Владимирский государственный университет

Н. Ю. КУРАНОВА

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Владимир 2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. Ю. КУРАНОВА

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Электронное издание

Владимир 2021

ISBN 978-5-9984-1386-5

УДК 511
ББК 22.141

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры общей и теоретической физики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. А. Мокрова

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института Федеральной службы
исполнения наказаний
А. В. Хорошева

Куранова, Н. Ю. Теория комплексных чисел [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н. Ю. Куранова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 172 с. – ISBN 978-5-9984-1386-5. – Электрон. дан. (3,05 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Доступно и всесторонне рассмотрено понятие комплексного числа, приведены его геометрическое представление и формы записи. Предложены разнообразные примеры и задачи, способы решения типовых заданий, а также задания для самостоятельной работы студентов и тест по теме «Комплексные числа».

Предназначено для студентов 1 – 2-го курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 – Педагогическое образование, а также может быть полезно широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 73. Библиогр.: 12 назв.

ISBN 978-5-9984-1386-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория комплексных чисел представляет собой составную часть вузовского курса «Алгебра» и предполагает глубокое знание ее основ, а также методов и приемов, применяемых при решении широкого класса задач как алгебраического, так и геометрического содержания. Во многих разделах математики и ее приложениях невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел. Потребности этих разделов заставляют обобщить понятие о числе и ввести в рассмотрение множество комплексных чисел.

Будущие учителя должны грамотно оперировать основными понятиями, действиями и интерпретациями комплексных чисел, так как основы теории комплексных чисел – часть учебной программы по математике для профильных классов.

Комплексные числа широко используются в математике и её приложениях. Их можно успешно применять в элементарной геометрии, тригонометрии, теории движений и подобий, аффинных и круговых преобразований, а также в электротехнике и различных механических и физических задачах.

В учебном пособии изложены теоретические и практические основы теории поля комплексных чисел, приведено большое количество как примеров решения типовых задач, так и задач для самостоятельного решения.

Первая глава посвящена истории комплексных чисел, достаточно подробно отражены эволюция данного понятия и его вклад в развитие математики.

Во второй главе вводится понятие комплексного числа в алгебраической форме, определяются операции сложения, вычитания, умножения, деления, а также операция сопряжения для комплексных чисел в алгебраической форме; излагается правило извлечения квадратного корня из комплексного числа.

В третьей главе изучается геометрическая интерпретация комплексных чисел на плоскости.

В четвертой главе рассматриваются действия над комплексными числами в тригонометрической форме; вводится показательная форма комплексных чисел в виде формулы Эйлера.

Пятая глава посвящена решению уравнений 3-й и 4-й степеней по формулам Кардано и Феррари.

В шестой главе рассмотрены задачи с параметром в поле комплексных чисел.

Седьмая глава знакомит читателей с приложением комплексных чисел для исследования корней уравнений с помощью метода Ньютона.

В конце пособия предложены задания для самостоятельной работы студентов, задачи для расчетно-графической работы и тест по теме «Комплексные числа».

Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытиём.

Г. Лейбниц

Глава 1. ИСТОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

С 1712 года прошло три столетия как развернулись активные дискуссии о комплексных числах. Готфрид Лейбниц, Леонард Эйлер, Иоган Бернулли и другие выдающие ученые приняли в них участие. Однако с тех пор вплоть до настоящего времени все рассуждения на эту тему, к сожалению, заканчивались фактически ничем, поскольку не приводили к раскрытию главного – выяснению реального физического смысла комплексных чисел.

Понятие числа прошло длинный исторический путь. В процессе развития математики числовая система расширялась не один раз. Уже на ранних этапах развития человечества в результате счета возникают натуральные числа. Постепенно складывается представление о бесконечности множества натуральных чисел и появляется понятие натурального ряда бесконечной последовательности чисел 1, 2, 3, 4, 5,

Древнегреческие математики считали «настоящими» только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III веке Архимед разработал систему обозначения натуральных чисел. Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Долгое время полагали, что результат измерения всегда выражается или в виде натурального числа, или в виде отношения таких чисел, то есть дроби.

Поскольку рациональных чисел было достаточно для того, чтобы с любой степенью точности выразить результат любого измерения, то долгое время считали, что результат измерения всегда выражается или натуральным числом, или отношением двух таких чисел, т.е. дробью.

Однако еще в школе Пифагора был обнаружен тот факт, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и поэтому не может быть точно выражена рациональным числом. Это открытие привело к тому, что в математику вошли иррациональные числа.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел. Это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применял в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними. В VII веке эти числа уже подробно изучали индийские ученые, которые сравнивали такие числа с долгом. С помощью отрицательных чисел можно было единым образом описывать изменения величин. Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя: нет такого числа, чтобы его квадрат был отрицательным.

Диофант Александрийский (III век до н.э.) Знаменитый древнегреческий математик, живший в Александрии. Обобщивший всю античную математику, он ввел так называемые диофантовы уравнения, решения которых находятся только в целых числах. Он впервые использовал буквенную символику в алгебре. В средние века математики называли его «отцом алгебры». Диофант оставил два сочинения: Арифметику в 13 книгах, из которых только первые шесть дошли до нас, и сочинение о так называемых многоугольных числах. В первый раз сочинения Диофант были изданы в латинском переводе в Европе в 1575.

Из школьного курса алгебры известно, что любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами не всегда имеет решение. Необходимым условием является неотрицательность дискриминанта этого уравнения. Например, уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней среди действительных чисел, т. к. во множестве действительных чисел не существует числа, квадрат которого был бы отрицательным. Таким образом, нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой бы уравнение $x^2+1=0$ уже обладало бы корнем. Нужно было ввести такое число, квадрат которого был бы равен -1.

В 1494 году в Венеции вышла книга францисканского монаха, занимавшего кафедру математики Миланского университета, Луки Пачиоли (Пачоли) (1450–1510) «Сумма (знаний) по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциям» («Summa»), которая заканчивалась выводом: «Решение кубических уравнений вида $x^3 + ax = b$, где $a > 0$ и $b > 0$, столь же невозможно при современном состоянии науки, как и решение квадратуры круга циркулем и линейкой".

Однако, несмотря на это предупреждение, уже через 6 лет в 1500 году профессор Болонского университета Сципион дель Ферро (1456–1526) нашел формулу решения уравнения $x^3+ax=b$, где $a > 0$ и $b > 0$. Эта формула имела вид:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}\ .$$

Но, как это было принято в ту эпоху, дель Ферро держал свой метод в тайне.

В феврале 1535 года Николо Фонтана из Брешии (1499 – 1557), известный под именем Тарталья (что в переводе с итальянского означает "заика" – Фонтана сильно заикался), в ходе публичных состязаний с Фиоре (учеником дель Ферро) решил три десятка кубических уравнений вида: $x^3 + mx = n$ и $x^3 = ax + b$, где m, n, a, b − положительные числа.

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений, не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения другого вида, нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры. Кардано называл такие величины “чисто отрицательными” и даже “софистически отрицательными”, считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат измерения какой-нибудь величины, ни изменение какой-нибудь величины. Такое число было придумано и названо «мнимым».

Джероламо Кардано (1501-1576). Итальянский ученый, один из образованнейших людей своей эпохи. Он был одновременно математиком и механиком, врачом и алхимиком, хиромантом и личным астрологом римского папы. Однажды он составил гороскоп Иисуса Христа, за что Святая Инквизиция некоторое время продержала его в тюрьме.

В конце 30-х годов XVI века Джероламо (Джеронимо) Кардано (1501–1576) ознакомился с методом Тартальи, но поклялся его не разглашать. Однако, в 1545 году вышла книга Кардано "Великое Искусство" ("Ars Magna"), в которой он приводит методы решения уравнений третьей степени (формулы дель Ферро− Тартальи) и четвертой степени (метод Людовико Феррари (1522–1565), ученика Кардано).

Как Тарталья, так и Кардано столкнулись с трудностью, которую они так и не смогли разрешить: когда величина $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$, (называемая в настоящее время дискриминантом кубического уравнения) отрицательна, что соответствует случаю трех различных действительных корней, полученную ранее формулу нельзя применять, не выходя за пределы множества действительных чисел. Чтобы сохранить эту формулу, надо выйти за пределы множества $\boldsymbol{R}$, и тогда два действительных корня находятся с помощью суммы и разности двух комплексных чисел и двух сопряженных кубических корней из 1.

Этот случай Тарталья назвал "неприводимым". Кардано, решая задачу о нахождении сторон прямоугольного участка с площадью 40 и периметром 20, пришел к системе

$$\begin{cases} xy = 40, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Откуда

$$x_1 = 5 + \sqrt{-15}\,, \qquad y_1 = 5 - \sqrt{-15}\,;$$

$$x_1 = 5 - \sqrt{-15}\,, \qquad y_1 = 5 + \sqrt{-15}\,.$$

Кардано назвал $\sqrt{-15}$ «софистическим» числом, добавив, что "для осуществления таких действий нужна новая арифметика, которая была бы настолько же утонченной, насколько бесполезной".

Впервые «мнимые числа» появились в книге «Алгебра» итальянского математика Рафаэля Бомбелли (1530-1572), изданной в год смерти ученого. В этой книге дано изложение простейших правил действий над ними и их применение к исследованию кубического уравнения в случае, когда уравнение имеет три действительных корня, а в формуле, определяющей эти корни, присутствует квадратный корень из отрицательного числа.

В этой же книге Бомбелли установил четыре правила действий над новыми числами и четыре правила, связывающие «новую» ($\sqrt{-1}$) и «старую» («1») единицы:

1) $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1;$ 5) $\sqrt{-1}\cdot 1 = \sqrt{-1}$;

2) $\sqrt{-1}\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = 1;$ 6) $\left(-\sqrt{-1}\right)\cdot 1 = -\sqrt{-1};$

3) $\left(-\sqrt{-1}\right)\cdot\sqrt{-1} = 1;$ 7) $1\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{-1};$

4) $\left(-\sqrt{-1}\right)\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = -1;$ 8) $1\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}.$

Именно поэтому Рафаэля Бомбелли считают основоположником теории комплексных чисел.

Однако, для многих крупных ученых XVII в., включая И. Ньютона (1643-1727) и Г. Лейбница (1646-1716), алгебраическая и геометрическая сущность комплексных чисел оставалась загадочной и мистической. Название “мнимые числа” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова imaginaire (мнимый) для обозначения такого числа (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу. Термин “комплексные числа” также был введен Гауссом в 1831 году. Слово комплекс (от латинского complexus) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д., образующих единое целое. Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними дал в 1799 г. датский математик К. Вессель (1745-1818).

В дальнейшем комплексные числа встречаются в работах французского математика XVII века Рене Декарта (1596–1650) при исследовании решений алгебраических уравнений второй степени. В приложении к труду «Рассуждение о Методе, чтобы направлять свой разум и отыскивать истину в науках» (1637), называемом «Геометрия» (в третьей книге − «О природе уравнений») Декарт ставит вопрос: сколько корней может иметь алгебраическое уравнение n-й степени, и дает ответ: столько же, сколько имеет единиц степень уравнения. При этом он отмечает, что надо различать «истинные» (положительные), «ложные» (отрицательные) и «воображаемые» (мнимые) корни, подчеркивая, что линии на плоскости, которые не могут пересекаться при их алгебраическом представлении в виде уравнений, дают мнимые точки пересечения.

Рене Декарт 1596 - 1650). Знаменитый французский философ, математик, физик и физиолог. Образование получил в иезуитском колледже. Во время Тридцатилетней войны служил в армии. Несколько лет путешествовал по Европе, а с 35 лет обосновался в Нидерландах, где издал свои основные книги. Через 20 лет по личному приглашению королевы переехал в Швецию и вскоре умер от случайной простуды. Он заложил основы аналитической геометрии, ввёл так называемые декартовы координаты. Основал Картезианскую философскую школу (от латинского написания его имени *Renatus Cartesius*), знаменитое мотто которой было: «*Cogito ergo sum*» («Я мыслю, следовательно, я существую»).

Однако, «мнимые» величины, выдвинутые Декартом и его последователями, долго не получали признания. Даже такой выдающийся математик и философ, как Готфрид Вильгельм Лейбниц, писал: «Мнимые числа − это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием».

Первая удачная попытка геометрической интерпретации комплексных чисел была предпринята датским землемером и математиком Каспаром Весселем (1745-1818) в работе «Опыт аналитического представления направлений" (1797), которая, к сожалению, в течение столетия оставалась неизвестной.

После Весселя свою интерпретацию комплексных чисел предложил французский математик Жан Арган (1768-1822) в работе «Опыт некоторого представления мнимых количеств в геометрических построениях» (1806).

Однако, самую наглядную геометрическую интерпретацию комплексных чисел дал немецкий ученый, «король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) в работе «Теория биквадратных вычетов» (1799) и позднее в «Арифметической теории комплексных чисел» (1806, 1825 и 1831), где он, рассматривая способ интерпретации новых чисел, назвал их впервые «комплексными числами» (от латинского слова «complex» - «объединение»), имея в виду объединение двух единиц (1 и $\sqrt{-1}$ = i) в одно число:

$$z = a + bi, \text{ где } a, b \in \boldsymbol{R},$$

оставив при этом идущее от Декарта название вторых единиц − «мнимые единицы».

В этой работе Гаусс навсегда изгнал таинственность, окружавшую мнимые числа, представив их с помощью точек плоскости. Позднее французский математик Огюстен Коши (1789–1857) в своем труде «Алгебраический анализ» (1821) продолжил эту удачную интерпретацию и ввел понятие модуля комплексного числа $z=a+bi$ в виде неотрицательного действительного числа

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Леонард Эйлер (1707–1783). Один из самых великих математиков новой истории. Родился и учился в Швейцарии, был членом Петербургской Академии наук, потом четверть века проработал в Германии и вновь вернулся в Россию, где за последние 17 лет своей жизни, будучи слепым, сумел почти удвоить свое научное наследие, диктуя свои сочинения сыну и двоим ассистентам до полного их изнеможения. Сделал огромный вклад в математический анализ, теорию чисел, комбинаторику, теорию вероятностей, механику, оптику, астрономию, физику, и даже в музыку.

Наиболее эффективное применение комплексных чисел в математике осуществили в XVIII - XIX вв. Л. Эйлер и К. Ф. Гаусс, доказавшие, что любой многочлен с действительными или комплексными коэффициентами имеет во множестве комплексных чисел хотя бы один корень. Этот результат впоследствии был назван «основной теоремой алгебры». Ф. Гаусс построил теорию целых комплексных чисел, с помощью которой были получены новые результаты и даны более простые доказательства известных теорем для обычных целых чисел.

Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777-1855). Выдающийся немецкий математик, астроном и физик, считается одним из величайших математиков всех времён. Отличительными чертами творчества Гаусса являются необычайно широкий диапазон его исследований и глубокая органическая связь его теоретических исследований с практикой. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, а также теоретической астрономии.

Комплексными числами и функциями комплексного переменного математики пользовались в своих исследованиях уже в XVIII в. Особенно велики заслуги крупнейшего математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783), который по праву считается одним из творцов теории функций комплексного переменного. В замечательных работах Эйлера детально изучены элементарные функции комплексного переменного. После Эйлера полученные им результаты и методы развивались, совершенствовались и систематизировались, и в первой половине XIX в. теория функций комплексного переменного оформилась как важнейшая отрасль математического анализа. Первое изложение теории комплексных чисел на русском языке принадлежит Л. Эйлеру («Алгебра», Петербург, 1763), позднее книга была переведена на иностранные языки и многократно переиздавалась.

Геометрические истолкования комплексных чисел позволили определить многие понятия, связанные с функциями комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости: при изучении течения жидкости, задач теории упругости, в теоретической электротехнике.

Глава 2. ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

2.1. Определение комплексных чисел. Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Существуют такие алгебраические уравнения, которые не имеют действительных корней. Например, квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом. Простейшее из них – уравнение $x^2+1=0$. Введём новое число *i*, которое будем считать корнем уравнения $x^2+1=0$. Таким образом, для числа *i* выполнено равенство $i^2+1=0$. Символ *i* называется *мнимой единицей.*

Определение. Комплексным называется число вида $z = a + bi$, где $a, b \in R, i^2 = -1$.

Определение. Число *a* называется *действительной частью* комплексного числа *z*, а число *b* - *мнимой частью* комплексного числа *z*.

Действительную часть комплексного числа *z* принято обозначать *Re z*, а мнимую - *Im z* (от французского *reè*l - действительный, *imaginiare* - мнимый).

Определение. Комплексное число, у которого действительная часть равна нулю, называется чисто мнимым; *z=bi*– чисто мнимое число.

Определение. *Два комплексных числа называются* равными тогда и только тогда, когда раны действительные и мнимые части т.е.

$$(a_1+b_1i=a_2+b_2i) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$$

Определение. Комплексное число $z = 0 + 0i$ называется нулем и совпадает с нулем действительных чисел.

Определение. Два числа называются комплексно-сопряжёнными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ *называется сопряженным числу* $z = a + bi$.

Определение. Два числа называются противоположными, если их действительные и мнимые части отличаются только знаками.

Числа $z = a + bi$ *и* $-z = -(a + bi)$ *называются противоположными.*

Определение. Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой комплексного числа.*

Пример: Записать противоположное и сопряженное число числу $z = -2 + 5i$, $-z = 2 - 5i$ - противоположное z; $\overline{z} = -2 - 5i$ - сопряженное к z.

Комплексные числа вида $z=a+0i=a$ являются *действительными* числами и, следовательно, *множество комплексных чисел содержит в себе множество действительных чисел.* Если потребовать, как мы сделаем это ниже, чтобы операции сложения и умножения комплексных чисел не выводили за пределы множества комплексных чисел и обладали всеми свойствами одноименных операций на множестве действительных чисел, то *множество комплексных чисел будет расширением множества действительных чисел.*

Комплексные числа вида $z=0+bi$ называются *чисто мнимыми.*

Введем операции над комплексными числами в алгебраической форме.

1. **Сложение.**

Чтобы сложить комплексные числа, надо отдельно сложить их действительные и мнимые части:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Данное определение сводит операции сложения комплексных чисел к операции сложения двух действительных чисел. Из этого следуют следующие законы сложения:

1) Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2) ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

2. **Вычитание.**

Чтобы из одного комплексного числа вычесть другое комплексное число, надо соответствующую операцию произвести над их действительными и мнимыми частями:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

3. **Умножение.**

Чтобы перемножить два комплексных числа, надо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, учитывая, что $i^2=-1$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=ac+bci+adi-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

При этом выполняются следующие законы умножения:

1) Переместительный: $z_1z_2=z_2z_1$,
2) сочетательный $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$,
3) распределительный $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

4. **Деление.**

Чтобы одно комплексное число разделить на другое, надо:

1) записать деление с помощью дроби;
2) числитель и знаменатель дроби умножить на сопряжённое к знаменателю;
3) В числителе и знаменателе раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и выполнить почленное деление.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bci-adi+bd}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Пример 1. Выполнить действие: $(5+3i)+(-2-i)$

$$5+3\cdot i-2-1\cdot i=(5-2)+(3-1)i=3+2i.$$

$$2\cdot(3+4i)+(5-3i)(1+2i).$$

Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами: $2\cdot3 + 2\cdot4i + 5\cdot1 + 5\cdot2i - 3i\cdot1 - 3i\cdot2i = 6 + 8i + 5 + 10i - 3i + 6 = 6 + 5 + 6 + (8 + 10 - 3)i = 17+15i$.

Пример 2. Найти вещественные x и y из равенства

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

Решение.

Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами: $x + 2ix + 3y - 5iy = 1 - 3i$. Группируем вещественные и мнимые части равенства

$$(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i.$$

Используя определения равенства комплексных чисел, приравниваем вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x+3y=1 \\ 2x-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3y \\ 2-6y-5y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3y \\ -11y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3\cdot\dfrac{5}{11} \\ y=\dfrac{5}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{11} \\ y=\dfrac{5}{11} \end{cases}.$$

Пример 3. Выполнить деление: $\dfrac{4-i}{1-2i}$.

$$\frac{(4-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i-i-2i^2}{1+4} = \frac{6+7i}{5} = \underline{\frac{6}{5}+\frac{7}{5}i}.$$

Пример 4. Выполнить действия: $(2+3i)(1-i)-\dfrac{i^{15}}{1+i}$.

$$\left[i^{15} = i\cdot i^{14} = i\cdot\left(i^2\right)^7 = i\cdot(-1)^7 = -i\right]$$

$$2-2i+3i-3i^2+\frac{i}{1+i} = 5+i+\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= 5+i+\frac{i-i^2}{1+1} = 5+i+(\frac{i}{2}+\frac{1}{2}) = \underline{5{,}5+1{,}5i}.$$

Пример 5. Выполнить действия: $\dfrac{(2-i)(-3+i)}{(1-i)(-1-2i)}$.

$$\frac{(2-i)(-3+i)(1+i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)(-1-2i)(-1+2i)}=\frac{(-6+2i+3i-i^2)(-1+2i-i+2i^2)}{(1+1)(1+4)}=$$

$$=\frac{(-5+5i)(-3+i)}{2\cdot 5}=\frac{5(-1+i)(-3+i)}{2\cdot 5}=\frac{3-i-3i+i^2}{2}=\frac{2-4i}{2}=\underline{1-2i}.$$

Задача 1. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 2x^2 - yi - 1 - \frac{3}{i}$ и $z_2 = y - 3 + x^2 i - 2i$ будут равными?

Решение.

Комплексные числа $z_1 = (2x^2 - 1) + (3 - y)i$, $z_2 = (y - 3) + (x^2 - 2)i$ будут равными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = y - 3, \\ 3 - y = x^2 - 2. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $x_1 = -1$, $y_1 = 4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 4$.

Пример 6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Решение.

Выражаем из первого уравнения системы переменную x через переменную y:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2+6i-(4+2i)y}{3-i}, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Домножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{cases} x = \dfrac{(2+6i)(3+i)-(4+2i)(3+i)y}{(3-i)(3+i)}, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

В числителе дроби раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{cases} x = \dfrac{20i - 10y - 10iy}{10} = 2i - y - iy, \\ (4+2i)(2i - y - iy) - (2+3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$$

Подставляем полученное значение переменной x во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ 4i - 4y - 9iy - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \dfrac{-9+4i}{4+9i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \dfrac{(-9+4i)(4-9i)}{16+81} = \dfrac{97i}{97} = i; \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 2i - i - i^2 = i + 1, \\ y = i. \end{cases}$$

Задача 2. Решите уравнение $(2 - i)\, x + (5 + 6i)\, y = 1 - 3i$ относительно действительных переменных x и y.

Решение.

Левую часть уравнения можно рассматривать, как некоторое неизвестное комплексное число.

Приведя его к виду $a + bi$ получаем уравнение, равносильное данному:

$$(2x + 5y) + (-x + 6y)\, i = 1 - 3i.$$

Так как два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, приходим к системе:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ -x + 6y = -3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем: $x = \frac{21}{17}$; $y = -\frac{5}{17}$.

Замечание. При решении задачи использовано, что x и y по условию действительные числа. Если же x и y - комплексные числа, то приведенное решение неверно, так как в этом случае выражение $2x + 5y$ нельзя считать действительной частью искомого числа (аналогично, выражение $-x + 6y$ не будет его мнимой частью).

Пример 7. Вычислите i^{36}; i^{46}; i^{125}; i^{239}.

Решение.

Используем формулу:

$$i^{4m+r} = i^r = \begin{cases} 1, & r=0; \\ i, & r=1; \\ -1, & r=2; \\ -i, & r=3. \end{cases}$$

С ее помощью легко получаем:

$$i^{36} = i^0 = 1;\ \ i^{46} = i^2 = -1; \qquad i^{125} = i;\ i^{239} = i^3 = -i.$$

Задача 3. Найдите значение функции $f(x) = x^4 + \dfrac{2+i}{x} - (-3+2i)$ при $x = 1 - 2i$.

Решение.

$$f(1-2i) = (1-2i)^4 + \frac{2+i}{1-2i} - (-3+2i).$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5i}{5} = i\,.$$

Вычислим первое слагаемое:

$((1-2i)^2)^2 = 1 - 8i - 24 + 32i + 16 = -7 + 24i.$

Таким образом,

$f(1-2i) = (-7 + 24i) + i - (-3 + 2i) = -4 + 23i.$

Пример 8. Выполните указанные действия: $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Решение.

Вычислим значение дроби $\dfrac{1+i}{1-i}$.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{2i}{2}=i\ .(1+i)^2\ =2i$$

Следовательно, $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}=i^6\cdot 2i=-2i$.

Упражнения

1. Выполнить действия:

a) $(2+5i)+(1-7i)=2+5i+1-7i=(2+1)+(5-7)i=3-2i$;

b) $(3-9i)-(7+i)=3-9i-7-i=(3-7)+(-9-1)i=-4-10i$;

c) $(1+2i)\cdot(3-i)=3+6i-i-2i^2=3+6i-i+2=5+5i$;

г) $\dfrac{23+i}{3+i}=\dfrac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{69+3i-23i-i^2}{9-i^2}=\dfrac{69+3i-23i+1}{9+1}=\dfrac{70-20i}{10}=\dfrac{70}{10}-\dfrac{20i}{10}==7-2i$

2. Найти действительные части *(Rez)* и мнимые части *(Imz)* комплексных чисел.

1) $z=\dfrac{(2-i)^3}{3+4i}$ 2) $z=\dfrac{(1-2i)^3}{i}+4i^{16}$ 3) $z=(\dfrac{1+i}{1-i})^2$ 4) $z=\dfrac{3-2i}{1-4i}+i^9$.

2.2. Операция сопряжения и ее свойства. Модуль комплексного числа

Комплексное число $\overline{z}$ называется *сопряженным комплексному числу* $z=a+bi$, если

$$\overline{z}=a-b\ .$$

Пример. $\overline{3+4i}=3-4i$.

Свойства операции сопряжения

1. $\overline{\overline{z}}=z$.

2. Для любого действительного числа а справедливо равенство $\overline{a}=a$.

3. Для любого действительного числа b справедливо равенство $\overline{bi} = -bi$.

Справедливость свойств 1-3 следует непосредственно из определения операции сопряжения.

4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$, $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$. Поэтому

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i} =$$

$$= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) i = (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i) = \overline{z_1} + \overline{z_2}\ .$$

5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Доказательство.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

С другой стороны, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \cdot (a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$.

Полученные одинаковые результаты доказывают справедливость свойства 5.

Следствие из свойства 5. Для любого натурального числа *n* справедливо равенство

$$\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n.$$

6. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Справедливость данного равенства следует из равенства $z \cdot \frac{1}{z} = 1$

и свойства 5: $\overline{z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$.

7. Сумма и произведение двух комплексно сопряженных чисел являются действительными числами.

Действительно,

$z+\overline{z} = (a+bi) + (a-bi) = 2a$;

$z\cdot\overline{z} = (a+bi)\cdot(a-bi) = a^2+b^2$.

Модулем комплексного числа z = a + bi называется действительное число вида

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Непосредственно из свойства 7 следует, что

$$z^2 = z\cdot\overline{z}\,.$$

8. Теорема о сопряженном корне.

Если число $z = a + bi$ является корнем уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

с действительными коэффициентами a_0, a_1 , . . . , a_n, то число $\overline{z} = a-bi$ также является корнем уравнения.

*Доказательств*о.

По определению корня имеем:

$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = 0$;

$a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(a+bi) + a_n = 0$

Применим к обеим частям равенства операцию сопряжения. Из свойств операции сопряжения следует, что

$$\overline{a_i} = a_i \quad (i=0,1,2,\ldots,n)\ ,$$

так как все коэффициенты a_i - действительные числа (по условию). Кроме того, $\overline{(a+bi)^k} = \left(\overline{a+bi}\right)^k = \left(a-bi\right)^k$; $\overline{0} = 0$.

Следовательно,

$$\overline{a_0(a+bi)^n + a_1(a+bi)^{n-1} + \ldots + a_n} = a_0(a-bi)^n + a_1(a-bi)^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Последнее равенство означает, что число $z = a - bi$ является корнем уравнения.

Задача 1. Зная, что корнем уравнения

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$$

является число $z_1 = 2 + i$, найти все корни данного уравнения.

Решение.

Поскольку все коэффициенты уравнения – действительные числа, то на основании теоремы 8 делаем вывод, что число $z_2 = 2 - i$ также является корнем уравнения.

Пусть z_3 – неизвестный корень уравнения, тогда

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3);$$

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x^2 - 4x + 5)(x - z_3).$$

Разделив обе части последнего равенства на $x^2 - 4x + 5$, получим

$$x - z_3 = x - 3.$$

Следовательно, $z_3 = 3$.

Задача 2. Найдите все комплексные числа, каждое из которых сопряжено со своим квадратом.

Решение.

Пусть $z = x + yi$ - искомое комплексное число, где x и y - действительные числа. Тогда число $\bar{z}$, сопряженное числу z , равно $x - yi$. По условию задачи имеем: $\bar{z}$ = z.

$$(x + yi)^2 = x - yi.$$

Преобразовав это уравнение, получим:

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = x - y.$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части.

Следовательно, последнее уравнение равносильно следующей системе уравнений с действительными переменными х и у:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2xy = -y. \end{cases}$$

Возможны два случая.

1) $y \neq 0$. Тогда система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ 2x = -1, \end{cases}$$

которая имеет следующие решения:

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}, \qquad y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $y = 0$. Тогда система равносильна системе

$$\begin{cases} x^2 = x, \\ y = 0, \end{cases}$$

которая имеет два решения: (0;0) и (1;0). Итак, искомых чисел четыре:

$$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \; z_3 = 0; \; z_4 = 1 ,$$

из них два числа z_3 и z_4 - действительные, а два других – z_1 и z_2 - комплексно сопряженные.

Пример 1. Известно, что $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 2i$. Найдите:

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$; б) $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{3\overline{z_2}}\right)^8$.

Решение.

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \dfrac{2i}{3-i} = \dfrac{2i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = -0{,}2 + 0{,}6i$.

б) $\left(\dfrac{z_1 + z_2}{3\overline{z_2}}\right)^8 = \dfrac{(1+i)^8}{2^8} = \dfrac{(2i)^4}{2^8} = \dfrac{1}{16}.$

Пример 2. Известно, что z_1=1 + 2i, z_2 = −3i. Найдите:

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{z_1}$; б) $\left(\dfrac{\overline{z_1} - i\, z_2}{2z_2}\right)^6$.

Решение.

а) $\dfrac{\overline{z_2}}{z_1} = \dfrac{3i}{1+2i} = \dfrac{3i\,(1-2i)}{(1+2i)\,(1-2i)} = 1{,}2 + 0{,}6i$.

б) $\left(\dfrac{\overline{z_1} - iz_2}{2z_2}\right)^8 = \left(\dfrac{1-2i-3}{2(-3i)}\right)^6 = \dfrac{(1+i)^6}{3^6} = \dfrac{8}{729}i$.

Ответ: а)$1{,}2 + 0{,}6i$; б) $\dfrac{8}{729}i$.

Задача 3. При каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = x^2 + yi - 5 - \frac{7}{i} \text{ и } z_2 = -y - x^2\, i - 4i$$

будут сопряженными?

Решение.

Комплексные числа

$$z_1 = (x^2 - 5) + (y + 7i) \text{ и } z_2 = (-y) - (x + 4)i$$

будут комплексно сопряженными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -y, \\ y + 7 = x^2 + 4. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим:

$$x_1 = 2 ,\ y_1 = 1;\ x_2 = -2 ,\ y_2 = 1.$$

Задача 4. При каких действительных значениях x и y комплексные числа

$$z_1 = \text{x} - \frac{y^2}{i} - 4 + 5i \text{ и } z_2 = y^2 + 1 - 3xi$$

будут противоположными?

Решение.

Комплексные числа $z_1 = (x - 4) + (y^2 + 5)$ и $z_2 = (y^2 + 1) - 3xi$ будут противоположными, если выполняются условия:

$$\begin{cases} y^2 + 5 = 3x, \\ x - 4 = -y^2 - 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим:

$$x_1 = 2,\ y_1 = -1;\ x_2 = 2,\ y_2 = 1.$$

Задача 5. Произведите действия с комплексными числами в алгебраической форме:

а) $(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i}$; б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12}$; в) $\frac{(1+2i)^3-(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2}$.

Решение.

а) $$(1+i)(2+i)+\frac{5}{1+2i} = \frac{(1+3i)(1+2i)+5}{1+2i} = \frac{1+5i-6+5}{1+2i} = \frac{5i}{1+2i} = \frac{(5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$
$$= \frac{10+5i}{1-4i^2} = \frac{5(2+i)}{5} = 2+i;$$

б) $$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} - \left(\left((1-i)^2\right)^2\right)^3 = \frac{1+2i\sqrt{3}+3i^2}{1-3i^2} - \left((-2i)^2\right)^3 =$$
$$= \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}+64 = \frac{-1+i\sqrt{3}+128}{2} = \frac{127}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

в) $$\frac{(1+2i)^3-(1-2i)^3}{(2-i)^2-(2+i)^2} = \frac{(1+2i+1-2i)(-3+4i-3-4i-5)}{(2-i-2-i)(2-i+2+i)} = \frac{2(-11)}{-8i} = \frac{11i}{4i\cdot i} =$$
$$= \frac{11}{4i^2} = -\frac{11}{4}i.$$

Задача 6. Запишите комплексное число

$$z = \frac{5+i}{(1+i)(2-3i)} \text{ в виде } a+bi.$$

Решение.

$$z=\frac{5+i}{(1+i)(2-3i)}=\frac{5+i}{2+2i-3i+3}=\frac{5+i}{5-i}=\frac{(5+i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{25+10i-1}{25+1}=\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i.$$

Задача 7. Найдите значение функции $f(x)=x^4+\frac{2+i}{x}-(-3+2i)$ при $x=1-2i$.

Решение.

Подставим значение x в функцию:

$$f(1-2i)=(1-2i)^4+\frac{2+i}{1-2i}-(-3+2i).$$

Вычислим второе слагаемое:

$$\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{5i}{5}=i\,.$$

Вычислим первое слагаемое:

$$\left((1-2i)^2\right)^2=1-8i-24+32i+16=-7+24i\,.$$

Таким образом, $f(1-2i)=(-7+24i)+i-(-3+2i)=-4+23i$.

Задача 8. Вычислите i^{36}; i^{46}; i^{125}; i^{239}.

Решение.

С помощью формулы: $$i^{4m+r}=i^r=\begin{cases}1, & r=0;\\ i, & r=1;\\ -1, & r=2\\ -i, & r=3.\end{cases}$$

легко получаем:

$$i^{36}=i^0=1\,;$$

$$i^{46}=i^2-1\,;$$

$$i^{125}=i\,;$$

$$i^{239}=i^3=-i\,.$$

Задача 9. Выполните указанные действия: $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$.

Решение.

Вычислим значение дроби $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i}{2}=i$.

Следовательно, $\dfrac{(1+i)^8}{(1-i)^6}=i^6\cdot 2i=-2i$

Задача 10. Докажите, что если число $\dfrac{z-1}{z+1}$ является чисто мнимым, то $|z|=1$.

Решение.

По условию $\dfrac{z-1}{z+1}=bi$, где b – действительное число, тогда

$$z-1=bzi+bi,\quad z=\frac{1+bi}{1-bi},\quad |z|=\frac{|1+bi|}{|1-bi|}=\frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}=1.$$

Задача 11. Пусть $|z_1|=|z_2|=c$. Докажите, что $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4c^2$.

Решение.

Поскольку $|z|^2=z\overline{z}$, то

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)+$$

$$+(z_1-z_2)\left(\overline{z_1}-\overline{z_2}\right)=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-\left(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right)=$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_1|^2+|z_2|^2=4c^2.$$

Задача 12. Решите уравнение $z^2+|z|=0$.

Решение.

Пусть $z=x+iy$. Тогда данное уравнение запишется в виде $(x+iy)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$, откуда $\left(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)+2xyi=0$.

Комплексное число равно нулю, тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю; поэтому для нахождения неизвестных x и y получим систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим: x=0 и y=0.

При x=0 первое уравнение системы запишется в виде $-y^2 + |y| = 0$ или $|y|^2 - |y| = 0$. Отсюда находим $|y| = 0$ или $|y| = 1$. Таким образом, числа

$$z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$$

являются решениями данного уравнения.

При y=0 для нахождения x получаем уравнение $x^2 + |x| = 0$. Отсюда следует, что x=0, и тем самым $z = 0$.

Задача 13. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{z-12}{z-8i}\right| = \dfrac{5}{8}, \\ \left|\dfrac{z-4}{z-8}\right| = 1. \end{cases}$$

Решение.

Полагая $z = x + iy$, имеем

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|^2 = \frac{|z-12|^2}{|z-8i|^2} = \frac{(x-12)^2 + y^2}{x^2 + (y-8)^2} = \frac{x^2 + y^2 + 144 - 24x}{x^2 + y^2 + 64 - 16y},$$

$$\left|\frac{z-4}{z-8}\right|^2 = \frac{|z-4|^2}{|z-8|^2} = \frac{(x-4)^2 + y^2}{(y-8)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 16 - 8x}{x^2 + y^2 + 64 - 16x},$$

следовательно, $\dfrac{x^2 + y^2 + 144 - 24x}{x^2 + y^2 + 64 - 16y} = \dfrac{25}{9}$ и $\dfrac{x^2 + y^2 + 16 - 8x}{x^2 + y^2 + 64 - 16x} = 1$.

После преобразований данная система принимает вид

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 27x - 50y + 38 = 0, \\ x = 6. \end{cases}$$

Решение полученной системы является пары $(6;17)$ и $(6;8)$. Таким образом, исходная система имеет два решения $z_1 = 6 + 17i$ и $z_2 = 6 + 8i$.

Задача 14. Докажите, что если $|z| \le 1$, то $\left|\dfrac{2z-i}{2+iz}\right| \le 1$.

Решение.

Предположим, что существует такое комплексное число z_0, $|z_0| \le 1$, для которого выполнено неравенство $\left|\dfrac{2z_0-i}{2+iz_0}\right| > 1$. Тогда $\left|\dfrac{2z_0-i}{2+iz_0}\right|^2 > 1^2$, или $|2z_0-i|^2 > |2+iz_0|^2$.

Поскольку

$$|2z_0-i|^2 = (2z_0-i)\overline{(2z_0-i)} = (2z_0-i)(2\overline{z_0}-\bar{i}) = (2z_0-i)(2\overline{z_0}+i) = = 4z_0\overline{z_0}+1-2i\overline{z_0}+2iz_0,$$

$$|2+iz_0|^2 = (2+iz_0)\overline{(2+iz_0)} = (2+iz_0)(\bar{2}+\overline{iz_0}) = (2+iz_0)(2-i\overline{z_0}) = 4+z_0\overline{z_0}+2iz_0-2i\overline{z_0},$$

$$\begin{gathered}2iz_0-2i\overline{z_0} = 2i(z_0-\overline{z_0}) = 2i(\operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Re}\overline{z_0} - i\operatorname{Im}\overline{z_0}) = \\ = 2i(\operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Re} z_0 + i\operatorname{Im} z_0) = -4\operatorname{Im} z_0,\end{gathered}$$

то $4|z_0|^2 - 4\operatorname{Im} z_0 + 1$ и $4+|z_0|^2 - 4\operatorname{Im} z_0 + 1 -$ действительные числа. Поэтому из последнего неравенства получим неравенство: $4|z_0|^2 + 1 > 4 + |z_0|^2$.

Следовательно, $|z_0| > 1$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа

Найдем значение корня квадратного из числа $z=a+bi$. Пусть

$$\sqrt{a+bi} = x+yi,$$

где x и y - неизвестные действительные числа. Возводя обе части этого равенства в квадрат, получаем:

$$a+bi = (x^2-y^2)+2xyi.$$

Последнее уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ 2xy \quad\;\; = b. \end{cases}$$

Возведем каждое уравнение системы в квадрат и сложим полученные равенства. Решим систему:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 \quad\;\; = a, \\ \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы находим

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2},$$

где в правой части равенства следует иметь в виду арифметический корень, так как сумма x^2+y^2 неотрицательна. Учитывая, кроме того, что $x^2 - y^2 = a$, получаем:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Так как $\sqrt{a^2 + b^2} > a$, то оба полученные числа положительны. Извлекая из них квадратные корни, получим действительные значения для x и y:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}; \quad y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Из соотношения $2\,xy = b$ следует, что при $b > 0$ числа x и y имеют одинаковые знаки, а при $b<0$ противоположные.

Учитывая вышесказанное, получаем формулу:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \pm i\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right).$$

В скобках перед мнимой единицей берется знак плюс, если $b > 0$, и знак минус, если $b < 0$.

Пример 1. Вычислите $\sqrt{-3 - 4i}$.

Решение.

Воспользуемся полученной формулой:

$$\sqrt{-3-4i} = \pm\left(\sqrt{\frac{-3+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{3+\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}}{2}}\right) = \pm(1-2i).$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt{-7-24i}$.

Решение.

Пусть $\sqrt{-7-24i} = x + yi$, тогда

$$-7-24i = (x+yi)^2,$$
$$-7-24i = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Составляем систему, приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7, \\ 2xy = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \dfrac{144}{x^2} = -7, \\ y = -\dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 7x^2 - 144 = 0, \\ y = -\dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (\otimes)$$

Решим отдельно биквадратное уравнение:

$$x^4 + 7x^2 - 144 = 0.$$

Пусть $x^2 = t, t > 0.$ Тогда

$$t^2 + 7t - 144 = 0;$$
$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+144\cdot 4}}{2} = \frac{-7\pm\sqrt{625}}{2} = \frac{-7\pm 25}{2};$$
$$t_1 = 9, \quad t_2 = -16 < 0 - \textit{не подходит};$$
$$x^2 = 9, \quad x_{1,2} = \pm 3;$$
$$(\otimes) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 3, \\ y_{1,2} = \mp 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-7-24i} = \left[\begin{array}{l} -3+4i, \\ 3-4i. \end{array}\right.$$

Другой способ решения возможен после введения тригонометрической формы записи комплексного числа.

2.4. Решение линейных и квадратных уравнений в поле комплексных чисел

В области комплексных чисел верны те же формулы для решения линейных и квадратных уравнений, что и в области действительных чисел.

Пример 1. Решить уравнение: $(-2 - i)z = 3 + i$.

$$z = \frac{3+i}{-2-i} = \frac{(3+i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-6+3i-2i+i^2}{4+1} = \frac{-7+i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Пример 2. Решить уравнение: $x^2 + 4x + 5 = 0$.

Решение.

Воспользуемся формулой для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2};$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = [\text{так как } \sqrt{-1} = i] = \pm 2i;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Пример 3. Решить уравнение: $iz^2 - (3+2i)z + 3 - i = 0$.

Решение.

$$z_{1,2} = \frac{3+2i \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4i(3-i)}}{2i} = \frac{3+2i \pm \sqrt{9+12i-4-12i-4}}{2i} = \frac{3+2i \pm 1}{2i};$$

$$z_1 = \frac{4+2i}{2i} = \frac{2+i}{i} = \frac{(2+i)(-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-2i+1}{1} = 1-2i;$$

$$z_2 = \frac{2+2i}{2i} = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i+1}{1} = 1-i.$$

Пример 4. Решить уравнение: $z^2 - (2+i)z + 2i = 0$.

Решение.

$$z_{1,2} = \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4 \cdot 2i}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{4+4i-1-8i}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{3-4i}}{2}.$$

Вычислим $\sqrt{3-4i}$ **:**

$$\sqrt{3-4i}=x+yi;$$
$$3-4i=(x+yi)^2;$$
$$3-4i=x^2-y^2+2xyi.$$

Составляем систему, приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ 2xy=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\dfrac{4}{x^2}-3=0,\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-3x^2-4=0,\\ y=-\dfrac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow(\otimes)$$

$x^4-3x^2-4=0.$

Пусть $x^2=t,\ t>0.$ *Тогда*

$$t^2-3t-4=0;$$
$$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2};$$
$$t_1=4,\quad t_2=-1<0;$$
$$x^2=4,\ x=\pm2;$$

$$(\otimes)\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm2,\\ y=\mp1;\end{cases}$$

$$z_1=\frac{2+i+(2-i)}{2}=2;$$
$$z_2=\frac{2+i+(-2+i)}{2}=i.$$

Пример 5. Решите уравнение

$$(2+i)x^2-(5-i)x+(2-2i)=0.$$

Решение.

По формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2}=\frac{5-i\pm\sqrt{(5-i)^2-4(2+i)(2-2i)}}{2(2+i)}=\frac{5-i\pm\sqrt{-2i}}{4+2i}.$$

Извлекая корень квадратный из числа –2i, получаем $\sqrt{-2i}=\pm(1-i)$.

Следовательно,

$$x_1=\frac{5-i+1-i}{4+2i}=\frac{6-2i}{4+2i}=\frac{3-i}{2+i}=\frac{5-5i}{5}=1-i;$$

$$x_2 = \frac{5-i-1+i}{4+2i} = \frac{4}{4+2i} = \frac{2}{2+i} = \frac{4-2i}{5} = 0{,}8-0{,}4i.$$

Задания

1. Произведите действия с комплексными числами в алгебраической форме:

а) $(1+i)(2+i)+\dfrac{5}{1+2i}$; б) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-(1-i)^{12}$; в) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

Ответ: а) 2 + i; б) $\dfrac{127}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; в) $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$.

2. Вычислите

a) $\dfrac{(2-i)^2-(-1-i)^2}{(1+2i)^3+(2+2i)^3}$;

b) $\dfrac{(1-2i)^3+(2-i)^3}{(3+2i)^2-(2+i)^3}$;

c) $\dfrac{(2+i)^3-(1-2i)^3}{(1+2i)^3-(2+3i)^2}$;

d) $\dfrac{(2-i)^3-(1+i)^3}{(2+i)^3-(1-2i)^2}$.

3. Решите уравнения относительно действительных переменных x и y:

а) $(1 + 2i)\,x + (3 - 5i)\,y = 1 - 3i$;

б) $\dfrac{6x-yi}{5+2i}=\dfrac{15}{8x+3yi}$;

в) $2 + 5xi - 3yi = 14i + 3x - 5y$.

Ответ: а) $\left(-\dfrac{4}{11};\dfrac{5}{11}\right)$; б) (1;3); (-1;-3); $\left(\dfrac{3}{4};4\right)$; $\left(-\dfrac{3}{4};-4\right)$ в) (4; 2).

4. Найдите значения следующих многочленов:

а) $x^{17} - 5x^{14} + 10x^7 + 9x^5 - 4$ при $x = i$;

б) $2x^3 + 3\sqrt[3]{4}\;x^2y + 3\sqrt[3]{2}\,xy^2 + y^3$ при $x = 1 + i$, $y = -i\sqrt[3]{2}$;

в) $3x^3 - 9x^2y + 9xy^2 - 3y^3$ при $x = 1 + 2i$, $y = 2 + i$.

Ответ: а) 1; б) 2; в) $6 + 6i$.

Замечание. В примерах б) и в) необходимо сначала свернуть формулы куба суммы и куба разности соответственно.

5. Вычислите следующие квадратные корни:

а) $\sqrt{8+6i}$; б) $\sqrt{3-4i}$.

Ответ: а) $\pm(3+i)$; б) $\pm(2-i)$.

6. Решите квадратные уравнения:

а) $x^2 + (5 - 2i)\, x + 5(1 - i) = 0$;

б) $x^2 + (1 - 2i)\, x - 2i = 0$;

в) $(2 + i)\, x^2 - (5 - i)\, x + 2 - 2i = 0$.

Ответ: а) $-2 + i$; $-3 + i$; б) $2i$; -1 в) $1 - i$; $0{,}8 - 0{,}4\, i$;б) $2i$; -1.

7. Решить уравнение

а) $z \cdot \overline{z} + 2(z + \overline{z}) = 3i + 1$;

b) $2z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 2 + i$;

c) $z \cdot \overline{z} + 2(z - \overline{z}) = 1 + 3i$;

d) $z \cdot \overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 1 + 3i$.

8. Решить систему в комплексных числах x и y

a) $\begin{cases} x + (1+2i)y = 1 - i \\ (1-i)x - (6-i)y = 4 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2ix + (1-i)y = 3 - i \\ (1+i)x - (2-i)y = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 + i \\ (1-i)x + (6+i)y = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} ix + (1+i)y = 3 - i \\ (1-i)x + (6-i)y = 2 \end{cases}$.

9. Найдите все комплексные числа, сопряженные своему кубу.

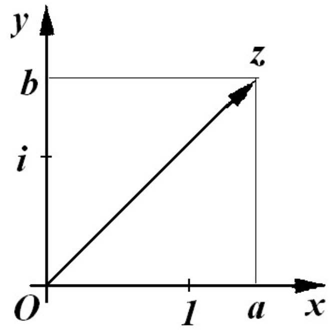
Ответ: 0; 1; -1; i; $-i$.

Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Чтобы поставить теорию комплексных чисел на прочный фундамент, необходима была явная её конструкция, лучше всего – геометрическая. Желание иметь геометрическую реализацию множества комплексных чисел не случайно, если вспомнить, что и множество действительных чисел неотделимо для нас от «действительной прямой» с фиксированной на ней точкой, изображающей 0, и с фиксированным масштабом, определяемым положением числа 1.

Ни Эйлер, ни Коутс не представляли себе геометрической интерпретации комплексных чисел. Представление о комплексных числах, как точках на комплексной плоскости, появилось лишь полвека спустя, в 1799 году в работе Каспара Весселя, опубликованной в трудах Датской Королевской Академии наук. Геометрическое представление комплексных чисел, иногда называемое «диаграммой Аргана», вошло в обиход после опубликования в 1806 году работы Жана-Робера Аргана, повторявшей независимо выводы Весселя. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать комплексное число не самой точкой z, а вектором $0z$, идущим в точку z из начала координат. При таком истолковании сложение и вычитание комплексных чисел совпадает с соответствующим операциями над векторами.

Введем на плоскости прямоугольную систему координат xOy и поставим в соответствие каждому комплексному числу $z = a + bi$ точку плоскости с координатами $(a;b)$.



Полученное соответствие между всеми комплексными числами и всеми точками плоскости взаимно однозначно:

- каждому комплексному числу $z=a+bi$ соответствует одна точка плоскости с координатами $(a;b)$, и обратно;
- каждой точке плоскости с координатами $(a;b)$ соответствует единственное комплексное число $z = a + bi$.

Таким образом, через z мы будем одновременно обозначать и комплексное число и точку, изображающую это комплексное число.

Комплексное число $z=a+bi$ называется комплексной координатой точки $(a;b)$.

Поскольку при указанном соответствии действительные числа $z = a + 0i$ изображаются точками оси абсцисс, то ось Ox называется *действительной осью.* Ось Oy, на которой лежат чисто мнимые числа $z = 0 + bi$, называется *мнимой осью.* Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью.*

Комплексное число $z = a + bi$ может также изображаться вектором с координатами a и b, идущим из начала координат в точку $(a;b)$.

Поскольку по определению модуля комплексного числа

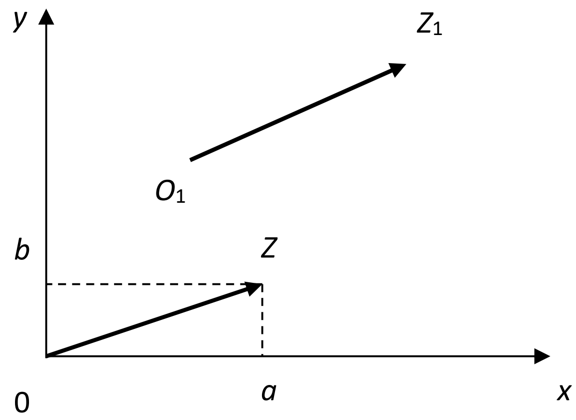
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

очевидно, что модуль комплексного числа равен длине вектора $\overline{OZ}$.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{O_1Z_1}$, равный вектору $\overline{OZ}$. Из курса геометрии известно, что равные векторы имеют равные координаты, поэтому координатами вектора $\overline{O_1Z_1}$ также являются числа a и b.

Вектору $\overline{O_1Z_1}$ сопоставим то же самое комплексное число $z = a + bi$, которое назовем *комплексной координатой вектора* $\overline{O_1Z_1}$.

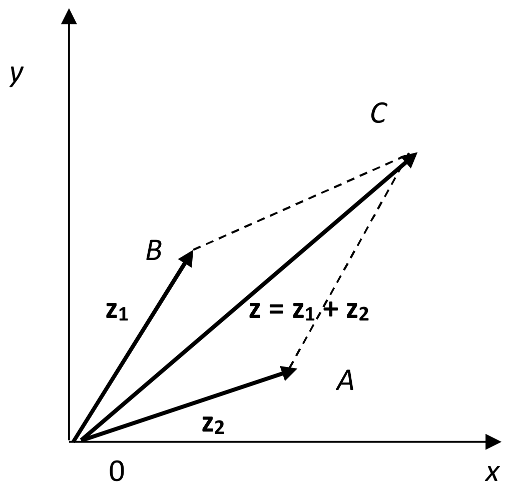
Таким образом, мы приходим к следующему определению: *комплексной координатой вектора* $\overline{AB}(a;b)$ называется комплексное число $z = a + bi$.



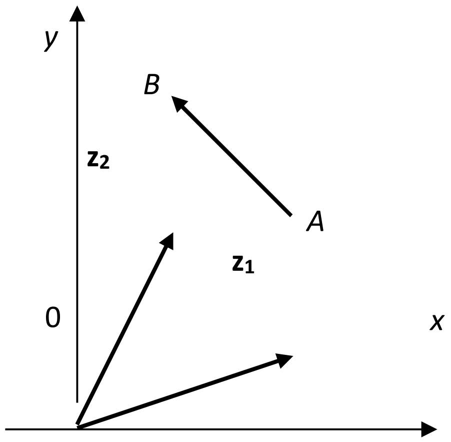
Так как при сложении и вычитании векторов их соответствующие координаты складываются и вычитаются, то же самое справедливо и для их комплексных координат z_1 и z_2.

Точнее, пусть векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ имеют комплексные координаты z_1 и z_2 , а вектор $\overline{OC}$ имеет комплексную координату $z = z_1 + z_2$. Геометрически это означает, что вектор **z** – это диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{z_1}$ и $\mathbf{z_2}$. Отсюда, в частности, следует, что

$$| z_1 + z_2 | < | z_1 | + | z_2 |.$$



Пусть теперь z – комплексная координата вектора $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$ Тогда $z = z_2 - z_1,$ так как числа z_2 и z_1 являются комплексными координатами точек A и B; поэтому комплексная координата вектора $\overline{AB}$ равна разности между комплексными координатами его конца и начала.



Пример. Найдите комплексную координату середины отрезка AB, если комплексные координаты его концов равны z_1 и z_2 соответственно.

Решение.

Обозначим середину отрезка AB через O_1. Тогда

$OO_1 = OA + AO_1 = OA + \frac{1}{2}AB.$

Учитывая, что комплексная координата вектора AB равна $z_2 - z_1$, получим $z = z_1 + \frac{1}{2}(z_1 - z_2) = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Задача 1. Докажите, что расстояние между точками z_1 и z_2 равно $| z_1 - z_2 |$.

Решение.

Известно, что

$$| z_1 - z_2 | = | (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i | = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2},$$

а это и есть, как известно из геометрии, формула расстояния между двумя точками z_1 $(a_1;b_1)$ и z_2 $(a_2;b_2)$.

Задача 2. Докажите, что равенство $|z - z_0| = R$ задает уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Решение.

Как известно из геометрии, окружность с центром в точке z_0 радиуса R представляет собой множество точек плоскости, удаленных от точки z_0 на расстояние R. Пользуясь результатами задачи 1, получаем: расстояние между точками z и z_0 равно $| z - z_0 |$. Поэтому равенство $| z - z_0 | = R$ задает уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0.

Задача 3. Докажите, что если точка z_1 не совпадает с точкой z_2 , то равенство $| z - z_1 | = | z - z_2 |$ задает уравнение прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2, и проходящей через его середину.

Решение.

Все точки z_1, удовлетворяющие равенству

$$| z - z_1 | = | z - z_2 |,$$

равноудалены от точек z_1 и z_2 и поэтому, как это известно из геометрии, лежат на прямой, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки z_1 и z_2 , и проходящей через его середину.

Обратно, все точки z этой прямой, очевидно, удовлетворяют равенству, следовательно, равенство

$$| z - z_1 | = | z - z_2 |$$

является уравнением указанной выше прямой.

Задача 4. Укажите, где на плоскости расположены точки, соответствующие комплексным числам z, для которых

$$1 < | z + 2 - 3i | \leq 2.$$

Решение.

Представим выражение $z + 2 - 3i$ в виде разности двух комплексных чисел:

$$z + 2 - 3i = z - (-2 + 3i).$$

Тогда становится ясно, что равенство $| z - (-2 + 3i) | = 2$ является уравнением окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом 2.

Неравенству $| z + 2 - 3i | \leq 2$ удовлетворяют внутренние точки указанного круга вместе с точками, лежащими на окружности

$$| z - (-2 + 3i) | = 2,$$

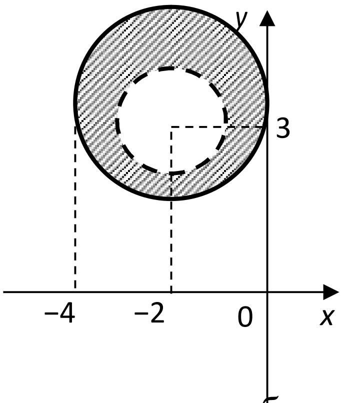
тогда как неравенству

$$1 < | z + 2 - 3i |$$

соответствует внешность круга радиуса 1, концентрического первому.

Нас интересуют точки, удовлетворяющие одновременно: двум этим условиям:

$$1 < | z + 2 - 3i | \le 2,$$



поэтому искомая область является пересечением двух найденных областей и представляет собой кольцо, содержащее точки внешней ограничивающей окружности. Так как левое неравенство является строгим, точки внутренней ограничивающей окружности не входят в полученную область.

Задача 5. Укажите, где на плоскости расположены точки, соответствующие комплексным числам, удовлетворяющим условию:

$$| z | < | z - 2i |.$$

Решение.

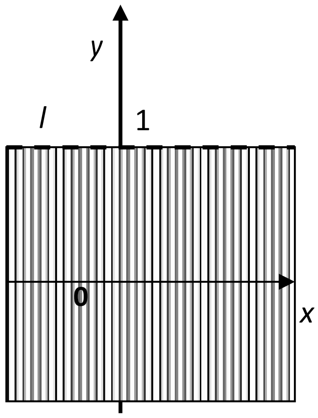
По задаче 3: равенство $| z - 2i | = | z |$ является уравнением прямой l, перпендикулярной отрезку AB (A (0; 0) и B (0; 2)) и проходящей через его середину, т.е. прямая l параллельна оси Ox и проходит через точку (1; 0), так как из равенств:

$$|z-2i|^2 = |x+(b-2)i|^2 = x^2+(b-2)^2;$$

$$|z|^2 = |x+yi|^2$$

следует равенство:$(y - 2)^2 = y^2$, а значит, $y = 1$, т.е. $z = x + i$.

Поэтому неравенству удовлетворяют точки полуплоскости, лежащие ниже прямой l. Точки самой прямой l не входят в указанную область, так как данное неравенство строгое.



Задача 6. Изобразите на плоскости комплексные числа z , удовлетворяющие условию: $z^3 = \frac{1-i}{1+i}$.

Решение.

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{1+1} = -\frac{2i}{2} = -i .$$

Следовательно, $z^3 = -i = i^3$. Таким образом, $z^3 = -i = i^3$;

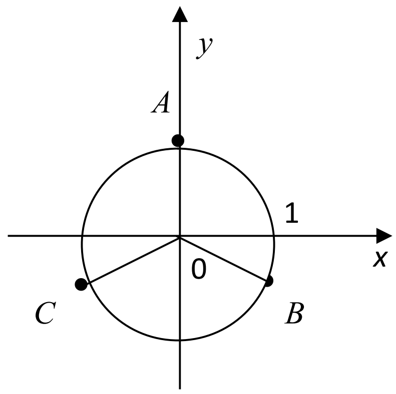
$(z - i)\ (z^2; + zi + i^2) = 0;$

$(z - i)\ (z^2; + zi - 1) = 0;$

$z_1 = i;\ z_2 = \frac{-i+\sqrt{3}}{2};z_3 = \frac{-i-\sqrt{3}}{2}$, т.е.

$z_1 = i;\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$

Этим числам соответствуют три точки: $A(0;1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ и С$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ Они расположены на единичной окружности и делят ее на три равные части.



Задача 7. Изобразите на плоскости комплексные числа z, удовлетворяющие условию: $z^2 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2.$$

Поэтому $z^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2$, значит, $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; $\qquad z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Получили две точки: $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ и $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 8. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\dfrac{|z+1|}{|z-2|} \geq 0{,}5$.

Решение.

Данное неравенство равносильно выполнению двух условий:

$$|z+1| \geq 0{,}5|z-2| \text{ и } z \neq 2.$$

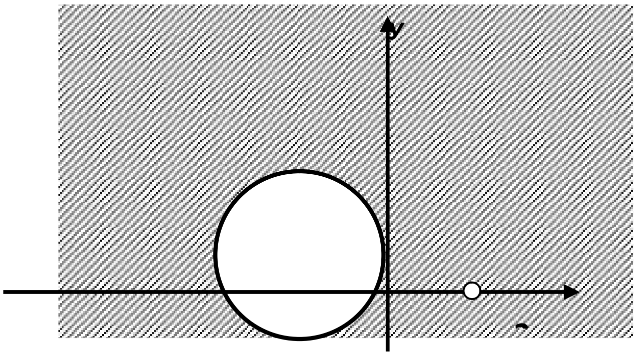
Если $z = x + yi$, где x и y − действительные числа, то получаем следующие неравенства:

$$(x+1)^2 + y^2 \geq \frac{(x-2)^2 + y^2}{4};$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 \geq \frac{1}{4}x^2 - x + 1 + \frac{1}{4}y^2; \frac{3}{4}x^2 + 3x + \frac{3}{4}y^2 \geq 0; \; x^2 + 4x + y^2 \geq 0;$$

$$(x+2)^2 + y^2 \geq 4.$$

Искомая область лежит вне круга с центром в точке (−2;0) радиуса 2 , включая границу круга и исключая точку (2; 0).



Задача 9. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\frac{|z+2i|}{|z-i|} \geq 2$.

Решение.

Данное неравенство равносильно выполнению двух условий:

$$|z+2i| \geq 2|z-i| \text{ и } z \neq i.$$

Если $z = x + yi$, то получаем следующие неравенства:

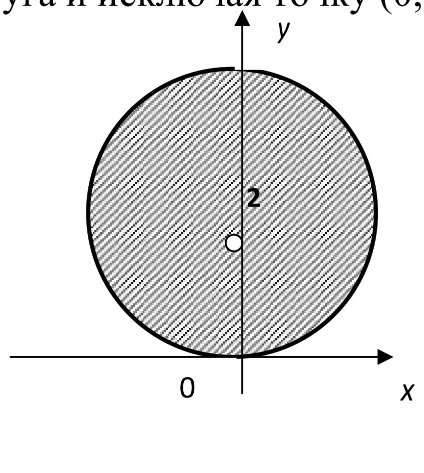
$x^2 + (y+2)^2 \geq 4(x^2 + (y-1)^2)$;

$x^2 + y^2 + 4y + 4 \geq 4x^2 + 4y^2 - 8y + 4$;

$3x^2 - 12y + 3y^2 \leq 0$

$x^2 + y^2 - 4y \leq 0$; $x^2 + (y-2)^2 \leq 4$.

Искомая область − круг с центром в точке (0; 2) радиуса 2, включая границу круга и исключая точку (0,1).



Задача 10. Изобразить на комплексной плоскости числа, модуль которых равен 1, т. е. $|z| = 1$.

Решение.

Запишем комплексное число в алгебраической форме $z = x + yi$. По условию задачи интерес представляют те числа, модуль которых равен 1, т. е. $|x + yi| = 1$. По определению модуля комплексного числа $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $x^2 + y^2 = 1$. Данное уравнение определяет на плоскости окружность с центром в точке с координатами (0; 0) и радиусом, равным 1.

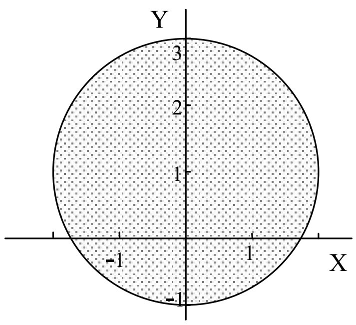
Задача 11. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенству $|z - i| \le 2$.

Решение.

Запишем комплексное число в общем виде $z = x + yi$. По условию задачи, интерес представляют те числа, модуль которых меньше или равен 2, т. е. $|x + yi - i| \le 2$. Сгруппируем под знаком модуля слагаемые, содержащие i: $|x + (y-1)i| \le 2$. По определению модуля комплексного числа:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 4.$$

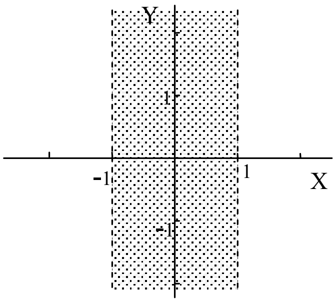
Данное уравнение определяет на плоскости круг с центром в точке с координатами (0; 1) и радиусом равным 2.



Задача 12. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие неравенству $|\operatorname{Re} z| < 1$.

Решение.

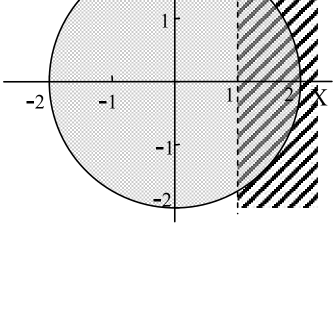
Re z – действительная часть числа z, $\Rightarrow$ неравенство можно записать как $|x|<1$, или $\begin{cases} x<1 \\ x>-1 \end{cases}$ или $-1<x<1$. Эта система определяет на плоскости полосу, ограниченную прямыми $x = 1$ и $x = -1$. Причем, обе прямые нарисованы на штрихами, так как сами прямые в искомую область не входят из-за строгого знака неравенства.



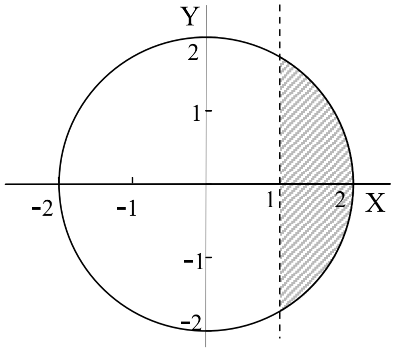
Задача 13. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие системе неравенств $\begin{cases} |z| \le 2, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

Решение.

Как показано в предыдущих примерах , неравенство $|z| \le 2$ определяет на плоскости круг с центром в точке (0; 0) и радиусом, равным 2. Неравенство $\operatorname{Re} z > 1$, определяет полуплоскость, ограниченную прямой $x = 1$ и находящуюся от нее справа. Так как неравенство $\operatorname{Re} z > 1$ строгое, то сама прямая $x = 1$ в область не входит и штрихами пунктиром. Обе эти области изображены на рисунке.



Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей.

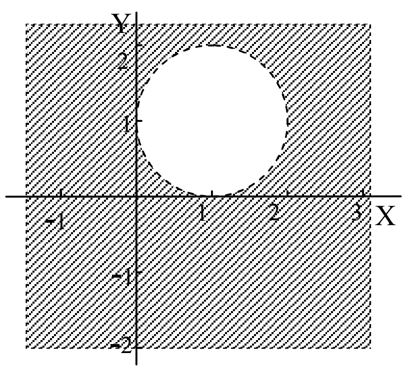


Задача 14. Найти геометрическое место точек, изображающих числа z, удовлетворяющие системе неравенств

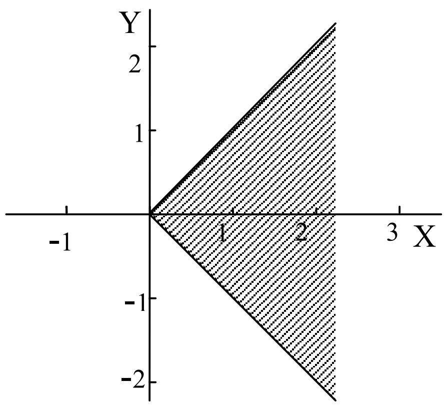
$$\begin{cases} |z-1-i|>1 \\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}.$$

Решение.

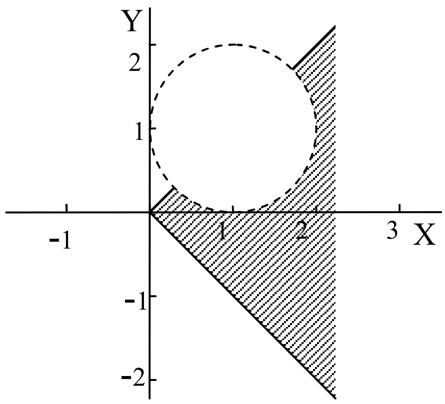
Неравенство $|z-1-i|>1$ определяет область вне круга с центром в точке (1; 1) и радиусом 1. Так как неравенство строгое, то сама окружность в область не входит и изображена штрихами.



Двойное неравенство $-\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4}$ определяет на плоскости область, в которую входят комплексные числа с аргументами в интервале от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. Эта область представляет собой угол.



Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей.

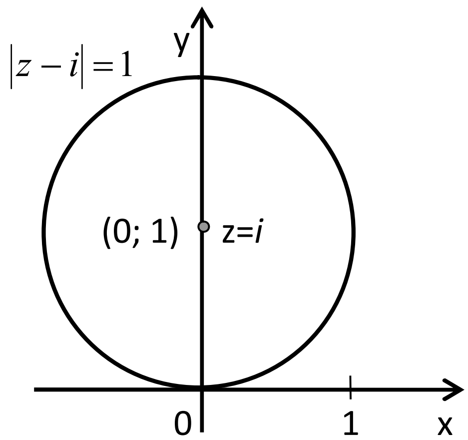


Задача 15. Изобразите на плоскости XOY множество, всех точек $z = x + iy$, удовлетворяющих условию:

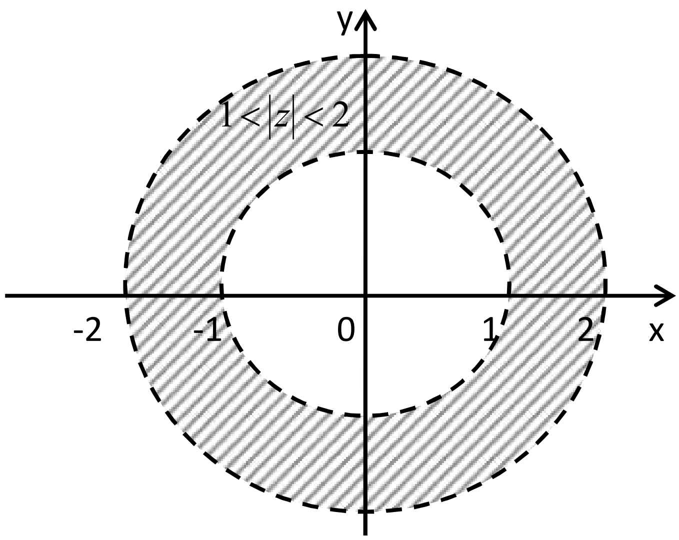
а) $|z-i|=1$; б) $1<|z|<2$; в) $arqz=\dfrac{\pi}{3}$; г) $|z+i|>|z-i|$; д) $\begin{cases} 1 \le |z+1| \le 2, \\ \dfrac{\pi}{2} < arqz < \pi. \end{cases}$

Решение.

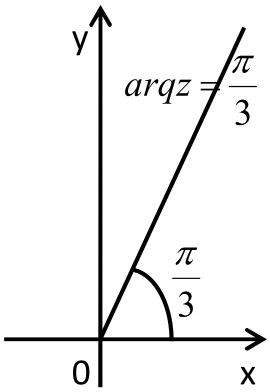
а) $|z-i|=1$. Для каждого z число $|z-i|$ равно расстоянию между точкой z и точкой i. Поэтому заданному условию $|z-i|=1$ удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке $(0;1)$.



б) $1<|z|<2$. Для каждого z число $|z|=|z-0|$ равно расстоянию между точкой z и началом координат. Поэтому условию $1<|z|<2$ удовлетворяют те и только те точки, которые лежат внутри кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат и радиусами $R_1=1$ и $R_2=2$ соответственно.



в) $arqz=\frac{\pi}{3}$. Из определения главного аргумента комплексного числа следует, что множество точек z, удовлетворяющих данному соотношению, является открытым лучом Oz, образующем угол $\frac{\pi}{3}$ с положительным направлением оси Ox.

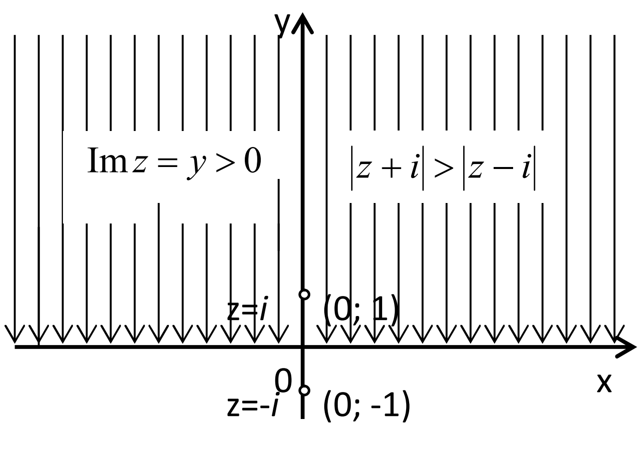


г) $|z+i|>|z-i|$. Пусть $z=x+iy$. Тогда данное соотношение перепишется в виде $|x+(y+1)i|>|x+(y-1)i|$ или $x^2+(y+1)^2>x^2+(y-1)^2$.

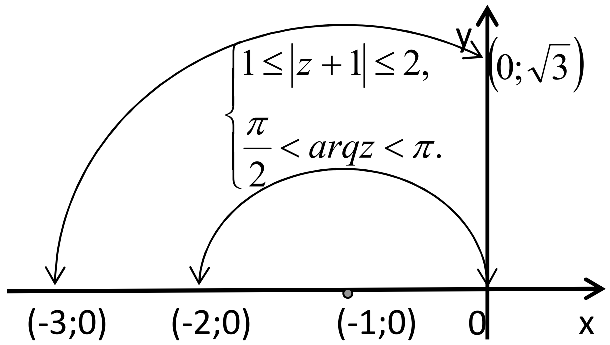
Отсюда находим: $(y+1)^2>(y-1)^2$, т.е. $(y+1-y+1)(y+1+y+1)>0$.

Таким образом, $y>0$, и, следовательно, исходному соотношению удовлетворяют только те комплексные числа, для которых $\operatorname{Im} z>0$. Такие точки заполняют всю верхнюю полуплоскость.

Этот ответ можно получить из геометрических соображений, учитывая, что ось ОХ есть перпендикуляр к отрезку, соединяющий точки $(0;-1)$ и $(0;1)$, восстановленный из его середины.



д) $\begin{cases} \operatorname{Im} z>3, \\ \operatorname{Re} z<2. \end{cases}$ Искомое множество точек есть пересечение кольца, ограниченного окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке $(-1;0)$, и второго квадранта.



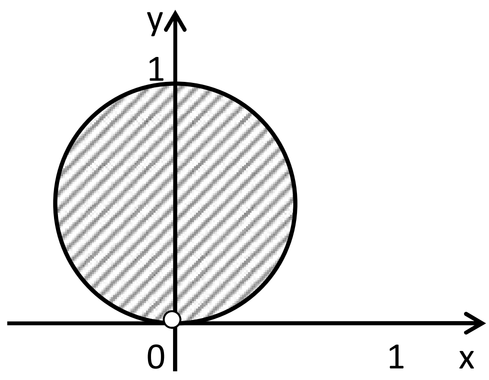
Задача 16. Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right) \ge 1$.

Решение.

Положим $z = x + yi$.

Тогда $\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}=\frac{1}{x+iy}+\frac{2}{x-iy}=\frac{3x+iy}{(x+iy)(x-iy)}$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{\bar{z}}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$.

Неравенство $\frac{y}{x^2+y^2} \ge 1$ при $x^2+y^2 \ne 0$ равносильно неравенству $x^2+y^2-y \le 0$ или $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$. Последнее неравенство задает круг с центром в точке (0; 0,5) и радиусом 0,5 включая границу круга. Вследствие ограничения $x^2+y^2 \ne 0$ точка (0; 0) не принадлежит заданному множеству.



Задача 17. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам:

$$\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}.$$

Решение.

Представим число z как $z = x + yi$. Тогда

$(1-i)z - i = (x+iy)(1-i) - i = (x+y) + (y-x-1)i$;

$|(x+y)+(y-x-1)i| = \sqrt{(x+y)^2 + (y-x-1)^2} = \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1}$.

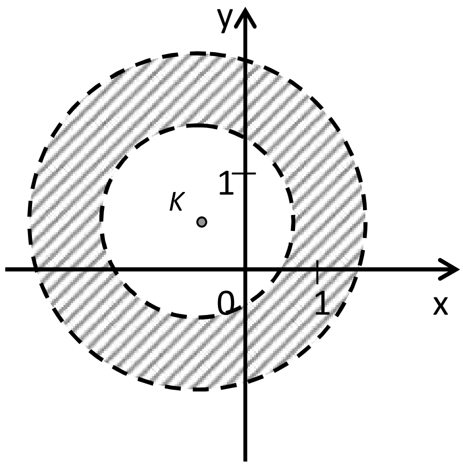
По условию, $\sqrt{2} < \sqrt{2x^2+2y^2+2x-2y+1} < 2\sqrt{2}$, откуда

$$2 < 2x^2 + 2y^2 + 2x - 2y + 1 < 8;$$

$$1 < x^2 + y^2 + x - y + 0{,}5 < 4;$$

$$1 < (x+0{,}5)^2 + (y-0{,}5)^2 < 4.$$

Левая часть двойного неравенства задает область, лежащую вне круга с центром в точке K(–0,5; 0,5) и радиусом 1. правая часть задает круг с центром в точке K и радиусом 2. В каждом случае граница не включается в заданное множество. Искомое множество точек изображено на рисунке.



Задача 18. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z \cdot \bar{z} = 25$, найдите такие, что $|z-7| + |z-7i|$ принимает наименьшее значение.

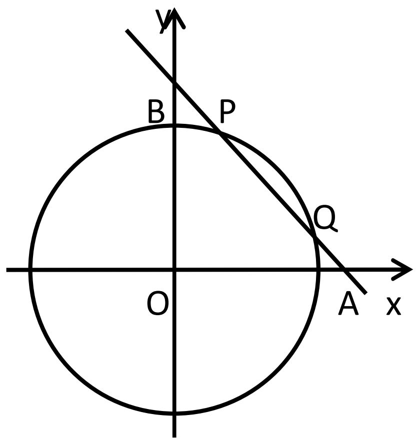
Решение.

<u>I способ.</u>

Пусть $z = x + yi$. Тогда $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$.

Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ задает на комплексной плоскости окружность с центром в точке O(0; 0) и радиусом 5. С геометрической точки зрения величина $|z-7|+|z-7i|$ представляет собой сумму расстояний от точки, соответствующей комплексному числу z, до точек A(7; 0) B(0; 7), соответствующих числами 7 и 7i. Из рисунка видно, что окружность с центром в O и радиусом 5 пересекает отрезок AB в двух точках P и Q. Эти точки и будут соответствовать тем комплексным числам, для которых величина $|z-7|+|z-7i|$ принимает наименьшее значение.

Действительно, для точек P и Q значение $|z-7|+|z-7i|$ равно длине отрезка AB, а для любой точки N окружности, отличной от P и Q, в силу неравенства треугольника справедливо соотношение AN+BN>AB.



Найдем координаты точек P и Q. Эти точки лежат на прямой AB, которая задается уравнением $y + x = 7$. Решим систему

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Так как $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то перейдем к системе

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12. \end{cases}$$

Уравнение $t^2 - 7t + 12 = 0$ имеет корни 3 и 4, поэтому решениями системы являются пары (3; 4) и (4; 3). Таким образом, точкам P и Q соответствуют числа $3+4i$ и $4+3i$.

II способ. Пусть $z = x + yi$. Тогда $x^2 + y^2 = 25$ (см. I способ);

$$|z-7| = |(x-7)+yi| = \sqrt{(x-7)^2 + y^2} = \sqrt{x^2+y^2-14x+49} = \sqrt{74-14x}.$$

$$|z-7i| = |x+(y-7)i| = \sqrt{x^2+(y-7)^2} = \sqrt{x^2+y^2-14y+49} = \sqrt{74-14y}.$$

Найдем пары (x;y), для которых достигается минимум функции $\varphi(x;y) = \sqrt{74-14x} + \sqrt{74-14y}$ при условии $x^2+y^2=25$. Поскольку функция $\varphi(x;y)$ принимает не отрицательное значения при всех допустимых x и y, вместо минимума функции φ можно рассматривать минимум функции

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x;y) = 74 - 7(x+y) + \sqrt{(74-14x)(74-14y)}.$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$148 - 14(x+y) + 2\sqrt{5476 - 74\cdot 14(x+y) + 196xy}$, так как $x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$, то $2xy = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = (x+y)^2 - 25$, откуда

$$\frac{1}{2}\varphi^2(x;y) = 74 - 7(x+y) + \sqrt{98(x+y)^2 - 74\cdot 14(x+y) + 3026}.$$

Произведем замену $t = 7(x+y)$ и найдем значение t, для которых достигается минимум функции $g(t) = 74 - t + \sqrt{2t^2 - 148t + 3026}$ или $g(t) = 37 + (37-t) + \sqrt{2(t-37)^2 + 288}$, или после замены $p = t - 37$ – те значения p, при которых минимально выражение $37 - p + \sqrt{2p^2+288}$.

Исследуем функцию $f(p) = 37 - p + \sqrt{2p^2+288}$ с помощью производной. Имеем $f'(p) = \frac{2}{\sqrt{2p^2+288}} - 1$; $f'(p) = 0$, если $\sqrt{2p^2+288} = 2p$, т.е. если $2p^2 + 288 = 4p^2$, а $p \ge 0$. Последнее равенство выполняется при $p = 12$.

Нетрудно убедиться в том, что если $p < 12$, то $f'(p) < 0$, т.е. $f(p)$ убывает, а если $p > 12$, то $f'(p) > 0$, т.е. $f(p)$ возрастает. При $p = 12$ функция $f(p)$ принимает наименьшее значение.

Значению $p = 12$ соответствует $t = 49$, при $x + y = 7$. Отсюда, учитывая соотношение $x^2 + y^2 = 25$, находим $x = 3$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 3$ и получаем окончательный ответ.

Ответ: $3 + 4i$ и $4 + 3i$.

Замечание. Конечно, II способ более трудоемкий, но вместе с тем и более универсальный. В частности, если бы на отрезке AB не нашлось ни одной точки, удовлетворяющей заданному в условии равенству, то решение I способом было бы вообще невозможно.

Задача 19. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $\operatorname{Im}\frac{2}{\bar{z}-1}\ge 1$.

Решение.

Представим z в виде $x+iy$ и преобразуем заданную дробь:

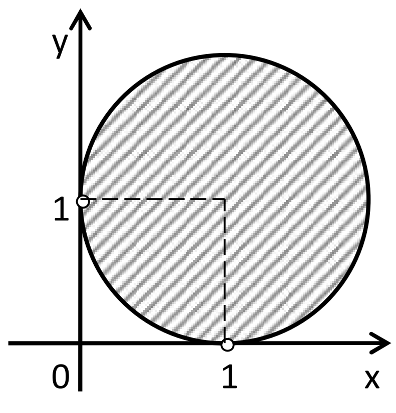
$$\frac{2}{\bar{z}-1}=\frac{2}{x-iy-1}=\frac{2}{(x-1)-iy}=\frac{2((x-1)+iy)}{((x-1)-iy)((x-1)+iy)}=\frac{2(x-1)+2iy}{(x-1)^2+y^2}.$$

Мнимая часть дроби равна $\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$.

Неравенство $\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\ge 1$ равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2-2y\le 0,\\(x-1)^2+y^2-2y\ne 0.\end{cases}$$

Неравенство $(x-1)^2+y^2-2y\le 0$ перепишем в виде $(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$. Это соотношение задает круг с центром в точке (1; 1) и радиусом 1. Точка (1;0) принадлежит кругу, однако ее координаты не удовлетворяют второму условию системы. Полученное множество изображено на рисунке.



Задача 20. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию: $|z| = |z - 2i|$, найдите число с наименьшим модулем.

Решение.

Воспользуемся геометрическим смыслом модуля комплексного числа. Как известно, для комплексных чисел z и w величина $|z - w|$ равна расстоянию между точками комплексной плоскости, соответствующими числами z и w. Точки, соответствующие числам z, для которых выполняется равенство $|z| = |z - 2i|$, равноудалены от точек (0; 0) и (0; 2) комплексной плоскости, а, следовательно, образуют прямую $y = 1$. Среди точек прямой наименее удаленной от начала координат является точка (0; 1). Она соответствует числу $z = i$ – числу с наименьшим модулем, удовлетворяющему заданному уравнению.

Задача 21. Пусть М – множество точек z_1 комплексной плоскости таких, что $|iz_1 + \sqrt{2}| = 0{,}5$; K – множество точек z_2 комплексной плоскости вида $z_2 = iz_1$, где $z_1 \in M$. Найдите расстояние между фигурами М и K.

Решение.

<u>I способ.</u>

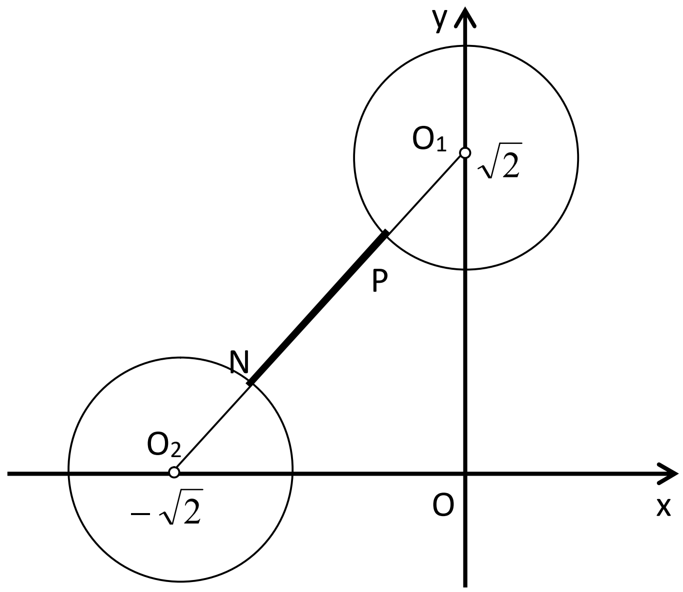
Пусть $z_1 = a + bi$; тогда $|iz_1 + \sqrt{2}| = |ai - b + \sqrt{2}| = 0{,}5$, откуда

$$(\sqrt{2} - b)^2 + a^2 = 0{,}25.$$

Множество точек М комплексной плоскости, удовлетворяющих данному условию, есть окружность с центром в точке O_1 (0; $\sqrt{2}$) и радиусом 0,5.

По условию, $z_2 = iz_1$, т.е. $|z_2 + \sqrt{2}| = 0{,}5$. Полагая $z_2 = a + bi$, имеем $|a + \sqrt{2} + bi| = 0{,}5$ и $(a + \sqrt{2})^2 + b^2 = 0{,}25$.

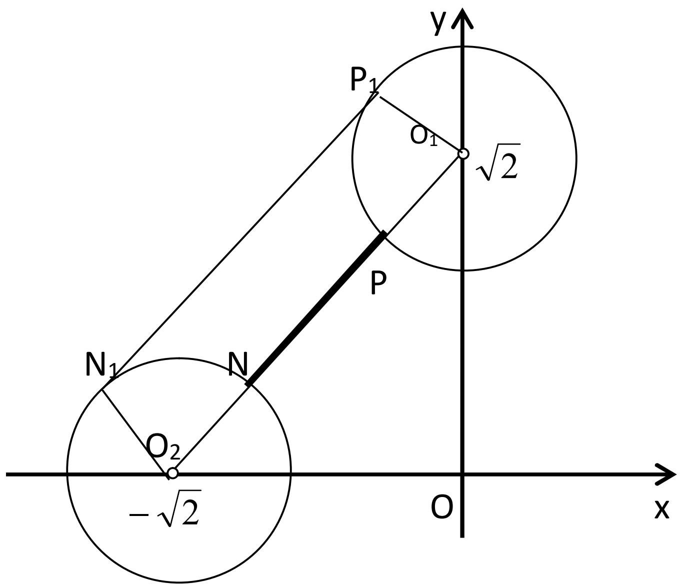
Множество K точек комплексной плоскости, удовлетворяющих этому условию, есть окружность с центром в точке O_2 ($-\sqrt{2}$; 0) и радиусом 0,5. Так как окружности М и K не имеют общих точек, то расстоянием между ними является длина отрезка PN линии центров, т.е. $PN = O_1O_2 - 2r = 2 - 1 = 1$.



Замечание. Геометрическое обоснование того, что длина отрезка PN есть расстояние между данными фигурами, весьма просто.

Действительно, возьмем на окружностях K и M такие точки N_1 и P_1 соответственно, что $N_1 \neq N_2$, $P_1 \neq P_2$.

Для ломанной $O_1P_1N_1O_2$ и прямой O_1O_2 выполняется неравенствO_1P_1 + P_1N_1P+ N_1O_2 > O_1P+ PN+ NO_2. Вычитая из обеих частей неравенства сумму радиусов, получаем P_1N_1 > PN.



II способ.

Запишем неравенства $\left|iz_1+\sqrt{2}\right|=\left|i\cdot\left(z_1-\sqrt{2}\right)\right|=|i|\cdot\left|z_1-\sqrt{2}\right|=\left|z_1-\sqrt{2}\right|$. Таким образом, $\left|z_1-\sqrt{2}\right|=0{,}5$. Это значит, что расстояние от точек фигуры М до точки O_1 (0; $\sqrt{2}$) постоянно и равно 0,5. фигура М – окружность с центром в точке O_1 и радиусом 0,5. Условие $z_2=iz_1$ означает, что множество K получено поворотом точек множества М на угол 90^0 вокруг начала координат, т.е. представляет собой окружность с центром в точке O_2 ($-\sqrt{2}$; 0) и радиусом 0,5. Дальнейшие рассуждения такие же, как при решении I способом.

Задача 22. Найдите наибольший модуль комплексного числа z, удовлетворяющего условию $|zi-3i+4|\le|i|$.

Решение.

Так как $|i|=1$, а $|zi-3i+4|=|i\cdot(z-3-4i)|=|i|\cdot|z-(3+4i)|=|z-(3+4i)|\le 1$. Это круг с центром в точке A (3; 4) и радиусом $r=1$.

Поскольку OA= 5, $OA-r\le|r|\le OA+r$, имеем $4\le|z|\le 6$. Среди точек круга существует точка z_0, для которой $|z_0|=6$. Это точка пересечения границы круга и продолжения отрезка OA.

Задача 23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right|=1,\\ \dfrac{|z+2i|}{|z-1|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Решение.

Так как $\left|\dfrac{z+2i}{z+4i}\right|=\dfrac{|z+2i|}{|z+4i|}=1$, то $|z+2i|=|z+4i|$. Это множество – серединный перпендикуляр к отрезку AB, где A (0; 2), B (0; 4) – точки, соответствующие числам $-2i$ и $-4i$. Уравнение этого перпендикуляра $y=-3$. Из второго уравнения системы имеем $\sqrt{2}|z+2i|=|z-1|$.

Пусть $z=x+yi$, тогда $2\left(x^2+(y+2)^2\right)=(x-1)^2+y^2$. Так как $y=-3$ для каждой из искомых точек, то $2x^2+2=x^2-2x+1+9$; $x^2+2x-8=0$, корнями этого уравнения являются числа 2 и – 4. системе уравнений удовлетворяют 2 числа: $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 - 3i$.

Ответ: $z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = -4 - 3i$.

Задача 24. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\dfrac{3}{z} \geq \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z} - 1\right)$.

Решение.

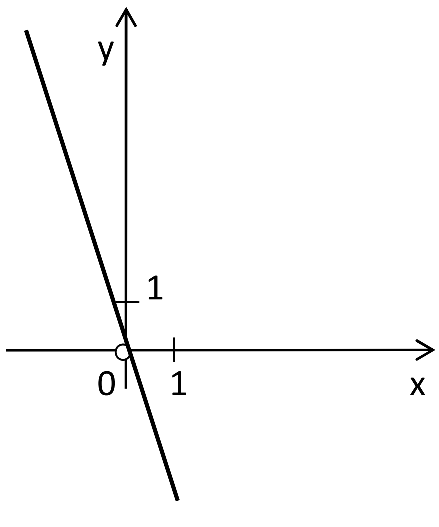
Пусть $z = x + yi$, тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$ и, значит,

$$\mathrm{Re}\frac{3}{z} = \frac{3x}{x^2+y^2}, \ \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z} - 1\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Исходное неравенство перепишется так: $\dfrac{3x}{x^2+y^2} \geq \dfrac{-y}{x^2+y^2}$. Последнее неравенство можно заменить системой двух условий:

$$3x \geq -y \text{ и } x^2+y^2 \neq 0, \text{ или } y \geq -3x \text{ и } x^2+y^2 \neq 0.$$

Искомое множество изображено на рисунке. Отметим, что граница множества (прямая $y = -3x$) принадлежит ему за исключением точки (0; 0).



Задача 25. Множество точек комплексной плоскости определяется условием $|z - 3 - 4i| \leq 1$. В каких пределах изменяется $\mathrm{Im}\, z : \mathrm{Re}\, z$.

Решение.

Множество точек, заданное условием $|z-3-4i|\le 1$, определяется на комплексной плоскости круг с центром в точке $(3;4)$ и радиусом 1. такой круг в системе координат хОу задается неравенством $(x-3)^2+(y-4)^2\le 1$.

Пусть $z=x+yi$, тогда $\operatorname{Im} z=y$, $\operatorname{Re} z=x$, $\operatorname{Im} z:\operatorname{Re} z=\frac{y}{x}$. Задача сводиться к определению границ, в которых может изменяться соотношение $\frac{y}{x}$ при условии $(x-3)^2+(y-4)^2\le 1$. Вопрос может быть сформулирован так: при каких значениях *c* система

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2\le 1,\\ \dfrac{y}{x}=c.\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

Последняя система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases}y=cx,\\ (x-3)^2+(cx-4)^2\le 1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=cx,\\ (c^2+1)x^2-2(3+4c)x+24\le 0.\end{cases}$$

Эта система имеет решения тогда, когда имеет решение квадратное неравенство $(c^2+1)x^2-2(3+4c)x+24\le 0$. Так как коэффициент при x^2 положителен, то оно имеет решения, если дискриминант квадратного трехчлена в его левой части неотрицателен. Имеем

$$\frac{D}{4}=(3+4c)^2-24(c^2+1)=-8c^2+24c-15 \ .$$

$$\frac{D}{4}\ge 0 \text{ при } \frac{1}{4}\left(6-\sqrt{6}\right)\le c\le \frac{1}{4}\left(6+\sqrt{6}\right).$$

Ответ: $\frac{1}{4}\left(6-\sqrt{6}\right)\le \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\le \frac{1}{4}\left(6+\sqrt{6}\right)$.

Задания

Определить геометрическое место точек (построить и описать)

a) $\begin{cases} 1 < |z - 2i| \le 2 \\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \pi \end{cases};$

b) $\begin{cases} 1 < |z - 2i + 3| \le 3 \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases};$

c) $\begin{cases} 2 < |z + 3i| \le 4 \\ 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases};$

d) $\begin{cases} 2 < |z + 1 + 4i| \le 3 \\ \pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4} \end{cases}.$

Глава 4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

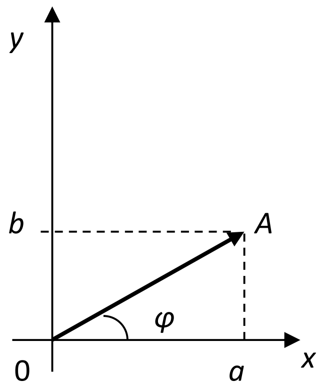
4.1. Тригонометрическая форма комплексного числа, связь с алгебраической формой

Запись комплексного числа z в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* этого числа.

Существует и другая, так называемая, тригонометрическая форма записи комплексных чисел, отличных от нуля, которая часто оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Пусть вектор ***OA*** задается на комплексной плоскости числом

$$z = a + bi.$$



Обозначим через φ угол между положительной полуосью Ox и вектором OA (угол φ считается положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае).

Обозначим длину вектора OA через r. Тогда $r = | z |$. Обозначим также

$$a = r \cos \varphi = | z | \cos \varphi \; ; \; b = r \sin \varphi = | z | \sin \varphi \; . \qquad (1)$$

Тогда

$$z = r \cos \varphi + i\, r \sin \varphi = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Запись отличного от нуля комплексного числа z в виде

$$z = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

называется *тригонометрической формой* комплексного числа z. Число r называется *модулем* комплексного числа z, а число φ называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается $Arg\, z$.

Очевидно, что у комплексного числа z имеется бесконечно много аргументов: если φ_0 − какой-либо аргумент числа z , то все остальные можно найти по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + 2\pi,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

*Для комплексного числа $z = 0$ аргумент и тригонометрическая форма не определяются***.**

Из равенства (1) находим:

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Таким образом, аргументом отличного от нуля комплексного числа $z = a + bi$ является любое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases} \qquad (4)$$

Среди всех аргументов комплексного числа z всегда есть один и только один, удовлетворяющий неравенствам:

$$0 \le \varphi < 2\pi.$$

Это означает, что мы можем однозначно определить аргумент любого отличного от нуля комплексного числа.

Значение φ аргумента комплексного числа z, удовлетворяющее неравенствам $0 \le \varphi < 2\pi$ называется главным и обозначается $arg\, z$.

Аргументы $Arg\, z$ и $arg\, z$ связаны равенством:

$$Arg\, z = arg\, z + 2\,\pi k, \qquad (5)$$

где $k \in \boldsymbol{Z}$, $0 \le arg\, z < 2\pi$.

Разделив почленно второе из равенств системы (4) на первое, получим равенство:

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a}. \quad (6)$$

Формула (6) является следствием системы (4), поэтому все аргументы комплексного числа $z = a + bi$ удовлетворяют равенству (6), но не все решения φ уравнения (6) являются аргументами числа z.

Пример 1. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i$

Решение.

1. По формуле $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ найдём модуль числа:

$$a = 1; \qquad b = 1; \qquad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2. По формулам $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ найдём аргумент:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Пример 2. Найти главное значение аргумента числа $z = -1 + i$.

Решение.

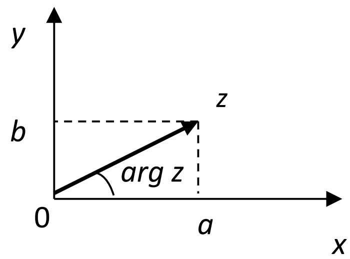
Тогда $tg\,\varphi = -1$, следовательно, $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где k – любое целое число. Так как данное комплексное число z лежит во второй четверти, то аргументами z являются числа из второй серии решении, т.е.

$$Arg\,(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k - \text{целое число.}$$

Покажем, что главное значение аргумента отличного от нуля комплексного числа $z = a + bi$ можно найти по формулам:

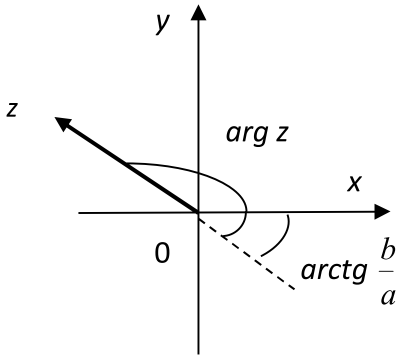
$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{b}{a}; & a > 0,\ b \ge 0; \\ arctg\dfrac{b}{a} + \pi; & a < 0; \\ arctg\dfrac{b}{a} + 2\pi; & a > 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим три случая.



<u>Первый случай: $a > 0$, $b \ge 0$.</u>

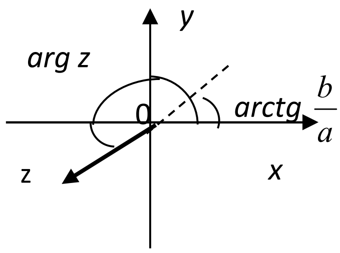
Если $a > 0$, $b \ge 0$, то точка z лежит в первой четверти. При этом $\arg z = arctg\dfrac{b}{a}$



<u>Второй случай: $a < 0$.</u>

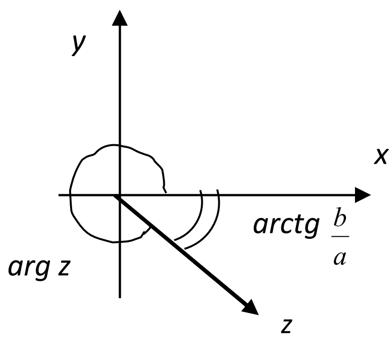
Если $a < 0$, то точка z лежит либо во второй, либо в третьей четверти.

Если точка z лежит во второй четверти, то $b \ge 0$ и $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\dfrac{b}{a} \le 0$



Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{b}{a} + \pi$.

Если точка z лежит в третьей четверти, то $b < 0$ и $0 < arctg\dfrac{b}{a} < \dfrac{\pi}{2}$



Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{b}{a} + \pi$.

<u>Третий случай: $a > 0$, $b < 0$.</u>

Если $a > 0$, $b < 0$, то точка z расположена в четвертой четверти.

Тогда $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\dfrac{b}{a} < 0$. Поэтому $\arg z = arctg\dfrac{b}{a} + 2\pi$.

В случае, когда $a = 0$, получаем $z = bi$. Очевидно, что в этом случае

$$\arg(bi) = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\pi}{2}; & b > 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}; & b < 0. \end{array}\right.$$

Пример 3. Представить в тригонометрической форме число

$$z=1.$$

Решение.

Для числа $z = 1$ $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ и по формуле находим

$$\begin{cases} \cos\varphi = 1, \\ \sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение: $\varphi = 0$. В итоге: $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Пример 4. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -i.$$

Решение.

Для него $a = 0$, $b = -1$. Следовательно, $\rho = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$ и система имеет вид:

$$\begin{cases} \cos\varphi = 0, \\ \sin\varphi = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})$.

Пример 5. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -1.$$

Решение.

Для числа $z = -1$ $a = -1$, $b = 0$. Следовательно, $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ и система имеет вид

$$\begin{cases}\cos\varphi = -1,\\ \sin\varphi = 0\end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi .$$

Получаем $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

Пример 6. Представить в тригонометрической форме число

$$z = 1 + i.$$

Решение.

Для него $a = 1$, $b = 1$. Следовательно, $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ и по системе

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Значит, $1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

Пример 7. Представить в тригонометрической форме число

$$z = -5 + 7i.$$

Решение.

Для него $a = -5$, $b = 7$. Следовательно, $\rho = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}$ и система принимает вид

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{-5}{\sqrt{74}},\\ \sin\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{74}}.\end{cases}$$

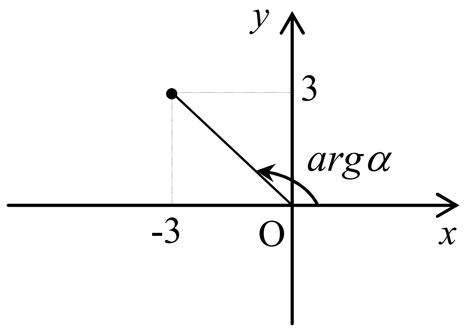
Решением этой системы будет $\varphi = \pi - \arccos\frac{5}{\sqrt{74}}$. Тогда

$$-5 + 7i = \sqrt{74}(\cos(\pi - \arccos\frac{5}{\sqrt{74}}) + i\sin(\pi - \arccos\frac{5}{\sqrt{74}})).$$

Пример 8. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$\alpha = -3 + 3i\,.$$

Решение.



Используя формулу, находим модуль данного числа:

$$|\alpha| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\,.$$

Далее получим

$$\cos(Arg\alpha) = \frac{a}{|\alpha|} = \frac{(-3)}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin(Arg\alpha) = \frac{b}{|\alpha|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

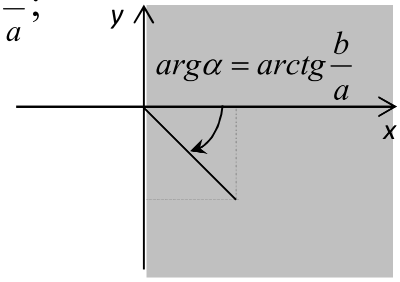
Так как точка, изображающая данное число, лежит во II четверти, то $\arg\alpha = \frac{3\pi}{4}$ и, следовательно, $Arg\alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Для главного значения аргумента справедливы соотношения:

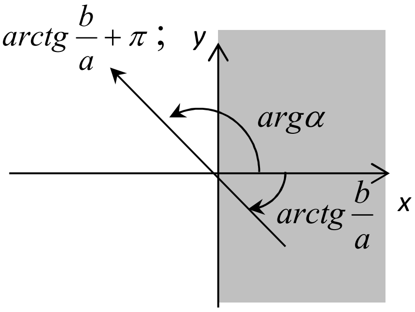
$$\arg\alpha = \begin{cases} arctg\frac{b}{a}, & x > 0; \\ arctg\frac{b}{a} + \pi, & x < 0, \quad y \geq 0; \\ arctg\frac{b}{a} - \pi, & x < 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

В самом деле, так как главное значение $arctg\frac{b}{a}$ лежит между $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{\pi}{2}$, то:

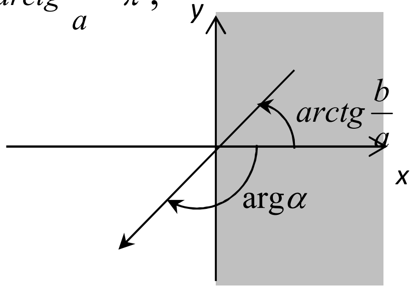
1) если точка α лежит в I или IV четверти $(x>0)$, то и $\arg\alpha = arctg\frac{b}{a}$;



2) если точка α лежит в II четверти $(x<0; y\geq 0)$, то и $\arg\alpha = arctg\frac{b}{a}+\pi$;



3) если точка α лежит в III четверти $(x<0; y<0)$, то и $\arg\alpha = arctg\frac{b}{a}-\pi$;



Пример 9. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$\alpha = -\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}.$$

Решение.

Вычислим модуль: $|\alpha| = \sqrt{\left(-\sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2} = 1$.

Так как $x = -\sin\frac{\pi}{8} < 0$, $y = -\cos\frac{\pi}{8} < 0$, то число α лежит в III четверти, поэтому

$$\arg\alpha = arctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) - \pi = arctg\left(ctg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right) - \pi = arctg\left(ctg\frac{3\pi}{8}\right) - \pi = \frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8}$$

Следовательно, $Arg\alpha = -\frac{5\pi}{8} + 2\pi k$, где $k \in Z$.

Задача 1. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $1+i$; б) i; в) 2; г) $-i$; д) -3; е) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$; ж) $\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Решение.

Так как тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда:

а) В комплексном числе $z = 1+i$: $a=1, b=1$.

Тогда $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}.$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4},$$

Поэтому $z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$

б) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, где $r=1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}.$

в) $2 = 2(\cos 0 + i\sin 0)$, где $r=2$, $\varphi = 0.$

г) $-i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, где $r=1$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}.$

д) $-3 = -3(\cos\pi + i\sin\pi)$, где $r=3$, $\varphi = \pi.$

е) $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$.

ж) $r = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$, а $\cos\varphi = \frac{a}{r} = 1\cdot\frac{2}{-\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Поэтому $\frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

4.2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра

Рассмотрим умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 +$$

$$+ \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) i] = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)).$$

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (1)$$

Пусть теперь

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \qquad z_2 = z^{-1} = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда, с одной стороны,

$$1 = \cos 0 + i \sin 0 ,$$

с другой стороны,

$$1 = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Следовательно,

$$\cos 0 + i \sin 0 = \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2).$$

Откуда получаем:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0, \text{ или } \varphi_2 = -\varphi_1, \text{ т.е.}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r_1} (\cos (-\varphi_1) + i \sin (-\varphi_1)).$$

Вывод*: модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей; аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей.*

Аналогично доказывается, что *модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленного на модуль делителя; аргумент частного получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого*.

Поэтому для частного двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, легко получается формула:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(cos\,(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin\,(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \quad (2)$$

где комплексное число z_2 отлично от нуля.

Формула (1) легко обобщается на произвольное конечное число сомножителей. Поэтому для любого натурального числа n справедлива следующая формула:

$$z^n = \underbrace{z\,z\ \ldots\ z}_{n\ раз} = \left(r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n\left(\cos\ n\varphi + i\sin\ n\varphi\right).$$

Формула

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \qquad (3)$$

называется *формулой Муавра***.**

Пример 1. Вычислить: $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Решение.

Переведем числитель и знаменатель дроби из алгебраической формы в тригонометрическую.

Для числа $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\varphi = arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1} = \dfrac{\pi}{3}$.

Для числа $z_2 = 1 - i$ $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = arctg\dfrac{-1}{1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}=\sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12})+i\sin(\frac{7\pi}{12})).$$

В итоге:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}(\cos(\frac{7\pi}{12}\cdot 20)+i\sin(\frac{7\pi}{12}\cdot 20))=$$

$$=2^{10}(\cos\frac{35\pi}{3}+i\sin\frac{35\pi}{3})=[\textit{так как}\,\frac{35\pi}{3}=12\pi-\frac{\pi}{3}]=$$

$$=2^{10}(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))=2^{10}(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=\underline{2^9(1-\sqrt{3}i)}.$$

Поскольку

$$z^{-1}=\frac{1}{r_1}\ (cos\,(-\varphi_1)+i\ sin\,(-\varphi_1)),$$

формула Муавра справедлива и для целых отрицательных чисел n.

Задача 1. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произведите указанные действия:

а) $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}{1+i}$;

б) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Решение.

а) Представим сначала каждое из чисел в тригонометрической форме:

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right);$$

$$-\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right);$$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)}{1+i} = \frac{4\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(1+i) = 2+2i\ .$$

б) В этом случае первый из двух сомножителей уже представлен в тригонометрической форме. Относительно второго сомножителя этого сказать нельзя, так как здесь в скобках перед синусом стоит знак минус вместо нужного нам знака плюс. Поэтому представим сначала второй сомножитель в тригонометрической форме. Для этого мы воспользуемся четностью и нечетностью тригонометрических функций косинуса и синуса соответственно:

$$cos\ (-\varphi) = cos\ (\varphi); \qquad sin\ (-\varphi) = -sin\ (\varphi).$$

Тогда можно записать:

$$\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\ .$$

Задача 2. Вычислите: $\dfrac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)^{6}}{\left(-1+i\right)^{12}}$.

Решение.

Воспользуемся формулой Муавра:

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$$

По этой формуле:

$$\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{12} = \left(2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\right)^{12}$$

$$= 2^{12}\left(\cos\frac{60\pi}{3} + i\sin\frac{60\pi}{3}\right) = 2^{12}(\cos 20\pi + i\sin 20\pi) = 2^{12}$$

$$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{6} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{6} = 2^{6}\left(\cos\frac{6\pi}{3} + i\sin\frac{6\pi}{3}\right) = 2^{6}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{6}.$$

$$(-1 + i)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{12} == \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\frac{36\pi}{4} + i\sin\frac{36\pi}{4}\right) = 2^{6}(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^{6}.$$

Следовательно, $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) == -\frac{2^{12} + 2^{6}}{2^{6}} = -\left(2^{6} + 1\right) = -63$.

Задача 3. Выясните геометрический смысл произведения двух комплексных чисел.

Решение.

Если хотя бы одно из двух комплексных чисел равно нулю, то их произведение также равно нулю (это следует из свойств комплексных чисел).

Пусть теперь z_1 и z_2 – произвольные отличные от нуля комплексные числа. Запишем их в тригонометрической форме:

$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

При умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются а аргументы складываются. Следовательно, чтобы умножить отличное от нуля комплексное число z_1 на отличное от нуля комплексное число z_2, нужно вектор $\mathbf{z_1}$ растянуть (или сжать) в r_2 раз, а затем полученный вектор повернуть вокруг начала координат на угол $\arg z_2$.

Задача 4. Выразите $\cos 3x$ и $\sin 3x$ через $\cos x$ и $\sin x$.

Решение.

Возьмем произвольное комплексное число

$$z = \cos x + i \sin x$$

и возведем его в третью степень, пользуясь формулой Муавра и формулой куба суммы. Получим, с одной стороны,

$$z^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x,$$

а с другой стороны,

$z^3 = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x = (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i\,(3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$.

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, поэтому

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x\ ;$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x\ .$$

Выражая в предпоследнем равенстве $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$, а в последнем равенстве $\cos^2 x$ через $\sin^2 x$, получаем:

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;\ \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x\ .$$

З*амечание*. Аналогичным способом можно выразить $\sin(nx)$ и $\cos(nx)$ через $\sin x$ и $\cos x$ для любого натурального числа n.

Задача 5. Представьте в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций, кратных x (т.е. тригонометрических функций от x, $2x$, $3x$ и т. д.) следующие функции: а) $\cos^5 x$; б) $\sin^4 x$.

Решение.

Пусть $z = \cos x + i \sin x$. Тогда

$$z^{-1} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x.$$

Используя выражения для z и z^{-1}**,** получаем равенства:

$$\cos x = \frac{z + z^{-1}}{2}\ ; \qquad \sin x = \frac{z + z^{-1}}{2i}\ .$$

Возведем первое из полученных равенств в пятую степень:

$$\cos^5 x = \frac{z^5 + 5z^4 z^{-1} + 10 z^3 z^{-2} + 10 z^2 z^{-3} + 5z z^{-4} + z^{-5}}{2^5} =$$

$$= \frac{\left(z^5 + z^{-5}\right) + 5\left(z^3 + z^{-3}\right) + 10\left(z + z^{-1}\right)}{32}.$$

Учитывая, что

$z^n = (cos\ x + sin\ x)^n = cos\ (nx) + i\ sin\ (nx), z^{-n} = cos\ (-nx) + i\ sin\ (-nx)$

$$z^n = cos\ (nx) - i\ sin\ (nx),$$

получаем:

$$\cos^5 x = \frac{2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x}{32} = \frac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}.$$

Аналогично вычисляем $\sin^4 x$:

$$\sin^4 x = \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^4 = \frac{\left(z^4 + z^{-4}\right) - 4\left(z^2 + z^{-2}\right) + 6}{16} =$$

$$= \frac{2\cos 4x - 8\cos 2x + 6}{16} = \frac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}.$$

Задача 6. Найдите тригонометрическую форму комплексного числа

$$z = \frac{i-1}{2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Решение.

Пусть $z_1 = i - 1$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $|z_2| = 2$, $Arqz_2 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $(n \in Z)$.

Поскольку $|z_1| = \sqrt{2}$ и $Arqz_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $(m \in Z)$, то $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а

$$Arq\frac{z_1}{z_2} = Arqz_1 - Arqz_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m - \frac{\pi}{4} - 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi(m-n).$$

Следовательно, $Arq\frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi p\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi p\right)\right), \text{ где } p \in Z.$$

4.3. Извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа

Применяя формулу Муавра, легко найти комплексные корни n-ой степени из произвольного отличного от нуля комплексного числа z.

Пусть $\sqrt[n]{z} = u$. Тогда $u^n = z$ и все корни n-й степени из числа z являются решениями уравнения.

Поскольку комплексное число u отлично от нуля (в противном случае комплексное число z равно нулю, а мы договорились не рассматривать этот случай в виду того, что при $z = 0$ уравнение имеет единственный n-кратный корень $u = 0$). Его можно представить в тригонометрической форме:

$$u = r_1\,(cos\ \varphi_1 + i\ sin\ \varphi_1).$$

Пусть, как обычно, $z = r\,(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)$, тогда уравнение примет вид:

$$r_1^{\,n}\,(cos\ n\varphi_1 + i\ sin\ n\varphi_1) = r\,(cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi).$$

Комплексные числа, заданные в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$ ($k \in \boldsymbol{Z}$) . Поэтому

$$\begin{cases} r_1^{\,n} = r\ , \\ \varphi_1 = \varphi + 2\pi k\ , \quad k \in Z\,. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$r_1 = \sqrt[n]{r}\,, \varphi_1 = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\ , \qquad (k \in \mathbf{Z})\ .$$

Здесь $\sqrt[n]{z}$ − арифметический корень из положительного действительного числа r.

Обозначим k-й корень n-й степени из комплексного числа z через u_k: Тогда

$$u_k = \left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \mathbf{Z}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots , n - 1$.

Замечание. Корней n-й степени из ненулевого комплексного числа z, заданного в тригонометрической форме, будет ровно n, так как именно столько различных значений будет принимать дробь $\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где k пробегает n значений от 0 до n-1.

Пример 2. Вычислить $\sqrt[4]{-1}$.

Решение.

Для того чтобы воспользоваться формулой, необходимо представить число, стоящее под знаком корня, в тригонометрической форме. Для числа z = -1 найдем его модуль и аргумент: $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$, $\varphi = \pi$.

В итоге $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$.

По формуле $w_k = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4})$. Тогда:

$$w_0 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 0}{4} = \underline{\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$w_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 1}{4} = \underline{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$w_2 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 2}{4} = \underline{\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$w_3 = \cos\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi\cdot 3}{4} = \underline{\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[5]{-32i}$.

Решение.

Для числа $z = -32i$ найдем его модуль ρ и аргумент φ: $\rho = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, так как число $z = -32i$ лежит на отрицательной части мнимой оси. В итоге $z = -32i = 32(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})$.

По формуле $w_k = \sqrt[5]{32}(\cos\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5} + i\sin\frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5})$, где k = 0, 1, 2, 3, 4.

Тогда:

$$w_0 = \underline{2(\cos\frac{-\pi}{10} + i\sin\frac{-\pi}{10}),}$$

$$w_1 = \underline{2(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}),}$$

$$w_2 = \underline{2(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}),}$$

$$w_3 = 2(\cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10}) = \underline{2(\cos\frac{-9\pi}{10} + i\sin\frac{-9\pi}{10}),}$$

$$w_4 = 2(\cos\frac{15\pi}{10} + i\sin\frac{15\pi}{10}) = \underline{2(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}).}$$

Для w_3 и w_4 аргументами будут $\frac{-9\pi}{10}$ и $\frac{-\pi}{2}$, а не $\frac{11\pi}{10}$ и $\frac{15\pi}{10}$ соответственно, так как $\varphi \in (-\pi;\pi]$.

Пример 4. Вычислить $\sqrt[3]{-2+2\sqrt{3}i}$.

Решение.

Для числа $z = -2+2\sqrt{3}i$ модуль ρ и аргумент φ есть:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+124} = \sqrt{16} = 4, \; \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

В итоге

$$z = -2+2\sqrt{3}i = 4(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}).$$

$$w_k = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{3}), \textit{ где } k = 0, 1, 2.$$

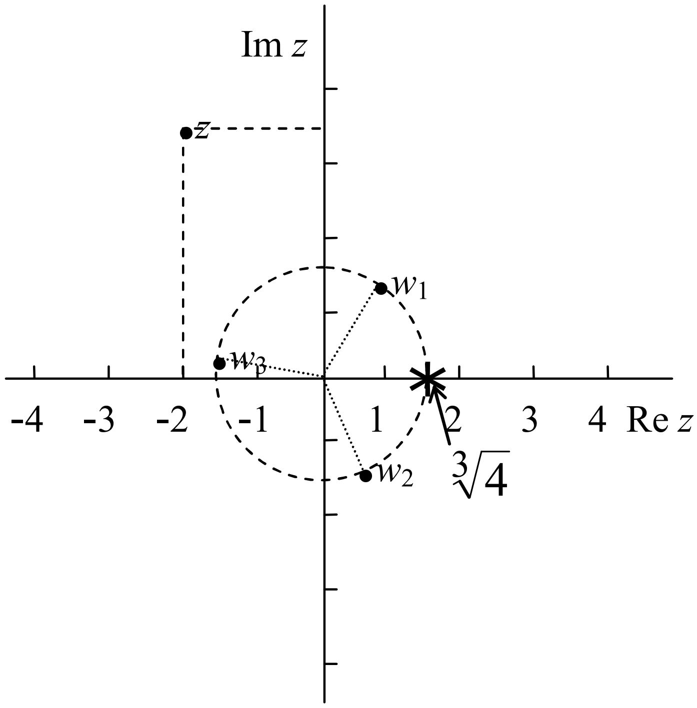
Тогда

$$w_0 = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}),}$$

$$w_1 = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}),}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}) = \underline{\sqrt[3]{4}(\cos\frac{-4\pi}{9} + i\sin\frac{-4\pi}{9}).}$$

Из формулы видно, что аргументы корней w_k отличаются на одну и ту же величину $\frac{2\pi}{n}$, а модули всех корней одинаковые и равны $\sqrt[n]{\rho}$. Значит, на комплексной плоскости все w_k лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[n]{\rho}$ на одинаковом расстоянии друг от друга. Для примера изображения самого числа $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ и его корней w_0, w_1, w_2 можно видеть на рисунке.



Пример 5. Найдите $\sqrt[3]{-i}$.

Решение.

$$-\mathrm{i} = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$u_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2;$$

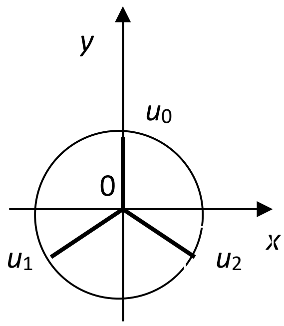
$$u_k = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Таким образом,

$$u_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\ ;$$

$$u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ ;$$

$$u_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ .$$



Точки $u_0(0;\ 1)$, $u_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$ и $u_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ являются вершинами правильного треугольника.

<u>Замечание</u>. Для любого отличного от нуля комплексного числа z и любого натурального числа $n > 2$ корни степени n из числа z являются вершинами правильного n - угольника с центром в точке O (0;0). Это следует из того, что модули всех корней n-й степени равны $\sqrt[n]{|z|}$, а углы между соседними корнями u_k и u_{k+1} равны $\frac{2\pi}{n}$.

4.4. Комплексные корни *n*-й степени из единицы

Вычислим все корни n-ой степени из единицы. Пусть $\varepsilon = p(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Зная, что $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, составим систему:

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\varphi = 0 + 2\pi k, k \in Z \end{cases}.$$

Тогда $\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \dfrac{2\pi k}{n}, k \in Z \end{cases}$ и любой корень n - ой степени из единицы будет иметь вид:

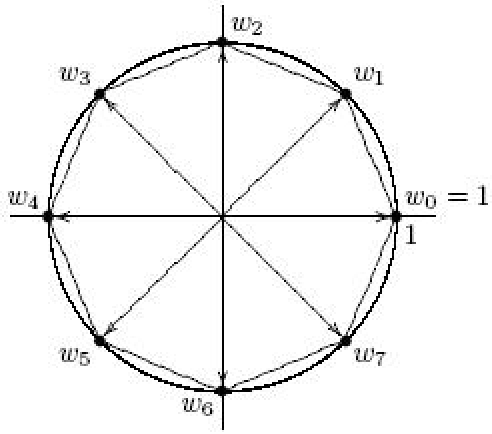
$$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\ .$$

Заметим, что $\varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Покажем, что существует ровно n различных корней n - ой степени из единицы. Для этого поделим k на n с остатком, получим $k = nq + r$, где $0 \le r < n$.

Следовательно, $\cos\frac{2\pi(nq+r)}{n} + i\sin\frac{2\pi(nq+r)}{n} = \cos\frac{2\pi r}{n} + i\sin\frac{2\pi r}{n}$. Поскольку r может принимать только одно из n значений $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$, то и различных корней n - ой степени из единицы также будет ровно n штук, причем $\varepsilon_j = \cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}$, где $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Точки w_k являются вершинами правильного n -угольника, вписанного в *окружность* единичного радиуса с центром в начале координат, при этом одной из вершин этого многоугольника является 1. Например, при n=8



Теорема. Корни n - ой степени из единицы образуют мультипликативную циклическую группу.

Доказательство.

Пусть M - всех корней n -ой степени из единицы. Очевидно, что $\forall \varepsilon_i, \varepsilon_j \in M \quad \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \in M$. Тогда M замкнуто относительно умножения. Операция умножения во множестве M ассоциативна; $\varepsilon_0 = 1$ - нейтральный элемент в M; $(\varepsilon_i)^{-1} = \varepsilon_{n-i}$.

Таким образом, $< M \cdot >$ группа, в которой элемент ε_1 является порождающим, так как $\forall \varepsilon_i \in M \quad \varepsilon_i = (\varepsilon_1)^i$, следовательно, M - мультипликативная циклическая группа.

Свойство. *Произведение и частное любых двух значений корня n-й степени из* 1 *является корнем n-й степени из* 1.

Доказательство. Пусть ε, ε' — некоторые значения корня n-й степени из 1, тогда $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon'^n = 1$, следовательно, $(\varepsilon\varepsilon')^n = \varepsilon^n\varepsilon'^n = 1$ и $(\varepsilon/\varepsilon')^n = \varepsilon^n/\varepsilon'^n = 1$, таким образом, $\varepsilon\varepsilon'$, ε/ε' являются значениями корня n-й степени из 1.

Корень ε n-й степени из 1 называется *первообразным*, или *примитивным*, если $\varepsilon^m = 1$ для любого натурального $m < n$ (т. е. ε не является корнем из единицы никакой меньшей степени). В данном случае говорят также, что *ε принадлежит показателю n*. Из определения сразу вытекает, что произвольное число ε может принадлежать лишь одному показателю.

Легко видеть, что

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

является первообразным корнем n-ой степени из 1.

Теорема. *Для того, чтобы корень ε n-й степени из* 1 *являлся первообразным, необходимо и достаточно, чтобы величины*

$\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ исчерпывали все значения $\sqrt[n]{1}$.

Доказательство.

Необходимость. Предположим противное: среди величин $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ нашлось две равных, например, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ для некоторых натуральных k, l, причем $1\ k < l\ n$. Тогда $\varepsilon^{l-k} = 1$, $l\ k > 0$, следовательно, ε не является первообразным.

Достаточность. Так как величины исчерпывают все значения $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ корня n-й степени из 1, то, в частности, $\varepsilon^m = \varepsilon^n = 1$ для всякого натурального $m < n$, следовательно, ε — первообразный корень.

Утверждение. *Пусть ε - первообразный корень n-й степени из* 1, *тогда для того, чтобы $\varepsilon^m = 1$, необходимо и достаточно, чтобы m было кратно n.*

Доказательство.

Необходимость. Разделим m с остатком на n: имеем $m = np + r$ для некоторых натуральных p и r ($0 \le r < n$), поэтому

$$1 = \varepsilon^m = \varepsilon^{np}\varepsilon^r = \varepsilon^r.$$

Итак, $\varepsilon^r = 1$. Так как ε - первообразный и 0 $r < n$, то $r = 0$.

Достаточность. Имеем $m = np$, следовательно, $\varepsilon^m = (\varepsilon^n)^p = 1$.

Следствие. *Если корень ε m-й степени из* 1 *принадлежит показателю n, то m кратно n.*

Утверждение. *Пусть ε - первообразный корень n-ой степени из* 1*, тогда для того, чтобы ε^k был также первообразным n-й степени, необходимо и достаточно, чтобы* НОД(n, k) = 1.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное: ε и ε^k — первообразные, однако НОД(n, k) = $d > 1$. Имеем $n = n'd$, $k = k'd$ для некоторых натуральных n', k', причем, так как $d > 1$, то $n' < n$. Однако

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'}dn' = \varepsilon^{k'}n = (\varepsilon^n)^{k'} = 1.$$

Так как $n' < n$, то ε^k не является первообразным корнем.

Достаточность. Предположим теперь, что ε — первообразный корень, НОД(n, k) = 1, однако $(\varepsilon^k)^m = 1$ для некоторого натурального $m < n$ (т. е. ε^k не является первообразным). Из утверждения следует, что km кратно n, однако НОД(n, k) = 1, поэтому m кратно n, что невозможно, так как $m < n$.

Следствие. *Величина*

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

является первообразным корнем n-й степени из 1 *тогда и только тогда, когда* НОД(n, k) = 1.

Согласно следствию число первообразных корней n-й степени из 1 совпадает с количеством $\phi(n)$ натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним. Функция $\phi(n)$ называется *функцией Эйлера*. Она играет существенную роль в теории чисел.

Пример. Найдем все первообразные корни из 1 степени равной:

1) 1, ответ: 1;

2) 2, один первообразный корень: $\varepsilon_1 = -1$;

3) 3, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) 4, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,3} = \pm i$;

5) 6, два первообразных корня: $\varepsilon_{1,5} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

6) 8, выпишем все натуральные числа, не превосходящие n = 8 и взаимно простые с ним: 1, 3, 5, 7; первообразными корнями являются:

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{8} + i\sin\frac{2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{3\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{3\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{5\cdot 2\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varepsilon_7 = \cos\frac{7\cdot 2\pi}{8} + i\sin\frac{7\cdot 2\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Замечание. Для каждого $j = 0,1,\ldots,n-1$ справедливо

$$z_i = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi j}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi j}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi j}{n} + i\sin\frac{2\pi j}{n}\right) = u_0\cdot\varepsilon_j.$$

Следствие. Все корни n- ой степени из ненулевого комплексного числа z являются результатом умножения одного из этих корней на корни n - ой степени из единицы.

Пример. *Найти все корни 3 – ей степени из -8.*

Очевидно, что -2 – один из искомых корней. Тогда, согласно вышеприведенному следствию, $z_0 = -2\cdot\varepsilon_0 = -2\cdot 1 = -2$,

$$z_1 = -2\cdot\varepsilon_1 = -2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i,$$

$$u_2 = -2\cdot\varepsilon_2 = -2\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i.$$

Рассмотрим уравнение $z^n = a$, $a \in \boldsymbol{C}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Пусть $a = \rho e^{i\theta}$, а решение уравнения пишется в виде $z = re^{i\varphi}$. Тогда получаем $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$, откуда находим, что $r^n = \rho$, $n\varphi = \theta + 2\pi k$, т.е.

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \ \varphi_k = \frac{\theta + 2\pi k}{n}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Таким образом, уравнение имеет корни

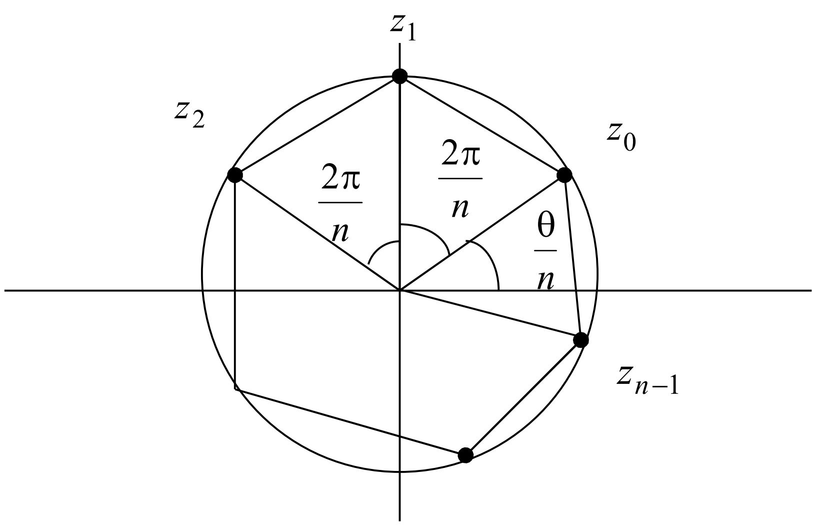
$$z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Покажем, что имеется ровно n различных корней. Действительно, $z_0, \dots, z_{n-1}$ различны, т.к. их аргументы

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \dots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

различны и отличаются меньше, чем на 2π. Далее, $z_n = z_0$, т.к. $\varphi_n = \dfrac{\theta + 2\pi n}{n} = \dfrac{\theta}{n} + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi$. Аналогично $\varphi_{n+1} = \varphi_1, \dots$.

Таким образом, уравнение при $a \neq 0$ имеет ровно n корней $z_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}}, k = 0, \dots, n-1$, расположенных в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в т. O.



Геометрическое место корней n-ой степени

Таким образом, доказана

Теорема. Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа $a \neq 0$ всегда возможно. Все значения корня n -ой степени из a расположены в вершинах правильного n - угольника, вписанного в окружность с центром в нуле и радиуса $\sqrt[n]{|a|}$. При этом,

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} \equiv \sqrt[n]{|a|} \cdot (\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}), k = 0,...,n-1.$$

Задача 6. Вычислите все значения $\sqrt[4]{-4}$ и изобразите их на комплексной плоскости.

Решение.

Как известно, корень n-ой степени из комплексного числа $z = r$ ($cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi$) имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k \in \mathbf{Z}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots , n - 1$.

Представим число (−4) в тригонометрической форме:

$$-4 = 4\ (cos\ \pi + i\ sin\ \pi).$$

Тогда

$$\sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \text{где } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

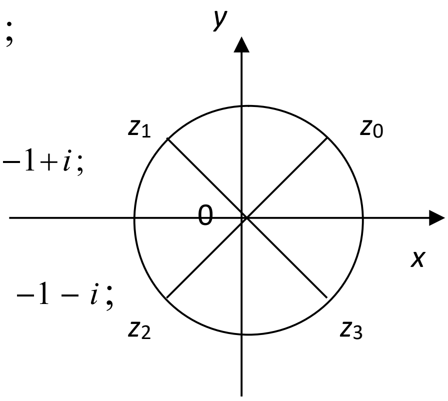
Получаем следующие четыре значения корня четвертой степени из числа (−4):

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i;$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+i;$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i;$$

$$z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - i.$$



Задача 7. Вычислите: $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$.

Решение.

Представим числа $1-i$ и $\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме:

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right);\ \sqrt{3}+i\ =\ 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right)}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{\frac{19\pi}{12}+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\frac{19\pi}{12}+2\pi k}{6}\right).$$

Придавая k значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, получим шесть значений искомого корня:

$$z_0=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{19\pi}{72}+i\sin\frac{19\pi}{72}\right);\ z_1=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{42\pi}{72}+i\sin\frac{42\pi}{72}\right);$$

$$z_2=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{67\pi}{72}+i\sin\frac{67\pi}{72}\right);\ z_3=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{91\pi}{72}+i\sin\frac{91\pi}{72}\right);$$

$$z_4=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{115\pi}{72}+i\sin\frac{115\pi}{72}\right);\ z_5=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{139\pi}{72}+i\sin\frac{139\pi}{72}\right).$$

Задача 8. Пользуясь корнями третьей степени из 1, вычислите $\sqrt[3]{-8i}$.

Решение.

Известно, что все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить, умножая одно из них на все значения корня n-й степени из числа 1.

Одно из значений $\sqrt[3]{-8i}$ можно найти непосредственно. Оно равно $2i$, так как $(2i)^3=-8\,i$.

Найдем теперь все значения $\sqrt[3]{1}$:

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3},$$

где k принимает значения 0, 1 и 2.

Следовательно, $e_0 = 1$; $e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $e_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, получаем три значения для $\sqrt[3]{-8i}$:

$$z_0 = 2i\, e_0 = 2i;\ z_1 = 2i\, e_1 = -\sqrt{3} - i\,;\ z_2 = 2i\, e_2 = \sqrt{3} - i\,.$$

Задача 9. Используя тригонометрическую форму комплексного числа, произведите указанные действия: $\sqrt[3]{\dfrac{-3i}{2+2\sqrt{3i}}}$.

Решение.

Представим числа $z_1 = -3i$ и $z_2 = 2 + 2\sqrt{3i}$ в тригонометрической форме.

1) $z_1 = -3i$, где $a_1 = 0, b_1 = -3,$ тогда $r_1 = \sqrt{a_1^2 + a_1^2} = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3,$

Находим значение главного аргумента φ_1:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{a_1}{r_1} = \frac{0}{3} = 0 \\ \sin\varphi_1 &= \frac{b_1}{r_1} = \frac{-3}{3} = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3\pi}{2}.$$

Подставим значения r_1 и φ_1 в выражение $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, получим $z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$

2) $z_2 = 2 + 2\sqrt{3i}$, где $a_2 = 2,\ b_2 = 2\sqrt{3},$ тогда $r_2 = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4,$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_2 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}.\ \text{Тогда}\ z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3) Найдем частное

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{3}{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right)==\frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right).$$

Далее, применяя формулу получим:

$$\sqrt[3]{\frac{-3i}{2+2\sqrt{3i}}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{6}+2\pi k}{3}\right).$$

Полагая k=0, 1, 2, получим три различных значения искомого корня:

если $k=0$, то $z_0=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right);$

если $k=1$, то $z_1=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{19\pi}{18}+i\sin\frac{19\pi}{18}\right);$

если $k=2$, то $z_2=\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(\cos\frac{31\pi}{18}+i\sin\frac{31\pi}{18}\right).$

Задача 10. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$. Докажите, что

а) число $\frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ является действительным положительным числом;

б) имеет место равенство:

$$|z_1-z_3||z_2-z_4|=|z_1-z_2||z_3-z_4|+|z_1-z_4||z_2-z_3|.$$

Решение.

а) Представим данные комплексные числа в тригонометрической форме:

$$z_1=\rho(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1),\ z_2=\rho(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2),\ z_3=\rho(\cos\alpha_3+i\sin\alpha_3),$$

$$z_4=\rho(\cos\alpha_4+i\sin\alpha_4),$$

так как $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \rho$.

Предположим, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_1 + 2\pi$. Тогда $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)} =$

$$= \frac{((\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + i(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2))((\cos\alpha_3 - \cos\alpha_4) + i(\sin\alpha_3 - \sin\alpha_4))}{((\cos\alpha_1 - \cos\alpha_4) + i(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_4))((\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3) + i(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3))} =$$

$$= \frac{\left(-2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + i2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)}{\left(-2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} + i2\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(-2\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} + i2\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\cos\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}{\left(-2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} + i2\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)} =$$

$$\frac{\left(i\cos\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - \sin\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}{\left(i\cos\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} - \sin\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)} \cdot \cdot \frac{\left(4\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\left(i\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)\right)}{\left(4\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\left(i\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2} - \sin\frac{\alpha_1 + \alpha_4}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} + i\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} + i\sin\frac{\alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_4}{2}}{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_4}{2}\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_4 - \alpha_3}{2}}{\sin\frac{\alpha_4 - \alpha_1}{2}\sin\frac{\alpha_3 - \alpha_2}{2}}.$$

Последнее выражение является положительным числом, так как под знаками синусов стоят числа из интервала $(0;\pi)$.

б) Имеем

$$|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|,$$

так как число $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ вещественно и положительно. Действительно, если a и b – комплексные числа и $\dfrac{a}{b}$ вещественно и больше нуля, то

$$|a+b| = |b|\left|1+\frac{a}{b}\right| = |b|\left(1+\frac{a}{b}\right) = |b|\left(1+\left|\frac{a}{b}\right|\right) = |b|\left(1+\frac{|a|}{|b|}\right) = |a|+|b|.$$

Кроме того,

$$|(z_1-z_2)(z_3-z_4)+(z_1-z_4)(z_2-z_3)| = |-z_1z_4 - z_2z_3 + z_1z_2 + z_4z_3| = |(z_1-z_3)(z_2-z_4)|,$$

следовательно, нужное равенство доказано.

Задача 13. Запишите в алгебраической форме число $z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{17}$.

Решение.

Представим число z в тригонометрической форме, а затем найдем его алгебраическую форму. Имеем $\left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{3+1} = 2$. Для $\varphi = arq\left(\sqrt{3}+i\right)$ получаем систему:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ 0 \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Отсюда следует равенство: $\left(\sqrt{3}+i\right)^{17} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17}$. Применяя формулу Муавра: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$, получаем

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17} = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^{17} = 2^{17}\left(\cos\frac{17\pi}{6}+i\sin\frac{17\pi}{6}\right) = 2^{17}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Найдена тригонометрическая форма заданного числа. Запишем теперь это число в алгебраической форме:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^{17} = 2^{17}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = -2^{16}-\sqrt{3}+2^{16}i.$$

Задача 14. Найдите сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n-1)x$, $x \ne \pi k$, $k \in Z$.

Решение.

Рассмотрим сумму

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)^3+\cdots+(\cos(2n-1)x+i\sin(2n-1)x)$$

Применяя формулу Муавра, найдем

$$S_n(x)=(\cos x+i\sin x)+(\cos 3x+i\sin 3x)^3+\cdots+(\cos x+i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма представляет собой сумму n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q=(\cos x+i\sin x)^2$ и первым членом $b_1=\cos x+i\sin x$.

Применяя формулу для суммы членов такой прогрессии, имеем

$$S_n(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^{2n-1}}{1-(\cos x+i\sin x)^2}=\frac{(\cos x+i\sin x)-(\cos(2n+1)x+i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x+\sin^2 x-i2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)+(\sin x-\sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x-i\cos x)}=$$

$$=((\cos x-\cos(2n+1)x)+(\sin x-\sin(2n+1)x))\cdot(\sin x+i\cos x)\cdot$$

$$(2\sin x(\sin x-i\cos x)(\sin x+i\cos x))^{-1}=$$

$$\frac{(\cos x-\cos(2n+1)x)\sin x-(\sin x-\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x}+$$

$$+\frac{i((\sin x-\sin(2n+1)x)\sin x+(\cos x-\cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

Выделяя мнимую часть в последнем выражении, находим $\operatorname{Im}S_n(x)=\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin(2n-1)x=$

$$=\frac{1-\sin x\sin(2n+1)x-\cos x\cos(2n+1)x}{2\sin x}=\frac{1-\cos 2nx}{2\sin x}=\frac{2\sin^2 nx}{2\sin x}=\frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

Итак, $\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\cdots+\sin(2n-1)x=\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$.

Выделяя действительную часть, получаем также следующую формулу: $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\sin 2nx}{2\sin x}$, $x\neq\pi k$, $k\in Z$.

Задача 15. Найдите сумму:

а) $1-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots$; б) $C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\cdots$.

Решение.

По формуле Ньютона для возведения в степень имеем

$$(1+i)^n = 1 + C_n^1 i + C_n^2 i^2 + C_n^3 i^3 + C_n^4 i^4 + \dots + C_n^n i^n = 1 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 +$$

$$+ iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 = \left(1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots\right) + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots\right).$$

По формуле Муавра находим:

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Приравнивая вещественные и мнимые части полученных выражений для $(1+i)^n$, имеем:

$$1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{4} \text{ и } C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{4}.$$

Эти формулы в компактном виде можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{\pi n}{4},$$

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{\pi n}{4}, \text{ где } [a] \text{ - целая часть числа } a.$$

Задача 16. Найдите все ω, для которых $\omega^4 = 16i$.

Решение.

Поскольку $16i = 16\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, то, применяя формулу

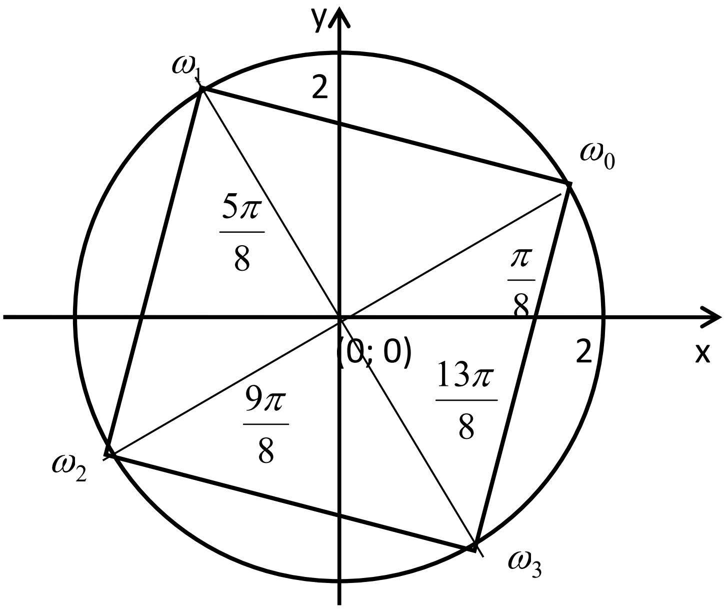
$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \; k = 0,1,2,\dots,n-1.$$

Для извлечения корней, получаем $\omega_k = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi k}{4}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3.$

Следовательно, $\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\right)$,

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right),\ \omega_3 = 2\left(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

Точки, соответствующие числам ω_k, расположены в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке (0;0).



Задача 17. Решите уравнение $(z+\alpha)^n = z^n$, $n \in N, \alpha \in R, \alpha \neq 0$.

Решение.

По условию $\alpha \neq 0$; поэтому данное уравнение не имеет корня $z = 0$, и, значит, оно равносильно уравнению $\left(z + \frac{\alpha}{z}\right)^n = 1$.

Для того чтобы число z было корнем данного уравнения, нужно, чтобы число $\left(z + \frac{\alpha}{z}\right)$ было корнем n-й степени из числа 1.

Отсюда заключаем, что исходное уравнение имеет $n-1$ корней $z_1, \ldots, z_{n-1}$, определенных из равенств

$$1 + \frac{\alpha}{z_k} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 1,2,\ldots,n-1.$$

Таким образом, $z_k = \dfrac{\alpha}{\cos\dfrac{2k\pi}{n} - 1 + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}} = \dfrac{\alpha\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n} - 1 - i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)}{2\left(1 - \cos\dfrac{2k\pi}{n}\right)} =$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(-1 - i\frac{\sin\dfrac{2k\pi}{n}}{1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}}\right) = -\frac{\alpha}{2}\left(1 + i\frac{2\sin\dfrac{2k\pi}{n}\cos\dfrac{2k\pi}{n}}{2\sin^2\dfrac{2k\pi}{n}}\right) = -\frac{\alpha}{2}\left(1 + i\,ctg\frac{k\pi}{n}\right),$$

т. е. $z_k = -\dfrac{\alpha}{2}\left(1 + i\,ctg\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1,2,\ldots,n-1$.

Задача 18. Решите во множестве комплексных чисел уравнение

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Решение.

Так как число $z_0 = 1$ не является корнем данного уравнения, то при $z \neq 1$ данное уравнение равносильно уравнению

$(z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$, т. е. уравнению $z^6 = 1$.

Все корни этого уравнения получаются из формулы:

$z_0 = 1$

$$z_1 = \cos\left(0 + \frac{2\pi}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_2 = \cos\left(0 + \frac{2\pi\cdot 2}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi\cdot 2}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \cos\left(0 + \frac{2\pi\cdot 3}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi\cdot 3}{6}\right) = -1,$$

$$z_4 = \cos\left(0 + \frac{2\pi\cdot 4}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi\cdot 4}{6}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_5 = \cos\left(0 + \frac{2\pi\cdot 5}{6}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2\pi\cdot 5}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2}i.$$

Задача 19. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенствам: $\sqrt{2} < |(1-i)z - i| < 2\sqrt{2}$.

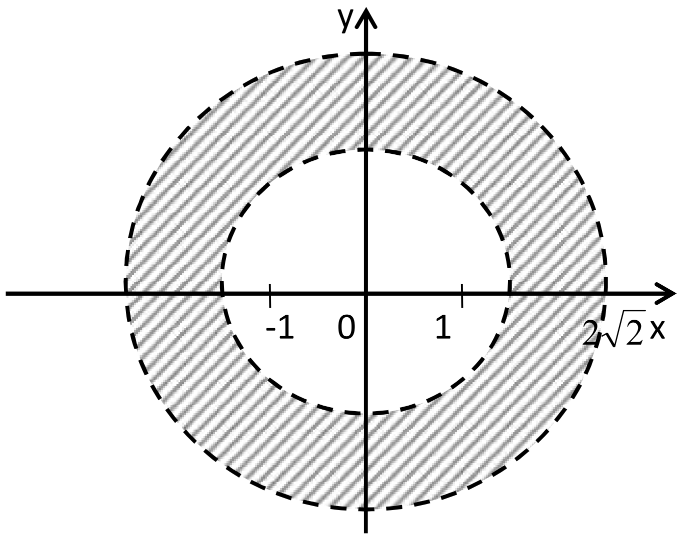
Решение.

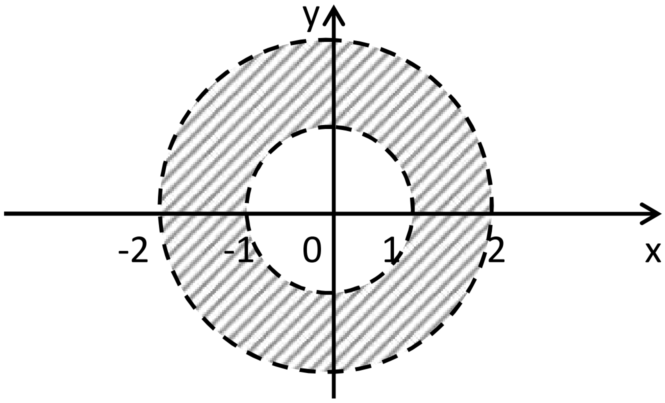
Пусть $w = (1-i)z - 1$.

Тогда $z = \frac{w+i}{1-i} = \frac{(w+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = w \cdot \frac{1+i}{2} + \frac{i(1+i)}{2} = w\frac{1+i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Комплексным числам, имеющим одинаковые модули, соответствуют точки плоскости, лежащие на окружности с центром в начале координат, поэтому неравенству $\sqrt{2} < |w| < 2\sqrt{2}$ удовлетворяют все точки открытого кольца, ограниченного окружностями с общим центром в начале координат и радиусами $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$. Пусть некоторая точка комплексной плоскости соответствует числу w_0.

Число $w_1 = w_0 \cdot \frac{1+i}{2} = w_0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, имеет модуль, в $\sqrt{2}$ раз меньший модуля w_0, аргумент, на $\frac{\pi}{4}$ больший аргумента w_0. С геометрической точки зрения точку, соответствующую w1, можно получить, используя гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а также поворот относительно начала координат на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки. В результате применения этих двух преобразований к точкам кольца последнее перейдет в кольцо, ограниченное окружностями с тем же центром и радиусами 1 и 2.





Преобразование $w_1 \to w_1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ реализуется с помощью параллельного переноса на вектор $(-0{,}5; 0{,}5)$. Перенося кольцо с центром в точке $(0; 0)$ на указанный вектор, получим кольцо такого же размера с центром в точке $(-0{,}5; 0{,}5)$.

Предложенный способ, использующий идею геометрических преобразований плоскости, наверное, менее удобен в описании, но весьма изящен и эффективен.

Задача 20. Найдите z^{12}, если $z + 2\bar{z} = 3 + i$.

Решение.

Пусть $z = a + bi$, тогда $\bar{z} = a - bi$ и $z + 2\bar{z} = (a + bi) + 2(a - bi) = 3a - bi$. Исходное равенство примет вид $3a - bi = 3 + i$. Из условия равенства двух комплексных чисел получим $3a = 3$, $-b = 1$, откуда $a = 1$, $b = -1$. Таким образом, $z = 1 - i$.

Запишем число z в тригонометрической форме:

$$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right), \text{ где } r = \sqrt{2},\ \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

Согласно формуле Муавра, находим

$$z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 12\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 12\right)\right) = -64.$$

Задача 21. Для комплексного числа $d = \sqrt{3} - i$ найдите все комплексные числа z, такие, что

$$|z| = 2|d|, \text{ а } |\arg d - \arg z| = \frac{\pi}{3}.$$

Решение.

Представим число d в тригонометрической форме:

$$d = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Отсюда $|d| = 2$, $\arg d = -\frac{\pi}{6}$. Для числа z получим $|z| = 4$, $\arg z$ может быть равен $-\frac{\pi}{2}$ либо $\frac{\pi}{6}$.

В первом случае

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -4i,$$

во втором

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Задача 22. Найдите сумму таких чисел z, что $z^4 = \sqrt{3} - i$. Укажите одно из таких чисел.

Решение.

Заметим, что уже из самой формулировки задачи можно понять, что сумма корней уравнения можно найти без вычисления самих корней.

Действительно, сумма корней уравнения $z^4 - \sqrt{3} + i = 0$ есть коэффициент при z^3, взятый с противоположным знаком (обобщенная теорема Виета), т.е. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$.

Приведем и другое возможное обоснование. Пусть z_0 – корень уравнения. Тогда $-z_0$ также является его корнем, поскольку $(z_0)^4 = (-z_0)^4$, и сумма всех корней равна нулю.

Допустимо и такое решение. Представив правую часть исходного уравнения в тригонометрической форме, получим

$$z^4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Отсюда

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}\right)\right), \text{ где } k \in \{0;1;2;3\}.$$

Далее вычисляем сумму четырех корней, которая равна нулю.

Задания

1. Вычислите

a) $\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}$;

b) $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{20}$;

c) $\left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10}$;

d) $\left(-\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{10}$.

2. Вычислите

a) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{i+\sqrt{3}}}$;

b) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$;

c) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}}$;

d) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}}$.

3. Найдите значение

a) $\dfrac{(1-i)^{n+2}}{(1+i)^{n}}$;

b) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^{n-2}}$;

c) $\dfrac{(1+i)^{n-2}}{(1-i)^{n+2}}$;

d) $\dfrac{(1-i)^{n-2}}{(1+i)^{n}}$.

4.5. Показательная форма комплексного числа, связь с тригонометрической формой

Помимо алгебраической и тригонометрической имеется еще *показательная форма записи комплексного числа,* которая широко используется в различных приложениях, в частности в электротехнике.

Пусть

$$z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

зависит от действительной переменной φ.

Сопоставим взаимно однозначным образом каждому комплексному числу $z(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ комплексно показательное выражение

$$u(\varphi) = e^{i\varphi}.$$

С помощью операций дифференцирования можно показать, что эти выражения имеют одну и ту же логическую сущность, в связи с этим полагают по определению

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера* и представляет собой определение комплексной показательной функции $e^{i\varphi}$, где φ – любое действительное число.

Пусть дано комплексное число

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Сопоставляя с предыдущей формулой, получаем

$$z = re^{i\varphi}.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной формой* комплексного числа.

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $\quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

Тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i(\varphi + 2\pi k)}{n}}, \; k = \overline{0, n-1}.$$

Из формулы Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Пример 1. Найти показательную форму чисел:

а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

Решение.

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2$, $\varphi = \arg z_2 = \dfrac{7\pi}{6}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.

Пример 2. Найти алгебраическую форму чисел:

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$, в) $z_3 = e^{-3+4i}$.

Решение.

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}) = 2(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$,

б) $z_2 = 3e^{\frac{-\pi i}{6}} = 3(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)) = 3(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3i}{2}$,

в) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3} \cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$.

Пример 3. Найти $z_1 z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$, результат записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}, \quad z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; б) $z_1 = e^{3-7i}, \quad z_2 = e^{-4+5i}$.

Решение.

а) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6})$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}),$$

б) $z_1 z_2 = e^{3-7i} \cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^{7}(\cos 12 - i\sin 12).$$

Пример 4. Вычислить: а) z^4, б) $\sqrt[5]{z}$, где $z = 2e^{-3i}$.

Решение.

а) $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i\sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366i)$,

б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k, \quad k = 0,1,2,3,4$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0.95 - 0.65i,$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i,$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i,$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i,$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$$

Пример 5. Вычислите $\sqrt[3]{\left(\bar{z}\right)^2}$, где $z = \sqrt{3} - i$.

Решение.

Представим решение данного выражения в показательной форме записи комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi}$.

Если $z = \sqrt{3} - i$, то $\overline{z} = \sqrt{3} + i$.

Тогда $r = |\overline{z}| = 2$, $\varphi = \arg \overline{z} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. Поэтому $\overline{z} = 2 \cdot e^{\frac{i\pi}{6}}$, тогда $\overline{z}^2 = 4 \cdot e^{\frac{2i\pi}{6}} = 4 \cdot e^{\frac{i\pi}{3} + 2k\pi i}$ и $\sqrt[3]{\left(\overline{z}\right)^2} = \sqrt[3]{4 \cdot e^{\frac{i\pi}{3} + \frac{2k\pi i}{3}}}$, где $k = 0, 1, 2$.

Глава 5. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНЕЙ

5.1. Решение уравнений третьей степени. Формула Кардано

Рассмотрим на конкретном примере решение кубического уравнения

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \qquad (1)$$

Пример. Решите уравнение $x^3 + 6x^2 + 6x - 13 = 0$.

Решение.

Приведем сначала наше уравнение к приведенному уравнению, содержащему квадрат неизвестной, т.е. к уравнению вида:

$$y^3 + py + q = 0,$$

для чего произведем подстановку:

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0} = y - 2.$$

Получим уравнение:

$$(y - 2)^3 + 6(y - 2)^2 + 6(y - 2) - 13 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, приходим к уравнению:

$$y^3 - 6y - 9 = 0,$$

где $p = -6$, $q = -9$ и $x = y - 2$.

Для корней кубического уравнения

$$y^3 + py + q = 0 \qquad (2)$$

имеется так называемая *формула Кардано*, хотя правильнее было бы ее называть *формулой дель Ферро–Тартальи–Кардано*.

Впервые приведенное кубическое уравнение $y^3 + py + q = 0$ решил профессор Болонского университета Сципион дель Ферро в конце XV века. Затем в 1535 году те же формулы были выведены Николо

Тартальей. Наконец, в 1545 году решение уравнения (1) было изложено в книге Джероламо Кардано "Ars Magna" ("Великое искусство").

Формулы Кардано имеют вид:

$y_i = u_i + v_i$ ($i = 1, 2, 3$), где u_1, u_2, u_3 – значения радикала

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,; v_i = -\frac{p}{3u_i}.$$

Практически корни y_1, y_2, y_3 находятся проще.

Пусть u_1 - любое значение радикала u. Тогда два других значения можно найти следующим образом:

$$u_2 = u_1 e_1; \quad u_3 = u_1 e_2,$$

где e_1 и e_2 – значения корня кубического из 1, т.е.

$$e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad e_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если вычислить $v_i = -\dfrac{p}{3u_i}$, то получим: $v_2 = v_1 e_2$; $v_3 = v_1 e_1$.

Действительно, $v_2 = -\dfrac{p}{3u_2} = -\dfrac{p}{3u_1 e_1} = -\dfrac{p}{3u_1}\cdot\dfrac{1}{e_1} = v_1\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = v_1 e_2$.

Аналогично доказывается равенство $v_3 = v_1 e_1$. Подставляя полученные значения u_i и v_i в формулу

$$y_i = u_i + v_i \ (i = 1, 2, 3),$$

находим практические формулы:

$$y_1 = u_1 + v_1;$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1);$$

$$y_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1).$$

В нашем случае:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}} = \sqrt[3]{8} = 2\,.$$

Таким образом, положим $u_1 = 2$. Тогда $v_1 = -\frac{p}{3u_1} = 1$; следовательно,

$$y_1 = 3;\ y_2 = -\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};\ y_3 = -\frac{3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из последних равенств, учитывая, что $x = y - 2$, получаем:

$$x_1 = 3;$$

$$x_2 = -\frac{7}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x_3 = -\frac{7}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 1. Решите уравнение: $x^3 - 6x + 4 = 0$.

Решение.

Данное уравнение − приведенное. Здесь $p = -6$, $q = 4$. Следовательно,

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2+2i}\,.$$

Для извлечения кубического корня из комплексного числа $z = -2+2i$ представим его в тригонометрической форме:

$$-2+2i = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

поэтому

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi+8\pi k}{12} + i\sin\frac{3\pi+8\pi k}{12}\right),$$

где $k = 0, 1, 2$.

При $k = 0$ получаем:

$$u_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i.$$

Значит,

$v_1 = -\dfrac{p}{3u_1} = \dfrac{6}{3+3i} = 1 - i$; поэтому $u_1 + v_1 = 2$.

Следовательно,

$$x_1 = 2;$$

$$x_2 = -1 - \sqrt{3};$$

$$x_3 = -1 + \sqrt{3}.$$

Задача 2. Решите уравнение: $x^3 - 3x^2 + 9x - 7 + 6l = 0$.

Решение.

Положив $x = y + 1$, получим приведенное уравнение относительно неизвестной переменной y:

$$y^3 + 6y + 6i = 0.$$

По формулам Кардано:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-3i + \sqrt{-9+8}} = \sqrt[3]{-2i}.$$

Легко видеть, что $-2i = \left(i\sqrt[3]{2}\right)^3$.

Следовательно, число $i\sqrt[3]{2}$ является одним из значений кубического корня из комплексного числа (−2i) (тот же результат получается, если применить формулу извлечения корня n-й степени из комплексного числа).

Таким образом, $u_1 = i\sqrt[3]{2}$; $v_1 = i\sqrt[3]{4}$. Итак,

$y_1 = i\ (\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4})$;

$y_2 = -\frac{1}{2}\left(i\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4}\right) + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ \left(i\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4}\right) = -\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)$;

$y_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right).$

Отсюда находим корни исходного уравнения:

$x_1 = 1 + i\,(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4});$

$x_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right);$

$x_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right).$

$1 - \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + i\sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right);$

$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - \frac{1}{2}i\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right).$

Замечание. *Так же, как и для квадратных уравнений, для кубических уравнений имеет место зависимость характера корней от знака дискриминанта.*

Для приведенного кубического уравнения

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2)$$

дискриминант вычисляется по формуле:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 .$$

При этом:

а) если $D > 0$, то уравнение (2) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня;

б) если $D = 0$, то уравнение (2) имеет три действительных корня, два из которых равны;

в) если $D < 0$, то уравнение (2) имеет три различных действительных корня.

Таким образом, в любом случае уравнение (2) с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Задача 3. Не решая следующие уравнения, определите характер корней каждого из них:

а) $x^3 + 3x - 5 = 0$;

б) $x^3 - 5x + 1 = 0$;

в) $x^3 - 6x + 4\sqrt{2} = 0$.

Решение.

а) $D = \frac{29}{4}$; $D > 0$, следовательно, уравнение имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня.

б) $D = -\frac{473}{108}$; $D < 0$, следовательно, уравнение имеет три различных действительных корня.

в) $D = 0$, следовательно, уравнение имеет три действительных корня, два из которых равны.

Задача 4. Определите характер корней, не решая следующих уравнений:

а) $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$;

б) $x^3 - 6x^2 + 7x + 5 = 0$;

в) $x^3 - 12x^2 + 45x + 54 = 0$.

Решение.

а) $x^3 - 3x^2 + 2x - 5 = 0$.

Переходя к приведенному кубическому уравнению, получаем:

$y^3 - y - 5 = 0$, (а)*

где $p = -1$, $q = -5$. Отсюда по определению дискриминанта:

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3; \quad D = \frac{671}{108}, \quad D > 0.$$

Следовательно, уравнение (а)*, а, значит, и уравнение (а) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня.

б) $x^3 - 6x^2 + 7x + 5 = 0$.

Переходя к приведенному кубическому уравнению, получаем:

$y^3 - 5\,y + 3 - 0$, (б)*

откуда $D = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{257}{108}$

$D < 0$.

Следовательно, уравнение (б)*, а, значит, и (б) имеет три различных действительных корня.

в) $x^3 - 12\,x^2 + 45\,x + 54 = 0$.

Переходя к приведенному кубическому уравнению, получаем:

$y^3 - 3\,y + 106 = 0$. (в)*

Отсюда

$D = 53^2 - 1$; $D > 0$.

Следовательно, уравнение (в)*, а, значит, и уравнение (в) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня.

Задача 5. При каких значениях параметра a данные уравнения имеют кратные корни:

а) $x^3 + 3\,x + a = 0$;

б) $x^3 + a\,x + 6 = 0$;

в) $x^3 + a\,x + a = 0$.

Решение.

Заметим, что приведенное кубическое уравнение имеет два равных действительных корня, если его дискриминант равен нулю.

а) $x^3 + 3\,x + a = 0$.

$$D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3 = \frac{a^2 + 4}{4} .$$

$D = 0$, следовательно, $a^2 = -4$, значит, $a = \pm 2i$.

б) $x^3 + a\,x + 6 = 0$.

$$D = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3 + 243}{27}.$$

Следовательно, $a^3 + 243 = 0$, значит, $a = -3\sqrt[3]{9}$.

в) $x^3 + a\,x + a = 0.$

$$D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{4a^3 + 27a^2}{108}.$$

Следовательно, $a^2(4a + 27) = 0$, значит, $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{27}{4}$.

б) при $a = -3\sqrt[3]{9}$;

в) при $a = 0$ или $a = -\frac{27}{4}$.

Задача 6 . Решите уравнения:

а) $x^3 - 9x^2 + 18\,x - 28 = 0$;

б) $x^3 - 6\,ix + 4(1 - i) = 0$;

в) $x^3 - 3x^2 + 12\,x - 36 = 0$.

Решение.

а) $x^3 - 9x^2 + 18\,x - 28 = 0.$

Переходя к приведенному кубическому уравнению с помощью подстановки

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0}\ , \qquad x = y + 3\ , \qquad (*)$$

получим уравнение $y^3 - 9\,y - 28 = 0$, где $p = -9$, $q = -28$.

Мы знаем, что:

$y_1 = u_1 + v_1$;

$y_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \mathrm{i}\ \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 + v_1)$;

$y_3 = -\frac{1}{2}(\ u_1 + v_1) - \mathrm{i}\ \frac{\sqrt{3}}{2}(\ u_1 + v_1)$.

По формулам Кардано:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}\,;\; v_i = -\frac{p}{3u_i}\,;\; D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Таким образом, получаем:

$D = (-14)^2 - 3^3 = 196 - 27 = 169,$

значит, $u_1 = 3$, $v_1 = 1$, $u_1 + v_1 = 4$, $u_1 - v_1 = 2$.

Следовательно,

$y_1 = 4$; $y_2 = -2 + i\sqrt{3}$; $y_3 = -2 - i\sqrt{3}$.

Откуда

$x_1 = 7$; $x_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $x_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

б) $x^3 - 6\,ix + 4(1 - i) = 0.$

Переходить к приведенному кубическому уравнению не нужно, так как исходное уравнение само является приведенным, причем $p = -6$, $q = 4\,(1 - i)$.

Таким образом, получаем:

$D = (2(1 + i))^2 - (2i)^3$;

$u = \sqrt[3]{-2(1-i)} = 1 + i$; $v = 1 + i$;

$u + v = 2\,(1 + i)$; $u - v = 0$.

Следовательно,

$x_1 = 2 + 2i$; $x_2 = x_3 = -1 - i$.

в) $x^3 - 3x^2 + 12\,x - 36 = 0.$

Переходя к приведенному кубическому уравнению, получаем уравнение:

$$y^3 + 9\,y - 26 = 0,$$

причем $x = y + 1$; $p = 9$; $q = -26$.

Таким образом, находим:

$D = (-13)^2 + 3^3 = 196$, $\sqrt{D} = 14$;

$u = \sqrt[3]{13+14} = 3;\ v = -1;$

$u + v = 2,\ u - v = 4.$

Значит,

$y_1 = 4\,;$

$y = -1 + 2\sqrt{3}\,i;$

$y_3 = -1 - 2\sqrt{3}\,i.$

Следовательно,

$x_1 = 3;\ x_2 = 2\sqrt{3}\,i;\ x_3 = -2\sqrt{3}\,i.$

Задания

Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1. $x^2 + 3x + 4 = 0$.
2. $x^3 - 27 = 0$.
3. $x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0$.
4. $x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0$.
5. $x^3 - 6x + 9 = 0$.
6. $x^3 + 6x + 2 = 0$.
7. $x^3 + 24x - 56 = 0$.
8. $x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$.
9. $x^3 + 9x - 26 = 0$.
10. $x^3 - 4x + 2 = 0$.
11. $x^3 + 18x + 15 = 0$.
12. $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.
13. $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$.

5.2. Решение уравнений четвертой степени методом Феррари

Рассмотрим решение уравнений 4-й степени на конкретном примере.

Пример. Решите уравнение $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 10 = 0$.

Решение.

Оставим в левой части уравнения члены, содержащие x^4 и x^3:

$$x^4 - x^3 = 3x^2 - 5x + 10.$$

Дополним левую часть полученного уравнения до полного квадрата:

$$x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + 3x^2 - 5x + 10,$$

или

$$\left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}x^2 - 5x + 10. \qquad (1)$$

Введем в полный квадрат левой части равенства (1) параметр r:

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + r\right)^2 = \left(x^2 - \frac{x}{2}\right)^2 + 2r\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + r^2 .$$

Откуда с учетом равенства (1) получим:

$$\left(x^2 \quad \frac{x}{2} + r\right)^2 = \left(2r + \frac{13}{4}\right)x^2 - (r+5)x + \left(r^2 + 10\right), (2)$$

Подберем значение параметра r таким образом, чтобы дискриминант правой части равенства (2) обратился в нуль (т.е. чтобы в правой части равенства (2) также получился полный квадрат).

$$D = (r+5)^2 - 4\left(r^2 + 10\right)\left(2r + \frac{13}{4}\right) = -8r^3 - 12r^2 - 70r - 105.$$

Дискриминант D равен нулю тогда и только тогда, когда число r является корнем уравнения:

$$8\text{г}^3 + 12r^2 + 70r + 105 = 0;$$

$$(2r + 5)(4r^2 + 35) = 0.$$

В частности, $D = 0$, если $r = -3/2$.Подставив значение $r = -3/2$ в равенство (2) , получим:

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{4},$$

или

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^2.$$

Откуда,

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right)^2 = 0,$$

$$\left(x^2 - x + 2\right)\left(x^2 - 5\right) = 0,$$

$x^2 - x + 2 = 0$ или $x^2 - 5 = 0$.

Следовательно,

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i; \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i; \; x_3 = \sqrt{5}; \qquad x_4 = -\sqrt{5}.$$

Задача 1. Решите уравнения:

1) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$;

2) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение.

1) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$. (1)*

Преобразуем уравнение (1)* по методу Феррари:

$x^4 - 2x^3 = -4x^2 + 2x - 3$, $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 - 4x^2 + 2x - 3$,

$(x^2 - x)^2 = -3x^2 + 2x - 3$. (2)*

Введем в полный квадрат левой части равенства (2)* параметр r. Получим:

$((x^2 - x) + r)^2 = (x^2 - x)^2 + 2r(x^2 - x) + r^2$.

Используя равенство (2)*, находим:

$(x^2 - x + r)^2 = -3x^2 + 2x - 3 + 2rx^2 - 2rx + r^2,$

$(x^2 - x + r)^2 - (2r - 3)x^2 - 2(r - 1)x + (r^2 - 3).$ (3)*

Теперь подберем такое значение параметра r , чтобы дискриминант правой части равенства (3)* был равен нулю.

$$D = (r - 1)^2 - (1^2 - 3)(2r - 3) = -2r^3 + 4r^2 + 4r - 8.$$

Дискриминант D равен нулю тогда и только тогда, когда число r является корнем уравнения:

$2r^3 - 4r^2 - 4r + 8 = 0;\ \ r^3 - 2r^2 - 2r + 4 = 0;$

$(r - 2)(r^2 - 2) = 0.$

В частности, $D = 0$, если $r = 2$.

Подставив найденное значение параметра r в равенство (3)* получаем:

$(x^2 - x + 2)^2 = x^2 - 2x + 1$; $(x^2 - x + 2)^2 = (x - 1)^2$;

$(x^2 - x + 2)^2 - (x - 1)^2 = 0$; $(x^2 - 2x + 3)\ (x^2 + 1) = 0$;

$x^2 - 2x + 3 = 0$ или $x^2 + 1 = 0$;

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i\ ; \qquad x_{3,4} = \pm i.$$

2) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0.$ (4)*

Преобразуем уравнение (4)* по методу Феррари:

$x^4 - 6x^3 = -10x^2 + 2x + 3;$

$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 9x^2 - 10x^2 + 2x + 3;$

$(x - 3x)^2 = -x^2 + 2x + 3$.   (5)*

Введем в полный квадрат левой части равенства (5)* параметр r. Получим:

$((x^2 - 3x) + r)^2 = (x^2 - 3x)^2 + 2r(x^2 - 3x) + r^2.$

Откуда с учетом равенства (5)* находим:

$(x^2 - 3x + r)^2 = (2r - 1)x^2 - 2(3r - 1)x + (r^2 + 3).$ (6)*

Подберем такое значение параметра r, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в правой части равенства (6)* обратился в нуль:

$D = (3r - 1)^2 - (r^2 + 3)(3\,r - 1) = 0;$

$-2\,r^3 + 10\,r^2 - 12\,r + 4 = 0;\ r^3 - 5\,r^2 + 6\,r - 2 = 0;$

$r^3 - r^2 - 4\,r^2 + 4\,r + 2\,r - 2 = 0;$

$r^2(r - 1) - 4\,r\,(r - 1) + 2(r - 1) = 0;$

$(r - 1)(r^2 - 4r + 2) = 0.$

В частности, дискриминант равен нулю, если $r = 1$.

Следовательно, подставив значение $r = 1$ в равенство (6)* получим:

$(x^2 - 3\,x + 1)^2 = x^2 - 4\,x + 4;\ (x^2 - 3\,x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0;$

$(x^2 - 2\,x - 1)\,(x^2 - 4\,x + 3) = 0;$

$x^2 - 2\,x - 1 = 0$ или $x^2 - 4\,x + 3 = 0;$

$x_{1,\,2} = 1 \pm \sqrt{2}$; $x_3 = 3$; $x_4 = 1$.

Задания

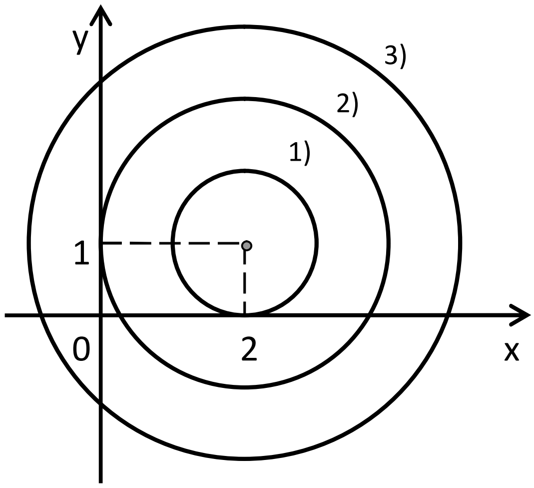
Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1. $x^4 + 24x - 56 = 0$.
2. $x^4 + 6x^3 - 3x - 1 = 0$.
3. $x^4 + -8x - 26 = 0$.
4. $x^4 - 6x + 12 = 0$.
5. $x^4 + 16x - 5 = 0$.
6. $x^4 + 6x^2 - 2x + 14 = 0$.
7. $x^4 - 7x^3 + 30x + 25 = 0$.

Глава 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В ПОЛЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

«Параметр (от греч. $\pi\alpha\rho\alpha\mu\varepsilon\tau\omega\nu$ - отмеривающий) величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой.

Например, уравнение $(x-2)^2+(y-1)^2=a^2$, где a > 0, x∈R, y∈R, задает множество всех концентрических окружностей, с центром (2; 1) радиуса *a*.



Если a = 1, то получим окружность 1), если a = 2, то - окружность 2) и т.д.

Интересно и следующее определение параметра «Неизвестные величины, значения которых задаем мы сами, называются параметрами».

Пусть, например, нужно решить уравнение

$$x^4+x^3-x^2(1+2a)-x(a+1)+a^2+a=0.$$

Вряд ли легко мы справимся с этим уравнением, если будем решать относительно x, считая a параметром.

Лучше сначала считать *x* параметром и решать квадратное относительно *a* уравнение

$$a^2 - a\left(2x^2 + x - 1\right) + x^4 + x^3 - x^2 - x = 0\ ,$$

а затем поменять x и a ролями. Получим $\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1 \\ a = x^2 + x. \end{array}\right.$

Остается решить два уравнения $\left[\begin{array}{l} x^2 = a + 1 \\ x^2 + x - a = 0, \end{array}\right.$ что труда уже не составит.

Прежде, чем перейти к решению задач, содержащих комплексные числа и параметр, сформулируем определения основных понятий, связанных с уравнениями (неравенствами) с параметром.

Определение 1. Пусть дано равенство с переменными x и a: $f(x; a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения, а решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x; a) = 0$ называется уравнением с переменной x и параметром a.

Параметр обычно обозначается первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, d ...

Переменная, относительно которой решается уравнение последними буквами латинского алфавита: x, y, z, t, и, v.

Определение 2. Под областью определения уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a будем понимать все такие системы значений x и a, при которых $f(x; a)$ имеет смысл.

Иногда область определения уравнения устанавливается довольно легко, а иногда в явном виде это сделать трудно. Тогда ограничиваемся только системой неравенств, множество решений которой и является областью определения уравнения.

Определение 3. Под решением уравнения $f(x; a) = 0$ с параметром a будем понимать систему значений *x* и *a* области определения уравнения, обращающую его в верное числовое равенство.

Определение 4. Решить уравнение $f(x; a) = 0$ с параметром a - это значит, для каждого действительного значения a найти все решения данного уравнения или установить, что их нет.

Определение 5. Уравнения $f(x;a)=0$ и $\varphi(x;a)=0$ равносильны при фиксированном значении $a=a_0$, если уравнения без параметра $f(x;a_0)=0$ и $\varphi(x;a_0)=0$ равносильны.

Определение 6. Уравнение $f(x;a)=0$ является следствием уравнения $\varphi(x;a)=0$ при некотором значении $a=a_0$, если множество решений уравнения $\varphi(x;a_0)=0$ содержится среди множества решений уравнения $f(x;a_0)=0$.

Задача 1. Определите семейство линий в комплексной плоскости, заданных уравнениями:

а) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=a$; б) $\operatorname{Re}z^2=b$.

Решение.

а) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z}=a$. О.О.У.: $\begin{cases} z\neq 0, \\ a\in R. \end{cases}$

$-\dfrac{y}{x^2+y^2}=a$, $\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)+y=0, (1) \\ x^2+y^2>0. \end{cases}$

Решаем уравнение (1).

1) Пусть $a=0$: $y=0, x\neq 0.$ получим уравнение оси абсцисс, исключая начало координат.

2) $a\neq 0$: $x^2+y^2+\dfrac{1}{a}y=0$, $x^2+\left(y+\dfrac{1}{2a}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2a}\right)^2$. Это семейство концентрических окружностей с центром в точке $\left(0;-\dfrac{1}{2a}\right)$ радиуса $\dfrac{1}{2a}$.

б) $\operatorname{Re}z^2=b$.

Пусть $z=x+iy$, тогда $z^2=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi$. И $x^2-y^2=b$.

1) Если $b=0$, то полу чаем семейство из двух прямых с уравнениями $y=x$ и $y=-x$.

2) Если $b>0$, то – семейство равносторонних гипербол с уравнениями $\frac{x^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=1$, с вершинами в точках $\left(\sqrt{b};0\right)$, $\left(-\sqrt{b};0\right)$ и асимптотами $y=x$ и $y=-x$.

3) Если $b<0$, то – семейство равносторонних гипербол с уравнениями $\frac{x^2}{\left(\sqrt{-b}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{-b}\right)^2}=1$, с вершинами в точках $\left(0;\sqrt{-b}\right)$, $\left(0;-\sqrt{-b}\right)$ и асимптотами $y=x$ и $y=-x$.

Ответ: а) 1. Если $a=0$, то – уравнение оси абсцисс, исключая точку $(0;0)$.

2. Если $a\neq 0$, то – семейство концентрических окружностей с центром в точке $\left(0;-\frac{1}{2a}\right)$ радиуса $\frac{1}{2a}$.

б) 1. Если $b=0$, то – семейство из двух прямых с уравнениями $y=x$ и $y=-x$.

2. Если $b>0$, то – семейство равносторонних гипербол с уравнениями $\frac{x^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=1$, с вершинами в точках $\left(\sqrt{b};0\right)$, $\left(-\sqrt{b};0\right)$ и асимптотами $y=x$ и $y=-x$.

3. Если $b<0$, то – семейство равносторонних гипербол с уравнениями $\frac{x^2}{\left(\sqrt{-b}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{-b}\right)^2}=1$, с вершинами в точках $\left(0;\sqrt{-b}\right)$, $\left(0;-\sqrt{-b}\right)$ и асимптотами $y=x$ и $y=-x$.

Задача 2. При каких значениях n верно равенство $(1+i)^n=(1-i)^n$.

Решение.

Тригонометрическими формами записи комплексных чисел $1+i$ и $1-i$, являются $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Возведем в степень n, получим $(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}\right)$ и $(1-i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{3\pi n}{4} + i\sin\frac{3\pi n}{4}\right)$.

Тогда:

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi n}{4} = \cos\frac{\pi n}{4}, \\ \sin\frac{3\pi n}{4} = \sin\frac{3\pi n}{4}. \end{cases} \quad \begin{cases} \sin\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4} = 0, \\ \cos\frac{\pi n}{2}\sin\frac{\pi n}{4} = 0, \sin\frac{\pi n}{4} = 0. \end{cases}$$

$\pi n = 4\pi k, n = 4k, k \in Z.$

$n = 4k, k \in Z.$

Задача 3. При каком значении $(d \in R)$ уравнением $\mathrm{Re}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{d}$ задана ось ординат в комплексной плоскости, исключая начало координат?

Решение

О.О.У.: $\begin{cases} z \neq 0, \\ d \neq 0. \end{cases}$

Пусть $z = x + iy$.

Тогда

$$1 - \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{x+yi} = 1 - \frac{x-yi}{x^2+y^2} = 1 - \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}i = \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2}i.$$

$$\mathrm{Re}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{x^2+y^2-x}{x^2+y^2} = \frac{1}{d}.$$

$d(x^2+y^2-x) = x^2+y^2$, $(d-1)(x^2+y^2) = dx$.

Если $d = 1$, то получим уравнение $x = 0$.

Ответ: $d = 1$.

Задача 4. Среди всех комплексных чисел z таких, что $|z+2-3i| = a,$ где $0 < a < 1$, есть ровно одно число, аргумент которого равен $\frac{3\pi}{4}$. Найдите это число.

Решение.

Запишем искомое число в тригонометрической форме: $z = r\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Тогда $z = r\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и

$$|z+2-3i| = \left|2 - \frac{r\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} - 3\right)i\right| = \sqrt{\left(2 - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} - 3\right)^2}.$$

Перейдем к уравнению $\left(2 - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2} - 3\right)^2 = a^2$, где $0 < a < 1$. Получаем квадратное уравнение $r^2 - 5\sqrt{2}r + 13 - a^2 = 0$, где $0 < a < 1$, $r > 0$.

$D = \left(-5\sqrt{2}\right)^2 - 4\left(13 - a^2\right) = 50 - 52 + 4a^2 = 4a^2 - 2$.

Рассмотрим 2 случая:

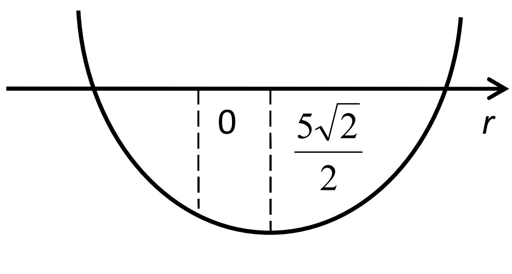
1. $D = 0$: $4a^2 - 2 = 0$,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \\ 0 < a < 1. \end{cases} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$. Тогда $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ и $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$.

2. $D > 0$:

$$\begin{cases} |a| > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1.$$

Введем функцию $f(r) = r^2 - 5\sqrt{2}r + 13 - a^2$. Интересует случай, когда один из корней квадратного трехчлена больше 0, а другой – меньше 0.



Достаточно решить систему неравенств:

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \quad \begin{cases} 13 - a^2 < 0, \\ 0 < a < 1. \end{cases} \quad \begin{cases} |a| > \sqrt{13}, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

Эта система несовместна, поэтому такой случай невозможен.

Ответ: $z = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} i$.

Задача 5. При каких действительных значениях а среди комплексных чисел z таких, что $|z - 1 + i| = a$, нет ни одного числа, модуль которого равен 2.

Решение.

Комплексное число z с модулем z запишется так:

$$z = 2(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

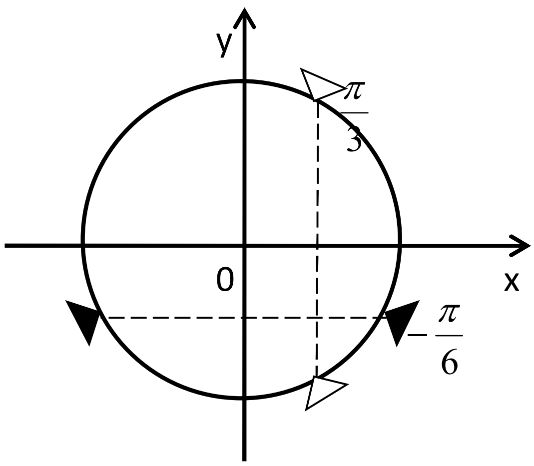
Тогда $|z - 1 + i| = |(2\cos\varphi - 1) + (2\sin\varphi + 1)i| = \sqrt{(2\cos\varphi - 1)^2 + (2\sin\varphi + 1)^2}$. Получим уравнение $\sqrt{(2\cos\varphi - 1)^2 + (2\sin\varphi + 1)^2} = a$.

1. Если $a < 0$, то уравнение действительных решений не имеет.

2. Пусть $a = 0$:

$$\begin{cases} 2\cos\varphi - 1 = 0, \\ 2\sin\varphi + 1 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая систему методом «лепестков», видим, что она несовместна.



3. $a>0$: $(2\cos\varphi-1)^2+(2\sin\varphi+1)^2=a^2$,

$4\cos^2\varphi-4\cos\varphi+1+4\sin^2\varphi+4\sin\varphi+1=a^2$,

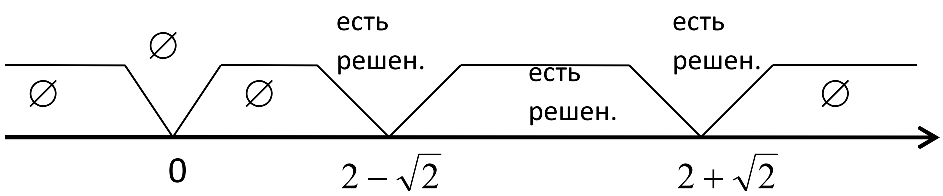
$4\sin\varphi-4\cos\varphi=a^2-6,\ \sin\varphi-\cos\varphi=\dfrac{a^2-6}{4},\ \sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}\left(a^2-6\right)}{8}.$

Последнее уравнение не имеет корней, если а удовлетворяет системе:

$$\begin{cases}\left|\dfrac{\sqrt{2}\left(a^2-6\right)}{8}\right|>1,\\ a>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\left|a^2-6\right|>4\sqrt{2},\\ a>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2-6>4\sqrt{2},\\ a^2-6<-4\sqrt{2},\end{array}\right.\\ a>0,\end{cases}\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a^2>6+4\sqrt{2},\\ a^2<6-4\sqrt{2},\end{array}\right.\\ a>0,\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}a>\sqrt{6+4\sqrt{2}},\\ 0<a<\sqrt{6+4\sqrt{2}},\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}a>2+\sqrt{2},\\ 0<a<2-\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Изобразим графически решение в данных случаях.



Ответ: $\left(-\infty;\,2\text{ - }\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};\,+\infty\right)$.

Задача 6. Для каждого действительного числа а найдите все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству: а) $|z|^2+2iz+2a(1+i)=0$;

б) $z|z|-az-i=0$.

Решение.

а) Пусть $z=x+iy$, тогда из исходного уравнения имеем

$$x^2+y^2+2i(x+yi)+2a(1+i)=0.$$

Отсюда получаем систему для нахождения x и y:

$$\begin{cases}x^2+y^2-2y+2a=0,\\ x+a=0,\end{cases}$$

из которой следует, что $x=-a$. Подставляя это значение x в первое уравнение, имеем

$$y^2-2y+a^2+2a=0.$$

Корни этого уравнения действительны тогда и только тогда, когда его дискриминант является действительным числом, т. е. $4-4a^2-8a\ge 0$. Для этих значений a найдем

$$y_1=1+\sqrt{1-2a-a^2},\ \ y_2=1-\sqrt{1-2a-a^2},$$

причем $y_1=y_2=1$, то $1-2a-a^2=0$.

Неравенство $1-2a-a^2\ge 0$ выполняется для всех а из промежутка $-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$.

Таким образом, исходное уравнение при $-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$ имеет два корня: $z_1=-a+i\left(1+\sqrt{1-2a-a^2}\right)$, $z_2=-a+i\left(1-\sqrt{1-2a-a^2}\right)$ при $|a|>\sqrt{2}-1$ решений не имеется.

б) Перепишем данное уравнение в виде $z(|z|-a)=i$. Так как $|z|$ и a – действительные числа, то отсюда заключаем, что число z является чисто мнимым числом.

Пусть $z=ci$, тогда из исходного уравнения находим, что $ci|c|-aci-i=0$, т. е. $c|c|-ac-1=0$.

Последнее уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} c\ge 0, \\ c^2-ac-1=0, \end{cases} \quad \begin{cases} c<0, \\ -c^2-ac-1=0. \end{cases}$$

Уравнение $c^2-ac-1=0$ имеет два корня: $c_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$ при любом значении а. Неравенству $c\ge 0$ удовлетворяет (при любом значении а) только число $c_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

Уравнение $c^2+ac+1=0$ второй системы совокупности имеет действительные решения только при условии $a^2-4\ge 0$, т. е. при $|a|\ge 2$. Корнями этого уравнения при каждом $|a|\ge 2$ являются числа $c_{3,4}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

Очевидно, что при $a \geq 2$ оба корня c_3 и c_4 меньше нуля, а при $a \leq -2$ – больше нуля.

Таким образом, исходное уравнение:

при $a < 2$ имеет один корень $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$;

при $a \geq 2$ имеет три корня $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$, $\dfrac{-\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)}{2}i$, $\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}i$.

Ответ: а) если $-1-\sqrt{2} \leq a \leq -1+\sqrt{2}$, то $z_1 = -a + i\left(1+\sqrt{1-2a-a^2}\right)$, $z_2 = -a + i\left(1-\sqrt{1-2a-a^2}\right)$

б) если $a < 2$, то $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$;

если $a \geq 2$, то $\dfrac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}i$, $\dfrac{-\left(a+\sqrt{a^2-4}\right)}{2}i$, $\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}i$.

Задача 7. Для каких действительных чисел a не существует комплексных чисел z, для которых выполняются равенства $|z-ai|=2$, $|z+2a|=1$?

Решение.

Заметим, что $|z-z_1|$ равняются расстоянию между точками z и z_1 на комплексной плоскости. При фиксированном а точки z, для которых $|z-ai|=2$, лежат на окружности с центром в ai и радиусом 2. (Вообще, множество z, для которых $|z-z_0|=r$, есть окружность с центром в z_0 и радиусом r).

Аналогично равенство $|z+2a|=1$. Две окружности не имеют общих точек, если расстояние между их центрами больше суммы или меньше разности радиусов.

Таким образом, должно выполняться одно из двух неравенств: $|2a+ai|>3$ или $|2a+ai|<1$, т.е. $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ или $|a|<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ или $|a|<\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 8. При каких действительных чисел а любое комплексное число, удовлетворяющее уравнению $\left|z-i\sqrt{2}\right|=(a+1)^2$, удовлетворяет одновременно и неравенству $\left|z-\sqrt{2}\right|>a^2-4a$?

Решение.

Пусть $z=x+iy$. Тогда $\left|z-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2}$ и получим уравнение

$$x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=(a+1)^4 \quad (1).$$

Если $a\neq-1$, то имеем уравнение окружности с центром в точке $\left(0;\sqrt{2}\right)$ и $R=(a+1)^2$. От неравенства $\left|z-\sqrt{2}\right|>a^2-4a$ перейдем к неравенству

$$\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}>a^2-4a \quad (2).$$

Рассмотрим ряд случаев в зависимости от значений *a*.

1. $a^2-4a<0$, т.е. $0<a<4$. Неравенство (2) выполняется при любых парах действительных значений *x* и *y*, в том числе и при решениях уравнения (1).

2. Пусть $a=-1$:

$$\begin{cases} x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=0, \\ \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}>5, \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=\sqrt{2}, \\ \sqrt{2+2}>5. \end{cases}$$

Система решений не имеет.

3. Если $a=0$, то получим систему

$$\begin{cases} x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=1, \\ \sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^2+y^2}>0. \end{cases}$$

Неравенству системы удовлетворяют все пары значений $x, y\in R$, кроме $\left(\sqrt{2};0\right)$ – не является решением уравнения системы.

4. Аналогично убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет и $a = 4$.

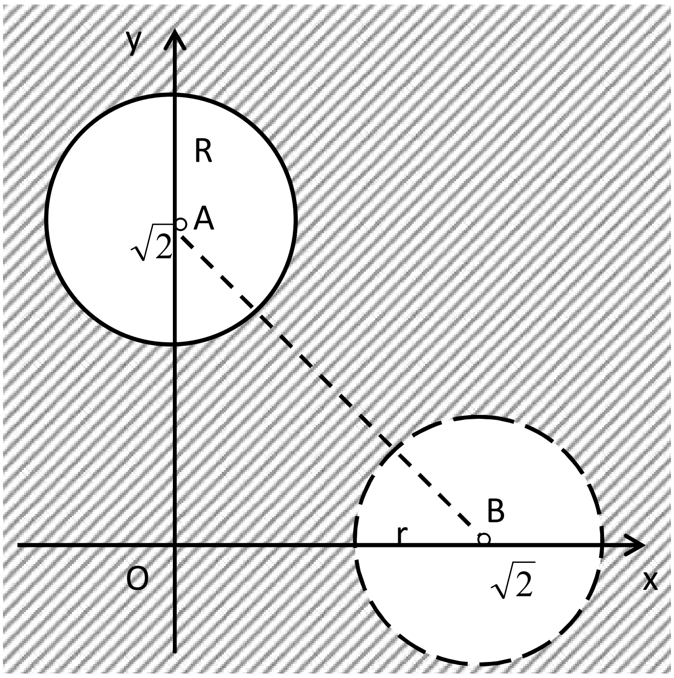
5. Остается рассмотреть следующее множество значений а: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (4; +\infty)$.

В этом случае $a^2 - 4a > 0$ и неравенство (2) задает множество точек комплексной плоскости, расположенных вне окружности, заданной уравнением

$$\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 = \left(a^2 - 4a\right)^2. \ (3).$$

Обозначим радиус этой окружности через r ($r = a^2 - 4a$). И достаточно найти такие значения а из рассматриваемого множества, при которых окружность, заданная уравнением (1), расположена вне окружности с уравнением (3).

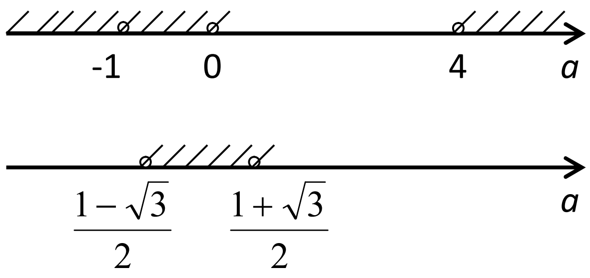
Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAOB: $AB = 2$; $R = (a+1)^2$; $r = a^2 - 4a$; $r < 2 - R$.



Получим неравенство $a^2 - 4a < 2 - (a+1)^2$.

$a^2 - 4a < 2 - a^2 - 2a - 1$, $2a^2 - 2a - 1 < 0$, т.о. $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Учтем множество значений а, на котором мы решаем систему:



Таким образом, $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < a < 0$.

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 4\right)$.

Задача 9. Найдите все действительные а такие, что система уравнений $\begin{cases} |z-a| = 1, \\ |z-i| = \frac{a}{2}. \end{cases}$ не имеет решений.

Решение.

1. Если $a < 0$, то решений нет.

2. При $a = 0$, $z = i$.

3. Если $a > 0$:

Каждое из данных уравнений задает на комплексной плоскости окружность. Пусть O_1 и O_2 – центры этих окружностей, r_1 и r_2 – соответствующие радиусы.

Если расстояние между их центрами $|O_1O_2|$ удовлетворяют условиям $|r_1 - r_2| \le |O_1O_2| \le |r_1 + r_2|$, то окружности имеют хотя бы одну общую точку. тогда получим систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+1} \ge \left|\frac{a}{2}-1\right|, \\ \sqrt{a^2+1} \le \frac{a}{2}+1, \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+1 \ge \frac{a^2}{2}-a+1, \\ a^2+1 \le \frac{a^2}{2}+a+1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3a^2+4a \ge 0, \\ 3a^2-4a \le 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a \le \frac{4}{3}.$$

Поэтому при $a > \frac{4}{3}$ система решений не имеет. Ответ: $(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Глава 7. ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПЛЕКСНОЙ ДИНАМИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Нахождение корней многочленов – одна из древнейших проблем, которая не потеряла своей актуальности и в наши дни. Она встречается в самых разнообразных областях науки и техники.

При рассмотрении полиномов различных степеней, были получены результаты, имеющие фрактальную структуру. Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости. Этот вопрос заинтересовал Артура Кэли ещё в 1879 году, однако разрешить его смогли лишь в 70-х годах двадцатого столетия с появлением вычислительной техники. Оказалось, что на пересечениях этих областей (их принято называть областями притяжения) образуются так называемые фракталы — бесконечные самоподобные геометрические фигуры.

Ввиду того, что Ньютон применял свой метод исключительно к полиномам, фракталы, образованные в результате такого применения, обрели название фракталов Ньютона или бассейнов Ньютона. Метод Ньютона позволяет исследовать динамику отображений точек, каждая из которых итерационным путем сходится к одному из корней.

Рассмотрим геометрическое толкование метода Ньютона. Нахождение следующего приближения сводится к тому, что проводится касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_n$ и отыскивается точка пересечения с прямой $y = x$. Эта точка и будет новым приближением x_{n+1}. Чтобы найти $f(x_{n+1})$ через значение x_{n+1} проводится вертикальная линия. После этого проводится новая касательная, точка пересечения которой с прямой $y = x$ даст значение x_{n+2}.

Нужно отметить, что изначально метод Ньютона формулировали в вещественном пространстве, но он применим и для комплексных переменных. Пусть имеется многочлен $F(z) \in \mathbb{C}[z]$, где $z = x + iy$ и необходимо найти такие значения аргумента, для которых $F(z) = 0$. В основе метода Ньютона лежит формула

$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)}$$ для множества комплексных точек.

Корнями квадратного уравнения $F(z) = z^2 - 1$ являются значения $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ и согласно методу Ньютона существует множество точек на комплексной плоскости, каждая из которых итерационным путем сходится к одному из корней. Попробуем определить для каждого из корней свои множества сходящихся точек. Осуществим это, преобразуя формулу Ньютона для комплексных чисел.

$$z = x + iy,$$

$$z^2 - 1 = (x + iy)^2 - 1 = (x^2 - y^2 - 1) + 2ixy,$$

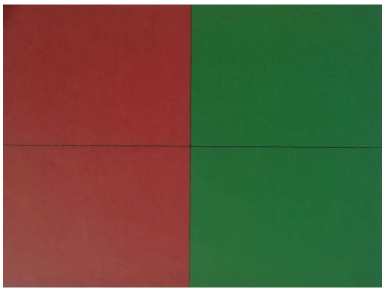
$$F'(z) = 2x + 2iy.$$

Выделяя действительную и мнимую части в формуле, получаем:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n({x_n}^2 - {y_n}^2 - 1) + 4x_n y_n}{4{x_n}^2 + 4{y_n}^2},$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{4x_n y_n - 2y_n({x_n}^2 - {y_n}^2 - 1)}{4{x_n}^2 + 4{y_n}^2}.$$

Можно увидеть, что точка z с положительной действительной частью перейдет в значение z', которое также имеет положительную действительную часть. Таким образом, все точки будут располагаются в I и IV координатных четвертях (сходятся к «положительному» корню z_1). Поведение точки z с отрицательной действительной частью аналогично, и она будет сходиться к «отрицательному» корню z_2. Плоскость поделена на две части мнимой осью. Так ведут себя все точки комплексной плоскости за исключением точки A$(0;0)$ и точек мнимой и действительной осей. На рисунке одна полуплоскость соответствует области сходимости к первому корню, а вторая – ко второму корню.



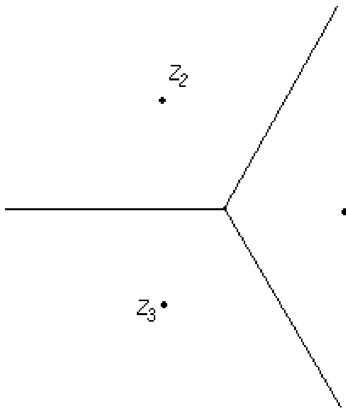
Области притяжения к комплексным корням уравнения
$F(z) = z^2 - 1$

В случае квадратного уравнения решение оказывается простым и изящным, но уже следующий сменяющий его случай кубического уравнения, по-видимому, представляет значительную трудность.

Рассмотрим простейшее кубическое уравнение $F(z) = z^3 - 1$ с корнями:

$$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}}\,i \text{ и } z_3 = \frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}\,i.$$

Согласно методу Ньютона каждая точка комплексной плоскости итерационным путем сходится к одному из корней, образуя область сходимости к корню. Естественно ожидать, что вся плоскость C разобьется на три области притяжения, расположенные вокруг каждого из корней.



Однако в действительности ситуация гораздо более сложная. Прежде всего, есть точка $z_0 = 0$, где метод не определен. У нее есть три прообраза. Вновь каждая из этих точек имеет три прообраза и так далее. Таким образом, существуют 3^k точек z_0 , которые после k итераций отображаются в точку $z_0 = 0$, и они порождают счетное множество начальных точек, для которых метод не определен на какой-либо итерации. Для всех остальных точек метод сойдется к одному из корней.

Определим множества сходящихся точек, осуществляя преобразование формулы Ньютона для комплексных чисел.

$z = x + iy,$

$z^3 - 1 = (x + iy)^3 - 1 = (x^3 - 3xy^2 - 1) + i(3x^2y - y^3),$

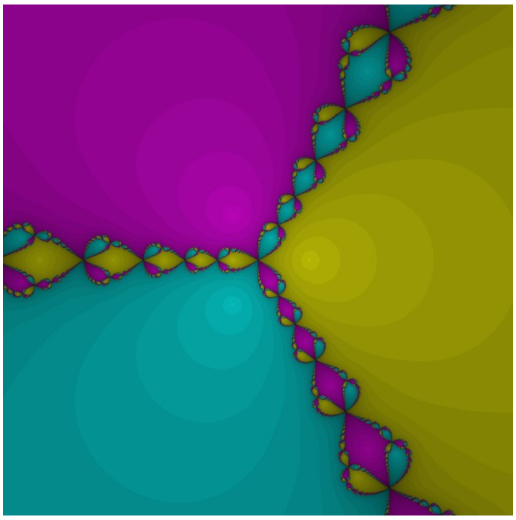
$F'(z) = (3x^2 - 3y^2) + 6ixy.$

Действительная и мнимая части точки комплексной плоскости:

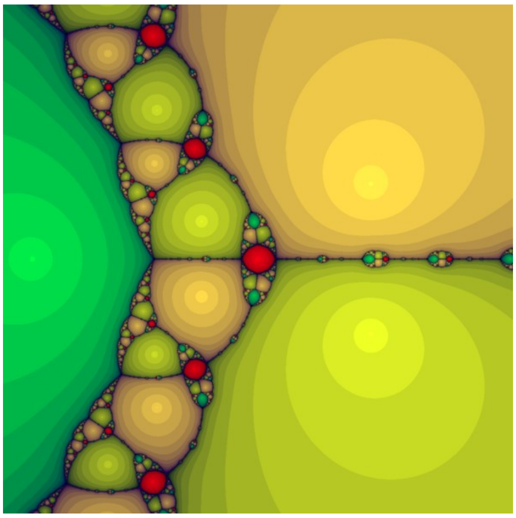
$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x^5 + 6x^3y^2 + 3xy^4 - 3x^2 + 3y^2}{9(x^2 + y^2)^2},$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{3y^5 + 3x^4y + 6x^2y^3 + 6xy}{9(x^2 + y^2)^2}.$$

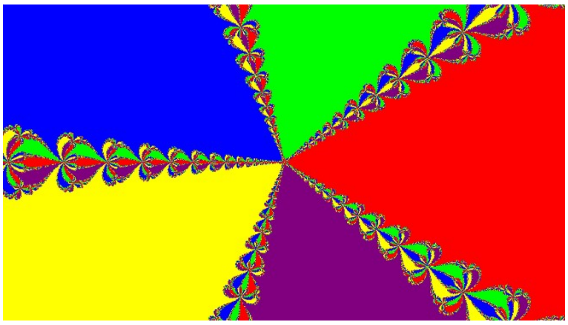
В 1976 году профессор Корнуолльского университета Джон Хаббард получил эту фрактальную структуру при решении кубических уравнений методом Ньютона.



Области притяжения к комплексным корням уравнения
$F(z) = z^3 - 1$



Области притяжения к комплексным корням уравнения
$F(z) = z^3 + 2z + 2$

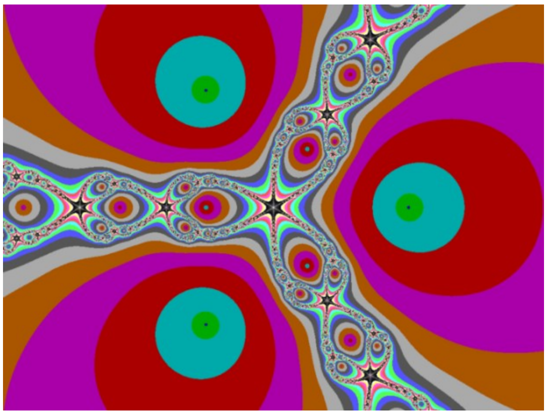


Области притяжения к комплексным корням уравнения
$F(z) = z^5 - 1$

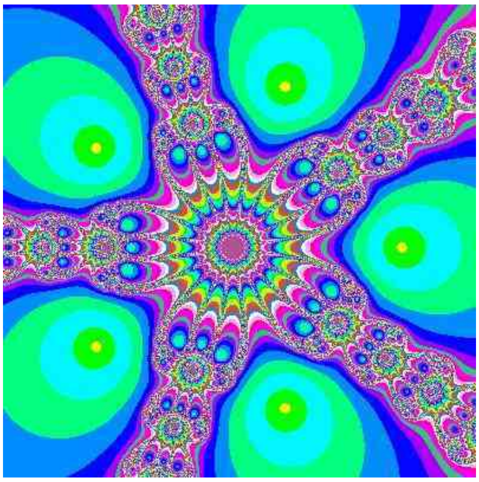
Отметим важный момент – между любыми точками, принадлежащими разным областям притяжения, всегда лежит точка, принадлежащая третьей области. Сложная природа областей притяжения вызывается существованием нескольких корней многочлена.

Рассмотрим еще один вопрос. Будем окрашивать точки одинаковым цветом, если они сходятся к корню за одно и то же число итераций, т.е. имеют одинаковое итерационное расстояние до корня. Каждая область будет окрашена в соответствии с необходимым количеством итераций при сходимости к корню. И снова возникает фрактальная структура.

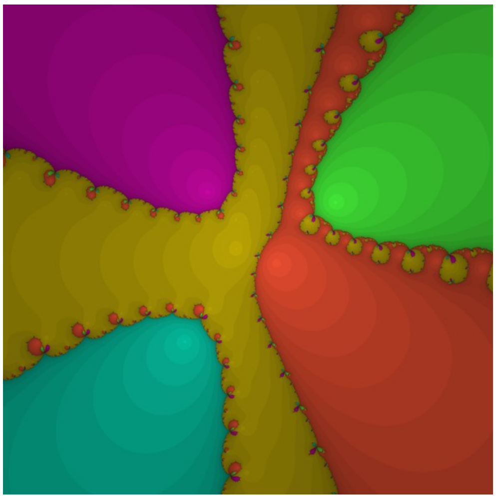
Итерационные области притяжения к комплексным корням уравнения $F(z) = z^2 - c$



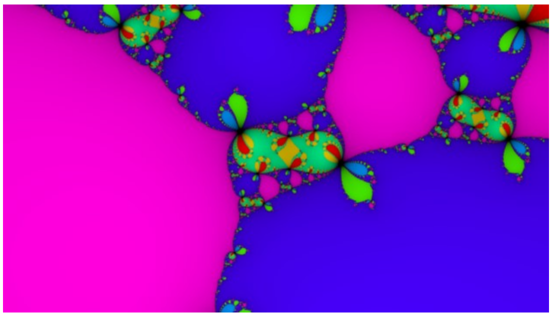
Итерационные области притяжения к комплексным корням уравнения $F(z) = z^3 - c$



Итерационные области притяжения к комплексным корням уравнения $F(z) = z^5 - c$



Итерационные области притяжения к комплексным корням уравнения $F(z) = z^5 - 3iz^3$



Итерационные области притяжения к комплексным корням уравнения $F(z) = z^7 - iz^4 + 1$

В связи с тем, что в различных областях науки и техники возникали различные проблемы, которые не могли быть решены с помощью известных методов, на помощь в разрешении этих проблем пришли фракталы. Они позволили значительно продвинуться в решении многих значимых практических задач. Так, с помощью геометрической интерпретации метода Ньютона и компьютерной графики мы можем визуализировать решения полиномов различных степеней и получать завораживающие рисунки, которые имеют фрактальную структуру.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Вариант 1

1. При $z=-1-i$ найти значение функции $\omega=\dfrac{z^2+\bar{z}}{|z|+i}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-2z+2=0$; б) $z^2-5z+7+i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z-3+i|\geq 4$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $5i$, -3, $1+i$, $\sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\dfrac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{21}}{(1-i)^{23}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{-8}$; б) $\sqrt[5]{-4-4i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+3x^2-3x+1=0$ по формуле Кардано.

Вариант 2

1. Выполнить действия $\dfrac{(1-i)^2-(1+2i)^3}{(1+i)^3+(2-i)^2}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-4z+5=0$; б) $z^2-(3+2i)z+5+i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}(z^2)=1$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: 5, $-2i$, $-1-i$, $\sqrt{3}+i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\dfrac{\left(\cos(45^\circ)-i\sin(45^\circ)\right)^7}{(1+i)^3}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{-27i}$; б) $\sqrt[4]{-1+i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-6x^2+3x-2=0$ по формуле Кардано.

Вариант 3

1. Найти действительную и мнимую части числа $\left(\frac{i^9+2}{i^{15}-1}\right)^3$

2. Решить уравнения: а) $z^2-2z+5=0$; б) $z^2+(3+i)z+2+2i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z-(1+i)|+|z-(1-i)|<4$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $-i$, 9, $-1+i$, $-\sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{15}}{(1+i)^{20}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[6]{1}$; б) $\sqrt[3]{2-2i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-3x^2+9x-9=0$ по формуле Кардано.

Вариант 4

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} (3-i)x & +(4+2i)y & =2-5i \\ (4+2i)x & -(2-i)y & =5+4i \end{cases}$.

2. Решить уравнения:а) $z^2-2z+10=0$; б) $z^2+(1+i)z+2+2i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z-3i|=4$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: -10, i, $1-i$, $-\sqrt{3}+i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\frac{\left(-\sqrt{3}-i\right)^{17}}{(-1+i)^{21}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{2+2i}$; б) $\sqrt[4]{1}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+6x^2+21x+20=0$ по формуле Кардано.

Вариант 5

1. Указать алгебраическую форму комплексного числа $z=\dfrac{3+2i}{1-i}+\dfrac{2+5i}{-2+3i}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-4z+13=0$; б) $z^2+(-1+i)z+6+2i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)=1$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $2i,\ -5,\ 1+i,\ \sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\dfrac{\left(\cos(\frac{5\pi}{6})-i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)^{21}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^{15}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{-i}$; б) $\sqrt[4]{1-i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+3x^2-3x-11=0$ по формуле Кардано.

Вариант 6

1. Найти $i\operatorname{Re}((3+i)^2(2-3i))+\operatorname{Im}((2-3i)(1+i)^3)$.

2. Решить уравнения:а) $z^2-6z+10=0$;б) $z^2+z-5+5i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z+i|-|z-i|<2$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $2,\ -3i,\ 1-i,\ \sqrt{3}+i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\left(\dfrac{-1-i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{109}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{-1}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-6x^2+21x-20=0$ по формуле Кардано.

Вариант 7

1. Вычислить $\left(\dfrac{i^{16}+4}{i^5-3}\right)$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-6z+13=0$; б) $z^2+(1-6i)z-7-9i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{4}<\arg(z+2-5i)<\dfrac{\pi}{3}$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $-2i$, 1, $1-i$, $-\sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\dfrac{(-1+i)^{31}}{(1-\sqrt{3}i)^{20}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{16i}$; б) $\sqrt[5]{4+4i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+6x^2+6x+2=0$ по формуле Кардано.

Вариант 8

1. Вычислить $(1-2i)^6$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-2z+17=0$; б) $z^2+(4-5i)z+3-15i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z-3i|>5$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: -2, $4i$, $-1-i$, $-\sqrt{3}+i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\dfrac{\left(i\cos(\frac{3\pi}{5})+\sin(\frac{3\pi}{5})\right)^{15}}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}i\right)^4}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{2+2i}$; б) $\sqrt[4]{i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+3x^2-6x-20=0$ по формуле Кардано.

Вариант 9

1. Найти $(1+\omega+\omega^2)^2$, если $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-8z+17=0$; б) $z^2+(-1+i)z+2+i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $0\le\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)\le\pi$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $-i$, 3, $1+i$, $1-\sqrt{3}i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{41}}{\left(-1-i\right)^{17}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{-1+i}$; б) $\sqrt[3]{8i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+6x^2+18x+18=0$ по формуле Кардано.

Вариант 10

1. Выполнить действия $\frac{(1+i)^4-2}{(1-i)^4+2}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-6z+25=0$; б) $z^2+(-2+4i)z-3-2i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $z\bar{z}=5$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: -1, $2i$, $1+i$, $1+\sqrt{3}i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{31}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-i}$; б) $\sqrt[4]{-1-i}$

7. Решить кубическое уравнение $x^3+3x^2+12x+4=0$ по формуле Кардано.

Вариант 11

1. Вычислить $(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$, если $\omega=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2. Решить уравнения: а) $z^2-2z+26=0$; б) $z^2+(3-3i)z+2-3i=0.$

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа $z,$ удовлетворяющие условию $|z+1-i|<|z-1+i|$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $i,\ 5,\ -1+i,\ -1-\sqrt{3}i.$

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{13}}{\left(1-i\right)^4}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{-16}$; б) $\sqrt[3]{2+2i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+6x^2+6x-10=0$ по формуле Кардано.

Вариант 12

1. Найти действительные числа a,b, если известно, что $(a+bi)^2=-3+4i.$

2. Решить уравнения: а) $z^2-10z+26=0$; б) $z^2-(3+i)z-2+9i=0.$

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа $z,$ удовлетворяющие условию $|z+2-3i|>|z-5+i|$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $1,\ 3i,$ $-1+i,\ -1+\sqrt{3}i.$

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{48}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{-1+i}$; б) $\sqrt[3]{-8}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-3x^2+12x-4=0$ по формуле Кардано.

Вариант 13

1. Найти действительные числа x, y, если $(2-i)x+(3+5i)y=\dfrac{(1-i)^3-1}{(1+i)^3+1}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2+2z+2=0$; б) $z^2-(4+4i)z-8+14i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\dfrac{\pi}{2}\le\arg(z+2i)\le\pi$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $4i,\ -2,\ 1+i,\ 1-\sqrt{3}i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\left(\sqrt{3}-i\right)^{2013}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{8}$; б) $\sqrt[5]{1-i}$;

7. Решить кубическое уравнение $x^3-6x^2+6x+10=0$ по формуле Кардано.

Вариант 14

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x - 2iy + z = 2 \\ x - y + iz = 3. \\ (1+i)x + 3iy - 3z = 0 \end{cases}$

2. Решить уравнения: а) $z^2+2z+5=0$; б) $z^2+(-4+4i)z-8-14i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\mathrm{Im}(\bar{z}^2)=1$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $2,\ -5i,\ 1-i,\ 1+\sqrt{3}i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\left(\frac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{111}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[3]{-8i}$; б) $\sqrt[5]{-4+4i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-3x^2-6x-4=0$ по формуле Кардано.

Вариант 15

1. Выполнить действия $\frac{(2-i)^2+(1-i)^3}{(1+i)^3-(2+i)^2}$.

2. Решить уравнения: а) $z^2+2z+10=0$; б) $z^2+(2-3i)z-17-7i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{|z|^2}\right)=-\frac{1}{4}$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $-2i$, 1, $-1+i$, $-\sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $(1-\sqrt{3}i)^{2014}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[5]{-4-4i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3+3x^2+9x+5=0$ по формуле Кардано.

Вариант 16

1. Найти действительные числа a,b, если известно, что $(a+bi)^2=-16-30i$.

2. Решить уравнения: а) $z^2+4z+5=0$; б) $z^2-(1+2i)z+3+3i=0$.

3. Описать множество точек, изображающих на комплексной плоскости числа z, удовлетворяющие условию $|z-5+i|\geq 4$.

4. Представить в тригонометрической форме числа: $5i$, -1, $1-i$, $\sqrt{3}-i$.

5. Вычислить, пользуясь формулой Муавра, значение выражения $\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^{21}}{\left(1+i\right)^{20}}$.

6. Извлечь корни: а) $\sqrt[4]{16}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$.

7. Решить кубическое уравнение $x^3-3x^2+12x-4=0$ по формуле Кардано.

ЗАДАЧИ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Задача № 1. Даны в алгебраической форме два числа a и b:

а) Найти алгебраическую форму числа $\alpha = \frac{a}{b}$;

б) Найти тригонометрическую форму числа α;

в) Решить уравнение $z^3+\alpha=0$

г) Изобразить числа α, $-\alpha$ и полученные корни для уравнения $z^3+\alpha=0$ точками на комплексной плоскости.

1.	a = $(4+8\sqrt{3})+(4\sqrt{3}-8)i$, b = $1-2i$	**15.**	a = $9\sqrt{3}-15i$, b = $2\sqrt{3}+i$
2.	a = $-8\sqrt{3}$, b = $\sqrt{3}-3i$	**16.**	a = $(4-8\sqrt{3})+(8+4\sqrt{3})i$, b = $2-i$
3.	a = $(3\sqrt{3}-6)+(6\sqrt{3}+3)i$, b = $1+2i$	**17.**	a = $(6+2\sqrt{3})+(2-6\sqrt{3})i$, b = $3+i$
4.	a = $(4\sqrt{3}-12)+(-4-12\sqrt{3})i$, b = $1-3i$	**18.**	a = $(6\sqrt{3}+3)+(3\sqrt{3}-6)i$, b = $2+i$
5.	a = $6\sqrt{3}+2i$, b = $\sqrt{3}-2i$	**19.**	a = $(-12+4\sqrt{3})+(4+12\sqrt{3})i$, b = $3-i$
6.	a = $(-6+3\sqrt{3})+(3+6\sqrt{3})i$, b = $2-i$	**20.**	a = $(8\sqrt{3}-2)+(-8-2\sqrt{3})i$, b = $4-i$
7.	a = $(4\sqrt{3}-8)+(8\sqrt{3}+4)i$, b = $1+2i$	**21.**	a = $9-3i$, b = $1-2i$
8.	a = $6\sqrt{3}-2i$, b = $\sqrt{3}+2i$	**22.**	a = $-12\sqrt{3}+4i$, b = $2-\sqrt{3}i$
9.	a = $-15+3\sqrt{3}i$, b = $\sqrt{3}-2i$	**23.**	a = $2-6\sqrt{3}i$, b = $-\sqrt{3}+2i$
10.	a = $20-4\sqrt{3}i$, b = $2+\sqrt{3}i$	**24.**	a = $-15-3\sqrt{3}i$, b = $\sqrt{3}+2i$
11.	a = $2+6\sqrt{3}i$, b = $-\sqrt{3}-2i$	**25.**	a = $20+4\sqrt{3}i$, b = $-2+\sqrt{3}i$

12.	a = $-3\sqrt{3}-21i$, b = $2\sqrt{3}+i$	**26.**	a = $14+2\sqrt{3}i$, b = $2\sqrt{3}-i$
13.	a = $(-4-8\sqrt{3})+(4-8\sqrt{3})i$, b = $1+2\sqrt{3}i$	**27.**	a = $21-3\sqrt{3}i$, b = $1-2\sqrt{3}i$
14.	a = $(2-4\sqrt{3})+(-2-4\sqrt{3})i$, b = $-1+2\sqrt{3}i$	**28.**	a = $6\sqrt{3}+2i$, b = $\sqrt{3}-2i$

Задача № 2. Указать на комплексной плоскости все точки z, для которых выполняется неравенство. Сделать чертёж.

1.	$\left\|z-\sqrt{3}+i\right\|\geq 3$	**15.**	$\left\|z+1+2i\right\|\geq 3$
2.	$1<\left\|-z-2-i\right\|<2$	**16.**	$1/2<\left\|z-1\right\|<1$
3.	$2\leq\left\|2z+2+i\right\|<4$	**17.**	$\left\|-z+3+2i\right\|>2$
4.	$2<\left\|z-2+i\right\|<3$	**18.**	$1/2<\left\|z-2i\right\|<2$
5.	$1\leq\left\|-z+i\right\|\leq 2$	**19.**	$2\leq\left\|z+1+i\right\|<3$
6.	$\left\|2z-2-3i\right\|\geq 2$	**20.**	$1\leq\left\|z+4+i\right\|<3$
7.	$3<\left\|3z+5+i\right\|\leq 6$	**21.**	$1/3\leq\left\|z+1+i\right\|\leq 1$
8.	$2<\left\|z-3-2i\right\|\leq 4$	**22.**	$1<\left\|z+1-i\right\|\leq 2$
9.	$\left\|2z+1\right\|\leq 1$	**23.**	$\left\|-z-i\right\|>1$
10.	$1<\left\|z+2-2i\right\|<5$	**24.**	$\left\|z+1-3i\right\|>5$
11.	$\left\|-z-2-4i\right\|\geq 2$	**25.**	$1/2<\left\|z/2-i\right\|<1$
12.	$\left\|-z+i\right\|\geq 3$	**26.**	$\left\|z+4-2i\right\|>1$
13.	$2<\left\|12z+1-i\right\|\leq 4$	**27.**	$\left\|-z+2+2i\right\|\geq 1$
14.	$1\leq\left\|z-2-4i\right\|\leq 3$	**28.**	$1/2<\left\|z+1-2i\right\|\leq 2$

Задача № 3. Найти сумму, разность, произведение и частное чисел a и b в алгебраической форме. Найти тригонометрическую форму этих чисел. Найти их произведение и частное в тригонометрической форме.

1.	$a=-1+i\sqrt{3};\ b=\sqrt{3}+i$	**15.**	$a=1-i\sqrt{3};\ b=-(\sqrt{3}+i)$
2.	$a=\sqrt{3}+i;\ b=1-i\sqrt{3}$	**16.**	$a=-(\sqrt{3}+i;\ b=-1/(1-i\sqrt{3})$
3.	$a=-1/(1-i\sqrt{3})\ ;\ b=-1/(1+i)$	**17.**	$a=-1/(1+i);\ b=-1+i$
4.	$a=-1+i\ ;\ b=-(32+32i)$	**18.**	$a=-(32+32i);\ b=1/(-1+i)$
5.	$a=-1/(-1+i);\ b=243-243i$	**19.**	$a=243-243i\ ;\ b=1/(1-i)$
6.	$a=-1/(1-i);\ b=1+i\sqrt{3}$	**20.**	$a=1+i\sqrt{3};\ b=-(\sqrt{3}-i)$
7.	$a=-(\sqrt{3}-i)\ ;\ b=-(1+i\sqrt{3})$	**21.**	$a=-(1+i\sqrt{3});\ b=1/(1+i\sqrt{3})$
8.	$a=1/(1+i\sqrt{3});\ b=-i$	**22.**	$a=-i;\ b=1/(1-i\sqrt{3})$
9.	$a=1/(1-i\sqrt{3});\ b=1$	**23.**	$a=1;\ b=\sqrt{3}-i$
10.	$a=\sqrt{3}-i;\ b=i$	**24.**	$a=i;\ b=1/(1+i)$
11.	$a=1/(1+i)\ ;\ b=-1/(1+i\sqrt{3})$	**25.**	$a=-1/(1+i\sqrt{3})\ ;\ b=32-32i$
12.	$a=32-32i\ ;\ b=i/(1+i)$	**26.**	$a=i/(1+i);\ b=1+i$
13.	$a=1+i;\ b=-i/(1-i)$	**27.**	$a=-i/(1+i);\ b=1-i$
14.	$a=1-i;\ b=-1+i\sqrt{3}$	**28.**	$a=1+i\sqrt{3};\ b=-1/(1-i)$

ТЕСТ ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

Комплексным числом z называется выражение вида $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – *мнимая единица*, $i^2 = -1$.

Для комплексного числа $z = a + bi$ число a называется *действительной частью* комплексного числа z и обозначается $a = Rez$, а число b – *мнимой частью* комплексного числа z и обозначается $b = Imz$.

Пример 1. Для комплексного числа z определить Rez и Imz:

а) $z = 2 + 5i$;

б) $z = 1 - 3i$;

в) $z = 2$;

г) $z = 5i$;

д) $z = i$.

Решение.

а) $Rez = 2$, $Imz = 5$;

б) так как $z = 1 - 3i = 1 + (-3)i$, то $Rez = 1$, $Imz = -3$;

в) так как $z = 2 = 2 + 0i$, то $Rez = 2$, $Imz = 0$;

г) так как $z = 5i = 0 + 5i$, то $Rez = 0$, $Imz = 5$;

д) так как $z = i = 0 + 1i$, то $Rez = 0$, $Imz = 1$.

Тест 1. Мнимая часть Imz комплексного числа $z = 5 + 4i$ равна:

1) 9;

2) 5;

3) 4;

4) (–4);

5) 1.

Тест 2. Мнимая часть Imz комплексного числа $z = 7 - i$ равна:

1) 7;

2) 1;

3) 0;

4) (–1);

5) (–7).

Тест 3. Действительная часть Rez комплексного числа $z = -4i$ равна:

1) –4;

2) 0;

3) 4;

4) 1;

5) (–1).

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называются *равными* тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части, т. е. $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. В частности, комплексное число $z = a + bi$ равно нулю тогда и только тогда, когда $a = b = 0$.

Пример 2. Указать, какие из комплексных чисел являются равными: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 2 + 5i$; $z_3 = 1 + 3i$; $z_4 = -1 + 3i$; $z_5 = 2 + 3i$.

Решение.

Среди данных комплексных чисел выбираем сначала те, которые имеют равные действительные части: z_1, z_2, z_5. Так как при этом $Imz_1 = = Imz_5 = 2$, $Imz_2 = 5$, то равными являются комплексные числа z_1 и z_5.

Ответ: $z_1 = z_5$.

Тест 4. Даны комплексные числа: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 – i$; $z_3 = 3 + 2i$; $z_4 = –4 + i$; $z_5 = 4 + i$; $z_6 = 4 – i$; $z_7 = 2 – 3i$; $z_8 = 4 – i$; $z_9 = 3 – 2i$. Среди них равными являются:

1) $z_1 = z_3 = z_7 = z_9$;

2) $z_7 = z_9$;

3) $z_2 = z_5 = z_6 = z_8$;

4) $z_2 = z_4$;

5) $z_2 = z_6 = z_8$.

Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a – bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются *сопряженными*.

Пример 3. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z=7 – i$.

Решение.

Сопряженным к данному комплексному числу будет комплексное число $\bar{z} = 7 + i$.

Ответ: $\bar{z} = 7 + i$.

Тест 5. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z = 2 + 3i$:

1) $\bar{z} = 2 – 3i$;

2) $\bar{z} = –2 – 3i$;

3) $\bar{z} = –2 – 3i$;

4) $\bar{z} = 2 + 3i$;

5) $\bar{z} = 3 + 2i$.

Тест 6. Указать число, сопряженное к комплексному числу $z = 3i$:

1) $\bar{z} = 3i$;

2) $\bar{z} = 0$;

3) $\bar{z} = -3i$;

4) $\bar{z} = 1$;

5) $\bar{z} = -1$.

Запись числа z в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Рассмотрим действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме. Если $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i; \quad (1)$$

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i. \quad (2)$$

Пример 4. Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 4 - 3i$. Найти их сумму и разность.

Решение.

В соответствии с формулами (1), (2) при $a = 2$, $b = 1$, $c = 4$, $d = -3$ получаем

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (4 - 3i) = 2 + i + 4 - 3i = (2 + 4) + (1 - 3)i = 6 - 2i;$$

$$z_1 - z_2 = (2 + i) - (4 - 3i) = 2 + i - 4 + 3i = (2 - 4) + (1 + 3)i = -2 + 4i.$$

Ответ: $6 - 2i$; $-2 + 4i$.

Тест 7. Сумма комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - 2i$ равна:

1) $4 - i$;

2) $3 - i$;

3) $5 + i$;

4) 5;

5) $3 + i$.

Тест 8. Разность комплексных чисел $z_1 = 3 + i$ и $z_2 = 4 - 2i$ равна:

1) $-1 - i$;

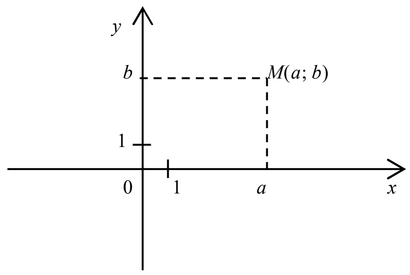
2) $1 + i$;

3) $1 - 3i$;

4) $-1 + 3i$;

5) $1 - i$.

Рассмотрим плоскость с декартовой прямоугольной системой координат Oxy. Всякое комплексное число $z = a + bi$ можно изобразить точкой $M(a; b)$ на плоскости Oxy такой, что $a = Rez$, $b = Imz$. И, наоборот, каждую точку $M(a; b)$ координатной плоскости Oxy можно рассматривать как образ комплексного числа $z = a + bi$.

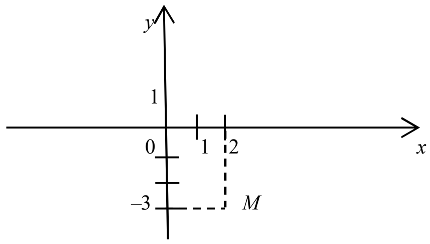


Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней изображены действительные числа $z = a + 0i = a$. Ось ординат называется *мнимой осью*, так как на ней изображены чисто мнимые комплексные числа $z = 0 + bi = bi$.

Пример 5. На комплексной плоскости изобразить число $z = 2 - 3i$.

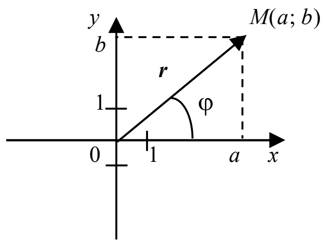
Решение.

Для данного комплексного числа $a = Rez = 2$, $b = Imz = -3$. На координатной плоскости Oxy число $z = 2 - 3i$ изображается точкой $M(2; -3)$.



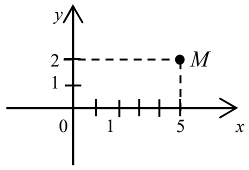
Комплексное число $z = a + bi$, заданное в алгебраической форме, можно представить и в другом виде.

Изобразим число z точкой $M(a;\ b)$ комплексной плоскости. Рассмотрим радиус-вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$ этой точки.

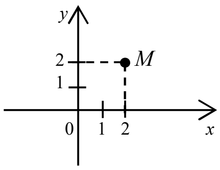


Тест 9. Указать, на какой комплексной плоскости точка M является изображением комплексного числа $z = -5 + 2i$:

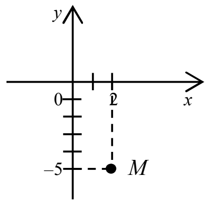
1)



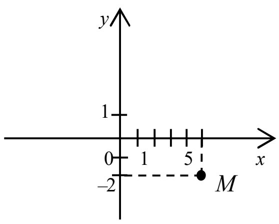
2)



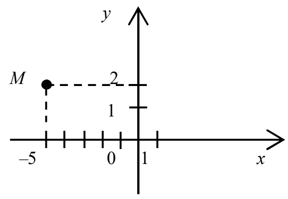
3)



4)

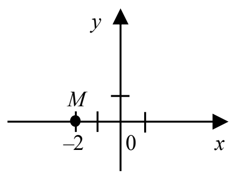


5)

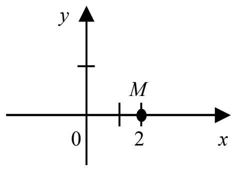


Тест 10. Указать, на какой комплексной плоскости точка M является изображением комплексного числа $z = -2i$:

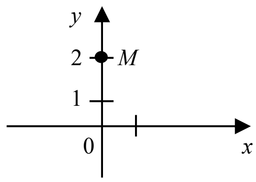
1)



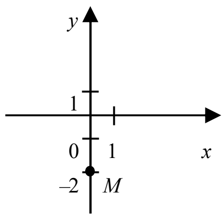
2)



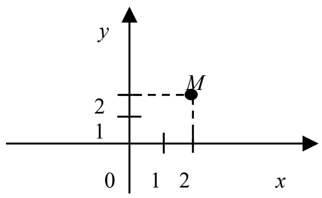
3)



4)



5)



Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина радиуса-вектора $\mathbf{r} = \overline{OM}$ точки $M(a; b)$, изображающей данное число.

Обозначение: $|z|$ или r.

Из прямоугольного треугольника OMa по теореме Пифагора $\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Следовательно, $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ или $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Пример 6. Найти модуль комплексного числа $z = 1 - 3i$.

Решение.

Для данного комплексного числа $a = 1$, $b = -3$. Следовательно,

$$|z| = |1 - 3i| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}$.

Тест 11. Модуль комплексного числа $z = 4 + 3i$ равен:

1) 25;

2) 5;

3) 7;

4) 49;

5) 24.

Тест 12. Модуль комплексного числа $z = -i$ равен:

1) –1;

2) 0;

3) 1;

4) 2;

5) 5.

Тест 13. Модуль комплексного числа $z = 4$ равен:

1) –1;

2) 0;

3) 1;

4) 4;

5) 2.

Аргументом комплексного числа $z = a + bi$ называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси Ox и вектором $\boldsymbol{r}$, изображающим комплексное число. Обозначение: $\arg z$ или φ.

Аргумент (главное значение аргумента) комплексного числа заключен в промежутке $[0; 2\pi)$.

Множество аргументов числа z обозначается $Arg z$ и $Arg z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$.

С помощью модуля r и аргумента φ комплексное число $z = a + bi$ можно представить в другом виде. Так как $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, то $z = a + bi = r\cos\varphi + r\sin\varphi i$ или $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (3)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \ (4)$$

Запись числа $z = a + bi$ в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r – модуль, а φ – аргумент числа z, называется *тригонометрической формой* комплексного числа z.

Пример 7. Представить комплексное число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Решение.

$z = -1 + i$ – алгебраическая форма комплексного числа z,

при этом $a = = -1$, $b = 1$.

Применяя формулы (3), (4), находим $r = \sqrt{a^2+b^2} = = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$,

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\varphi \in [0;\ 2\pi)$, то $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма данного числа z имеет вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Ответ: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Тест 14. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ имеет вид:

1) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

5) $\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+i\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Тест 15. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1$ имеет вид:

1) $1(\cos\pi+i\sin\pi)$;

2) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)$;

4) $(\cos\pi+i\sin\pi)$;

5) $\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Два комплексных числа $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, заданных в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π, т. е. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 8. Указать, какие из комплексных чисел являются равными: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_3 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)$, $z_4 = -2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Решение.

Среди данных комплексных чисел выбираем сначала те, которые имеют равные модули: z_1, z_3, z_4. Так как $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\varphi_3 = \frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi$, $\varphi_4 = \frac{3\pi}{4}$, то равными являются комплексные числа z_1 и z_3.

Ответ: $z_1 = z_3$.

Тест 16. Даны комплексные числа

$z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_2 = -4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$, $z_3 = 4\left(\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$,

$z_4 == 4\left(\cos\frac{21\pi}{5} + \ + i\sin\frac{21\pi}{5}\right)$.

Среди них равными являются:

1) $z_1 = z_2$;

2) $z_1 = z_3$;

3) $z_1 = z_4$;

4) $z_2 = z_3$;

5) $z_3 = z_4$.

Формула Эйлера имеет следующий вид:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \quad (5)$$

Данная формула может быть записана в виде

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi. \qquad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Используя формулу (5), комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в виде $z = re^{i\varphi}$, называемом *показательной* (*или экспоненциальной*) *формой* комплексного числа z.

Пример 9. Представить комплексное число $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ в показательной форме.

Решение

$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма комплексного числа z, при этом $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Поэтому показательная форма данного числа z имеет вид $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ответ: $z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Тест 17. Показательная форма комплексного числа $z=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$имеет вид:

1) $2e^{i\frac{\pi}{4}}$;

2) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$;

3) $e^{i\frac{\pi}{4}}$;

4) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$;

5) $4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Тест 18. Показательная форма комплексного числа $z = -1 + i$ имеет вид:

1) $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

2) $\sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

3) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

4) $\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$;

5) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Ответы на тестовые задания

Номер теста	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Правильный ответ	3	4	2	5	1	3	2	4	5
Номер теста	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Правильный ответ	4	2	3	4	2	4	3	1	3

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Комплексные числа – значимая составляющая математической подготовки студентов, особенно будущих учителей, инженеров, строителей, программистов, экономистов. Решение многих задач математики, физики, механики, электротехники, электроники невозможно без этих чисел. Область применения комплексных чисел многообразна. Важно понять природу комплексного числа, овладеть на высоком уровне существующим понятийным аппаратом.

Пособие направлено на формирование понятия комплексного числа, а также умений и навыков работы с математическим аппаратом этих чисел, что поможет студенту освоить существующие методы, основанные на новых числах, а также разработать новые методы и решить новые профессиональные задачи.

С точки зрения полноты представленного материала издание не претендует на то, чтобы заменить учебники по алгебре. Однако студентам математических специальностей оно будет интересно тем, что в нем изложен не только теоретический материал, но и приведены решения многочисленных примеров и задач, в том числе повышенного уровня сложности, поэтому оно может быть полезно при самостоятельном изучении данной темы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Галицкий М.А., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. – М.: Просвещение, 1991.
2. Глухов М.М., Солодовников А.С. Задачник – практикум по высшей алгебре для студентов–заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. – М.: Просвещение, 1969.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Алгебра для самообразования. – М.: Наука, 1966.
4. Cayley A. The Newton-Fourier imaginary problem. – Math II, 1879. – 97 с.
5. Julia G. Sur l'iteration des fonctions rationelles. – Journal de Mathematiques Pure et Applique, 1918, № 8. – P. 47–245.
6. Канторович Л. В., О методе Ньютона для функциональных уравнений. – Доклады АН СССР, 1948, 59 (7). – С.1237–1240.
7. Канторович Л. В., Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона. – Вестник ЛГУ. Сер.: мат.-мех, 1957, № 7. – С.68–103.
8. Newton's Method and Dynamical System. – Ed. H. O. Peitgen. Berlin: Springer, 1989.
9. Беляева Э.С., Потапов А.С. Уравнения и неравенства первой степени с параметром и к ним сводимые. Учебное пособие. – Воронеж: ВГПУ, 2001.
10. Галицкий М.А., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа. – М.: Просвещение, 1989.
11. Гордиенко Н.А., Беляева Э.С., Фирстов В.Е., Серебрякова И.В. Комплексные числа и их приложения: Учебное пособие. – Воронеж: ВГПУ, 2004.
12. Фадеев Д.К., Никулин М.С., Соколовский И.Ф. Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1987.

Учебное электронное издание

КУРАНОВА Наталья Юрьевна

ТЕОРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогический институт, кафедра МОиИТ
natali_math@mail.ru