможных решений, отдавая предпочтение более важным (значимым в условиях задачи) критериям [13].

Выбор алгоритма вычисления оптимального решения. Несмотря на наличие большого числа математически выверенных алгоритмов оптимизации, известны примеры, когда они становятся непригодными для решения ЗМУ после внесения небольших, но не типичных изменений и дополнений к первоначальной задаче, поэтому часто приходится модернизировать алгоритмы с учётом этих новых условий.

Общее замечание. Все численные методы векторной оптимизации ориентированы в одном из трёх направлений [18]:

– сведение векторного критерия к скалярному (одна ЦФ) критерию и решение однокритериальной задачи,

– последовательное решение конечного множества однокритериальных задач,

– сужение множества *D* с последующим выбором одного решения непосредственно лицом, принимающим решение (ЛПР).

2.2. Преобразование и решение задач многокритериального управления

Различные методы преобразования и решения ЗМУ рассмотрим на примере максимизации нескольких ЦФ. Задачу с минимизацией можно решать либо соответствующей заменой max на min в далее приведённых формулах, либо заменой min на max в ЦФ и умножением коэффициентов при переменных в ЦФ на (-1).

Также в задаче должны быть определены ограничения, формирующих ОДР задачи *D*.

ЗМУ в общем виде будет записана следующим образом:

$$\begin{cases} f_l(X) \to \max, & \forall l = \overline{1,k}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & \forall i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in X, & \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (2.3)$$

Решающей функцией ЗМУ (РФЗМУ) назовём оптимизируемую функцию, построенную на базе ЦФ ЗМУ, которая учитывает взаимосвязь критериев и превращает ЗМУ в однокритериальную задачу.

Метод главного критерия

МГК самый примитивный из всех методов решения ЗМУ. Он предполагает выбор наиболее значимого или существенного по каким-либо соображениям критерия из всего набора критериев. Выбранный критерий подлежит условной оптимизации при ограничениях, накладываемых на остальные ЦФ: они должны иметь значения не хуже заданных приемлемых фиксированных значений.

При решении задачи обычно перенумеровывают критерии так, чтобы главный критерий получил первый номер – f_1. Рассмотрим пример максимизации всех критериев. Зададим числа $f_l^{\min}$, $l = \overline{2,k}$ – минимально удовлетворительные значения других критериев.

РФЗМУ $F(X)$ в МГК совпадает с ЦФ главного критерия. Задача превращается в однокритериальную:

$$\begin{cases} F(X) = f_1(X) \to \max, \\ f_l(X) \ge f_l^{\min}(X), \ \forall l = \overline{2,k}, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, & \forall i = \overline{1,\mathrm{m}}, \\ x_j \ge 0, \quad x_j \in X, & \forall j = \overline{1,n} \end{cases} \qquad (2.4)$$

Основное требование в МГК – избегать двух крайностей:

– выполнение неравенств $f_l(X) \ge f_l^{\min}(X)$, $\forall l = \overline{2,k}$ во всём множестве точек X (в этом случае остальные критерии не играют никакой роли),

– отсутствие допустимых точек в множестве X (заданы такие большие значения $f_l^{\min}(X)$, что они делают ОДР задачи (2.4) пустой).

В первом случае все критерии, кроме главного, потеряют свой смысл, а во втором случае ЗМУ не будет иметь решений.

МГК задачу (2.3) превращает в однокритериальную задачу (2.4) общего вида:

$$\begin{aligned} & f_1(x) \underset{x\in D'}{\rightarrow} \max, \quad D' \subseteq D \subseteq \Re^k \\ & D' = \left\{ x \in D \mid f_l(x) \geq f_l^{\min}(x), \;\; l = \overline{2,k} \right\}. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Формально задача становится проще, т.к. требуется максимизация только одной ЦФ f_1, пусть и на новой ОДР D'. Добавление ограничений вида $f_l(x) \geq f_l^{\min}(x)$ алгоритмически не делает задач однокритериальной оптимизации сложнее, а лишь показывает, согласие не добиваться максимальных значений для ЦФ f_2, …, f_k, ограниченных минимальными приемлемыми значениями.

Но переход от задачи (2.3) к задаче (2.5) не является эквивалентным преобразованием! Этот переход существенно изменяет постановку задачи, он должен быть обоснован: насколько возможно в задаче остальные ЦФ, кроме главной, фактически отменить и насколько приемлемы их минимальные значения.

Основная трудность в применении МГК связана с наличием нескольких «главных» критериев, находящихся в противоречии или в конфликте друг с другом. Кроме того, не всегда однозначно определён и обоснован алгоритм выбора нижних границ $f_l^{\min}$. Несмотря на линейность задачи начальная ОДР может быть существенно сокращена даже незначительным изменением нижней границы одной из неглавных ЦФ.

Свёртка в суперкритерий

Одним из часто используемых методов сведения ЗМУ к однокритериальной задаче является свёртка частных критериев в общий. Для этого необходимо задать неотрицательные весовые коэффициенты, обозначающие степень важности каждого критерия, и нормирующие коэффициенты, позволяющие привести диапазоны значений ЦФ (имеющих, как правило, разную природу, единицы измерения и масштабы) к одному диапазону.

РФЗМУ является суперкритерий, который может быть двух видов:

1) аддитивный; вектор весовых коэффициентов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l)$ выражает линейный вклад каждого критерия f_l в суперкритерий F_0:

$$F(X) = F_0 = \sum_{l=1}^{k} \alpha_l \frac{f_l}{s_l} \qquad (2.6)$$

2) мультипликативный; вектор весовых коэффициентов $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l)$ выражает вклад каждого критерия f_l в суперкритерий F_0 через вероятность достижения соответствующего показателя качества:

$$F(X) = F_0 = \prod_{l=1}^{k} \beta_l \frac{f_l}{s_l}, \quad \sum_{l=1}^{k} \beta_l = 1 \qquad (2.7)$$

В формулах (2.5) и (2.6) s_l – это нормирующий коэффициент, равный диапазону шкалы оценивания l-го критерия;

Недостаток метода заключается в том, что любое упорядочивание точек в k-мерном пространстве не является однозначным и полностью определяется видом самой упорядочивающей функции. Незначительное изменение упорядочивающей функции путём варьирования её коэффициентов потенциально может привести к существенному отклонению нового оптимального решения от старого, что характеризует неустойчивость процедуры выбора.

Если частные критерии имеют разную природу (а обычно именно так и происходит в прикладных задачах), то выбрать окончательный набор весовых коэффициентов, исходя из неформальных соображений, весьма сложно: требуется привлекать к такому выбору экспертов.

Максиминная свертка

Данный метод определяет то решение задачи, при котором наихудший из критериев имеет максимально достижимое значение. Т.е. метод является наиболее требовательным и учитывает все критерии. В нём, как и в предыдущем методе, задают масштабирующие коэффициенты s_l (в частном случае все значения можно принять равными 1, но только при условии равенства масштабов всех функций)

РФЗМУ в максиминной свёртке при максимизации всех ЦФ задачи – это функция вида:

$$F(X) = \min_{l=1,...,k} \frac{f_l}{s_l} \to \max \qquad (2.8)$$

Масштабирующие коэффициенты s_l здесь приводят все ЦФ к одному масштабу. Также эти коэффициенты могут быть использованы для выделения какого-либо из критериев (идейная близость к МГК).

В случае минимизации всех ЦФ исходной задачи РФЗМУ приобретает вид:

$$F(X) = \max_{l=1,\dots,k} \frac{f_l}{s_l} \to \min \tag{2.9}$$

Из сказанного выше следует, что для решения ЗМУ методом максиминной свёртки требуется привести все ЦФ задачи к одному виду: максимизация либо минимизация.

Основным недостатком максиминной свёртки является то, что в получаемой ЦФ появляются области усечения (функция теряет гладкость).

Но при этом, в отличие от метода свёртки в суперкритерий, на РФЗМУ оказывает влияние именно та из ЦФ, которая в данной точке ОДР x принимает наименьшее значение из всех ЦФ. И если в случае применения МГК или свёртки в суперкритерий в принципе возможны решения, в которых одни ЦФ имеют существенно низкие значения при очень высоких значениях других ЦФ, то в случае максиминного критерия значение РФЗМУ определяет гарантированную нижнюю оценку для всех ЦФ. Этот факт является существенным преимуществом максиминной свёртки перед свёрткой в суперкритерий.

Метод относительных отклонений

МОО требует вычисления крайних значений каждой ЦФ на допустимом множестве решений:

$$\begin{aligned} f_l^{\max} &= \max f_l, \quad x \in X, \quad l = \overline{1,k}, \\ f_l^{\min} &= \min f_l, \quad x \in X, \quad l = \overline{1,k} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Разность полученных значений:

$$A_l = f_l^{\max} - f_l^{\min}, \quad l = \overline{1,k} \tag{2.11}$$

Является диапазоном (амплитудой) изменения ЦФ.

Разность значений $f_l^{\max} - f_l(x)$, $l = \overline{1,k}$ – есть абсолютное отклонение от максимума l-й целевой функции в точке x, а их частное $\dfrac{f_l^{\max} - f_l(x)}{A_l}$, $l = \overline{1,k}$ – есть относительное отклонение от максимума

l-й ЦФ. Относительное отклонение по определению лежит в пределах [0; 1] – равно нулю в точке максимума, равно а единице в точке минимума (для задачи максимизации).

МОО состоит в решении задачи поиска минимума линейной комбинации отклонений с заданными положительными весовыми коэффициентами c_l, представляющими собой значимость l-го критерия:

$$\begin{cases} F(x) = \sum\limits_{l=1}^{k} c_l \dfrac{f_l^{\max} - f_l(x)}{A_l} \to \min, \\ x \in X, \\ c_l > 0, \quad \sum\limits_{l=1}^{k} c_l = 1, \quad \forall l = \overline{1,k} \end{cases} \tag{2.12}$$

Для ЗМУ с минимизацией ЦФ формула (2.10) приобретает вид:

$$\begin{cases} F(x) = \sum\limits_{l=1}^{k} c_l \dfrac{f_l(x) - f_l^{\min}}{A_l} \to \min, \\ x \in X, \\ c_l > 0, \quad \sum\limits_{l=1}^{k} c_l = 1, \quad \forall l = \overline{1,k} \end{cases} \tag{2.13}$$

МОО требует большего объёма вычислений по сравнению с ранее рассмотренными методами – это является его недостатком.

Метод идеальной точки

МИТ существенно отличается от ранее рассмотренных методов и при этом позволяет получить однозначное решение задачи многокритериальной оптимизации.

Введём понятие множества достижимости ЗМУ. Это общее множество всех возможных значений всех ЦФ, вычисленных независимо друг от друга в рамках общей ОДР задачи:

$$Y = \left\{ y \in \Re^l : y = f(x), \quad x \in X \right\} \tag{2.14}$$

Здесь $\Re^l$ – l-мерное математическое пространство.

Построим вектор, состоящий из максимальных значений всех ЦФ. Назовём его *идеальным вектором*:

$$F_И = \left(\max_{x \in X} f_1(x),\ \max_{x \in X} f_2(x),\ \ldots,\ \max_{x \in X} f_l(x) \right) \tag{2.15}$$

Пример с двумерным пространством (рисунок 2.3) демонстрирует случай, когда идеальная точка (точка, задаваемая идеальным вектором) не принадлежит ОДР задачи (что, как правило, и происходит на практике) $F_И \notin Y$.

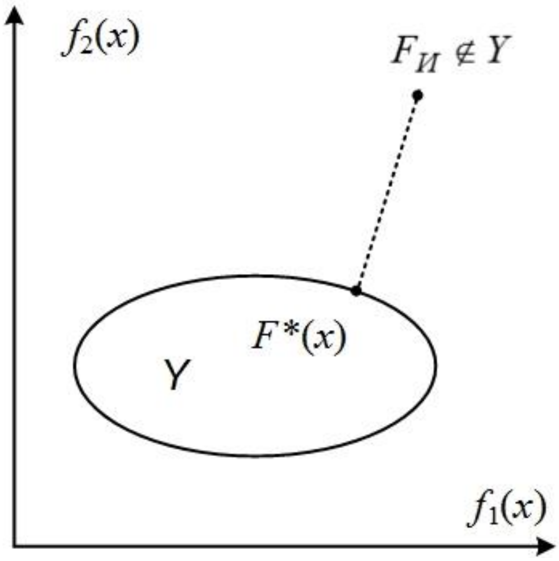

Рисунок 2.3. Идеальная точка в двумерном пространстве вне ОДР

Решением ЗМУ будем считать точку $F^*(x) \in Y$, определяющую такой вектор значений ЦФ, который минимально (по определённой норме) отличается от идеального вектора. Тогда РФЗМУ можно задать следующим образом.

$$F(x) = \|F(x) - F_И\| \to \min, \quad x \in X \tag{2.16}$$

Рассмотрим меры расстояний, которые можно применить в качестве данной нормы.

Евклидово расстояние. Наиболее распространённая функция расстояния. Представляет собой обычное геометрическое расстояние в математическом пространстве. РФЗМУ определяем так:

$$F(x) = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} \left(f_l(x) - F_l^И\right)^2} \to \min, \quad x \in X \tag{2.17}$$

Взвешенное евклидово расстояние является модификацией обычного евклидова расстояния и позволяет дифференцировать ЦФ исходной задаче – приписать каждой из них некоторый вес $0 < \omega_l < 1$, пропорционально её значимости в ЗМУ. РФЗМУ принимает вид:

$$F(x) = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} \omega_l \left(f_l(x) - F_l^И\right)^2} \to \min, \quad x \in X \tag{2.18}$$

Определение весов требует исследований, проводимых путём организации экспертного опроса.

Манхэттенское расстояние. Это расстояние показывает среднее арифметическое значение разностей ЦФ. Эта мера расстояния достаточно близка к расстоянию Евклида, но ввиду отсутствия возведения в квадрат отдельные большие разности нивелируются, их влияние существенно уменьшается. Такая процедура позволяет получить более гладкое общее решение. РФЗМУ будет следующей:

$$F(x)=\sum_{l=1}^{k}\left|f_l(x)-F_l^{И}\right|\to \min, \quad x\in X \tag{2.19}$$

Степенное расстояние. Является нормой, сочетающей в себе положительные свойства евклидова и манхэттенского расстояния. Вес размерности, которая определяет меру отличия, может быть больше или меньше в зависимости от особенностей задачи. РФЗМУ будет следующей:

$$F(x)=\left(\sum_{l=1}^{k}\left(f_l(x)-F_l^{И}\right)^p\right)^q \to \min, \quad x\in X \tag{2.20}$$

где p – параметр, определяющий взвешивание разностей по отдельным ЦФ, q – параметр, определяющий прогрессивное взвешивание больших расстояний между решением и идеальной точкой. Если оба параметра равны 2, то это расстояние становится евклидовым.

2.3. Практическое задание № 4

1. Разработать программу для решения ЗМУ в соответствие с исходными данными по вариантам (таблица 2.1). Программа должна реализовать следующие способы решения (на основе процедуры симплекс-метода решения однокритериальной задачи):

1.1. МГК для двух случаев:

а) главный критерий – f_1, ограничение для второго критерия определяются по вариантам:

– 1…10 – $f_2(x)\ge t_2$,

– 11…20 – $f_2(x)\ge t_2$,

– 21…30 – $f_2(x)\le t_2$,

– 31…40 – $f_2(x)\le t_2$,

б) главный критерий – f_2, ограничение для первого критерия определяются по вариантам:

– 1…10 – $f_1(x) \geq t_1$,

– 11…20 – $f_1(x) \leq t_1$,

– 21…30 – $f_1(x) \geq t_1$,

– 31…40 – $f_1(x) \leq t_1$.

$t_1 = \frac{t_1^{\max} - t_1^{\min}}{2}$, $t_2 = \frac{t_2^{\max} - t_2^{\min}}{2}$, т.е. середина диапазона возможных значений, где одна из границ соответствует случаю, когда введение ограничения для неглавного критерия не меняет ОДР основных ограничений задачи, а другая – превращает её в единственную точку.

1.2. Методом максиминной свёртки.

1.3. Методом линейной (аддитивной) свёртки. Найти решения, удовлетворяющие одному или нескольким из следующих условий:

а) $f_1(x) \approx \frac{k}{10} f_2(x)$,

б) $f_2(x) \approx \frac{k}{10} f_1(x)$,

а) $f_1(x) \approx -\frac{k}{10} f_2(x)$,

б) $f_2(x) \approx -\frac{k}{10} f_1(x)$,

где $k = \overline{1,9}$.

Отклонения от равенства в указанных выражениях не должны превышать значения $d = 0{,}05 \cdot \max(|f_1|, |f_2|)$.

В решениях подобрать с точностью до 0,01 коэффициенты α_1 и α_2, дающие наилучшее значение функции $F(x)$. Нормирующие коэффициенты s_l принять равными 1.

2. Выполнить п. 1.1 задания в MS Excel, используя графический метод решения однокритериальной задачи, подтвердив программное решение.

3. Выполнить п. 1.2 задания в MS Excel, используя графический метод решения однокритериальной задачи, подтвердив программное решение.

Дополнительные пояснения к выполнению п.1.1. Пусть заданы ЦФ и ограничения:

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + 4x_2 \to \min \\ f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}.$$

ОДР в исходной задаче показана на рисунке 2.4.

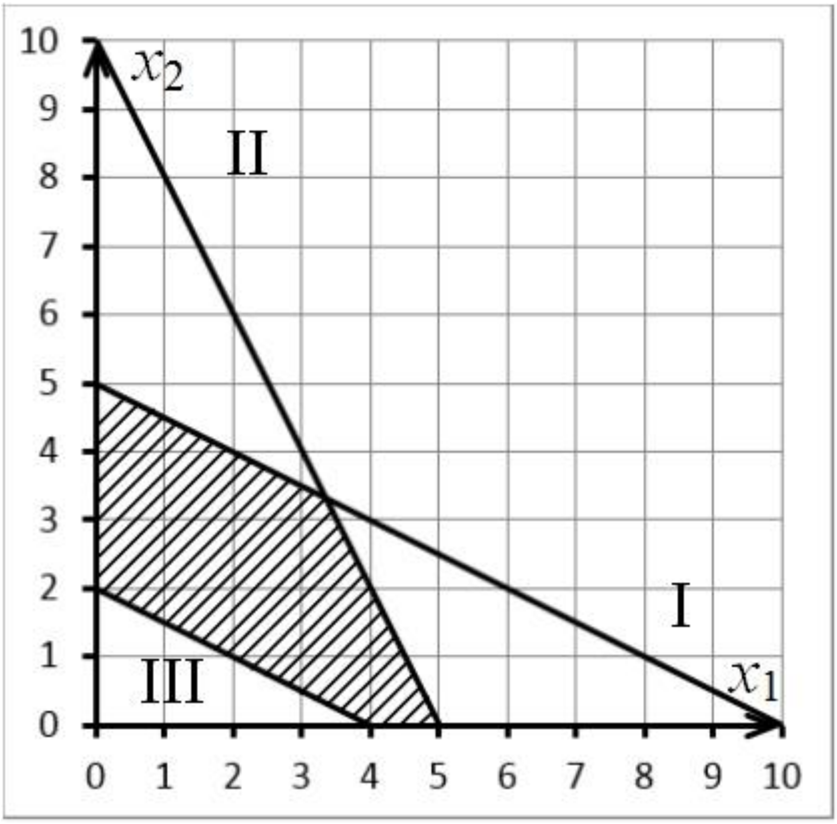

Рисунок 2.4. Пояснение к выполнению п. 1.1 задания. ОДР исходной задачи

Будем считать первую ЦФ главной. Зададим ограничение на вторую ЦФ так, чтобы она проходила через первую точку ОДР (в направлении градиента второй ФЦ), т.е. точку с координатами $(0, 2)$. Подставив эти координаты в уравнение второй ЦФ, получим ограничение $f_2 = 3x_1 + x_2 \ge 2$.

ОДР с учётом этого ограничения показана на рисунке 2.5. Таким образом, $t_2^{\min} = 2$ – это нижняя граница для второй ЦФ, при которой ОДР задачи не изменится.

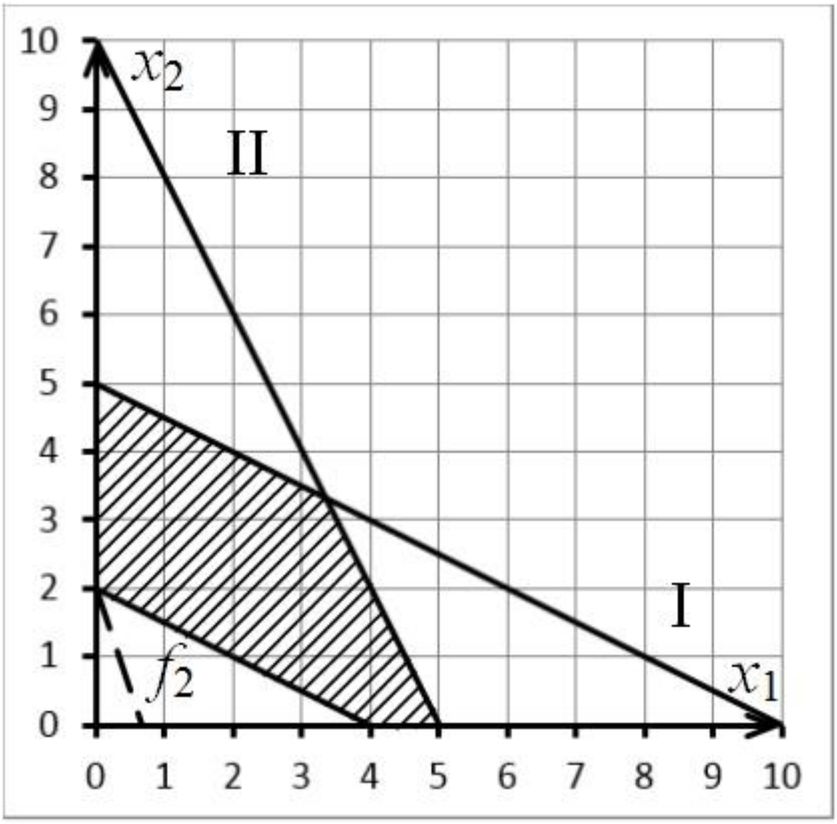

Рисунок 2.5. Пояснение к выполнению п. 1.1 задания. Ограничение неглавной ЦФ, не меняющее исходную ОДР

Теперь зададим ограничение на вторую ЦФ так, чтобы она проходила через последнюю точку ОДР (в направлении градиента второй ФЦ), т.е. точку с координатами $(5, 0)$. Подставив эти координаты в уравнение второй ЦФ, получим ограничение $f_2 = 3x_1 + x_2 \geq 15$. ОДР с учётом этого ограничения превращается в одну точку А (рисунок 2.6).

Таким образом, $t_2^{\max} = 15$ – это верхняя граница для второй ЦФ, при которой ОДР превращается в единственную точку.

$$t_2 = \frac{t_2^{\max} - t_2^{\min}}{2} = \frac{15 - 2}{2} = 6{,}5.$$

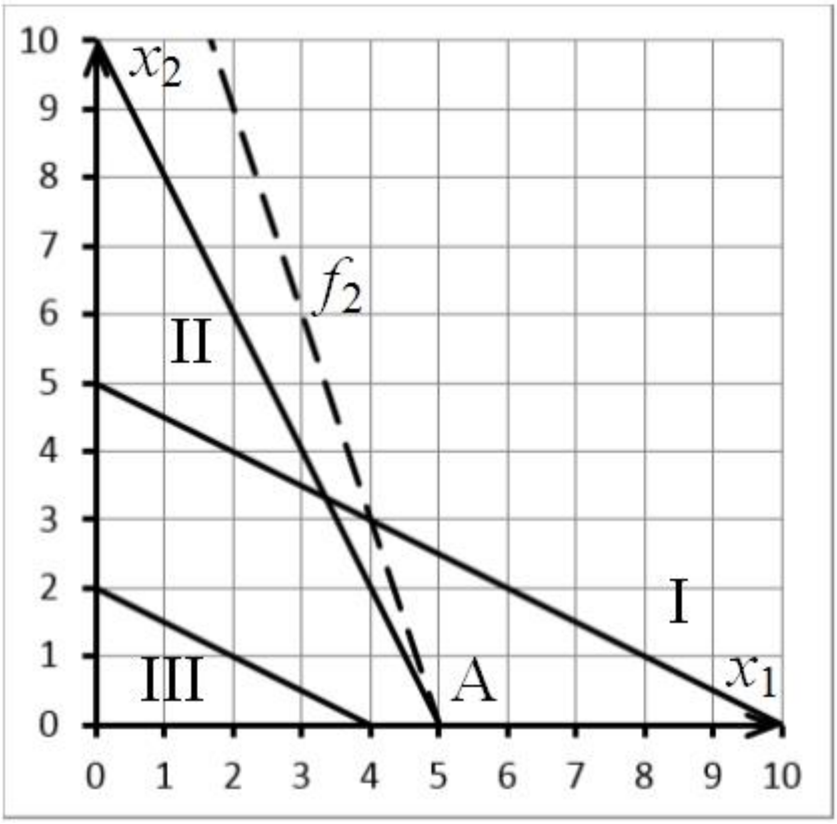

Рисунок 2.6. ОДР исходной задачи в пояснении к выполнению п. 1.1 задания с учётом ограничения неглавной ЦФ, превращающее ОДР в единственную точку

Дополнительные пояснения к выполнению п.1.3. Рассмотрим построение модели для условия в п/п а). Максимальной функцией для задания величины отклонения, очевидно будет f_2. Величина отклонения, таким образом равна $d = 0{,}05 \cdot |f_2|$. Следовательно РФЗМУ будет записана в виде $F(X) = \alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2$, а также будет добавлено следующее дополнительное ограничение:

– $0{,}95\dfrac{k}{10} f_2(x) \le f_1(x) \le 1{,}05\dfrac{k}{10} f_2(x)$ для $f_2(x) \ge 0$,

– $1{,}05\dfrac{k}{10} f_2(x) \le f_1(x) \le 0{,}95\dfrac{k}{10} f_2(x)$ для $f_2(x) < 0$,

Программа должна включать переборные циклы по $k = \overline{1,9}$ и $\alpha_1 = \{0{,}01;\ 0{,}02;\ ...;\ 0{,}99\}$, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Подставив вместо $f_2(x) \ge 0$ и $f_2(x) \ge 0$ их выражения, а также значения k и (α_1, α_2) можно получить РФЗМУ (т.е. одну ЦФ) и два дополнительных ограничения, что позволяет симплекс-методом решить задачу для данной комбинации k и (α_1, α_2).

Таблица 2.1

Исходные данные для практического задания № 4

№ варианта	критерии	ограничения
1	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
2	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
4	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 27, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
6	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
7	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 26, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
8	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
10	$f_1 = x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
11	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \min$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
12	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
13	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
14	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
15	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 27, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
16	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \min$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
17	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 26, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
18	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
19	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
20	$f_1 = x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
21	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
22	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
23	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
24	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
25	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 27, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
26	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 32, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
27	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 26, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
28	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
29	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
30	$f_1 = x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
31	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \min$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
32	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
33	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
34	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
35	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 27, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
36	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \min$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Окончание таблицы 2.1

№ варианта	критерии	ограничения
37	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 26, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
38	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
39	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 20, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
40	$f_1 = x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

2.4. Практическое задание № 5

1. Дополнить программу для решения ЗМУ по практическому заданию №4 в соответствие с исходными данными по вариантам (таблица 2.1) решением по МОО.

2. Произвести анализ решений ЗМУ, полученных в п.п. 1.1, 1.2 и 1.3 практического задания №4 и в п. 1 практического задания №5 с использованием МИТ:

2.1. Вычислить следующие расстояния от идеальной точки до решений, полученных в каждом из указанных пунктов по нормам:

– евклидово расстояние,

– взвешенное евклидово расстояние, используя весовые коэффициенты ω_1 и ω_2 по вариантам таблицы 2.2,

– манхэттенское расстояние,

– степенное расстояние, используя параметры p и q по вариантам таблицы 2.2.

2.2. Построить сводную таблицу расстояний по образцу, показанному в таблице 2.3.

2.3. Выявить методы, дающий наиболее близкое и наиболее дальнее к идеальной точке решение. Обосновать это исходя из описаний методов, данных в параграфе 2.2.

Таблица 2.2

Исходные данные для практического задания № 5

№ варианта	ω_1	ω_2	p	q
1	0,2	0,8	2	3
2	0,3	0,7	3	4
3	0,4	0,6	3	2
4	0,6	0,4	4	3
5	0,7	0,3	2	3
6	0,8	0,2	3	4
7	0,2	0,8	3	2
8	0,3	0,7	4	3
9	0,4	0,6	2	3
10	0,6	0,4	3	4
11	0,7	0,3	3	2
12	0,8	0,2	4	3
13	0,2	0,8	2	3
14	0,3	0,7	3	4
15	0,4	0,6	3	2
16	0,6	0,4	4	3
17	0,7	0,3	2	3
18	0,8	0,2	3	4
19	0,2	0,8	3	2
20	0,3	0,7	4	3
21	0,4	0,6	2	3
22	0,6	0,4	3	4

Окончание таблицы 2.2

№ варианта	ω_1	ω_2	p	q
23	0,7	0,3	3	2
24	0,8	0,2	4	3
25	0,2	0,8	2	3
26	0,3	0,7	3	4
27	0,4	0,6	3	2
28	0,6	0,4	4	3
29	0,7	0,3	2	3
30	0,8	0,2	3	4
31	0,2	0,8	3	2
32	0,3	0,7	4	3
33	0,4	0,6	2	3
34	0,6	0,4	3	4
35	0,7	0,3	3	2
36	0,8	0,2	4	3
37	0,2	0,8	2	3
38	0,3	0,7	3	4
39	0,4	0,6	3	2
40	0,6	0,4	4	3

Таблица 2.3

Сводная таблица расстояний в практическом задании № 5

Метод решения ЗМУ	Вид нормы (расстояние)			
	евклидово	взвешенное евклидово	манхэттенское	степенное
МГК по f_1				
МГК по f_2				
максиминная свёртка				
аддитивная свёртка				
МОО				

2.5. Применение метода последовательных уступок в задачах многокритериального управления

Проблема выбора метода решения ЗМУ

Рассмотренные в параграфе 2.2 методы преобразования и решения ЗМУ имеют ряд существенных недостатков, не позволяющих сделать однозначное предпочтение в пользу какого-то из них:

– изначально заданные параметры выбранного метода приводят к существенно различным результатам решения,

– полученное решение, удовлетворяет одновременно всем критериям, но при этом является чрезвычайно слабым по большинству из них,

– некоторые методы лишены предыдущих недостатков, но требуют очень большого объёма вычислений.

Но самое главное то, что все рассмотренные методы никоим образом не учитывают особенности взаимного расположения оптимальных точек каждой ЦФ в общем пространстве решений (то, насколько ЦФ противоречивы и конфликтны). Т.е. любой метод для одной задачи может дать очень хорошее решение, а для другой – плохое или вообще никакое. И даже если мы будем решать каждую задачу всеми возможными методами, то это не даст конечного множества альтернативных решений (в силу первого недостатка).

Рассмотрим ещё один метод, в котором из перечисленных недостатков остаётся только необходимость ранжирования критериев по значимости и большой объём вычислений (понятно, что не существует методов, полностью лишённых каких-либо недостатков). Необходимость ранжирования критериев приводит к некоторой зависимости получаемых результатов относительно начальных параметров, но, по крайней мере, устраняет указанный главный недостаток.

Сущность МПУ

Процедура решения ЗМУ методом последовательных уступок (МПУ) заключается в следующем (для случая максимизации):

1) Все частные ЦФ ранжируют по степени их относительной значимости.

2) Максимизируют первую, наиболее значимую ЦФ.

3) Назначают величину допустимого снижения величины первой ЦФ и максимизируют вторую по значимости ЦФ при условии, что

значение первой ЦФ не должно снизиться относительно найденного в п.2 более чем на установленную величину.

4) Назначают величину уступки по второй ЦФ (эта величина, вообще говоря, не совпадает с величиной уступки первой ЦФ, т.к. все ЦФ имеют разный математический смысл и диапазоны значений) и находят максимум третьей по значимости ЦФ при условии, что значения первых двух ЦФ не снижаются относительно ранее найденных максимальных значений больше чем на величины соответствующих уступок.

5) Подобным же образом поочередно назначают величины уступок и максимизируют все остальные ЦФ.

6) Оптимальным считают то решение, которое получено при поиске условного максимума последней по значимости ЦФ.

Как видно из процедуры, при использовании МПУ процесс решения ЗМУ складывается из последовательности действий по выбору величин уступок и максимизации частных ЦФ. Величины уступок также имеют смысл приоритета одних частных ЦФ над другими: величина уступки обратно пропорциональна приоритету (минимальная уступка показывает максимальный приоритет).

Т.о. мы видим, что данный метод исправляет недостатки ранее рассмотренных методов:

– для МГК все ЦФ остаются именно функциями, а не превращаются в ограничения относительно главной ЦФ,
– аналогично для свёртки в суперкритерий – здесь все функции остаются независимыми,
– отсутствует слабость решения как для метода максиминной свёртки,
– существует возможность управлять величиной отклонений ЦФ, чего нет в МОО,
– отсутствует необходимость какого-либо нормирования расстояний в общем пространстве решений (как в МИТ, где выбор нормы существенно влияет на результат решения), т.к. рассматриваются только проекции расстояний на оси координат.

Отдельное замечание. Выбор величины уступки позволяет управлять относительным приоритетом ЦФ, что ослабляет негативное влияние изначального ранжирования: несмотря на сохранение порядка следования критериев, можно сгладить (а при наличии возможности, наоборот усилить) соотношения значимостей отдельных ЦФ.

Порядок решения ЗМУ посредством МПУ

Общее замечание. Рассмотрим задачу максимизации всех критериев. Для отдельных случаев минимизации, как обычно, применяем умножение коэффициентов при такой ЦФ на (-1).

При решении ЗМУ посредством МПУ, применяя качественный анализ относительной значимости критериев по результатам экспертного опроса критерии ранжируют и нумеруют в порядке убывания значимости. Ранжированный ряд критериев:

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_S$.

Максимизируем первый по значимости критерий f_1 и определяем его наибольшее значение Q_1. Назначаем положительную величину допустимого снижения (уступки) $\Delta_1 > 0$ критерия f_1.

Определяем наибольшее значение Q_2 второго критерия f_2 при условии, что значение первого критерия ограничено снизу величиной $Q_1 - \Delta_1$.

Назначаем вторую величину уступки $\Delta_2 > 0$ для второго критерия, которую вместе с уступкой первого критерия используем при нахождении условного максимума третьего критерия, и т.д.

Наконец, максимизируем последний по важности критерий f_S при условии, что значение каждого критерия f_R из $S-1$-предыдущих ограничено снизу величиной $Q_R - \Delta_R$.

Общее решение ЗМУ, которое получено в таком порядке, будет оптимальным. И его математическая формулировка для ЗМУ при максимизации всех критериев следующая:

1) найти $Q_1 = \max\limits_{x \in X} f_1(x)$,

2) найти $Q_2 = \max\limits_{\substack{x \in X \\ f_1(x) \geq Q_1 - \Delta_1}} f_2(x)$,

…

S) найти $Q_S = \max\limits_{\substack{x \in X \\ f_R(x) \geq Q_R - \Delta_R \\ R = 1, 2, \ldots, S-1}} f_S(x)$.

Также весьма вероятен случай, при котором ввиду большого количества критериев последний из них (f_S на ОДР задачи S), или какой-либо из предыдущих не достигает своего оптимального значения (т.е.

на каком-либо этапе задача не имеет решений). Тогда решение ЗМУ находят путём синтеза последовательности решений $\left\{x^K\right\}$, стремящейся к Q_S:

$$\lim_{K\to\infty} f_S\left(x^K\right)=Q_S \tag{2.21}$$

Каждое решение в данной последовательности получается при изменении (увеличении) величин уступок на отдельных этапах для некоторых ЦФ.

Анализ взаимосвязи частных критериев позволяет назначить обоснованные величины уступок Δ_R. Такой анализ опирается на построение зависимостей между максимальными значениями пар ЦФ при разных величинах уступок, что иногда даёт возможность выявить между ними чёткую функциональную зависимость.

Назначим величину допустимого снижения Δ_1 первого критерия от его наибольшего значения Q_1. Затем введём в рассмотрение несколько величин уступок $\Delta_1^1, \Delta_1^2, \Delta_1^3, \dots$ (разница между ними может быть задана постоянной) и определим соответствующие экстремальные значения $Q_2\left(\Delta_1^1\right)$, $Q_2\left(\Delta_1^2\right)$, $Q_2\left(\Delta_1^3\right)$,... второго критерия. Также путём регрессионного анализа можно выявить функцию $Q_2\left(\Delta_1\right)$.

Результаты расчётов представлены схематично на рисунке 2.7.

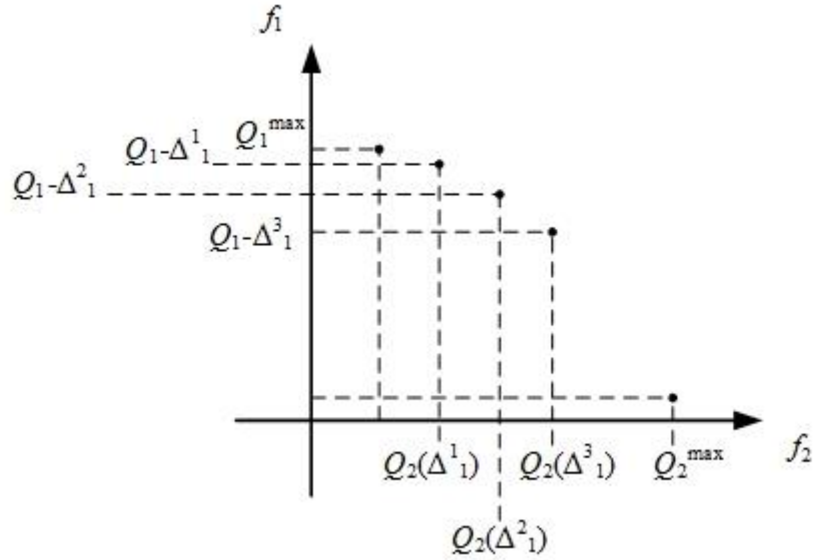

Рисунок 2.7. Соотношение между величиной уступки и следующим критерием

Можно отметить следующее. При небольших значениях уступок получается значительный прирост второго критерия. Но ещё больший рост уступки замедляет изменение второй ЦФ, а динамика снижения первой ЦФ, наоборот, увеличивается.

Анализ полученных данных (например выделение на графике равновесной точки – точки, в которой скорость падения величины первого критерия и скорость роста величины второго равны) позволяет назначить величину компромиссной уступки Δ_1 и определить $Q_2(\Delta_1)$.

По аналогии для пары критериев f_2, f_3 назначают пробные величины уступок $\Delta_2^1, \Delta_2^2, \Delta_2^3, \ldots$ и определяют наибольшие значения третьего критерия $Q_3\left(\Delta_2^1\right)$, $Q_3\left(\Delta_2^2\right)$, $Q_3\left(\Delta_2^3\right)$, ... По полученным данным определяют величину компромиссной уступки Δ_2 и т. д.

Анализ критериев f_{S-1}, f_S позволяет назначить величину последней уступки Δ_{S-1} и решить ЗМУ полностью.

Таким образом, хотя МПУ требует решения всего лишь *S*-задач, для назначения компромиссных величин уступок фактически приходится решать на порядок больше подобных задач и это, конечно, существенно увеличивает объём вычислений.

2.6. Практическое задание № 6

Разработать программу для решения ЗМУ посредством МПУ в соответствие с исходными данными по вариантам (таблица 2.4).

1. Рассчитать компромиссные величины уступок Δ_1, Δ_2. Для расчёта Δ_1 вычислить ряд значений $Q_2\left(\Delta_1^1\right)$, $Q_2\left(\Delta_1^2\right)$, $Q_2\left(\Delta_1^3\right)$,... и изобразить графически зависимость прироста второго критерия от величины уступки первого. По данной зависимости (либо численным методом) определить три значения уступок $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$, $\Delta_1^{(3)}$, в которых отношение скорости убывания величины первого критерия к скорости роста величины второго составляет соответственно $\dfrac{\partial Q_1\left(\Delta_1^{(1)}\right)}{\partial Q_2\left(\Delta_1^{(1)}\right)}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial Q_1\left(\Delta_1^{(2)}\right)}{\partial Q_2\left(\Delta_1^{(2)}\right)}=1$ и $\dfrac{\partial Q_1\left(\Delta_1^{(3)}\right)}{\partial Q_2\left(\Delta_1^{(3)}\right)}=2$.

Аналогичным образом изобразить графически зависимость прироста третьего критерия от величины уступки второго и определить $\Delta_2^{(1)}$, $\Delta_2^{(2)}$, $\Delta_2^{(3)}$, в которых $\dfrac{\partial Q_2\left(\Delta_2^{(1)}\right)}{\partial Q_3\left(\Delta_2^{(1)}\right)} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial Q_2\left(\Delta_2^{(2)}\right)}{\partial Q_3\left(\Delta_2^{(2)}\right)} = 1$ и $\dfrac{\partial Q_2\left(\Delta_2^{(3)}\right)}{\partial Q_3\left(\Delta_2^{(3)}\right)} = 2$.

2. Решить ЗМУ для всех девяти сочетаний $\Delta^{11} = \left(\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}\right)$ $\Delta^{12} = \left(\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(2)}\right)$, …, $\Delta^{33} = \left(\Delta_1^{(3)}, \Delta_2^{(3)}\right)$.

3. Рассчитать нормы отклонений для всех решений, полученных в п.2 по МИТ с использованием евклидова расстояния.

4. Сравнить полученные в п.3 результаты, выделить худшее и лучшее решения, сделать выводы.

Таблица 2.4

Исходные данные для практического задания № 6

№ варианта	критерии	ограничения
1	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = 5x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 40, \\ -x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
2	$f_1 = x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 18, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 30, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$f_1 = x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = -3x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 45, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
4	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = 2x_1 - 6x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
5	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \max$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = -7x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
6	$f_1 = x_1 - 3x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ -x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \min$ $f_3 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 24, \\ -x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
8	$f_1 = x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = 2x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 18, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 - 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
10	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 42, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 24, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
11	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 30, \\ -x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
12	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \min$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 + 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 17, \\ 2x_1 \ge 4, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
13	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 - x_2 \to \max$ $f_3 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
14	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 24, \\ -x_1 + 2x_2 \le 18, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
15	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 - 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 40, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
16	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 - 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
17	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = -2x_1 + 3x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 36, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 26, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
18	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$ $f_3 = 12x_1 + 18x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
19	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_3 = 2x_1 + 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 28, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
20	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 + 4x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
21	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \min$ $f_3 = 3x_1 + x_2 \to \min$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 64, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
22	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 26, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 32, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
23	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \min$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 4x_1 + 2x_2 \le 42, \\ 4x_1 + 8x_2 \le 32, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
24	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_3 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 36, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
25	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 30, \\ -x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
26	$f_1 = -2x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 3x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 15, \\ -x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
27	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 - 3x_2 \to \max$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ -x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
28	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 22, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Продолжение таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
29	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
30	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 48, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
31	$f_1 = x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2 = -x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 30, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
32	$f_1 = x_1 + 4x_2 \to \min$ $f_2 = x_1 - 2x_2 \to \max$ $f_3 = 2x_1 - 6x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \le 54, \\ 4x_1 + 8x_2 \ge 32, \\ 2x_1 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
33	$f_1 = 2x_1 + x_2 \to \min$ $f_2 = -2x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_3 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 44, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$
34	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$ $f_3 = -2x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 40, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Окончание таблицы 2.4

№ варианта	критерии	ограничения
35	$f_1 = x_1 + 3x_2 \to \min$ $f_2 = -7x_1 + x_2 \to \min$ $f_3 = -x_1 - 5x_2 \to \max$	$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ -x_1 + x_2 \leq 25, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
36	$f_1 = x_1 + x_2 \to \max$ $f_2 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = 2x_1 + 5x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 34, \\ -5x_1 + 3x_2 \leq 45, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
37	$f_1 = 2x_1 - 6x_2 \to \min$ $f_2 = 3x_1 + x_2 \to \max$ $f_3 = 5x_1 + 2x_2 \to \min$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 22, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
38	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \min$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = x_1 + x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 60, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 32, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
39	$f_1 = 12x_1 + 18x_2 \to \max$ $f_2 = -3x_1 + 2x_2 \to \min$ $f_3 = -7x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 90, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 32, \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 24, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
40	$f_1 = 2x_1 + 5x_2 \to \min$ $f_2 = 5x_1 + 2x_2 \to \max$ $f_3 = x_1 + 2x_2 \to \max$	$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 27, \\ 2x_1 \geq 4, \\ x_2 \geq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Глава 3. ТЕОРИЯ ИГР И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

3.1. Антагонистические игры в информационной безопасности

В управлении любой системой при выработке управляющего воздействия всегда присутствует недостаток информации (по крайней мере, в связи с неполным знанием внешней среды), поэтому решения принимаются в условиях некоторой неопределённости. Крайним случаем такого состояния неопределённости является неопределённость большинства исходных данных.

Неопределённость может проявляться как в реализации управляющих воздействий, так и в преднамеренных действиях злоумышленников или других лиц, от которых зависит функционирование ИС (обслуживающий персонал и т.п.). Также неопределённость затрагивает и цели управления, показатель эффективности достижения которых может быть описан нетривиальным образом.

В отличие от полностью детерминированных задач, задачи с элементами неопределённости, вызванными состоянием системы, не могут быть поставлены однозначно. Но и в этом случае выбор решения должен быть обоснован некоторым количественным анализом.

Специальные математические методы, предназначенные для решения задач в условиях неопределённости, вызванной противоборством сторон, входят в *теорию игр* [12]. В условиях противостояния двух противников, имеющих известные цели и взаимодействующих известными методами, методы теории игр дают возможность нахождения оптимального решения задачи управления ИБ.

В более сложных случаях эти методы позволяют оценить каждое из возможных решений с различных (иногда противоречивых) точек зрения, оценить его преимущества и недостатки и принять, возможно, не единственно правильное, то обоснованное решение.

При выборе решения в условиях неопределённости приходится считаться с тем, что в обосновании решения присутствует субъективность, а значит, существует вероятность принятия ошибочного решения. Поэтому лучшим выходом из данной ситуации является подход к представлению вариантов решения и их возможных последствий в простой и понятной форме, минимизирующей субъективность.

Предмет и задачи теории игр в ИБ

В случаях принятия решений с учётом противоречивых интересов управляемой системы и внешней среды невозможно применить традиционные методы оптимизации. В задаче обеспечения ИБ внешней средой являются, в том числе, ИС злоумышленников. Противоречие между целями управляемой системы (СЗИ) и внешней среды заключается в том, что основная цель СЗИ – обеспечение должного уровня защиты ИР, а внешней среды – нарушение ИБ.

В обычных задачах управления происходит выбор решения одним лицом, принимающим решения (ЛПР). В задачах обеспечения ИБ различного вида ИС решения, оптимальные для одной стороны (стороны ИС), не только не оптимальны, но, наоборот, полностью противоречат целям другой стороны (злоумышленники), поэтому результат решения зависит от всех конфликтующих сторон.

Такой характер задач в ИБ свидетельствует о различных интересах участников информационного взаимодействия.

Теория игр представляет собой часть более общей теории, изучающей процессы принятия оптимальных решений. Она предоставляет формальный язык для описания процессов принятия целенаправленных решений с участием одного или нескольких лиц в условиях неопределённости и конфликта, вызываемого столкновением интересов конфликтующих сторон [12].

Теория игр как раздел математики изучает формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта. При этом под *конфликтом* понимают явление, в котором участвуют различные стороны, наделённые различными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами.

Отдельные математические вопросы, касающиеся конфликтов, рассматривались многими учёными. Систематическая же математическая теория игр была детально разработана американскими учёными Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном в 1944 году как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики. В ходе своего развития теория игр превратилась в общую математическую теорию конфликтов.

В задаче обеспечения ИБ стремление злоумышленника скрыть свои действия приводит в общем виде к неопределённости в принятии решений службой ИБ. И эту неопределённость при принятии решений на основе недостаточных данных о действиях нарушителей ИБ и злоумышленников можно интерпретировать как конфликт.

Целью применения теории игр в ИБ является выработка комплекса рекомендаций по рациональному выбору решений ЛПР в ситуациях конфликта со стороной злоумышленника.

Реальные конфликты трудно поддаются формальному описанию, поэтому любая игра является упрощением исходной задачи, в ней отражаются лишь основные, первостепенные факторы, отражающие суть процесса или явления [12].

В зависимости от того, какими данными располагает исследователь, и какую задачу перед собой ставит, могут быть сформулированы различные теоретико-игровые модели. Различают три основных типа задач в теории игр [12]:

1. Нахождение оптимального исхода в отсутствии коалиций: участники не объединяются между собой с целью получения выигрыша (достижения собственных целей).

2. Нахождение оптимального исхода при фиксированной коалиционной структуре.

3. Нахождение устойчивой коалиционной структуры при заданных правилах принятия решений в коалициях.

Основные понятия и определения

Игрой называют всякую конфликтную ситуацию, изучаемую в теории игр и представляющую собой упрощённую, схематизированную модель. От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что не включает второстепенные, несущественные для ситуации факторы и идёт по определённым правилам, которые в реальной ситуации могут нарушаться [12].

Всякая игра включает в себя три элемента [12]:

– участники игры (игроки),
– правила игры,
– оценка результатов действий игроков.

Игроком (лицом, стороной, или коалицией) называют отдельную совокупность интересов, отстаиваемую в игре. В задаче обеспечения ИБ игроками являются две стороны:

– сторона защиты интересов ИБ (для краткости при дальнейшем рассмотрении материала и задач будем именовать её просто СЗИ),

– сторона нарушения ИБ – случайный нарушитель политики ИБ либо злоумышленник (для краткости будем именовать нарушителем).

Если данные интересы отстаивает несколько участников игры, то они с точки зрения решения задачи выступают одним игроком. Таким образом в СЗИ как единого игрока будем включать всех сотрудников службы обеспечения ИБ, а также технические, программные, аппаратные, физические и прочие СрЗИ. Под нарушителем будем понимать как собственно людей, имеющих интересы получения несанкционированного доступа к защищаемым ИР, так и нарушителей ИБ, действующих по незнанию, без злого умысла, а также их ИС.

Игроков, выступающих с противоположными интересами, формирующих в игре конфликт интересов, называют *противниками*. В задаче обеспечения ИБ противниками являются СЗИ и нарушитель.

В задаче обеспечения ИБ под одной реализацией игры (партией игры) будем понимать функционирование защищаемой ИС в течение определённого периода времени.

Выбор действия (в пределах правил) называют *ходом*. Ходы бывают *личные и случайные*. Личный ход предполагает сознательный выбор того или иного действия, разрешённого правилами игры, в то время как случайный ход не зависит от воли игрока.

В обеспечении ИБ случайными ходами являются:

– все неосознанные, непреднамеренные действия всех нарушителей, кроме злоумышленников

– действия злоумышленников в условиях их полной или подавляющей неопределённости в отношении функционирования механизмов защиты СЗИ.

Стратегией игрока называют совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации [12].

В зависимости от числа стратегий игры делят на *конечные* и *бесконечные*. Игру называют конечной, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий. В противном случае игру называют безконечной [12].

ОС игрока в игре называют такую стратегию, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш в данной игре. Если игра повторяется неоднократно и содержит, кроме личных, ещё и случайные ходы, оптимальная стратегия обеспечивает максимальный средний выигрыш [12].

Игру называют *игрой с нулевой суммой*, если сумма выигрышей всех игроков равна нулю, т.е. каждый игрок выигрывает только за счёт других. Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – называется *антагонистической* [12].

Антагонистические игры

Антагонистической игрой называют систему $G = \langle A, B, H \rangle$, где A, B – некоторые непустые множества стратегий соответственно первого и второго игроков; $H(a,b)$, $a \in A$, $b \in B$ – функция выигрыша игрока A (или, что одно и то же, функция потерь игрока B) [12].

В процессе игры каждый игрок выбирает свои действия, образующие ситуацию (a,b), которая характеризуется выигрышем $H(a,b)$ для первого игрока и в точности равным ему проигрышем второго игрока.

Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называют *матричными играми*. Для описания всех возможных состояний в такой игре достаточно построить двумерную таблицу, называемую *матрицей игры* (МИ). В этой таблице строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго игрока. Элементами МИ служат значения выигрышей первого игрока при выборе обоими игроками соответствующих стратегий.

Антагонистическая игра всегда описывает противоборство двух игроков (A и B), имеющих полностью противоположные интересы. Причём, выигрыш игрока A всегда равен выигрышу игрока B, взятому с обратным знаком (проигрышу). Можно рассматривать антагонистическую игру, в частности с позиции максимизации своего выигрыша игроком A при минимизации игроком B своего проигрыша.

Пусть существует n-возможных стратегий игрока A: A_1, A_2, ..., A_n и m-возможных стратегий игрока B: B_1, B_2, ..., B_m. Такая игра имеет размерность $n \times m$. Обозначим через a_{ij} выигрыш игрока A при выборе им стратегии A_i, а его противником – стратегии B_j. Если для каждой пары стратегий (A_i, B_j) известен выигрыш (или, в частности, средний выигрыш), тогда МИ представляет собой прямоугольную таблицу размера $n \times m$, структура которой показана в общем виде в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Структура матрицы антагонистической игры

стратегии	B_1	B_2	…	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	…	…	…
…	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	…	…	a_{nm}

При наличии полной МИ говорят, что игра приведена к матричной форме. Само по себе такое приведение является непростой, а порой и невыполнимой задачей вследствие огромного множества стратегий. Но всё-таки представляется возможным обобщать некоторые стратегии, близкие по результатам реализации, что позволяет строить МИ приемлемого размера. МИ обозначим $M = \left(a_{ij}\right)$.

Пример 3.1. Игроки A и B одновременно и не располагая информацией о выборе другого игрока выбирают каждый одно из четырёх чисел: 10, 11, 12 или 13. Других чисел для выбора игроками не существует. Если сумма выбранных обоими игроками чисел нечётна, то игрок A выигрывает и его выигрыш равен этой сумме чисел; если же сумма оказывается чётной, то выигрывает игрок B и его выигрыш от игрока A равен этой сумме.

У игрока A есть четыре стратегии:

– A_1 – записать число 10;

– A_2 – записать число 11;

– A_3 – записать число 12;

– A_4 – записать число 13.

Стратегии игрока B:

– B_1 – записать число 10;

– B_2 – записать число 11;

– B_3 – записать число 12;

– B_4 – записать число 13.

Данная антагонистическая игра имеет размерность 4×4. МИ имеет четыре строки и четыре столбца и представлена в таблице 3.2.

Таблица 3.2

МИ в примере 3.1

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-20	21	-22	23
A_2	21	-22	23	-24
A_3	-22	23	-24	25
A_4	23	-24	25	-26

В таблице 3.2 присутствуют как положительные, так и отрицательные элементы. МИ обладает замечательным свойством линейного эквивалентного преобразования: если к каждому элементу МИ добавить одну и ту же константу, то с точки зрения анализа оптимальных стратегий новая матрица будет эквивалентна исходной МИ.

Если в исходной МИ присутствуют отрицательные числа или равные нулю, то линейное эквивалентное преобразование является необходимым первым шагом в процедуре сведения антагонистической игры её к решению в виде ЗЛП.

Выполним такое преобразование: прибавим к каждому элементу значение минимального из них, плюс единица: $\min\limits_{\forall i,j}\left(a_{ij}\right)+1,\ \ i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Тогда все элементы будут гарантированно больше нуля. Преобразованная МИ представлена в таблице 3.3.

Таблица 3.3

Преобразованная МИ в примере 3.1

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	7	48	5	50
A_2	48	5	50	3
A_3	5	50	3	52
A_4	50	3	52	1

Принцип минимакса [12]. Естественный принцип оптимальности для антагонистической игры – принцип минимакса (максимина).

Проанализируем игру, используя преобразованную МИ. Предположим, что игрок *A* выбирает стратегию A_1. Тогда в зависимости от того, какую стратегию выберет противник, выигрыш игрока *A* будет равен 7, 48, 5 либо 50. Худший случай при выборе стратегии A_1 – выигрыш 5. Если же выбрать стратегии A_2 или A_3, то худший случай – выигрыш 3. А при выборе стратегии A_4 худший случай – выигрыш 1.

В дополнительный столбец матрицы (таблица 3.4) запишем минимальные возможные выигрыши для разных стратегий A_i. Очевидно, что игроку *A* следует выбирать ту стратегию, где минимальный возможный выигрыш (независимо от стратегии игрока *B*) оказывается наибольшим. В примере это стратегия A_1. Это значение называют максиминным выигрышем, а также *нижней ценой игры*.

Данное представление применимо в равной мере и к игроку *B*. При выборе им стратегий B_1 или B_2, в худшем для него случае он позволит получить игроку *A* выигрыш 50. А при выборе им стратегий B_3 или B_4, в худшем для него случае выигрыш игрока *A* составит 52. Максимальные значения выигрышей игрока *A* выпишем в виде дополнительной строки МИ (таблица 3.4). Очевидно, что игрок *B* должен выбрать ту стратегию, при которой выигрыш игрока *A* будет меньше других возможных выигрышей: B_1 или B_2. Эти стратегии являются минимаксными и дают *верхнюю цену игры*.

Таблица 3.4

МИ с нижней и верхней ценой в примере 3.1

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	48	5	50	5
A_2	48	5	50	3	3
A_3	5	50	3	52	3
A_4	50	3	52	1	1
β_j	50	50	52	52	

Нижняя цена игры:

$$\alpha = \max_{i=1,\dots,n} \min_{j=1,\dots,m} a_{ij} \qquad (3.1)$$

Верхняя цена игры:

$$\beta = \min_{j=1,\dots,m} \max_{i=1,\dots,n} a_{ij} \qquad (3.2)$$

Принцип минимакса представляет собой такой подход к выбору стратегии, при котором каждый игрок получает минимальный выигрыш, но и минимальный проигрыш.

Данный принцип не является доминирующим при выборе стратегии – его применение зависит от того, есть ли в МИ особая точка.

Игра с точкой равновесия

Точка равновесия (*седловая точка*) в антагонистической игре – это элемент МИ, для которого выполнены два условия: в столбце он максимальный, а в строке – минимальный. Это точка в игре, для которой совпадают нижняя и верхняя цена игры.

Пример 3.2. Рассмотрим антагонистическую игру размерности 4×4, МИ которой представлена в таблице 3.5.

Таблица 3.5

МИ в примере 3.2

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	5	6	5	9	5
A_2	7	7	**6**	8	**6**
A_3	8	6	5	4	4
A_4	8	3	4	7	3
β_j	8	7	**6**	9	

В примере 3.2 выигрыши α и β равны 6: совпадают нижняя и верхняя цена игры. Более того, они указывают на один и тот же элемент МИ.

Понятие «седловая точка» имеет геометрическое представление: точка трёхмерной поверхности, принимающая минимальное значение по одному аргументу (ось OX) и максимальное – по другому (ось OY); третья ось (OZ) является функционалом (рисунок 3.1).

По аналогии элемент a_{23}=6 рассматриваемой МИ в примере 3.2 называют седловой точкой МИ, а об игре говорят, что она имеет точку равновесия.

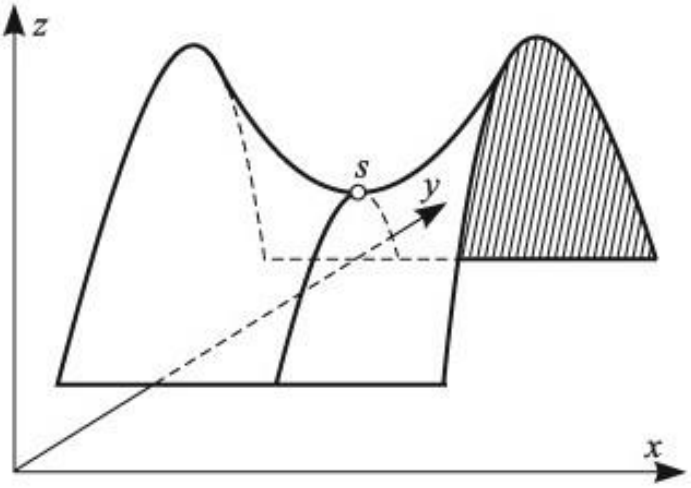

Рисунок 3.1. Поверхность в трёхмерном пространстве с седловой точкой

По МИ из примера 3.2 видно, что игроки должны придерживаться стратегий A_2 и B_3 соответственно. Эти стратегии являются оптимальными в данной игре. При условии многократного повторения партий игры отклонение от данных стратегий будет статистически невыгодно для игрока, допустившего его.

Наоборот, в примере 3.1, где нет точки равновесия, ни одна из стратегий $\left(A_i, B_j\right)$ не будет статистически оптимальной при любой партии. Но в силу итерационности процессов, протекающих в сложных системах управления, в частности в системе обеспечения ИБ стратегии можно чередовать некоторым образом с какими-то вероятностями получения выигрыша для каждой из них.

Применение смешанных стратегий допустимо при условии многократной повторяемости игры. Каждый раз игрок должен выбирать стратегию случайным образом на основе расчёта вероятностей выбора.

Применение смешанных стратегий позволяет реализовать тактику, при которой в каждой партии игроки достоверно не знают выбор конкретной стратегии противником.

3.2. Смешанные стратегии в информационной безопасности

В задачах обеспечения ИБ в силу многообразия ситуаций (наличие большого количества потенциальных угроз, уязвимостей ИС, методов, применяемых злоумышленником) МИ имеет большую размерность и это почти полностью исключает возможность наличия в ней точки равновесия. Применение чистых стратегий как со стороны СЗИ, так и со стороны злоумышленника не позволяет получить оптимальный результат. Оптимальное решение можно получить только чередованием чистых стратегий.

Пример 3.3. Вернёмся к условию из примера 3.1. Пусть игра имеет множество партий. Если игрок *A* выберет, например, стратегию A_1, и будет реализовывать её постоянно, то игрок *B* также постоянно будет выбирать стратегию B_3, в результате чего выигрыш игрока *A* будет равен нижней цены игры: 5.

Если же игрок *A* в одной из партий выберет стратегию A_4, то получит максимально возможный выигрыш 52. Тогда игрок *B* в следующей партии выберет стратегию B_4, уменьшив выигрыш игрока *A* до минимального в игре: 1. И т.д.

Здесь мы видим пример, характерный для любых игр, не имеющих точки равновесия. А именно, игрок, выбирающий детерминированную стратегию, статистически всегда получает меньший результат, чем игрок, который применяет случайный выбор стратегии. Но при этом надо понимать, что изменение выбора стратегии основано на определённых правилах. Рассмотрим их.

Пусть $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ – всё множество стратегий игрока *A*. Для получения максимального среднестатистического выигрыша он должен случайным образом выбирать одну стратегию из всех или из части стратегий (как будет показано в одном из следующих примеров, некоторые стратегии вообще не следует выбирать). Но вероятности выбора некоторой стратегии не должны быть ни одинаковыми, ни случайными, а должны быть вычислены предварительно на основе МИ.

Пусть каждой стратегии назначена рассчитанная некоторым обоснованным образом вероятность её выбора: $p_i \mapsto A_i,\ i = \overline{1,\mathrm{n}}$.

Смешанной стратегией S_A игрока ***A*** называют выбор стратегий $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ с вычисленными на основе МИ вероятностями $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$, сумма которых равна единице: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Чистые стратегии являются частным случаем смешанных.

Смешанные стратегии игрока ***A*** можно представить матрицей из чистых стратегий $A_i,\ i = \overline{1,n}$ и их вероятностей $p_i,\ i = \overline{1,n}$:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & ..., & A_n \\ p_1, & p_2, & ..., & p_n \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Также при перечислении стратегий в порядке нумерации достаточно указать только их вероятности: $S_A = (p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$.

При обоснованном выборе всех вероятностей смешанная стратегия будет оптимальной. При этом выигрыш игрока *A* будет *не меньше* некоторого также однозначно определяемого значения *v*, называемого *ценой игры*. Это значение всегда соответствует условию: $\alpha < v < \beta$.

Аналогично для игрока *B*. Поставим в соответствие каждой стратегии вероятность её выбора: $q_j \mapsto B_j,\ j = \overline{1,m}$. Его оптимальная стратегия может быть представлена в виде:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1, & B_2, & ..., & B_m \\ q_1, & q_2, & ..., & q_m \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

где $q_1,\ q_2,\ ...,\ q_m$ – предварительно рассчитанные вероятности, с которыми игрок *B* использует стратегии $B_j,\ j = \overline{1,\mathrm{m}}$. Сумма вероятностей также равна единице: $\sum_{i=1}^{m} q_j = 1$.

При перечислении стратегий в порядке нумерации достаточно указать только их вероятности: $S_B = (q_1,\ q_2,\ ...,\ q_n)$.

При выборе игроком *B* оптимальной смешанной стратегии выигрыш игрока *A* будет *не больше* цены игры *v*.

Оптимальным решением антагонистической игры в смешанных стратегиях будет пара оптимальных стратегий S_A^*, S_B^*, обладающих свойством равновесия. Это означает, что при следовании любого из игроков этой стратегии, средний выигрыш другого не может быть больше того, который он получит при отступлении от своей оптимальной стратегии. Это значение называют *ценой игры v*.

Справедлива следующая основная теорема теории игр – теорема фон Неймана [12]. *Каждая конечная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, возможно, среди смешанных стратегий*.

Пусть $S_A^* = \left(p_1^*,\ p_2^*,\ ...,\ p_n^*\right)$ и $S_B^* = \left(q_1^*,\ q_2^*,\ ...,\ q_m^*\right)$ – пара оптимальных стратегий игроков *A* и *B*. Если некоторая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, т.е. она может быть выбрана в любой из партий игры, то эта стратегия *активная*.

Справедлива теорема об активных стратегиях [12]: *если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, только при условии, что второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий*.

Решением игры называют такую пару смешанных стратегий, выбор которых на основе рассчитанных вероятностей обеспечивает любой из сторон максимально возможный для неё выигрыш, равный цене игры.

Применение любой из сторон вместо оптимальной стратегии любой другой, при сохранении оптимальной стратегии противником либо оставляет выигрыш первой стороны без изменения, либо уменьшает.

Приведение матричной игры к ЗЛП

Пусть $S_A^* = \left(p_1^*,\ p_2^*,\ ...,\ p_n^*\right)$ – оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Известна МИ. Требуется найти вероятности применения чистых стратегий первого игрока и определить цену игры.

Пусть игрок *B* выбирает стратегию B_1. Тогда средний выигрыш игрока *A* можно записать как средневзвешенное вероятностями значение выигрышей по всем стратегиям:

$$\overline{a_1} = a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + ... + a_{n1} \cdot p_n .$$

Согласно выше изложенным представлениям $\overline{a_1} \geq v$.

При выборе игроком *B* второй стратегии получаем:

$$\overline{a_2} = a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + ... + a_{n2} \cdot p_n \geq v .$$

И в общем виде:

$$\overline{a_j} = a_{1j} \cdot p_1 + a_{2j} \cdot p_2 + ... + a_{nj} \cdot p_n \geq v \tag{3.5}$$

Таким образом можно записать следующую систему из *m*-неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot p_1 + a_{21} \cdot p_2 + ... + a_{n1} \cdot p_n \geq v \\ a_{12} \cdot p_1 + a_{22} \cdot p_2 + ... + a_{n2} \cdot p_n \geq v \\ ... \\ a_{1m} \cdot p_1 + a_{2m} \cdot p_2 + ... + a_{nm} \cdot p_n \geq v \end{cases} \tag{3.6}$$

При этом:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1 \tag{3.7}$$

Введём обозначения управляемых переменных:

$x_1 = \dfrac{p_1}{v}$, $x_2 = \dfrac{p_2}{v}$, ..., $x_n = \dfrac{p_n}{v}$ и перепишем (3.6) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + ... + a_{n1} \cdot x_n \ge 1 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{n2} \cdot x_n \ge 1 \\ ... \\ a_{1m} \cdot x_1 + a_{2m} \cdot x_2 + ... + a_{nm} \cdot x_n \ge 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

А условие (3.7) в виде:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{1}{v} \tag{3.9}$$

По условию задачи требуется получить максимальный выигрыш, следовательно выражение (3.9) минимизируемое.

И тогда общая постановка задачи поиска оптимальной смешанной стратегии в антагонистической игре выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} F = x_1 + x_2 + ... + x_n \to \min \\ a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + ... + a_{n1} \cdot x_n \ge 1 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + ... + a_{n2} \cdot x_n \ge 1 \\ ... \\ a_{1m} \cdot x_1 + a_{2m} \cdot x_2 + ... + a_{nm} \cdot x_n \ge 1 \\ x_i > 0,\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{3.10}$$

Пример 3.4. Найдём оптимальную смешанную стратегию игры со стороны СЗИ, отражающей угрозы злоумышленника. Злоумышленник будет игроком *B* и нападает на игрока *A* (ИС). У стороны *B* имеются в наличии две угрозы ИБ. У стороны *A* имеются четыре СрЗИ. Чтобы цель атаки была достигнута, достаточно, чтобы одна угроза была реализована. Злоумышленник может использовать четыре канала (рисунок 3.2) и через любой из них может реализовать одну или обе угрозы. В простейшем варианте не учитываем силу угрозы и устойчивость СрЗИ и полагаем, что наличие одного СрЗИ в канале не позволяет реализовать ровно одну угрозу.

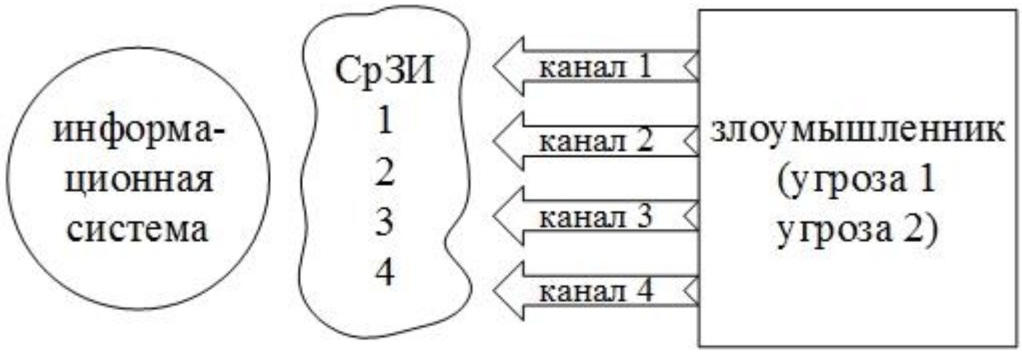

Рисунок 3.2. Общая схема взаимодействия злоумышленника и ИС в примере 3.4

Возможные чистые стратегии стороны *А* таковы:

– A_1 – на каждый из четырёх каналов поставить по одному СрЗИ,

– A_2 – на два из четырёх каналов поставить по два СрЗИ, а остальные два канала оставить незащищёнными,

– A_3 – на один из каналов поставить два СрЗИ, на два других канала поставить по одному СрЗИ и один канал оставить незащищённым,

– A_4 – на один из каналов поставить три СрЗИ и ещё одно СрЗИ – на другой канал, а два оставшихся канала не защищать,

– A_5 – на один из каналов поставить все СрЗИ.

Очевидно, что стратегии A_4 и A_5 при любых действиях противника невыгодны вследствие избыточности СрЗИ на одном канале. Поэтому их не будем включать в построение МИ, а оставим только стратегии A_1, A_2 и A_3.

У стороны *В* есть только две чистые стратегии:

– B_1 – атака реализуется через два разных каналы (два любых канала, т.к. по условию задачи и сами каналы, и СрЗИ, установленные в них, идентичны),

– B_2 – обе угрозы направлены через один канал.

Допустим, сторона *А* применяет стратегию A_1, сторона *В* – стратегию B_1. В этом случае ни одно средство атаки не сможет преодолеть защиту. Выигрыш стороны *А* (вероятность отражения угрозы) равен 1.

Далее, например, выбраны стратегии A_2 и B_1. Тогда при выборе двух любых каналов для размещения СрЗИ, сторона *В* в пяти вариантах из шести возможных преодолевает защиту, реализовав угрозу в незащищённом канале. В качестве примера такого сочетания смотри рисунок 3.3. При таком выборе выигрыш стороны *A* составляет $^1/_6$.

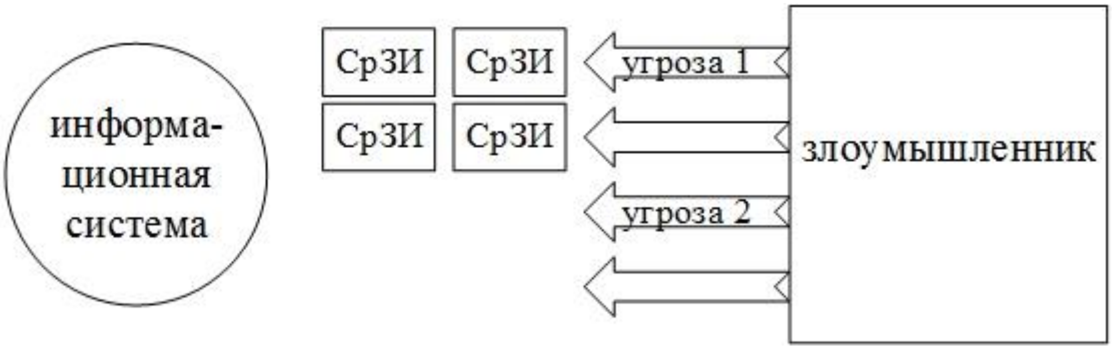

Рисунок 3.3. Вариант использования стратегий A_2 и B_1 в примере 3.4

Аналогично можно определить все значения элементов МИ (таблица 3.6). Нижняя цена игры равна $^1/_4$, верхняя $^1/_2$. Точки равновесия в игре нет, следовательно оптимальное решение является смешанным.

Таблица 3.6

МИ в примере 3.4

стратегии	B_1	B_2	α_i
A_1	1	0	0
A_2	$^1/_6$	$^1/_2$	$^1/_6$
A_3	$^1/_2$	$^1/_4$	$^1/_4$
β_j	1	$^1/_2$	

Для нахождения оптимальной смешанной стратегии построим по МИ из таблицы 3.6 ЗЛП:

$$\begin{cases} F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \\ x_1 + \dfrac{1}{6}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 \geq 1 \\ \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3 \geq 1 \\ x_i > 0,\ i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Решая задачу, например, симплекс-методом, получим:

$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 2,\ x_3 = 0$. При этом $F = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{v} = 2\frac{2}{3}$. Отсюда $v = \frac{3}{8}$, а оптимальные вероятности выбора чистых стратегий стороной A соответственно равны: $p_1 = x_1 \cdot v = \frac{1}{4},\ p_2 = x_2 \cdot v = \frac{3}{4},\ p_3 = x_3 \cdot v = 0$.

Следовательно, при одиночной партии стороне A необходимо выбрать стратегию A_2 (поставить по два СрЗИ на любые два канала). А при многократном повторении игры следует в каждой четвёртой партии использовать стратегию A_1 (поставить по одному СрЗИ на каждый канал), а в остальных – применять стратегию A_2.

Пример 3.5. Найдём оптимальную смешанную стратегию злоумышленника по исходным данным примера 3.4.

МИ, в которой стороной А является злоумышленник, а стороной B – СЗИ, представлена в таблице 3.7.

Таблица 3.7

МИ в примере 3.5

стратегии	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	$^5/_6$	$^1/_2$	0
A_2	1	$^1/_2$	$^3/_4$	$^1/_2$
β_j	1	$^5/_6$	$^3/_4$	

Нижняя цена игры равна $^1/_2$, верхняя $^3/_4$.

Для нахождения оптимальной смешанной стратегии построим по МИ из таблицы 3.7 ЗЛП:

$$\begin{cases} F = x_1 + x_2 \to \min \\ x_2 \ge 1 \\ \frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \ge 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \ge 1 \\ x_i > 0,\ i = \overline{1,2} \end{cases}$$

Решая задачу, получим: $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = 1$. При этом $F = x_1 + x_2 = \frac{1}{v} = \frac{8}{5}$. Отсюда $v = \frac{5}{8}$, а оптимальные вероятности выбора чистых стратегий стороной A соответственно равны: $p_1 = x_1 \cdot v = \frac{3}{8}$, $p_2 = x_2 \cdot v = \frac{5}{8}$.

Следовательно, при разовой игре злоумышленнику выгодно направить обе угрозы в один из каналов, а при многократном повторении он с частотой 3 из 8 будет использовать разные каналы для направления угроз, с частотой 5 из 8 – один из каналов.

3.3. Практическое задание № 7

По вариантам из таблицы 3.8, где задана МИ, выполните следующее:

1. Определите обе граничные цены игры. Установите наличие или отсутствие в игре равновесия в чистых стратегиях.
2. Приведите задачу антагонистической игры к ЗЛП.
3. Разработайте программу и решите ЗЛП симплекс-методом. Определите вероятности выбора чистых стратегий игроками A и B.

Таблица 3.8

Исходные данные для практического задания № 7

№ варианта	Матрица игры					
	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
1	A_1	-20	-18	14	18	10
	A_2	18	-16	19	20	-12
	A_3	15	14	-13	-10	13
	A_4	-10	16	-17	-11	16

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
2	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-20	15	13	13	-15
	A_2	19	15	13	13	-19
	A_3	-11	-15	17	-16	-19
	A_4	16	12	-12	13	10
3	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	14	-16	12	19	11
	A_2	19	-18	-10	-11	15
	A_3	-15	-15	-12	-18	14
	A_4	19	-13	-15	17	-11
4	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-15	13	18	-20	15
	A_2	15	-15	-16	18	12
	A_3	-11	13	15	13	-18
	A_4	-19	-16	-18	-18	-19
5	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-14	12	-14	-17	-18
	A_2	14	-14	13	14	19
	A_3	-12	-20	19	18	-17
	A_4	11	-20	-18	14	13
6	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	19	-17	-15	-17	19
	A_2	10	16	10	14	-17
	A_3	-15	11	-20	13	-11
	A_4	-15	10	-15	10	11

Продолжение таблицы 3.8

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Матрица игры</th></tr>
<tr><td>7</td><td>

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	12	-17	17	16	-15
A_2	-17	19	11	12	-18
A_3	-15	-11	-12	-17	19
A_4	15	-18	-12	20	19

</td></tr>
<tr><td>8</td><td>

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-10	17	17	10	-18
A_2	14	-11	-17	-15	-10
A_3	12	-19	-11	16	-12
A_4	-15	13	-17	-17	10

</td></tr>
<tr><td>9</td><td>

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-12	-16	17	-20	-15
A_2	14	-12	19	17	18
A_3	18	18	-10	14	-20
A_4	12	-10	-17	-10	19

</td></tr>
<tr><td>10</td><td>

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	-20	12	16	19	19
A_2	12	13	-14	-20	-16
A_3	-12	-12	-11	12	19
A_4	-11	14	16	-15	-11

</td></tr>
<tr><td>11</td><td>

стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	11	-12	-13	13	18
A_2	17	15	15	-10	-19
A_3	19	15	20	-19	11
A_4	20	-18	17	15	-11

</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
12	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	19	15	10	19	14
	A_2	15	16	-18	-17	-19
	A_3	-13	20	-14	14	18
	A_4	-11	12	15	-17	-17
13	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-20	19	-11	-11	20
	A_2	19	-11	-19	-18	-15
	A_3	-14	17	11	-14	15
	A_4	16	18	13	-10	-18
14	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-13	17	11	10	17
	A_2	-17	-15	-12	-15	19
	A_3	-19	-13	12	15	-16
	A_4	10	12	15	-15	-11
15	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-17	14	-12	-20	-13
	A_2	16	-12	-10	-10	-15
	A_3	-20	10	14	16	20
	A_4	12	12	17	15	-17
16	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	15	-18	-10	-20	19
	A_2	-19	-17	10	-19	-15
	A_3	-13	12	-19	-11	-16
	A_4	14	-18	12	-13	19

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
17	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-18	17	15	12	-14
	A_2	-17	-18	-12	-14	20
	A_3	-17	12	-16	-11	-18
	A_4	13	-15	11	13	13
18	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-13	-10	-17	20	10
	A_2	-16	-18	-15	-12	-15
	A_3	11	19	10	-14	-17
	A_4	-13	-13	13	13	-15
19	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	13	15	-17	14	13
	A_2	14	-17	-19	-11	-14
	A_3	-19	17	17	15	-10
	A_4	10	12	20	16	-12
20	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	10	-15	14	-14	-14
	A_2	-10	-17	-17	-14	19
	A_3	12	12	-18	-13	18
	A_4	-10	-15	10	14	16
21	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-13	-11	-16	-18	15
	A_2	12	10	-13	-14	19
	A_3	10	18	11	15	14
	A_4	18	11	-15	10	18

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
22	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	18	-18	16	15	16
	A_2	-18	12	10	13	-13
	A_3	14	-19	-10	-10	14
	A_4	-20	-14	-11	11	-17
23	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-20	-14	16	13	-19
	A_2	-13	11	-10	18	20
	A_3	13	-12	13	-15	15
	A_4	-14	-14	-11	12	-19
24	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-17	-19	10	15	14
	A_2	13	-10	18	-17	-13
	A_3	-20	17	-13	-14	13
	A_4	10	12	-15	12	-16
25	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-19	-11	-19	-18	13
	A_2	12	-13	12	-20	15
	A_3	12	10	-12	-16	18
	A_4	-15	-19	15	-12	-12
26	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-20	-20	-15	12	20
	A_2	-11	11	-15	18	-16
	A_3	-17	-16	-19	14	15
	A_4	18	14	20	-12	-14

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
27	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	13	16	10	17	-18
	A_2	-15	12	19	-17	15
	A_3	-11	-10	12	-16	-10
	A_4	10	11	-17	-17	-11
28	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	19	15	17	13	14
	A_2	-19	-20	12	15	-20
	A_3	-11	-12	-13	-16	-16
	A_4	19	12	-11	-19	-15
29	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	20	-14	12	-20	11
	A_2	10	19	-10	-16	-18
	A_3	-11	-11	-20	-11	15
	A_4	15	-19	-16	-10	-10
30	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	13	-14	12	19	-19
	A_2	13	-20	-19	-13	-10
	A_3	-14	12	-18	-12	13
	A_4	20	15	10	-15	19
31	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-19	-13	11	-20	-14
	A_2	10	20	-18	11	17
	A_3	16	-17	-17	20	12
	A_4	-17	-10	12	20	-13

Продолжение таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
32	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	15	18	12	-18	-13
	A_2	-15	-19	17	-15	-15
	A_3	-18	-11	-10	13	10
	A_4	11	14	11	10	-12
33	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	20	20	11	-18	17
	A_2	14	15	-20	-14	-12
	A_3	-14	-11	-17	20	10
	A_4	-10	10	-11	16	-13
34	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	12	-14	-11	14	19
	A_2	17	-17	-11	16	16
	A_3	-17	17	-11	12	12
	A_4	-15	19	20	-19	20
35	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	15	-12	-17	10	14
	A_2	-20	-16	13	13	10
	A_3	13	-19	12	-14	19
	A_4	-17	13	-18	14	18
36	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-17	-14	-14	-11	15
	A_2	15	11	-14	-16	17
	A_3	16	17	-12	11	12
	A_4	13	13	20	17	19

Окончание таблицы 3.8

№ варианта	Матрица игры					
37	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	16	20	19	17	18
	A_2	-12	12	13	-13	-17
	A_3	18	-12	11	10	19
	A_4	-17	11	20	-16	15
38	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-11	-12	-20	13	-19
	A_2	17	10	15	-13	19
	A_3	-15	-11	-16	-10	18
	A_4	-15	-10	-18	-15	15
39	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	-12	-15	-13	-14	10
	A_2	15	12	-15	-14	19
	A_3	-10	18	14	-15	12
	A_4	-18	17	-12	-18	10
40	стратегии	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
	A_1	14	-17	-13	17	-11
	A_2	18	-10	-17	11	-12
	A_3	-18	19	-19	-19	20
	A_4	-17	-18	-15	-17	15

3.4. Общая постановка и классификация задач принятия решений

В ТПР процесс принятия решения рассматривается, как процесс преобразования информации, включающий следующие этапы [1]:

– содержательная постановка задачи,
– формирование перечня возможных действий (альтернативных решений) и их последствий,
– выбор альтернативного решения,
– анализ результатов принятого решения.

В задачах управления сложными системами, где принятое решение корректирует (сужает) множество альтернатив и уточняет условие задачи принятия решения (ЗПР) процесс принятия решений состоит из отдельных итераций.

В самом общем виде ЗПР, как и любая задача управления должна быть сформулирована в терминах ЦФ и ограничений. Цель в ЗПР описывает требуемое состояние ОУ. Практически ЗПР весьма многообразны, что приводит и к разнообразию видов общей постановки задачи.

Ограничения в ЗПР включают множество состояний объекта и множество процедур, переводящих объект из одного состояния в другое. Построение модели ЗПР представляет собой формальное описание средств достижения целей, их результатов, а также взаимосвязей решений и результатов.

Существуют общие подходы к формализации постановки ЗПР. Исходными данными для них являются два множества Ω и U, первое из которых содержит альтернативные решения (альтернативы), а второе – результаты (исходы) решения ЗПР. Тогда ЗПР состоит в выборе такой альтернативы из первого множества $x \in \Omega$, приводящей к некоторому исходу (результату) из второго множества $u \in U$, эффективность которого, как в любых задачах управления, представляет собой функцию соответствия получаемого результата поставленной цели.

Формализация постановки ЗПР предполагает обязательное выполнение следующей последовательности шагов [1]:

1) формализация цели,
2) построение формального описания универсального множества всех возможных в различных реализациях данной ЗПР альтернативных решений Ω_u,

3) анализ множества Ω_u и выделение из него подмножества допустимых, в соответствие с ограничениями конкретной реализации ЗПР, альтернатив $\Omega \subseteq \Omega_u$,

4) построение формального описания множества исходов ЗПР U,

5) установление взаимосвязи между множествами Ω и U,

5) построение формальной процедуры выбора решения из множества альтернатив $x \in \Omega$.

ЗПР по **первому** классификационному признаку – ***кратности принятия решений*** – подразделяют на два типа:

– задачи с однократным выбором x из множества Ω,
– задачи с итеративным выбором x из множества Ω, сужаемого после предыдущей итерации.

Более широкое распространение задач первого типа обусловлено тем, что, как правило, множества U и Ω жёстко фиксированы.

Первостепенное значение для достижения поставленных целей управления в любой ЗПР имеет процесс формирования множества альтернатив, поскольку полнота данного множества гарантирует участие в выборе всех потенциально правильных альтернатив.

В процессе принятия решения участвуют [1]:

– ЛПР;
– эксперты;
– консультанты.

Лицом, принимающим решения (ЛПР), называют человека, имеющего цель управления, являющегося компетентным специалистом в своей области, имеющего необходимые полномочиями для осуществления выбора управляющего воздействия, и принимающего окончательное либо промежуточное решение. ЛПР несёт полную либо частичную ответственность за последствия своего выбора.

В задачах обеспечения ИБ таким лицом выступает специалист по ИБ, являющийся на предприятии руководителем или ведущим сотрудником службы ИБ.

Для формальной постановки ЗПР необходимо получить от ЛПР информацию о его предпочтениях в выборе решений, т.е. о совокупности его знаний (представлений) о задаче. Эти знания, как правило, не структурированы, но определяются положительными или отрицательными свойствами различных альтернатив.

В задачах обеспечения ИБ в предпочтениях ЛПР изначально заложена неопределённость, обусловленная широтой его знаний в области ИБ, опытом работы, количеством и видами выявленных и пресечённых инцидентов ИБ. Информацию о предпочтениях ЛПР используют на всех этапах формализации и решения ЗПР.

Эксперт в ТПР это, с одной стороны специалист в области решения задачи, а с другой – человек, который собирает и структурирует информацию, необходимую для формализации ЗПР. Эксперт не несёт ответственность за выбор ЛПР.

Экспертом в задаче обеспечения ИБ выступает сотрудник службы ИБ, выполняющий конкретные функции обеспечения ИБ определённых видов ИР, либо конкретной части ИС.

Получаемую от экспертов информация используют для описания исходных множеств и установления их взаимосвязи.

Консультантом называют специалиста по ТПР, который формализует ЗПР, разрабатывает алгоритм принятия решений, организует работу экспертов и ЛПР. Консультант не обязан иметь представления в области решения задачи, но имеет знания в области постановки и формализации ЗПР – это исключительно технический специалист.

В качестве ЛПР может выступать не один человек, а целая группа специалистов, выполняющих функции ЛПР в процессе принятия решений. Поэтому по **второму** классификационному признаку – ***типу участия ЛПР в процессе принятия решения*** – могут быть выделены следующие классы ЗПР [1]:

– Индивидуальное принятие решений. На различных этапах принятия решения участвует единственное ЛПР, которое несёт полную ответственность за принимаемое решение.

– Коллективное принятие решений. В этом случае имеет место многоэтапный выбор. На различных этапах осуществляется выбор, сужающий допустимое множество альтернатив Ω различными лицами. Окончательный выбор осуществляет единственное ЛПР, в соответствии с его целью.

– Коллегиальное принятие решений. Здесь ставится задача выработки согласованного решения на основе индивидуальных выборов многих лиц, преследующих собственные цели. В этом случае нет главного ЛПР, а требуется найти наиболее справедливое решение, наилучшим образом удовлетворяющее целям (часто противоречивым) различных ЛПР.

Формализация ЦФ во всех трёх перечисленных классах ЗПР сталкивается с неопределённостью индивидуальных предпочтений ЛПР. Но если в ЗПР первого класса необходимо формализовать предпочтения единственного ЛПР, то в задачах второго и третьего классов – нескольких ЛПР. В ЗПР третьего класса также присутствует неопределённость согласования индивидуальных предпочтений ЛПР.

Сложность структуры задач третьего класса требует их декомпозиции к задачам первого класса.

ТПР классифицирует ЗПР по **третьему** классификационному признаку: ***степени структурированности***. Можно выделить хорошо структурированные и слабоструктурированные ЗПР. Первыми являются такие задачи, в которых на этапах постановки практически нет неопределённостей в цели и во взаимосвязи исходных множеств альтернатив и результатов, поскольку все функциональные зависимости в них выражены числами или функционалами, количественные значения которых можно найти в процессе решения задачи.

Слабоструктурированные – те задачи, в которых на всех этапах решения кроме количественных элементов присутствуют качественные. Уровень неопределённости в таких задачах на последних этапах принятия решения остаётся высоким.

Исторически применение методов ТПР было ориентировано на более простые по структурированности задачи первого типа. Для решения таких задач наилучшим образом подходят методы исследования операций. В таких задачах на этапе постановки ЛПР с помощью консультанта структурирует задачу. Этапы построения модели ЗПР, сбора информации от экспертов и определения количественных показателей в задаче реализуются без непосредственного участия ЛПР, но на их основе ЛПР делает выбор решения.

В задачах второго типа структурированности ЛПР принимает непосредственное участие в процессе принятия решения на всех его этапах.

Используя **четвёртый** классификационный признак – ***тип зависимости исходов от альтернатив***, – получим следующие классы ЗПР [1]:

1) Детерминированные ЗПР. Эти задачи характеризуются жёсткой статичной взаимосвязью между каждой альтернативой и единственным следующим за её выбором исходом. Т.е. имеется такая функциональная зависимость исходов от альтернатив, которую можно выразить математически.

2) ЗПР в стохастических условиях, когда каждая альтернатива может привести к одному из нескольких исходов. А каждый из исходов характеризуется вероятностью наступления. Зависимость исходов от альтернатив является вероятностной.

Для любого ОУ эффект от принятия решения определяется, прежде всего, двумя факторами:

– эффект от разового (однократного) выбора в ЗПР,
– эффект от регулярности принятия решений на данном ОУ.

Следовательно **пятым** классификационным признаком ЗПР будет ***регулярность ЗПР***. Можно обозначить три класса задач по этому признаку:

1. Уникальные задачи. Это очень редкие, всегда слабоструктурированные задачи, не имеющие аналогов вообще или имеющие аналоги только в части общей постановки и структуры ограничений в задаче.

В ИБ к таким задачам относят научно-исследовательские задачи, ставящие целью выявление закономерностей в процессах обеспечения ИБ. По регулярности это однократно решаемые задачи.

2. Специфические задачи. Это более распространённые, но слабоструктурированные задачи, имеющие известные аналоги, но при этом, каждая реализация задачи требует учёта всех особенностей ОУ.

К данному классу задач в ИБ относят такие задачи, как определение основных проектных решений по защите информации, распределение ресурсов СЗИ и т.п. Решение таких задач происходит на одном объекте неоднократно, но период повторения таких задач составляет от одного до нескольких лет, что, безусловно приводит к тем существенным изменениям в ИС, которые приходится учитывать.

3. Типовые задачи. Это всегда хорошо структурированные задачи, имеющие известные аналоги, а также и значительный опыт их решения на данном ОУ и в сходных условиях.

В качестве примеров таких задач в области обеспечения ИБ можно привести задачи принятия решения системным администратором, диагностирование, тестирование, контроль действий пользователей и т.п. Частота решения таких задач варьируется от нескольких раз в день до одного раза в месяц в одной ИС. Также можно отметить, что все возможные изменения (условия принятия решений) незначительны и потенциально известны.

Наличие разработанной для некоторой типовой ЗПР адекватной модели, которая учитывает возможность незначительных изменений в ОУ, позволяет автоматизировать ЗПР. Широко известны автоматизированные и экспертные системы, применяя которые, можно эффективно решить задачи выбора. В области обеспечения ИБ такими системами являются информационно-аналитические системы безопасности.

Для решения специфических задач применение автоматизированных систем не даёт такого эффекта в силу изменчивости структуры и особенностей ОУ и слабой структурированность таких ЗПР. Применением какого-либо одного математического метода для решения таких задач невозможно. В такой ситуации наиболее продуктивен адаптивный подход, который предполагает использование общей структуры решения ЗПР с корректировкой модели ОУ и математических соотношений в задаче.

Решение уникальных задач возможно только путём применения всех перечисленных подходов совместно с системным анализом. Эффективное решение таких задач невозможно без качественной декомпозиции исходной задачи на ряд задач, имеющих аналоги в классах специфических и типовых задач.

Шестым классификационным признаком ЗПР будет ***тип цели***. ЗПР разделяют на *задачи выбора* и *задачи оценивания*. Вторые по получаемому результату относят к более общей группе задач классификации. Для таких задач определено разбиение множества альтернативных решений Ω на непересекающиеся классы $\Omega_i \left(\bigcup \Omega_i = \Omega, \bigcap \Omega_i = \varnothing \right)$ и задана некоторая альтернатива $x \in \Omega$. Постановка задачи оценивания требует определить, к какому классу Ω_i относится рассматриваемая альтернатива x.

В качестве примера такой задачи в ИБ можно назвать задачу диагностирования СЗИ.

В задачах первого типа цели необходимо произвести более глубокие действия с множеством альтернатив, а именно, построить такое формальное описание множества Ω_u, которое позволит формализовать ЦФ, выделить область допустимых альтернативных решений $\Omega \subseteq \Omega_u$ и осуществить из Ω выбор единственного или нескольких лучших решений.

При принятии практического решения ЗПР могут быть комбинированными, например, на первом этапе они представляют собой задачу второго типа (оценивание), а на втором – задачу первого типа (выбор лучшего варианта из возможных).

И, наконец, **седьмой** классификационный признак – *тип представления результатов*. Задачи оценивания по данному признаку подразделяют на две группы:

– задачи с простым представлением результата,
– задачи с представлением результата и прогнозированием.

Во втором классе с применением методов регрессионного и корреляционного анализа и анализом чувствительности решения результат оценивания дополняют прогнозом его изменения при некоторых отклонениях в ограничениях задачи.

Задачи выбора по типу представления результатов подразделяют на три группы:

– задачи выбора из Ω единственного лучшего решения x,
– задачи выбора заданного числа решений $X \subseteq \Omega$,
– задачи выбора и упорядочения по предпочтительности (ранжирования) заданного числа решений.

Наиболее распространена задача первого класса – выбор единственного решения.

3.5. Функции выбора в задачах принятия решений

Основные положения

Язык функций выбора описывает свойства, которыми должен обладать рациональный выбор на различных взаимосвязанных множествах альтернатив. Т.е. на различных (как правило, непересекающихся) допустимых множествах альтернатив Ω, входящих в универсальное множество Ω_u. Множество Ω называют *предъявлением* (множеством вариантов, предъявленных для выбора). В результате решения задачи выбора из множества Ω выделяют некоторое подмножество X лучших альтернатив.

Отображение $C:\Omega\to\Omega$, ставящее в соответствие множеству Ω подмножество $X=C(\Omega)\subseteq\Omega$ выбираемых альтернатив, называют *функцией выбора* (ФВ).

В конкретной ситуации (при конкретном предъявлении Ω) выбор той или иной альтернативы не всегда может быть логически обоснован, даже при всех известных выборах в других ситуациях, связанных с данной (при других предъявлениях $\Omega\subseteq\Omega_u$).

Язык ФВ позволяет сравнивать различные механизмы выбора и устанавливать их эквивалентность (что может быть использовано для упрощения механизмов), и полезен при построении сложных механизмов выбора из более простых.

Если ФВ определена на всех наборах подмножеств из Ω_u, то её называют *полной*. В реальных задачах часто структурные особенности множества Ω_u таковы, что предъявлениями могут быть не все произвольные подмножества из Ω_u (объективная взаимосвязь вариантов решения задачи).

Множество Σ, в которое входят различные подмножества из Ω_u и на котором определена некоторая ФВ, называют *множеством допустимых предъявлений*, а такую ФВ называют *частичной*.

ФВ может быть задана:

– перечислением (таблицей, в которой для каждого предъявления Ω приведены множества $C^{+}(\Omega)$ и $C^{-}(\Omega)$ принятых и отвергнутых альтернатив),

– набором свойств,

– механизмом выбора, под которым понимают пару (σ,π), где σ – структура на Ω_u, а π – правило выбора, указывающее, каким образом из Ω на основе структуры σ выбирают $C(\Omega)$,

– с помощью некоторой комбинации данных способов.

При описании механизма выбора кроме языка ФВ используют другие языки из ТПР: язык бинарных отношений, язык критериев, язык математического программирования.

Примеры ФВ:

– Выбор по скалярному критерию $f(x)$ альтернативы $x\in\Omega$:

$$C(\Omega)=\{x\in\Omega \mid x=\arg\max_{\Omega} f(x)\} \tag{3.11}$$

– Многокритериальный выбор по линейной свертке критериев $f^0(x)=\sum_i w_i f_i(x)$, где w_i – веса критериев:

$$C(\Omega)=\{x\in\Omega \mid x=\arg\max_{\Omega} f^0(x)\} \tag{3.12}$$

– Выбор по доминированию, определяемый бинарным отношением *R:*

$$C(\Omega)=\{x\in\Omega \mid \forall y\in\Omega[xRy]\} \tag{3.13}$$

– Выбор по блокировке, определяемый бинарным отношением *R:*

$$C(\Omega)=\{x\in\Omega \mid \forall y\in\Omega\lfloor x\overline{R}y\rfloor\} \tag{3.14}$$

– Многокритериальный выбор по Парето, где $x=(x_1,x_2,...x_m)$ – векторная оценка альтернативы $x\in\Omega$:

$$C(\Omega)=\{x\in\Omega \mid \forall y\in\Omega\lfloor\forall i=\overline{1,m}\,[x_i\geq y_i]\rfloor\} \tag{3.15}$$

К непосредственному табличному описанию ФВ, как правило, прибегают в случаях, когда не определена компактная запись зависимости выбора от предъявления. Компактная запись возможна в двух случаях: когда известен механизм, реализующий выбор и/или когда известен набор условий, описывающих рациональный выбор.

Рассмотрим характеристические свойства ФВ.

ФВ $C(\Omega)$ удовлетворяет характеристическому условию наследования (Н), если:

$$\Omega_1\subseteq\Omega \;\Rightarrow\; C(\Omega_1)\supseteq C(\Omega)\cap\Omega_1 \tag{3.16}$$

ФВ $C(\Omega)$ удовлетворяет характеристическому условию отбрасывания (О) (независимости от отвергнутых альтернатив), если:

$$C(\Omega)\subseteq\Omega_1\subseteq\Omega \;\Rightarrow\; C(\Omega_1)=C(\Omega) \tag{3.17}$$

ФВ $C(\Omega)$ удовлетворяет характеристическому условию согласия (С), если:

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2 \;\Rightarrow\; C(\Omega_1)\cap C(\Omega_2)\subseteq C(\Omega) \tag{3.18}$$

Утверждение. Характеристические свойства (условия) (Н), (О), (С) независимы в совокупности.

Из утверждения следует, что среди множества *S* всех возможных ФВ можно выделить восемь областей:

$\mathrm{H} \cap \mathrm{C} \cap \mathrm{O}$,
$\mathrm{H} \cap \mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{O}}$,
…
$\overline{\mathrm{H}} \cap \overline{\mathrm{C}} \cap \overline{\mathrm{O}}$,

(через $\overline{\mathrm{H}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{O}}$ обозначены дополнения областей Н, С, О соответственно) таких, что они и их пересечения могут использоваться в качестве основы для классификации ФВ и соответствующих им механизмов.

Эти области будем называть фундаментальными.

Аппроксимация функций выбора

Определение. Под декомпозицией ФВ будем понимать представление ФВ из одного класса функциями других, более простых классов. При этом исходную ФВ называют композицией составляющих.

Введем ещё одно характеристическое условие, называемое условием константности (К), которое для функций $C(\Omega)$ выглядит следующим образом:

$$\left(\Omega' \subseteq \Omega,\ \ \Omega' \cap C(\Omega) \neq \varnothing \vee C(\Omega) = 0\right)\ \Rightarrow\ C(\Omega') \cap C(\Omega) \qquad (3.19)$$

Обозначим через K_0 все функции непустого выбора, удовлетворяющие условию (К). Справедливо следующее утверждение: для любой ФВ $C(\Omega)$, удовлетворяющей характеристическому свойству наследования (Н) существуют такие K_0, $\Omega_i \subseteq \Omega_u$, $C_i(\Omega) \in K_0$, $i = \overline{1,k}$, что имеет место разложение:

$$C(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{k} \left[\Omega_i \cap C_i(\Omega)\right] \qquad (3.20)$$

В частности, если $C(\Omega)$ – совокупно экстремальная ФВ, определяемая:

$$C(\Omega) = \{x \in \Omega \mid \exists i \in \{1,\ldots,m\} \mid \forall y \in \Omega[x_i \geq y_i]\} \qquad (3.21)$$

а $C_i(\Omega)$ – ФВ, порождаемая линейными порядками, то:

$$C(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{k} C_i(\Omega) \qquad (3.22)$$

Для большинства функций из удовлетворяющих условию Н число используемых отношений экспоненциально растёт с ростом числа альтернатив. Это означает, что доказательство справедливости тех или иных декомпозиций ФВ из определённых классов ещё не говорит о возможности конструктивной реализаций их представлений. Для оценки практической реализуемости декомпозиций необходимо дополнить исследования о существовании различных представлений ФВ фиксированных классов оценкой их сложности.

3.6. Практическое задание № 8

Ниже по вариантам дано описание некоторой ситуационной задачи в рамках обеспечения ИБ. Выполните следующее:

1. Постройте МИ.
2. Приведите задачу антагонистической игры к ЗЛП.
3. Разработайте программу и решите ЗЛП симплекс-методом. Определите вероятности выбора чистых стратегий игроками *A* и *B*.
4. Ответьте на поставленные в задаче вопросы.

Вариант № 1.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел исследований, кабинет руководителя, кабинет службы безопасности, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,34; у отдела исследований с вероятностью 0,12; у кабинета руководителя с вероятностью 0,16; у кабинета службы безопасности с вероятностью 0,4; у бухгалтерии с вероятностью 0,3; у склада с вероятностью 0,2.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наибольший возможный успех злоумышленника? Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным в серверную? В какой из кабинетов наиболее вероятно он проникнет?

Вариант № 2.

Группа из пяти нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую четырьмя сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проник как минимум один нарушитель, а через П2 как минимум двое. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять на задержание по два человека к каждому проходу? Кто статистически больше нейтрализует противников? С какой частотой нарушителям следует находиться у одного прохода втроём, а у другого – вдвоём?

Вариант № 3.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,9, 0,4 и 0,2; при использовании П2 − 0,3, 0,6 и 0,8; при использовании П3 − 0,5, 0,7 и 0,2.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 4.

Производственное предприятие имеет десять производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 4 условных единицы. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

А1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 60.000 условных единиц.

А2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 40.000 условных единиц.

А3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 25.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.9.

Таблица 3.9

Исходные данные для варианта № 4

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
А1	27	27	27
А2	25	21	15
А3	23	11	5

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 5.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из двух ИС. СЗИ обладает тремя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,4, а во второй равна 0,6.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на обе ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства во второй ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу во вторую ИС?

Вариант № 6.

В ИС можно использовать два протокола обмена информацией между сотрудниками. За контрольный период необходимо произвести 1500 операций передачи данных. При использовании злоумышленниками первого средства перегрузки системы передачи данных для передачи данных по первому протоколу требуется 20 единиц времени на одну операцию, а по второму – 10. Если же злоумышленники используют средство перегрузки второго типа, то на одну операцию по первому протоколу требуется 12 единиц времени, а по второму – 30.

Опишите ситуацию как антагонистическую игру.

Какова оптимальная стратегия передачи данных, чтобы суммарное время выполнения всех операций было минимальным при условии:

– полного отсутствия информации о том, какое средство будут использовать злоумышленники,

– если злоумышленники с равной вероятностью будут использовать первое или второе средство.

Вариант № 7.

Служба охраны предприятия состоит из двух сотрудников. Предприятие состоит из двух зон: А и Б. Также имеется помещение службы охраны, в котором находится система теленаблюдения за обеими зонами. В каждой из двух зон может оказаться посторонний. Любой из охранников может находиться в любой из зон, а также в помещении охраны. Известны вероятности обнаружения постороннего в каждой зоне при условии, что охранник находится в фиксированном месте (зона А, Б или Т) (таблица 3.10).

Таблица 3.10

Исходные данные для варианта № 7

	Место нахождения охранника		
Место нахождения постороннего	А	Б	Т
А	0,4	0,1	0,3
Б	0,2	0,7	0,5

Так как охранников двое, то они могут находиться в одном и том же месте или в разных. Для каждой из ситуаций необходимо вычислить вероятность обнаружения постороннего в каждой зоне и построить на её основе МИ. Определите, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях. Найдите оптимальные (возможно, смешанные) стратегии игроков. Вычислите цену игры.

Вариант № 8.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел исследований, кабинет руководителя, кабинет службы безопасности, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,42; у отдела исследований с вероятностью 0,16; у кабинета руководителя с вероятностью 0,12; у кабинета службы безопасности с вероятностью 0,5; у бухгалтерии с вероятностью 0,25; у склада с вероятностью 0,15.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наибольший возможный успех охранника?

Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным в кабинет службы безопасности? В какой из кабинетов наименее вероятно он проникнет?

Вариант № 9.

Группа из четырёх нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую тремя сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проник как минимум один нарушитель, а через П2 как минимум двое. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять два человека к одному из мест проникновения? Кто в среднем проиграет? С какой частотой нарушителям следует находиться у каждого прохода вдвоём?

Вариант № 10.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,8, 0,5 и 0,15; при использовании П2 − 0,35, 0,55 и 0,75; при использовании П3 − 0,55, 0,65 и 0,2.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 11.

Производственное предприятие имеет пять производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 4 условных единицы. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

A1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 35.000 условных единиц.

A2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 25.000 условных единиц.

A3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 15.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.11.

Вариант № 12.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из трёх ИС. СЗИ обладает тремя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,3, во второй равна 0,4, а в третьей равна 0,5.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на все ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства в третьей ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу в первую ИС?

Таблица 3.11

Исходные данные для варианта № 11

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
A1	25	25	25
A2	23	18	10
A3	22	8	5

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 13.

В ИС можно использовать три протокола обмена информацией между сотрудниками. За контрольный период необходимо произвести 2500 операций передачи данных. При использовании злоумышленниками первого средства перегрузки системы передачи данных для передачи данных по первому протоколу требуется 15 единиц времени на одну операцию, по второму – 10, а по третьему – 12. Если же злоумышленники используют средство перегрузки второго типа, то на одну операцию по первому протоколу требуется 10 единиц времени, по второму – 25, а по третьему – 14.

Опишите ситуацию как антагонистическую игру.

Какова оптимальная стратегия передачи данных, чтобы суммарное время выполнения всех операций было минимальным при условии:

– если злоумышленники с вероятностью вдвое больше будут использовать первое средство, чем второе,

– если злоумышленники с равной вероятностью будут использовать первое или второе средство.

Вариант № 14.

Служба охраны предприятия состоит из двух сотрудников. Предприятие состоит из двух зон: А и Б. Также имеется помещение службы охраны, в котором находится система теленаблюдения за обеими зонами. В каждой из двух зон может оказаться посторонний. Любой из охранников может находиться в любой из зон, а также в помещении охраны. Известны вероятности обнаружения постороннего в каждой зоне при условии, что охранник находится в фиксированном месте (таблица 3.12).

Таблица 3.12

Исходные данные для варианта № 14

	Место нахождения охранника		
Место нахождения постороннего	А	Б	Т
А	0,30	0,20	0,25
Б	0,22	0,65	0,52

Так как охранников двое, то они могут находиться в одном и том же месте или в разных. Для каждой из ситуаций необходимо вычислить вероятность обнаружения постороннего в каждой зоне и построить на её основе МИ. Определите, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях. Найдите оптимальные (возможно, смешанные) стратегии игроков. Вычислите цену игры.

Вариант № 15.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел продаж, кабинет руководителя, кабинет охраны, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,25; у отдела продаж с вероятностью 0,20; у кабинета руководителя с вероятностью 0,1; у кабинета охраны с вероятностью 0,7; у бухгалтерии с вероятностью 0,2; у склада с вероятностью 0,1.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наибольший возможный успех злоумышленника? Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным на склад? В какой из кабинетов наименее вероятно он проникнет?

Вариант № 16.

Группа из шести нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую пятью сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проникло как минимум два нарушителя, а через П2 – как минимум три. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять два человека к одному из мест проникновения? Кто в среднем выигрывает? С какой частотой нарушителям следует находиться у каждого прохода втроём?

Вариант № 17.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,1; при использовании П2 − 0,3, 0,5 и 0,65; при использовании П3 − 0,5, 0,6 и 0,2.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 18.

Производственное предприятие имеет двадцать производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 5 условных единиц. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

А1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 110.000 условных единиц.

А2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 80.000 условных единиц.

А3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 50.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.13.

Таблица 3.13

Исходные данные для варианта № 18

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
A1	35	35	35
A2	30	25	20
A3	25	15	10

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 19.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из трёх ИС. СЗИ обладает четырьмя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,25, во второй равна 0,35, а в третьей равна 0,55.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на все ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства во второй ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу в третью ИС?

Вариант № 20.

В ИС можно использовать три протокола обмена информацией между сотрудниками. За контрольный период необходимо произвести 2000 операций передачи данных. При использовании злоумышленниками первого средства перегрузки системы передачи данных для передачи данных по первому протоколу требуется 25 единиц времени на одну операцию, по второму – 15, а по третьему – 18. Если же злоумышленники используют средство перегрузки второго типа, то на одну операцию по первому протоколу требуется 15 единиц времени, по второму – 30, а по третьему – 16.

Опишите ситуацию как антагонистическую игру.

Какова оптимальная стратегия передачи данных, чтобы суммарное время выполнения всех операций было минимальным при условии:

– если злоумышленники с вероятностью втрое больше будут использовать второе средство, чем первое,

– если злоумышленники с равной вероятностью будут использовать первое или второе средство.

Вариант № 21.

Служба охраны предприятия состоит из двух сотрудников. Предприятие состоит из двух зон: А и Б. Также имеется помещение службы охраны, в котором находится система теленаблюдения за обеими зонами. В каждой из двух зон может оказаться посторонний. Любой из охранников может находиться в любой из зон, а также в помещении охраны. Известны вероятности обнаружения постороннего в каждой зоне при условии, что охранник находится в фиксированном месте (зона А, Б или Т) (таблица 3.14).

Таблица 3.14

Исходные данные для варианта № 21

	Место нахождения охранника		
Место нахождения постороннего	А	Б	Т
А	0,45	0,22	0,35
Б	0,22	0,65	0,60

Так как охранников двое, то они могут находиться в одном и том же месте или в разных. Для каждой из ситуаций необходимо вычислить вероятность обнаружения постороннего в каждой зоне и построить на её основе МИ. Определите, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях. Найдите оптимальные (возможно, смешанные) стратегии игроков. Вычислите цену игры.

Вариант № 22.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел исследований, кабинет руководителя, кабинет службы безопасности, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,43; у отдела исследований с вероятностью 0,21; у кабинета руководителя с вероятностью 0,20; у кабинета службы безопасности с вероятностью 0,45; у бухгалтерии с вероятностью 0,35; у склада с вероятностью 0,21.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наименьший возможный успех злоумышленника? Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным в кабинет руководителя? В какой из кабинетов наиболее вероятно он проникнет?

Вариант № 23.

Группа из пяти нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую четырьмя сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проник как минимум один нарушитель, а через П2 как минимум двое. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять три человека к одному из мест проникновения? Кто больше в среднем нейтрализует противников? С какой частотой нарушителям следует находиться у одного прохода втроём, а у другого – вдвоём?

Вариант № 24.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,8, 0,5 и 0,1; при использовании П2 − 0,4, 0,4 и 0,8; при использовании П3 − 0,5, 0,8 и 0,2.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 25.

Производственное предприятие имеет десять производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 4 условных единицы. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

А1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 120.000 условных единиц.

А2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 80.000 условных единиц.

А3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 45.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.15.

Таблица 3.15

Исходные данные для варианта № 25

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
А1	36	36	36
А2	35	30	24
А3	34	20	14

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 26.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из двух ИС. СЗИ обладает тремя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,5, а во второй равна 0,4.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на обе ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства в первой ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу во вторую ИС?

Вариант № 27.

В ИС можно использовать два протокола обмена информацией между сотрудниками. За контрольный период необходимо произвести 1000 операций передачи данных. При использовании злоумышленниками первого средства перегрузки системы передачи данных для передачи данных по первому протоколу требуется 25 единиц времени на одну операцию, а по второму – 15. Если же злоумышленники используют средство перегрузки второго типа, то на одну операцию по первому протоколу требуется 10 единиц времени, а по второму – 35.

Опишите ситуацию как антагонистическую игру.

Какова оптимальная стратегия передачи данных, чтобы суммарное время выполнения всех операций было минимальным при условии:

– полного отсутствия информации о том, какое средство будут использовать злоумышленники,

– если злоумышленники с равной вероятностью будут использовать первое или второе средство.

Вариант № 28.

Служба охраны предприятия состоит из двух сотрудников. Предприятие состоит из двух зон: А и Б. Также имеется помещение службы охраны, в котором находится система теленаблюдения за обеими зонами. В каждой из двух зон может оказаться посторонний. Любой из охранников может находиться в любой из зон, а также в помещении охраны. Известны вероятности обнаружения постороннего в каждой зоне при условии, что охранник находится в фиксированном месте (зона А, Б или Т) (таблица 3.16).

Таблица 3.16

Исходные данные для варианта № 28

	Место нахождения охранника		
Место нахождения постороннего	А	Б	Т
А	0,45	0,15	0,35
Б	0,25	0,75	0,55

Так как охранников двое, то они могут находиться в одном и том же месте или в разных. Для каждой из ситуаций необходимо вычислить вероятность обнаружения постороннего в каждой зоне и построить на её основе МИ. Определите, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях. Найдите оптимальные (возможно, смешанные) стратегии игроков. Вычислите цену игры.

Вариант № 29.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел исследований, кабинет руководителя, кабинет службы безопасности, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,21; у отдела исследований с вероятностью 0,08; у кабинета руководителя с вероятностью 0,06; у кабинета службы безопасности с вероятностью 0,25; у бухгалтерии с вероятностью 0,12; у склада с вероятностью 0,08.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наибольший возможный успех охранника? Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным в кабинет руководителя? В какой из кабинетов наиболее вероятно он проникнет?

Вариант № 30.

Группа из четырёх нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую тремя сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проник как минимум один нарушитель, а через П2 как минимум двое. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять два человека к одному из мест проникновения? Кто в среднем проиграет? С какой частотой нарушителям следует находиться у каждого прохода вдвоём?

Вариант № 31.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,7, 0,6 и 0,15; при использовании П2 − 0,45, 0,65 и 0,85; при использовании П3 − 0,45, 0,65 и 0,35.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 32.

Производственное предприятие имеет шесть производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 4 условных единицы. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

А1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 40.000 условных единиц.

А2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 30.000 условных единиц.

А3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 20.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.17.

Таблица 3.17

Исходные данные для варианта № 32

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
A1	25	25	25
A2	24	20	10
A3	22	12	5

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 33.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из трёх ИС. СЗИ обладает тремя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,35, во второй равна 0,45, а в третьей равна 0,55.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на все ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства в первой ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу во вторую ИС?

Вариант № 34.

В ИС можно использовать три протокола обмена информацией между сотрудниками. За контрольный период необходимо произвести 2000 операций передачи данных. При использовании злоумышленниками первого средства перегрузки системы передачи данных для передачи данных по первому протоколу требуется 20 единиц времени на одну операцию, по второму – 15, а по третьему – 17. Если же злоумышленники используют средство перегрузки второго типа, то на одну операцию по первому протоколу требуется 15 единиц времени, по второму – 30, а по третьему – 10.

Опишите ситуацию как антагонистическую игру.

Какова оптимальная стратегия передачи данных, чтобы суммарное время выполнения всех операций было минимальным при условии:

– если злоумышленники с вероятностью вчетверо больше будут использовать второе средство, чем первое,

– если злоумышленники с равной вероятностью будут использовать первое или второе средство.

Вариант № 35.

Служба охраны предприятия состоит из двух сотрудников. Предприятие состоит из двух зон: А и Б. Также имеется помещение службы охраны, в котором находится система теленаблюдения за обеими зонами. В каждой из двух зон может оказаться посторонний. Любой из охранников может находиться в любой из зон, а также в помещении охраны. Известны вероятности обнаружения постороннего в каждой зоне при условии, что охранник находится в фиксированном месте (зона А, Б или Т) (таблица 3.12).

Так как охранников двое, то они могут находиться в одном и том же месте или в разных. Для каждой из ситуаций необходимо вычислить вероятность обнаружения постороннего в каждой зоне и построить на её основе МИ. Определите, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях. Найдите оптимальные (возможно, смешанные) стратегии игроков. Вычислите цену игры.

Таблица 3.18

Исходные данные для варианта № 35

	Место нахождения охранника		
Место нахождения постороннего	А	Б	Т
А	0,40	0,30	0,35
Б	0,25	0,75	0,55

Вариант № 36.

Злоумышленник выбирает помещение в организации, в которое хочет получить несанкционированный доступ в ночное время. Он рассматривает шесть возможных вариантов: серверная, отдел продаж, кабинет руководителя, кабинет охраны, бухгалтерия, склад. Единственный критерий для выбора объекта − стремление избежать встречи с охранником, который, перемещаясь внутри здания по коридорам, может его обнаружить. Ключи от всех кабинетов у злоумышленника есть. Охранник внутрь кабинетов не заходит. Если охранник выследит злоумышленника, успех действий последнего равен 0. В противном случае, равен 1.

Охранник может обнаружить злоумышленника: у серверной с вероятностью 0,30; у отдела продаж с вероятностью 0,25; у кабинета руководителя с вероятностью 0,15; у кабинета охраны с вероятностью 0,75; у бухгалтерии с вероятностью 0,25; у склада с вероятностью 0,15.

Опишите данную ситуацию как антагонистическую игру. Вычислите цену игры. Определите осторожные стратегии охранника и злоумышленника. Чему равен наименьший возможный успех злоумышленника? Какова вероятность проникновения злоумышленника незамеченным в бухгалтерию? В какой из кабинетов наиболее вероятно он проникнет?

Вариант № 37.

Группа из шести нарушителей проникла на территорию объекта, охраняемую пятью сотрудниками службы безопасности. Существует два прохода на территорию, через которые могли проникнуть нарушители: П1 и П2. Было установлено, что через П1 проникло как минимум два нарушителя, а через П2 – как минимум три. Расположение других нарушителей неизвестно.

Сотрудники службы безопасности направились на задержание нарушителей к П1 и П2. Логично, что для задержания нарушителя в каждом месте должен быть как минимум один сотрудник.

В любом из мест проникновения реализуется следующее правило. Если группа сотрудников численно превышает группу нарушителей, то все нарушители будут нейтрализованы, а потерь со стороны сотрудников не будет. Если же нарушителей больше чем сотрудников, то нарушители проникают на территорию без потерь, а все сотрудники будут нейтрализованы. В качестве выигрыша будем рассматривать общую разность числа нейтрализованных противников по обоим проходам на территорию объекта. При численном равенстве сил складывается патовая ситуация (выигрыш обеих сторон равен нулю).

Определите все чистые стратегии обеих сторон. Упростите МИ, исключив заведомо проигрышные стратегии, если такие есть. Найдите оптимальные смешанные стратегии сторон. С какой частотой службе безопасности следует направлять два человека к одному из мест проникновения? Кто в среднем выигрывает? С какой частотой нарушителям следует находиться у каждого прохода втроём?

Вариант № 38.

В распоряжении злоумышленника имеется три вида вредоносных программ: П1, П2, П3. ИС может использовать три вида ИР: Р1, Р2, Р3. Задача злоумышленника – испортить ИР. Задача СЗИ − сохранить ИР целостным. Ресурсы Р1, Р2 и Р3 будут испорчены при использовании вредоносной программы П1 соответственно с вероятностями 0,65, 0,55 и 0,15; при использовании П2 − 0,25, 0,45 и 0,60; при использовании П3 − 0,50, 0,65 и 0,25.

Действия злоумышленника: выбрать вредоносную программу. Действия СЗИ – выбрать ИР.

Вычислите цену игры и определите минимаксные стратегии СЗИ и злоумышленника. Насколько чувствительно решение к значениям вероятностей порчи ИР? Приведите примеры таких значений вероятностей, при которых стратегии игроков будут иными (по одному примеру для каждой из восьми других комбинаций минимаксных стратегий.

Вариант № 39.

Производственное предприятие имеет двадцать производственных линий. Единица произведённого товара приносит предприятию прибыль в размере 5 условных единиц. В условиях действия дестабилизирующих факторов производительность каждой линии сокращается.

Для противодействия дестабилизирующим факторам предприятие может применить одну из трёх стратегий:

А1. Реализовать комплексную СЗИ. Затраты – 100.000 условных единиц.

А2. Внедрить отдельные СрЗИ сверх базового набора. Затраты – 70.000 условных единиц.

А3. Использовать только базовый набор СрЗИ. Затраты 40.000 условных единиц.

Без использования СрЗИ производство полностью встанет.

В зависимости от разных условий возможны следующие ситуации с интенсивностью дестабилизирующих факторов:

S1. Интенсивность низкая.

S2. Интенсивность обычная.

S3. Интенсивность высокая.

Количество произведённого товара одной производственной линией в зависимости от выбора стратегий предприятием и интенсивности дестабилизирующих факторов приведены в таблице 3.19.

Таблица 3.19

Исходные данные для варианта № 39

	Интенсивность факторов		
Стратегии предприятия	S1	S2	S3
А1	40	40	40
А2	30	20	15
А3	20	18	10

Определите оптимальную стратегию предприятия и цену игры.

Вариант № 40.

Злоумышленник внедряет троянскую программу в одну из трёх ИС. СЗИ обладает четырьмя средствами обнаружения и устранения троянской программы. Злоумышленник стремится этого избежать. Вероятность обнаружения троянской программы с помощью одного средства в первой ИС равна 0,35, во второй равна 0,45, а в третьей равна 0,65.

Обнаружение троянской программы каждым средством является независимым событием. СЗИ может задействовать средства обнаружения в любой из ИС, но не может дублировать средства на все ИС сразу. Распределение средств по ИС и есть стратегия СЗИ.

Постройте игру и найдите оптимальное распределение средств обнаружения по ИС. Чему равна цена игры? С какой частотой СЗИ должна использовать два средства во второй ИС? С какой частотой злоумышленник должен внедрять троянскую программу в третью ИС?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задача обеспечения ИБ различного рода ИС с учётом динамики процессов, протекающих в информационном пространстве, образованном самой защищаемой системой и системой злоумышленника, является задачей динамического управления и требует решения с учётом специфики управляемых параметров.

Достижение достаточного уровня ИБ в условиях противоборства СЗИ и нарушителя требует применения методов теории игр и теории принятия решений.

Управление динамическими показателями ИБ невозможно без анализа параметров ИС и решения математических задач, определяемых видом целевых функций и ограничений в них.

Множество способов достижения заданного уровня ИБ подразумевает использование различного вида ресурсов, ограниченность которых требует постановки и решения задач поиска оптимального управления.

Достижение целей в поставленных задачах динамического управления может быть получено использованием различных классических методов, рассмотренных в учебном пособии, с учётом специфики задач обеспечения ИБ.

Решение практических заданий, представленных в пособии, даёт возможность получить навыки описания и анализа задачи управления конкретными показателями ИБ, выбора подхода к решению и применения в процессе решения методов, позволяющих решить задачу за приемлемое время.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Балдин, К. В.* Управленческие решения [Текст] : учебник / К. В. Балдин, С. Н. Воробьев, В. Б. Уткин, – 8-е изд. – М. : Дашков и К, 2018. – 496 с. – ISBN 978-5-394-02269-2.

2. *Беллман, Р.* Динамическое программирование [Текст]. – М. : Книга по Требованию, 2014. – 400 с. – ISBN 978-5-458-29091-3.

3. *Болотникова, О. В.* Линейное программирование: симплекс-метод и двойственность [Текст] : учеб. пособие / О. В. Болотникова, Д. В. Тарасов, Р. В. Тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – 84 с. – ISBN 978-5-906831-36-1.

4. *Илларионов, Ю. А.* Безопасное управление ресурсами в распределенных информационных и телекоммуникационных системах [Текст] : монография / Ю. А. Илларионов, М. Ю. Монахов / Владим. гос. ун-т – Владимир, 2004. – ISBN 5-89368-493-1.

5. *Карманов В. Г.* Математическое программирование [Текст] М. : Физ-матлит, 2004. – 263 с. – ISBN 5-9221-0170-6.

6. *Ковалев, М. М.* Дискретная оптимизация: целочисленное программирование [Текст]. – 3-е изд. – М. : URSS, 2011. – 191 с. – ISBN 978-5-397-02105-0

7. *Конеев, И. Р.* Информационная безопасность предприятия [Текст] / И. Р. Конеев, А. В. Беляев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003. – 752 с. – ISBN 5-94157-280-8.

8. *Коршунов, Ю. М.* Математические основы кибернетики [Текст] : учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.

9. *Мельников, В. П.* Информационная безопасность и защита информации [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов / В. П. Мельников, С. А. Клейменов, А. М. Петраков. – 4-е изд., стер. – М. : Академия, 2009. – 336 с. – ISBN 978-5-7695-4884-0.

10. *Мирошник, И. В.* Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] : учеб. пособие для вузов. – СПб. : Питер, 2005. – 336 с. – ISBN 5-469-00350-7.

11. *Палий, И. А.* Линейное программирование [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. А. Палий. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Юрайт, 2020. – 175 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-04716-5.

12. *Петросян Л. А.* Теория игр [Текст] : учебник / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. В. Шевкопляс. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012 — 432 с. – ISBN 978-5-9775-0484-3.

13. *Подиновский, В. В*. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений [Текст] : монография. – М. : Наука, 2019. – 103 с. – ISBN 978-5-02-040241-6

14. *Полянский, Д. А.* Комплексная защита объектов информатизации. Книга 10. Оценка защищенности [Текст] : учеб. пособие. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 80 с. – ISBN 5-89368-613-6.

15. *Полянский, Д. А.* Комплексная защита объектов информатизации. Книга 16. Экономика защиты информации [Текст] : учеб. пособие / Д. А. Полянский, О. И. Файман ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 96 с. – ISBN 978-5-89368-975-4.

16. *Полянский, Д. А.* Математические основы управления информационной безопасностью : Управление статическими показателями информационной безопасности [Электронный ресурс] : учеб. пособие. – Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 115 с. – ISBN 978-5-9984-1231-8.

17. *Устинов, В. Н*. Комплексная защита объектов информатизации. Книга 9. Теория вероятностей и моделирование вероятностных процессов в информационной безопасности [Текст] : учеб. пособие / В. Н. Устинов [и др.] ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2005. – 80 с. – ISBN 5-89368-623-3.

18. *Штойер, Р*. Многокритериальная оптимизация: Теория, вычисления и приложения [Текст]. – М. : Радио и связь, 1992. – 504 с.

Учебное электронное издание

ПОЛЯНСКИЙ Дмитрий Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УПРАВЛЕНИЯ
ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТЬЮ

Управление динамическими показателями
информационной безопасности

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 35 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и радиоэлектроники
polyansk@rambler.ru