Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-практическое пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2021

УДК 517.5
ББК 22.161.5
К78

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Крашенинникова, О. В.
К78 Функции комплексного переменного : учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 87 с.
ISBN 978-5-9984-1456-5

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты по функциям комплексного переменного.

Предназначено для студентов бакалавриата очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых трех семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 13. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.5
ББК 22.161.5

ISBN 978-5-9984-1456-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия соответствует программе второго курса обучения и включает раздел «Теория функций комплексного переменного».

Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемому разделу, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты, включающие 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей их защитой во время рейтинговой недели).

Обозначения и терминология, используемые в пособии, являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы по теории функций комплексного переменного, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с изданием предполагает параллельное изучение этой темы по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Определение. Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$, где $x, y \in \boldsymbol{R}$, а $i-$мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Это алгебраическая форма записи комплексного числа. Числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Множество комплексных чисел обозначается $\boldsymbol{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряженным** комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости xOy точкой M с координатами (x, y) либо радиус-вектором точки M (рис. 1).

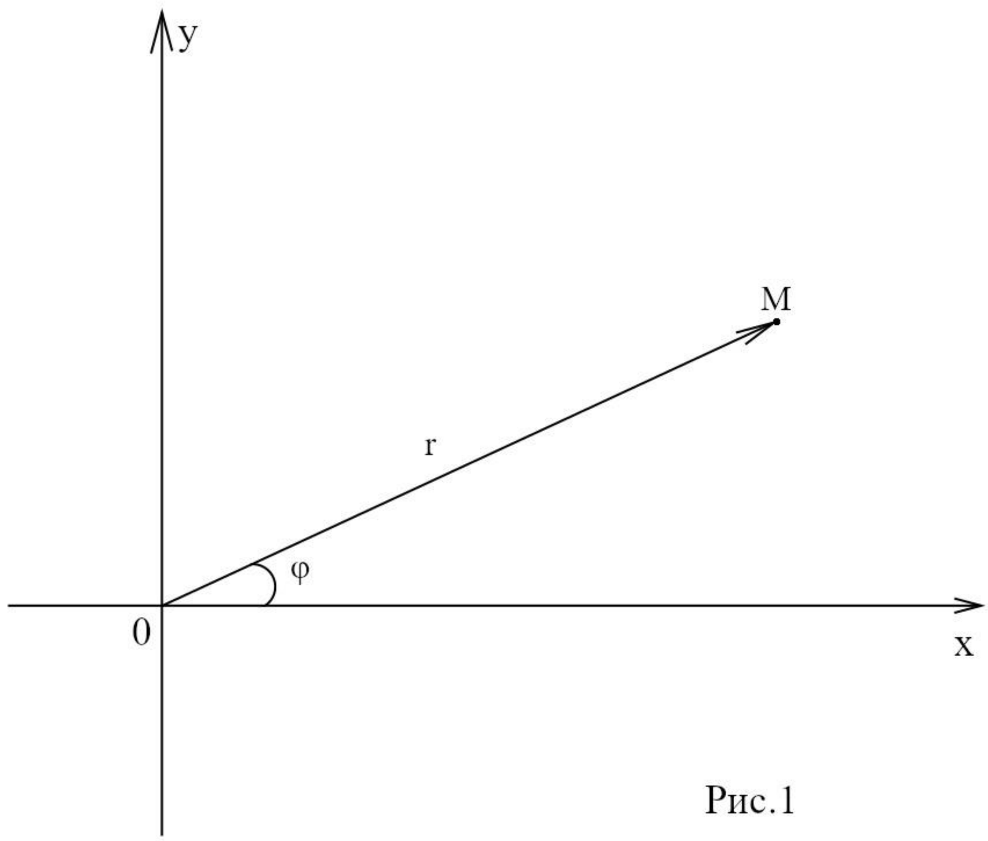

Рис.1

Длина $r = |\overrightarrow{OM}|$ радиус-вектора называется **модулем комплексного числа** и обозначается $|z|$ так, что $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью Ox, называется аргументом комплексного числа и обозначается $\varphi = Arg\, z$. Он определяется неоднозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π: $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, где $\arg z$ есть главное значение аргумента, определяемое условиями: $-\pi < \arg z \le \pi$, причем

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & x > 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, \quad y \ge 0 \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, \quad y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, то $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Это тригонометрическая форма записи комплексного числа. Удобно принять сокращение $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ (формула Эйлера). Тогда получается показательная форма записи комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы отличаются на величину, кратную 2π: $|z_1| = |z_2|$, $Arg\, z_1 = Arg\, z_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, равное $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$. Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то $z_1 + z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2}$.

Разностью $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, равное $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

Произведением $z_1 \cdot z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число, равное $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Пусть комплексные числа даны в показательной форме $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$. Из определения произведения следует, что $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Если комплексные числа даны в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то их произведение равно $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Частным $\dfrac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на комплексное число $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$. Докажем, что если $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0 + i \cdot 0$, то для него существует обратное число такое, z_2' такое, что $z_2 \cdot z_2' = 1$. Действительно, пусть $(x_2 + iy_2)(x_2' + iy_2') = 1$. Умножим обе части на $x_2 - iy_2$, получим

$(x_2^2 + iy_2^2)(x_2' + iy_2') = x_2 - iy_2$. Отсюда $z_2' = \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$. Тогда $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$. Эта формула может быть записана в следующем виде:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Если $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, то $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Возведение комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Отсюда получается формула Муавра $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Если $z=re^{i\varphi}$, то $z^n=re^{in\varphi}$.

Корень n-ой степени из комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые находятся по формуле $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n})$, где $k=0,1,\ldots,n-1$. Если $z=re^{i\varphi}$, то $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. Точки, соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $R=\sqrt[n]{z}$ с центром в начале координат.

Приведем еще свойства модуля комплексного числа:

1. $|\bar{z}|=|z|$; 2. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$; 3. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; 4. $|z^n|=|z|^n$;

5. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2\neq 0$; 6. $|\operatorname{Re} z|\leq|z|$; 7. $|\operatorname{Im} z|\leq|z|$;

8. $|z|\leq|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|$; 9. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$; 10. $|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$.

Действительная и мнимая части комплексного числа выражаются через сопряженные числа следующим образом:

$$\operatorname{Re} z=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \operatorname{Im} z=i\frac{\bar{z}-z}{2}=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Примеры. 1. Найти все решения уравнения $x^3-7x^2+19x-13=0$ и вычислить величины $A=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$, $B=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Решение. Подберем первый целый корень уравнения среди делителей свободного члена, им будет $x_1=1$. Разделим исходный многочлен на двучлен $x-1$, получим в частном двучлен $x^2-6x+13$, который имеет дискриминант $D=36-52=-16$ и, следовательно, комплексно-сопряженные корни $x_{2,3}=\frac{6\pm 4i}{2}=3\pm 2i$. Находим искомые величины $A=1+\frac{1}{3+2i}+\frac{1}{3-2i}=1+\frac{3-2i+3+2i}{(3+2i)(3-2i)}=1+\frac{6}{9+4}=\frac{19}{13}$;

$B=1+(3+2i)^2+(3-2i)^2=1+9+6i-4+9-6i-4=11.$

2. Вычислить $\bar{z}^{13}\cdot z$, если $z=\sqrt{3}-i$.

Решение. Запишем это комплексное число показательной форме, для этого найдем модуль и аргумент комплексного числа. Так как $x=\sqrt{3}$, $y=-1$, то $|z|=\sqrt{3+1}=2$, $tg\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\varphi=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\pi}{6}$, следовательно, $z=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$, тогда $\bar{z}=2e^{\frac{\pi}{6}i}$.

Находим

$$\bar{z}^{13}\cdot z=2^{13}e^{\frac{13\pi}{6}i}\cdot 2e^{-\frac{\pi}{6}i}=2^{14}e^{\frac{12\pi}{6}i}=2^{14}e^{2\pi i}=2^{14}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=2^{14}.$$

3. Найти все значения $\sqrt[4]{1-i}$.

Решение. Запишем подкоренное выражение $z=1-i$ в тригонометрической форме. Так как $x=1$, $y=-1$, то $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $tg\varphi=-1$, $\varphi=-arctg1=-\frac{\pi}{4}$, следовательно, $z=\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))$. Тогда

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right),\ k=0,1,2,3.$$

При $k=0$ имеем $z_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$,

При $k=1$ имеем $z_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16}+i\sin\frac{7\pi}{16}\right)$,

При $k=2$ имеем $z_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16}+i\sin\frac{15\pi}{16}\right)$,

При $k=3$ имеем $z_4=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16}+i\sin\frac{23\pi}{16}\right)$.

Соответствующие комплексные числа изображены на рис. 2.

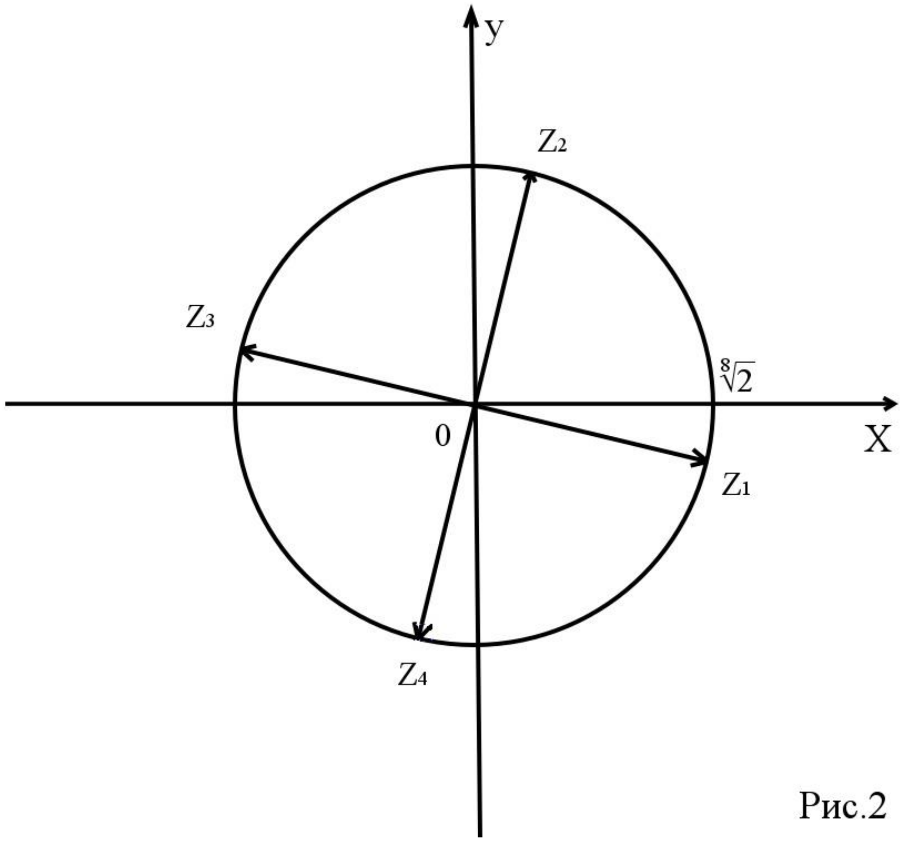

Рис.2

2. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение. Говорят, что в области $D \in \boldsymbol{C}$ определена однозначна функция комплексного переменного, если каждой точке $z \in D$ ставится в соответствие единственное комплексное число w.

Таким образом, функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек комплексной плоскости на соответствующие точки комплексной плоскости w.

Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда задание функции $w = f(z)$ эквивалентно заданию двух функций u и v двух действительных переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, где $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$. Тогда $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Пример. Найти действительную и мнимую части функции $w = z^3 + \bar{z}$.

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда

$$w=(x+iy)^3+x+iy=x^3+3ix^2y-3xy^2-iy^3+x-iy,$$

$$u=x^3-3xy^2+x,$$

$$v=3x^2y-3xy^2-y.$$

Определение. **Окрестностью** точки z_0 плоскости комплексного переменного называется всякая область, содержащая эту точку. ε-окрестностью точки z_0 называется множество всех точек z, лежащих внутри круга радиуса ε с центром в точке z_0, то есть множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<\varepsilon$.

Пусть функция $w=f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z_0, кроме быть может, самой точки z_0.

Определение. Число A называется пределом функции $f(z)$ в точке z_0, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall z: 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-A|<\varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=a+ib$.

Замечание. $f(z)$ стремится к A независимо от способа приближения $z\to z_0$.

Теорема 2.1. Существование $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=a+ib$, где $z_0=x_0+iy_0$ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=b.$$

Доказательство. Так как по свойству модуля $|f(z)-A|\le|u(x,y)-a|+|v(x,y)-b|$. Отсюда, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=b$$

, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$.

В обратную сторону доказываемое следует из неравенств: $|u(x,y)-a|\le|f(z)-A|$, $|v(x,y)-b|\le|f(z)-A|$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекают все известные свойства пределов:

1. $\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)\pm g(z)\right)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0}g(z)$,
2. $\lim\limits_{z\to z_0}\left(f(z)\cdot g(z)\right)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\cdot\lim\limits_{z\to z_0}g(z)$, в частности, $\lim\limits_{z\to z_0}c\,f(z)=c\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$.
3. $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}$, если $\lim\limits_{z\to z_0}g(z)\ne 0$.

Определение. Функция $f(z)$, заданная в области *D*, называется непрерывной в точке $z_0\in D$, если $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$ или $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall z:|z-z_0|<\delta\Rightarrow|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$.

Теорема 2.2. Для того чтобы функция $f(z)$ была непрерывной в точке $z_0=x_0+iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы функции $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ были непрерывны в точке $z_0=x_0+iy_0$.

Определение. Функция $f(z)$, заданная в области *D*, называется непрерывной, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Сумма, разность, произведение двух функций комплексного переменного, непрерывных в области *D*, также являются непрерывными функциями в *D*, а функция $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ непрерывна в тех точках области *D*, где $g(z)\ne 0$.

Теорема 2.3. Если функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0, а функция $F(\tau)$ непрерывна в точке $\tau_0=f(z_0)$, то сложная функция $F(f(z))$ непрерывна в точке z_0.

Примеры. 1. Доказать, что функция $f(z)=z^2$ непрерывна при всех z.

Решение. Возьмем любое z_0, тогда $\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall z: \left|z - z_0\right| < \delta \Rightarrow \left|z^2 - z_0^2\right| < \varepsilon$.

Распишем $\left|z^2 - z_0^2\right| = \left|z - z_0\right| \cdot \left|z + z_0\right| < \delta\left|z + z_0\right| \le \delta\left(|z| + \left|z_0\right|\right)$.

Если $z \to z_0$, то существует число M такое, что $|z| < M$, $\left|z_0\right| < M$, тогда $\left|z^2 - z_0^2\right| < 2M\delta = \varepsilon$ и $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$.

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{z \to -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{z \to -i} \frac{(z+i)(z+2i)}{z+i} = i.$$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой области $D \in$ ***C***. Пусть точки z_0 и $z_0 + \Delta z$ принадлежат D.

Определение. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$, то он называется производной функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$.

Так как производная определяется совершенно также, как для функции одной действительной переменной и предел имеет те же самые свойства, то сохраняются обычные правила дифференцирования:

1. $(f \pm g)' = f' + g'$;
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, в частности, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$;
3. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$;
4. $(f(g(z)))' = f'(g(z)) \cdot g'(z)$;
5. $w = f(z)$, $z = g(w) -$ обратная, тогда $g'(w) = \left.\dfrac{1}{f'(z)}\right|_{z = g(w)}$.

Определение. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой в точке z_0, если ее приращение в этой точке $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ представимо в виде $\Delta w = A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\cdot\Delta z$, где *A*- число, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon(\Delta z) = 0$.

Теорема 2.4. Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы в в этой точке она имела производную.

Доказательство. Необходимость. Дано: $\Delta w = A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\cdot\Delta z$, где *A*-число, $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon(\Delta z) = 0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}(A + \varepsilon(\Delta z)) = A = f'(z_0)$.

Достаточность. Пусть существует конечный $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$, тогда $\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z_0) = \varepsilon(\Delta z)$, где $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\varepsilon(\Delta z) = 0$. Или $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\cdot\Delta z$, то есть функция дифференцируема в точке z_0 и $A = f'(z_0)$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. По определению дифференцируемой функции имеем $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z - z_0)\cdot(z - z_0)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, то есть функция непрерывна в точке z_0. Теорема доказана.

Теорема 2.6. Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнялись условия Коши-Римана (или Даламбера-Эйлера):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (1)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то есть $\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\cdot\Delta z$, $\lim\limits_{\Delta z \to 0}\varepsilon(\Delta z) = 0$. Далее, пусть

$f'(z_0) = a + ib$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\varepsilon(\Delta z) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) + i\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$.

Тогда имеем

$$\Delta w = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\Delta x + i\Delta y) = a\Delta x - b\Delta y +$$

$+\, i(b\Delta x + a\Delta y) + (\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) + i(\varepsilon_1\Delta y - \varepsilon_2\Delta x)$. Следовательно,

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_1\Delta y + \varepsilon_2\Delta x.$$

Поэтому функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и $a = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $b = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Достаточность. Пусть функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия Коши-Римана $a = \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $b = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Тогда

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = a\Delta x - b\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y = b\Delta x + a\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \to 0$ при $\Delta x, \Delta y \to 0$. Получаем

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + i(b\Delta x + a\Delta y) + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y +$$

$$+\, i(\varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y) = (a+ib)(\Delta x + i\Delta y) + \left(\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta z} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta z} + i\left(\varepsilon_3\frac{\Delta x}{\Delta z} + \varepsilon_4\frac{\Delta y}{\Delta z}\right)\right)\Delta z =$$

$$= A\Delta z + \varepsilon(\Delta z)\cdot\Delta z.$$

Остается убедиться, что $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Если $\Delta z \to 0$, то $\Delta x, \Delta y \to 0$. Тогда $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Так как $\frac{|\Delta x|}{|\Delta z|} \le 1$, $\frac{|\Delta y|}{|\Delta z|} \le 1$ и произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая величина, то $\varepsilon(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Теорема доказана.

С учетом условий Коши-Римана производную функции $f(z)$ можно представить в виде:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определение. Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области *D*, называется аналитической (иначе, регулярной или голоморфной) в этой области.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть на комплексной плоскости задана кривая (рис. 3)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta, \text{ или } z = z(t), \ \alpha \le t \le \beta.$$

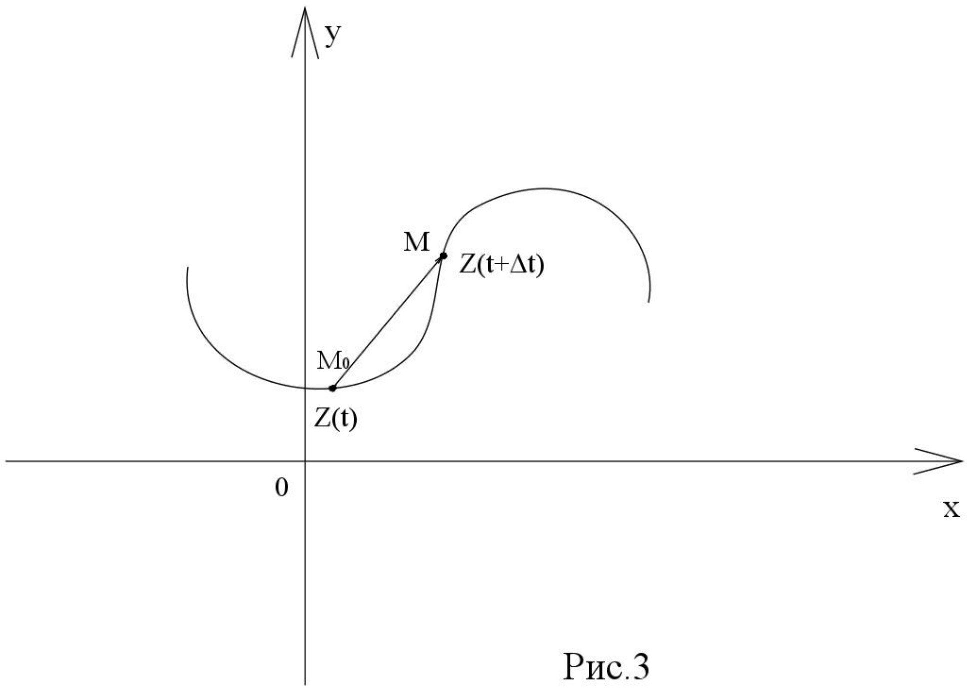

Рис.3

Предположим, что существуют $x'(t)$, $y'(t)$ и $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$.

Рассмотрим $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} + i\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right) =$
$= x'(t) + iy'(t) = z'(t)$.

Имеем $z(t+\Delta t) - z(t) = \overrightarrow{M_0M}$, $\dfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t} = \dfrac{1}{\Delta t}\overrightarrow{M_0M}$, при $\Delta t \to 0$ хорда M_0M стремится занять положение касательной, то есть $z'(t)$ направляющий вектор касательной.

Теорема 2.7. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, $f'(z_0) \neq 0$, тогда все кривые, проходящие через точку z_0 при отображении $w = f(z)$ поворачиваются на один и тот же угол, равный $Arg\ f'(z_0)$. То есть при этом отображении сохраняются углы между кривыми.

Доказательство. Пусть задана кривая $z = z(t)$, тогда при отображении $w = f(z)$ она переходит в кривую $w(t) = f(z(t))$. Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0, поэтому

$f(z(t_0+\Delta t)) - f(z(t_0)) = f'(z_0)\cdot(z(t_0+\Delta t) - z(t_0)) +$
$+\varepsilon\cdot(z(t_0+\Delta t) - z(t_0))$, где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta z \to 0$ или $\Delta t \to 0$.

$$\frac{f(z(t_0+\Delta t)) - f(z(t_0))}{\Delta t} = f'(z_0)\frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} + \varepsilon\frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим $w'(t_0) = f'(z_0)\cdot z'(t_0)$, то есть $Arg\ w'(t_0) = Arg\ f'(z_0) + Arg\ z'(t_0)$.

$Arg\ z'(t_0)$ – угол наклона касательной к графику функции $z = z(t)$ в точке t_0 с положительным направлением оси *Ox*, $Arg\, w'(t_0)$ – угол наклона касательной к кривой $w = f(z(t))$. Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0, то при отображении $w = f(z)$ сохраняются углы между кривыми в точке z_0 и направление их отсчета. Такие отображения называются конформными в точке z_0.Если $\varphi = Arg\ f'(z_0) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi = Arg\ f'(z_0) < 0$ по часовой стрелке.

Отображение $w = f(z)$ называется в области *D*, если оно конформно в любой точке этой области.

Следствие. Если функция $w = f(z)$ аналитическая в области *D*, $f'(z) \neq 0$ ни в одной точке, то отображение $w = f(z)$ будет конформным в этой области.

Пусть функция $w = f(z)$ аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, тогда $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$ плоскости z на плоскость w, точнее, при $|f'(z_0)| > 1$ имеет место растяжение, а при $|f'(z_0)| < 1$ имеет место сжатие.

Примеры. 1. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z_0)$, если $f(z) = z^4$, $z_0 = 2i$.

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $f(z) = (x+iy)^4 = x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4$, следовательно, $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v(x,y) = 4x^3y - 4xy^3$. Имеем, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Далее, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Таким образом, условия Коши-Римана выполнены, следовательно, $f'(z) = 4z^3$, $f'(z_0) = 4(2i)^3 = -32i$.

2. Проверить, является ли функция $w = z \cdot \bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда $w = x^2 + y^2$, поэтому $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$. Имеем, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2y$. Условия Коши-Римана выполнены только в точке (0,0). Следовательно, функция дифференцируема только в точке (0,0) и нигде не является аналитической. Найдем производную $w'(0)$ по определению:

$w'(0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{w(0+\Delta z)-w(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z\cdot\Delta\bar{z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta\bar{z}=0$. Таким образом, $w'(0)=0$.

4. Найти параметры a и b, при которых функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической функцией, если $u(x,y)=ax-7bx-14x^2+14y^2+5x$, $v(x,y)=-ay+7by-4bxy+5y$. Найти $f'(z)$.

Решение. Находим частные производные

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=a-7b-28x+5$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-a+7b-4bx+5$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=28y$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-4by$. Согласно условиям Коши-Римана, получаем систему: $\begin{cases}2a-14b+(4b-28)x=0\\ 28y=4by\end{cases}$, откуда находим $b=7$, $a=49$.

Тогда $u(x,y)=-14x^2+14y^2+5x$, $v(x,y)=-28xy+5y$,

$f(z)=-14x^2+14y^2+5x+i(-28xy+5y)=5(x+iy)-$
$-14(x^2+2xyi-y^2)=5z-14z^2$. Тогда $f'(z)=5-28z$.

3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение. Функция двух переменных $g(x,y)$ называется гармонической в области *D*, если в этой области она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$.

Теорема 3.1. Если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ является аналитической в некоторой области *D*, то функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ будут гармоническими в этой области.

Доказательство. Докажем, что функция $u(x,y)$ гармоническая. По условию $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Тогда $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Но смешанные производные, если они непрерывны, то они равны, следовательно, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, то есть функция $u(x,y)$ гармоническая. Аналогично доказывается, что функция $v(x,y)$ гармоническая. Теорема доказана.

Определение. Две гармонические функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются сопряженными гармоническими, если функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ будет аналитической в области *D*.

Теорема 3.2. Если область *D* односвязная, то для любой гармонической функции $u(x,y)$ существует сопряженная с ней гармоническая функция $v(x,y)$.

Примечание. Область *D* называется односвязной, если вместе с любой замкнутой кривой в нее входит и часть плоскости, которую она ограничивает.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $v_0(x,y)=\int\limits_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$

где $z_0=x_0+iy_0$ — фиксированная точка области *D*, $z=x+iy$ — переменная точка области *D*. В силу уравнения Лапласа

$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ этот интеграл не зависит от пути интегрирования.

$\frac{\partial v_0}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v_0(x+\Delta x,y)-v_0(x,y)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x}^{x+\Delta x}-\frac{\partial u}{\partial y}dx=-\frac{\partial u}{\partial y}$. Интеграл берем по горизонтальному отрезку, где $dy=0$. Аналогично устанавливается, что $\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$. Следовательно, $v_0(x,y)$ и является искомой функцией, сопряженной с функцией $u(x,y)$. Так как функция определяется своими частными производными с точностью до постоянного слагаемого, то совокупность всех гармонических функций, сопряженных с $u(x,y)$ дает формула $v(x,y)=\int\limits_{z_0}^{z}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C$.

Пример. Найти аналитическую функцию $w=f(z)$ по известной ее действительной части $u(x,y)=2e^x\cos y$ и при условии $f(0)=2$.

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=2e^x\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2e^x\sin y$. Тогда (рис. 4)

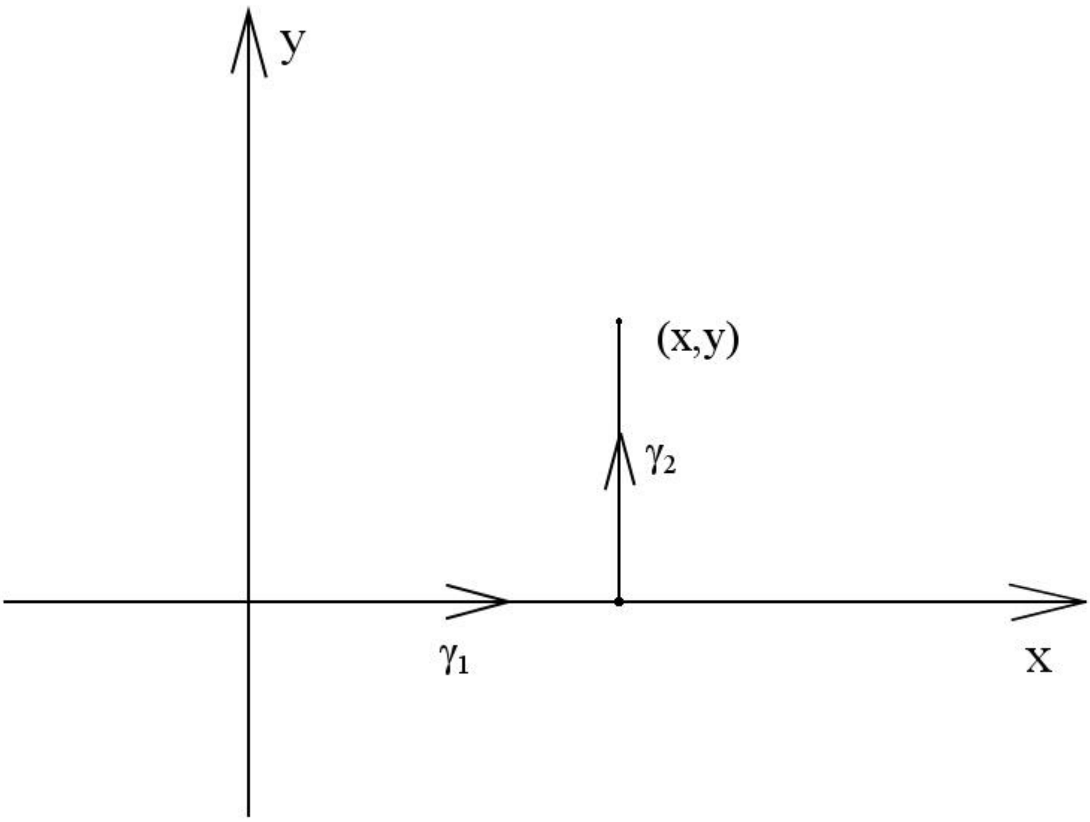

Рис.4

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}2e^x\sin y\,dx+2e^x\cos y\,dy=\int\limits_{\gamma_1}+\int\limits_{\gamma_2}=\int\limits_{0}^{y}2e^x\cos y\,dy=$$

$=2e^x\sin y+C$. Тогда $f(z)=2e^x\cos y+i(2e^x\sin y)+C=2e^z+C$. Так как $f(0)=2$, то $2=2+Ci$, следовательно, $C=0$ и $f(z)=2e^z$.

Функции $w=z^n$ **и** $w=\sqrt[n]{z}$

Функции $w=z^n$ и $w=\sqrt[n]{z}$ уже определены для любого комплексного числа z. Первая из этих функций $w=z^n$ однозначна. Если в плоскостях z и w ввести полярные координаты, положив $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, то соотношение $w=z^n$ можно переписать в виде двух равенств: $\rho=r^n$, $\theta=n\varphi$.

Отсюда видно, что отображение, осуществляемое функцией $w=z^n$, сводится к повороту каждого вектора $z\neq 0$ на угол $(n-1)\arg z$ и растяжению его в $|z|^{n-1}$ раз. Очевидно, что точки z_1 и z_2 с равными модулями и аргументами, отличающимися на целое число, кратное $\dfrac{2\pi}{n}$, переходят при отображении $w=z^n$ в одну точку. Следовательно, для взаимной однозначности (однолистности) отображения $w=z^n$ в некоторой области *D* необходимо и достаточно, чтобы область *D* не содержала никаких двух точек z_1 и z_2, связанных соотношениями

$$|z_1|=|z_2|,\ \arg z_1=\arg z_2+\frac{2\pi k}{n},\ k\neq 0 - \text{целое.}$$

Функции $w=z^n$ аналитическая во всей плоскости, $w'=nz^{n-1}\neq 0$, если $z\neq 0$.

Рассмотрим все решения уравнения $w^n=z$, $w=\sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i(\arg z+2\pi k)}{n}}$, $k=0,1,\ldots,n-1$. То есть для каждого $z\neq 0$ есть *n* различных корней уравнения. Такие функции называют многозначными. В любой области *D*, которая не содержит ни одной замкнутой кривой, обходящей точку $z=0$, можно выделить *n* непрерывных и однозначных функций, принимающих каждая одно из значений $\sqrt[n]{z}$. Эти *n* функций называются ветвями многозначной функции $w=\sqrt[n]{z}$, их значения в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга множителем

$\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$. Каждая такая ветвь будет осуществлять однолистное отображение области *D*, поэтому в каждой точке этой области применима теорема о производной обратной функции: $(\sqrt[n]{z})'=\frac{1}{(w^n)'}=\frac{1}{nw^{n-1}}\Big|_{w=\sqrt[n]{z}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt[n]{z}}{z}$,

или, если условиться писать $\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$, то $\left(z^{\frac{1}{n}}\right)'=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$. Таким образом, любая из построенных ветвей является в *D* аналитической функцией.

Показательная функция и логарифм

Показательную функцию e^z определим для любого комплексного числа $z=x+iy$ соотношением

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y) \qquad (2)$$

Покажем, что так определенная функция:

1) Для действительных $z=x$ совпадает с обычной функцией.

Это непосредственно следует из (2), если положить в ней $y=0$.

2) Определенная функция является всюду аналитической.

Для этого проверим справедливость условий Коши-Римана. Имеем $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$. Тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ и условия Коши-Римана выполнены.

3) Сохраняется обычная формула дифференцирования $(e^z)'=e^z$.

Используем независимость производной от направления, вычислим

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x} e^x(\cos y + i\sin y) = e^x(\cos y + i\sin y) = e^z\,.$$

4) Сохраняется основное свойство показательной функции (теорема сложения): $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

Действительно, пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тогда

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) + e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) =$$

$$= e^{x_1}\cdot e^{x_2}\big(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big) = e^{z_1+z_2}\,.$$

5) $\forall z \in \boldsymbol{C}$ $e^z \neq 0$ так как $\left|e^z\right| = e^x > 0$ $\forall x \in \boldsymbol{R}$.

6) Функция e^z периодическая с чисто мнимым основным периодом $2\pi i$.

Действительно, для любого целого числа k имеем

$e^{z+2\pi ki} = e^z\cdot e^{2\pi ki} = e^z$ ибо по формуле Эйлера $e^{2\pi ki} = 1$.

С другой стороны, если $e^{z_1} = e^{z_2}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то из определения (2) имеем $e^{x_1} = e^{x_2}$, $\cos y_1 = \cos y_2$, $\sin y_1 = \sin y_2$, откуда следует, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi k$ или $z_2 - z_1 = 2\pi ki$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ввиду свойства периодичности изучение функции e^z на комплексной плоскости сводится к изучению ее в полосе $0 \le y < 2\pi$ (рис. 5).

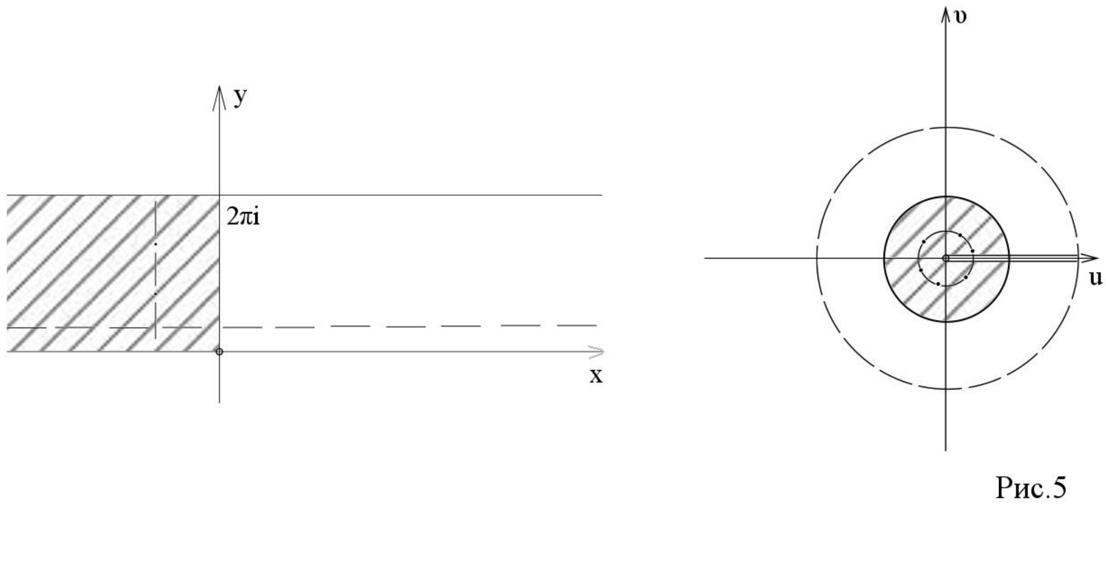

Рис.5

Отображение (2) однолистно в этой полосе: из равенства $e^{z_1} = e^{z_2}$ следует $z_2 - z_1 = 2\pi ki$, а полоса не содержит ни одной пары точек, связанных этим соотношением. Введем в плоскости w полярные координаты, положив $\rho = e^{i\theta}$, тогда $\rho = e^x$, $\theta = y$. Следовательно, отображение (2) преобразует прямые $y = y_0$ в лучи $\theta = y_0$, а отрезки $x = x_0$, $0 \le y < 2\pi$ в окружности $\rho = e^{x_0}$. Полоса $0 < y < 2\pi$ преобразуется при этом в плоскость w с разрезом вдоль положительной полуоси, половина этой полосы $0 < y < \pi$ преобразуется в верхнюю полуплоскость. Полосы $0 < \operatorname{Im} z < h$ преобразуются в углы $0 < \arg w < h$.

Пусть $z \ne 0$. Найдем все решения уравнения $e^w = z$. Пусть $w = u + iv$, $z = |z| e^{i \arg z}$, тогда $e^u \cdot e^{iv} = |z| e^{i \arg z}$, откуда $e^u = |z|$, $v = \arg z + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $w = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n) = \ln|z| + iArgz$ – бесконечное множество решений. Весь набор решений обозначается $Lnz = \ln|z| + iArgz$. Эта функция является многозначной. Главным значением называется то значение, которое получается при $n = 0$. Оно обозначается $\ln z = \ln|z| + i \arg z$. Очевидно, что $Lnz = \ln z + 2\pi ni$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Справедливы следующие соотношения: $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$, $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$.

В любой области D, которая не содержит замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$, можно выделить бесчисленное множество непрерывных и однозначных ветвей многозначной функции $w = Lnz$, значения которых в каждой фиксированной точке отличаются друг от друга слагаемыми $2\pi ni$. Каждая такая ветвь $\ln z$ будет осуществлять взаимно однозначное отображение D и, следовательно, по теореме о производной обратной функции будет обладать производной $(\ln z)' = \left.\frac{1}{(e^w)'}\right|_{w=\ln z} = \frac{1}{e^{\ln z}} = \frac{1}{z}$.

Заметим, что производная одна и та же для всех ветвей. Таким образом, все ветви $w = Lnz$ будут аналитическими функциями.

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta -$ произвольное комплексное число, определяется соотношением $z^a = e^{a\ln z}$.

Полагая здесь $z = re^{i\varphi}$, получим $Lnz = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$, следовательно, $z^a = e^{(\alpha+i\beta)(\ln r + i(\varphi+2\pi k))} = e^{\alpha\ln r - \beta(\varphi+2\pi k)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi+2\pi k)+\beta\ln r)}$ $k \in \boldsymbol{Z}$.

Отсюда видно, что при $\beta \neq 0$ функция $w = z^a$ всегда имеет бесконечно много значений, лежащих (при фиксированных z и а) на окружностях $|w| = \rho_k$ с радиусами $\rho_k = e^{\alpha\ln r - \beta\varphi} \cdot e^{-2\pi\beta k}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, образующими геометрическую бесконечную в обе стороны прогрессию со знаменателем $e^{-2\pi\beta}$. Аргументы этих значений $\theta_k = \alpha\varphi + \beta\ln r + 2\pi k\alpha$ образуют также бесконечную в обе стороны арифметическую прогрессию с разностью $2\pi\alpha$.

При $\beta = 0$, то есть при действительных α, значения z^a располагаются на окружности $|w| = e^{\alpha\ln r} = e^a$, а их аргументы суть $\theta_k = a\varphi + 2\pi k a$ (*). Если $a = \frac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$ (считаем дробь $\frac{p}{q}$ несократимой), то все значения θ_k отличаются от q из этих значений на целое кратное 2π. Следовательно, в этом случае функция $w = z^a$ конечнозначна и совпадает с функцией $\sqrt[q]{z^p}$. Если $a -$ число иррациональное, то среди значений θ_k в формуле (*) нет отличающихся на целое кратное 2π, следовательно, функция $w = z^a$ бесконечнозначна.

Наряду с общей степенной функцией можно рассматривать общую показательную функцию $a^z = e^{zLna} = e^{z\ln|a|} \cdot e^{ziArga}$.

Тригонометрические функции. Обратные тригонометрические функции. Гиперболические функции

По формуле Эйлера для действительного переменного x имеем $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, $e^{-ix}=\cos x-i\sin x$. Отсюда $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Примем по определению для любого комплексного числа z, что $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Так определенные функции обладают свойствами:

1. для действительных $z=x$ совпадают соответственно с обычным синусом и косинусом;
2. всюду аналитичны и $(\cos z)'=-\sin z$, $(\sin z)'=\cos z$;
3. периодичны с действительным периодом 2π, так как $\cos(z+2\pi)=\dfrac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$, поскольку $e^{2\pi i}=1$;
4. функция $\cos z-$ четная, $\sin z-$ нечетная;
5. Подчиняются обычным тригонометрическим соотношениям:

   $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\sin 2z=2\sin z\cdot\cos z$,
   $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

   Выведем, например, последнюю формулу:

$$\begin{cases}\cos z_1\cos z_2=\dfrac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\dfrac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}\\ \sin z_1\sin z_2=\dfrac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\dfrac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\end{cases}.$$

   Вычтем из первого равенства второе, получим

$$\frac{2e^{i(z_1+z_2)}+2e^{-i(z_1-z_2)}}{4}=\cos(z_1+z_2).$$

Функции $tg\,z$ и $ctg\,z$ определяются формулами:

$$tg\,z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\ ctg\,z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Решим уравнение: $\cos w=z$,

$$\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=z,\ e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,\ e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1},$$

$$iw=Ln(z+\sqrt{z^2-1}),\ w=-i\,Ln(z+\sqrt{z^2-1}).$$

Аналогично можно найти решение уравнения $\sin w=z$,

$$\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=z,\ e^{2iw}-2ize^{iw}-1=0,\ e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2},$$

$$iw=Ln(iz+\sqrt{1-z^2}),\ w=-i\,Ln(iz+\sqrt{1-z^2}).$$

Все эти функции многозначны, главные значения обратных тригонометрических функций получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

Гиперболические функции в комплексной плоскости определяются равенствами:

$$ch\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\ sh\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\ th\,z=\frac{sh\,z}{ch\,z},\ cth\,z=\frac{ch\,z}{sh\,z}.$$

Они весьма просто выражаются через тригонометрические функции:

$$sh\,z=-i\sin iz \qquad \sin z=-i\,sh\,iz$$

$$ch\,z=\cos iz \qquad \cos z=ch\,iz$$

$$th\,z=-i\,tg\,iz \qquad tg\,z=-i\,th\,iz$$

$$cth\,z=-i\,ctg\,iz \qquad ctg\,z=i\,cth\,iz$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть задана некоторая ориентированная кривая *C* и на ней функция комплексного переменного $f(z)$. Рассмотрим разбиение кривой *C* точками $z_0=a<z_1<\ldots z_n=b$, где a и b – концы кривой *C*. Пусть точки $\xi_i\in[z_{i-1},z_i],\ i=\overline{1,n},\ \Delta z_i=z_i-z_{i-1}$.

Определение. Если C – кусочно гладкая кривая, а $f(z)$ – кусочно-непрерывная и ограниченная функция, то $\int_C f(z)dz$ всегда существует.

Доказательство. Положим $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_i = x_i + iy_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\xi_i = \zeta_i + i\eta_i$, $u(\zeta_i,\eta_i)=u_i$, $v(\zeta_i,\eta_i)=v_i$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i = \sum_{i=1}^{n}(u_i\Delta x_i - v_i\Delta y_i) + i\sum_{i=1}^{n}(u_i\Delta y_i + v_i\Delta x_i). \tag{3}$$

Суммы в правой части (3) являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов. В условиях теоремы эти интегралы существуют и, следовательно, существует

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C udy + vdx. \tag{4}$$

Теорема доказана.

С помощью формулы (4) вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению действительных интегралов.

Производная и интеграл от комплексной функции действительного переменного $w(t)=u(t)+iv(t)$ представляются следующими линейными комбинациями:

$$w'(t)=u'(t)+iv'(t),$$

$$\int_\alpha^\beta w(t)dt = \int_\alpha^\beta u(t)dt + i\int_\alpha^\beta v(t)dt.$$

Пусть $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ дает параметрическое представление кривой C, причем $z(\alpha)=a$, $z(\beta)=b$, тогда по формуле (4) сведем вычисление интеграла от $f(z)$ вдоль кривой C к вычислению интеграла от комплексной функции действительного переменного

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Из формулы (4) вытекает также, что на интегралы от функций комплексного переменного распространяются обычные свойства криволинейных интегралов:

$$\int_C (af(z) \pm bg(z))dz = a\int_C f(z)dz \pm b\int_C g(z)dz;$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz;$$

$$\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz,$$

где a и b – комплексные постоянные, $C_1 + C_2$ – кривая, состоящая из кривых C_1 и C_2, C^- – кривая, совпадающая с C, но проходимая в противоположном направлении.

Пусть $M = \max|f(M)|$ на кривой C, l – длина C, тогда

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)| \cdot |dz| \le M \cdot l \qquad (5)$$

Доказательство. $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta z_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)| \cdot |\Delta z_i| \le M \sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i|$, где $\sum_{i=1}^{n} |\Delta z_i|$ – длина ломаной $z_0 z_1 \ldots z_n$, вписанной в кривую C, и в пределе при $\max|\Delta z_i| \to 0$ получаем (5).

Пример. Вычислить $\int_C (1 + i - 2\bar{z})dz$ по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$

1) по прямой;
2) по параболе $y = x^2$;
3) по ломаной $z_1 z_2 z_3$, где $z_3 = 1$ (рис. 6).

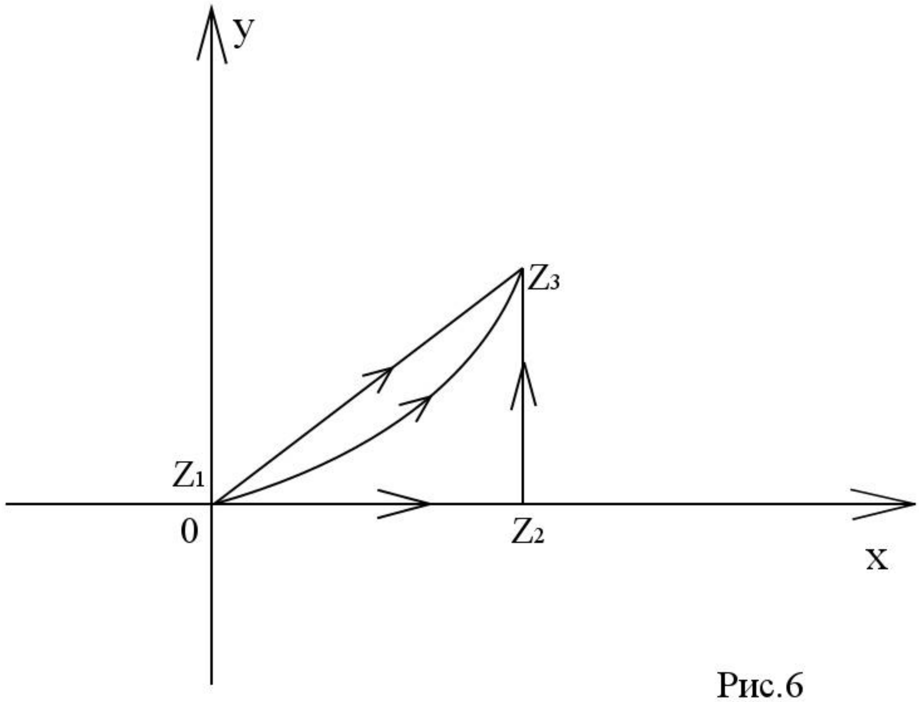

Рис.6

Решение. 1) Уравнение прямой, соединяющей точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1+i$, имеет вид $y = x$, $0 \le x \le 1$, тогда $dy = dx$. Имеем

$$\int_c (1+i-2(x-iy))(dx+idy) = \int_0^1 (1+i-2x+2ix)(1+i)dx =$$

$$= (1+i)\left((1+i)x + (2i-2)\frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = (1+i)(1+i+i-1) = 2(i-1).$$

2) Если $y = x^2$, $0 \le x \le 1$, то $dy = 2xdx$. Тогда

$$\int_0^1 \left(1+i-2(x-ix^2)\right)(1+2ix)dx = \int_0^1 \left(1+i+(2i-4)x-2ix^2-4x^3\right)dx =$$

$$= \left((1+i)x + (2i-4)\frac{x^2}{2} - \frac{2ix^3}{3} - x^4 \right)\Bigg|_0^1 = 1+i+i-2-\frac{2i}{3}-1 = \frac{4i}{3}-2.$$

3) Ломаная $z_1 z_2 z_3$ состоит из двух отрезков $z_1 z_3 : y = 0, 0 \le x \le 1$, $dy = 0$ и $z_3 z_2 : x = 1, 0 \le y \le 1$, $dx = 0$. Тогда имеем

$$\int\limits_C (1+i-2\bar{z})dz = \int\limits_{z_1 z_3} (1+i-2\bar{z})dz + \int\limits_{z_3 z_2} (1+i-2\bar{z})dz =$$

$$= \int\limits_0^1 (1+i-2x)dx + \int\limits_0^1 (1+i-2(1-iy))idy =$$

$$= \left((1+i)x - x^2\right)\Big|_0^1 + i\left((i-1)y + iy^2\right)\Big|_0^1 = 1+i-1+i(i+i-1) = -2.$$

В общем случае интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ зависит как от подынтегральной функции, так и от кривой *C*. Условия независимости интеграла от пути интегрирования дает следующая теорема.

Теорема 4.1. (О. Коши, 1825) Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области *D*, то для всех кривых *C*, лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ имеет одно и то же значение.

Доказательство. Докажем эту теорему в дополнительном предположении непрерывности $f'(z)$. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

В силу соотношения $\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C udx - vdy + i\int\limits_C udy + vdx$ вопрос о независимости интеграла $\int\limits_C f(z)dz$ от пути интегрирования сводится к вопросу о независимости от пути интегрирования криволинейных интегралов $\int\limits_C udx - vdy$ и $\int\limits_C udy + vdx$. (6)

В односвязной области для независимости от пути $\int\limits_C Pdx + Qdy$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции, имеющие непрерывные частные производные, необходимо и достаточно, чтобы в этой области $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Для интегралов из (6) эти соотношения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{7}$$

Непрерывность частных производных вытекает из предположения о непрерывности $f'(z)$. Уравнения (7) совпадают с условиями Коши-Римана и удовлетворяются, так как $f(z)$ аналитическая функция. Теорема доказана.

Основываясь на этой теореме, можно доказать ряд предположений, аналогичных обычным предположениям интегрального исчисления.

Теорема 4.2. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi = F(z)$, рассматриваемый в зависимости от своего верхнего предела, также является аналитической в D функцией, причем $F'(z) = f(z)$.

Доказательство. По определению производной и свойствам интеграла имеем

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi - \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \right) =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z} \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)d\xi .$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z, которая является следствием ее аналитичности, можно написать $f(\xi) = f(z) + \alpha(\xi)$, где $\alpha(\xi) \to 0$ при $\xi \to z$. Тогда $F'(z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left(\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\xi + \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\xi)d\xi \right)$. Далее

$\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\xi = f(z) \int\limits_{z}^{z+\Delta z} d\xi = f(z)\Delta z$, а $\left| \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \alpha(\xi)d\xi \right| \le \max|\alpha(\xi)| \cdot |\Delta z|$. Путь интегрирования от z до $z + \Delta z$ можно считать по теореме 4.1. прямолинейным, поэтому его длина равна $|\Delta z|$. Таким образом, $F'(z) = f(z)$. Теорема доказана.

Определение. Функция $F(z)$, производная которой равна заданной функции $f(z)$, называется первообразной этой функции.

Теорема 4.2. утверждает, что интеграл от $f(z)$, рассматриваемый как функция своего верхнего предела, является одной из первообразных функции $f(z)$.

Теорема 4.3. Любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга не более, чем на постоянное слагаемое.

Доказательство. Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)-$ две первообразные функции $f(z)$ и $\Phi(z)=F_1(z)-F_2(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. По формуле для производной имеем $\Phi'(z)=\dfrac{\partial u}{\partial x}+i\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-i\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$, так как по условию $\Phi'(z)=F_1{}'(z)-F_2'(z)=f(z)-f(z)=0$. Отсюда следует, что $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\equiv 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\equiv 0$, следовательно, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ постоянны. Теорема доказана.

Теорема 4.4. Если $F(z)-$ произвольная первообразная аналитической функции $f(z)$, то $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=F(z)-F(z_0)$.

Доказательство. По теореме 4.2. функция $F_1(z)=\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$ является одной из первообразных для $f(z)$, функция $F(z)$ по условию также первообразная, следовательно, по теореме 4.3. $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi=F(z)+C$. Полагая здесь $z=z_0$, получим $F(z_0)+C=0$, $C=-F(z_0)$, что и дает искомую формулу. Теорема доказана.

Теорему 4.1. можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 4.5. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области *D*, то ее интеграл вдоль любого замкнутого контура C, лежащего в *D*, равен 0.

Доказательство. Доказательство основывается на том, что замкнутый контур C можно разложить на два контура C_1 и C_2 с общим началом и концом (рис. 7).

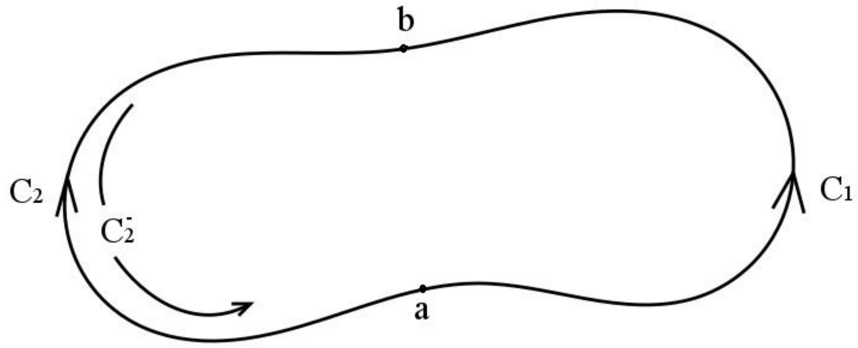

Рис.7

По свойствам интегралов имеем
$\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2^-} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz - \int\limits_{C_2} f(z)dz$, следовательно, равенство нулю интеграла вдоль замкнутой кривой C равносильно равенству между собой интегралов вдоль C_1 и C_2. Теорема доказана.

Теорема 4.6. Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области D и непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$, то интеграл от $f(z)$, взятый вдоль границы ∂D этой области, равен нулю: $\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Для многосвязных областей теорема Коши, вообще говоря, не верна. Например функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ является аналитической в кольце $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$, но интегралы от -1 до 1 вдоль верхней и нижней половины окружности $|z| = 1$ отличаются друг от друга. Действительно, вдоль верхней полуокружности C_1, где $z = e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$, имеем

$\int\limits_{C_1} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi = -i\pi$, а вдоль нижней полуокружности C_2, где $z = e^{i\varphi}$,

$-\pi \le \varphi \le 0$, имеем $\int\limits_{C_2} \frac{dz}{z} = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}} d\varphi = i\pi$.

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной области D, ограниченной кривыми $C_0, C_1, \ldots, C_n$ и непрерывна в замыкании $\overline{D}$. Проведем разрезы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, обращающие область D в односвязную область D^* (рис. 8).

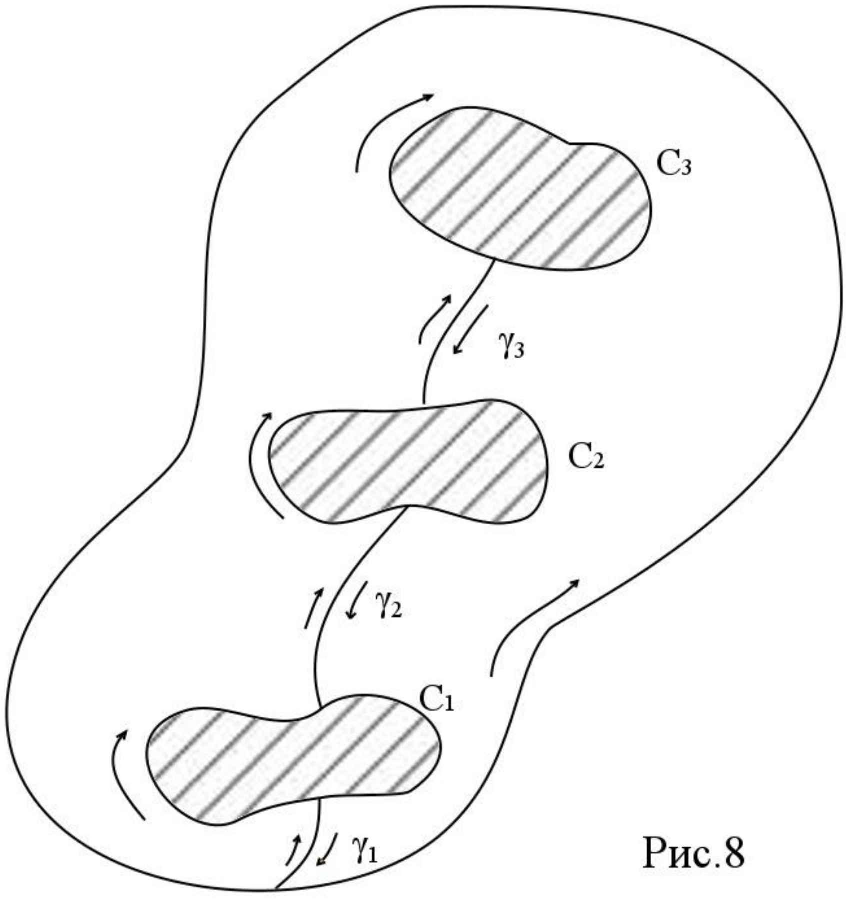

Рис.8

Обозначим через ∂D^* границу этой области – кривую, состоящую из участков кривых $C_0, C_1, \ldots, C_n$ и кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, причем последние проходятся дважды в противоположных направлениях. Функция $f(z)$

аналитическая в односвязной области D^* и непрерывна в $\overline{D^*}$, следовательно, по теореме 4.5. и свойствам интегралов получаем

$$\oint_{\partial D^*} f(z)dz = \oint_{C_0} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz = 0. \qquad (8)$$

Интегралы вдоль $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ взаимно уничтожаются, а остальная часть ∂D^* совпадает с $\sum_{k=0}^{n} C_\kappa$. При этом мы должны считать, что кривые $C_0, C_1, \ldots, C_n$ проходятся так, чтобы область *D* оставалась все время с одной стороны. Таким образом, теорема Коши для областей любой связности справедлива в следующей форме:

Теорема 4.7. Если функция $f(z)$ аналитическая в области *D* и непрерывна в замыкании $\overline{D}$, то интеграл вдоль границы этой области, проходимой так, что область *D* все время остается с одной стороны, равен 0.

5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ И ФОРМУЛА КОШИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Теорема 5.1. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в *n*-связной области *D* и непрерывна в замыкании $\overline{D}$. Тогда для любой внутренней точки z_0 этой области имеет место **формула Коши**: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{z - z_0}$,

где *C* – граница области *D*, проходимая так, что область *D* остается все время слева.

Доказательство. Выбросим из области *D* кружок радиуса *r* с центром z_0 и заметим, что полученной (*n*+1)-связной области D^* числитель и знаменатель подынтегральной функции являются аналитическими относительно переменной z, причем знаменатель не обращается в нуль (рис. 9).

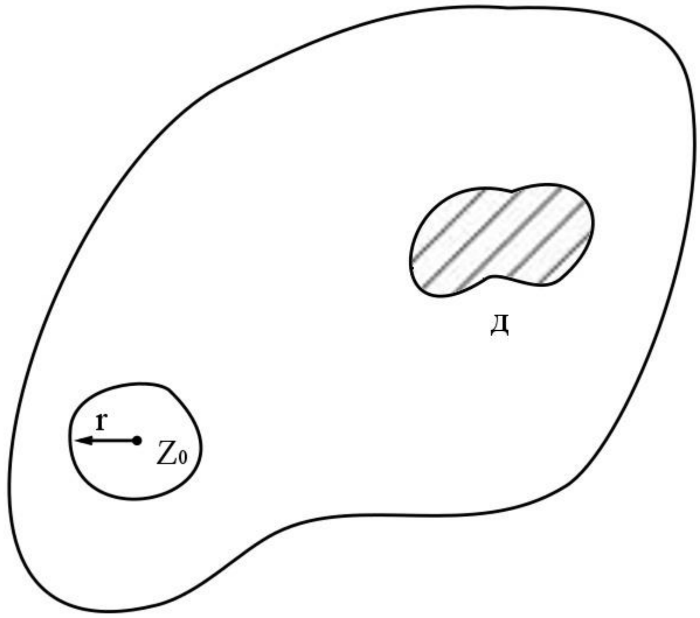

Рис.9

Следовательно, подынтегральная функция будет аналитической относительно z в области D^*. Так как она непрерывна в $\overline{D^*}$, то формуле (8) имеем $\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} + \oint\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 0$, где γ_r^- проходится по часовой стрелке. Отсюда $\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-z_0}$, (9)

где γ_r проходится против часовой стрелки. На окружности γ_r имеем $z - z_0 = re^{i\varphi}$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{f(z_0)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{rie^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi = \frac{f(z_0)}{2\pi}\varphi\Big|_0^{2\pi} = f(z_0). \tag{10}$$

На основании формул (9) и (10) имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)dz}{z-z_0} - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz. \tag{11}$$

Оценим модуль этой разности

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right|\le\frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}\left|f(z)-f(z_0)\right|\cdot\frac{2\pi r}{r}=\max_{\gamma_r}\left|f(z)-f(z_0)\right|.$$

Функция $f(z)$ аналитическая, поэтому непрерывна в точке z_0, следовательно, $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall z:\left|z-z_0\right|<\delta\Rightarrow$ $\left|f(z)-f(z_0)\right|<\varepsilon$.

Выберем $r<\delta$, тогда $\max\limits_{\gamma_r}\left|f(z)-f(z_0)\right|<\varepsilon$. Отсюда видно, что эта разность при уменьшении r может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, левая часть (11) не зависит от r. Следовательно, рассматриваемая разность равна нулю. Теорема доказана.

По определению, аналитическая функция – это функция комплексного переменного, обладающая производной каждой точке некоторой области *D*. Покажем, что из аналитичности функции автоматически вытекает существование и аналитичность всех ее последовательных производных.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области *D* и непрерывна в замыкании $\overline{D}$. Тогда она обладает в каждой внутренней точке z_0 этой области производными всех порядков, причем *n*-ая производная равна: $f^n(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, где *C* – граница области *D*.

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная внутренняя точка области *D*. По определению производной и формуле Коши, которую применяем для точек z_0 и $z_0+\Delta z$, имеем

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\oint_c f(z)\left(\frac{1}{z-z_0-\Delta z}-\frac{1}{z-z_0}\right)dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\oint_c\frac{\Delta z\,f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\Delta z\to 0}\oint_c\frac{f(z)dz}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}.$$

Очевидно, что при $\Delta z \to 0$ функция $\dfrac{1}{z - z_0 - \Delta z}$ равномерно для всех z на кривой C стремится к $\dfrac{1}{z - z_0}$ и, следовательно, предел существует, причем $f'(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)dz}{(z - z_0)^2}$. Для n=1 теорема доказана. Предполагая ее верной для какого-либо n-1, можно доказать ее справедливость и для n. Теорема доказана.

Примеры. 1. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить $\oint\limits_C \dfrac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}$, если: 1) $C: |z - 2| = 1$; 2) ;$C: |z - 2| = 3$; 3) $C: |z - 2| = 5$.

Решение. 1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z - 2| = 1$, подынтегральная функция $\dfrac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}$ является аналитической, поэтому $\oint\limits_C \dfrac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} = 0$.

2) Внутри круга, ограниченного окружностью $|z - 2| = 3$, находится точка z=0, в которой знаменатель обращается в нуль. Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2} dz}{z(z-6)} = \oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) В область, ограниченную окружностью $|z - 2| = 5$, попадают две точки z=0 и z=6.

1-й способ. Разложим подынтегральную дробь на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$\frac{1}{z(z-6)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-6}=\frac{A(z-6)+Bz}{z(z-6)}$, тогда $A(z-6)+Bz=1$, при z=0 находим $-6A=1$, $A=-\frac{1}{6}$. При z=6 находим $6B=1$, $B=\frac{1}{6}$. Тогда

$$\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z-6}-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z}=\frac{2\pi i}{6}\left(e^{z^2}\Big|_{z=6}-e^{z^2}\Big|_{z=0}\right)=\frac{\pi i}{3}\left(e^{36}-1\right).$$

2-й способ. Обозначим через γ_1 окружность с центром в точке z=0, через γ_2 маленькую окружность с центром в точке z=6, так, чтобы они лежали внутри круга, ограниченного окружностью $|z-2|=5$ и не пересекаются (рис. 10).

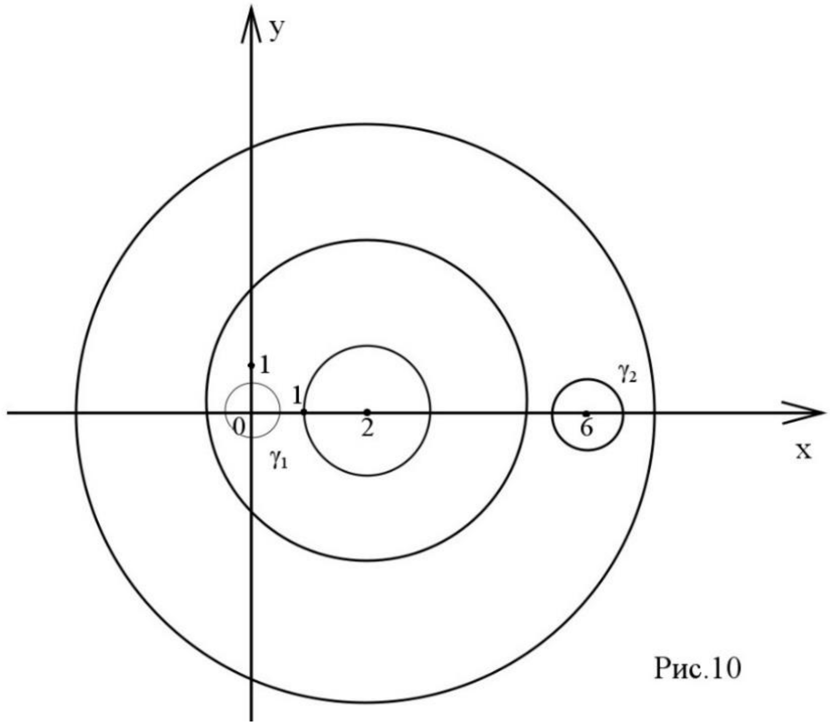

Рис.10

Тогда

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}dz}{z(z-6)}=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^{z^2}}{z}}{z-6}dz=2\pi i\left(\frac{e^{z^2}}{z-6}\Big|_{z=0}+\frac{e^{z^2}}{z}\Big|_{z=6}\right)=$$

$$=2\pi i\left(-\frac{1}{6}+\frac{e^{36}}{6}\right)=\frac{\pi i}{3}(e^{36}-1).$$

2. Пользуясь формулой Коши для производных, вычислить $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2-1)^2}$.

Решение. Внутрь круга $|z-1|=1$ попадает одна точка z=1, поэтому

$$\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z^2-1)^2} = \oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z dz}{(z-1)^2(z+1)^2} = 2\pi i \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2} \right)' \Bigg|_{z=1} =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{\pi \cos \pi z (z+1)^2 - \sin \pi z \cdot 2(z+1)}{(z+1)^4} \right) \Bigg|_{z=1} = 2\pi i \left(\frac{\pi \cos \pi z (z+1) - 2\sin \pi z}{(z+1)^3} \right) \Bigg|_{z=1} =$$

$$= -\frac{\pi^2 i}{2}.$$

6. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ

Определение. Последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ называется равномерно сходящейся к функции $f(z)$ в области D (или на кривой С), если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) > 0$ такой, что $\forall n \ge N$, $\forall z \in D \Rightarrow$ $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Теорема 6.1. Предел $f(z)$ последовательности непрерывных функций $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, равномерно сходящейся в некоторой области D, также является непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка области D. В силу равномерной сходимости $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) > 0$ такой, что $\forall n \ge N$, $\forall z \in D \Rightarrow$ $|f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. В силу непрерывности $f_n(z)$ в точке z_0 имеем $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall z \in D : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $|f(z) - f(z_0)| \le |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$, а это и означает непрерывность функции $f(z)$ в точке z_0. Теорема доказана.

Теорема 6.2. Если последовательность непрерывных функций $f_1(z)$, $f_2(z),\ldots,$ $f_n(z),\ldots$ на кривой C сходится равномерно к $f(z)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f(z)dz=\int_C \lim_{n\to\infty} f(z)dz\cdot \qquad (12)$$

Доказательство. В силу равномерной сходимости $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0$ такой, что $\forall n\geq N$, $\forall z\in C\Rightarrow\left|f_n(z)-f(z)\right|<\dfrac{\varepsilon}{l}$, где l – длина кривой C. Для таких n имеем $\left|\int_C f(z)dz-\int_C f_n(z)dz\right|=\left|\int_C\left(f(z)-f_n(z)\right)dz\right|<\dfrac{\varepsilon}{l}\cdot l=\varepsilon$, а это и означает справедливость соотношения (12).

Теорема 6.2. дает возможность переходить к пределу под знаком интеграла в случае равномерной сходимости функций.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ называется равномерно сходящимся в области D (или на кривой С), если его последовательность частичных $S_0(z)=f_0(z)$, $S_1(z)=f_0(z)+f_1(z),\ldots,$ $S_n(z)=f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_n(z),\ldots$ сходится равномерно в этой области (на этой кривой).

Теорема 6.3. (признак Вейерштрасса)

Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ в области D мажорируется некоторым сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$, то есть $\forall z\in D\Rightarrow\left|f_n(z)\right|\leq a_n$, то данный функциональный ряд сходится равномерно в области D.

Доказательство. По известной теореме сравнения данный ряд сходится в любой точке $z\in D$. Обозначим его сумму через $S(z)$. Для любого n остаток ряда $r_n(z)=S(z)-S_n(z)$ удовлетворяет условию:

$$\left|r_n(z)\right|\leq\left|f_{n+1}(z)\right|+\left|f_{n+2}(z)\right|+\ldots\leq a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots \qquad (13)$$

Справа стоит остаток сходящегося числового ряда, стремящийся к нулю при $n\to\infty$. Следовательно, $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)>0$ такой, что $\forall n\geq N$

$\Rightarrow r_n < \varepsilon$, тогда в силу (13) $\forall z \in D\ \forall n \geq N \Rightarrow \left| S(z) - S_n(z) \right| < \varepsilon$. Это и означает равномерную сходимость данного ряда. Теорема доказана.

Из теорем 6.1 и 6.2 следует, что сумма равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций, непрерывна, и что такой ряд можно почленно интегрировать, то есть справедливо соотношение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz \cdot$$

Ряды Тейлора

Начнем с обобщения на функции комплексного переменного известной из анализа формулы Тейлора и на его основе докажем, что всякая аналитическая в точке функция представляется в окрестности этой точки в виде суммы степенного ряда.

Воспользуемся формулой для суммы членов геометрической прогрессии: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, или

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}. \tag{14}$$

Формула справедлива и для комплексных q.

Зафиксируем некоторую точку z_0 из области D аналитичности функции $f(z)$ и по формуле (14) напишем:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} =$$

$$= \frac{1}{\xi - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \ldots + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n + \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0}} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{n+1} \right).$$

Умножим обе части последнего равенства на $\dfrac{1}{2\pi i} \cdot f(\xi)$ и проинтегрируем его по ξ вдоль некоторого замкнутого контура C, лежащего в D

и содержащего точки z и z_0. Пользуясь интегральной формулой Коши и формулой Коши для производных, получим классическую формулу Тейлора:

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_n,$$

где остаточный член имеет вид $R_n=\dfrac{(z-z_0)^{n+1}}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)(\xi-z_0)^{n+1}}$. (15)

Возникает вопрос, при каких условиях $R_n\to 0$ при $n\to\infty$ или, что тоже самое, при каких условиях функция $f(z)$ представима своим рядом Тейлора в точке z_0, то есть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$. (16)

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 6.4. (О. Коши, 1831) Функция $f(z)$ представима своим рядом Тейлора (16) в любом открытом круге с центром в точке z_0, в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.

Доказательство. Обозначим через R радиус круга аналитичности функции $f(z)$(с центром в точке z_0) и рассмотрим произвольное число R', $0<R'<R$ и круг $|z-z_0|\le kR'$, где $k<1-$ произвольное положительное число. Пусть z – любая точка последнего круга и C – окружность $|\xi-z_0|=R'$. Имеем $|z-z_0|\le kR'$, $|\xi-z_0|=R'$. Следовательно,

$|\xi-z|\ge|\xi-z_0|-|z-z_0|\ge R'-kR'=(1-k)R'$ и формула (15) дает

$$|R_n|\le\frac{k^{n+1}(R')^{n+1}}{2\pi}\cdot\frac{M\cdot 2\pi R'}{(1-k)(R')^{n+2}}=\frac{M\cdot k^{n+1}}{1-k},\qquad \text{где}\qquad M=\max_{|z-z_0|\le R'}|f(z)|.$$

(Функция $f(z)$ аналитическая в этом круге, следовательно, ограничена). Так как $k<1$, то отсюда видно, что $R_n\to 0$ при $n\to\infty$, причем оценка R_n не зависит от z. Таким образом, в любом круге $\left|z-z_0\right|<kR'$, где $0<k<1$, ряд Тейлора сходится равномерно.

Произвольную замкнутую область, лежащую в круге аналитичности функции $f(z)$, можно погрузить в некоторый круг $\left|z-z_0\right|<kR'$, где $0<k<1,\ 0<R'<R$, следовательно, и в такой области ряд сходится равномерно. Теорема доказана.

Приведем тейлоровские разложения основных элементарных функций:

$$\left.\begin{aligned}
&e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\\
&\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\\
&shz=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&chz=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}\right\}\textit{сходятся}\ \forall z$$

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$$

$$(1+z)^m=1+mz+\frac{m(m-1)z^2}{2!}+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)z^n}{n!}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)z^n}{n!}.$$

Два последних разложения сходятся для $|z|<1$ и написаны для тех однозначных ветвей, которые равны соответственно 0 и 1 при $z=1$.

Степенные ряды

Теорема 6.5. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, составленный из функций, аналитических в односвязной области D, сходится равномерно в этой этой области, то его сумма также является функцией, аналитической в области D.

Теорема 6.6. Произвольный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$, составленный из функций, аналитических в области D и непрерывных в $\overline{D}$, равномерно сходящийся в $\overline{D}$, можно почленно дифференцировать в D любое число раз.
Доказательство. Пусть $\xi -$ произвольная точка границы C области D, z – произвольная внутренняя точка этой области. Так как разность $\xi - z$ при фиксированном z ограничена снизу по модулю положительным числом, то $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$, где k – произвольное натуральное число, сходится равномерно относительно ξ на C. Следовательно, его можно почленно интегрировать вдоль C, и, значит, сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z). \tag{17}$$

Здесь для каждого члена использована формула Коши для производных. Нужно доказать, что сумма ряда (17) является k-ой производной суммы $S(z)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. Но в силу равномерной сходимости левую часть (17) можно записать в виде

$$\frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{S(z)}{(\xi - z)^{k+1}} d\xi = S^{(k)}(z).$$

Здесь снова использована формула Коши для производных. Теорема доказана.

Теорема 6.7. (Н. Абель, 1826)

Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ сходится в точке z_1, то он сходится и в любой точке z, расположенной ближе к центру z_0, чем z_1, причем в любом круге $|z-z_0| \le k|z_1 - z_0|$, где $0<k<1$, сходимость ряда равномерна.

Доказательство. Пусть z – произвольная точка последнего круга. Представим n-ый член ряда в виде $a_n (z-z_0)^n = a_n (z_1 - z_0)^n \cdot \left(\dfrac{z-z_0}{z_1 - z_0} \right)^n$.

В силу сходимости ряда в точке z_1, его общий член стремится к нулю, следовательно, ограничен в этой точке, то есть $\left| a_n (z-z_0)^n \right| \le M \cdot k^n$, $0<k<1$. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда в круге $|z-z_0| \le k|z_1 - z_0|$. Так как число k может быть взято сколь угодно близким к 1, то тем самым доказана сходимость ряда в любой точке круга $|z-z_0| < |z_1 - z_0|$. Теорема доказана.

Из теоремы Абеля вытекает, что областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ является открытый круг с центром в точке z_0 (который может вырождаться в точку или заполнять всю плоскость) и еще, быть может, некоторые точки на границе круга. Радиус этого круга называется радиусом сходимости степенного ряда.

Теорема 6.8. Сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.

Доказательство. Пусть $|z-z_0| < R$ будет кругом сходимости степенного ряда. В любом круге $|z-z_0| \le kR$, где $0<k<1$, по теореме Абеля сходимость равномерна, а так как члены ряда $a_n (z-z_0)^n$ – аналитические функции, то по теореме Вейерштрасса его сумма будет аналитической функцией в этом круге. Так как любая внутренняя точка z круга сходимости может быть погружена в некоторый круг $|z-z_0|<kR$, где $0<k<1$, то тем самым доказана аналитичность суммы ряда во всем круге его сходимости. Теорема доказана.

Теорема 6.9. Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.

Доказательство. Пусть в некотором круге $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. (18)

Полагая $z=z_0$, получим $f(z)=a_n$. Дифференцируем ряд (18) почленно:

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-z_0)+3a_3(z-z_0)^2+\dots ,$$
$$f''(z)=2a_2+3\cdot 2a_3(z-z_0)+4\cdot 3a_4(z-z_0)^2+\dots,$$
$$\dots$$
$$f^{(n)}(z)=n!a_n+(n+1)!a_{n+1}(z-z_0)+\dots.$$

Полагая здесь $z=z_0$, получим $f'(z_0)=a_1$, $f''(z_0)=2!a_2$, …, $f^{(n)}(z_0)=n!a_n$. Таким образом, $a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ и ряд (18) является рядом Тейлора функции $f(z)$. Теорема доказана.

Нули аналитической функции

Определение. Точка z_0 называется нулем аналитической функции $f(z)$, если $f(z_0)=0$.

Теорема 6.10. Пусть $f(z)$ аналитическая в области D функция и $z_0\in D$ - нуль функции. Тогда в некоторой окрестности точки z_0 имеем $f(z)=(z-z_0)^k g(z)$, где $g(z)-$аналитическая функция в этой окрестности и $g(z_0)\neq 0$. Число k называется кратностью нуля.

Доказательство. Так как $f(z)$ аналитическая в области D функция, то она раскладывается в ряд Тейлора $f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots,$

где ряд сходится в некотором круге $\left|z - z_0\right| < R$. Далее $f(z_0) = a_0 = 0$, так как z_0 является нулем функции $f(z)$. Возможна ситуация, когда $a_1 = 0$,…, $a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$.

Мы предположили, что $f(z) \neq 0$. Тогда $f(z) = a_k (z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \ldots = (z - z_0)^k \left(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \ldots \right) =$ $= (z - z_0)^k g(z)$. Функция $g(z)$ есть сумма степенного ряда в круге $\left|z - z_0\right| < R$, следовательно, будет аналитической в этом круге, $g(z_0) = a_k \neq 0$. Теорема доказана.

Следствие. Точка z_0 является нулем кратности *k*, если $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0$, …, $f^{(k-1)}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) = 0$.

Теорема 6.11. Пусть функция $f(z)$ аналитическая в окрестности своего нуля z_0 и не равна тождественно нулю ни в какой его окрестности. Тогда существует окрестность точки z_0, в которой функция $f(z)$ не имеет других нулей, кроме z_0.

Теорема 6.12. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитические в области *D* функции и их значения совпадают на некоторой последовательности точек z_n, сходящейся к внутренней точке $z_0 \in D$, то всюду в *D* $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

7. РЯДЫ ЛОРАНА. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Определение. Рядом Лорана называется ряд вида
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \ldots \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots +$$
$$+ a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

Выясним, где ряд Лорана сходится. Он состоит из двух частей:

$a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots-$ правильная часть. Это степенной ряд, он сходится в круге $|z-z_0|<R$, причем в любом круге меньшего радиуса он сходится абсолютно и равномерно, его сумма будет аналитической функцией.

$\ldots\dfrac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\dfrac{a_{-1}}{z-z_0}-$ главная часть ряда Лорана. Если сделать замену $w=\dfrac{1}{z-z_0}$, то получим степенной ряд $a_{-1}w+a_{-2}w^2+\ldots+a_{-n}w^n+\ldots$. Он сходится в круге $|w|<R'$, причем сходится абсолютно и равномерно в меньшем круге и его сумма $S(w)$ будет функцией аналитической. Сделаем обратную замену, получим $|z-z_0|>\dfrac{1}{R'}=r$, в области $|z-z_0|\ge r_1>r$ ряд сходится равномерно и абсолютно. Сумма $S\left(\dfrac{1}{z-z_0}\right)$ будет аналитической функцией как сложная функция. Таким образом, область сходимости ряда Лорана будет не пустой, если $r<R$ и этой областью будет кольцо $r<|z-z_0|<R$. Возможны случаи, когда $r=0$. В любом кольце $r<r_1\le|z-z_0|\le R_1<R$ ряд сходится равномерно и абсолютно, функция $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ будет аналитической функцией внутри кольца.

Теорема 7.1. (П. Лоран, 1843)

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, тогда она представима своим рядом своим рядом Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$,

где $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-z_0|=\rho}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, $r<\rho<R$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

Доказательство. Возьмем любую точку z из кольца (рис. 11).

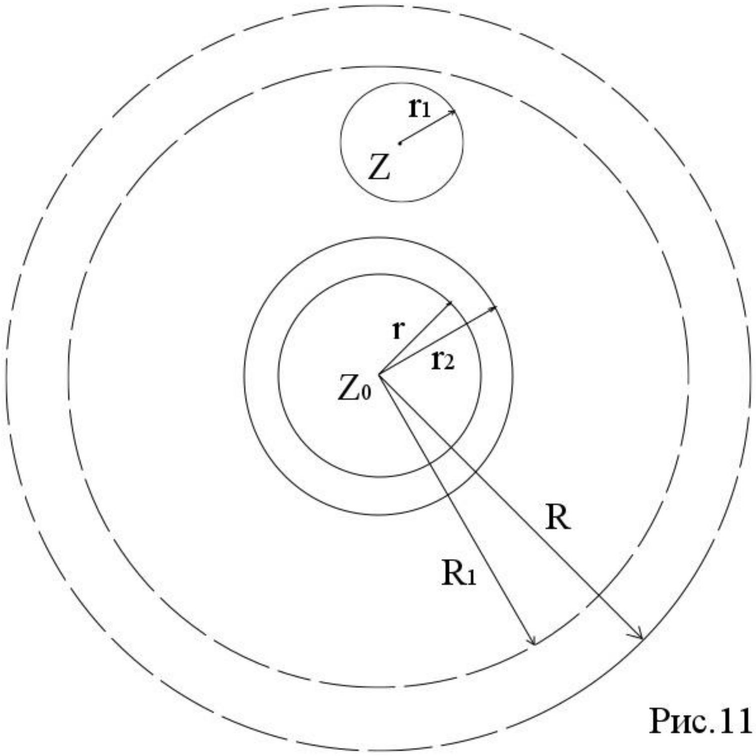

Рис.11

Тогда по интегральной формуле Коши $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z|=r_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$.

По теореме Коши для многосвязных областей

$\oint\limits_{|\xi-z_0|=R_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\oint\limits_{|\xi-z|=r_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint\limits_{|\xi-z_0|=r_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$. Отсюда

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z|=R_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi-z_0|=r_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

Далее, $\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi-z_0}}$; $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right|=\frac{|z-z_0|}{R_1}<1$, поэтому $\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\xi-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^2+\ldots\right)$.

Подставим полученное выражение в первый интеграл:

$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = R_1} f(\xi)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$. Так как ряд сходится равномерно, то его можно почленно интегрировать, получим: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = R_1}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi,\ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (19)$$

Перейдем ко второму интегралу

$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}}$. В этом случае

$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_2}{|z - z_0|} < 1$. Поэтому

$\frac{1}{\xi - z} = -\left(\frac{1}{z - z_0} + \frac{\xi - z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{(\xi - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \ldots\right)$, подставим во второй интеграл, получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2}\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1}(z - z_0)^n d\xi =$$

$$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}a_n(z - z_0)^n, \text{ где } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi.$$

(20)

Заметим, что $\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ будет функцией аналитической в кольце, поэтому $\oint\limits_{|\xi - z_0| = r_2}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = \oint\limits_{|\xi - z_0| = \rho}\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi$, где $r < \rho < R$. Поэтому в формулах (19) и (20) интеграл можно брать по окружности $|\xi - z_0| = \rho$. Теорема доказана.

Пример. 1) Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ в ряд Лорана в кольце $1<|z+2|<4$.

Решение. Разложим функцию на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов:

$$f(z)=\frac{1}{(z+4)(z-2)}=\frac{A}{z+4}+\frac{B}{z-2}=\frac{A(z-2)+B(z+4)}{(z+4)(z-2)},$$

$1=A(z-2)+B(z+4)$,

при $z=2$: $1=6B$, $B=\dfrac{1}{6}$,

при $z=-4$: $1=-6A$, $A=-\dfrac{1}{6}$.

Тогда $f(z)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z+4}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{z+2-4}-\dfrac{1}{z+2+2}\right)=$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{-4\left(1-\dfrac{z+2}{4}\right)}-\frac{1}{(z+2)\left(1+\dfrac{2}{z+2}\right)}\right)=-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^n}+\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z+2)^n}\right)=$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{4^n}+\frac{1}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z+2)^n}\right).$$

2) Рассмотрим различные разложения в ряд Лорана функции $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$ приняв $z_0=0$.

Функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$, $z_2=1$. Следовательно, имеется 3 кольца с центром в точке $z_0=0$, в каждом из которых функция $f(z)$ аналитична:

а) круг $|z|<1$;

б) кольцо $1<|z|<2$;

в) $2<|z|<\infty$.

Решение.

а) $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{A}{z+2}+\dfrac{B}{z-1}$,

$2z+1=A(z-1)+B(z+2)$,

при $z=1$: $3=3B$, $1=B$,

при $z=-2$: $-3=-3A$, $1=A$.

Тогда $f(z)=\dfrac{1}{z+2}+\dfrac{1}{z-1}$.

а) В круге $|z|<1$ имеем $\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$, $|z|<2$ (*)

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n,\ |z|<1.\ (**)$$

Поэтому $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1\right)z^n$, $|z|<1$.

б) В кольце $1<|z|<2$ разложение (*) остается, а ряд (**) расходится, поэтому $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n}$ сходится при $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$, то есть при $|z|>1$.

Таким образом,

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}=\sum_{-\infty}^{n=-1}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

в) Для $|z|>2$ ряд $\sum\limits_{-\infty}^{n=-1}z^n$ сходится, а ряд (*) расходится, поэтому

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{z^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{2^n},$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

Особые точки

Определение. Точка z_0 называется **изолированной особой точкой** функции $f(z)$, если существует окрестность $0<\left|z-z_0\right|<R$ этой точки, в которой функция $f(z)$ будет аналитической.

Так как $f(z)$ будет аналитической в указанной окрестности, то ее можно разложить в ряд Лорана

$$f(z)=\ldots\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots.$$

Классификация изолированных особых точек.

1. Точка z_0 называется **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Например, для функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ точка $z=0$ является устранимой особой точкой, так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$.

Теорема 7.2. Для того, чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы разложение $f(z)$ в ряд Лорана не содержало главной части.

Доказательство. Если $f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\ldots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=a_0$ и, следовательно, z_0 −устранимая особая точка.

Обратно, пусть z_0 – устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда в силу того, что $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ существует и конечен, функция $f(z)$ ограничена в окрестности точки z_0. Пусть $\left|f(z)\right|\le M$. Функция $f(z)$ представима в кольце $0<\left|z-z_0\right|<R$ в виде $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$, где $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\left|z-z_0\right|=\rho}\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. Тогда $\left|a_n\right|\le\dfrac{1}{2\pi}\cdot\max\limits_{\left|z-z_0\right|=\rho}\dfrac{\left|f(z)\right|}{\left|z-z_0\right|^{n+1}}\cdot 2\pi\rho\le\dfrac{M}{\rho^n}$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Так как число ρ можно выбрать сколь угодно малым, то ясно, что все коэффициенты с отрицательными индексами равны нулю. Теорема доказана.

Замечание. По существу мы доказали более сильное утверждение: если функция $f(z)$ ограничена в окрестности изолированной особой точки z_0, то z_0 – устранимая особая точка.

Название «устранимая особая точка» оправдывается тем, что такую точку можно устранить, полагая $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a_0$, после этого функция $f(z)$ будет аналитической и в точке z_0.

2. Точка z_0 называется **полюсом** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Теорема 7.3. Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы главная часть разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0 содержало лишь конечное число слагаемых: $f(z) = \dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \dfrac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. (21)

При этом номер старшего отрицательного члена разложения называется **порядком полюса**.

Доказательство. Пусть z_0 – полюс n-го порядка функции $f(z)$. Тогда функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, $g(z_0) = 0$ имеет в точке z_0 нуль n-го порядка и, следовательно, в окрестности этой точки представляется в виде $g(z) = (z - z_0)^n \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция и $\varphi(z_0) \neq 0$. В этой окрестности $f(z) = \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{(z - z_0)^n \varphi(z)}$. (22)

Но $\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности $|z - z_0| < R$ точки z_0, следовательно, разлагается там в ряд Тейлора

$\dfrac{1}{\varphi(z)} = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \ldots + a_0(z - z_0)^n + \ldots$, где $a_{-n} = \dfrac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0$. Подставляя это разложение в (22), получаем требуемое разложение (21), справедливое в окрестности $0 < |z - z_0| < R$.

Пусть, обратно, в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < R$ точки z_0 имеет месть разложение (21), причем $a_{-n} \neq 0$. Тогда функция $\varphi(z) = (z - z_0)^n \cdot f(z)$, $\varphi(z_0) = a_{-n}$ в круге $|z - z_0| < R$ представляется рядом Тейлора $\varphi(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \ldots + a_0(z - z_0)^n + \ldots$, то есть аналитична. Так как $\lim\limits_{z \to z_0} \varphi(z) = a_{-n} \neq 0$, то $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} = \infty$ и точка z_0 является полюсом функции $f(z)$. Функция $g(z) = \dfrac{1}{f(z)} = \dfrac{(z - z_0)^n}{\varphi(z)}$ имеет в точке z_0 нуль порядка *n*, следовательно, порядок полюса z_0 равен *n*. Теорема доказана.

3. Точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не существует.

Теорема 7.4. Точка z_0 тогда и только тогда является существенно особой точкой функции $f(z)$, когда главная часть лорановского разложения этой функции в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.

Теорема 7.5. (Сохоцкого) Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа *A* существует последовательность точек $z_k \to z_0$ такая, что $\lim\limits_{k \to \infty} f(z_k) = A$.

Доказательство. Прежде всего, существует последовательность $z_k \to z_0$, для которой $f(z_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, ибо в противном случае функция $f(z)$ была бы ограниченной в окрестности z_0 и точка z_0 была бы устранимой особой точкой. Пусть теперь A – произвольное комплексное число. Имеет место один из двух случаев: 1) в любой окрестности точки z_0 найдется точка z, в которой $f(z)=A$ и 2) в некоторой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ не принимает значения A. Тогда в этой окрестности аналитична функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$. Точка z_0 не может быть ни полюсом, ни устранимой особой точкой, ибо в противном случае существовал бы конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left(A+\dfrac{1}{g(z)}\right)$. Следовательно, точка z_0 является существенно особой точкой функции $g(z)$ и по доказанному существует последовательность $z_k\to z_0$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} g(z_k)=\infty$. Для этой последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(A+\dfrac{1}{g(z)}\right)=A$. Теорема доказана.

Примеры. 1) Найти все конечные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3+z^2-z-1}$ и определить их тип.

Решение. Разложим нули знаменателя, разложив его на множители $z^3+z^2-z-1=z^2(z+1)-(z+1)=(z^2-1)(z+1)=(z-1)(z+1)^2$. Следовательно, есть две особые точки: $z_1=1$ и $z_2=1$. Найдем

$\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}=\infty$ и $z_1=1$ является нулем первого порядка знаменателя, следовательно, $z_1=1$ является простым полюсом функции. Аналогично,

$\lim\limits_{z\to -1} f(z)=\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}=\infty$ и $z_2=-1$ является нулем второго порядка знаменателя, следовательно, $z_2=-1$ является полюсом второго порядка функции.

2) Найти все конечные особые точки функции $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ и определить их тип.

Решение. Особой точкой является точка $z=0$. Разложим функцию в ряд Лорана в окрестности этой точки:

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots$. Так как ряд Лорана содержит бесконечное число отрицательных степеней, то $z=0-$существенно особая точка.

8. ВЫЧЕТЫ ФУНКЦИЙ. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЫЧЕТОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ

Определение. **Вычетом** функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 (обозначение $res\, f(z_0)$) называется число $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz$, где $\lambda-$достаточно малая окружность $\left|z-z_0\right|=\rho$, проходимая в положительном направлении.

Из формул для коэффициентов ряда Лорана при $n=-1$ непосредственно вытекает, что $res\, f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)dz=a_{-1}$, то есть вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке равен коэффициенту при минус первой степени в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0.

Отсюда следует, что в устранимой особой точке вычет функции всегда равен нулю.

Пусть z_0- полюс k-го порядка функции $f(z)$. Это значит, что

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+\ldots,\ a_{-k}\neq 0,$$

$$(z-z_0)^k f(z)=a_{-k}+a_{-k+1}(z-z_0)+\ldots+a_{-1}(z-z_0)^{k-1}+a_0(z-z_0)^k+\ldots,$$

$$\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}=(k-1)!a_{-1}+\ldots,$$

$$a_{-1}=res\, f(z_0)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}. \qquad (23)$$

(Непосредственная подстановка $z = z_0$ в выражении производной невозможна, так как z_0 – особая точка функции $f(z)$).

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 8.1. Если z_0 – полюс k-го порядка функции $f(z)$, то вычет функции в этой точке вычисляется по формуле (23).

Следствие 1. Если z_0 – полюс 1-го порядка функции $f(z)$, то $res\, f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$.

Следствие 2. Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причем $\varphi(z), \psi(z)$ аналитические в некоторой в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi(z_0) \neq 0$ (то есть z_0 – нуль первого порядка $\psi(z)$).

Доказательство.

$res\, f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}(z - z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \dfrac{\varphi(z)}{\psi'(z_0)}$. Следствие доказано.

Пример. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)}$ в ее особых точках.

Решение. Особыми точками функции являются точки $z_1 = -1$ и $z_2 = 2$. Найдем

$\lim\limits_{z \to -1} f(z) = \lim\limits_{z \to -1} \dfrac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)} = \infty$ и $z_1 = -1$ является нулем третьего порядка знаменателя, следовательно, $z_1 = -1$ является полюсом третьего порядка функции. Тогда

$$res\, f(-1) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -1} \left((z+1)^3 \frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \to -1} \left(\frac{e^z}{(z-2)} \right)'' =$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z(z-2-1)}{(z-2)^2}\right)'=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{e^z(z-3+1)(z-2)^2-e^z(z-3)2(z-2)}{(z-2)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\frac{e^z((z-2)^2-2(z-3))}{(z-2)^3}=-\frac{17}{54e}.$$

Аналогично,

$\lim\limits_{z\to 2} f(z)=\lim\limits_{z\to 2}\frac{\sin z}{(z-1)(z+1)^2}=\infty$ и $z_2=2$ является нулем первого порядка знаменателя, следовательно, $z_2=2$ является простым полюсом.

Поэтому $res\, f(2)=\lim\limits_{z\to 2}(z-2)\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}=\frac{e^2}{27}$.

Теорема 8.2. (о вычетах)

Пусть функция $f(z)$ непрерывна на границе C области D и аналитична внутри этой области всюду, кроме конечного числа особых точек a_1, $a_2,\ldots,$ a_n. Тогда, если C обходится в положительном направлении, то

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res\, f(a_k). \tag{24}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из теоремы Коши для многосвязных областей. Заключим каждую точку a_k в кружок $\gamma_k:\left|z-a_k\right|=\rho_k$ столь малый, что все такие кружки лежат в области D и не пересекаются друг с другом (рис. 12).

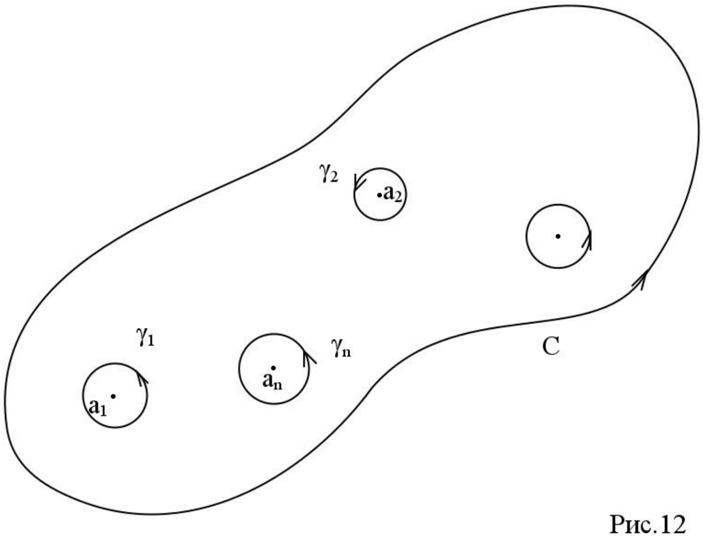

Рис.12

Так как $f(z)$ аналитична в области D^*, ограниченной C и совокупностью окружностей γ_k и непрерывна в $\overline{D^*}$, то $\oint\limits_C f(z)dz + \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\gamma_k^-} f(z)dz = 0$

, где все γ_k^- проходятся против часовой стрелки. Меняя направление обхода и пользуясь определением вычета, согласно которому $\oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot res\, f(a_k)$, получаем нужный результат (24). Теорема доказана.

Пример. Вычислить интеграл по теореме Коши о вычетах $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$.

Решение. В области $|z| = 4$ функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ аналитична всюду, кроме точек $z_1 = -1$ и $z_2 = 0$.

Найдем $\lim\limits_{z \to -1} f(z) = \lim\limits_{z \to -1} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} = \infty$ и $z_1 = -1$ является нулем первого порядка знаменателя, следовательно, $z_1 = -1$ является простым полюсом функции. Поэтому $res\, f(-1) = \lim\limits_{z \to -1} (z+1) \frac{e^z - 1}{(z+1)z} = 1 - e^{-1}$.

Найдем $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \lim\limits_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z(z+1)} = \lim\limits_{z\to 0}\frac{1}{z+1} = 1$ и $z_2 = 0$ является устранимой особой точкой, следовательно, $res\, f(0) = 0$. Таким образом, $\oint\limits_{|z|=4}\frac{e^z-1}{z^2+z}dz = 2\pi i(1-e^{-1})$.

Интегралы от рациональных функций

Рассмотрим несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, где $P(x), Q(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно, пусть $Q(x) \neq 0$ и $n \geq m+2$, то есть степень знаменателя по крайней мере на 2 единицы больше степени числителя.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\frac{P(x)}{Q(x)}dx.$$

Рассмотрим интеграл по следующему контуру: $\gamma_k : |z| = R$, $Jmz \geq 0$ (рис. 13).

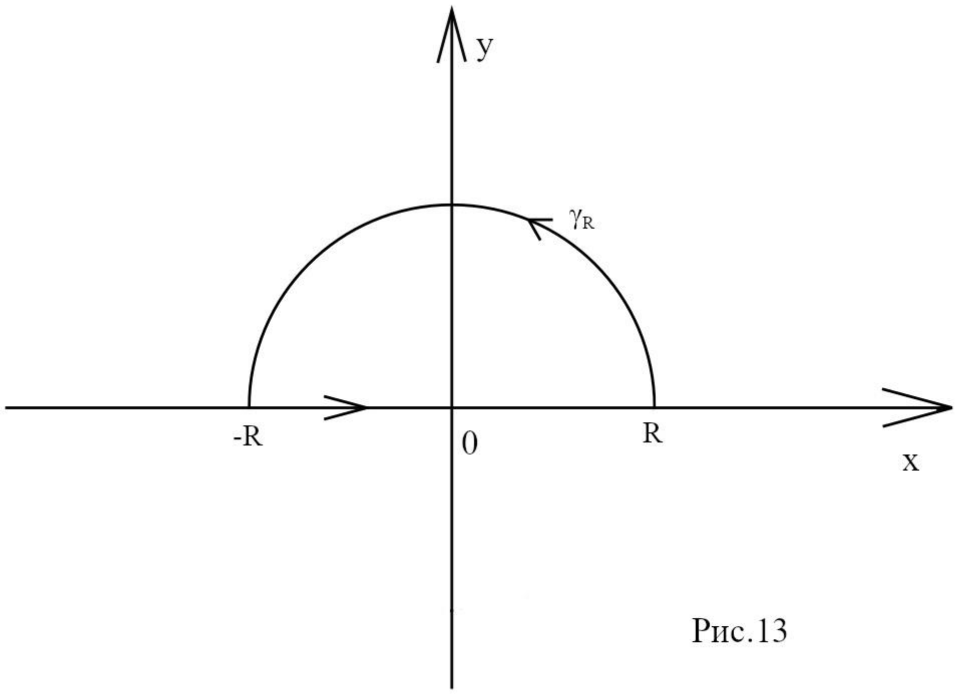

Рис.13

Тогда $\oint\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = \int\limits_{-R}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)}dx + \int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz$;

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz - \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

Функция $\frac{P(z)}{Q(z)}$ имеет особые точки в корнях $Q(z)=0$. Выберем R настолько большим, чтобы все особые точки, лежащие в верхней полуплоскости, попали внутрь области, ограниченной C_R. Тогда

$$\oint\limits_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2\pi i \sum_{\substack{Q(a_k) \\ \operatorname{Im} a_k > 0}} res \frac{P(a_k)}{Q(a_k)}.$$

$$\left| \int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz \right| = \left| \int\limits_{\gamma_R} \frac{z^2 P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{1}{z^2}dz \right| \le \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{z^2 P(z)}{Q(z)} \right| \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \pi R.$$

Так как $n \ge m+2$, то $\deg Q(z) \ge \deg P(z)\cdot z^2$, поэтому $\lim\limits_{z\to a} \frac{z^2 P(z)}{Q(z)} = a$, то есть конечен. Это означает, что что функция будет ограничена, то есть существует константа M такая, что $|z| \ge R$, $\left| \frac{z^2 P(z)}{Q(z)} \right| \le M$,

$\left|\int\limits_{\gamma_R} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \le \frac{M}{R^2}\cdot \pi R \to 0$ при $R \to \infty$. Таким образом, доказали формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{\substack{Q(a_k) \\ \operatorname{Im} a_k > 0}} res \frac{P(a_k)}{Q(a_k)}.$$

Пример. Вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$. В верхней полуплоскости лежит одна особая точка $z = i$, которая является полюсом второго порядка, так как $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \lim\limits_{z\to -1} \frac{1}{(z^2+1)^2} = \infty$ и $z = i$ является нулем второго порядка знаменателя. Найдем вычет в этой точке:

$$res\, f(i) = \lim_{z\to i}\left((z-i)^2 \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^2}\right)' = \lim_{z\to i}\left(-\frac{2}{(z+i)^3}\right) =$$

$= -\frac{2}{(2i)^3} = \frac{1}{4i}$. Окончательно получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(x, y)-$ рациональная функция двух переменных. Применим комплексную подстановку $z = e^{i\varphi}$, тогда $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$, $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$, $d\varphi = \frac{dz}{iz} = -i\frac{dz}{z}$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $z = e^{i\varphi}$ пробегает единичную окружность с центром в начале координат, то есть

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}, \frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)\cdot\frac{-idz}{z}.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\sin\varphi} = \left[z = e^{i\varphi}\right] = \oint_{|z|=1} \frac{-idz}{z\left(2+\frac{z^2-1}{2iz}\right)} = 2\oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4iz-1}.$$

Найдем особые точки подынтегральной функции: $z^2+4iz-1=0$, $z=(-2\pm\sqrt{3})i$. Внутрь контура $|z|=1$ попадает только точка $z=(-2+\sqrt{3})i$, которая является простым полюсом подынтегральной функции, так как $\lim\limits_{z\to(-2+\sqrt{3})i} \frac{1}{z^2+4iz-1} = \infty$ и $z=(-2+\sqrt{3})i$ является корнем первого порядка знаменателя. Найдем вычет в этой точке

$$res\, f((-2+\sqrt{3})i) = \lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i} (z-(-2+\sqrt{3})i)\frac{1}{\left(z-(-2+\sqrt{3})i\right)\left(z+(2+\sqrt{3})i\right)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}i}.$$

Тогда $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\sin\varphi} = 4\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}i} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Рассмотрим интегралы видов $\int\limits_0^{\infty} R(x)\cdot\cos\lambda x\,dx$, $\int\limits_0^{\infty} R(x)\cdot\sin\lambda x\,dx$, где $R(x)-$ правильная рациональная дробь, $\lambda>0-$ любое действительное число. При вычислении таких интегралов удобно пользоваться **леммой Жордана**:

Пусть $g(z)-$ функция, аналитическая в верхней полуплоскости $(0<\arg z<\pi)$, за исключением конечного числа особых точек, и стремится в этой полуплоскости к нулю при $|z|\to\infty$. Тогда при $\lambda>0$

$\lim\limits_{R\to\infty}\oint\limits_{C_R} g(z)e^{i\lambda z}dz = 0$, где C_R – полуокружность в верхней полуплоскости с центром в начале координат и радиуса R.

Пример. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\sin x\,dx}{(x^2+16)^2}$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+16)^2}$.

При $z=x$ $\operatorname{Im} f(z)$ совпадает с подынтегральной функцией. По лемме Жордана

$$\lim_{R\to\infty}\oint\limits_{C_R}\frac{ze^{iz}}{(z^2+16)^2}dz=\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{-R}^{R} f(z)dz+\int\limits_{C_R} f(z)dz\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\lim_{R\to\infty}\oint\limits_{C} f(z)dz=\operatorname{Im}\left(2\pi i\sum res\ f(z_k)\right)=\operatorname{Im}\left(2\pi i\cdot res f(4i)\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(2\pi i\lim_{z\to 4i}\left((z-4i)^2\cdot\frac{ze^{iz}}{(z-4i)^2(z+4i)^2}\right)'\right)=$$

$$\operatorname{Im}\left(2\pi i\lim_{z\to 4i}\left(\frac{(1+iz)e^{iz}(z+4i)^2-2ze^{iz}(z+4i)}{(z+4i)^4}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(2\pi i\lim_{z\to 4i}\left(\frac{e^{iz}\left((1+iz)(z+4i)-2z\right)}{(z+4i)^3}\right)\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(2\pi i\left(\frac{e^{-4}(-28i)}{-512i}\right)\right)=\operatorname{Im}\left(2\pi i\left(\frac{7e^{-4}}{128}\right)\right)=\frac{7\pi e^{-4}}{64}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x\,dx}{(x^2+16)^2}=\frac{7\pi e^{-4}}{64}.$$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. Найти все корни уравнений и вычислить величины:
$A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ и $B=x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

1. $x^3+3x^2+7x+5=0$
2. $x^3+5x^2+12x+8=0$
3. $x^3+7x^2+19x+13=0$
4. $x^3+3x^2+12x+10=0$
5. $x^3+5x^2+17x+13=0$
6. $x^3+7x^2+31x+25=0$
7. $x^3+4x^2+9x+10=0$
8. $x^3+8x^2+25x+26=0$
9. $x^3+6x^2+16x+16=0$
10. $x^3+4x^2+14x+20=0$
11. $x^3+6x^2+21x+26=0$
12. $x^3+8x^2+37x+50=0$
13. $x^3+3x^2+19x+17=0$
14. $x^3+4x^2+21x+34=0$
15. $x^3+x^2+3x-5=0$
16. $x^3+5x^2+7x-13=0$
17. $x^3+x^2+8x-10=0$
18. $x^3+3x^2+9x-13=0$
19. $x^3+5x^2+19x-25=0$
20. $x^3+x^2+15x-17=0$
21. $x^3-x^2+3x+5=0$
22. $x^3-3x^2+4x+8=0$
23. $x^3-5x^2+7x+13=0$
24. $x^3-x^2+8x+10=0$
25. $x^3-3x^2+9x+13=0$
26. $x^3-5x^2+19x+25=0$
27. $x^3-x^2+15x+17=0$
28. $x^3-3x^2+7x-5=0$
29. $x^3-7x^2+31x-25=0$
30. $x^3-7x^2+19x-13=0$

2. Вычислить $z^n\cdot\bar{z}$ (для вариантов 1-16)

1. $z=1+\sqrt{3}i$, $n=13$.
2. $z=-1+\sqrt{3}i$, $n=13$.
3. $z=1-\sqrt{3}i$, $n=13$.
4. $z=-1-\sqrt{3}i$, $n=13$.
5. $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $n=17$.
6. $z=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $n=17$.
7. $z=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $n=17$.
8. $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $n=17$.
9. $z=\sqrt{3}+3i$, $n=19$.
10. $z=\sqrt{3}-3i$, $n=19$.
11. $z=-\sqrt{3}+3i$, $n=19$.
12. $z=-\sqrt{3}-3i$, $n=19$.
13. $z=\sqrt{3}+i$, $n=25$.
14. $z=\sqrt{3}-i$, $n=25$.
15. $z=-\sqrt{3}+i$, $n=25$.
16. $z=-\sqrt{3}-i$, $n=25$.

$\bar{z}^n \cdot z$ (для вариантов 17-30)

17. $z = 1 + \sqrt{3}i$, $n = 19$.

18. $z = -1 + \sqrt{3}i$, $n = 19$.

19. $z = 1 - \sqrt{3}i$, $n = 19$.

20. $z = -1 - \sqrt{3}i$, $n = 19$.

21. $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $n = 9$.

22. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $n = 9$.

23. $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $n = 9$.

24. $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $n = 9$.

25. $z = \sqrt{3} + 3i$, $n = 25$.

26. $z = -\sqrt{3} + 3i$, $n = 25$.

27. $z = \sqrt{3} - 3i$, $n = 25$.

28. $z = -\sqrt{3} - 3i$, $n = 25$.

29. $z = \sqrt{3} + i$, $n = 13$.

30. $z = -\sqrt{3} + i$, $n = 13$.

3. Найти все значения z и изобразить их на комплексной плоскости

1. $z^6 + 64 = 0$

2. $z^3 - i - \sqrt{3} = 0$

3. $z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0$

4. $z^4 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

5. $z^4 - 2 - 2i = 0$

6. $81z^4 + 1 = 0$

7. $z^4 + 4 - 4i = 0$

8. $625z^4 + 1 = 0$

9. $z^5 - 1 + i = 0$

10. $16z^4 + 81 = 0$

11. $z^5 - 1 + \sqrt{3}i = 0$

12. $z^4 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = 0$

13. $z^4 - 4 + 4i = 0$

14. $z^4 + 1 + \sqrt{3}i = 0$

15. $z^5 + 1 - \sqrt{3}i = 0$

16. $z^4 + 625 = 0$

17. $z^5 - 1 - \sqrt{3}i = 0$

18. $z^4 + 5 + 5i = 0$

19. $z^5 + 1 + i = 0$

20. $z^5 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0$

21. $z^5 + 243 = 0$

22. $8z^3 + i = 0$

23. $8z^3 - i = 0$

24. $\sqrt{2}z^3 = 1 - i$

25. $\sqrt{2}z^3 = 1 + i$

26. $16z^4 + 1 = 0$

27. $z^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

28. $z^4 + 8 + 8\sqrt{3}i = 0$

29. $z^6 + 1 = 0$

30. $z^4 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$

4. Решить уравнения

1. $e^z - 1 - i = 0$
2. $e^z - 1 + i = 0$
3. $e^{\pi z} + 1 = 0$
4. $e^{z-i} - 1 = 0$
5. $ie^{\frac{\pi}{2}z} - 1 = 0$
6. $ie^{\frac{\pi}{2}z} + 1 = 0$
7. $e^{i\pi z} + \pi i = 0$
8. $e^{i\pi z} + e^{\pi} = 0$
9. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0$
10. $e^{\frac{2\pi}{z}} + 2e^{\frac{\pi}{z}} + 1 = 0$
11. $\ln(z - i) = \ln 3 + \dfrac{\pi i}{2}$
12. $\ln(iz) = \pi i$
13. $\ln(4z + 5i) = 2{,}5\pi i$
14. $\ln(\dfrac{1}{2}z^2 + z) + \pi i = 0$
15. $\ln(z^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = \dfrac{2\pi i}{3}$
16. $\ln(z + 2) = 2\pi i$
17. $\sin z = 2i$
18. $\sin z = 2$
19. $\cos z = 2i$
20. $\cos z = 2$
21. $e^z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$
22. $e^z - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = 0$
23. $e^{i\pi z} - \pi i = 0$
24. $e^{2z} + e^z - 2 = 0$
25. $\ln(z + i) = \ln 2 + \dfrac{\pi i}{2}$
26. $\ln(iz) = 2\pi i$
27. $\sin z = 4i$
28. $\sin z = 4$
29. $\cos z = 4i$
30. $\cos z = 4$

5. Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z_0)$.

1. $f(z) = \sin 4z$, $z_0 = \dfrac{1}{8}(\pi + i\ln 2)$
2. $f(z) = \sin iz$, $z_0 = \ln 2$
3. $f(z) = \sin 3z$, $z_0 = \dfrac{1}{6}\pi + \dfrac{i}{3}\ln 3$
4. $f(z) = \sin\dfrac{z}{i}$, $z_0 = -\ln 2$
5. $f(z) = \cos 6z$, $z_0 = \pi + \dfrac{i}{6}\ln 3$
6. $f(z) = \cos iz$, $z_0 = \ln 4$
7. $f(z) = \cos 2z$, $z_0 = \dfrac{i}{2}\ln 2$
8. $f(z) = \cos\dfrac{z}{i}$, $z_0 = \ln 5$
9. $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = \ln 3 + \dfrac{\pi}{4}i$
10. $f(z) = e^{iz}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2} + i$

11. $f(z)=e^{-z}$, $z_0=\pi i$

12. $f(z)=e^{5z}$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}i$

13. $f(z)=ze^{z}$, $z_0=2\pi i$

14. $f(z)=\sin 4z$, $z_0=\dfrac{1}{2}(3+i\ln 2)$

15. $f(z)=\sin(z-i)$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}+i$

16. $f(z)=\sin(z+i)$, $z_0=\pi+i$

17. $f(z)=z^3$, $z_0=1-i$

18. $f(z)=\dfrac{1}{z}$, $(z\neq 0)$, $z_0=1+i$

19. $f(z)=e^{z-i}$, $z_0=\ln\pi+(1+\pi)i$

20. $f(z)=\cos(z-i)$, $z_0=\pi+i$

21. $f(z)=\cos(3z-1)$, $z_0=\dfrac{1}{3}(1-i\ln 2)$

22. $f(z)=\cos(z+i)$, $z_0=\pi-i$

23. $f(z)=e^{2z-1}$, $z_0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\pi}{4}i$

24. $f(z)=\dfrac{1}{iz}$, $(z\neq 0)$, $z_0=1-i$

25. $f(z)=\dfrac{1}{z+i}$, $(z\neq -i)$, $z_0=-1$

26. $f(z)=\dfrac{1}{z-i}$, $(z\neq i)$,
$z_0=1+2i$

27. $f(z)=(z+i)^3$, $z_0=1-2i$

28. $f(z)=(z-2i)^3$, $z_0=5+2i$

29. $f(z)=z^4$, $z_0=2i$

30. $f(z)=z^5$, $z_0=i$

6. Вычислить интеграл

1. $\int\limits_C (1-i+2\bar{z})dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.
2. $\int\limits_C (1-i+2\bar{z})dz$, где C – ломаная $z_1z_2z_3$: $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=1+i$.
3. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, где C – часть кубической параболы $y=x^3$, соединяющий точки $z_1=0$ и $z_2=1+i$.
4. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1=-1-i$ и $z_2=0$.

5. $\int_C \operatorname{Im} z\,dz$, где C – часть параболы $y = x^2$, соединяющий точки $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 0$.

6. $\int_C z \operatorname{Im} z\,dz$, где C – ломаная $z_1 z_2 z_3$: $z_1 = -1 + i$, $z_2 = i$, $z_3 = 0$.

7. $\int_C (1 + 2i - 2\bar{z})dz$ где C – часть параболы $y = x^2$, соединяющий точки $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 0$.

8. $\int_C (1 + 2i - 2\bar{z})dz$ где C – ломаная $z_1 z_2 z_3$: $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 1 - i$.

9. $\int_C z\bar{z}dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

10. $\int_C z \operatorname{Re} z\,dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = 0$.

11. $\int_C z \operatorname{Im} z\,dz$, где C – отрезок прямой, соединяющий точки $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 0$.

12. $\int_C (1 + z)\bar{z}dz$ где C – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

13. $\int_C i\bar{z}dz$ где C – дуга окружности $|z| = 1$, соединяющей точки $z_1 = i$ и $z_2 = -1$.

14. $\int_C (3z - z)\bar{z}dz$ где C – дуга окружности $|z| = 1$, $0 \le \arg z \le \pi$.

15. $\int_C |z|dz$ где C – дуга окружности $|z| = 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}$.

16. $\int_C \bar{z}dz$ где C – дуга эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$, соединяющая точки $z_1 = 3i$ и $z_2 = -2$.

17. $\int\limits_C \bar{z}dz$ где C – дуга эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5\sin t \end{cases}$, соединяющая точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 5i$.

18. $\int\limits_C i\bar{z}dz$ где C – дуга эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$, соединяющая точки $z_1 = 2$ и $z_2 = 4i$.

19. $\int\limits_C i\bar{z}dz$ где C – дуга эллипса $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, соединяющая точки $z_1 = 3$ и $z_2 = 2i$.

20. $\int\limits_C \operatorname{Im} z dz$, где C – часть кубической параболы $y = x^3$, соединяющий точки $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = 0$.

21. $\int\limits_{-1-i}^{1+i} \left(3z^2 + 4z\right)dz$

22. $\int\limits_{i}^{\pi} z\sin z dz$

23. $\int\limits_{i}^{0} z\cos z dz$

24. $\int\limits_{1}^{\pi i} ze^z dz$

25. $\int\limits_{0}^{1+i} z^2 e^z dz$

26. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{i} e^{-iz} dz$

27. $\int\limits_{1-i}^{1+i} ze^{z^2} dz$

28. $\int\limits_{0}^{i\ln 2} \sin z\cos z dz$

29. $\oint\limits_{|z|=1} z\operatorname{Re} z dz$

30. $\oint\limits_{|z|=2} z\operatorname{Im} z dz$

7. Вычислить интеграл по замкнутому контуру, используя интегральную формулу Коши (обход контура против часовой стрелки).

1. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{e^z}{z+i}dz$

2. $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{iz}}{z+1}dz$

3. $\oint\limits_{|z+2i|=2} \frac{\sin \pi z}{z+2i}dz$

4. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{z} dz$

5. $\oint\limits_{|z+\pi i|=1} \frac{z^3}{z+\pi i} dz$

6. $\oint\limits_{|z+3|=1} \frac{(z+i)^2}{z+3} dz$

7. $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\sin iz}{z+2} dz$

8. $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\cos z}{z-2i} dz$

9. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz$

10. $\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+4} dz$

11. $\oint\limits_{|z+\pi i|=1} \frac{z^2}{z^2+\pi^2} dz$

12. $\oint\limits_{|z-3i|=1} \frac{iz^3}{z^2+9} dz$

13. $\oint\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos iz}{z^2+z} dz$

14. $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin iz}{z^2-z} dz$

15. $\oint\limits_{|z|=\frac{2}{3}} \frac{\sin iz}{z^2+2z} dz$

16. $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2+2z} dz$

17. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz$

18. $\oint\limits_{|z+3i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+9} dz$

19. $\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{z^3}{z^2+4} dz$

20. $\oint\limits_{|z+3i|=4} \frac{\sin z}{z^2+9} dz$

21. $\oint\limits_{|z-4i|=2} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{z^2+16} dz$

22. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi z}{z^2+z} dz$

23. $\oint\limits_{|z+3|=1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^2+3z} dz$

24. $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{z^2+1}{z^2-z} dz$

25. $\oint\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2-4z+3} dz$

26. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{i\frac{\pi}{3} z}}{z^2+2z-3} dz$

27. $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{\cos \frac{\pi}{3} z}{z^2-2z-3} dz$

28. $\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{\cos \pi z}{z^2+4z+3} dz$

29. $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{e^{i\pi z}}{z^2-3z+2} dz$

30. $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{z^2+z-2} dz$

8. Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах

1. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)},\ 0<|z|<1$

2. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)},\ 1<|z|<\infty$

3. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)},\ 0<|z+1|<1$

4. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)},\ 1<|z+1|<\infty$

5. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\ 0<|z-1|<3$

6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)},\ 3<|z-1|<\infty$

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)},\ 0<|z+2|<3$

8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z+2)},\ 3<|z+2|<\infty$

9. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)},\ 0<|z-2|<2$

10. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)},\ 2<|z+1|<\infty$

11. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)},\ 0<|z|<2$

12. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)},\ 2<|z|<\infty$

13. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)},\ 0<|z+2|<2$

14. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)},\ 2<|z+2|<\infty$

15. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)},\ 0<|z|<2$

16. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)},\ 2<|z|<\infty$

17. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1},\ 0<|z-i|<2$

18. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1},\ 2<|z-i|<\infty$

19. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1},\ 0<|z+i|<2$

20. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1},\ 2<|z+i|<\infty$

21. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)},\ 2<|z|<3$

22. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)},\ 3<|z|<\infty$

23. $f(z)=\dfrac{2}{z^2-1},\ 1<|z+2|<3$

24. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8},\ 1<|z+2|<4$

25. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2},\ 1<|z|<2$

26. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)},\ 1<|z|<2$

27. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3},\ 2<|z-1|<\infty$

28. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2},\ 0<|z-2|<1$

29. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2},\ 1<|z|<2$

30. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2},\ 2<|z|<\infty$

9. Найти все конечные особые точки и указать их тип.

1. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-i)^3}$

2. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$

3. $f(z)=\dfrac{1}{(z^3+i)^3}$

4. $f(z)=\dfrac{1}{(z^3-i)^3}$

5. $f(z)=\dfrac{1}{(z^4-1)^2}$

6. $f(z)=\dfrac{1}{(z^4+1)^2}$

7. $f(z)=\dfrac{1}{(e^z-2)^3}$

8. $f(z)=\dfrac{1}{(e^z+i)^2}$

9. $f(z)=\dfrac{1}{(e^z+2)^2}$

10. $f(z)=\dfrac{1}{(e^z-i)^3}$

11. $f(z)=\dfrac{z}{e^z+i^2}$

12. $f(z)=\dfrac{z-\pi}{e^{iz}+1}$

13. $f(z)=\dfrac{\cos z+1}{z-3\pi}$

14. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$

15. $f(z)=\dfrac{\sin z-1}{z-\frac{\pi}{2}}$

16. $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

17. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^3}$

18. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{(z-\pi)^2}$

19. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$

20. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$

21. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z(z-1)^2}$

22. $f(z)=\dfrac{e^{2z}-2e^z+1}{z^2(z-1)}$

23. $f(z)=\dfrac{1+\sin z}{(2z+\pi)^2}$

24. $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{(2z+\pi)z}$

25. $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$

26. $f(z)=\cos\dfrac{\pi}{z+i}$

27. $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z+i}$

28. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}$

29. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z^2}$

30. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$

10. Найти вычеты в конечных особых точках функции

1. $f(z)=\dfrac{z^3}{z^2+1}$

2. $f(z)=\dfrac{\cos iz}{z^2+4}$

3. $f(z)=\dfrac{iz}{z^2+9}$

4. $f(z)=\dfrac{e^{i\pi z}}{z^2-z}$ 5. $f(z)=\dfrac{chiz}{z^2+z}$ 6. $f(z)=\dfrac{\cos i\pi z}{z^2+iz}$

7. $f(z)=\dfrac{shiz}{z^2-3z+2}$ 8. $f(z)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}z}{(z-1)(z-3)}$ 9. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^2}$

10. $f(z)=\dfrac{e^{2iz}-1}{z-\pi}$ 11. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 12. $f(z)=\dfrac{e^z+1}{z^4}$

13. $f(z)=\dfrac{\sin iz}{z^4}$ 14. $f(z)=\dfrac{\cos iz}{z^4}$ 15. $f(z)=\dfrac{e^{iz}-1}{z^3}$

16. $f(z)=\dfrac{e^{iz}+2}{z^5}$ 17. $f(z)=\dfrac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}$ 18. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z+1)z^2}$

19. $f(z)=\dfrac{iz^2}{(z+1)(z-i)^2}$ 20. $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z-2i)^2}$ 21. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)z^3}$

22. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2z^3}$ 23. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)z^3}$ 24. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)z^3}$

25. $f(z)=z^2e^{\frac{i}{z}}$ 26. $f(z)=z^4\sin\dfrac{i}{z}$ 27. $f(z)=z^3\cos\dfrac{i}{z}$

28. $f(z)=\dfrac{1}{(1-iz)z^6}$ 29. $f(z)=\dfrac{1}{(1+iz)z^6}$ 30. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z^2)z^3}$

11. Используя теорему Коши о вычетах, вычислить следующие интегралы.

1. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}dz$ 2. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{dz}{z^2(z^2+4)}$ 3. $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{(1+e^{2z})dz}{z^2}$

4. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\sin 2z\,dz}{(z-\frac{\pi}{2})^2(z-1)}$ 5. $\oint\limits_{|z|=3}\dfrac{\sin 2z\,dz}{(z-1)^4}$ 6. $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^z dz}{z^2(z^2+9)}$

7. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{dz}{z(z-1)^2}$ 8. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{\cos 2z\,dz}{(z-1)^3}$ 9. $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{e^{iz}dz}{z(z^2+9)}$

10. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z+1)^3(z-2)}$ 11. $\oint\limits_{\left|z-\frac{\pi}{4}\right|=1} \frac{\sin z dz}{(z^2-\frac{\pi}{4}z)}$ 12. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)}$

13. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{zdz}{(z+1)^3(z-2)}$ 14. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 2zdz}{(z+i)(z-1)^2}$ 15. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{(1-\cos z)dz}{z^2(z-3)}$

16. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z+3)(z^2-1)}$ 17. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos zdz}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}$ 18. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}dz}{(z-i)^3(z-1)}$

19. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{(1-\cos 2z)dz}{z^2(z-i)}$ 20. $\oint\limits_{|z|=\pi} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)dz}{(z-1)(z-2)^2}$ 21. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^4(z-i)^2}$

22. $\oint\limits_{|z|=1} z^5 \cdot \cos\frac{i}{z} dz$ 23. $\oint\limits_{|z|=1} z^3 \cdot e^z dz$ 24. $\oint\limits_{|z|=1} z^2 \cdot \sin\frac{i}{z} dz$

25. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} ctg\pi z dz$ 26. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z\cdot ctg\pi z dz$ 27. $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2\cdot ctg\pi z dz$

28. $\oint\limits_{|z|=1} tg\pi z dz$ 29. $\oint\limits_{|z|=2} z\cdot tg\pi z dz$ 30. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{zdz}{(z-1)^3(z-2)^2}$

12. Вычислить несобственный интеграл от действительной функции, используя теорему Коши о вычетах.

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}dx$ 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4+x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3+x^2}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}dx$ 4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2}{\left(x^2+16\right)\left(x^2+4\right)}dx$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{5+x^2}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+25\right)}dx$ 6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-4}{\left(x^2+36\right)\left(x^2+16\right)}dx$

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{6+x^2}{(x^2+81)(x^2+25)}dx$

8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{8+x^2}{(x^2+1)(x^2+49)}dx$

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{10+x^2}{(x^2+1)(x^2+100)}dx$

10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{8+x^2}{(x^2+4)(x^2+64)}dx$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{12+x^2}{(x^2+1)(x^2+16)}dx$

12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-2}{(x^2+16)(x^2+25)}dx$

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3+x^2}{(x^2+36)(x^2+25)}dx$

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{6+x^2}{(x^2+36)(x^2+9)}dx$

15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-9}{(x^2+36)(x^2+81)}dx$

16.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4+x^2}{(x^2+36)(x^2+121)}dx$$

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+36)^2}dx$

18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+4)^2}dx$

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+8}{(x^2+25)^2}dx$

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+9)^2}dx$

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+12}{(x^2+1)^2}dx$

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-6}{(x^2+49)^2}dx$

23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+64)^2}dx$

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+9}{(x^2+81)^2}dx$

25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+8}{\left(x^2+100\right)^2}dx$ 26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{\left(x^2+121\right)^2}dx$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{\left(x^2+25\right)^2}dx$ 28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+25}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+6}{\left(x^2+36\right)^2}dx$ 30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{\left(x^2+36\right)^2}dx$

13. Вычислить несобственный интеграл

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$ 2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx$

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ 4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx$ 6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\frac{x}{2}}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$

7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+3)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx$ 8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(x^3-2\right)\cos\frac{x}{2}}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx$ 10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{\left(x^2+9\right)^2}dx$

11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx$ 12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 5x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$

13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4}dx$

14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^4+10x^2+9}dx$

15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx$

17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+100\right)^2}dx$

18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+16\right)\left(x^2+9\right)}dx$

19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x-\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{\left(x^2+64\right)^2}dx$

21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}dx$

22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(x^2+16\right)^2}dx$

23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{\left(x^2+25\right)^2}dx$

24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+5x)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx$

25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\cos x}{x^4+10x^2+9}dx$

26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx$

27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^3+1)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$

28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x-\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx$

30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+x)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx$

14. Вычислить определенный интеграл

1. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi-1}{16\cos^2\varphi-25}d\varphi$

2. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{13-12\cos\varphi}d\varphi$

3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi+12\cos\varphi-5}{32\cos^2\varphi-28\cos\varphi-85}d\varphi$

4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi-7\cos\varphi+9}{16\cos^2\varphi-40\cos\varphi+25}d\varphi$

5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi-3\cos\varphi-11}{16\cos^2 2\varphi-5}d\varphi$

6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi+9\cos\varphi-5}{12\cos^2\varphi-5\cos\varphi-25}d\varphi$

7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos\varphi+1}{3\cos\varphi+5}d\varphi$

8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi}{26-10\cos\varphi}d\varphi$

9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi-9\cos\varphi+2}{16\cos^2\varphi-40\cos\varphi+25}d\varphi$

10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi-3\cos\varphi-1}{16\cos^2\varphi-40\cos\varphi+25}d\varphi$

11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi+3\cos\varphi-1}{16\cos^2\varphi+40\cos\varphi+25}d\varphi$

12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi+\cos\varphi-3}{16\cos^2\varphi-25}d\varphi$

13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{16\cos^2\varphi-2\cos\varphi-9}{16\cos^2\varphi-25}d\varphi$

14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{10\cos^2\varphi+2\cos\varphi-5}{4\cos\varphi-5}d\varphi$

15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi+\cos\varphi-2}{4\cos\varphi+5}d\varphi$

16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi-33\cos\varphi+25}{12\cos^2\varphi-35\cos\varphi+25}d\varphi$

17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi-27\cos\varphi+29}{24\cos^2\varphi-91\cos\varphi+85}d\varphi$

18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{4\cos^2\varphi+3\cos\varphi-13}{12\cos^2\varphi-5\cos\varphi-25}d\varphi$

19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi+11\cos\varphi-9}{12\cos^2\varphi+5\cos\varphi-25}d\varphi$

20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos\varphi+3}{3\cos\varphi-5}d\varphi$

21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi+16\cos\varphi-13}{32\cos^2\varphi+28\cos\varphi-85}d\varphi$

22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+2\sin\varphi+4}$

23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{2\cos^2\varphi+3\cos\varphi+\sin\varphi\cos\varphi}{5\cos^2\varphi+12\cos\varphi+8}d\varphi$

24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi+2}d\varphi$

25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\sin\varphi}$

26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4+\sin\varphi}$

27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+2\sin\varphi+2}$

28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi+4}$

29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{3\cos\varphi+2}$

30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{4\cos\varphi+5}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО»

1. Комплексные числа. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная форма записи комплексного числа.
2. Алгебраические действия с комплексными числами.
3. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.
4. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитические функции.
5. Гармонические функции.
6. Показательная и логарифмическая функции комплексного переменного.
7. Тригонометрические функции комплексного переменного.
8. Интегрирование функций комплексного переменного.
9. Теорема Коши. Теорема Коши для многосвязных областей.
10. Интегральная формула Коши и формула Коши для производных.
11. Равномерная сходимость последовательности функций комплексного переменного и функционального ряда.

12. Разложение функции комплексного переменного в ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций комплексного переменного в ряд Тейлора.

13. Степенные ряды функций комплексного переменного.

14. Нули аналитической функции комплексного переменного.

15. Ряды Лорана. Разложение функции в ряд Лорана.

16. Изолированные особые точки. Классификация изолированных особых точек.

17. Вычеты функций. Теорема о вычетах.

18. Приложение вычетов к вычислению интегралов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие отражает опыт работы автора со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит раздел высшей математики, изучаемый в третьем семестре «Теория функций комплексного переменного».

Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты второго курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лавретьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – СПб. : Лань, 2002.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М. : Наука, 1981.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного : учеб. для вузов. – 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с. – ISBN 5-02-013925-4.
4. Еропкина Т.А. Теория функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Задания к типовым расчетам по математике : учебное пособие / Т. А. Еропкина ; Владим. гос. ун-т. – 3-е изд., испр. и доп. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 72 с. – ISBN 5-89368-656-X.
5. Данченко В. И., Данченко Д. Я., Голопуз С. А. Индивидуальные задания по теории функций комплексного переменного : практикум / Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2001. – 43 с. – ISBN 5-89368-243-2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 09.06.21.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,12. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.