Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2021

УДК 519.2
ББК 22.171
Т34

Автор-составитель Ю. К. Кокурина

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры функционального анализа и приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Т. В. Прохорова

Кандидат экономических наук, доцент
доцент кафедры менеджмента и бизнес-информатики
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации
(Владимирский филиал)
Е. Н. Горбатенко

Теория вероятностей : учеб.-практ. пособие / авт.-сост.
Т34 Ю. К. Кокурина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2021. – 156 с.
ISBN 978-5-9984-1299-8

Пособие содержит основные понятия теории вероятностей. Раздел с индивидуальными заданиями содержит 320 задач по всем основным темам, изучаемым в курсах теории вероятностей в высших учебных заведениях.

Предназначено для студентов очной формы обучения направлений подготовки 02.03.01 – Математика и компьютерные науки, 01.03.02 – Прикладная математика и информатика. Издание может быть полезно студентам, изучающим дисциплину «Теория вероятностей», а также аспирантам, преподавателям и всем, кто интересуется математикой.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 10 назв.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN 978-5-9984-1299-8

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности. Теория вероятностей изучает данные закономерности.

Например: определить однозначно результат выпадения “орла” или “решки” в результате подбрасывания монеты нельзя, но при многократном подбрасывании выпадает примерно одинаковое число “орлов” и “решек”.

Испытанием называется реализация определенного комплекса условий, который может воспроизводиться неограниченное число раз. При этом комплекс условий включает в себя случайные факторы, реализация которого в каждом испытании приводит к неоднозначности исхода испытания.

Например: испытание – подбрасывание монеты.

Результатом испытания является *событие*.

Событие бывает:

достоверное (всегда происходит в результате испытания);

невозможное (никогда не происходит);

случайное (может произойти или не произойти в результате испытания).

Например: При подбрасывании кубика невозможное событие – кубик станет на ребро, случайное событие – выпадение какой-либо грани.

Конкретный результат испытания называется *элементарным событием*.

В результате испытания происходят только элементарные события.

Совокупность всех возможных, различных, конкретных исходов испытаний называется *пространством элементарных событий*.

Например: Испытание – подбрасывание шестигранного кубика. Элементарное событие – выпадение грани с “1” или “2”.

Совокупность элементарных событий это *пространство элементарных событий.*

Сложным событием называется произвольное подмножество пространства элементарных событий.

Сложное событие в результате испытания наступает тогда и только тогда, когда в результате испытаний произошло элементарное событие, принадлежащее сложному.

Таким образом, если в результате испытания может произойти только одно элементарное событие, то в результате испытания происходят все сложные события, в состав которых входят эти элементарные.

Например: испытание – подбрасывание кубика. Элементарное событие – выпадение грани с номером “1”. Сложное событие – выпадение нечетной грани.

Введем следующие обозначения:

A – событие;

ω – элементы пространства Ω;

Ω – пространство элементарных событий;

U – пространство элементарных событий как достоверное событие;

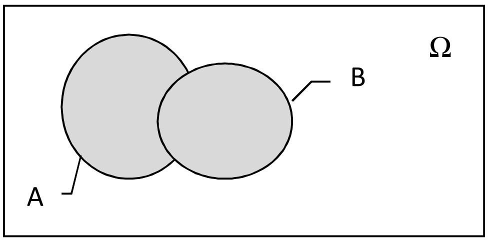
V – невозможное событие.

Иногда для удобства элементарные события будем обозначать E_i, Q_i.

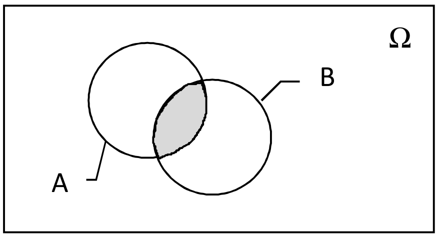
СОБЫТИЯ

Операции над событиями

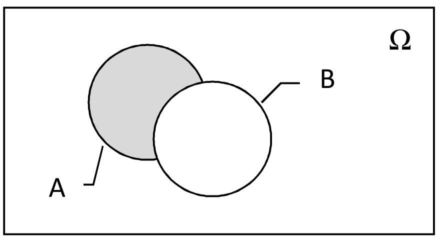
1. Событие С называется суммой А+В, если оно состоит из всех элементарных событий, входящих как в А, так и в В. При этом если элементарное событие входит и в А, и в В, то в С оно входит один раз. В результате испытания событие С происходит тогда, когда произошло событие, которое входит или в А или в В. Сумма произвольного количества событий состоит из всех элементарных событий, которые входят в одно из Ai, i=1, ..., m.



2. Событие С произведением А и В, если оно состоит из всех элементарных событий, входящих и в А, и в В. Произведением произвольного числа событий называется событие состоящее из элементарных событий, входящих во все Ai, i=1, ..., m.

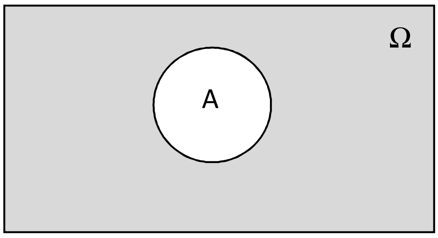


3. Разностью событий А-В называется событие С, состоящее из всех элементарных событий, входящих в А, но не входящих в В.



4. Событие называется противоположным событию А, если оно удовлетворяет двум свойствам.

Формулы де Моргана: $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ **и** $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$



5. События А и В называются несовместными, если они никогда не могут произойти в результате одного испытания.

События А и В называются несовместными, если они не имеют общих элементарных событий.

C = A · B = V

Тут V – пустое множество.

Частость наступления события

Пусть пространство элементарных событий конечно и состоит из m элементарных событий. В этом случае в качестве возможных исходов испытаний рассматривают 2^m событий – множество всех подмножеств пространства элементарных событий Ω и невозможное событие V.

Пример:

$\Omega=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$A_1=V$

$A_2=(\omega_1)$

$A_3=(\omega_2)$

$A_4=(\omega_3)$

$A_5=(\omega_1,\omega_2)$

$A_6=(\omega_2,\omega_3)$

$A_7=(\omega_1,\omega_3)$

$A_8=(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Обозначим систему этих событий через F. Берем произвольное событие $A \in F$. Проводим серию испытаний в количестве n. n – это количество испытаний, в каждом из которых произошло событие А.

Частостью наступления события А в n испытаниях называется число $W_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

Свойства частости

1. $0 \le W_n(A) \le 1$
2. Частость достоверного события равна 1. $\Omega_n(U)=1$.
3. Частость суммы попарно несовместных событий равна сумме частостей.

Рассмотрим систему A_i, $i=1, ..., k$; события попарно несовместны, т. е.

$$\underset{i\neq j}{\forall} A_i \cdot A_j = V \text{ Событие } \quad A=\sum_{i=1}^{k} A_i \qquad W_n(A)=\sum_{i=1}^{k} W_n(A_i)$$

Пусть в результате некоторого испытания произошло событие A. По определению суммы это означает, что в этом испытании произошло некоторое событие A_i. Так как все события попарно несовместны, то это означает, что никакое другое событие A_j ($i\neq j$) в этом испытании произойти не может. Следовательно:

$n_A=n_{A1}+n_{A2}+...+n_{Ak}$

$$W_n(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{k} n_{Ai}}{n}=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_{Ai}}{n}=\sum_{i=1}^{k} W_n(A)$$

Теория вероятностей используется при описании только таких испытаний, для которых выполняется следующее предположение: Для любого события A частость наступления этого события в любой бесконечной серии испытаний имеет один и тот же предел, который называется <u>вероятностью наступления события A</u>.

Следовательно, если рассматривается вероятность наступления произвольного события, то мы понимаем это число следующим образом: это частость наступления события в бесконечной (достаточно длинной) серии испытаний.

К сожалению, попытка определить вероятность как предел частости, при числе испытаний, стремящихся к бесконечности, закончилась неудачно. Хотя американский ученый Мизес создал теорию вероятностей, базирующуюся на этом определении, но ее не признали из-за большого количества внутренних логических несоответствий.

Теория вероятностей как наука была построена на аксиоматике Колмогорова.

АКСИОМАТИКА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Построение вероятностного пространства

Последовательно строим вероятностное пространство.

<u>Этап 1:</u>

Имеется испытание. В результате проведения испытания может наблюдаться одно событие из серии событий ε. Все события из системы ε называются наблюдаемыми. Введем предположение, что если события $A \subset \varepsilon$, $B \subset \varepsilon$ наблюдаемы, то наблюдаемы и события $\overline{A}, \overline{B}, A + B, A \cdot B$.

Система событий F называется полем событий или алгеброй событий, если для двух произвольных событий $A, B \subset F$ выполняется:

1) Дополнения $\overline{A}, \overline{B} \in F$
2) $(A+B) \in F$, $(A \cdot B) \in F$
3) все конечные суммы элементов из алгебры принадлежат алгебре
4) все конечные произведения элементов из алгебры принадлежат алгебре
5) все дополнения конечных сумм и произведений принадлежат алгебре.

Таким образом, систему ε мы расширяем до алгебры или поля F путем включения всех конечных сумм, произведений, и их дополнений. Т. е. считаем, что в результате проведения испытания наблюдаемая система является полем или алгеброй.

Множество всех подмножеств конечного числа событий является наблюдаемой системой – алгеброй, полем.

<u>Этап 2:</u>

Каждому событию $A \in F$ ставим в соответствие число P(A), которое называется <u>вероятностью наступления события А</u>. Такая операция задает вероятностную меру.

<u>Вероятностная мера</u> – числовая скалярная функция, аргументами которой являются элементы из системы алгебры F. Введенная вероятностная мера удовлетворяет системе из трех аксиом.

1. $\forall A \in F \quad 0 \le P(A) \le 1$

2. P(U)=1.

3. Рассмотрим конечную или бесконечную систему попарно несовместных событий, каждое из которых принадлежит алгебре F.

$$\underset{i \neq j}{\forall} A_i \cdot A_j = V. \quad \text{Если } A = \sum_{i=1}^{n} A_i \text{, то} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Алгебра событий называется σ – алгеброй, если эта система событий содержит в себе все конечные суммы и произведения из алгебры F и их дополнения, а также все бесконечные суммы и произведения из алгебры и их дополнения.

Пример: В пространстве R^1 зададим в качестве поля событий все конечные интервалы вида a≥x>b, b≠a.

Распространение этой алгебры на σ – алгебру приводит к понятию борелевской алгебры, элементы которой называются борелевскими множествами. Борелевская алгебра получается не только расширением поля вида a≥x>b, но и расширением полей вида a>x≥b, a≥x≥b.

Над наблюдаемым полем событий F задается счетно-аддитивная мера – числовая скалярная функция, элементами которой являются элементы поля F, т. е. события. Она удовлетворяет следующим трем условиям-аксиомам теории вероятностей.

1. $\forall A \in F \quad 0 \le P(A) \le 1$. P(A) – число, принадлежащее сегменту [0, 1] и называющееся вероятностью наступления события A.

2. P(A) ∈ [0, 1] P(U)=1.

3. Пусть имеется $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ – система попарно несовместных событий

$$\underset{i \neq j}{\forall} A_i \cdot A_j = \varnothing \quad \text{Если } A = \sum_{i=1}^{k} A_i \text{, то} \quad P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Теорема о продолжении меры

Построим минимальную σ – алгебру, которой принадлежит поле событий F (например, борелевская σ – алгебра – это минимальная σ – алгебра, которая содержит поле всех полуинтервалов ненулевой длины).

Тогда доказывается, что счетно-аддитивная функция P(A) однозначно распространяется на все элементы минимальной σ – алгебры и при этом ни одна из аксиом не нарушается.

Таким образом, продленное P(A) называется σ – аддитивной мерой.

σ – алгебра содержит ненаблюдаемые события наряду с наблюдаемыми.

Но в аксиоматической теории вероятностей считается, что может произойти любое событие из σ – алгебры.

Расширение поля наблюдаемых событий на σ – алгебру связано с невозможностью получить основные результаты теории вероятностей без понятия σ – алгебры.

Определение вероятностного пространства

Вероятностным пространством называется тройка (Ω, σ, P), где

Ω – пространство элементарных событий, построенное для данного испытания;

σ – σ-алгебра, заданная на Ω – системе возможных событий, которая интересует исследователя, в результате проводимых испытаний;

P – σ – аддитивная мера, т. е. σ – аддитивная неотрицательная функция, аргументами которой являются аргументы из σ – алгебры и удовлетворяющая трем аксиомам теории вероятностей.

1. $\forall A \in \sigma \quad P(A) \le 1$. P(A) – называется вероятностью наступления события A.

2. Вероятность достоверного события равна 1 P(Ω)=1.

3. Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей

$$P(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

$$\underset{i \neq j}{\forall} A_i \cdot A_j = V, \quad \forall A_i \in \sigma.$$

k – возможно бесконечное число.

<u>Следствие</u>:

Вероятность невозможного события равна 0.

По определению суммы имеет место неравенство Ω+V=Ω. Ω и V несовместные события.

По третьей аксиоме теории вероятностей имеем:

P(Ω+V)=P(Q)=P(U)=1

P(Ω)+P(V)=P(Ω)

1+P(V)=1

P(V)=1

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных событий Ω={E_1, E_2,..., E_m} тогда по определению $\Omega = \sum_{i=1}^{m} E_i$. Элементарные события несовместны, тогда по третьей аксиоме теории вероятностей имеет место $\sum_{i=1}^{m} P(E_i) = 1$

Пусть некоторое событие A⊂Ω состоит из k элементарных событий, тогда {E_{i1}, E_{i2},..., E_{ik}} $P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(E_{ij})$

Доказать: Если A⊂B, то P(B)≥P(A), B=A+C, A и C несовместны.

* Пусть B=A+C, A и B несовместны. Тогда по третьей аксиоме теории вероятностей P(B)=P(A+C)=P(A)+P(C) так как 1≥P(C)≥0 – положительное число, то P(B)≥P(A).

Классическое определение вероятности

Пусть Ω состоит из конечного числа элементарных событий и все элементарные события равновероятны, т. е. ни одному из них из них нельзя отдать предпочтения до испытания, следовательно, их можно считать равновероятными.

Тогда достоверное событие $U = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$ m – количество равновероятных событий

$$P(U) = \sum_{i=1}^{m} P(\omega_i), \qquad 1 = \sum_{i=1}^{m} P(\omega_i), \qquad \forall i \quad \mathrm{P}(\omega_\mathrm{i}) = \frac{1}{m}$$

Пусть произвольное событие $A = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij}$

Тогда $\boxed{P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\omega_{ij}) = \frac{k}{m}}$, т. е. событие A состоит из k элементарных событий.

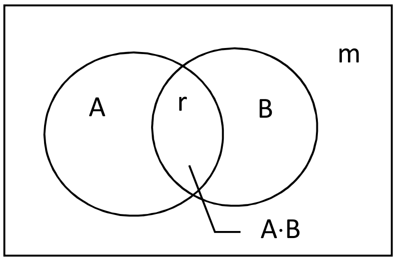
Если элементарные события являются равноправными, а, следовательно, и равновероятными, то вероятность наступления произвольного события равна дроби числитель которой равен числу элементарных событий, входящих в данное, а знаменатель – общее число элементарных событий.

Условная вероятность

P(A/B)

Условной вероятностью наступления события A, при условии события B, называется вероятность наступления события A в результате испытаний, если известно, что в это испытании произошло событие B.

Вывод формулы условной вероятности для случая равновероятных элементарных событий



Действительно, в данном испытании произошло одно из t событий, входящих в B. Все элементарные события равновероятны, следовательно, для данного испытания вероятность наступления произвольного элементарного события, входящего в B равна 1/t. Тогда по классическому определению вероятности, в данном испытании событие A произойдет с вероятностью r/t.

$$P(A/B)=\frac{r/m}{t/m}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\\&P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\\&P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)\end{aligned}}$$

В общем случае доказать эту формулировку невозможно, в теории вероятностей она вводится как правило. Существует лишь толкование этой формулы.

Обоснование формулы условной вероятности в общем случае

Пусть в n_B испытаниях произошло событие B, а в n_A испытаниях произошло событие A. Найдем условную частость наступления события A при условии, что произошло событие B. Мы можем сделать это для обоснования формулы, так как под вероятностью наступления события понимается предел частости наступления события при условии, что серия испытаний достаточно длинная.

Условная частость $\mathrm{Wn(A/B)} = \dfrac{n_{AB}}{n_B} = \dfrac{n_{AB}/n}{n_B/n} = \dfrac{W_n(AB)}{W_n(B)}$

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$$

Рассматривая AB как одно событие D имеем: $P(DC) = P(D) \cdot P(C/D)$ с другой стороны $P(D) = P(AB) = P(A) \cdot P(B/A)$

$$P(ABC) = P(DC) = P(D) \cdot P(C/D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/D) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$$

Рассмотрим систему событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Покажем, что вероятность их совместного наступления равна:

$$\boxed{P(A_1A_2...A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_k/A_1A_2...A_{k-1})}$$

Доказательство проведем по мат индукции.

Формула равна для 2 и 3 (см. ранее)

Пусть формула верна для k-1.

$$P(A_1A_2...A_{k-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{k-1}/A_1A_2...A_{k-2})$$

Введем событие B.

$\mathrm{B} = A_1A_2...A_{k-1}$

$P(A_1A_2...A_{k-1})=P(B)$

$P(A_1A_2...A_k)=P(A_kB)=P(B)\cdot P(A_kB)$

Независимые события

Два события A и B называются <u>независимыми</u>, если P(A/B)=P(A); P(B)=P(B/A) – доказать.

В этом случае вероятность наступления двух событий А и В равна P(AB)=P(B)P(A/B)=P(A)P(B), при этом покажем, что P(B/A)=P(B); P(AB)=P(B)P(A)=P(A)P(B/A)

События $A_1A_2...A_k$ называются <u>независимыми</u> между собой, если вероятность их совместного наступления $P(A_1A_2...A_k)=\prod_{i=1}^{k}P(A_i)$; $P(A_j/A_1A_2...A_{j-1})=P(A_j)$. Два независимых события совместны.

* Если бы события были несовместны, то P(A/B)=0 и P(B/A)=0, так как они независимы, то P(A/B)=P(A) и P(B/A)=P(B), т. е. утверждение “независимые события несовместны”, так как P(A)=0 и P(B)=0, то это утверждение неверно.

Формула сложения вероятностей

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$$

U – достоверное событие

$$U=A+B+\overline{A+B}=A+B+\overline{A}\cdot\overline{B}$$

Покажем, что события $A+B$ и $\overline{A}\cdot\overline{B}$ несовместны.

* Если события несовместны, то $(A+B)\cdot\overline{A}\cdot\overline{B}=0$;

$(A+B)\cdot\overline{A+B}=0$; т. е. события несовместны.

Тогда по третьей аксиоме теории вероятностей

$$P(A+B)+P(\overline{A+B})=1$$

$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B}) \qquad (1)$$

Справедливо следующее тождество на основании (1) и закона дистрибутивности

$$U=A+\overline{A}B+\overline{A}\cdot\overline{B}=A+\overline{A}(B+\overline{B})=A+\overline{A}\cdot U=A+\overline{A}=U$$

Показать самим, что все три множества попарно несовместны.

$$A\overline{A}B=(A\overline{A})B=VB=V$$

$$A\overline{A}\overline{B}=(A\overline{A})\overline{B}=V\overline{B}=V$$

$$\overline{A}B\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{A}(B\overline{B})=\overline{A}\overline{A}V=V$$

На основании первой и третьей аксиомы теории вероятностей получаем:

$$P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)-P(\overline{A}B)$$

$$P(A+B)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-1+P(A)+P(\overline{A}B)=P(A)+P(\overline{A}B)$$

Имеет место тождество $B + AB + \overline{A}\overline{B}$, показать самим, что AB и $\overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{\mathrm{B}}$ несовместны

$$AB\overline{A}\overline{B} = (A\overline{A})(B\overline{B}) = VV = V$$

По третьей аксиоме:

$$P(A + B) = P(A) + P(\overline{A}B)$$

$$P(\overline{A}B) = P(B) - P(AB)$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Для экзамена доказать самим формулу суммы произвольного числа событий

$$P(\sum_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i A_j) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k} P(A_i A_j A_l) - ...$$

Формула полной вероятности

Рассмотрим систему А из k попарно несовместных событий.

$B_1, B_2, ..., B_k$ $\quad \underset{i,\, j,\, i \neq j}{\forall} B_i B_j = V$

Пусть дано событие А, удовлетворяющее равенству $A=B_1A+B_2A+...+B_kA$.

Показать, что события B_1A, B_2A, B_kA попарно несовместны. $B_iAB_jA=B_iB_jAA=VAA=V$

Найти вероятность наступления события А. Любое событие входящее в А, обязательно входит в некоторое, но одно B_i, так как B_1, B_2, ..., B_k образуют полную группу.

Так как B_1, B_2, ..., B_k несовместны, то по третьей аксиоме теории вероятностей имеем:

$$P(A) = P(\sum_{i=1}^{k} B_i A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$; т. е.

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

Например: Имеются урны трех составов

5 урн	6 белых и 3 черных шара
3 урны	10 белых и 1 черный
7 урн	0 белых и 10 черных

Все шары в каждой урне перемешаны.

Испытание – извлекается шар. Какая вероятность того, что при этом будет извлечен белый шар.

B_1 – Вытащить любой шар из урны 1.

B_2 – Вытащить любой шар из урны 2.

B_3 – Вытащить любой шар из урны 3.

A – Извлечь белый шар.

$A=B_1A+B_2A+B_3A$

B_1, B_2, B_3 – попарно несовместны.

Формула полной вероятности:

$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)$

$P(B_1)=1/3$ $\quad$ $P(A/B_1)=6/9=2/3$

$P(B_2)=1/5$ $\quad$ $P(A/B_2)=10/11$

$P(B_3)=7/15$ $\quad$ $P(A/B_3)=0$

$P(A)=1/3\cdot 2/3+1/5\cdot 11/10+7/15\cdot 0=2/9+2/11=40/99\approx 0.4.$

Формула Байеса

Постановка задачи та же, но решаем обратную задачу.

Проводится испытание, в результате которого произошло событие A. Какова вероятность того, что в этом испытании произошло событие B_i.

Условные вероятности называются апостериорными, а безусловные – априорными вероятностями.

$P(AB_i)=P(A)P(B_i/A)=P(B_i)P(A/B_i)$

Откуда, $P(B_i / A) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)}$

Таким образом, формула Байеса: $\boxed{P(B_i / A) = \dfrac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)}}$

Композиция испытаний

Имеется вероятностное пространство, которое порождает испытание 1.

$$\begin{Bmatrix} E_1, & E_2, & ..., E_{m1} \\ P(E_1), & P(E_2), & ..., P(E_{m1}) \end{Bmatrix}$$

где E_i, $i=1, ..., m_1$ – пространство элементарных событий в результате испытания.

$P(E_i)$, $i=1, ..., m_1$ – вероятности элементарных событий.

Испытание 2 порождает вероятностное пространство вида

$$\begin{Bmatrix} Q_1, & Q_2, & ..., Q_{m2} \\ P(Q_1), & P(Q_2), & ..., P(Q_{m2}) \end{Bmatrix}$$

$P(E_i)$, $P(Q_j)$ – разные вероятностные меры.

<u>Композицией</u> двух испытаний называется сложное испытание, состоящее в поведении первого и второго испытания.

Композиция испытаний порождает вероятностное пространство вида:

$$\begin{Bmatrix} E_i Q_j \\ P(E_i Q_j) \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} i = 1..m1 \\ j = 1..m2 \end{matrix}$$

E_iQ_j – композиционное событие.

В общем случае по $P(E_i)$ и $P(Q_j)$ найти $P(E_iQ_j)$ невозможно.

Рассмотрим один частный случай, когда это можно сделать.

Два испытания называются <u>независимыми</u>, если различные исходы обоих испытаний определяются несвязанными между собой случайными факторами.

Из определения независимости испытания вытекает, что условные частости наступления события в одном испытании, при условии, что во втором испытании произошло фиксированное число событий равны безусловным частостям, если они существуют.

Пусть испытания независимы. В результате проведения первого испытания произошло элементарное событие E_i, в результате второго испытания может произойти все что угодно.

Тогда сложное событие, определяющее исход первого и второго испытания имеет вид:

$A = \{E_iQ_1, E_iQ_2, ..., E_iQ_{m2}\} = \sum_{j=1}^{m2} E_iQ_j$ и равно сумме комбинаций исходов первого и второго испытаний.

Вероятность сложного события А.

$P(A)=\sum_{j=1}^{m2}P(E_iQ_j)=P(E_i)$, т. е. результаты второго испытания не зависят от результатов первого.

Если в результате второго испытания произошло событие Q_j, а в результате первого испытания могло произойти все что угодно, то сложное событие В имеет вид: $B=\{E_1Q_j, E_2Q_j, ..., E_{m1}Q_j\}$.

Вероятность сложного события В равна сумме вероятностей комбинаций вида E_iQ_j, i=1, ..., m1

$P(B)=\sum_{j=1}^{m1}P(E_iQ_j)=P(Q_j)$, так как исходы первого испытания не влияют на исходы второго испытания. Из факта: P(AB)=P(A)P(B/A); P(B/A)=P(B); $AB=E_iQ_j$ (надо доказать)

$A=\{E_iQ_1, E_iQ_2, ..., E_iQ_j, ..., E_iQ_{m2}\}$

$B=\{E_1Q_j, E_2Q_j, ..., E_iQ_j, ..., E_{m1}Q_j\}$

По определению произведения АВ в него входят только те события, которые входят и в А, и в В. Из приведенных выше формул следует, что только событие E_iQ_j входит и в А, и в В, то $AB=E_iQ_j$. Следует:

$$\boxed{P(AB)=P(E_iQ_j)=P(E_i)P(Q_j)}$$

Композиционное пространство имеет вид: $\left\{\begin{matrix} E_iQ_j \\ P(E_i)P(Q_j) \end{matrix}\right\}$

Общая структура независимых событий в композиционном пространстве, порожденном композицией испытаний:

$$A=\sum_{l=1}^{s1}\sum_{j=1}^{m2}E_{i_l}Q_j$$

т. е. в результате первого испытания произошли элементарные события: $E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_{s1}}$.

В результате второго испытания события: $Q_1, Q_2, ..., Q_{m1}$.

Сложное событие В определяет все возможные комбинации исходов двух испытаний независимо друг от друга. В результате первого испытания произошли элементарные события: $E_1, \mathrm{E}_2, ..., \mathrm{E}_{m1}$.

В результате второго испытания события: $Q_{i_1}, Q_{i_2}, ..., Q_{i_{s2}}$.

Тогда: $B = \sum_{i=1}^{m1}\sum_{t=1}^{s2} E_i Q_{j_t}$

$P(A) = \sum_{l=1}^{s1}\sum_{j=1}^{m2} P(E_{i_l} Q_j) = \sum_{l=1}^{s1} P(E_{i_l})$, так как второе испытание не влияет на результаты первого.

$P(B) = \sum_{i=1}^{m1}\sum_{t=1}^{s2} P(E_i Q_{j_t})$

так как $AB = \sum_{l=1}^{s1}\sum_{t=1}^{s2} E_{i_l} Q_{j_t}$, (надо доказать)

то $P(AB) = \sum_{l=1}^{s1}\sum_{t=1}^{s2} P(E_{i_l} Q_{j_t}) = \sum_{l=1}^{s1} P(E_{i_l}) \cdot \sum_{t=1}^{s2} P(Q_{j_t}) = P(A)P(B)$

При решении практических задач, связанных с независимыми испытаниями обычно не требуется строить композиционных пространств элементарных событий, а использовать формально неверную запись: $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$.

Композиция n испытаний

Имеется n испытаний. Зададим для i-го испытания вероятностное пространство:

$$\begin{Bmatrix} E_1^i, & E_2^i, & ..., E_{mi}^i \\ P(E_1^i), & P(E_2^i), & ..., P(E_{mi}^i) \end{Bmatrix} \quad i=1, ..., n$$

<u>Композицией n испытаний</u> называется сложное испытание, состоящее в совместном проведении n испытаний. Задается n испытаний, вероятностное пространство каждого из которых имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} E_1^i, & E_2^i, & ..., E_{mi}^i \\ P(E_1^i), & P(E_2^i), & ..., P(E_{mi}^i) \end{Bmatrix} \quad i=1, ..., n$$

Композиционное пространство имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} E_{j_1}^1, E_{j_2}^2, ..., E_{j_n}^n \\ P(E_{j_1}^1 E_{j_2}^2 ... E_{j_n}^n) \end{Bmatrix} \quad j_1=1, ..., m_1;\ j_2=1, ..., m_2;\ j_n=1, ..., m_n;$$

Композиция n независимых испытаний

Испытания (n – испытаний) называются независимыми, если неоднозначность исхода каждого из испытаний определена не связанными между собой группами факторов.

Событие A_1: в результате проведения композиционного испытания в первом испытании произошло событие $E^1_{j_1}$. Тогда

$$A_1 = \sum_{j_2=1}^{m_2}\sum_{j_3=1}^{m_3}...\sum_{j_n=1}^{m_n} E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n}$$

Событие A_n: в результате проведения композиционного испытания в первом испытании произошло событие $E^1_{j_n}$. Тогда

$$A_n = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}...\sum_{j_{n-1}=1}^{m_{n-1}} E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n}$$

$$P(A_1) = P(\sum_{j_2=1}^{m_2}\sum_{j_3=1}^{m_3}...\sum_{j_n=1}^{m_n} E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n}) = \sum_{j_2=1}^{m_2}\sum_{j_3=1}^{m_3}...\sum_{j_n=1}^{m_n} P(E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n})$$

$$P(A_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{m_2}...\sum_{j_{n-1}=1}^{m_{n-1}} P(E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n})$$

$P(A_i) = P(E^i_{j_i})$ i=1, ..., n

Рассмотрим событие: $A_1A_2...A_n = E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n}$

В силу определения независимости испытаний очевидно, что:

$$P(A_1) = P(E^1_{j_1})$$

$$P(A_2 / A_1) = P(A_2) = P(E^2_{j_2})$$

$$P(A_3 / A_1A_2) = P(A_3) = P(E^3_{j_3})$$

$$P(A_n / A_1A_2...A_{n-1}) = P(A_n) = P(E^n_{j_n}).$$

Следовательно: $P(E^1_{j_1}E^2_{j_2}...E^n_{j_n}) = \prod_{i=1}^{n} E^i_{j_i}$.

На практике не строят композиционных пространств, а записывают формально неправильную формулу: $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$.

Композиционное пространство имеет вид:

$$\left\{\begin{matrix} E^1_{j_1}, E^2_{j_2}, ..., E^n_{j_n} \\ P(E^1_{j_1})P(E^2_{j_2})...\mathrm{P}(E^n_{j_n}) \end{matrix}\right\} \; j_1=1, ..., m_1;\; j_2=1, ..., m_2;\; j_n=1, ..., m_n;$$

Общая структура независимых событий в композиционном пространстве имеет вид:

1-е событие – это событие, которое происходит в 1-м вероятностном пространстве

2-е событие – это событие, которое происходит во 2-м вероятностном пространстве

n-событие – это событие, которое происходит в n-м вероятностном пространстве

Рассмотрим два вероятностных пространства.

I

$$\left\{\begin{matrix} E_1, & E_2, & E_3, & E_4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}\right\}$$

II

$$\left\{\begin{matrix} E_1, & E_2, & E_3, & E_4 \\ 0{,}01 & 0{,}02 & 0{,}96 & 0{,}01 \end{matrix}\right\}$$

Очевидно, что неопределенность испытания до испытания в первом вероятностном пространстве выше, чем во втором. Действительно, до испытания в I нельзя ни одному из событий отдать предпочтения, а во II событие E_3 происходит чаще.

<u>Энтропия</u> – мера неопределенности исхода испытания (до испытания).

Первым, кто функционально задал выражение для энтропии был Шеннон.

$$\left\{\begin{matrix} \omega_1, & \omega_2, & ..., & \omega_s \\ P(\omega_1), & P(\omega_2), & ..., & P(\omega_s) \end{matrix}\right\}, \qquad \boxed{H = -\sum_{i=1}^{s} P(\omega_i)\log_2 P(\omega_i)}$$

Для вероятностного пространства:

$$\left\{\begin{matrix} E_1, E_2, ..., E_s \\ p_1, p_2, ..., p_s \end{matrix}\right\}$$

Энтропия задается выражением: $H = -\sum_{i=1}^{s} P_i \log_2 P_i$. Если $P_1 = 0$, то $P_i \cdot \log Pi = 0$.

Самим показать, что:

Если вероятностное пространство не имеет определенности, т. е. какое-то из $P_i=1$, а остальные равны 0, то энтропия равна нулю.

Если элементарный исход равновероятен, т. е. $\forall P_i = 1$, то энтропия принимает максимальное значение.

$0 \le P_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{s} P_i = 0$

1) $\Omega = \begin{Bmatrix} E_1, E_2, ..., E_i, ..., E_s \\ 0 \quad 0 \quad\quad 1 \quad\quad 0 \end{Bmatrix}$

$$H(\Omega) = -[0\log_2 0 + 0\log_2 0 + ... + 1\log_2 1 + ...] = -1\log 1 = 0,$$

$\lim_{p \to 0} p \log_2 p = 0$

т.о. вероятности $p_1, p_2, ..., p_s$ обращаются в ноль, например p_i, которая равна 1. Но log1=0. Остальные числа также обращаются в 0, так как $\lim_{p \to 0} p \log_2 p = 0$.

2) Докажем, что энтропия системы с конечным числом состояний достигает максимума, когда все состояния равновероятны. Для этого рассмотрим энтропию системы как функцию вероятностей $p_1, p_2, ..., p_s$ и найдем условный экстремум этой функции, при условии, что $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$.

Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, будем искать экстремум функции: $F = -\sum_{i=1}^{s} p_i \log_2 p_i + \lambda \sum_{i=1}^{s} p_i$.

Дифференцируя по $p_1, p_2, ..., p_s$ и приравнивая производные нулю получим систему:

$$\log_2 p_i + \log_2 e + \lambda = 0 \qquad i=1, ..., s$$
$$\log_2 p_i = -\lambda - \log_2 e$$

Откуда видно, что экстремум достигается при равных между собой p_1.

Так как $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$, то $p_1 = p_2 =, ..., = p_s = 1/s$.

Единицей измерения энтропии является энтропия вероятностного пространства вида: $\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Bmatrix}$

$$-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = -\log_2\frac{1}{2} = \log_2\left(2^{-1}\right)^{-1} = \log_2 2 = 1,$$ которая называется 1 бит.

Неопределенность исхода испытания до испытания автоматически определяет информативность исхода испытания после испытания. Поэтому в битах также измеряется информативность исхода.

Рассмотрим два вероятностных пространства:

$$\Omega_1 : \begin{Bmatrix} E_1, E_2, ..., E_{s1} \\ p_1, p_2, ..., p_{s1} \end{Bmatrix} \qquad \Omega_2 : \begin{Bmatrix} Q_1, Q_2, ..., Q_{s2} \\ q_1, q_2, ..., q_{s2} \end{Bmatrix}$$

Проводим композицию двух испытаний. Композиционное пространство имеет вид:

$$\Omega_1 \times \Omega_2 = \begin{Bmatrix} E_i Q_j \\ P(E_i Q_j) \end{Bmatrix} \qquad i=1, ..., s_1 \qquad j=1, ..., s_2$$

С точки зрения качественного анализа максимальная энтропия композиционного вероятностного пространства достигается тогда, когда испытания независимы. Найдем энтропию композиционного пространства для случая независимых испытаний.

$$-\sum_{i=1}^{s1}\sum_{j=1}^{s2} p_i q_j \log_2 p_i q_j = \sum_{i=1}^{s1} p_i \log_2 p_i \cdot \sum_{j=1}^{s2} q_j - \sum_{i=1}^{s1} p_i \cdot \sum_{j=1}^{s2} q_j \log_2 q_j = H(\Omega_1) + H(\Omega_2)$$

$$0 \le H(\Omega_1 \times \Omega_2) \le H(\Omega_1) + H(\Omega_2)$$

Биномиальное распределение

n испытаний называются <u>системой испытаний Бернулли</u>, если испытания независимы, в каждом из них происходит событие A, либо $\overline{A}$ с вероятностью наступления $P(A) = p$; $P(\overline{A}) = q = 1 - p$

Найдем вероятность того, что в результате проведенных n испытаний событие А произошло m раз:

$P_n(m) - ?$

Рассмотрим композицию n независимых испытаний и построим композиционное пространство элементарных событий.

Общий вид элемента этого пространства следующий:

$$A^{\alpha_1} \cdot A^{\alpha_2} \cdot A^{\alpha_3} \dots A^{\alpha_n}$$

где

$$A^1 = A$$

$$\alpha_i = \{0,1\}$$

$$\alpha_i = 0 \text{ э”} \quad \overline{A}$$

При этом вероятность наступления такого события равна:

$$p^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \cdot q^{n-\sum\alpha_i}$$ (умножение при независимых событиях)

Найдем вероятность наступления любого элементарного события из композиционного пространства:

$$P \cdot \left(A^{\alpha_1} \cdot A^{\alpha_2} \dots A^{\alpha_n}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A^{\alpha_j}\right) = p^m \cdot q^{n-m}$$

Рассмотрим в композиционном вероятностном пространстве событие: в n испытаниях событие А произошло m раз.

Событие А состоит из C_n^m – общее кол-во элементарных событий, в которое входит событие А. А произошло m раз, $\overline{A}$ – n-m раз. Вероятность каждого из этих элементарных событий одинакова и равна:

$$p^n \cdot q^{n-m}$$

Следовательно, на основании III аксиомы теории вероятностей результат равняется:

$$\boxed{P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}}$$ (сложение вероятностей)

$$C_n^m \; \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть имеется вероятностное пространство вида (Ω, σ, ρ).

Случайной величиной называется измеримая числовая скалярная функция $\varphi(\omega)$, элементами которой являются элементарные события.

Числовая скалярная функция – это функция, удовлетворяющая следующему условию:

$\forall x$ событие $\{\omega : \gamma(\omega) < \xi\} \in \sigma$ – алгебре и, следовательно, имеет вероятность наступления.

Если произведено испытание, в результате которого произошло некоторое элементарное событие $x, x \in \Omega$. В соответствии с функцией $\varphi(\omega)$ этому элементарному событию соответствует число, которое называется реализацией случайной величины x в данном испытании.

В соответствии с определением случайной величины вводится числовая скалярная функция F(x), $x \in \Omega$, определенная для каждого действительного x и по определению равная вероятности наступления события:

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x) = P(\omega\text{:}\ \gamma(\omega) \triangleleft x) \\ 0 \le F(x) \le 1 \end{array}}$$

Эта функция называется функцией распределения случайной величины $\varphi(\omega)$.

Рассмотрим три события:

$A_1 = \{\omega\text{:}\ \gamma(\omega) \triangleleft b$

$A_2 = \{\omega\text{:}\ \gamma(\omega) \triangleleft a\}$

$A_3 = \{\omega\text{:}\ a \le \gamma(\omega) \triangleleft b\}$

где a<b, a, b – действительные числа.

Свойства:

$A_2 \cdot A_1 = A_3$; $A_1 = A_2 + A_3$

Покажем, что из факта

$A_2 \subset \sigma$–алгебре

$A_1 \subset \sigma$–алгебре

и равенства $A_1 = A_2 + A_3$ следует, что $A_3 \subset \sigma$.

$A_1 = A_2 + A_3$

$A_3 = A_1 \cdot \overline{A_2}$

По определению σ – алгебры A_3 измерима, поэтому можно принять III аксиому теории вероятностей:

$\mathrm{F}(\mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{a}) + \mathrm{P}(\mathrm{a} \le \gamma(\omega) \lhd \mathrm{b})$

$\forall \mathrm{a}, \mathrm{b};\ \mathrm{a} \ne \mathrm{b}$

$\mathrm{P}(\mathrm{a} \le \gamma(\omega) \lhd \mathrm{b}) = \mathrm{F}(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})$

$\mathrm{F}(-\infty) = 0$

$\mathrm{F}(+\infty) = 1$

F(x) – неубывающая функция

Если x<y, то

$\mathrm{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{P}(\omega\!:\ \gamma(\omega) \lhd \mathrm{y}) = \mathrm{P}(\omega\!:\ \gamma(\omega) \lhd \mathrm{x}) + \mathrm{P}(\omega\!:\ \mathrm{x} \le \gamma(\omega) \lhd \mathrm{y}) \ge \mathrm{P}(\omega\!:\ \gamma(\omega) \lhd \mathrm{x}) = \mathrm{F}(\mathrm{x})$

так как $0 \le \mathrm{P}(\omega\!:\ \gamma(\omega) \lhd \mathrm{x}) \le 1$, то преобразования верны.

Для всех технических приложений функцию распределения можно считать направленной слева.

В силу того, что функция распределения не убывает, она однозначно задает счетно-аддитивную меру на поле, порожденном всеми полуинтервалами ненулевой длины.

По введенному полю построим борелевскую алгебру. Обозначим ее β. Возьмем произвольное число B ⊂ β, не принадлежащее полю. Это точка или сегмент. Так как множество $\{\omega\!:\ \xi(\omega) \in \mathrm{B}\}$ получено с помощью счетной суммы или счетного пересечения множеств принадлежащих σ-алгебре, то и это множество принадлежит σ-алгебре и, следовательно, существует вероятность наступления события B. Следовательно, имеет место следующее эквивалентное определение измеримой функции.

Функция $\xi(\omega)$ называется измеримой, если для любого B⊂β множество

$A = \xi^{-1}() \in \sigma$ - алгебре

где $A = \{\omega : w = x^{-1}(B)\}, \forall x \in B$

$\xi^{-1}(B)$ множество, полученное следующим образом:

$\gamma(\omega) = x \Rightarrow \omega = \xi^{-1}(x)$

Функция g(x) называется борелевской функцией, если для любого $B \subset \beta$ множество

$$g^{-1}(B) = \{x = g^{-1}(y), \forall y \in B\}$$

<u>Борелевская функция</u> – функция, определяемая на системе борелевских множеств.

В функциональном анализе показано, что все известные аналитические функции являются борелевскими.

ТЕОРЕМА:

Пусть g(x) борелевская функция, $\gamma(\omega)$- случайная величина, т. е. измеримая функция. Тогда функция

$$\eta(\omega) = g(\gamma(\omega))$$

является измеримой и, следовательно, случайной величиной.

Берем произвольное $B \subset \beta$. $B_1 = g^{-1}(B)$ по определению борелевской функции.

Рассмотрим множество

$$A = \gamma^{-1}(B_1) = \{\omega = \gamma^{-1}(x), \forall x \in B_1\}$$

так как $\gamma(B_1)$ измеримая функция и $B_1 \in \beta$, то $A \subset \sigma$-алгебре.

Следовательно, функция $\eta(\omega) = g(\gamma(\omega))$ – измеримая функция, т. е. случайная величина.

Теорема Колмогорова

Любая числовая скалярная функция, которая удовлетворяет свойствам, которым удовлетворяет функция распределения, является функцией распределения и однозначно задает вероятностное пространство вида:

$$(R^1, \beta, P)$$

β – борелевская алгебра;

P – мера на борелевской алгебре;

R^1 – числовая скалярная ось.

Введем функцию F(x)

$$F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$$

Эта функция определена для всех x, неубывающая, непрерывная сверху. Показать самим, что такая функция однозначно задает счетно-аддитивную меру на поле, порожденном всеми полуинтервалами ненулевой длины.

Докажем, что 0<F(x)<1

Согласно терминологии, если функция y=f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она ограничена. Поскольку наша функция не убывающая, то максимум и минимум она соответственно будет иметь такой:

$$\min = F(-\infty) = 0; \max = F(+\infty) = 1$$

т. е. 0<F(x)<1.

2. Пусть имеем следующие функции.

Построим борелеву алгебру на поле, тогда по теореме о продолжении счетно-аддитивная функция, определенная на поле, без изменения аксиом теории вероятностей, однозначно распространяется на все элементы борелевой алгебры, не принадлежащие полю. Т.о. вероятностное пространство построено, теорема доказана.

Смысл теоремы.

Теорема Колмогорова позволяет утверждать, что если вы исследуете случайную величину, то не надо строить абстрактное пространство элементарных событий, σ-алгебру, счетно-аддитивную меру, конкретный вид функции $\gamma(\omega)$. Нашей задачей будет лишь то, что считая R^1 – числовой скалярной осью – пространство элементарных событий, мы должны найти функцию распределения F(x), использую статистику: результата конкретного испытания над случайной величиной:

$X_1, X_2, ..., X_n$

Дискретные случайные величины

Случайная величина называется дискретной, если в результате испытания она может принять значение из конечного либо счетного множества возможных числовых значений.

Случайные величины в дальнейшем будем обозначать большими буквами:

X, Y, Z

Вероятностное пространство дискретной случайной величины задается в виде:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ p_1, p_2, ..., p_n \end{Bmatrix},$$ n – конечное или бесконечное.

Пример:

Испытание – композиция n-независимых испытаний, в каждом из которых происходит событие А с вероятностью р, либо $\overline{A}$ с вероятностью 1-р.

Вероятностное пространство

$$\left\{A^{\alpha_1}, A^{\alpha_2}, ..., A^{\alpha_n}\right\}$$

$$P\left\{A^{\alpha_1}, A^{\alpha_2}, ..., A^{\alpha_n}\right\} = \prod_{j=1}^{n} P\left(A^{\alpha_j}\right) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

В этом примере σ-алгеброй является множество всех подмножеств пространства элементарных событий. Введенную нами случайную величину х по определению можно задать:

$$X = \begin{Bmatrix} & 0 & 1 & 2 & m & n \\ q^n & C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1} & C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2} & C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} & p^n & \end{Bmatrix}$$

– верхняя строчка – это совокупность возможных числовых значений, которые может принимать случайная величина;

– нижняя строчка – вероятность наступления этих числовых значений.

Практически во всех задачах естествознания отсутствует промежуточный этап: испытание, Ω – пространство всех возможных исходов испытания, $\gamma(\omega)$– числовая скалярная функция, элементы которой $\omega \subset \Omega$.

На самом деле структура:

– испытание;

– исход испытания;

– число на числовой оси.

Вероятностные характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием случайной величины X называется число вида

$$MX = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot p_i$$

x_i – все возможные различные конкретные исходы испытания;

p_i – вероятности их наступления.

Математическое ожидание является как бы аналогом центра масс точечной механической системы:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1, x_2, ..., x_s \\ p_1, p_2, ..., p_s \end{Bmatrix}$$

Как центр масс:

$$MX = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_s \cdot p_s}{p_1 + p_2 + p_3 + ... p_s}$$

где $p_1 + p_2 + p_3 + ... p_s = 1$,

$$MX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + ... + x_s \cdot p_s = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot p_i$$

Смысл характеристики мат. ожидания заключается в следующем: это точка на числовой оси, относительно которой группируются результаты конкретных испытаний над дискретной случайной величиной.

Свойства математического ожидания

1. MC=C

$$X = \begin{Bmatrix} C \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow C \cdot 1 = C$$

2. MCX=CMX

Построим таблицу для случайной величины CX:

$$CX = \begin{Bmatrix} C \cdot x_1 & C \cdot x_2 & ... & C \cdot x_n \\ p_1 & p_2 & ... & p_n \end{Bmatrix}$$

по определению математического ожидания:

$$MCX = \sum_{i=1}^{n} Cx_i \cdot p_i = C \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = CMX$$

3. M(X+a)=MX+a, a=const

Построим таблицу для случайной величины x+a

$$X + a = \begin{Bmatrix} X_1 + a & X_2 + a & \dots & X_n + a \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix}$$

$$M(X + a) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + \sum_{i=1}^{n} a \cdot p_i = MX + a \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right] = MX + a$$

Доказать следствие

4. M(aX+b)=aMX+b, где a, b - константы

$$aX + b = \begin{Bmatrix} a \cdot x_1 + b & a \cdot x_2 + b & \dots & a \cdot x_n + b \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix}$$

$$M(a \cdot X + b) = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot x_i + b) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} a \cdot x_i \cdot p_i + \sum_{i=1}^{n} b \cdot p_i = a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = a \cdot MX + b$$

Пусть случайная величина Y является функцией f(x) от случайной величины X. Построим вероятностное пространство случайной величины Y.

$Y = f(x)$

$$\begin{Bmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{Bmatrix}$$

Верхняя строчка является пространством элементарных событий для случайной величины Y. В противном случае верхняя строчка является пространством элементарных событий для величины Y.

Все одинаковые числа в верхней строчке заменяется одним, вероятность наступления которого равна сумме соответствующих вероятностей.

Следствие.

<u>Математическое ожидание</u> случайной величины Y равняется:

$$MY = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot p_i$$

$$i = \overline{1, n}$$

<u>Начальным моментом К-го</u> порядка случайной величины X называется математическое ожидание случайной величины X^k.

$$\nu_k = MX^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i$$

<u>Центрированная случайная величина</u> – это величина, равная X'=X-MX

Покажем, что математическое ожидание MX' равно 0.

$$1)\ MX© = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M \cdot x_i\right) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i - MX \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = MX - MX = 0$$

$$2)\ M \cdot \left(X - MX\right) = MX - MX = 0$$

<u>Центральным моментом К-го</u> порядка называется начальный момент К-го порядка случайной величины X'

$$\hat{\mu}_k = M(X')^k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - MX\right)^k \cdot p_i$$

при решении реальных задач практические вероятности p_i неизвестны, но считая, что вероятность – это частость, при большом числе испытаний

$$\hat{\nu}_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \frac{n_i}{n}$$

$$\hat{\mu}_k = \sum_{i=1}^{s} \left(x_i - \hat{\nu}\right)^k \frac{n_i}{n}$$

<u>Дисперсией случайной величины X</u>, называется центральный момент второго порядка случайной величины X.

$$DX = \mu_2 = \sum_{i=1}^{s} \left(x_i - \nu\right)^2 \cdot p_i$$

Дисперсия является мерой концентрации результатов конкретных испытаний над случайной величиной X.

<u>Свойства</u>.

1. Чем меньше дисперсия, тем более тесно группируются результаты конкретных испытаний относительно математического ожидания.

Пусть дисперсия мала, тогда мало каждое слагаемое суммы $(x_i - \nu)^2 p_i$. Тогда для , x_i которое по модулю резко отличается от математического ожидания ν, p_i – мало. Следовательно, большую вероятность наступления могут иметь лишь те x_i, которые по модулю мало отличаются от математического ожидания.

2. Если дисперсия равна 0, то X – const.

$$DX = 0$$

$$\sum_{i=1}^{s} \left(x_i - \nu\right)^2 \cdot p_i = 0 \Leftrightarrow x_i - \nu = 0 \Rightarrow x_i = \nu \Rightarrow M \cdot x_i = x_i \Rightarrow x_i = C = \text{const}$$

3.

D(X+C)=DX

Y=X+C

Y'=Y–MY=X+C–M(X+C)=X+C–MX–C=X–MX=X'

$DY=M(Y')^2=M(X')^2=DX$

4.

$DCX=C^2DX$

Y=CX

$DY= M(Y')^2=M(Y')^2$

Y'=Y–MY=CX–MCX=CX–MCX=C(X–MX)=CX'

$DY= M(Y')^2=M(CX')^2=C^2M(X')^2=C^2DX$

5.

$$DX = \nu_2 - \nu_1^2$$

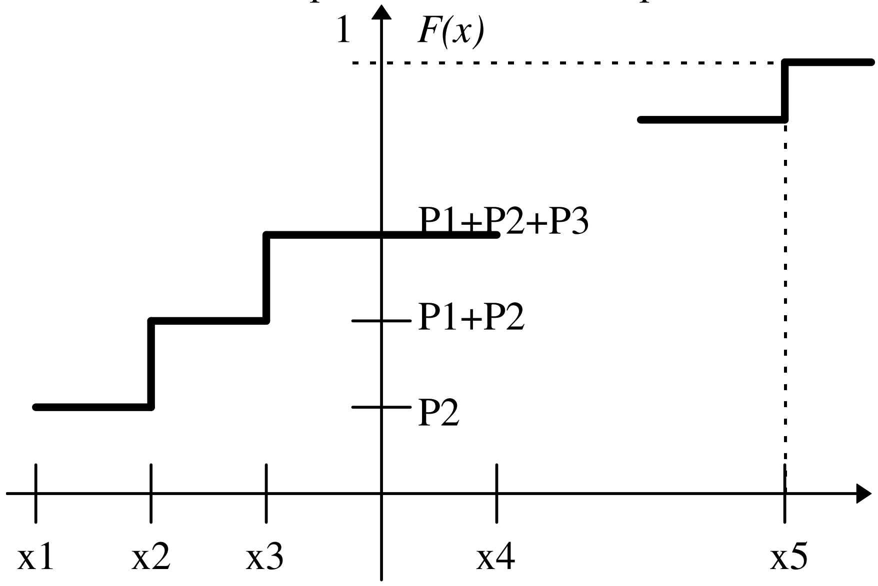
$$DX = \sum_{i=1}^{s}(x_i - \nu_1)^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 \cdot p_i - \nu_1 \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot p_i + \nu_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{s} p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 \cdot p_i - \nu_1 \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot p_i = \nu_2 - \nu_1^2$$

Построим функцию распределения для дискретной случайной величины. Для удобства договоримся, что случайные величины располагаются в порядке возрастания.

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_s \\ p_1 & p_2 & \dots & p_s \end{Bmatrix}$$

$$F(x) = P(X < x)$$

т. е. по определению для любого действительного X, F(x) численно равно вероятности наступления следующего события: в результате испытаний над X оно приняло значение строго меньше x.



Производная функция

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_s \\ p_1 & p_2 & \dots & p_s \end{Bmatrix}$$

Характеристической функцией случайной величины X называется функция действительного аргумента вида $Me^{\sqrt{-1}Xt} = \sum_{i=1}^{s} e^{\sqrt{-1}X_i t} \cdot p_i$

Производящей функцией называется скалярная функция вида:

$$\boxed{m_x(t) = Me^{Xt}}$$

Свойства производящей функции

1. $m_x(t) = Me^{Xt} = \sum_{i=1}^{s} e^{Xt} \cdot p_i$

2.

$$\frac{d^k \cdot m_x(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} = \nu_k$$

$$\frac{d^k \cdot e^{x_i \cdot t}}{dt^k} = x_i^k \cdot e^{x_i t}$$

$$\frac{d^k \cdot \sum e^{x_i t} \cdot p_i}{dt^k} = \sum_{i=1}^{s} x_i^k \cdot e^{x_i t} \cdot p_i$$

$$\sum_{i=1}^{s} x_i^k \cdot e^{x_i t} \cdot p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i^k \cdot 1 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{s} x_i \cdot p_i = \nu_k$$

3. Разложение производящей функции в ряд Маклорена имеет вид

$$m_x(t) = 1 + \frac{\nu_1}{1!} t + \frac{\nu_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{\nu_k}{k!} t^k + \dots$$

Формула Тейлора имеет вид

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F©(t_0) \cdot (t - t_0)}{1!} + \frac{F''(t_0) \cdot (t - t_0)^2}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} F^{(n)}(t_0) \cdot (t - t_0)^n + \dots$$

при to=0 она носит название формулы Маклорена

$$F(t_0) = F(0) = \sum_{i=1}^{s} e^{x_i \cdot t} \cdot p_i \big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{s} p_i = 1$$

$$F'(t_0)\big|_{t=0} = \nu_1$$

$$F''(t_0)\big|_{t=0} = \nu_2$$

$$F(t) = 1 + \frac{\nu_1}{1!} t + \frac{\nu 2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{1}{n!} \nu_n \cdot t^n + \ldots$$

Пример:

Рассмотрим случайную величину, распределенную по биноминальному закону распределения:

$$X = \begin{Bmatrix} i, i = \overline{0, n} \\ C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i} \end{Bmatrix}$$

Найдем производящую функцию:

$$m_x(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{it} \cdot C_n^i \cdot p^i \cdot q^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot \left(e^t \cdot p\right)^i \cdot q^{n-i} = \left[(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot b \cdot a^{n-1} + \ldots + C_n^i \cdot b \cdot a^{n-i} + \ldots + b_n\right] =$$
$$= \left(e^t \cdot p + q\right)^n$$

Найти DX и MX

$$\nu_1 = MX = \frac{dm_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{d\left(e^t p + q\right)^n}{dt} = n\left(e^t p + q\right)^{n-1} \cdot pe^t\big|_{t=0} = n(p + 1 - p)^{n-1} \cdot p = np$$

$$\nu_2 = \frac{d^2 m_x(t)}{dt^2} = \frac{d^2\left(e^t p + q\right)^n}{dt} = \frac{dn\left(e^t p + q\right)^{n-1} \cdot pe^t}{dt} =$$
$$= np\left[e^t \cdot (n-1)\left(e^t p + q\right)^{n-2} \cdot pe^t + \left(e^t p + q\right)^{n-1} \cdot e^t\right] = np\left[e^{2t} p(n-1)\left(e^t p + q\right)^{n-2} + e^t\left(e^t p + q\right)^{n-1}\right]\Big|_{t=0} =$$
$$= np\left[p(n-1)(p+q)^{n-2} + (p+q)^{n-1}\right] = n^2 p^2 - np^2 + np$$

$$DX = \nu_2 - \nu_1^2 = n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Первая модель распределения Пуассона

Проведена неограниченно большая серия испытаний, в результате каждого испытания случайным образом появляется точка на числовой оси. Случайное распределение точек на числовой оси удовлетворяет следующим трем свойствам.

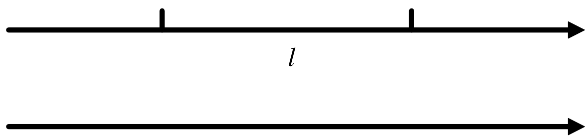
1. Стационарность. Вероятность того, что на отрезок данной длины попадает данное количество точек определяется только длиной

этого отрезка и не зависит от расположения этого отрезка на числовой оси.

2. <u>Ординарность</u>. Вероятность того, что на достаточно малый отрезок длины Δx попадает одна точка, является бесконечно малой Δx порядка. Вероятность того, что на этот отрезок попадает более, чем одна точка, является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

3. <u>Свойство без последействия</u>. Вероятность того, что на данный отрезок попало определенное количество точек не зависит от того, сколько точек в результате проведенной бесконечно серии испытаний попало на отрезок, не пересекающийся с данным.

Найти вероятность того, что на данный отрезок длина l попадает m точек.



Обозначим через x^l – случайная величина, равная численности точек, выпавших на отрезок длины l.

$$X^l = \begin{Bmatrix} i, i = \overline{0, \infty} \\ P_l(i) \end{Bmatrix}$$

На числовой оси рассмотрим отрезок длины 1 и обозначим:

$MX^1=\lambda$

Математическое ожидание числа точек, попавших на отрезок длины 1. По свойству стационарности l одинаково для всех отрезков.

$MX^1=ll$ – доказать

Пусть 1 – целое число. Разобьем отрезок длины 1 на 1 отрезков единой длины. Тогда количество точек, попавших на отрезок длины 1 будет равно числу точек, попавших на каждый из непересекающихся отрезков длины 1 (тут использовалось свойство беспоследействия).

Используя формулу

$$M\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \sum_{i=0}^{0} x_i$$

имеем

$MX^1 = \lambda l$

Математическое ожидание числа точек, попавшие на отрезок длины l равно мат. ожиданий точек, попавших на непересекающиеся отрезки. Пусть l – не целое число. Выделяем целую часть. Тогда

$$MX^{l} = \lambda l + M(\Delta 1) = \lambda l$$

На числовой оси рассмотрим отрезок длины l, разобьем его на n отрезков данной длины

$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

такой, что позволит использовать свойство ординарности. Тогда с определенной погрешностью, которая тем меньше, чем больше n можно считать

$$X^{\Delta x} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ P_{\Delta x}(0) & P_{\Delta x}(1) \end{Bmatrix}$$

т. е. на отрезок длины Δx попадает не более, чем одна точка, тогда

$$\lambda\Delta x = MX^{\Delta x} = 0\cdot P_{\Delta x}(0) + 1\cdot P_{\Delta x}(1) = P_{\Delta x}(1)$$

Для достаточного малого отрезка длины lΔx вероятность попадания в него одной точки Δx, а вероятность того, что ничего не произойдет 1– λΔx.

В сделанных предположениях m точек попадает на отрезок длины l только в одном случае, когда в m отрезках попадает по одной точке. Тогда на основании 3-го свойства искомая вероятность равна

$$P_n(m) = C_n^m(\lambda\Delta x)^m(1-\lambda\Delta x)^{n-m} = \frac{mn!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda l}{n}\right)^m \frac{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^{n-m}}{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^m}$$

Точную вероятность получим путем предельного перехода при числе разделений отрезка $n\to\infty$

$$n_m = \lim_{n\to\infty} P_n(m) = C_n^m (\lambda\Delta l)^m (1-\lambda\Delta l)^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{\lambda l}{n}\right)^m \frac{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda l}{n}\right)^m} =$$

$$= [\lambda l = a] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m+1)\ldots n}{m!}\cdot\frac{a^m}{n^m}\cdot\frac{\left(1-\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{a}{n}\right)^m} = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

$$\left[\left(1-\frac{a}{n}\right)^n = \left(\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right)^n = e\right]$$

$$n_m = \frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} n_m = 1$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} n_m = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!} = e^{-a}e^{a} = 1$$

Тут мы разложили $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}$ в ряд Маклорена.

Найдем производящую функцию распределения Пуассона

$$m_x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{mt}\frac{a^m}{m!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{mt}a^m}{m!} = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{e^t a}{m!}\right)^m = e^{-a}e^{ae^t} = e^{a\left(e^t-1\right)}$$

Найти MX и DX

$$MX = \frac{de^{a\cdot\left(e^t-1\right)}}{dt}\Big|_{t=0} = \left(e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\right)^{©} = ae^t e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\Big|_{t=0} = ae^0 e^{a\cdot(1-1)} = a\cdot e^0\cdot e^0 = a\cdot 1 = a$$

$$\nu_2 = \frac{d^2 e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}}{dt^2}\Big|_{t=0} = \left(a\cdot e^t\cdot e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\right)^{©}\Big|_{t=0} = a\cdot\left(e^t\cdot e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\right)^{©} = a\cdot\left(e^t\cdot ae^t\cdot e^{a\cdot\left(e^t-1\right)} + e^t\cdot e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\right) =$$

$$= a\cdot e^t\cdot e^{a\cdot\left(e^t-1\right)}\cdot\left[ae^t+1\right]_{t=0} = a\cdot 1\cdot 1\cdot[a\cdot 1+1] = a^2+a$$

$$DX = \nu_2-\nu_1^2 = \nu_2-(MX)^2 = a^2+a-a^2 = a$$

Вторая модель распределения Пуассона

Рассматривается обычная схема биноминального распределения, в котором n – велико, а p – достаточно мало. Тогда точная формула для вероятности появления события A в m испытаниях имеет вид

$$C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

Эта формула при больших n вычисляется сложно. Такую вероятность заменяют приближенной

$$\boxed{\frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \text{где } a = p \cdot n}$$

Для найденного a построим гипотетический ряд вероятностей

$$C_n^m \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}$$

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^m \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}$$

Предполагается, что для достаточно больших n и малых p искомая вероятность

$$C_n^m \cdot p^n \cdot q^{m-n}$$

является членом построенного гипотетического ряда вероятностей, а во вторых находится в малой окрестности предельного значения этого ряда. И, следовательно, это значение можно взять в качестве допустимой хорошей аппроксимации значений искомой вероятности.

Непрерывные случайные величины

Будем рассматривать пространство элементарных событий как совокупность всех точек числовой оси. В этом случае введенная ранее функция распределения имеет вид: $F(x) = P(X > x)$.

Пусть функция распределения является непрерывной. Найдем вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение a, где a – произвольное действительное число.

P(X=a).

Рассмотрим неравенство: $x \le a = \lim\limits_{n\to\infty}(x < a + \frac{1}{n})$

Доказать самим.

$$x < a + \frac{1}{n}$$

$$x \le a = \lim_{n\to\infty}(x < a + \frac{1}{n})$$

$$x \le a + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$$

$$x \le a$$

Следовательно:

$$P(x = a) = \lim_{n\to\infty}(a \le X < a + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}(-F(a) + F(a + \frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty}(F(a + \frac{1}{n}) - F(a)) = 0$$

Мы впервые столкнулись с ситуацией, когда событие принципиально может произойти в результате испытания, но имеет вероятность равную 0 . В инженерном толковании это означает: в данной конечной серии испытаний данное событие никогда не произойдет.

Случайная величина X называется <u>непрерывной</u>, если ее пространством элементарных событий является вся числовая ось (либо отрезок (отрезки) числовой оси), а вероятность наступления любого элементарного события равна нулю.

P(a≤X<b)=P(a≤X≤b)=F(b)–F(a)

Если от сложного события вычесть конечное либо счетное множество, вероятность наступления нового события останется неизменной.

Функция f(x) – числовая скалярная функция действительного аргумента x называется <u>плотностью вероятности</u>, и существует в точке x, если в этой точке существует предел:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to\infty}\frac{(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to\infty}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Свойства плотности вероятности

1. Плотность вероятности является неотрицательной функцией.
2. $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(U)dU$

$$F(x) = F(x) - F(-\infty)$$

3. $P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

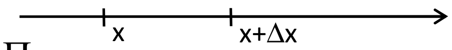
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(X < \infty) = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

Следствие: Если пространством элементарных событий является отрезок числовой оси, то пространство элементарных событий формально можно распространить на всю числовую ось, положив вне отрезка значение плотности вероятности равное 0.

Второе эквивалентное определение плотности вероятности

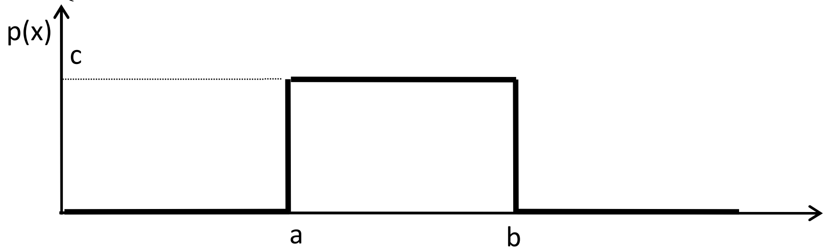
Если плотность вероятности в точке x существует, то $P(x \le X \le x+\Delta x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$. Вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение в отрезке с точностью до $o(\Delta x)$ равна $F(x)\Delta x$.



Пример:

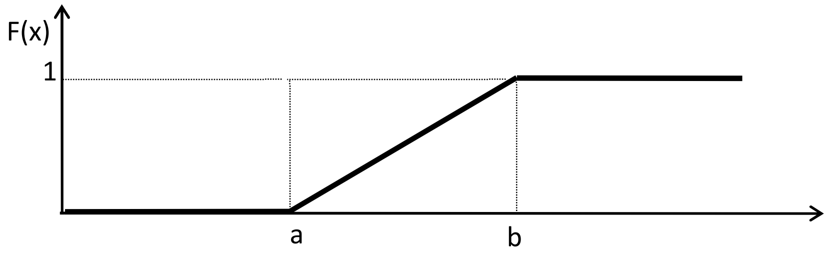
Равномерное распределение.

$$\begin{cases} p(x) = c, & a \le x \le b \\ p(x) = 0, & a > x > b \end{cases}$$ тут p(x)=f(x).



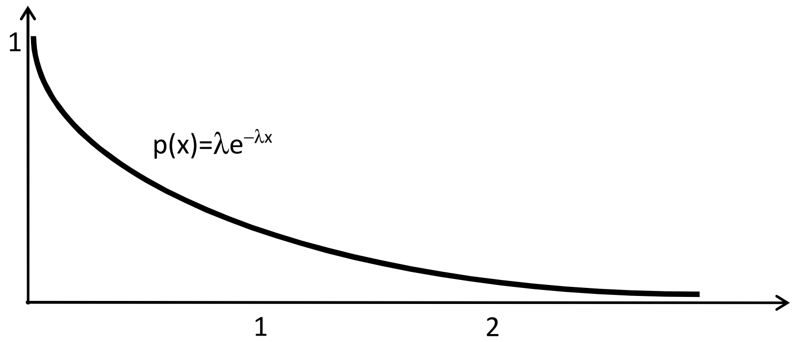
$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_{a}^{b} p(x)dx = \int_{a}^{b} cd(x) = cx\int_{a}^{b} = c(b-a)$$

так как $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1, \quad c = \dfrac{1}{b-a}$



Экспоненциальное распределение.

$$\begin{cases} p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ p(x) = 0, & x < 0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{p(x)dx} = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{dx} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}(-e^{-\lambda x}) = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{\infty} = 1 - \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 1$$

Непрерывная случайная величина является математической абстракцией и в чистом виде на практике не встречается, хотя бы потому, что теоретически не может существовать измерительное устройство, вычисляющее это величину. Следовательно, всегда исследователь имеет дело со случайными дискретными величинами. На практике отрезок [a, b] разбивают на отрезки одинаковой длинны, длину устремляют к нулю. При этом x принадлежит отрезку. Вероятность того, что отрезок содержит x равна $\frac{\Delta x}{b-a}$. При $\Delta x \to 0$ ситуация эквивалентна следующему: имеется бесконечное множество лотерейных билетов, один ваш. Ясно, что в конечной серии розыгрышей вы никогда не выиграете. Независимо от этого велико удобство работы с непрерывными величинами. Оно заключается в том, что вероятностные свойства задаются одной из двух функций – плотностью распределения либо плотностью вероятности.

Вероятностные характеристики непрерывных случайных величин

Пусть имеется случайная величина, являющаяся функцией от непрерывной случайной величины X.

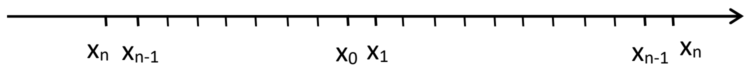
Y=ξ(x)

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины является число:

$MY = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(x) f_x(x)dx$, $f_x(x)$– плотность вероятности случайной величины.

Обоснование этой формулы.

Аппроксимируем непрерывную случайную величину Y случайной величины Y^*, которая является дискретной. Пусть числовая ось – пространство элементарных событий случайной величины X, разобьем всю числовую ось на отрезки достаточно малой длины.



2n отрезков.

Если в результате испытания случайная величина X попала в отрезок с начальной вершиной x_i, то случайная величина X^* приняла значение $\xi(x_i)$ с точностью до бесконечно малой Δx – длины i-го отрезка. Вероятность того, что Y^* примет значение $\xi(x_i)$ с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx, тем более точно Y^* аппроксимирует Y.

Вероятность наступления $\xi(x_i)$ для Y^* равна $f_x(x_i)\Delta x$

$$Y^* = \begin{Bmatrix} \xi(x_i) \\ f_x(x_i)\Delta x \end{Bmatrix}$$

$MY^* = \sum\limits_i \xi(x_i) f_x(x_i)\Delta x$, при $n \to \infty$ эта сумма переходит в $MY^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(x_i) f_x(x_i)dx$.

Тогда $\nu_1 = MX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx$.

Самим показать, что все свойства мат. ожидания для дискретной случайной величины сохраняются для непрерывной случайной величины.

$M(ax+b) = aMX + b$

$M(ax+b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}axf_x(x)dx + b\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx = a\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf_x(x)dx + b\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx = \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx = 1\right] = aMX + b$

$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^b f_x(x)dx$

$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\nu)^k f_x(x)dx$

$DX = \mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\nu)^2 f_x(x)dx$

Доказать, что

$DCX = C^2 DX$

$D(C+X) = DX$

$DX = \nu_2 - \nu_1^2$

$DX = \mu_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\nu)^2 f_x(x)dx$

$DCX = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(CX - MCX)^2 f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(CX - CMX)^2 f_x(x)dx = C^2 \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty}(X - MX)^2 f_x(x)dx = C^2 DX$

$D(C+X) = DX$

$D(C+X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(C + X - M(X+C))^2 f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(C + X - MX - C)^2 f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(X - MX)^2 f_x(x)dx = DX$

$DX = \nu_2 - \nu_1^2$

$DX = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-\nu)^2 f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(x^2 - 2x\nu + \nu^2\right)f_x(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2 f_x(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(2x\nu - \nu^2\right)f_x(x)dx =$

$= \nu_2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(2x\nu - \nu^2\right)f_x(x)dx = \nu_2 - 2\nu MX + \nu^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_x(x)dx = \nu_2 - 2\nu^2 + \nu^2 = \nu_2 - \nu$

$m_x(t) = Me^{xt} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{xt}f_x(x)dx$

Доказать самим, что свойство 1 и 2 для производящей функции в дискретном случае справедливы и для непрерывного.

$$\frac{d^k m_x(t)}{dt^k}\Big|_{t=0} = \nu_k$$

$$\frac{d^k \int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f_x(x)dx}{dt^k}\Bigg|_{t=0}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d^k e^{ixt}f_x(x)dx}{dt^k}\Big|_{t=0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}i^k x^k e^{ixt}f_x(x)dx = i^k\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k e^{ix0}f_x(x)dx = i^k\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k f_x(x)dx$$

Распределение Гаусса – нормальное

Случайная величина имеет нормальное распределение (распределение Гаусса) и называется нормально распределенной, если ее плотность вероятности

$$\boxed{n(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=f_x(x),\sigma>0}$$

Из определения

$$N(x,a,\sigma)=F_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(U-a)^2}{2\sigma^2}}dU$$

функция распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty}n(x,a,\sigma)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\frac{x-a}{\sigma}=Z;dx=\sigma dZ\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{Z}}\sigma dZ=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{Z}}dZ=\left[\frac{Z}{\sqrt{2}}=u;dZ=\sqrt{2}du\right]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du=1$$

Найдем выражение для производящей функции нормального распределения

$$m_x(t)=Me^{xt}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\frac{x-a}{\sigma}=z;x=\sigma z+a;dx=\sigma dz\right]=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(\sigma z+a)t-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{e^{at}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2\sigma zt\right)}dz=e^{at}e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma t)^2}dt}=\left[\frac{z-t\sigma}{\sqrt{2}}=u;dz=du\right]$$

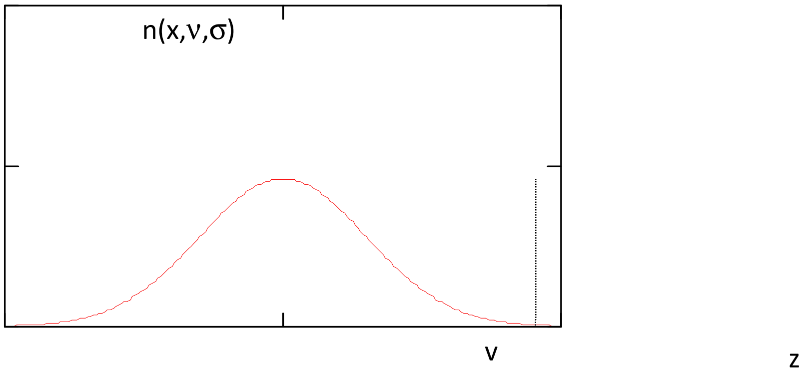
=1 (интеграл Эйлера)

$$m_x(t)=e^{at+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

$$MX=a,$$

$$DX=\nu_2-\nu_1^2=\sigma^2+a^2-a^2=\sigma^2$$

Изобразим примерный вид плотности



Рассмотрим центрированную нормальную величину, т. е. MX=0

$n(x,0,\sigma)$

У центральной нормированной величины все нечетные начальные моменты равны 0

$$m_x(t) = e^{\nu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$e^a = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}$$

$$m_x(t) = 1 + \frac{\nu_1}{1!}t + \frac{\nu_2}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\nu_k}{k!}t^k + \ldots$$

$$\overline{m}_x(t)\Big|_{MX=0} = e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$$e^{\frac{t^2\sigma^2}{2}} = 1 + \frac{\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^1}{1!} + \frac{\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^3}{3!} + \ldots + \frac{\left(\frac{t^2\sigma^2}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}!} + \ldots = 1 + \frac{t^2\sigma^2}{2\cdot 1!} + \frac{t^4\sigma^4}{2\cdot 2!} + \ldots + \frac{t^k\sigma^k}{2\cdot\left(\frac{k}{2}\right)!} = \frac{t^k\sigma^k}{k!}$$

где $\overline{m}_x(t) = m_x(t)$, $\quad \frac{\nu_1}{1!}t = 0 \Rightarrow \nu_1 = 0$

$$\frac{\nu_2}{2!}t^2 = \frac{t^2\sigma^2}{2!} \Rightarrow \nu_1 = \sigma^2$$

$$\nu_1 = \nu_3 = \ldots = \nu_{2n\text{-}1} = 0$$

Функция Лапласа

Функцией Лапласа называется функция вида

$$\boxed{\Phi_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{u^2}{2}}\, du}$$

Свойства:

1) при z>0 функция Лапласа определяет вероятность попадания нормальной случайной величины с параметрами

MX=0

DX=1

в интервале (0, z)

2)

$$\Phi_0(+\infty)=\frac{1}{2}$$

$$\Phi_0(-\infty)=-\frac{1}{2}$$

3) $\Phi_0(-z)=-\Phi_0(\infty)$ – функция нечетная

Иногда в литературе встречаются два вида функций Лапласа

$$\hat{\Phi}_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$\hat{\Phi}_0(z)=\frac{1}{2}+\Phi_0(z)$$

Функция Лапласа табулирована. Функция Лапласа используется для выполнения событий вида

$n(x,\nu,\sigma)$

для произвольных нормальных величин.

Найдем вероятность того, что в результате испытания над x произойдет сложное событие: x примет числовое значение, принадлежащее отрезку с концами (a, b).

$$P(a\le x\le b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_a^b e^{-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma^2}}dx=\left[\frac{x-\nu}{\sigma}=z;dx=\frac{1}{\sigma}dz\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{a-\nu}{\sigma}}^{\frac{b-\nu}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

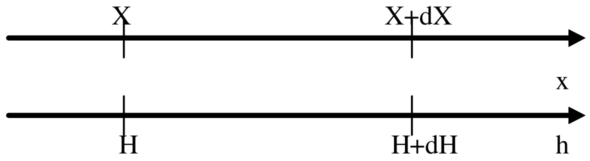
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{b-\nu}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{a-\nu}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi_0\left(\frac{b-\nu}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-\nu}{\sigma}\right)$$

Пример.

x – случайная величина.

f(x) – плотность вероятности.

Найти плотность вероятности g(n) случайной величины H.



Рассмотрим отрезок (h, h+dh). Событию попадание H в отрезок (h, h+dh) в силу однозначности функции h(x) соответствует попадание x в отрезок (x, x+dx). При этом вероятности наступления такого события одинаковы:

$$\frac{x(h)}{h(x)}$$

Тогда построим функцию h(x), обратную x(h), x=x(h).

так как $dh > 0$ и $dx > 0$, $\quad dx = \left|\frac{dx(h)}{dh}\right| dh$

Вероятность первого события равна

$$g(h), dh + 0(dh)$$

Вероятность второго события

$$f(x(h)), \frac{dx(h)}{dh} dh + 0(dx(h))$$

Следовательно

$$g(h) = f(x(h))\left|\frac{dx(h)}{dh}\right|$$

Неравенство Чебышева

Рассмотрим случайную величину X с конечным мат. ожиданием и дисперсией $\sigma = \sqrt{DX}$

Для любого неотрицательного числа t вероятность наступления события

$$\boxed{P(|x - \nu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2}}$$

Пусть Z – непрерывная случайная величина с плотностью вероятности f(Z). Пространство событий величины Z (0; ∞). Тогда имеет место неравенство

$$P(Z \geq \tau) \leq \frac{MZ}{\tau}$$

Доказать неравенства

$$MZ = \int_{-\infty}^{\infty} Zf(Z)dZ = \int_{0}^{\tau} Zf(Z)dZ + \int_{\tau}^{\infty} Zf(Z)dZ \geq \int_{\tau}^{\infty} Zf(Z)dZ \geq \tau\int_{\tau}^{\infty} f(Z)dZ = \tau P(Z \geq \tau)$$

$$P(Z \geq \tau) \leq \frac{M(Z)}{\tau}$$

Рассмотрим два сложных события

$$|x-a| \geq \varepsilon$$

$$(x-a)^2 \geq \varepsilon^2$$

а – произвольное действительное число.

Показать самим, что х – удовлетворяет и одному и другому неравенству.

Тогда $\forall a, \varepsilon > 0$ справедливо

$$P(|x-a| \geq \varepsilon) = P\left((x-a)^2 \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{M(x-a)^2}{\varepsilon^2}$$

В данном случае $\tau = \varepsilon^2 \quad Z = (x-a)^2$

Равномерность неравенств при ε>0

$$|x-a| \geq \varepsilon$$

$$\begin{cases} (x-a) \geq \varepsilon \\ (x-a) \leq -\varepsilon \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \varepsilon + a \\ x \leq -\varepsilon + a \end{cases}$$

$$(x-a)^2 \geq \varepsilon^2$$

$$\begin{cases} (x-a)^2 - \varepsilon^2 \geq 0 \\ (x-a-\varepsilon)(x-a+\varepsilon) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-a-\varepsilon \geq 0 \\ x-a+\varepsilon \geq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \geq \varepsilon + a \\ x \geq -\varepsilon + a \end{cases}$$

или, в частности, при a=ν=MX

$$P\{|x-\nu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

при ε = σt справедливо неравенство Чебышева.

Многомерные случайные величины

Инженерная интерпретация.

Проводится испытание. В результате испытания фиксируется m числовых значений X_1, X_2, ...,X_m. Исход испытания случайный.

Пример: Испытание – реализация некоторой технологии выпуска продукта. Исход – численное значение m характеристик, оценив которые мы оценим качество продукта.

Так как в процессе реализации технологии на технологию действуют случайные факторы, то результат испытания неоднозначен.

Аксиоматика. Формальная вероятностная модель

Имеется вероятностное пространство: (Ω, σ, P). Зададим m числовых измеримых скалярных функций $\xi_1(\omega)$, ..., $\xi_m(\omega)$. Каждая из этих функций является одномерной по определению. Возьмем m произвольных действительных чисел и рассмотрим событие A.

$$A = \{\forall\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, ..., \xi_m(\omega) < x_m\}$$

Очевидно, что событие A является пересечением событий A_i вида:

$$A_i = \{\forall\omega : \xi_i(\omega) < x_i\}$$

$$A = \prod_{i=1}^{m} A_i$$

Так как каждое $A_i \in \sigma$-алгебре, то и $A \subset \sigma$-алгебре. Следовательно, существует вероятность наступления события A и существует числовая скалярная функция m действительных аргументов, которая определена для всех значений своих аргументов и численно равна вероятности наступления события A.

$F(x_1, x_2, ..., x_m) = P(A)$

Это m-мерная функция распределения m-мерной случайной величины.

Свойства многомерного распределения:

1. Значение функции при значении хотя бы одного ее аргумента равного $-\infty$, равно 0, как вероятность невозможного события.
2. Значение функции, при всех значениях ее аргументов равных $+\infty$, равно 1, как вероятность достоверного события.
3. Функция не убывает по любой совокупности ее аргументов.

4. Функция непрерывна почти всюду (для инженерной практики это означает, что на конечном, либо счетном множестве аргументов она может иметь скачки 1-го рода).

Рассмотрим арифметическое пространство R^m и зададим полуинтервалы вида:

$$B = \begin{pmatrix} a_1 \le x_1 < b_1 \\ a_2 \le x_2 < b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m \le x_m < b_m \end{pmatrix}$$

Доказать самим, что P(B) существует, и образ этого множества принадлежит σ-алгебре по ω.

$$\forall\omega = \begin{pmatrix} a_1 \le \xi_1(w) < b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m \le \xi_m(w) < b_m \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что:

$$P(B) = \int_{a_1}^{b_1} \ldots \int_{\mathrm{a_m}}^{\mathrm{b_m}} d\mathrm{F}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{m})$$

т.о. многомерная функция распределения позволяет в m-мерном арифметическом пространстве задать счетно-аддитивную меру – функцию на поле, порожденному всеми m-мерными полуинтервалами объема ($\forall$i, $a_i \neq b_i$). Тогда построим минимальную σ-алгебру на этом поле, которая называется борелевским полем (алгеброй) в m-мерном арифметическом пространстве. Любая скалярная функция m-аргументов удовлетворяет всем свойствам, приведенным для m-мерной функции распределения и однозначно задает вероятностное пространство вида:

$$\left(R^m, \beta_m, p\right)$$

Таким образом, для инженерного исследования задача свелась к следующему: пространство элементарных событий – это m-мерное арифметическое пространство. По результатам статистических испытаний нужно оценить m-мерную функцию распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Рассмотрим числовую скалярную функцию m действительных аргументов. $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Функция $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется <u>борелевской</u>, если для любого $B \subset \beta$ в одномерном арифметическом пространстве соответствующая $g^{-1}(B)=B_1\subset\beta_m$. Тогда справедлива теорема, доказательство которой полностью повторяет доказательство в одномерном случае. Скалярная функция $\eta(\omega)=g(\xi_1(\omega),...,\xi_m(\omega))$ – является измеримой скалярной функцией – случайной величиной.

Двумерные случайные величины

Рассмотрим испытание, результатом которого является появление двух чисел из некоторого конечного либо счетного множества пар чисел. Это испытание физически может быть одним испытанием (мгновенное измерение прибором величины тока и напряжения в сети), а также может быть композицией двух испытаний, каждое из которых порождает одномерную дискретную величину. Условно двумерная дискретная случайная величина обозначается как XY, либо любые две буквы латинского алфавита, либо для: X:{x_1, x_2, ...,x_s}, Y:{y_1, y_2, ...,y_n}, проводя испытание над двумерной случайной величиной находят одно из чисел из X либо из Y. А вероятностное пространство двумерной случайной величины формально строится так:

$$\begin{Bmatrix} x_i & y_i \\ P(x_i y_i) \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} i=1,...,s \\ j=1,...,n \end{matrix}$$

Двумерной случайной величиной называется система из двух одномерных случайных величин X, Y, где как X, так и Y являются дискретными случайными величинами. В пространстве элементарных событий дискретной случайной величины XY определим сложное событие A: В результате испытания над двумерной случайной величиной XY, случайная величина X приняла значение x_i, случайная величина Y - любое значение.

$$A:\{x_i y_i,..., x_i y_m\}$$

$$P(A)=P(X=x_i)=P(\sum_{j=1}^{m}(x_i y_j))=\sum_{j=1}^{m}P(x_i y_j)=P(x_i)$$

Вводим сложное событие B: В результате испытания над двумерной случайной величиной XY, случайная величина Y приняла значение y_j.

$$B:\{x_1 y_j,..., x_s y_j\}$$

$$P(B)=P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{s}P(x_i y_j)=P(y_j)$$

Найдем условную вероятность:

$$P(B/A)=P(y=y_j/x=x_i)=P(y_j/x_i)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(x_i y_j)}{P(x=x_i)}=\frac{P(x_i y_j)}{P(x_i)}$$

Аналогично:

$$P(A/B)=P(x=x_i/y=y_j)=P(x_i/y_j)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(x_i y_j)}{P(y=y_j)}=\frac{P(x_i y_j)}{P(y_j)}$$

Покажем что сумма условных вероятностей: $\sum_{j=1}^{m}P(y_j/x_i)=1$; $\sum_{i=1}^{s}P(x_i/y_j)=1$

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{P(x_i y_j)}{P(y_j)}=\frac{\sum_{i=1}^{s}P(x_i y_j)}{P(y_j)}=\frac{P(y_j)}{P(y_j)}=1$$

<u>Условным математическим ожиданием</u> является выражение:

$$M(y/x=x_i)=\bar{y}(x_i)=\sum_{j=1}^{m}y_j P(y_j/x_i);$$

$$M(x/y=y_j)=\bar{x}(y_j)=\sum_{i=1}^{s}x_i P(x_i/y_j)$$

<u>Условной дисперсией</u> называется выражение:

$$D(y/x=x_i)=\sigma^2 y/x_i=\sum_{j=1}^{m}(y_j-\bar{y}(x_i))^2\times P(y_j/x_i);$$

$$D(x/y=y_j)=\sigma^2 x/y_j=\sum_{i=1}^{s}(x_i-\bar{x}(y_j))^2\times P(x_i/y_j).$$

Условное мат. ожидание и дисперсия отличаются от безусловной только тем, что в их определении подставляется условная вероятность вместо безусловной.

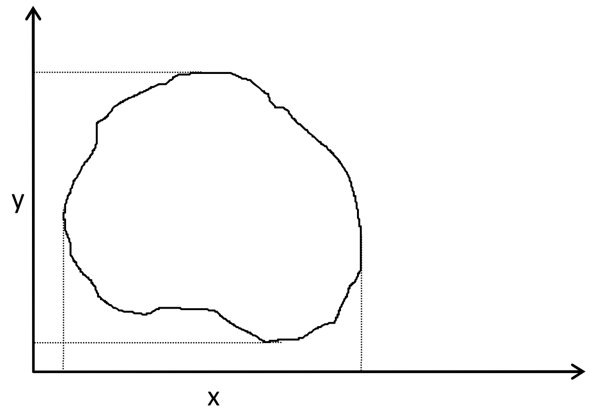
Условное мат. ожидание случайной величины, при условии, что другая случайная величина приняла заданное значение определяет число-точку, относительно которой группируются результаты конкретных испытаний над одной случайной величиной, при условии, что в этом испытании (над двумерной случайной величиной XY) вторая случайная величина приняла заданное фиксированное значение.

Условная дисперсия определяет степень концентрации результатов конкретных испытаний над одной случайной величиной относительно условного мат. ожидания.

При решении практических задач условное мат ожидание и условная дисперсия обычно используются в следующем случае: проводят испытание над X и Y, исследователь имеет возможность измерять результаты испытания над одной случайной величиной, измерение другой недоступно. Если условные дисперсии малы, то в качестве неизвестного значения не измеряемой случайной величины, которую она приняла в результате испытания, можно брать мат. ожидание.

Двумерные непрерывные случайные величины

Двумерная случайная величина называется непрерывной случайной величиной, если пространством ее элементарных событий является плоскость, либо область плоскости, либо область конечной ненулевой плоскости. Очевидно, что X и Y являются одномерными непрерывными случайными величинами.



Следствием этого определения является следующее: любое сложное событие размерности 1 (произвольная кривая, принадлежащая пространству элементарных событий) имеет нулевую вероятность так как в противном случае вероятность достоверного события никогда бы не равнялась единице. Числовая скалярная функция двух действительных аргументов называется двумерной плотностью вероятности, двумерной случайной величины XY, если для фиксированных значений своих аргументов она выполняет равенство $f(x, y)\Delta x\Delta y = P\begin{pmatrix} x \le X \le x+\Delta x \\ y \le Y \le y+\Delta y \end{pmatrix}$. Приведенное здесь определение является аналогичным определению одномерной плотности вероятности.

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x}$$

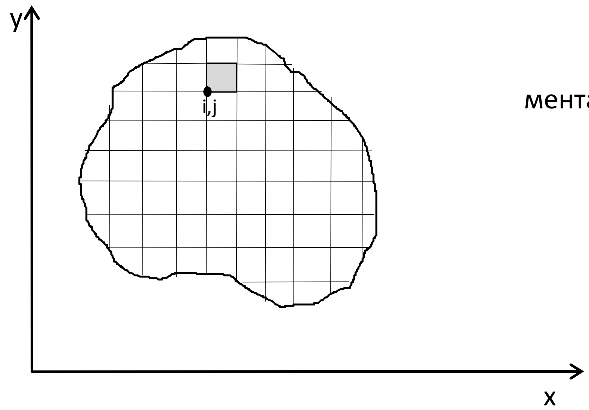
$$\Updownarrow$$

$$f(x)\Delta x + O(\Delta x) = P(x \le X \le x + \Delta x)$$

Ниже будет выведено условие существования плотности вероятности для фиксированных x, y.

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)}$$

Рассмотрим произвольную область G.



$f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j)$ - вероятность попадания в элементарный объем, примыкающий к точке i, j.

Разобьем область G на множество прямоугольников, покрывающих область G. Тогда на основании 3-й аксиомы теории вероятностей имеем: вероятность искомого события равна:

$$\sum_i \sum_j f(x_i, y_i)(\Delta x \Delta y) + (o(\Delta x \Delta y) = P(x \le X \le x + \Delta x, y \le Y \le y + \Delta y).$$

Точное выражение получим перейдя к пределу:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_i)(\Delta x \Delta y) + (o(\Delta x \Delta y) = \iint_G f(x, y) dx dy$$ (показать самим).

Числовая скалярная функция двух действительных аргументов называется двумерной функцией распределения, если она при фиксированном числе своих аргументов численно равна вероятности наступления $F_{x,y}(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y)$, если X, y – непрерывные случайные величины, то значение функции распределения не изменится.

Доказать:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(U, V) dV dU$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

$$P((X, Y) \subset G) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) - F(x, y)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P((X, Y) \subset G)}{\Delta x \Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

По определению второй смешанной производной.

Найдем по двумерной плотности одномерные плотности случайных величин X и Y.

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(u) du$$

$$P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y=\infty} f(u, v) dv du = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv du$$

$$\int_{-\infty}^{x} f_x(u) du = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv du$$

Так как полученное равенство верно для всех x, то подынтегральные выражение

$$f_x(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv$$

аналогично

$$f_y(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du$$

$$P(XY \subset G) = \iint_G dF(x, y)$$

$$P\begin{pmatrix} a_1 \le x < b_1 \\ a_2 \le y < b_2 \end{pmatrix} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} dF(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx$$

В математической теории вероятностей вводится как базовая формула (1) ибо предлагается, что плотность вероятности как аналитическая функция может не существовать. Но так как в нашем курсе мы исследуем только 2 конструкции – дискретные или непрерывные, то для них полученные формулы эквивалентны и не имеет смысла какую-то из них вводить как первичную.

Условная плотность вероятности

Найдем плотность вероятности случайной величины Y при условии, что в результате испытания над случайной величиной XY , X приняло значение x.

Обозначим

$$f_{y/x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$P\left(y \le Y \le y+\Delta y \,/\, x=x\right)=f_{y/x}\left(\frac{y}{x}\right)\Delta y+0\left(\Delta y\right)$$

тут мы использовали второе определение одномерной плотности.

В качестве условной плотности вероятности используется следующее выражение

$$\boxed{f_{y/x}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{f_{xy}\left(x,y\right)}{f_x\left(x\right)}}$$

Обоснование выражения для условной плотности вероятности

$$A:\left\{x \le X \le x+\Delta x,\ y<\infty\right\}$$

$$B:\left\{x<\infty,\ y \le Y \le y+\Delta y\right\}$$

$$AB:\left\{x<X<x+\Delta x,\ y<Y<Y+\Delta y\right\}$$

$$P(AB)=f(x,y)\Delta x\Delta y+0(\Delta x\Delta y)$$

$$P(A)=P(x<X<x+\Delta x)=f_x(x)\Delta x+0(\Delta x)$$

$$P(B/a)=P(y \le Y \le y+\Delta y \,/\, x \le X \le x+\Delta x)=$$

$$=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{f_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y+0(\Delta x\Delta y)}{f_x(x)\Delta x+0(\Delta x)}=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_{x(x)}}\Delta y+0(\Delta y)=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_{x(x)}}+\alpha$$

Выведем выражение для α.

$$\begin{array}{r|l} f_{xy}\left(x,y\right)\Delta x\Delta y+0\left(\Delta x\Delta y\right) & f_x\left(x\right)\Delta x+0\Delta x \\ -\ f_{xy}\left(x,y\right)\Delta x\Delta y+0\left(\Delta x\right)\dfrac{f_{xy}\left(x,y\right)\Delta y}{f_x\left(x\right)} & \\ \hline 0\left(\Delta x\Delta y\right)-0\left(\Delta x\right)\dfrac{f_{xy}\left(x,y\right)\Delta y}{f_x\left(x\right)} & \dfrac{f_{xy}\left(x,y\right)\Delta x\Delta y}{f_x\left(x\right)\Delta x} \end{array}$$

Обозначим $\dfrac{f_{xy}\left(x,y\right)}{f_x\left(x\right)}=k$

$$0(\Delta x\Delta y) - 0(\Delta x)\cdot k\cdot\Delta y = 0(\Delta y)$$

$$M(Y/X = x) = \bar{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{y/x}(y/x)dy$$

$$M(X/Y = y) = \bar{x}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x/y}(x/y)dx$$

$$\sigma^2_{y/x} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \overline{y(x)}\right)^2 f_{y/x}(y/x)dy$$

$$\sigma^2_{x/y} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \overline{x(y)}\right)^2 f_{x/y}(x/y)dx$$

Условное мат. ожидание и дисперсия линии регрессии – зависимость Y от X, выраженная в изменении средних значений Y при переходе x от одного значения к другому. Найдем математическое ожидание MZ, где

$$Z = \bar{y}(x);\ MZ = MM(y/x)$$

$$\bar{y}(x) = M(y/x = x) = \bar{y}(x)$$

$$MZ = M(\bar{y}(x)) = MY$$

$$\bar{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy$$

$$M\bar{y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{y}(x) f_x(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy\right]\cdot f_x(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) f_x(x)dx\right]dy = \int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dy = MY$$

Двумерные независимые случайные величины (двумерные дискретные случайные величины)

Двумерная дискретная случайная величина называется случайной величиной с <u>независимыми компонентами</u>, если

$$P(x_i, y_j) = P(x_i)P(y_j)$$

Показать самим, что справедливо

$$P\left(y_j / x_i\right) = P\left(y_j\right)$$
$$P\left(x_i / y_j\right) = P\left(x_i\right)$$
$$\overline{y}\left(x_i\right) = MY$$
$$\overline{x}\left(y_j\right) = MX$$
$$\sigma^2 Y / x_i = \sigma^2 y$$

Доказать самим, что если испытание, исходом которого является пара чисел $x_i y_j; i = \overline{1, m}; \; j = \overline{1, s}$ является композицией двух независимых испытаний, то случайные величины X Y независимы.

$$P\left(y_j / x_i\right) = \frac{P\left(y_j x_i\right)}{P(x_i)} = \frac{P\left(y_j\right)P(x_i)}{P(x_i)} = P\left(y_j\right)$$

$$\overline{y}(x_i) = \sum_{j=1}^{s} y_j P\left(y_j / x_i\right) = \sum_{j=1}^{s} y_j \frac{P\left(y_j\right)P(x_i)}{P(x_i)} = \sum_{j=1}^{s} y_j P\left(y_j\right) = MY$$

$$\sigma^2 Y / x_i = \sum_{i=1}^{m}\left(y_i - \overline{y}(x_i)\right)^2 P\left(y_j / x_i\right) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - MY)^2 P\left(y_j x_i\right) / P(x_i) = \sum_{i=1}^{m}(y_i - MY)^2 P\left(y_j\right) = \sigma^2 y$$

Независимые непрерывные двумерные случайные величины

Непрерывными случайными величинами с независимыми компонентами называются если:

Непрерывная двумерная случайная величина имеет <u>независимые случайные компоненты</u>, если

$$F(x, y) = F_x(x) \cdot F_y(y)$$

или

$$f(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Покажем, что второе эквивалентно первому.

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \left[F_x(x) F_y(y)\right]}{\partial x \partial y} = \frac{dF_x(x)}{\partial x} \cdot \frac{dF_y(y)}{\partial y} = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Покажем, что если двумерная непрерывная случайная величина XY порождена композицией независимых испытаний, то X и Y независимы.

В силу определения независимых испытаний в композиционном пространстве

$$A = \{X \le x, y < \infty\}$$
$$B = \{X \le \infty, Y < y\}$$

В силу определения независимых испытаний в композиционном пространстве А и В независимы.

Следовательно: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Многомерные дискретные случайные величины

Это система, состоящая из m дискретных одномерных случайных величин. Всю арифметику проделать самостоятельно.

Многомерные непрерывные случайные величины

Система из m одномерных непрерывных случайных величин, у которой пространством элементарных событий является m-мерное арифметическое пространство либо его область, имеющая ненулевой объем.

m-мерная плотность вероятности удовлетворяет выражению

$$f(x_1,...,x_m)\Delta x_1...\Delta x_m + O(\prod_{i=1}^{m}\Delta x_i) = P\begin{pmatrix} x_1 \le X_1 \le x_1 + \Delta x_1 \\ .... \\ x_m \le X_m \le x_m + \Delta x_m \end{pmatrix}$$

m-мерной функцией распределения называется числовая скалярная функция m действительных аргументов, которая численно равна:

$$F(x_1, x_2,..., x_m) = \int_{-\infty}^{\infty}...\int f(U_1, U_2,...,U_m) \cdot dU_1 \cdot dU_2 \cdot ... \cdot dU_m$$

$$P(X_1 X_2 ... X_m \subset G) = \int_G ...\int f(x_1, x_2,..., x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot ... \cdot dx_m$$

Случайные величины x_1, x_2, ... x_m независимы, если

$$F(x_1, x_2,..., x_m) = \prod_{j=1}^{m} F_{x_j}(x_j)$$

$$f(x_1, x_2,..., x_m) = \prod_{j=1}^{m} f_{x_j}(x_j)$$

Доказать, что если m-мерная случайная величина порождена композицией m-мерных испытаний, то события независимы.

Запишем аналог формул

$$f_{y/x=x}(y)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)}$$

$$f_{y/x}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

для многомерного случая.

Для получения плотности вероятности $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_l}$ необходимо n-мерную плотность проинтегрировать в бесконечных пределах по переменным, которые соответствуют случайным величинам, не входящим в

$x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_l}$

Найдем плотность n-мерной случайной величины.

$$f_{x_{k+1},x_{k+2},...,x_n / x_1=x_1', x_2=x_2', ..., x_k=x_k'}(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n)=\int \frac{-(x_1', x_2', ..., x_n')}{f_{x_1,...,x_k}(x_1', x_2', ..., x_k')}$$

Математическое ожидание скалярной функции случайных аргументов

Двумерный дискретный случай

XY

Числовая скалярная функция $\varphi(x, y)$

$\varphi(x, y)$ является одномерной дискретной случайной величиной, со следующим отличием от обычного представления: для того, чтобы в испытании получить реализацию $\varphi(x_i, y_i)$ необходимо провести испытание над двумерной случайной величиной XY, зафиксировать ее результат *xi*, *yi* и подставить в $\varphi(x_i, y_i)$. Полученное число и есть реализация случайной величины φ.

Таблица случайной величины строится по таблице

$$\begin{Bmatrix} \varphi(x_i, y_j) \\ P(x_i, y_j) \end{Bmatrix} \quad i=\overline{1,5}; \quad j=\overline{1,m}$$

$$M\varphi(x, y)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}\varphi(x_i y_j)P(x_i y_j)$$

Двумерные непрерывные случайные величины

$$M\varphi(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_i y_j)f_{xy}(x_i y_j)dxdy$$

Случайную величину $\varphi(x,y)$ аппроксимируем дискретной по следующему правилу:

пространство элементарных событий XY представим в виде совокупности прямоугольников с вершинами x_i, y_j, если в результате испытания XY попало в прямоугольник (i,j), то эта случайная величина приняла значение $\varphi(x_i, y_j)$. Вероятность наступления этого события равна:

$$f_{xy}(x_i y_j)\Delta x_i y_j + 0(\Delta x_i \Delta y_j)$$

$$M\varphi^*(x,y)=\sum_i\sum_j\varphi(x_i, y_j)f_{xy}(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j + 0(\Delta x_i \Delta y_j)$$

точное значение мат. ожидания

$$\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_{ji}\to 0}} M\varphi^*(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_i y_j)f(x_i y_j)dxdy$$

-мерный дискретный случай

$x_1, x_2, ..., x_n$ - многомерная дискретная случайная величина

Найдем $M\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$

Вероятностное пространство зададим в виде

$$\begin{Bmatrix} x^1_{j_1} & x^2_{j_2} & \ldots & x^n_{j_n} \\ P(x^1_{j_1} & x^2_{j_2} & \ldots & x^n_{j_n}) \end{Bmatrix} \quad j_1=\overline{1,s_1} \quad j_2=\overline{1,s_2} \quad j_n=\overline{1,s_n}$$

Тогда

$$M\varphi(x_1 \ldots x_n)=\sum_{j_1=1}^{s1}\ldots\sum_{j_n=1}^{sn}\varphi(x^1_{j_1}, x^2_{j_2}, \ldots x^n_{j_n})\cdot P(x^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \ldots x^n_{i_n})$$

-мерный непрерывный случай

$$M\varphi(x_1 \ldots x_n)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1 \ldots x_n)\cdot f_{x_1,\ldots x_n}(x_1 \ldots x_n)dx_1 \ldots dx_n$$

Теорема 1. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий

$$M\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} Mx_i$$

$$n = 2$$

$$M(X+Y) = MX + MY$$

а) дискретный случай

$$M(X_1+X_2) = \sum_{i_1=1}^{s_1}\sum_{i_2=1}^{s_2}\left(x_{i_1}^1 + x_{i_2}^2\right)\cdot P\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2\right) = \sum_{i_1=1}^{s_1} x_{i_1}^1 \sum_{i_2=1}^{s_2} P\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2\right) + \sum_{i_1=1}^{s_1} x_{i_2}^2 \sum_{i_2=1}^{s_2} P\left(x_{i_1}^1, x_{i_2}^2\right) = MX_1 + MX_2$$

б) непрерывный случай

$$M(X_1+X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1+x_2) f_{x_1x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1x_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1x_2}(x_1,x_2)dx_1\right]dx_2 = MX_1 + MX_2$$

Пусть n-произвольное число

$$M\prod_{i=1}^{n} X_i = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_1 \ldots x_n f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2)\ldots f_{x_n}(x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n =$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{x_1}(x_1)dx_1\right]\cdot\ldots\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{x_n}(x_n)dx_n\right] = \prod_{i=1}^{n} MX_i$$

$$M\sum_{i=1}^{n} X_i = \int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{x_1}(x_1)dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{x_2}(x_2)dx_2 + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} x_n f_{x_n}(x_n)dx_n = \sum_{i=1}^{n} MX_i$$

Теорема 2. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению мат. ожиданий.

По определению имеем $M(XY) = \sum_{(x,y)} xyP(x,y)$ так как случайные величины X и Y независимы, то $P(x,y) = P_x(x)P_y(y)$

$$M(XY) = \sum_{(x,y)}[xP_x(x)]\cdot[yP_y(y)] = \left(\sum_x xP_x(x)\right)\cdot\sum_y yP_y(y) = MX\cdot MY$$

Коэффициент ковариации

Коэффициентом ковариации называется выражение

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M[(X-MX)(Y-MY)]=M[XY-XMY-YMX+MX\cdot MY]=$$

$$=M[XY-XMY-YMX+MX\cdot MY]=MXY-2MX\cdot MY+MX\cdot MY=MXY-MX\cdot MY$$

Эта формула верна, так как верна следующая формула.

Пусть $\varphi(x_1,...,x_n)=\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(x_{l_1},...,x_{l_n}\right)$

тогда

$$M\varphi(x_1,...,x_n)=M\sum_{l=1}^{k}\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)=\sum_{l=1}^{k}M\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)$$

$$M\varphi(x_1,...,x_n)=M\sum_{l=1}^{k}\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n=$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)f_{x_{l_1},...,x_{l_{kl}}}\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)dx_{l_1}...dx_{l_{kl}}=\sum_{l=1}^{k}M\varphi_l\left(x_{l_1},...,x_{l_{kl}}\right)$$

Если случайные величины XY независимы, то их коэффициент ковариации равен нулю, обратное в общем случае неверно.

Пример.

X – случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым мат.ожиданием $n(x,0,\sigma)$

$Y=X^2$ (Y и X связаны функционально).

Найдем

$$\operatorname{cov}(XY)=M\left[(X-0)\left(X^2-MX^2\right)\right]=M\left[X^3-XMX^2\right]=MX^3-MX^2\cdot MX=$$

$$=\left|\begin{matrix}MX=0\\ MX^3=0\end{matrix}\right|=0$$

Случайная величина $\frac{X-MX}{\sigma x}$ называется <u>нормированной</u> случайной величиной, ее мат.ожидание равно 0, а дисперсия –1.

$$\frac{M(X-MX)}{\sigma x}=\frac{1}{\sigma x}M(X-MX)=\frac{(MX-MX)}{\sigma x}=0$$

$$D\left(\frac{X-MX}{\sigma x}\right)=\frac{1}{\sigma x}D(X-MX)=\frac{DX}{\sigma x^2}=\frac{\sigma x^2}{\sigma x^2}=1$$

<u>Коэффициентом корреляции</u> случайных величин X и Y – это число

$$\rho_{xy} = \operatorname{cov}\left(X^*, Y^*\right) = \frac{M(X-MX)(Y-MY)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$X^* = \frac{X-MX}{\sigma_x}$$

$$Y^* = \frac{Y-MY}{\sigma_y}$$

$$D(X \pm Y) = M[X \pm Y - M(X \pm Y)]^2 = M[X \pm Y - MX \mp MY]^2 =$$
$$= M[(X-MX) \pm (Y-MY)]^2 = M\left[(X-MX)^2 \pm 2(X-MX)(Y-MY) + (Y-MY)^2\right] =$$
$$= M(X-MX)^2 \pm 2M(X-MX)(Y-MY) + M(Y-MY)^2 = DX \pm 2\operatorname{cov}(XY) + DY$$

Следствие:

Если X и Y независимы, то коэффициент ковариации равен 0, то $D(X \pm Y) = DX \pm DY$

Доказать, если $x_1, x_2, ..., x_n$ независимы, то

$$D\sum_{i=1}^{n} \pm x_i = \sum_{i=1}^{n} Dx_i$$

$$D\sum_{i=1}^{n} \pm x_i = M\left[\sum_{i=1}^{n} \pm x_i - M\sum_{i=1}^{n} \pm x_i\right]^2 = M\left[\sum_{i=1}^{n} \pm x_i - \sum_{i=1}^{n} M \pm x_i\right]^2 = M\left[\pm\sum_{i=1}^{n}(x_i \pm Mx_i)\right]^2 =$$
$$= M\left[\sum_{i=1}^{n} \pm x_i - \sum_{i=1}^{n} M \pm x_i\right]^2 = M\left[x_1 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i - M\left(x_1 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i\right)\right]^2 = M\left[x_1 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i - Mx_1 \pm \sum_{i=2}^{n} x_i\right]^2 =$$
$$= M\left[(x_1 - Mx_1) \mp \left(\sum_{i=2}^{n} x_i - M\sum_{i=2}^{n} x_i\right)\right]^2 =$$
$$= M\left[(x_1 - Mx_1)^2 \mp 2(x_1 - Mx_1)\left(\sum_{i=2}^{n} x_i - M\sum_{i=2}^{n} x_i\right) + \left(\sum_{i=2}^{n} x_i - M\sum_{i=2}^{n} x_i\right)\right]^2 =$$
$$= M\left[(x_1 - Mx_1)^2 + \left(\sum_{i=2}^{n} x_i - M\sum_{i=2}^{n} x_i\right)^2\right] = M\left[\sum (x_i - Mx_i)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} Dx_i$$

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le \rho_{xy} \le 1$

По определению

$$D\left(X^* \pm Y^*\right) = DX^* + DY^* \pm 2\operatorname{cov}\left(X^*Y^*\right) = 1 + 1 \pm 2\rho_{xy} = 2\left(1 \pm \rho_{xy}\right)$$

так как $D\left(X^* \pm Y^*\right)$ всегда неотрицательна, то

$$2\left(1 \pm \rho_{xy}\right) > 0 \Rightarrow -1 \le \rho_{xy} \le 1$$

2. Если $\left|\rho_{xy}\right| = 1$, то с вероятность 1 X и Y связаны линейно.

$\rho_{xy} = 1$

Рассмотрим X*–Y*, отсюда M(X*–Y*)=0.

$$D\left(X^* - Y^*\right) = 1 + 1 - 2\rho_{xy} = 1 + 1 - 2 = 0$$

Если X и Y дискретные случайные величины, и дисперсия равна 0, то их сумма (разность) является постоянной

$$X^* - Y^* = 0 \qquad M\left(X^* - Y^*\right) = 0$$

Пусть X и Y непрерывные случайные величины, то в соответствии с неравенством Чебышева

$$P\left(\left|X - MX\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{DK}{\varepsilon^2}$$

так как $D\left(X^* - Y^*\right) = 0$

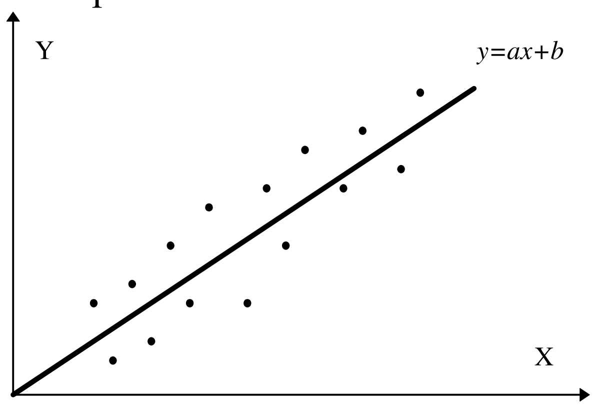
$$P\left(\left|X^* - Y^*\right| \ge \varepsilon\right) = 0 \;\Rightarrow\; X^* = Y^* \;\Rightarrow\; y = ax + b$$

Это неравенство и обозначает, что с вероятностью 1

$$\frac{x - \nu_x}{\sigma_x} = \frac{y - \nu_y}{\sigma_y}$$

откуда y=ax+b, где $a = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}, b = \nu_y - \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\nu_x$

Если коэффициент корреляции $\left|\rho_{xy}\right| = 1$, то результаты опыта лежат на прямой



В общем случае Y можно представить в виде

$$y = ax + b + z \qquad DZ = \sigma_y^2\left(1 - \rho_{xy}\right)^2$$

Коэффициент корреляции является мерой близости линейной связи между случайными величинами X и Y: чем ближе коэффициент корреляции по модулю к 1, тем более тесно результаты конкретного испытания над X и Y соотносятся с прямой ax+b.

Нахождение плотности вероятности суммы двух независимых случайных величин

Дискретный случай.

Пусть X и Y – две дискретные независимые величины данного испытания и Z=X+Y. Возможное значение Z=z=x+y всегда представляет сумму двух возможных значений слагаемых X=x и Y=y. По правилу сложения

$$P(Z = z) = \sum_{x+y=z} P(X = x, Y = y)$$

где суммирование распространено на те пары, которые в сумме дают Z. В силу независимости X и Y

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Приняв во внимание, что y=z–x

$$P(Z = z) = \sum_{x+y=z} P(X = x)\cdot P(Y = y) = \sum_{x}{}^{©} P(X = x)\cdot P(y = z - x)$$

последняя сумма $\sum'$ распространяется не на все значения x, а только на такие, для которых z-x равно одному из возможных значений y.

Если условиться, что P(y=z-x)=0, если z-x не принадлежит к числу возможных значений Y, то

$$P(Z = z) = \sum_{x} P(X = x)\cdot P(y = z - x) \quad (1)$$

Аналогично

$$P(Z = z) = \sum_{y} P(Y = y)\cdot P(x = z - y) \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) определяют композицию величин X и Y.

Или

$$P_z(z) = \sum_{x} P_x(x)P_y(z - x)$$

$$P_z(z) = \sum_{y} P_y(y)P_x(z - y)$$

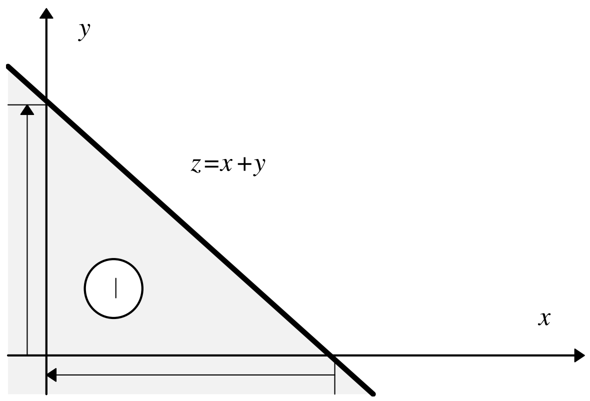
Непрерывный случай.

Пусть X и Y независимые непрерывные случайные величины. Пусть f(x,y) – двумерная плотность вероятности двумерной случайной величины XY. Плотность совместного распределения f(x,y) в силу независимости X и Y имеет вид

$$f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$$

Рассмотрим функцию распределения случайной величины Z.

$$F_z(z)=P(Z<z)=P(x+y\le z)$$



Для того, чтобы имело место событие $Z\le z\Leftrightarrow x+y=z,\ z-$действительное число необходимо и достаточно, чтобы случайная точка Q(x,y) попала в область 1.

Тогда эта вероятность равна

$$P(Z<z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x}f_x(x)f_y(y)dydx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y}f_x(x)f_y(y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\left[\int_{-\infty}^{z-x}f_y(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_y(y)\left[\int_{-\infty}^{z-y}f_x(x)dx\right]dy$$

$$f_z(z)=\frac{d}{dz}F_z(z)=\frac{d}{dz}P(Z<z)$$

Дифференцируя под знаком интеграла

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)\left[\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{z-x}f_y(y)dy\right]dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_y(y)\left[\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{z-y}f_x(x)dx\right]dy=$$

$$=\left|\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x}f(u)du=f(x),\ \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x-a}f(u)du=f(x-a)\right|=\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)f_y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f_y(y)f_x(z-y)dy$$

Двумерное нормальное распределение

Двумерная случайная величина XY распределена нормально, если ее плотность вероятности f(x,y) имеет вид

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left(\left(\frac{x-\nu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\nu_y}{\sigma_y}\right)^2-2\rho_{xy}\frac{x-\nu_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-\nu_y}{\sigma_y}\right)}$$

Свойства двумерного нормального распределения

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

2.
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\cdot e^{-\frac{1(x-\nu_x)^2}{2\sigma_x^2}} = n(x,\nu_x,\sigma_x)$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}\cdot e^{-\frac{1(y-\nu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = n(y,\nu_y,\sigma_y)$$

т. е. X и Y имеет одномерное нормальное распределение.

$$f_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[\frac{(x-\nu_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\nu_y)^2}{\sigma_y^2}-2\rho_{xy}\left(\frac{x-\nu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\nu_y}{\sigma_y}\right)\right]}dy$$

Сделаем подстановку $\upsilon = \dfrac{y-\nu_y}{\sigma_y}$ $\quad dy = \sigma_y d\upsilon$

$$f_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[u^2+\upsilon^2-2\rho_{xy}u\upsilon\right]}\sigma_y d\upsilon$$

тут мы для краткости обозначили

$$u = \frac{x-\nu_x}{\sigma_x}$$

$$f_x(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left[u^2+\upsilon^2-2\rho_{xy}u\upsilon\right]}d\upsilon$$

Прибавляя и вычитая в показателе степени по e по $\rho_{xy}^2 u^2$

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi\sigma_x\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left(\nu-\rho_{xy}u\right)^2} d\upsilon$$

Сделаем подстановку

$$z=\frac{\nu-\rho_{xy}u}{\sqrt{1-\rho_{xy}^{2}}}$$

$$d\upsilon=\sqrt{1-\rho_{xy}^{2}}\,dz$$

$$f_x(x)=\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2\pi\sigma_x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{2\pi\sigma_x}e^{-\frac{u^2}{2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_x}e^{-\frac{(x-\nu)^2}{2\sigma_x^2}}$$

3. $\rho_{xy}=0$ то X и Y независимые случайные величины, то плотность вероятности двумерная распадается на произведение одномерных

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x}e^{-\frac{(x-\nu_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{2\pi\sigma_y}e^{-\frac{(x-\nu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

Найдем условную плотность вероятности

$$f(y/x)=\frac{f_{xy}(x,y)}{f_x(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left(u^2+\nu^2-2\rho_{xy}u\nu\right)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}\div\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left(\nu^2-2\rho_{xy}u\nu+\rho_{xy}^2u^2\right)}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}=\frac{e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{xy}^2\right)}\left(\nu-\rho_{xy}u\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}$$

Подставляя в полученное выражение значения $u=\dfrac{x-\nu_x}{\sigma_x}$ и $\nu=\dfrac{y-\nu_y}{\sigma_y}$ получаем

$$f(y/x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}\left[y-\nu_y-\rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\nu_x)\right]}/\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}}$$

Вывод: условная плотность вероятности оказалось нормальной с мат. ожиданием

$$\nu_y+\rho_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\nu_x)$$

и дисперсией, постоянной

$$\sigma_y=\sqrt{1-\rho_{xy}^2}$$

ВОПРОСЫ И ОТВЕТЫ

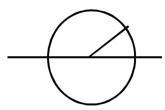
Вопросы

1. Основные понятия теории вероятностей: события, вероятность события, частота события, случайная величина.
2. Сумма и произведение событий, теоремы сложения и умножения вероятностей.
3. Дискретные случайные величины. Ряд, многоугольник и функция распределения.
4. Непрерывные случайные величины. Функция и плотность распределения.
5. Функция распределения; квантиль и а – процентная точка распределения.
6. Формула полной вероятности и теорема гипотез.
7. Числовые характеристики случайных величин: моменты; дисперсия; и среднеквадратичное отклонение.
8. Равномерное распределение, его числовые характеристики.
9. Биномиальное распределение, распределение Пуассона.
10. Нормальное (Гауссовское) распределение, стандартные нормальные распределения.
11. Независимые и зависимые случайные величины: ковариация, корреляция, коэффициент корреляции.
12. Теоремы о числовых характеристиках.
13. Закон больших чисел, неравенства и теоремы Чебышева, Бернулли.
14. Центральная предельная теорема теории вероятностей.
15. Доверительные интервалы.

Ответы

Ответ на вопрос 1

X – случайная величина.



x – значение случайной величины.

φ – непрерывная случайная величина

Результатом испытания является <u>событие</u>.

Частостью наступления события A в n испытаниях называется число

$$W_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

Каждому событию A ∈ F ставим в соответствие число P(A), которое называется вероятностью наступления события A. Такая операция задает вероятностную меру.

Случайной величиной называется измеримая числовая скалярная функция $\varphi(\omega)$, элементами которой являются элементарные события.

Дискретная случайная величина – можно пересчитать.

Практически не возможное событие, вероятность которого близка к нулю 0 (0,01; 0,1).

Практически достоверное событие, вероятность которого близка к единице 1 (0,99; 0,9888).

Ответ на вопрос 2

Сумма событий и произведение событий.

A,B,….,G – события

Суммой событий называется некоторое событие S=A+B+….+G=A∪B∪….∪G, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример: Допустим идет стрельба по мишени

A_1 – попадание при первом выстреле

A_2 – попадание при втором выстреле

$S=A_1+A_2$ (хотя бы одно попадание)

Произведением некоторых событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. S=ABC…G= $A \cap B \cap C \cap ... \cap G$

Пример: A_1 – промах при первом выстреле

A_2 – промах при втором выстреле

A_3 – промах при третьем выстреле

$S = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$ (не одного попадания)

<u>Теорема сложения вероятностей</u>

Вероятность двух не совместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

P(A) P(B)

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

$S=S_1+S_2+\ldots+S_n$

$P(S)=P(S_1)+P(S_2)+\ldots+P(S_n)$

Следствие: Если событие S_1, S_2, …, S_n образуют полную группу не совместных событий, то сумма их вероятностей равна 1.

$$P(S)=\sum_{i=1}^{n} P(S_1)=1$$

<u>Противоположными событиями</u> называются два не совместных события, образующие полную группу

. $A, \overline{A}$ (пример – монетка имеющая орел и решка)

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

$$P(\overline{A})=1-P(\overline{A})$$

Если два события A и B совместны, то вероятность совместного появления двух событий вычисляется по формуле: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

<u>Условие независимости</u> события A от события B: $P(A|B)=P(A)$, то $P(B|A)=P(B)$

<u>Условие зависимости</u> события A от события B: $P(A|B)\neq P(A)$, $P(B|A)\neq P(B)$ (Если A не зависит от B, то и B не зависит от A – условие не зависимости условий взаимно).

<u>Вероятность произведения двух событий</u> равна произведению вероятности одного из событий на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что событие первое имело место:

$P(AB)=P(A)P(B|A)$, $P(AB)=P(B)P(A|B)$

Следствие: Вероятность произведения нескольких не зависимых событий равна произведению вероятностей этих событий. $P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

Пример: на монете выпадет орел 2 раза

$S=A_{op}A_{op}$ $S=P^2(A)=(1/2)^2=1/4$

Ответ на вопрос 3

Закон распределения случайных величин

Ряд и многоугольник распределений. ***Случайная величина*** – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение не известное заранее какое.

Большие буквы – случайные величины. Малые буквы – их возможные решения.

Рассмотрим случайную дискретную величину X с возможными значениями $x_1, x_2, \ldots, x_n$

В результате опыта : $\begin{cases} X = x_1 \\ X = x_2 \\ \quad .... \\ X = x_n \end{cases}$

Обозначим вероятность соответствующих событий через P_i

$P(x_i) = P_i \qquad (i = 1,2,...,n)$, так как рассматриваемые события образуют полную группу не совместных событий, то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

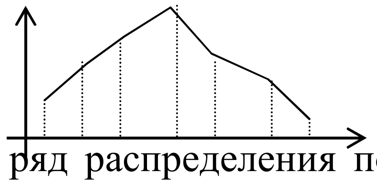
X полностью описана с вероятностной точки зрения, если мы зададим распределение вероятности $p_i(i=1,2\ldots,n)$, то есть в точности указаны решения вероятности p_i каждого события x_i

Этим будет установлен закон случайной величины x_i.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение устанавливающее связь между возможными значениями случайных величин и соответствующими вероятностями.

Простейшей формой записи законов распределения является таблица:

X	x1, x2, …, xn
P	p1, p2, …, pn



Многоугольник и ряд распределения полностью характеризует случайную величину и является одной из форм законов распределения. (Для непрерывной случайной величины построить невозможно).

Ответ на вопрос 4

Плотность и функция распределения

Функция распределения непрерывной случайной величины (X), задана выражением:

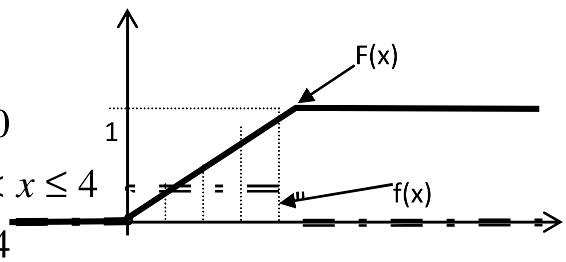
$$X: F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0 \\ a \cdot x & при \quad 0 < x \le 4 \\ 1 & при \quad x > 4 \end{cases}$$

a) Найти коэффициент a

b) Найти плотность распределения F(x)

c) Найти вероятность попадания случайной величины на участок P(0,5<x<3)=?

d) Построить график функций



F(4)=1 –> a4=1, a=0,25

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0 \\ a = 0{,}25, \quad 0 < x \le 4 \\ 0, \quad x > 4 \end{cases}$$

$$P(0{,}5 < x < 3) = \begin{cases} F(3) - F(0{,}5) = 0{,}75 - 0125 = 0{,}625 \\ 0{,}25 \int\limits_{0{,}5}^{3} dx = 0{,}25 \cdot x\Big|_{0{,}5}^{3} = 0{,}25(3 - 0{,}5) = 0{,}625 \end{cases}$$ –

два способа решения.

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Ответ на вопрос 5

Функция распределения

Для непрерывной случайной величины X вместо вероятности равенства X=x используют вероятность P(X<x). F(x)=P(X<x)

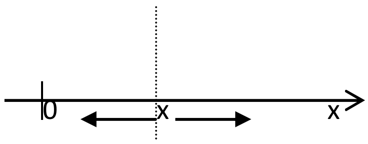
F–функция распределения случайной величины x

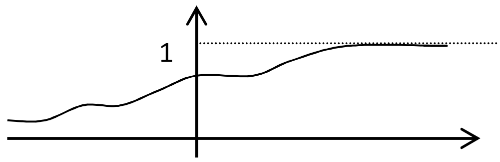
F(x) – интегральный закон распределения или интегральная функция распределения.

F(x) – самая универсальная характеристика случайной величины, она существует для всех случайных величин как дискретных так и непрерывных.

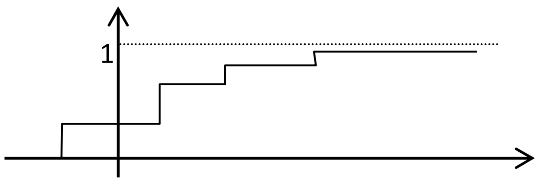
Основные свойства функции распределения

1. Функция распределения F(x) есть не убывающая функция своего аргумента, т. е. при $x_2>x_1$ $F(x_2)>=F(x_1)$
2. При $x=-\infty$ функция распределения F(x)=0; $F(-\infty)=0$
3. При $x=+\infty$ F(x)=1; $F(+\infty)=1$



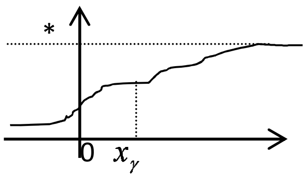


Для дискретной случайной величины: $F(x)=\sum\limits_{x_i<x} P(X=x_i)$



Функция распределения любой дискретной случайной величины всегда есть разрывная ступенчатая функция, скачки которых происходят в точках соответствующих возможных значений случайных величин и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков равна 1.

F(x) непрерывной случайной величины



Часто используют величины квантиль x_γ и α – процентная точка x_α

Квантиль – решение уравнения $F(x-\gamma)=\gamma'$

α – процентная точка определяется из уравнения $F(x_\alpha)=1-\alpha$

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x_\gamma)=\gamma \leftrightarrow P(x<x_\gamma)=\gamma; \\ F(x_\alpha)=1-\alpha \leftrightarrow P(x\ge x_\alpha)=\alpha \end{array}}$$

Ответ на вопрос 6

Формула полной вероятности

Пусть требуется определить вероятность некоторого события А, которое может произойти вместе с одним из событий H_1, H_2, …, H_n, образующие полную группу не совместных событий. Эти события назовем гипотезами. Докажем, что в этом случае вероятность событий:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i)$$

Вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе.

$A=H_1A+H_2A+...+H_NA$ применяем 2^{е} теоремы:

$$P(A)=P(H_1A)+...+P(H_nA)=P(H_1)P(A|H_1)+...+P(H_n)P(A|H_n)$$

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)\ \text{– формула полной вероятности}}$$

Теорема гипотез (формула Байеса)

Пусть вероятность полной группы не совместных гипотез H_1, H_2, …, H_n известны и равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. Событие А может появиться совместно с условной вероятностью $P(A|H_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Спрашивается, как следует изменить вероятности гипотез после проведения опытов в связи с появлением этого события. Иными словами, требуется найти условную вероятность $P(H_i,A)$.

$$P(AH_i)=P(A)P(H_i|A)=P(H_i)P(A|H_i)$$

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

Формула Байеса:
$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i)}$$

$$(i=1,2,...,n)$$

Ответ на вопрос 7

Числовые характеристики случайных величин

$$\begin{cases} f(x) = F'(x) \\ F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(a)da \end{cases}$$

Закон распределения случайных величин, представленный в той или иной форме, дает исчерпывающее описание случайной величины. Наиболее существенные особенности распределения в компактной форме описываются так называемыми числовыми характеристиками случайных величин. Они играют в теории вероятностей огромную роль, с их помощью облегчается решение вероятностных задач. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся числовые характеристики.

Характеристики положения

Мат. Ожидание   Мода   Медиана

Важнейшая характеристика *математическое ожидание*, которая показывает среднее значение случайной величины.

Математическое ожидание величины X обозначается M[X], или m_x.

Для дискретных случайных величин *математическое ожидание*:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i, где \quad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Сумма значений соответствующего значения на вероятность случайных величин.

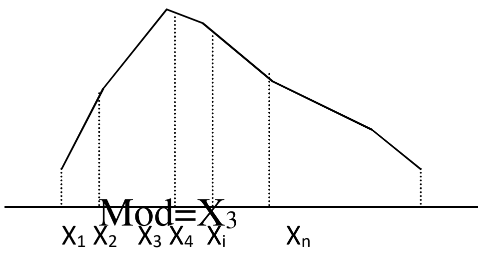
$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, где \quad f(x) - плотностьраспределения.X$$

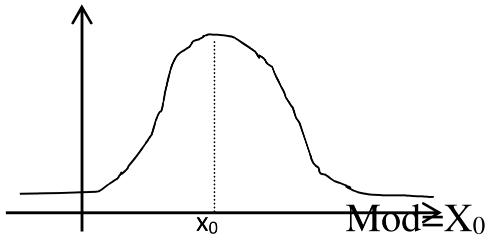
$$p_i = \frac{1}{n}; \quad m_x = M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Модой (Mod) случайной величины X называют ее наиболее вероятное значение.

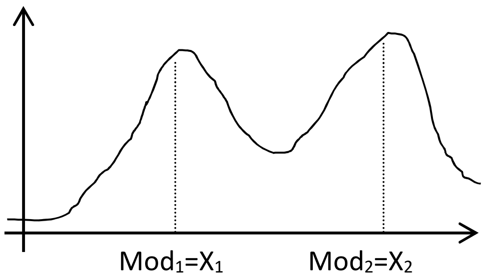
Для дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины.





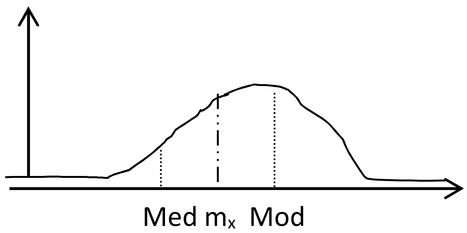
Одно-модальное распределение



Много модальное распределение

В общем случае Mod и *математическое ожидание* не совпадают.

Медианой (Med) случайной величины X называют такое значение, для которой вероятность того что P(X<Med)=P(X>Med). У любого распределения Med может быть только один.



Med разделяет площадь под кривой на 2 равные части.

В случае одно-модального и симметричного распределения

mx=Mod=Med

Моменты

Чаще всего на практике применяются моменты двух видов начальное и центральное.

Начальный момент. ρ-го порядка дискретной случайной величины X называется сумма вида:

$$d_\rho = M\left[X^\rho\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^\rho p_i \qquad d_\rho = d_\rho[X]$$

Для непрерывной случайной величины X начальным моментом ρ порядка называется интеграл $d_\rho = d_\rho[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\rho f(x)dx$, очевидно, что математическое ожидание случайной величины есть первый начальный момент. $d_1 = M\left[X^1\right] = M[X] = m_x$

Пользуясь знаком (оператором) M, начальный момент ρ-го порядка можно представить как мат. ожидание ρ-ой степени некоторой случайной величины.

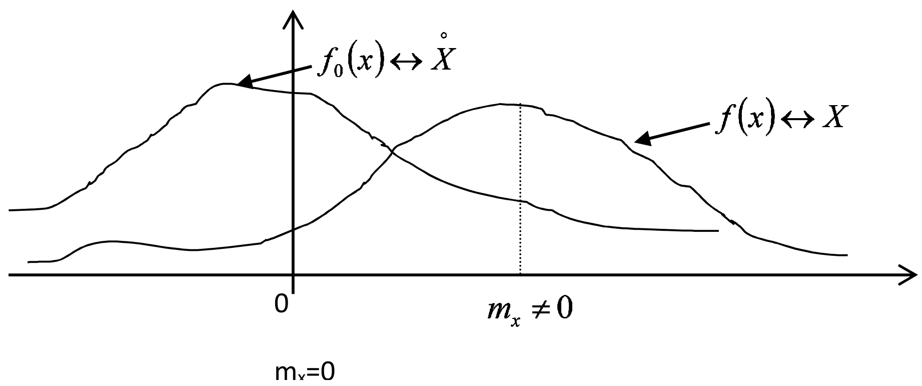
$$d_\rho[X] = M\left[X^\rho\right]$$

Центрированной случайной величиной соответственной случайной величины X называют отклонение случайной величины X от ее математического ожидания:

$\overset{\circ}{X} = X - m_x$ Математическое ожидание центрированной случайной величины равно 0.

Для дискретных случайных величин имеем:

$$M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{(x_i - m_x)}_{m_x}p_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n}}_{1} x_i p_i - m_x\sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x \cdot 1 = 0$$



Моменты центрированной случайной величины носят название ***Центральных моментов***

Центральный момент порядка ρ случайной величины X называют математическим ожиданием ρ-ой степени соответствующей центрированной случайной величины.

$$\mu_\rho = M\left[\overset{\circ}{X}{}^\rho\right] = M\left[(X - m_x)^\rho\right]$$

Для дискретных случайных величин:

$$\mu_\rho = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^\rho \, p_i$$

Для непрерывных случайных величин:

$$\mu_\rho \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^\rho f(x) dx \qquad (\rho = 1,2,\ldots,n)$$

$$\mu_1 = 0 \quad , т.к. \quad \mu_1 = M\left[\overset{\circ}{X}\right] = M\left[(x - m_x)^\rho_{1^0}\right] = 0$$

Связь между центральными и начальными моментами различных порядков

$$\mu_2 = M\left[\left(\underbrace{X - m_x}_{X_0}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\sum_{i=1}^{n} m_x x_i p_i + m_x^2 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \alpha_2 - 2m_x^2 + m_2^2 = \alpha_2 - m_x^2$$

$$\mu_2 = \alpha_2 - m_x^2$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m_x^3$$

Из всех моментов в качестве характеристики случайной величины чаще всего применяют первый момент (мат. ожидание) $\alpha_1 = m_x$ и второй центральный момент μ_2.

Второй центральный момент называют *дисперсией* случайной величины. Он имеет обозначение:

$$\mu_2 = D[X] = D_x$$

Согласно определению $D[X] = M\left[(X - m_x)^2\right]$

Для дискретной случайной величины: $D[X] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i$

Для непрерывной случайной величины:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx$$

Дисперсия случайной величины есть характеристика рассеянности (разбросанности) случайных величин X около ее математического ожидания.

Дисперсия означает рассеивание. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Для наглядной характеристики рассеивания удобнее использовать величину, m_y той, что и размерность случайной величины. С этой целью из дисперсии извлекают корень и получают величину, называемую – ***среднеквадратичным отклонением (СКО)*** случайной величины X, при этом вводят обозначение:

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{D[X]}$$

Среднеквадратичное отклонение иногда называют "стандартом" случайной величины X.

Итак: $$\begin{cases} D_x = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] = \mu_2 = \sigma_x^2 \\ D_x = \alpha_2 - m_x^2 \end{cases}$$

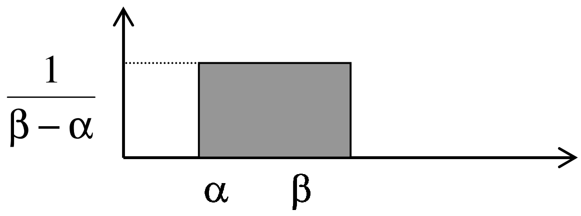
Математическое ожидание m_x и D_x (или СКО σ_x) наиболее частые употребляемые характеристики случайных величин, так как они определяют наиболее важные черты распределения, его положения и степень разбросанности.

Ответ на вопрос 8

Равномерное распределение

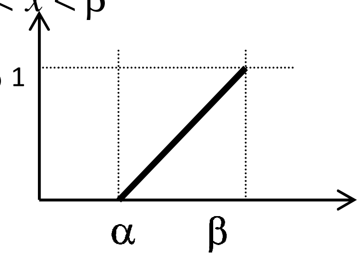
Равномерная плотность распределения определяется следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \alpha < x < \beta \\ 0, & x > \beta \end{cases}$$



Функция распределения определяется:

$$f(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \int_{\alpha}^{x} \dfrac{1}{\beta - \alpha} dx, & \alpha < x < \beta \\ 1, & x > \beta \end{cases}$$



$$\int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{x} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} x \Big|_{\alpha}^{x} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha<x<\beta \\ 1, & x>\beta \end{cases}$$

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & x<\alpha \\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}, & \alpha<x<\beta \\ 0, & x>\beta \end{cases}$$

Найдем числовые характеристики:

$$M[x]=m_x=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} xdx=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{\alpha}^{\beta}=\frac{\beta^2\cdot\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2}$$

$m_x=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$ (математическое ожидание)

$Med=m_x=\dfrac{\beta+\alpha}{2}$ (медиана), Mod – не существует для данного распределения

$$D[X]=\sigma_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 dx\left|\begin{matrix} x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}=y \\ dx=dy\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\frac{\alpha-\beta}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}} y^2dy=\frac{1}{3(\beta-\alpha)}\cdot\left. y^3\right|_{\frac{\alpha-\beta}{2}}^{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\frac{1}{3(\beta-\alpha)}\left[\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3\right]=$$

$$=\frac{1}{24(\beta-\alpha)}\left[(\beta-\alpha)^3+(\beta-\alpha)^3\right]=\frac{2(\beta-\alpha)^3}{24(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

$D[X]=\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{12}$ (дисперсия), $\sigma_x=\dfrac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$ (среднеквадратичное отклонение)

Ответ на вопрос 9

Закон распределения Пуассона

Рассмотрим дискретную случайную величину x, имеющую ряд распределения:

X	$X_0=0$	$X_1=1$	…	$X_m=m$	…
P	P_0	P_1	…	P_m	…

$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$ Говорят, что данное случайное распределение подчинено закону распределения Пуассона.

$$M[X] = m_x = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i$$

$$M[X]m = m_x = \sum_{m=0}^{+\infty} m \cdot P_m = \sum_{m=1}^{+\infty} mP_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m \cdot a^m}{m!} e^{-a} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a \cdot a^{m+1}}{(m=1)!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = ae^{-a}e^{a} = a$$

(k=m-1)

$$\begin{cases} M[X] = a = m_x \\ D_x = a \end{cases}$$

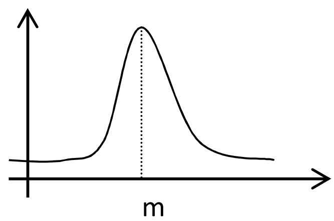
Ответ на вопрос 10

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Главная особенность в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие распределения, при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}}$$



$$M[X] = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{c} \frac{x-m}{\sigma} = t \\ x = \sigma t + m \\ dx = \sigma td \end{array} \right|$$

$$mx = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + m) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + tm \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

$$\boxed{m_x = m}$$

Можно показать, что дисперсия

$D_x = \sigma_x^2 = \sigma^2$

Ответ на вопрос 11

Независимые случайные величины

$A(a_1 < x < a_2)$ $\qquad$ $B(b_1 < y < b_2)$

Случайные величины ***x*** и ***y*** независимы если вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Для зависимых величин ***x*** и ***y*** вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) \neq P(A) \cdot P(B)$

Корреляционным моментом или ***Ковариацией*** случайных величин x и y называют величину:

$$M[(x - m_x)(y - m_y)] = K_{xy} = \mathrm{cov}(x, y)$$

Можно показать, что для независимых случайных величин cov(x,y)=0

Коэффициент корреляций $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \dfrac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{cov}(x, y) = \mathrm{cov}(y, x) \\ r_{xy} = r_{yx} \end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} -1 \le r_{xy} \le +1 \\ |r_{xy}| \le 1 \end{array}$$

Случайные величины $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, называются не коррелированными, если $\begin{array}{l} \mathrm{cov}(x_i, x_j) = 0 \\ (i \neq j) \end{array}$

Ответ на вопрос 12

Теорема о числовых характеристиках

I. Если ***c*** не случайная (детерминированная) величина, то M[c]=c и D[c]=0

$$D[c] = M\left[(c - M[c])^2\right] = M\left[(c - c)^2\right] = M[0] = 0$$

II. Если ***c*** не случайная – постоянная, а X случайная (детерминированная), то:

$$M[cx] = cM[x]$$

$$M[cX] = \int_{-\infty}^{+\infty} cxf(x)dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = CM[x]$$

$$D[cX] = C^2 D[x]$$

$$D[cX] = M\left[(cx - M[cx])^2\right] = M\left[(cx - cM[x])^2\right] = c^2 M\left[(x - M[x])^2\right] = c^2 D[x]$$

III. Математическое ожидание суммы нескольких величин равно сумме их ожиданий.

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} M[x_i]$$

IV. Математическое ожидание линейной функции равно той же линейной функции от математических ожиданий аргументов.

$$M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i M[x_i] + b$$

V. Дисперсия суммы двух случайных величин равна сумме их дисперсий плюс удвоенный их корреляционный момент.

$$D[x+y] = D[x] + D[y] + 2K_{xy}$$

$$Z = x + y \quad M[x] = m_x \quad M[y] = m_y$$

$$m_z = m_x + m_y$$

$$Z - m_z = x - m_x + y - m_y$$

$$\overset{\circ}{Z} = \overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{Y}$$

$$D[Z] = M\left[\overset{\circ}{Z}{}^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2 + \overset{\circ}{Y}{}^2 + 2\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[\overset{\circ}{X}{}^2\right] + M\left[\overset{\circ}{Y}{}^2\right] + 2M\left[\overset{\circ}{X}\,\overset{\circ}{Y}\right] =$$

$$= D[Z] = D[x] + D[y] + 2K_{xy}$$

В общем случае:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D[x_i] + 2\sum_{i<j} K_{ij}\text{, где } K_{ij} = M\left[\overset{\circ}{X}_i\,\overset{\circ}{X}_j\right] \quad (j \neq i)$$

Для не корреляционных случайных величин:

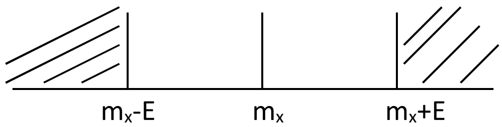
$$D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a^2 D[x_i]$$

Ответ на вопрос 13

В широком смысле слова, закон больших чисел характеризует устойчивость средних. При очень большом числе случайных явлений – перестает быть случайным и может быть предсказан с большей степенью определенности. В узком смысле под законом больших чисел понимается ряд математических теорем, в которых устанавливаются факты приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным. Другая группа предельных теорем касается уже не предельных значений случайных величин, а предельных законов распределения. Эта группа теорем известна под названием "*центральной предельной теоремы*".

Неравенство Чебышева.

$P(|X-m_x| > E) <= D_x/E^2$



Теорема Чебышева

Теорема Чебышева дает одну из наиболее возможных форм закона больших чисел. Она устанавливает связь между средним арифметическим и ее математическим ожиданием наблюденных значений случайной величины.

$$Y_n = (X_1 + X_2 + \ldots. + X_n) * 1/n = 1/n \sum_{i=1}^{n} Xi$$

$$M[Yn] = i/n \sum_{i=1}^{n} M[Xi] = 1/n * \sum_{i=1}^{n} m_x = 1/n * n * m_x = m_x$$

$$\boxed{M[Y_n] = m_x}$$

Мат ожидание среднего не зависит от n

$$D[Y_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{1}{n^2} * \sum_{i=1}^{n} D_x = \frac{n \bullet D_x}{n^2} = \frac{D_x}{n}$$

$$\boxed{D[Y_n] = \frac{D_x}{n}}$$

Теорема Чебышева устанавливает в точной количественной форме это свойство устойчивости среднего арифметического.

Теорема Чебышева: При достаточно большом числе независимых опытов среднее арифметическое наблюденных значений случайной величины сходится по вероятности ***п*** т ее математическому ожиданию.

В *математической форме* это означает следующее:
$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1-\delta$, где ε и δ сколь угодно положительные числа $\delta > 0$и $\varepsilon > 0$.

Теорема Бернулли

Теорема Бернулли: При неограниченном увеличении числа опытов ***n***, частота события а сходится по вероятности к его вероятности ***P***

$P_n^* = \frac{m}{n}$ – (вероятность). m-произошло событие. n-число опытов.

$\boxed{\varepsilon > 0 \;\; \delta > 0 \text{ близко к } 0}$

$$P_1\left(\left|P_n^* - P\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1-\delta$$

Ответ на вопрос 14

Центральная предельная теорема

Рассмотрим одну из наиболее общих форм центральной предельной теоремы:

Пусть имеется взвешенная сумма независимых случайных непрерывных величин x_1, x_2, x_3, …., x_n с ***произвольными*** законами распределения:

$Y_n = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$, где a_i постоянная, фиксированная числа.

Пусть i-ая случайная величина имеет m_i и σ_i^2 (i=1,2,3,…,n-1,n)

Согласно теореме о числовых характеристиках случайных величин, получим:

$$M[Y_n]=\sum_{i=1}^{n}a_iM[X_i]=m_y$$

$$D[Y_n]=\sum_{i=1}^{n}a_i^2D[X_i]=\sigma_y^2$$

Центральная предельная теорема утверждает, что при достаточно общих условиях распределения суммарной Y_n при $n\to\infty$ стремиться к нормальному распределению $N(m_y,\sigma_y^2)$

Опыт показывает, что когда $n\approx 10$ или меньше, то закон распределения суммы может быть заменен нормальным.

Ответ на вопрос 15

Доверительный интервал и доверительная вероятность используется в математической статистике точности и надежности полученной оценки а* неизвестного параметра а.

β = 0,95 или 0,98; 0,99 – Назначим вероятность достаточно большую.

Найдем значение интервала $\varepsilon\beta$, при котором вероятность а*-а

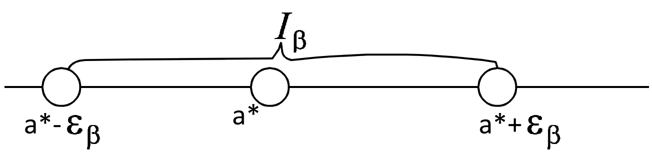
1. $P(|a^*-a|<\varepsilon_\beta)=\beta$
2. $P(a^*-\varepsilon_\beta<a<a^*+\varepsilon_\beta)=\beta$

вероятность, что выйдет за пределы интервала:

$I_\beta=(a^*-\varepsilon_\beta a^*+\varepsilon_\beta)$

Интервал, I_β покрывающий ***a*** называется доверительным интервалом.

Вероятность β называется доверительной вероятностью.



Оценка а* называется точечной оценкой.

Оценка $a^*\pm\varepsilon_\beta$ называется интервальной оценкой.

РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Задача 1

<u>Задача на схему случаев</u>

В урне 3 белых и 4 черных шара. Какова вероятность изъятия из урны трех черных шаров?

n – общее число возможных случаев изъятия 3 шаров из урны.

m – число благоприятных случаев. (все три шара черные)

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

$$P = \frac{m}{n}, \qquad n = C_7^3 = \frac{7!}{3!4!}$$

Задача 2

<u>Задача на не совместные события</u>

Мишень состоит из 2-х зон, при одном выстреле вероятность попадания в зону 1 = 0,2, в зону 2 = 0,4

Найти вероятность промаха?

A – попадание.

$\overline{A}$ – промах.

$A=A_1+A_2$; $P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$; $P(A_1A_2)=0$

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \quad P(\overline{A})=1-P(A)$$

$$\overline{A}=1-P(A_1)-P(A_2)=1-0{,}2-0{,}4=0{,}4$$

Задача 3

<u>Задача на умножение вероятностей</u>

В урне находится 3 белых и 2 черных шара. Вынимается по 2 шара.

Найти вероятность того, что оба шара белые?

A_1 – первый шар белый.

A_2 – второй шар белый.

$A=A_1A_2$

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)$$

$$P(A_1)=\frac{3}{5};$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$$

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}=0{,}3$$

Задача 4

<u>Задача на умножение вероятностей</u>

В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Вынимают по очереди 2 шара, причем первый обратно возвращают.

Какова вероятность что будут вынуты оба черных шара?

$$P(A_1)=\frac{3}{5}$$

$$P(A_2)=\frac{3}{5}$$

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{3\cdot 3}{5\cdot 5}=\frac{9}{25}=0{,}36$$

Задача 5

<u>Задача на формулу полной вероятности</u>

Имеется 3 урны.

В одной 2 белых и 1 черный шар

Во второй 1 белый и 1 черный шар.

В третьей 3 белых и 2 черных шара.

Выбирается одна из урн и из нее 1 шар. Какова вероятность, что шар черный?

А – черный шар. Р(А)=?

n=10 m=4 $P(A)=\frac{4}{10}$

Второй способ через формулу полной вероятности.
H_1; H_2; H_3;

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A|H_1)=\frac{1}{3};P(A|H_2)=\frac{1}{2};P(A|H_3)=\frac{2}{5}$$

$$\boxed{P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A|H_i)}$$

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{37}{90}=0,41$$

Задача 6

<u>Задача на теорему о повторении опытов</u>

Проводят 4 независимых опыта. Вероятность события в каждом из опыте равна 0,3

Построить ряд и многогранник числа событий.

Введем X-число появлений событий в результате проведенных опытов.

$X=X_0=0$

$X=X_1=1$

$X=X_2=2$

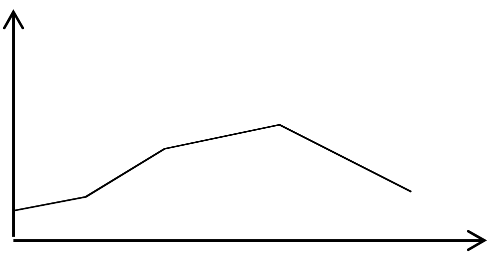
$X=X_3=3$

$X=X_4=4$

$\boxed{P_{m,n}=C_n^m P^m\cdot(1-P)^{n-m}}$ – теорема о повторении опытов.

X	0	1	2	3	4
P	0,0024	0,588			

P0,4=1*1*$0,7^4$=0,0024
P1,4=C_4^1*$0,3^1$*$0,7^3$=0,588
P2,4=C_4^1*$0,3^2$*$0,7^2$=
P3,4=C_4^1*$0,3^3$*$0,7^1$=
P4,4=C_4^1*$0,3^4$*$0,7^0$=



Задача 7

<u>Задача на подсчет вероятностей</u>

Мишень состоит из 4 зон, производится один выстрел.

Найти вероятность промаха, если вероятность попадание в зоны известна и равна:

P_1=0,1
P_2=0,15
P_3=0,20
P_4=0,25

A – попадание в мишень.
$\overline{A}$ – промах.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$
$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)=0,7$$
$$P(\overline{A})=1-0,7=0,3$$

Задача 8

<u>Задача на условную вероятность.</u>

В урне находятся 3 белых и 2 черных шара. Вынимаются 2 шара.

Найти вероятность, что оба шара белые.

A_1 – белый шар
A_2 – белый шар
$P(A_1A_2)$=?

$C=A_1A_2$

$$P(C)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)$$

$$P(A_1)=\frac{3}{5};\begin{pmatrix} m=3 \\ n=5 \end{pmatrix}$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{2}{4};\begin{pmatrix} m=2 \\ n=4 \end{pmatrix}$$

$$P(C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

Если первый шар возвращается в урну.
$P(A_1)=P(A_2)$

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=P(A_1A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

Задача 9

$$X: f(x)=\begin{cases} ax \quad при \quad 0<x<2 \\ 0 \quad при \quad x<0 или \quad x>2 \end{cases}$$

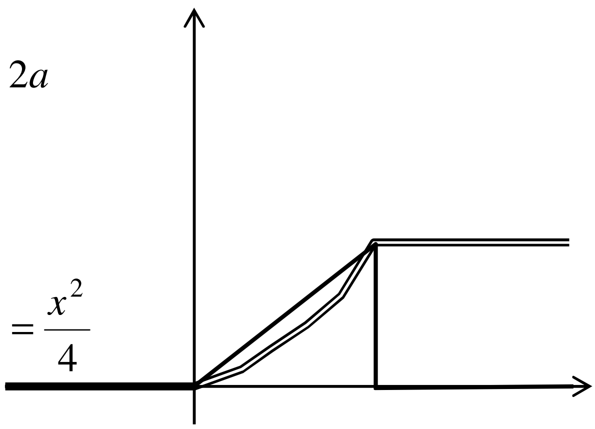
a=? F(x)=? m_x=? $D_x=\sigma_x^2=?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

$$\int_0^2 axdx=a\int_0^2 xdx=a\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2=a\cdot 2=2a$$

$$a=\frac{1}{2}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^x tdt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^x=\frac{x^2}{4}$$



$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} \quad при \quad 0<x<2 \\ 0 \quad при \quad x<0 \qquad x>0 \end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & npu \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{4} & npu \quad 0<x\le 2 \\ 1 & npu \quad x>2 \end{cases}$$

$$m_x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{8}{6}$$

$$D_x=\mu_2=M\left[(X-m_x)^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx=\alpha_2=m_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-m_x^2$$

$$\alpha_2=M\left[x^2\right]=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=2$$

$$\begin{cases} D_x=2-\dfrac{16}{9}=\dfrac{2}{9} \\ m_x=\dfrac{4}{3} \\ \sigma_x=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Данный раздел содержит 15 вариантов по 20 задач, что соответствует традиционному курсу теории вероятностей. $16^{й}$ вариант содержит 20 задач повышенной сложности. Все задачи (из первых 15 вариантов) условно разбиты на разделы:

– действия над событиями; соотношения между ними (задача №2);

– классическое определение вероятности (задачи №1,3,5);

– сложение и умножение вероятностей (задачи №4,6,7,8);

– формула полной вероятности (задачи №9,11);

– геометрические вероятности (задача №10);

– формула Бернулли (задача №12);

– наивероятнейшее число (задача №13);

– интегральная формула Муавра–Лапласа (задача №14);

– дискретные случайные величины и их числовые характеристики (задачи №15,16);

– формула Пуассона (задача №17);

– непрерывные случайные величины и их числовые характеристики (задача №18);

– нормальное распределение (задачи №19,20).

Несколько слов об обозначениях.

$F(x)$ – функция распределения случайной величины X;

$f(x)$ – плотность распределения случайной величины X;

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X;

$D(X)$ – дисперсия случайной величины X;

$\sigma(X)$ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

$P(\alpha<X<\beta)$ – вероятность попадания случайной величины на интервал $(\alpha:\beta)$.

Расчётные задания

Вариант 1

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Рабочий обслуживает 3 станка. Событие, заключающееся в том, что в течение часа первый станок потребует внимание рабочего – A_1, второй – A_2, третий – A_3. Выразить через A_i следующие события:

A – два станка потребуют внимания рабочего;

B – хотя бы один станок не потребует внимания;

C – ни один станок не потребует внимания.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма очков равна 5, а произведение 6;

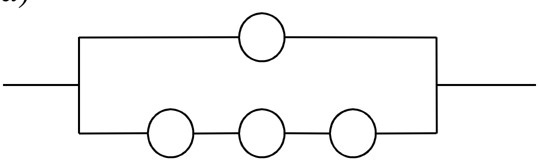
в) сумма очков не превышает 4;

г) разность очков меньше 3;

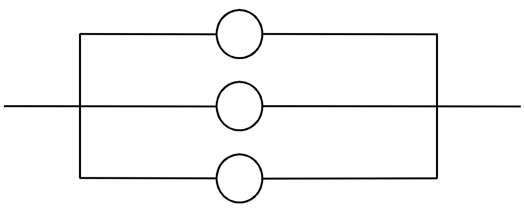
д) сумма очков расположена в промежутке [4;7].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

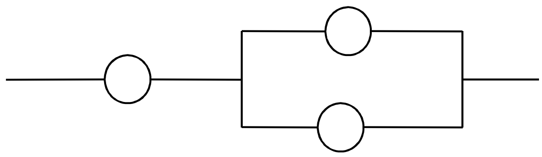
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,6. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 10 деталей, среди которых 4 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 1 очко;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 5.

8. В урне имеется 8 белых и 12 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 8 шаров, из них 2 белых, во второй урне 10 шаров, из них 7 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри квадрата со стороной 6 расположен круг диаметра 6. В квадрат наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную квадратом и окружностью.

11. Из 1000 ламп 200 принадлежат 1–й партии, 300 – 2-й партии, остальные – 3-й партии. В первой партии 6%, во второй 5%, в третьей 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Определить вероятность того, что выбранная лампа – бракованная.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 3 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 2 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $80 \le m \le 90$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,75. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-ти выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

16. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей среди 800 изготовленных станком, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 4 вызова;

б) менее 4 вызовов;

в) не менее 4 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 5e^{-5x} & x\geq 0\end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,1<X<0,35). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$. Найти вероятности P(–4<X<3), P(–2<X<1).

20. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

Вариант 2

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Четыре стрелка стреляют по мишени. Пусть A_i (i=1,2,3,4) события, обозначающие, что i-й стрелок попал в мишень. Выразить через следующие события:

A – попал в мишень только один раз;

B – в мишень не попал ни один стрелок;

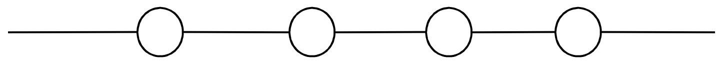
C – хотя бы один стрелок попал в мишень.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

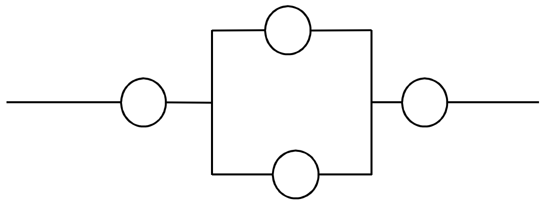
а) сумма выпавших очков равна 8;
б) сумма очков равна 6, а произведение 9;
в) сумма очков не превышает 7;
г) разность очков меньше 2;
д) сумма очков расположена в промежутке [3;10].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

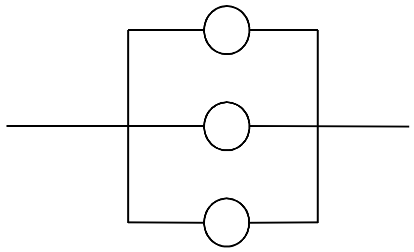
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 13 деталей, среди которых 3 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что
а) извлечённые детали качественные;
б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 3-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 2 раз;
б) ни одного раза;
с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) на каждом из выпавших граней появится 6 очков;
б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;
в) сумма выпавших очков не превысит 5.

8. В урне имеется 6 белых и 8 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 15 шаров, из них 10 белых, во второй урне 20 шаров, из них 6 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри квадрата со стороной 4 расположен круг диаметра 4. В квадрат наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в круг.

11. Радиолампа может принадлежать к одной из трёх партий с вероятностями: p_1,p_2,p_3, где $p_1=p_3=0{,}25$, $p_2=0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно: 0,1; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное число часов.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 7 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 3 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 14 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того,

что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $85 \le m \le 95$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 6-ти выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Имеется 100 изделий. Вероятность того, что отдельные изделия бракованы, равна 0,02. Найти закон распределения случайной величины X – числа бракованных изделий, пренебрегая теми значениями X, вероятность которых меньше 0,006. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 5. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 2 вызова;

б) менее 2 вызовов;

в) не менее 2 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 5e^{-5x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), $P(0,16<X<0,31)$. Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-7)^2}{8}}$$. Найти вероятности $P(2<X<6)$, $P(1 \le X \le 9)$.

20. Измерительный прибор, работая без систематических ошибок, имеет среднюю квадратичную ошибку 75 мм. Какова вероятность того, что ошибка не превзойдёт по абсолютной величине 5 мм.

Вариант 3

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Пусть A_i – событие (i=1,2,3,4), состоящее в том, что в i-ом станке возникает неполадка в течение суток. Выразить через событие A_i следующие события:

A – в трёх станках возникает неполадка в течение суток;

B – хотя бы в одном станке возникает неполадка;

C – ни в одном станке не возникает неполадка.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 4;

б) сумма очков равна 6;

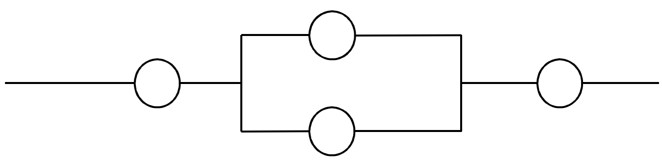
в) сумма очков не превышает 7;

г) разность очков меньше 3;

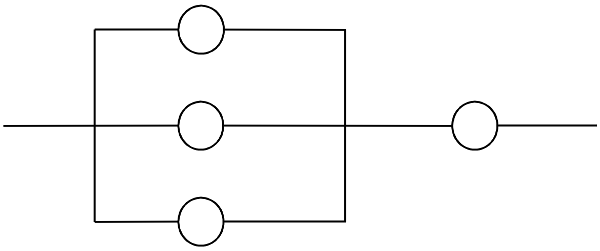
д) сумма очков расположена в промежутке [3;6].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

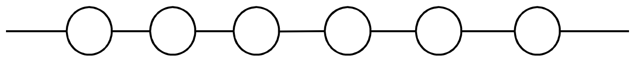
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 12 деталей, среди которых 5 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 5-и выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 5 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 4.

8. В урне имеется 6 белых и 2 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 2 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 2 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 10 шаров, из них 3 белых, во второй урне 6 шаров, из них 2 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри прямоугольника со сторонами 4 и 5 расположен круг радиуса 1. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную прямоугольником и окружностью.

11. На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%, 4%, 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 4 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 7 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,3. Куплено 13 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $83 \le m \le 93$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,75. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-ти выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Прядильщица обслуживает 1200 веретён. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Составить закон распределения случайной величины X – числа веретён, на которых произойдёт обрыв нити в течение 1 минуты, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 3 вызова;

б) менее 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 3e^{-3x} & x\geq 0\end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,17<X<0,41). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+6)^2}{32}}$. Найти вероятности P(-5<X<-2), P(-4<X<1).

20. Коробки с шоколадом со средним весом 1 кг упаковываются автоматически без систематических ошибок. Случайные ошибки подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением 0,95 кг. Найти вероятность того, что масса коробки с шоколадом не меньше 0,95 кг и не больше 1,05 кг.

Вариант 4

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Пусть A_i – событие (i=1,2,3,4), состоящее в том, что в i-й компьютер в дисплейном классе выйдет из строя в течение суток. Выразить через событие A_i следующие события:

A – хотя бы один компьютер выйдет из строя в течение суток;

B – ни один компьютер не выйдет из строя;

C – 2 компьютера выйдут из строя.

3. Из колоды карт (36 штук) взяли наудачу 2 карты. Найти вероятность следующих событий:

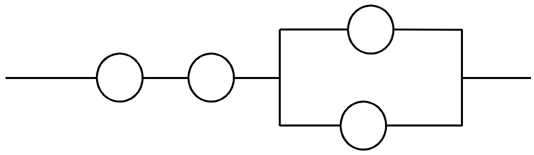
а) взято 2 «короля»;

б) взяты карты одинаковой масти;

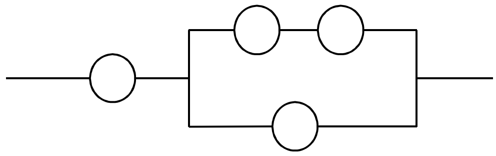
в) взят 1 «туз» и 1 «девятка».

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

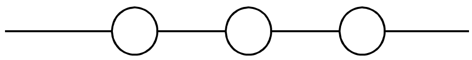
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,8. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 11 деталей, среди которых 8 качественных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 4 очка;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

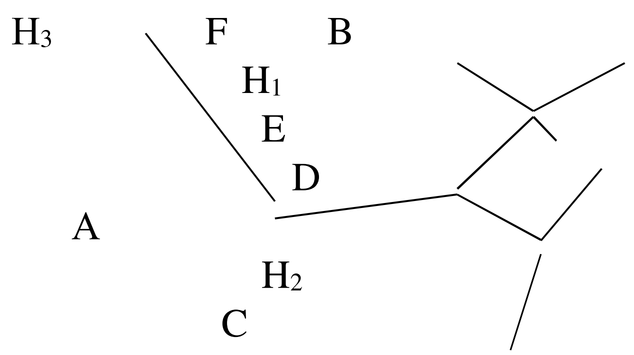
в) сумма выпавших очков не превысит 5.

8. В урне имеется 11 белых и 4 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 20 шаров, из них 3 белых, во второй урне 8 шаров, из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри прямоугольника со сторонами 6 и 8 расположен круг радиуса 2. В прямоугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь круга.

11. Туристы вышли из пункта А, выбирая наугад на развилке дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт В?



12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 4 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 3 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,4. Куплено 11 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $50 \le m \le 60$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,78. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 4-х выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Магазин получил 2000 бутылок молока. Вероятность того, что при перевозке бутылка разобьётся, равна 0,0015. Составить закон распределения случайной величины X – числа разбитых бутылок, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 8. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит:

а) 3 вызова;

б) не более 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2{,}5e^{-2{,}5x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,17<X<0,41). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+6)^2}{32}}$. Найти вероятности P(0<X<1,5), P(2≤X≤6).

20. Производится измерение расстояния между деталями детской коляски без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением σ=3 мм. Допустимое расстояние не более 12 мм. Найти вероятность того, что коляска будет признана годной.

Вариант 5

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Студент ищет формулу в 3-х справочниках. Обозначим через A_i $(i=1,2,3)$ событие, состоящее в том, что нужная формула содержится в i-м справочнике. Выразить через A_i следующие события:

A – формула содержится только в одном справочнике;

B – формулы нет ни в одном справочнике;

C – формула содержится хотя бы в одном справочнике.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма очков равна 8, а произведение 12;

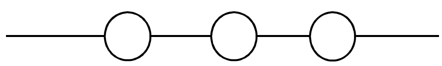
в) сумма очков не превышает 3;

г) разность очков меньше 2;

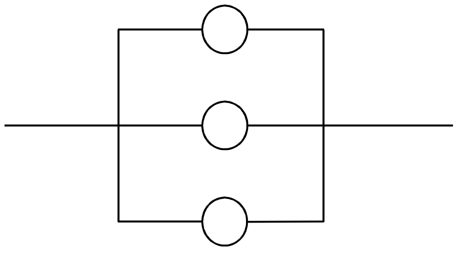
д) сумма очков расположена в промежутке [3;6].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

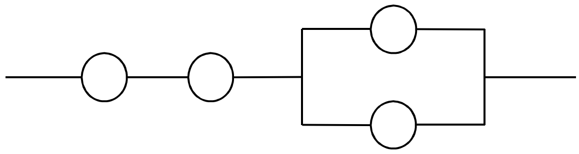
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,58. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 17 деталей, среди которых 4 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 3 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,97. Найти вероятность того, что при 3-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 2 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 6 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 7.

8. В урне имеется 13 белых и 3 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 12 шаров, из них 7 белых, во второй урне 14 шаров, из них 3 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри прямоугольного треугольника с катетами 4 и 5 расположен круг диаметра 2. В треугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную треугольником и окружностью.

11. Электролампочки изготовляются на двух заводах, причём 1-й из них поставляет 70%, 2-й 30% всей продукции. Из каждых 100 лампочек 1-го завода в среднем 86 стандартные, 2-го завода – 78. Найти вероятность того, что наудачу выбранная лампочка стандартная.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 3 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 6 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,4. Куплено 13 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,75. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $65 \le m \le 80$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Производится 5000 выстрелов. Найти закон распределения случайной величины X – числа попадания в цель, пренебрегая значениями X с вероятностями меньше 0,005. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 2 вызова;

б) менее 2 вызовов;

в) не менее 2 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 5e^{-5x} & x\geq 0\end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,17<X<0,28). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+6)^2}{18}}$. Найти вероятности P(-3<X<-1), P(-8<X<-2).

20. Средняя квадратичная ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м., систематических ошибок нет. Найти вероятность получения ошибки измерения дальности, по абсолютной величине, не превосходящей 20 м.

Вариант 6

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Прибор состоит из 4-х независимо работающих элементов. Пусть A_i – событие, состоящее в том, что i-й элемент вышел из строя. Выразить через A_i следующие события:

A – из строя вышли все элементы;

B – из строя вышли 2 элемента;

C – из строя вышел хотя бы 1 элемент.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух

костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 8;

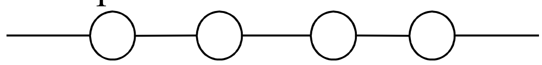
б) сумма очков равна 6, а произведение 5;

в) сумма очков не превышает 4;

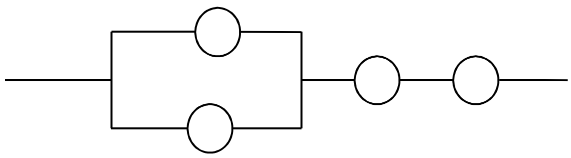
г) разность очков меньше 2;

д) сумма очков расположена в промежутке [3;5].

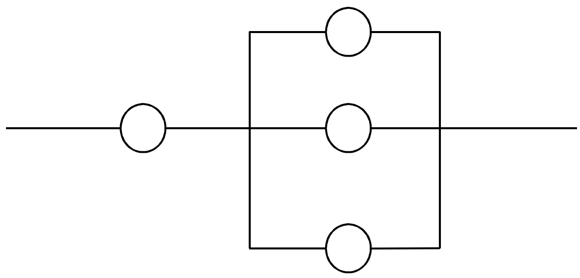
4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

а) 

б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,7. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 15 деталей, среди которых 3 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 1 бракованная и 3 качественные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 5-и выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;
б) ни одного раза;
с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) на каждом из выпавших граней появится 3 очка;
б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;
в) сумма выпавших очков не превысит 5.

8. В урне имеется 3 белых и 8 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 11 шаров, из них 7 белых, во второй урне 12 шаров, из них 2 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри прямоугольного треугольника с катетами 4 и 6 расположен круг радиуса 1. В треугольник наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь круга.

11. На стройку поступают изделия с 4-х заводов в одинаковом количестве. Вероятность того, что изделие не является бракованным, равна соответственно для каждого завода: 0,9; 0,75; 0,8; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие качественное.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 6 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет 5 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,4. Куплено 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $60 \le m$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,75. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Завод отправил на базу 700 изделий. Вероятность повреждения в пути равна 0,002. Составить закон распределения случайной величины X – числа повреждённых изделий, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 3 вызова;

б) менее 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4e^{-4x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,18<X<0,34). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{18}}$. Найти вероятности P(0<X<1), P(-5<X<3).

20. Завод изготовляет шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков 5 мм. При изготовлении происходит случайная ошибка со средним квадратичным отклонением 0,05 мм. Найти вероятность того, что отклонение диаметра шарика от нормального не превысит 0,1 мм.

Вариант 7

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Из колоды в 52 карты последовательно вынимается 3 карты. Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что i-я карта ($i=1,2,3$) «бубновой» масти. Выразить через A_i следующие события:

A – вынуты две карты «бубновой» масти;

B – все 3 карты «бубновой» масти;

C – хотя бы одна карта «бубновой» масти.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 4;

б) сумма очков равна 4, а произведение 3;

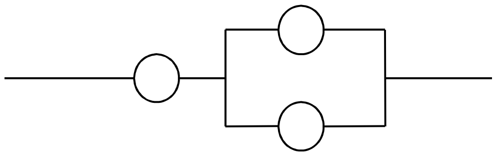
в) сумма очков не превышает 5;

г) разность очков меньше 2;

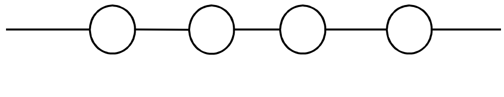
д) сумма очков расположена в промежутке [3;8].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

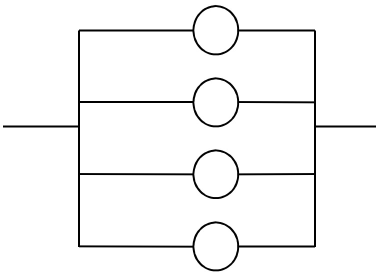
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,9. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 19 деталей, среди которых 6 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 1 раза;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 4 очка;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 8.

8. В урне имеется 5 белых и 6 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 20 шаров, из них 12 белых, во второй урне 12 шаров, из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри круга радиуса 4 расположен квадрат со стороной 3. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную квадратом и окружностью.

11. Приборы одного наименования изготавливаются 3-мя заводами; 1-й завод поставляет 20%, 2-й и 3-й по 40% изделий. Вероятность безотказной работы прибора равна, соответственно 0,95; 0,8 и 0,75 для 1-го, 2-го и 3-го заводов. Найти вероятность безотказной работы полученного прибора.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 3 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 5 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,5. Куплено 12 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $70 \le m$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

16. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь будет бракованной равна 0,02. Найти закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей среди 300 изготовленных станком, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 3 вызова;

б) не более 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4e^{-4x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,18<X<0,34). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}$. Найти вероятности P(2<X<4), P(3≤X≤9).

20. Производится взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением 15 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 г.

Вариант 8

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Производятся 3 испытания прибора. A_i – событие, состоящее в том, что при i-ом испытании (i=1,2,3) прибор выйдет из строя. Выразить через A_i следующие события:

A – прибор выйдет из строя при двух испытаниях;

B – прибор не выйдет из строя;

C – прибор выйдет из строя хотя бы при одном испытании.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма очков равна 10, а произведение 21;

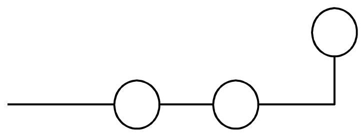
в) сумма очков не превышает 5;

г) разность очков меньше 7;

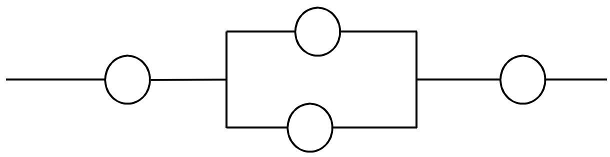
д) сумма очков расположена в промежутке [7;9].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

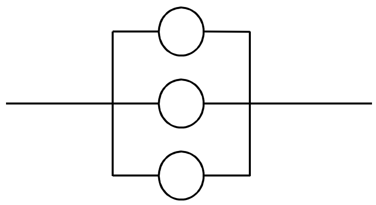
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,9. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 9 деталей, среди которых 2 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 1 бракованная.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы 2 раза.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 5 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 3.

8. В урне имеется 5 белых и 12 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 11 шаров, из них 4 белых, во второй урне 12 шаров, из них 2 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри круга радиуса 6 расположен прямоугольник со сторонами 2 и 4. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь прямоугольника.

11. Детали изготавливаются на 3-х станках: 30% на 1-м, 50% на 2-м и 20% на 3-м. Вероятность изготовления брака на каждом станке равна соответственно 0,1; 0,15; 0,005.Найти вероятность того, что изготовленная наудачу деталь бракованная.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 8 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет 3 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,5. Куплено 11 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $80 \le m$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,75. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Магазин получил 1500 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Составить закон распределения случайной величины X – числа разбитых бутылок, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 4 вызова;

б) менее 4 вызовов;

в) не менее 4 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3e^{-3x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), $P(0{,}1 < X < 0{,}2)$. Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$. Найти вероятности $P(-1 < X < 3)$, $P(2 \le X \le 4)$.

20. Размер детали задан полем допуска 10 – 12 мм. Оказалось, что средний размер деталей равен 11,4 мм, а квадратичное отклонение 0,7 мм. Считая, что размер детали подчиняется закону нормального распределения, определить вероятность появления брака.

Вариант 9

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Студенту предложено на экзамене 3 вопроса. Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что студент знает ответ на i-й вопрос. Выразить через событие A_i следующие события:

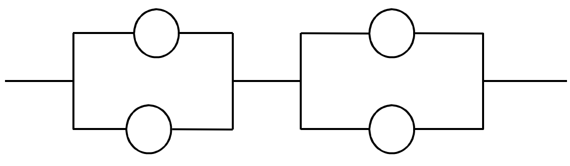
A – студент не знает ответа ни на один вопрос;
B – студент знает ответ ровно на 2 вопроса;
C – студент знает ответ хотя бы на 1 вопрос.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

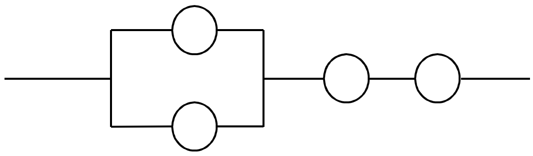
а) сумма выпавших очков равна 7;
б) сумма очков равна 3, а произведение 2;
в) сумма очков не превышает 4;
г) разность очков меньше 2;
д) сумма очков расположена в промежутке [4;5].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

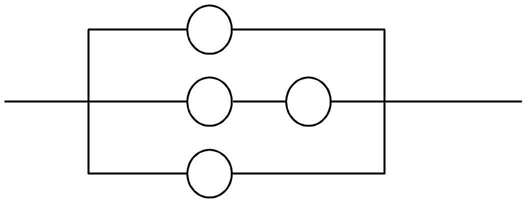
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,75. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 8 деталей, среди которых 5 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 2 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 1 бракованная и 1 качественная.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,95. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 5 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 3.

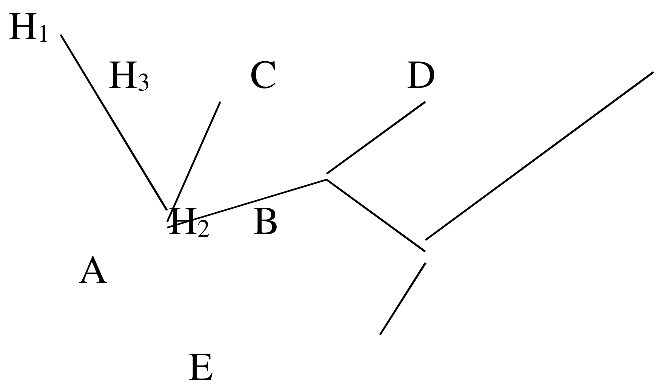
8. В урне имеется 11 белых и 3 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 12 шаров, из них 3 белых, во второй урне 14 шаров, из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли

один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри эллипса $x^2/16+y^2/4=1$ расположен круг диаметра 2. В эллипс наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь круга.

11. Туристы вышли из пункта А, выбирая наугад на развилке дорог один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт В?



12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 6 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет 4 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,5. Куплено 15 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,6. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $65\le m$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,75. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. В автотранспортном предприятии работает 2000 автобусов. Вероятность поломки каждого автобуса равна 0,001. Составить закон распределения случайной величины X – числа поломанных автобусов, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 1. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 2 вызова;

б) менее 2 вызовов;

в) не менее 2 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 8e^{-8x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,7<X<1,3). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{2}}$. Найти вероятности P(-5<X<-3), P(0,3≤X≤1).

20. При изготовлении детали на станке происходит случайная ошибка со средним квадратичным отклонением 0,08. Номинальный размер детали 8 см. Найти вероятность того, что отклонение длины изделия от номинального не превысит 0,2 см.

Вариант 10

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Из колоды в 36 карт последовательно вынимается 3 карты. Обозначим A_i – событие, состоящее в том, что i-я карта (i=1,2,3) «трефовой» масти. Выразить через A_i следующие события:

A – вынуты две карты «трефовой» масти;

B – нет ни одной карты «трефовой» масти;

C – хотя бы 1 карта «трефовой» масти.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 7;

б) сумма очков равна 5, а произведение 6;

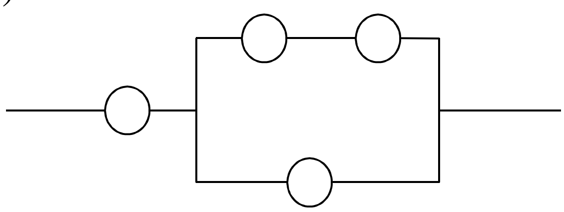
в) сумма очков не превышает 4;

г) разность очков меньше 1;

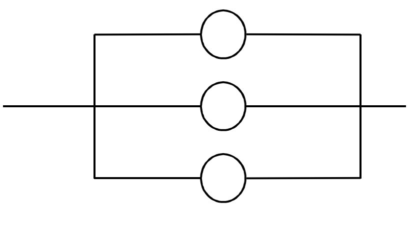
д) сумма очков расположена в промежутке [3;7].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

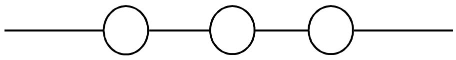
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 14 деталей, среди которых 3 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 1 бракованная и 2 качественные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 2 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 2 очка;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 4.

8. В урне имеется 4 белых и 10 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 20 шаров, из них 6 белых, во второй урне 18 шаров, из них 7 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри эллипса G: $x^2/25+y^2/9=1$ расположен эллипс g: $x^2/9+y^2/4=1$. В эллипс G наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в кольцо, ограниченное эллипсами.

11. Деталь может принадлежать к одной из 4-х партий с вероятностями p_1, p_2, p_3, p_4, где $p_1=p_3=0{,}15$, $p_2=0{,}2$, $p_4=0{,}5$. Вероятности того, что деталь бракованная равна для этих партий соответственно 0,1; 0,2; 0,15; 0,25. Определить вероятность того, что наудачу взятая деталь оказалась качественной.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 4 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 5 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,6. Куплено 13 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $90 \le m$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,65. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

16. Вероятность того, что изготовленная деталь на станке-автомате окажется бракованной, равна 0,015. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей среди 1500 изготовленных, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 2 вызова;

б) менее 2 вызовов;

в) не менее 2 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 6{,}5e^{-6{,}5x} & x\geq 0\end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,35<X<0,45). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+7)^2}{18}}$. Найти вероятности P(-8<X<-6), P(-2<X<-1).

20. Производится измерение длины детали без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со среднеквадратичным отклонением σ=0,1 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 мм.

Вариант 11

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Три стрелка стреляют по мишени. Пусть A_i – событие, означающее, что i-й стрелок попал в мишень. Выразить через A_i следующие события:

А – в мишень попали ровно 2 стрелка;

В – в мишень не попал ни один стрелок;

С – хотя бы 1 стрелок попал в мишень.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 8;

б) сумма очков равна 9, а произведение 20;

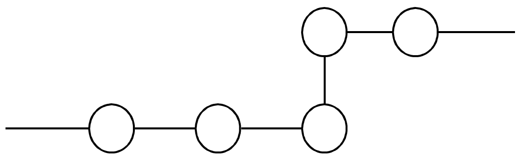
в) сумма очков не превышает 10;

г) разность очков меньше 3;

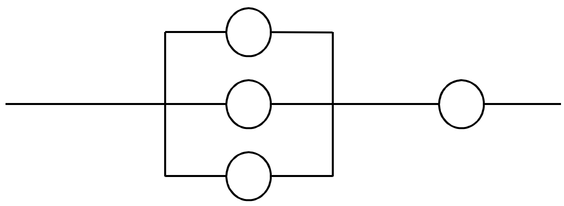
д) сумма очков расположена в промежутке [2;9].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

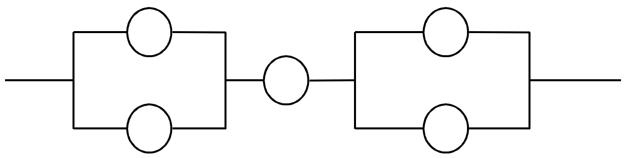
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 16 деталей, среди которых 3 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 1 бракованная.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 3-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 2 раз;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 6 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 3.

8. В урне имеется 3 белых и 4 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 15 шаров, из них 3 белых, во второй урне 25 шаров, из них 10 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри сферы радиуса 4 находится куб с ребром 5. В сферу наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную сферой и кубом.

11. Из 1500 изделий, полученных со склада, 600 принадлежат 1-й партии, 700 – 2-й и 200 – 3-й партии. Вероятность брака в каждой партии равна соответственно 0,2; 0,4; 0,5. Известно, что получено бракованное изделие. Найти вероятность того, что оно из 3-ей партии.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 2 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 7 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,6. Куплено 11 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,3. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leq 20$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,9. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 4-х выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Слесарь обслуживает 200 станков. Вероятность поломки станка равна 0,01. Найти закон распределения случайной величины X – числа поломанных станков, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 3 вызова;

б) не более 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}8e^{-0{,}8x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,36<X<0,9). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{32}}$. Найти вероятности P(-3<X<2), P(1≤X≤6).

20. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,2 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 30 г.

Вариант 12

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Работа ЭВМ зависит от работы пяти блоков. Пусть A_1 – выход из строя блока памяти, A_2 – выход из строя устройства управления, A_3 – выход из строя арифметического устройства, A_4 – выход из строя устройства ввода и A_5 – выход из строя устройства вывода. Выразить через A_i ($i=1,2,3,4,5$) следующие события:

A – вышел из строя ровно один блок;

B – ни один блок не вышел из строя;

C – ровно 2 блока вышли из строя.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 8;

б) сумма очков равна 10, а произведение 24;

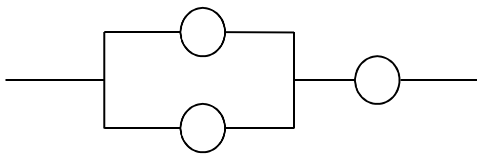
в) сумма очков не превышает 6;

г) разность очков меньше 3;

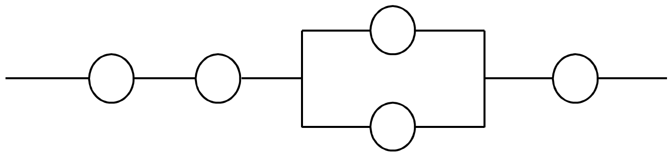
д) сумма очков расположена в промежутке [2;4].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

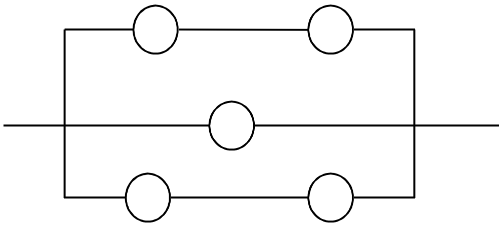
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,75. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 14 деталей, среди которых 7 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что
а) извлечённые детали качественные;
б) среди извлечённых 2 бракованные и 1 качественная.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,86. Найти вероятность того, что при 4-х выстрелах стрелок попадёт:
а) не более 3 раз;
б) ни одного раза;
с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:
а) на каждом из выпавших граней появится 3 очка;
б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;
в) сумма выпавших очков не превысит 4.

8. В урне имеется 7 белых и 11 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 18 шаров, из них 3 белых, во второй урне 9 шаров, из них 5 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри сферы радиуса 3 находится куб с ребром 2. В сферу наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь куба.

11. В магазин поступают изделия с 4-х фабрик, причём фабрики 1, 2, 3, 4-я поставляют соответственно 20, 30, 40, 10% всех изделий. Среди изделий 1, 2, 3, 4-й фабрик соответственно 0,08, 0,08, 0,05, 0,06 бракованных. Найти вероятность того, что купленное изделие является качественным.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 5 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет 4 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,6. Куплено 10 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 200 независимых испытаний равна 0,4. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leq 80$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,85. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

16. На стройку поступила партия железобетонных плит из 1500 штук. Вероятность того, что плита бракованная равна 0,001. Найти закон распределения случайной величины X – числа бракованных плит, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 1. Найти вероятность того, что за 5 минут поступит:

а) 3 вызова;

б) менее 3 вызовов;

в) не менее 3 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 6e^{-6x} & x\geq 0\end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,12<X<0,35). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{32}}$. Найти вероятности P(-3<X<-2), P(-1≤X≤6).

20. Автомат штампует детали без систематических ошибок. Случайные отклонения длины детали от нормативной происходят по нормальному закону со средним квадратичным отклонением 0,1. Найти вероятность того отклонения, которое не превысит по абсолютной величине 1 мм.

Вариант 13

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. На лабораторных занятиях студенты используют 3 типа микрокалькуляторов. Пусть A_i (i=1,2,3) – событие, состоящее в том, что

калькулятор i-го типа выйдет из строя. Выразить через A_i следующие события:

А – все калькуляторы выйдут из строя;

В – ни один калькулятор не выйдет из строя;

С – ровно 2 калькулятора выйдут из строя.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 10;

б) сумма очков равна 8, а произведение 16;

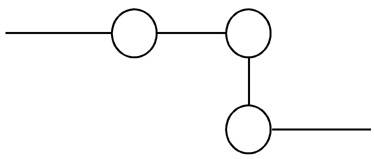
в) сумма очков не превышает 9;

г) разность очков меньше 5;

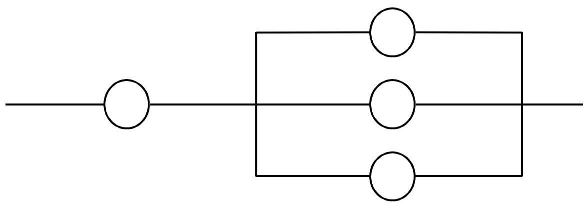
д) сумма очков расположена в промежутке [3;6].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

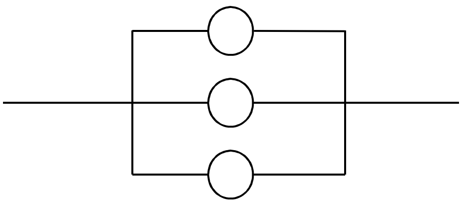
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 25 деталей, среди которых 10 бракованных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 3-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 1 раза;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 2 очка;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 6.

8. В урне имеется 6 белых и 6 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 17 шаров, из них 4 белых, во второй урне 26 шаров, из них 11 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри тетраэдра с ребром 4 находится куб с ребром 1. В тетраэдр наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт внутрь куба.

11. На склад поступают изделия с 3-х заводов, соответственно 20%, 30%, 50%. В их продукции вероятность брака равна соответственно 0,03; 0,02; 0,01. Найти вероятность того, что наудачу выбранное изделие бракованное.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 8 раз. Определить вероятность того, что цифра выпадет 6 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,7. Куплено 14 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 300 независимых испытаний равна 0,8. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leq 250$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 4-х выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента равна 0,002. Составить закон распределения случайной величины X – числа отказавших элементов, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 2 вызова;

б) не более 2 вызовов;

в) не менее 2 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 5e^{-5x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), $P(0{,}21 < X < 0{,}53)$. Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$$. Найти вероятности P(1<X<2), P(3≤X≤7).

20. Автомат изготовляет шарики для шариковых ручек. Шарик считается годным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает по абсолютной величине 0,2 мм. Считая, что случайные ошибки распределены нормально со средним квадратичным отклонением 0,15 мм. Найти вероятность того, что изготовленный шарик годный.

Вариант 14

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. На заводе изделия изготавливаются на 4-х станках. Обозначим через A_i – событие, состоящее в том, что изделие, изготовленное на i-м станке (i=1,2,3,4), является бракованным. Выразить через A_i следующие события:

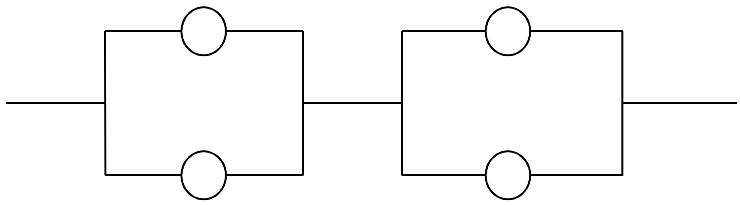
А – все 4 изделия бракованные;
В – ни одно изделие не бракованное;
С – хотя бы одно изделие бракованное.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

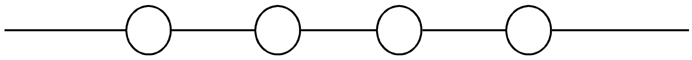
а) сумма выпавших очков равна 4;
б) сумма очков равна 5, а произведение 6;
в) сумма очков не превышает 7;
г) разность очков меньше 3;
д) сумма очков расположена в промежутке [3;6].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

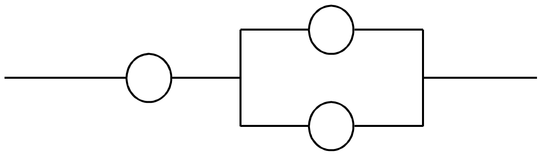
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,6. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 16 деталей, среди которых 4 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 2 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 5-и выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раза;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 3 очка;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 6.

8. В урне имеется 7 белых и 3 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 18 шаров, из них 8 белых, во второй урне 16 шаров, из них 7 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри цилиндра высотой 10 и радиусом основания 3 находится сфера радиуса 2. В цилиндр наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадёт в сферу.

11. Часы, поступившие в магазин, производятся 3-мя заводами: с 1-го поступает 70%, со 2-го 20%, с 3-го 10% всех изделий. Процент брака на каждом из заводов составляет соответственно 3, 2 и 4%. Найти вероятность того, что купленные часы бракованные.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 2 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 6 раз.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,7. Куплено 15 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,6. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \le 270$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,95. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 5-и выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,002. Производится 2000 выстрелов. Составить закон распределения случайной величины X – числа попаданий в цель, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно 3. Найти вероятность того, что за 3 минуты поступит:

а) 4 вызова;

б) менее 4 вызовов;

в) не менее 4 вызовов.

Поток вызовов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0{,}2e^{-0{,}2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,01<X<0,17). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+7)^2}{8}}.$$

Найти вероятности P(-2<X<-1), P(-6<X<3).

20. При изготовлении детали допускается случайная ошибка со средним квадратичным отклонением 0,1 см. Найти вероятность того, что деталь, изготовленная с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,3 см.

Вариант 15

1. Ваша фамилия записана на карточках (по одной букве на карточке). Карточки перемешали и наугад выкладывают по одной слева направо. Какова вероятность того, что снова получится ваша фамилия.

2. Брошены 3 монеты. A_i – событие, состоящее в том, что при бросании i-ой монеты (i=1,2,3) выпадает «герб». Выразить через A_i следующие события:

A – «герб» выпадет только 1 раз;

B – «герб» выпадет хотя бы 1 раз;

C – «герб» не выпадет ни разу.

3. Эксперимент состоит в подбрасывании двух правильных шестигранных игральных костей. Наблюдаемый результат – пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших на верхних гранях двух костей. Описать пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

а) сумма выпавших очков равна 9;

б) сумма очков равна 6, а произведение 8;

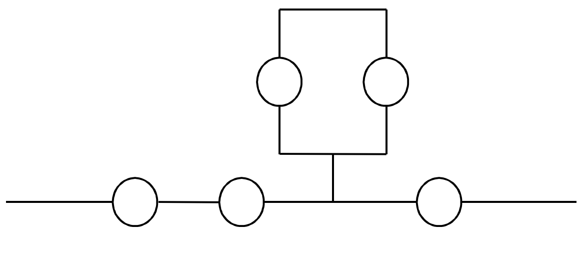
в) сумма очков не превышает 4;

г) разность очков меньше 2;

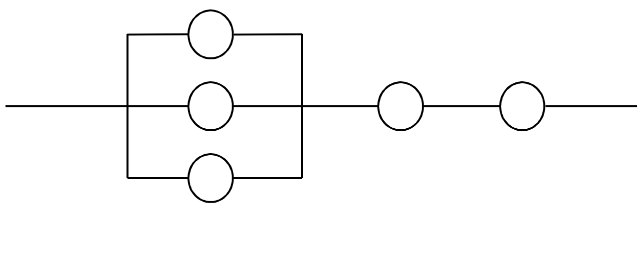
д) сумма очков расположена в промежутке [1;3].

4. В электросеть включены лампочки, соединённые между собой следующим образом:

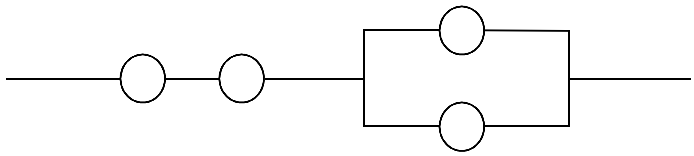
а)



б)



в)



Вероятность безотказной работы i-й лампочки 0,95. Найти вероятность безотказной работы цепи.

5. В ящике 17 деталей, среди которых 6 бракованные. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что

а) извлечённые детали качественные;

б) среди извлечённых 3 бракованные.

6. Вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что при 3-х выстрелах стрелок попадёт:

а) не более 3 раза;

б) ни одного раза;

с) хотя бы один раз.

7. Брошены 3 игральные кости. Найти вероятность того, что:

а) на каждом из выпавших граней появится 6 очков;

б) на всех выпавших гранях появится одинаковое число очков;

в) сумма выпавших очков не превысит 10.

8. В урне имеется 4 белых и 5 чёрных шаров. Наудачу по одному извлекают 3 шара без возвращения. Найти вероятность того, что все 3 извлечённых шара будут чёрными.

9. В первой урне содержится 22 шара, из них 10 белых, во второй урне 13 шаров, из них 2 белых. Из первой урны наудачу извлекли один шар и переложили во вторую. Найти вероятность того, что извлечённый после этого шар из второй урны окажется белым.

10. Внутри прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 2, 6, 8 находится куб с ребром 2.В параллелепипед наудачу бросается точка.

Какова вероятность того, что точка попадёт в область, ограниченную параллелепипедом и кубом.

11. На стройку поступили плиты с 3-х заводов: 100 плит с 1-го, 200 – со 2-го и 150 с 3-го. Вероятность брака на каждом заводе равна соответственно 0,15; 0,1; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу взятая плита бракованная.

12. Монета бросается до тех пор, пока герб не выпадет 2 раза. Определить вероятность того, что цифра выпадет 3 раза.

13. Вероятность выигрыша в лотерею на один билет равна 0,7. Куплено 12 билетов. Найти наивероятнейшее число выигравших билетов и соответствующую вероятность.

14. Вероятность наступления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,7. Определить вероятность того, что число m наступлений события удовлетворяет неравенству $m \leq 290$.

15. Вероятность того, что стрелок попадает в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Составить закон распределения дискретной случайной величины X числа попаданий в цель при 3-х выстрелах. Найти M(X), D(X), σ(X).

16. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность брака равна 0,0001. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных книг, пренебрегая значениями X, вероятность которых меньше 0,005. Найти M(X), D(X), σ(X).

17. Среднее число заказов такси, поступающих в диспетчерский пункт в одну минуту, равно 2. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит:

а) 4 вызова;

б) не более 4 вызовов;

в) не менее 4 вызовов.

Поток заказов предполагается Пуассоновским.

18. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 5e^{-5x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Найти F(x), M(X), D(X), σ(X), P(0,17<X<0,28). Построить графики f(x) и F(x).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону с плотностью

$f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+6)^2}{18}}$. Найти вероятности P(-3<X<-1), P(-8<X<-2).

20. Установлено, что при измерении диаметра микрометром случайная погрешность подчинена нормальному закону со средним квадратичным отклонением 0,15. Найти вероятность того, что измерение производится с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,2 мм.

Вариант 16

1. Сколькими способами за круглым столом могут сесть семь участников дискуссии?

2. Сколько диагоналей имеет выпуклый 15-угольник?

3. В поезде (10 вагонов) случайно оказались преступник и комиссар Мегрэ. Какова вероятность того, что они едут:

а) в одном вагоне;

б) в соседних вагонах?

4. Белую и чёрную ладьи ставят на шахматной доске наугад. Какова вероятность того, что ладьи не будут бить друг друга?

5. В семье двое детей. На мой звонок дверь открыл мальчик. Какова вероятность того, что другой ребёнок в семье – тоже мальчик?

6. (Задача Бюффона). Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно а. На эту плоскость бросается наудачу отрезок длины $l (l<a)$. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из прямых семейства?

7. Сколько раз нужно подбросить два игральных кубика, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестёрок была бы больше ½? (Эту задачу впервые поставил французский математик и писатель де Мере (1610 - 1684), поэтому задача называется его именем).

8. В откормочный комплекс поступают телята из трёх хозяйств. Из первого хозяйства телят поступает в 2 раза больше, чем из второго, а из второго – в 3 раза больше, чем из третьего. Первое хозяйство поставляет 15% телят, имеющих живой вес более 300 кг. Второе и третье хозяйства поставляют соответственно 25% и 35% телят, живой вес которых превышает 300 кг. Наудачу отобранный телёнок при поступлении в откормочный комплекс весит 320 кг. Какова вероятность того, что он поступил из третьего хозяйства?

9. Что вероятнее: выиграть у равносильного партнёра три партии из четырёх или пять партий из восьми? (Ничьи исключаются.)

10. Склады семенного картофеля перед посадкой проверяют на отсутствие очагов гниения. В проверенном складе оказалось 20% клубней с пятнами. Найти:

а) наивероятнейшее число клубней без пятен из 9 клубней, отобранных случайным образом;

б) вероятность наивероятнейшего числа клубней без пятен.

11. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных детей мальчиков будет:

а) не менее половины;

б) менее половины.

12. Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наугад 1000 лампочек. Оценить вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

13. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу модуля отклонения частоты взошедших семян от вероятности p=0,9, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью P=0,995.

14. Геракл поочерёдно борется с каждым из четырёх немейских львов. Вероятность того, что Геракл победит i-го льва равна (5-i)/5, i=1,2,3,4. Побеждённого льва Геракл душит, непобеждённый лев убегает, а Геракл сражается со следующим. Случайная величина X равна количеству побеждённых львов. Для этой случайной величины построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

15. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ x^3 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X: M(X), D(X), σ(X).

16. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ x^2 & \text{при} \quad 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первых трёх порядков случайной величины X.

17. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создаётся в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 10000 вакцинированных детей заболеет соответственно 1, 2, 3, 4 ребёнка?

18. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [2,7]. Найти F(x), M(X), D(X).

19. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причём M(X)=10, D(X)=4. Записать плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины X. Найти $P(12<X<14)$.

20. Задан закон распределения двумерной дискретной случайной величины. Вычислить:

а) безусловные законы распределения компонент;

б) условные законы распределения компонент;

в) центр рассеивания;

г) коэффициент корреляции.

X\Y	0	1
1	0,2	0,3
2	0,1	0,4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах. Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее.

Таким образом, рассмотрев теорию вероятностей, ее положения и возможности, можно утверждать, что возникновение данной теории не было случайным явлением в науке, а было вызвано необходимостью дальнейшего развития технологии и кибернетики. И именно теория вероятностей может способствовать появлению искусственного разума.

В реальности происходят случайные явления, и многие события имеют неопределенный характер связей. Поиск закономерностей в случайных явлениях – это задача раздела математики – теории вероятностей.

В заключение хочу сказать, что теория вероятностей позволяет достоверно вычислить колебания спроса, предложения, цен и других экономических показателей. Также теория вероятностей является основой такой науки, как статистика. На формулах этого раздела математики построено так называемая теория игр.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Богданов А. Е.* Курс лекций и сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / А. Е. Богданов. – Ростов н/Д. : РГСУ, 1998. – 164 с.
2. *Чудесенко В. Ф*. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики / В. Ф. Чудесенко. – М. : Высш. шк., 1983. – 112 с.
3. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 т. Т. 2 / П. Е. Данко [и др.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 416 с.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшее образование, 2006. – 479 с. – ISBN 5-06-004214-6.
5. *Гусак А. А.* Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2000. – 286 с. – ISBN 985-470-138-7.
6. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс, 2005. – 252 с. – ISBN 5-8112-1497-9.
7. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – М. : Юнити-Дана, 2019. – 551 с. – ISBN 978-5-534-10004-4
8. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Академия, 2005. – 572 с. – ISBN 5-7695-2311-5
9. *Бородин А. Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Бородин. – СПб. : Лань, 2011. – 256 с. – ISBN 978-5-8114-0442-1.
10. *Королёв В. Ю.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. Ю. Королёв. – М. : Проспект, 2006. – 160 с. – ISBN 5-482-00274-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Автор-составитель

КОКУРИНА Юлия Камильевна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 24.03.21.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,07. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.