

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Б. А. БЕЛЯЕВ

МЕХАНИКА

Учебное пособие к практическим занятиям



Владимир 2020

УДК 621.01
ББК 34.41
Б44

Рецензенты:

Кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры информационных технологий
Российской академии народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
С. В. Поляков

Кандидат технических наук, доцент
доцент кафедры физики и прикладной математики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. А. Плеханов

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Беляев, Б. А. Механика : учеб. пособие к практ. занятиям /
Б44 Б. А. Беляев ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. –
Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 135 с.
ISBN 978-5-9984-1165-6

Приводятся краткая теория, набор задач по каждому из разделов дисциплины и примеры их решения. Основываясь на представленных примерах, студенты смогут самостоятельно выполнять задания пособия.

Предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки бакалавриата 15.03.04 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 15.03.05 – Автоматизация технологических процессов и производств, 28.03.02 – Наноинженерия, 13.03.03 – Энергетическое машиностроение, 27.03.05 – Инноватика, 20.03.01 – Техносферная безопасность, 12.03.05 – Лазерная техника и лазерные технологии, 28.03.01 – Нанотехнологии и микросистемная техника и др.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 77. Табл. 16. Библиогр.: 4 назв.

УДК 621.01
ББК 34.41

ISBN 978-5-9984-1165-6

© ВлГУ, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предложенное учебное пособие содержит четыре самостоятельных раздела.

Первый раздел «Основы теоретической механики» состоит из трёх подразделов: статика изучает условия, при которых тело находится в равновесии; кинематика изучает законы движения материальных тел без учёта силовых факторов, вызывающих это движение, то есть с геометрической точки зрения; динамика в отличие от кинематики изучает законы движения материальных тел с учётом силовых факторов, вызывающих это движение.

Второй раздел посвящён основам сопротивления материалов – науке о прочности и деформируемости материалов и элементов строительных и технических конструкций. Изучение этого раздела невозможно без знания основ статики.

В третьем разделе рассматриваются общие вопросы теории механизмов и машин (ТММ) – строение, кинематика и динамика механизмов и машин, синтез различных механизмов. Из названия раздела следует, что основное понятие ТММ – «машина», а основу любой машины составляют механизмы.

Четвёртый раздел «Основы конструирования и детали машин» – прикладной раздел механики, изучающий возможность практического применения методов и приёмов теоретической механики и сопротивления материалов при конструировании и проектировании машин, механизмов, сооружений и других технических конструкций.

ВВЕДЕНИЕ

Механика (греч. μηχανική – *искусство построения машин*) – одна из древнейших наук. Она развивалась по мере накопления человечеством знаний об окружающем мире, своевременно отвечая на многочисленные запросы практики. В древности не существовало деления науки по отраслям, поэтому механика, как и философия, естествознание, являлась составной частью учения о природе и обществе. И только в IV в. до н. э. началось отделение частных наук от общего естествознания.

Изучение механики требует от студентов твёрдых знаний основ высшей математики, физики, навыков решения задач по этим дисциплинам, а также знаний и навыков по начертательной геометрии, инженерной и компьютерной графике.

В процессе изучения дисциплины студенты выполняют практические работы. Каждый раздел необходимо изучать в порядке, предусмотренном рабочей программой. Ведение конспекта обязательно. Только в этом случае можно получить прочные знания и навыки расчётов по разделам дисциплины.

Работать с учебниками и конспектом лекций рекомендуется в такой последовательности:

- ознакомиться с содержанием данной темы по программе;
- изучить материал темы. Если тема имеет большой объём, надо разбить её на отдельные части;
- разобрать узловые вопросы темы, записать основные определения, доказательства, правила, формулы, если необходимо, снабдить их схемами или рисунками.

В целях закрепления учебного материала и приобретения навыков использования расчётных формул необходимо разобрать примеры и задачи, размещённые в учебнике и конспекте лекций. К экзамену или зачёту допускаются студенты, не имеющие задолженности по практическим занятиям.

Раздел 1

ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Теоретическая механика – это наука, в которой изучаются перемещения тел с течением времени (механические движения).

По характеру рассматриваемых задач теоретическую механику принято разделять на статику, кинематику и динамику.

1. СТАТИКА

Статика (от греч. *στατός* – *неподвижный*) рассматривает задачи на равновесие твёрдых тел и преобразование одной системы сил в другую, ей эквивалентную.

Равновесие – такое состояние, при котором тело при действии сил остаётся неподвижным или движется равномерно прямолинейно.

Статика – самый старый раздел механики. Среди первых создателей теоретической статики был Архимед (287 – 212 гг. до н. э.), который разработал теорию рычага: тяжести, уравновешивающиеся на равных длинах, будут тоже равны.

Родоначальником современной статики считают голландского математика, физика и механика Симона Стевина (1548 – 1620).

Французский математик и механик Пьер Вариньон (1654 – 1722) в 1686 г. опубликовал трактат «Новая механика, или Статика».

Французский математик и механик Луи Пуансо (1777 – 1859) в своём труде «Начала статики» подчеркнул, что механика должна непосредственно отвечать на запросы практики.

Проекция силы на ось

Проекция силы на ось – скалярная величина, равная взятой со знаком «+» или «-» длине отрезка, заключенного между проекциями на ось начала и конца силы.

Пусть в системе отсчёта $Oxyz$ задана сила F (рис. 1).

Используя правило параллелепипеда, разложим силу F на компоненты F_{0x} , F_{0y} , F_{0z} . По правилу сложения векторов справедливо равенство

$$F = F_{0x} + F_{0y} + F_{0z}.$$

Компоненты F_{0x}, F_{0y}, F_{0z} силы F связаны с их проекциями F_{0x}, F_{0y}, F_{0z} на координатные оси соотношениями

$$F_{0x} = iF_{0x}, F_{0y} = jF_{0y}, F_{0z} = kF_{0z}.$$

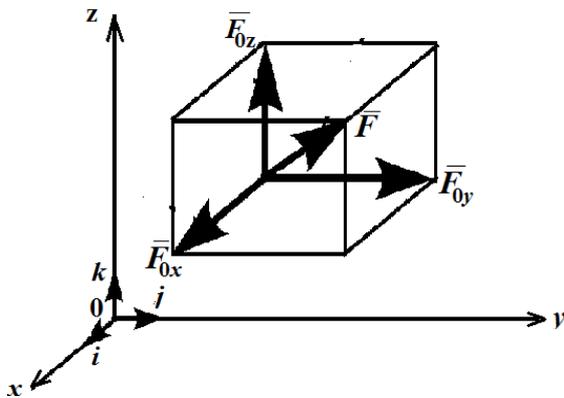


Рис. 1. Сила F в системе отсчёта $Oxyz$

Следовательно, справедливо равенство, которое представляет собой формулу разложения силы на составляющие силы по координатным осям

$$F = iF_{0x} + jF_{0y} + kF_{0z}.$$

Проекция силы на координатную ось равна произведению модуля силы на косинус угла, составленного направлением силы и оси

$$F_{0x} = F \cdot \cos(F, i); F_{0y} = F \cdot \cos(F, j); F_{0z} = F \cdot \cos(F, k).$$

Модуль силы через её проекции определяют по формуле

$$F = \sqrt{(F_{0x})^2 + (F_{0y})^2 + (F_{0z})^2}.$$

Направляющие косинусы, используемые для определения направления силы, находят по формулам

$$\cos(F, i) = F_{0x}/F; \cos(F, j) = F_{0y}/F; \cos(F, k) = F_{0z}/F.$$

Пример. В прямоугольной системе координат показана система сил G, R, P, F . Геометрический размер a и углы α, β известны (рис. 2). Требуется найти проекции всех сил на оси координат x, y, z .

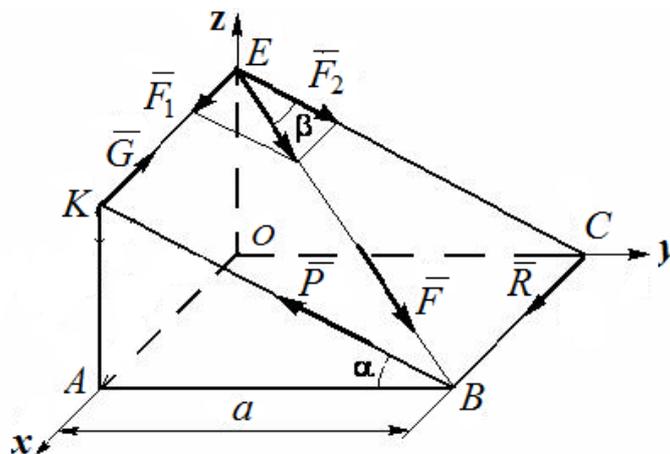


Рис. 2. Расчётная схема сил

Решение

1. Выберем на линии действия силы P произвольную точку, например точку K , и запишем её координаты:

$$x = OA; y = 0; z = OE.$$

Так как $OA = EK = BK \cdot \operatorname{tg} \beta = a/\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta$ и $OE = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$, тогда $x = a/\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta; y = 0; z = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Вычислим проекции силы P на оси координат:

$$P_x = 0; P_y = -P \cdot \cos \alpha; P_z = P \cdot \sin \alpha.$$

2. Для облегчения вычислений проекций силы F перенесём её вдоль линии действия в точку E и разложим по двум направлениям на две силы F_1 и F_2 .

При этом очевидно, что

$$F_1 = F \cdot \sin \beta, F_2 = F \cdot \cos \beta, F = F_1 + F_2.$$

Запишем координаты силы F :

$$x = 0; y = 0; z = OE = a \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Вычислим проекции силы F на оси координат:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + 0 = F \cdot \sin \beta;$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + F_2 \cdot \cos \alpha = F \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha;$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} = 0 - F_2 \cdot \sin \alpha = F \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha.$$

3. Запишем координаты силы R :

$$x = CB; y = a = AB; z = 0.$$

Вычислим проекции силы R на оси координат:

$$R_x = R; R_y = 0, \text{ так как } R \perp y; R_z = 0, \text{ так как } R \perp z.$$

4. Запишем координаты силы G :

$$x = KE; y = 0; z = AK.$$

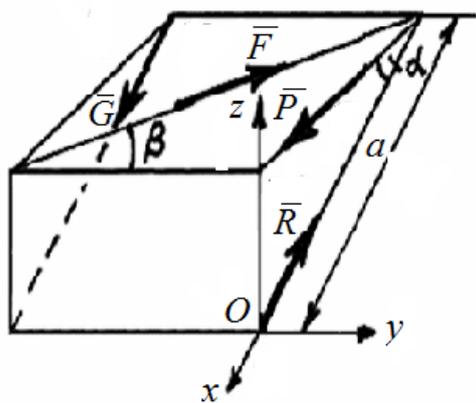
Вычислим проекции силы G на оси координат:

$$G_x = -G; G_y = 0, \text{ так как } G \perp y; G_z = 0, \text{ так как } G \perp z.$$

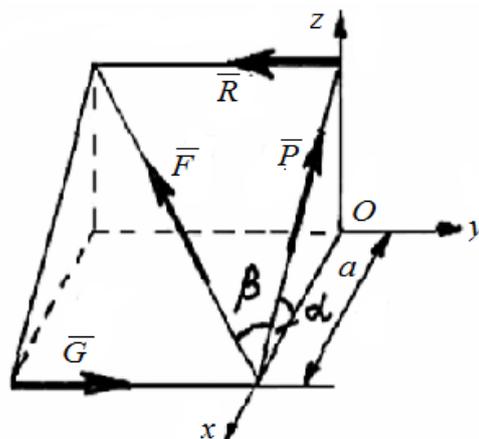
Практическое задание

Задача. Найти проекции всех сил на оси координат. Варианты взять из рис. 3.

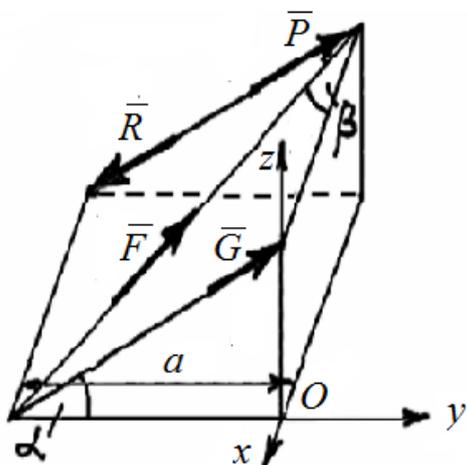
Вариант 1



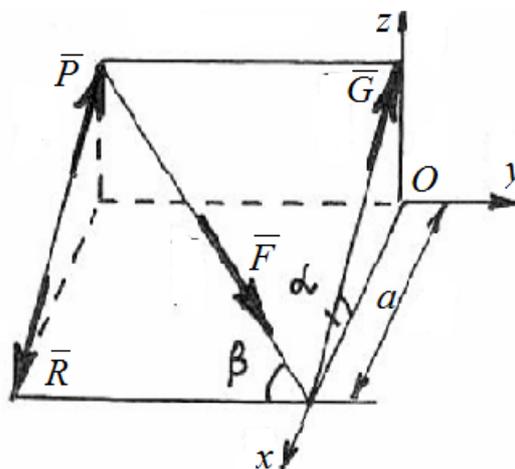
Вариант 2



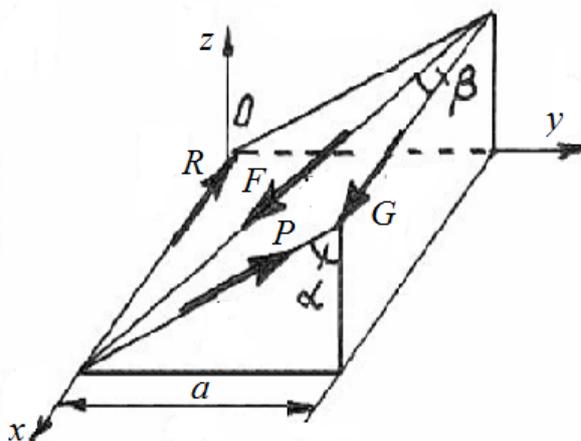
Вариант 3



Вариант 4



Вариант 5



Вариант 6

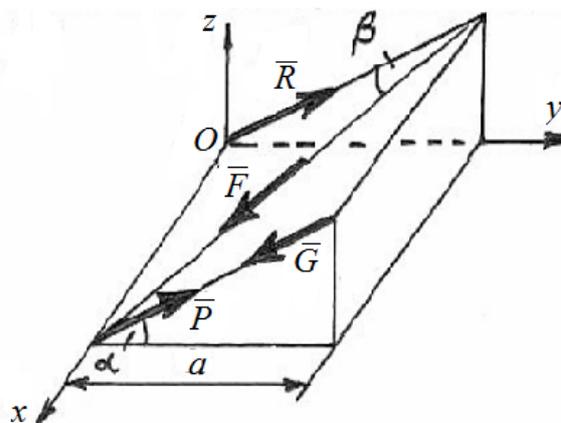


Рис. 3. Расчётные схемы сил

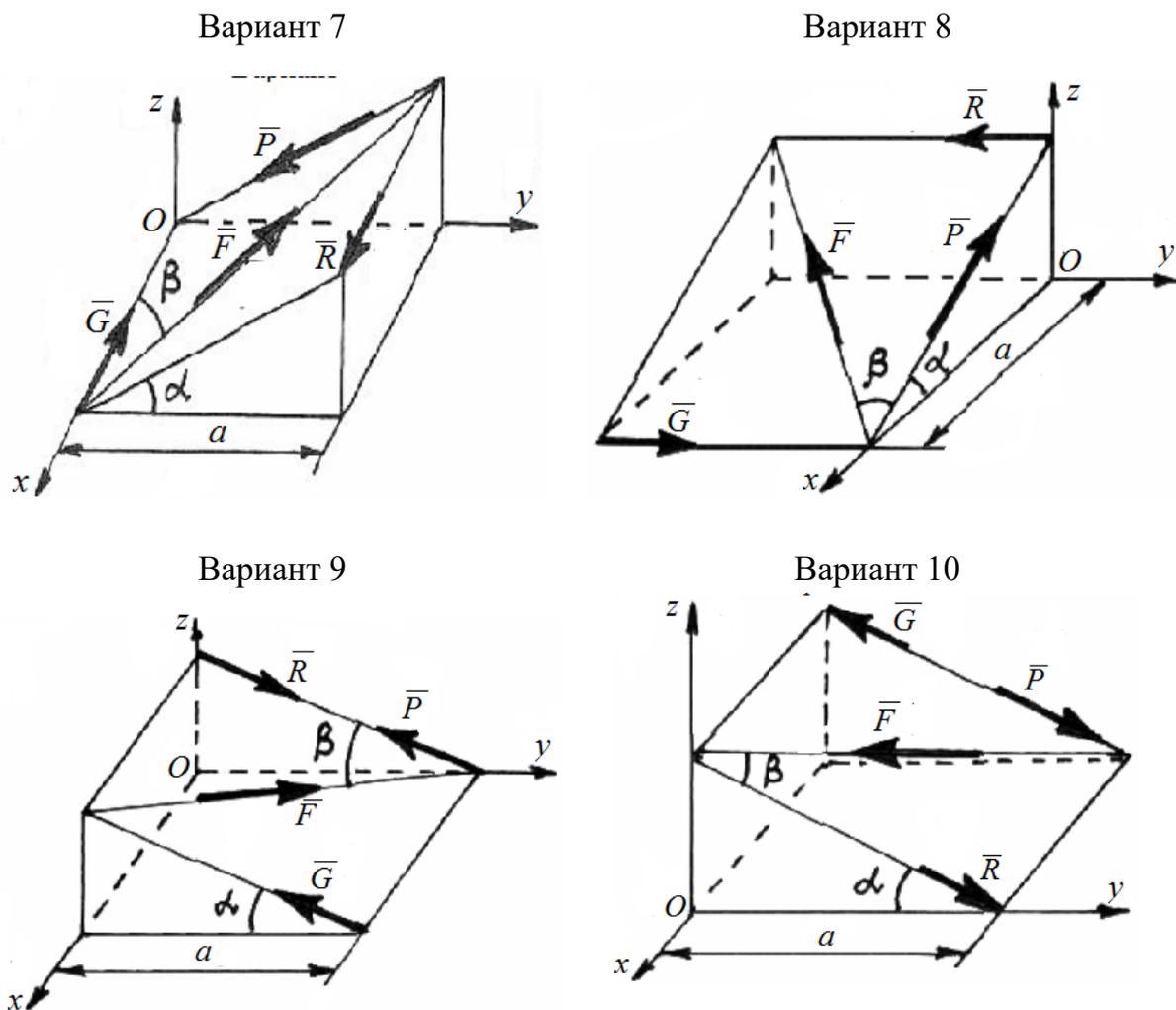


Рис. 3. Расчётные схемы сил (окончание)

Равновесие плоской системы сил (общий случай)

Под равновесием понимают состояние покоя тела по отношению к инерциальной системе отсчёта, связанной обычно с неподвижным телом.

В качестве модели реального материального тела в статике рассматривается *абсолютно твёрдое тело* – тело, расстояние между любыми двумя точками которого всегда остаётся постоянным.

Совокупность сил, действующих на твёрдое тело, называется *системой сил*.

При решении задач на равновесие системы сил чаще всего сразу расчлениают эту систему и рассматривают равновесие каждого из тел в

отдельности. При этом учитывают четвёртую аксиому статики: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны $F_1 = -F_2$. Но эти силы не образуют уравновешенную систему сил, так как они приложены к разным телам.

Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется *свободным*.

Тело, перемещения которого препятствуют другие, скреплённые или соприкасающиеся с ним тела, называется *несвободным*. Всё то, что ограничивает перемещение данного тела, называют *связью*.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствующая тем или иным его перемещениям, называется *реакцией связи*. Реакция связи направлена в сторону, противоположную той, куда связь не даёт перемещаться телу.

Принцип освобождённости от связей: несвободное твёрдое тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие реакциями.

В статике этот принцип позволяет рассматривать равновесие несвободного твёрдого тела как свободное под действием *активных* (заданных) сил и *реакций связей*.

При расчленении систем сил руководствуются правилом, чтобы в месте расчленения появлялось не более двух неизвестных реакций связей.

Напомним, что такое реакция опоры.

Реакция опоры – это силовой фактор, возникающий в опоре от действия на конструкцию внешней нагрузки.

В этих заданиях будем использовать несколько видов опор:

1. *Гибкая связь* – нерастяжимые нить, трос, канат и так далее, вес которых не учитывается. Такая связь не позволяет телу удаляться от точки подвеса. Поэтому реакции T_1 и T_2 направлены вдоль нити к точке её подвеса (рис. 4, а).

2. *Несомый стержень* (стержневая связь) – стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой нагрузкой можно пренебречь. Реакции S_{AC} и S_{CB} несомого шарнирно прикреплённого прямолинейного стержня направлены вдоль оси стержня (рис. 4, б).

3. Шарнирно-неподвижная опора имеет две реакции – вертикальную y_A и горизонтальную x_A , так как препятствует перемещению в этих двух направлениях (рис. 4, в).

4. Шарнирно-подвижная опора препятствует вертикальному перемещению элемента конструкции, в связи с чем в ней под действием внешней нагрузки возникает вертикальная реакция R_B (рис. 4, з).

5. Жёсткая заделка (консольная балка). При таком закреплении балки исключаются её поворот, горизонтальные и вертикальные перемещения, поэтому реакция такой связи состоит из пары сил с моментом M_A , препятствующим повороту балки, и двух взаимно перпендикулярных сил R_x , R_y (рис. 4, д).

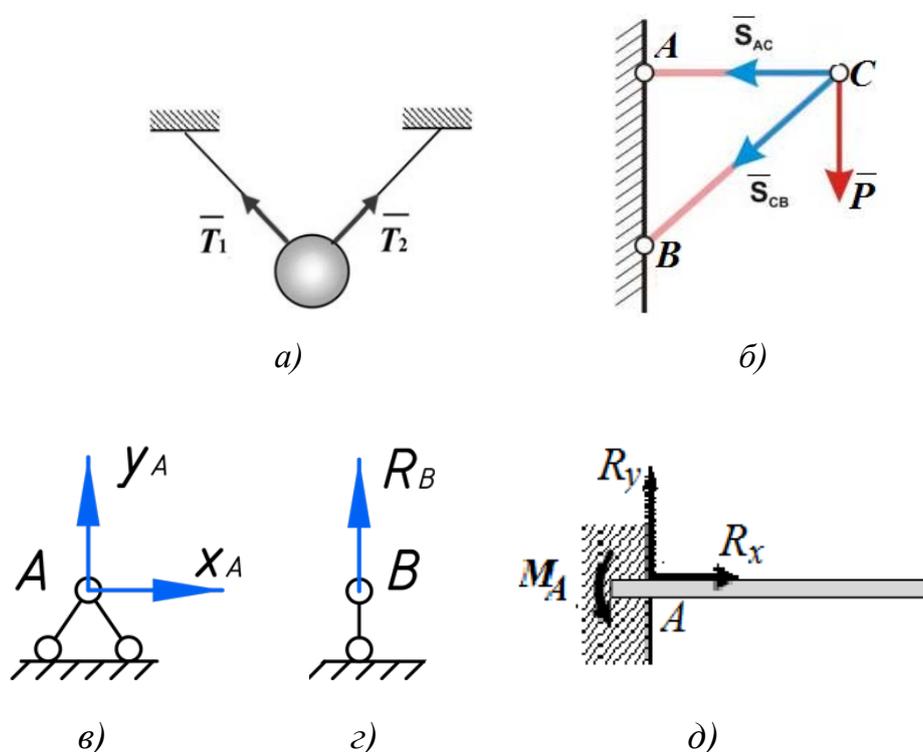


Рис. 4. Виды опор и их реакции

Возникает вопрос: зачем определять реакции опор?

На элементы конструкций всегда наложены связи в виде опор, жёстких заделок, стержней, которые ограничивают степени свободы конструкций. Под действием внешней нагрузки в этих связях возникают реакции. И эти реакции опор нужно обязательно учитывать при расчётах на прочность, жёсткость и так далее, так как они являются внешними нагрузками. Эти реакции чаще всего определяются из уравнений равновесия статики.

Порядок решения задач

1. Выделить одно тело системы, равновесие которого следует рассмотреть.

2. Приложить к выделенному телу все заданные силы. Если к телу приложена распределённая нагрузка, то её заменяют равнодействующей.

3. Освободить тело от связей, приложив соответствующие реакции.

4. Направить оси координат и выбрать моментные точки.

5. Составить уравнения равновесия произвольной плоской системы сил для выделенного тела.

Все уравнения равновесия решают совместно, определяя неизвестные реакции связей.

Если в результате решения искомая реакция получается положительной, то это значит, что её направление выбрано верно, если отрицательной, то истинное направление реакции противоположно выбранному (модуль же реакции определён верно).

После того как задача решена, необходимо произвести проверку правильности решения. Для этого следует составить не применявшуюся при решении сумму моментов, при этом необходимо учитывать истинные направления реакций. Равенство нулю алгебраической суммы моментов подтвердит правильность решения задачи.

При решении подобных задач можно применять и другой приём. Можно рассмотреть условия равновесия для всей конструкции в целом (как для одного абсолютно твёрдого тела), а затем к этим трём уравнениям присоединить три уравнения равновесия, составленные только для одного из двух тел данной системы. Этот приём предпочтительнее, так как в уравнения равновесия, составленные для всей системы в целом, входят только внешние силы, и поэтому эти уравнения оказываются обычно проще.

Статически определимые стержневые системы, работающие на растяжение-сжатие

Задачу можно решить аналитическим или графическим способом.

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом: *плоская система сходящихся сил нахо-*

дится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на две взаимно перпендикулярные оси равна нулю.

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил

$$\Sigma F_x = 0 \text{ и } \Sigma F_y = 0.$$

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

Пример. Два стальных стержня AB и CB , шарнирно соединённых в точке B , находятся под действием двух сил $F_1 = 28$ кН; $F_2 = 42$ кН. Определить усилия в стержнях, если углы наклона стержней и силы F_2 $\alpha_1 = 45^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $\alpha_3 = 30^\circ$ (рис. 5).

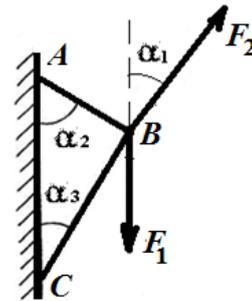


Рис. 5. Заданная стержневая система

Решить задачу аналитически и графически.

Решение

1. Аналитическое решение:

а) рассмотрим равновесие точки B , в которой сходятся все стержни и внешние силы (см. рис. 5);

б) отбросим связи AB и BC , заменяя их усилиями в стержнях S_A и S_C . Направления усилий примем от узла B , предполагая стержни растянутыми.

Выполним на отдельном чертеже схему действия сил в точке B (рис. 6).

в) выберем систему координат таким образом, чтобы одна из осей совпала с неизвестным усилием, например с S_A . Обозначим на схеме углы, образованные действующими силами с осью x , и составим уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:

$$\Sigma F_{ix} = 0; F_2 \cdot \cos 75^\circ + F_1 \cdot \cos 60^\circ - S_A = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0; F_2 \cdot \cos 15^\circ - F_1 \cdot \cos 30^\circ - S_C = 0.$$

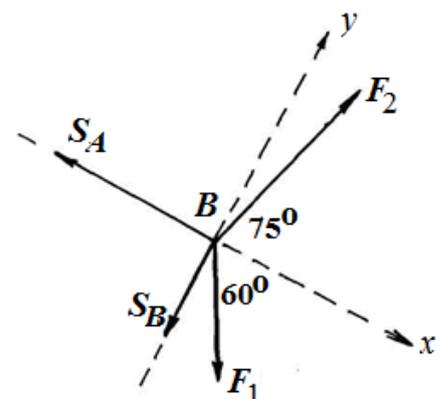


Рис. 6. Схема действия сил в точке B

Из уравнений определим усилия в стержнях:

$$S_A = F_2 \cdot \cos 75^\circ + F_1 \cdot \cos 60^\circ = 42 \cdot 0,259 + 28 \cdot 0,5 = 24,88 \text{ кН};$$

$$S_C = F_2 \cdot \cos 15^\circ - F_1 \cdot \cos 30^\circ = 42 \cdot 0,966 + 28 \cdot 0,866 = 16,32 \text{ кН}.$$

Вывод. Знаки указывают, что оба стержня растянуты.

2. Графическое решение.

Выберем масштаб сил $m = 10 \text{ кН/см}$, тогда силы F_1 и F_2 будут откладываться отрезками:

$$F_1^m = F_1/m = 28/10 = 2,8 \text{ см}; F_2^m = F_2/m = 42/10 = 4,2 \text{ см}.$$

Из произвольно выбранной точки O отложим отрезок, соответствующий величине и направлению силы F_1^m . Из конца этого отрезка отложим отрезок F_2^m . Так как условием равновесия сходящейся системы сил является замкнутость силового многоугольника, то из начала отрезка F_1^m отложим линию, параллельную вектору S_C , а из конца отрезка F_2^m отложим линию, параллельную вектору S_A . Точка их пересечения является вершиной силового многоугольника (рис. 7).

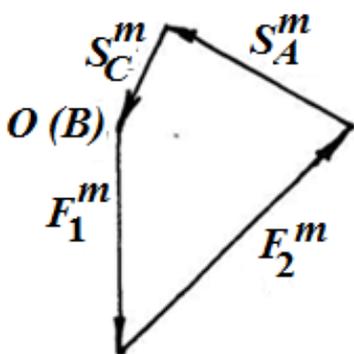


Рис. 7. Многоугольник сил

Измеряя отрезки S_A^m и S_C^m и умножая их на масштаб, найдём истинное значение S_A и S_C :

$$S_A = S_A^m \cdot m = 2,5 \cdot 10 = 25 \text{ кН};$$

$$S_C = S_C^m \cdot m = 1,62 \cdot 10 = 16,2 \text{ кН}.$$

Вычислим допущенную относительную погрешность при графическом решении:

$$\delta_A = (25 - 24,88)/24,88 \cdot 100 \% = 0,12/24,88 \cdot 100 \% = 0,48 \%;$$

$$\delta_C = (16,32 - 16,2)/16,2 \cdot 100 \% = 0,12/16,2 \cdot 100 \% = 0,74 \%.$$

Ошибка должна находиться в пределах 2 %.

Ответ:

а) аналитическое решение: $S_A = 16,32 \text{ кН}$; $S_C = 24,88 \text{ кН}$;

б) графическое решение: $S_A = 16,2 \text{ кН}$; $S_C = 25 \text{ кН}$.

Практическое задание

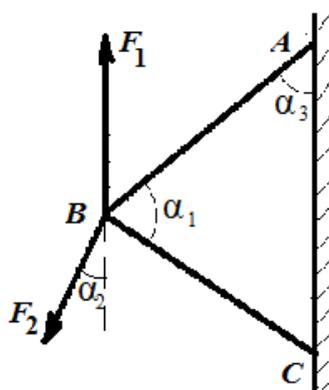
Задача. Определить усилия в стержнях.

Варианты взять из табл. 1 и рис. 8.

Таблица 1

Вариант	F_1 , кН	F_2 , кН	α_1 , град	α_2 , град	α_3 , град
1	9	20	45	30	90
2	10	22	30	45	60
3	11	24	90	60	30
4	12	26	60	30	60
5	13	28	30	30	30
6	14	30	60	60	45
7	15	32	30	30	60
8	16	34	45	45	30
9	17	36	60	60	30
10	18	38	30	45	45

Вариант 1



Вариант 2

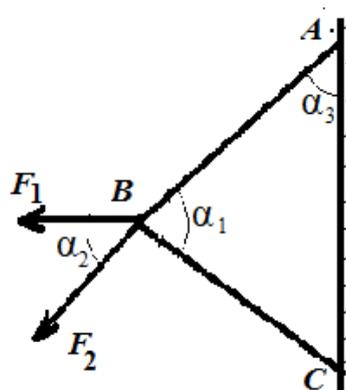
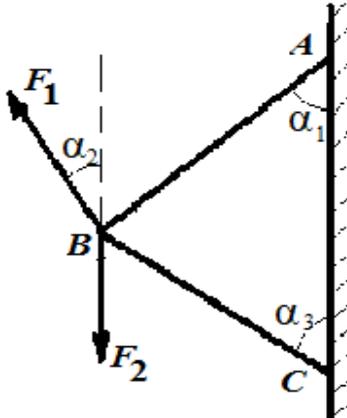
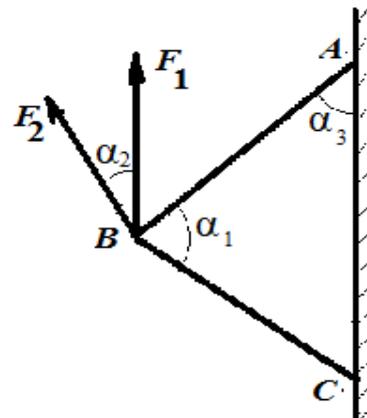


Рис. 8. Расчётные схемы стержневой системы

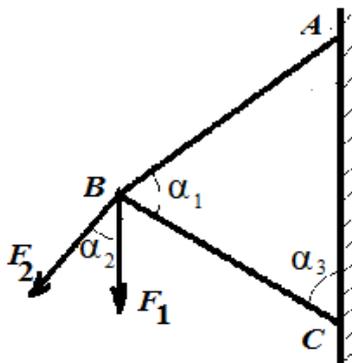
Вариант 3



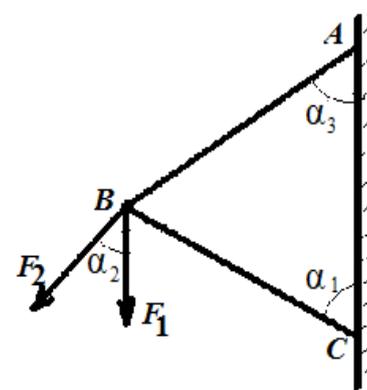
Вариант 4



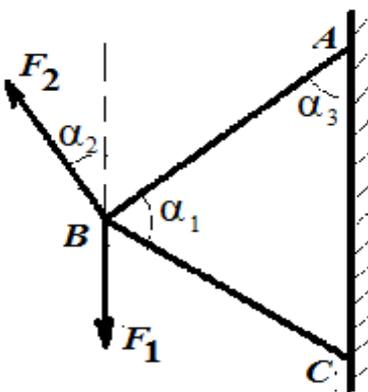
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8

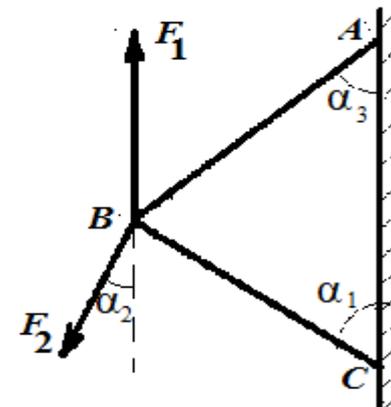
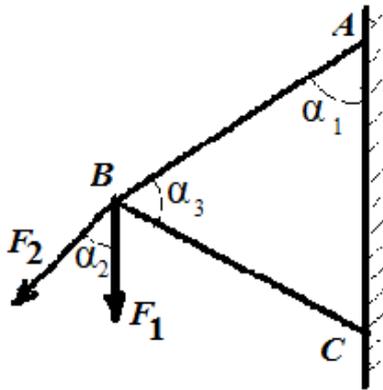


Рис. 8. Расчётные схемы стержневой системы (продолжение)

Вариант 9



Вариант 10

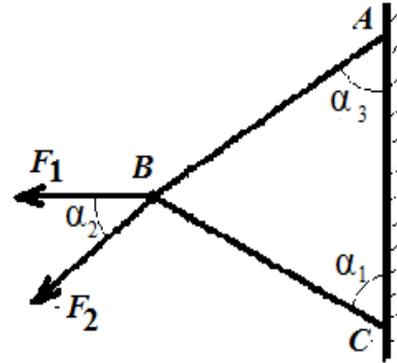


Рис. 8. Расчётные схемы стержневой системы (окончание)

Расчёт балок

Пример 1. Определить реакции опор консольной балки (рис. 9). Провести проверку правильности решения.

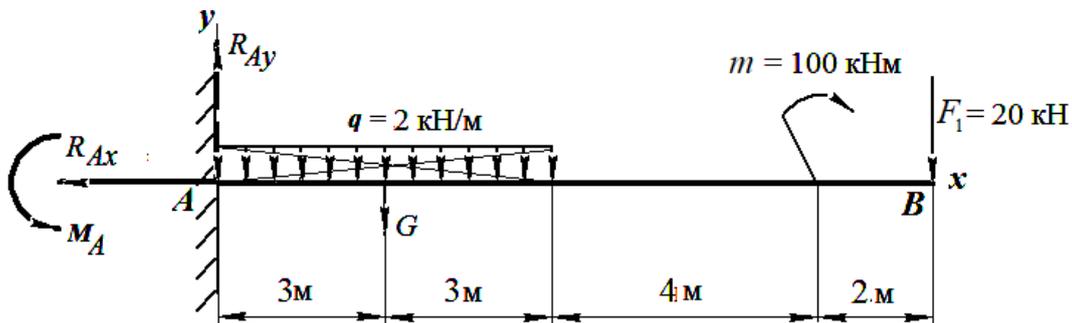


Рис. 9. Расчётная схема консольной балки

Решение

1. Заменим распределённую нагрузку q её равнодействующей (сосредоточенной) и укажем точку её приложения:

$$G = q \cdot l = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

2. Освободим балку от связей, отбросим заделку в точке A и заменим действие заделки возможными реакциями, возникающими в опоре, – реактивным моментом M_A и составляющими реакциями R_{Ax} и R_{Ay} .

Получили плоскую систему параллельно расположенных сил, значит

$$R_{Ax} = 0.$$

3. Выберем систему уравнений равновесия:

$$\Sigma F_y = 0 \text{ и } \Sigma m_A = 0.$$

4. Решение начнём с крайней левой точки A :

$$\Sigma F_y = R_{Ay} - G - F = 0, \text{ отсюда}$$

$$R_{Ay} = 12 + 20 = 32 \text{ кН.}$$

5. Первая реакция найдена. Найдём реактивный момент в заделке:

$$\Sigma m_A = -M_A + G \cdot 3 + m + F \cdot 12 = 0, \text{ отсюда}$$

$$M_A = 12 \cdot 3 + 100 + 20 \cdot 12 = 375 \text{ кНм.}$$

Знаки полученных реакций – «+», следовательно, направления реакций выбраны верно.

6. Для проверки правильности решения составим уравнение моментов относительно точки B , то есть учтём все моменты, которые создаются действующими силами, находящимися на определенном расстоянии от точки B :

$$\Sigma m_B = -M_A + R_{Ay} \cdot 12 - G \cdot 9 + m = -376 + 32 \cdot 12 - 108 + 100 = 0; \\ +484 - 484 = 0; \quad 0 = 0.$$

Ответ: реакции в заделке найдены верно.

Практическое задание 1

Задача. Определить величины реакций консольной балки. Провести проверку правильности решения. Варианты взять из рис. 10 и табл. 2.

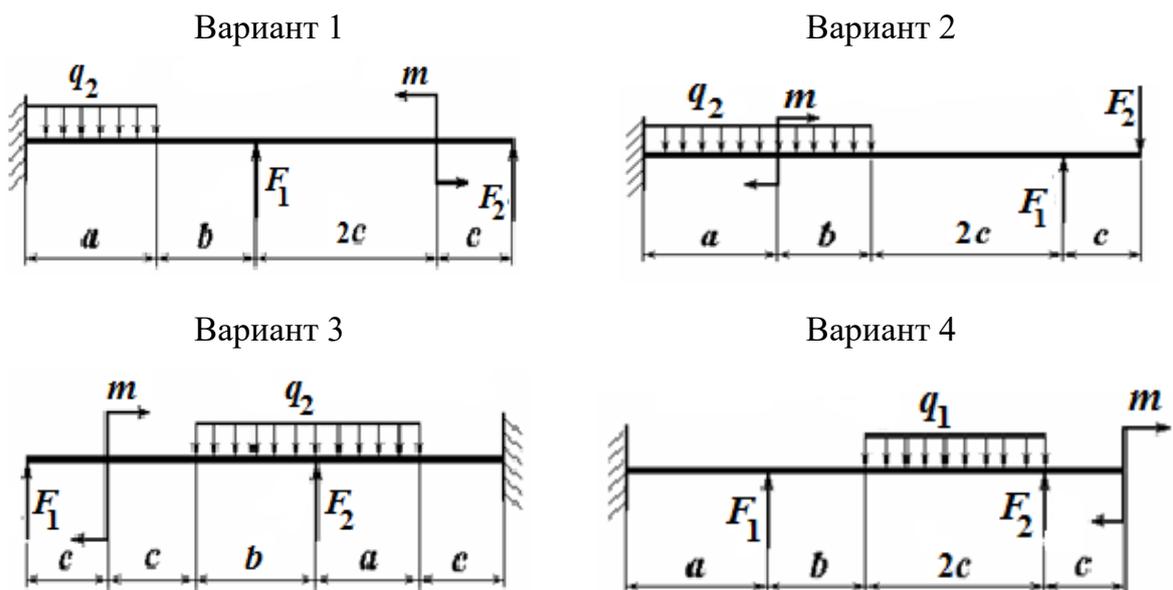
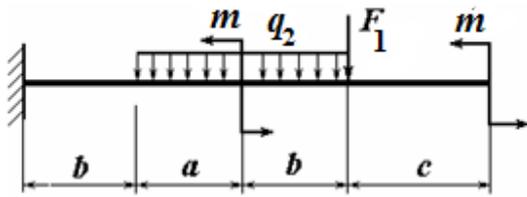
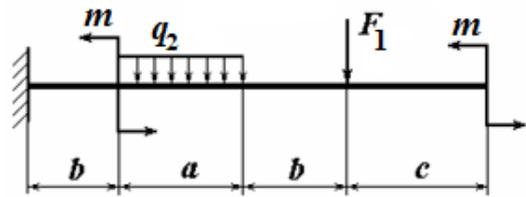


Рис. 10. Расчётные схемы консольных балок

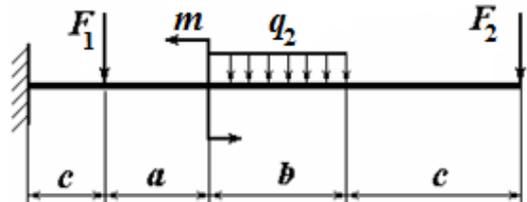
Вариант 5



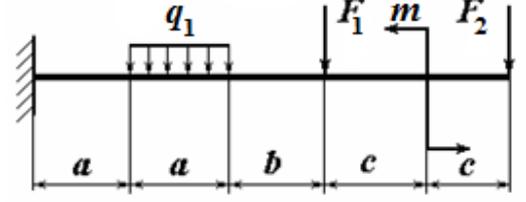
Вариант 6



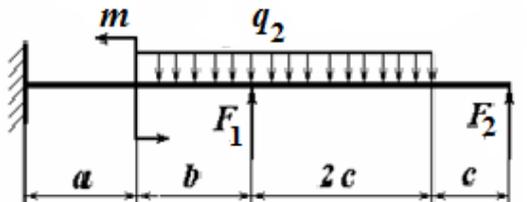
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10

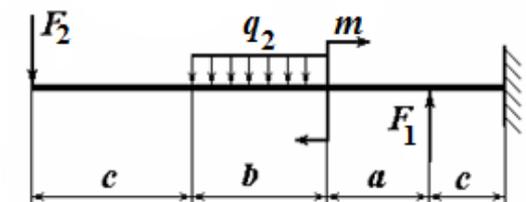


Рис. 10. Расчётные схемы консольных балок (окончание)

Таблица 2

Вариант	a , м	b , м	c , м	F_1 , кН	F_2 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	M , кНм
1	3	2	1	25	15	6	2	40
2	2	1,5	2	30	25	4	3	45
3	3,5	1	3	20	35	5	4	50
4	2,5	2,5	2,5	35	30	3	5	55
5	2	2	1,5	15	20	2	6	60
6	2,5	1,5	3,5	10	15	4	2	35
7	3,5	2,5	3	15	25	5	3	30
8	2,5	2	2,5	20	35	6	4	45
9	2	1,5	2	30	20	3	5	55
10	3	1	1,5	15	10	2	6	35

Пример 2. Определить реакции опор балки (рис. 11). Провести проверку правильности решения.

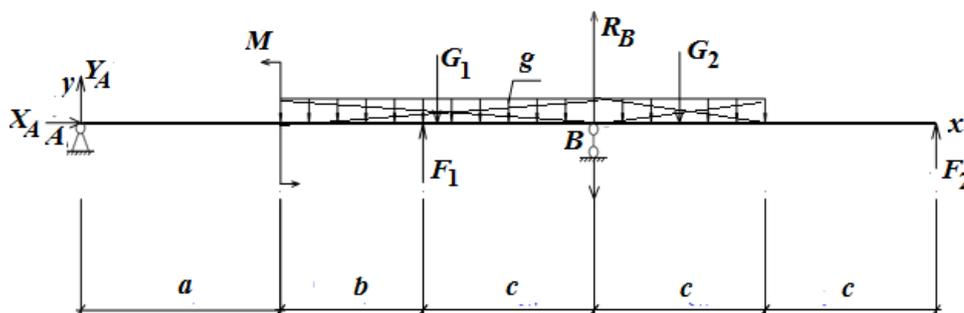


Рис. 11. Расчётная схема двухопорной балки

Решение

В точке A (неподвижный шарнир) возникают две реакции – вертикальная Y_A и горизонтальная X_A , которая равна нулю, так как в балке больше нет горизонтальных сил.

В точке B (подвижный шарнир) возникает только одна вертикальная реакция R_B .

1. Определим вертикальную реакцию R_B .

Запишем уравнение равновесия в общем виде. Мысленно предположим, что реакция R_B направлена вверх. Заменяем равномерно распределённую нагрузку g сосредоточенной силой:

$$G = q(b + c + c) = 4(2,5 + 3 + 3) = 34 \text{ кН.}$$

Сумма моментов всех сил относительно точки A равна нулю

$$\sum M_A(F_i) = 0;$$

$$M + F_1(a + b) - G((a + (b + 2c)/2) + R_B(a + b + c) + F_2(a + b + 3c)) = \\ = 50 + 20(3,5 + 2,5) - 34(3,5 + 8,5/2) + R_B(3,5 + 2,5 + 3) - 12(3,5 + 2,5 + \\ + 1,5) + 5 \cdot 3,5 = 0; 431,5 + 9R_B = 0; R_B = -48 \text{ кН.}$$

Так как значение реакции R_B получилось отрицательное, то направление её нужно изменить и направить вниз.

2. Найдём значение вертикальной реакции Y_A в точке A .

Сумма моментов всех сил относительно точки B равна нулю

$$\sum M_B(F) = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в общем виде:

$$F_2 \cdot 2c - G_2 \cdot c/2 + G_1(b + c)/2 - F_1 \cdot c + M - Y_A(a + b + c) = \\ = 35 \cdot 6 - 12 \cdot 1,5 + 22 \cdot 5,5/2 - 20 \cdot 3 + 50 - 9Y_A = 0; \\ 210 - 18 + 60,5 - 60 + 50 = 9Y_A; Y_A = 27 \text{ кН.}$$

3. Сделаем проверку. Сумма проекций всех сил на ось y равна нулю

$$\Sigma F_y = 0.$$

Запишем уравнение в общем виде:

$$Y_A + F_1 - G_1 - G_2 - R_B + F_2 = 0;$$

$$27 + 20 - 22 - 12 - 48 + 35 = 0;$$

$$+82 - 82 = 0; \quad 0 = 0.$$

Ответ: реакции опор определены верно.

Практическое задание 2

Задача. Определить величины реакций опор в двухопорной балке. Провести проверку правильности решения. Варианты взять из рис. 12.

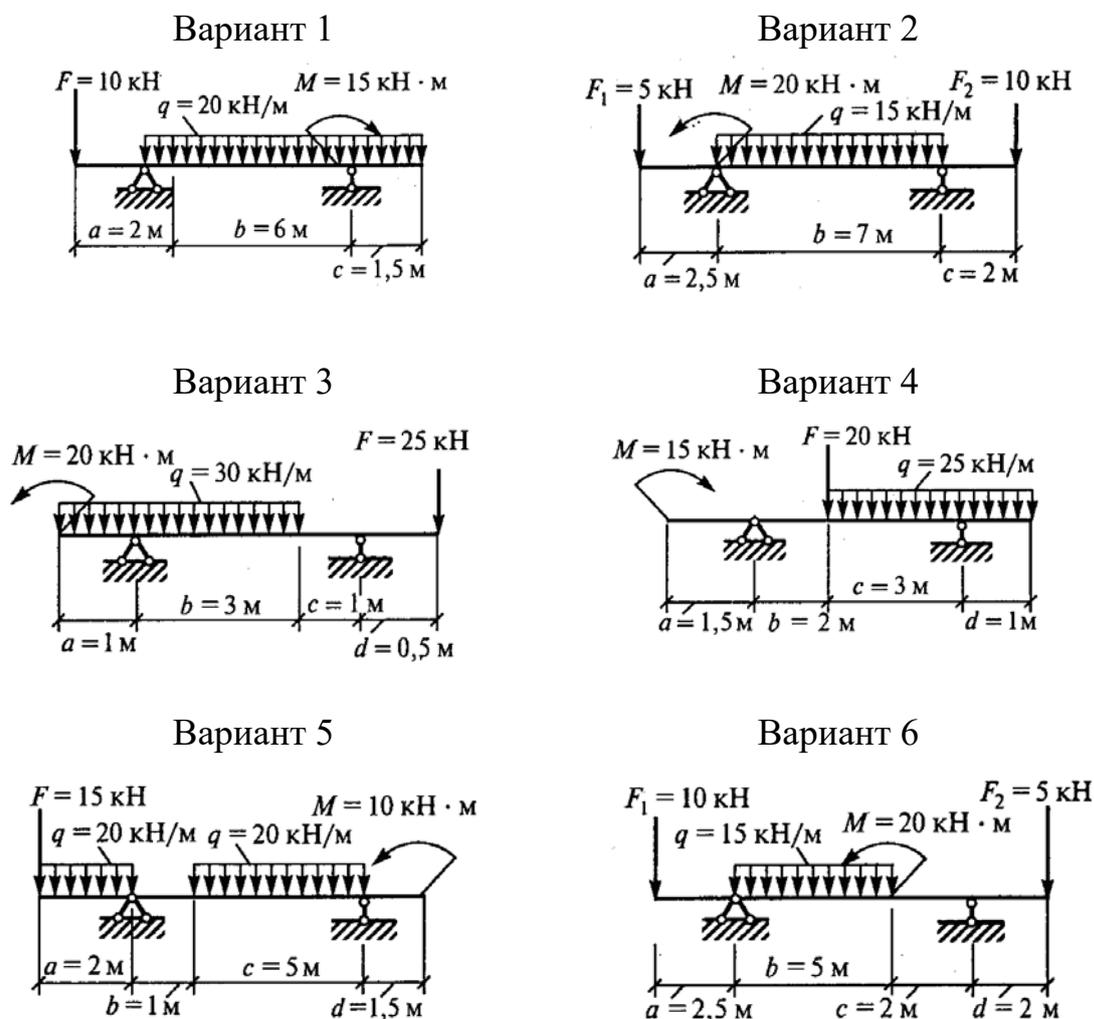
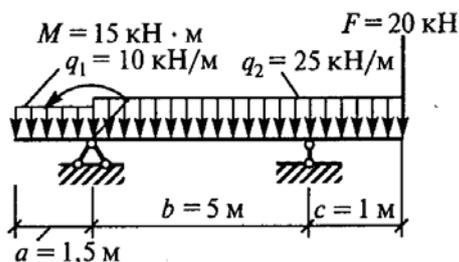
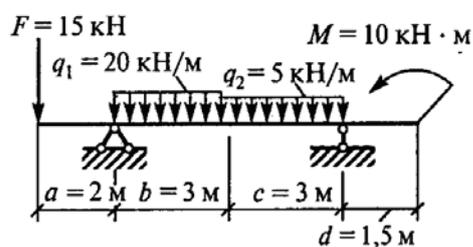


Рис. 12. Расчётные схемы балок

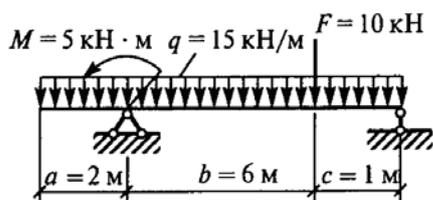
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Вариант 10

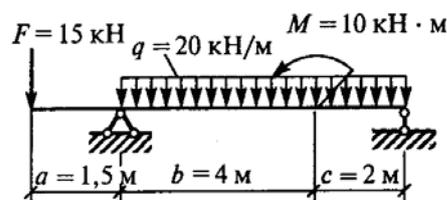


Рис. 12. Расчётные схемы балок (окончание)

Определение реакций опор в составных конструкциях

Существует целый класс задач на равновесие составной конструкции, которые могут быть решены методами статики твёрдого тела.

Решение таких задач проводится по следующему алгоритму:

1. Выбирают систему отсчёта.
2. Выделяют механическую систему (составная конструкция), равновесие которой рассматривается.
3. К механической системе прикладывают активные нагрузки. Если задана распределённая нагрузка, то она приводится к сосредоточенной силе.
4. Согласно аксиоме связей внешние связи, наложенные на механическую систему, отбрасывают, и действие их заменяют соответствующими реакциями.
5. Записывают уравнения равновесия, соответствующие системе сил, действующей на составную конструкцию (система активных сил и реакций внешних связей).

6. Установив, что число неизвестных реакций внешних связей превышает число уравнений равновесия, составную конструкцию расчлениают по внутренним связям.

7. Рассматривают равновесие каждого из тел составной конструкции, которое находится в покое под действием активных сил, реакций внешних связей и реакций внутренних связей.

8. Для каждого из тел конструкции записывают соответствующие уравнения равновесия.

9. Полученную систему уравнений решают в наиболее удобной последовательности и находят неизвестные реакции внешних и внутренних связей.

Обычно при расчёте используют не все уравнения равновесия, составленные для механической системы и для каждого из тел в отдельности. Поэтому оставшиеся уравнения используют для проверки полученных результатов.

Силы, возникающие в точках соприкосновения частей конструкции, связаны между собой законом равенства и противодействия (третий закон Ньютона): сила, с которой первое тело действует на второе, равна по абсолютной величине и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое.

Пример. Для составной конструкции ABC (рис. 13) необходимо определить реакции опор A и B , а также усилия в шарнире C , возникающие под действием заданной нагрузки, если $F = 10$ кН, $q = 4$ кН/м, $M = 8$ кНм.

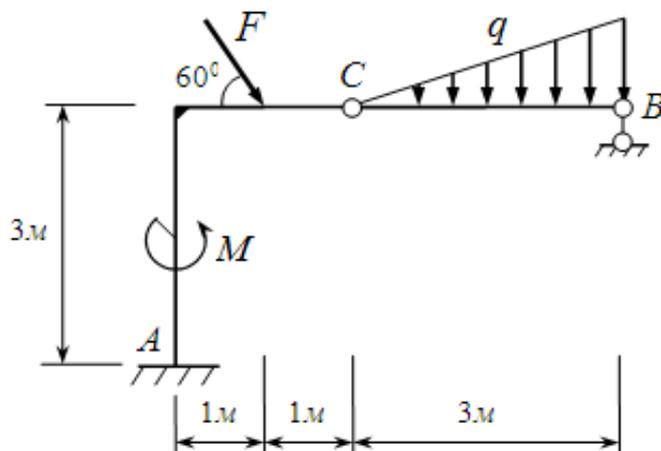


Рис. 13. Расчётная схема составной конструкции

Решение

Отбросив внешние связи, изобразим конструкцию под действием активной нагрузки и опорных реакций (рис. 14, а). При этом распределенную нагрузку заменим равнодействующей, которая приложена на расстоянии $2/3 CB = 2$ м от шарнира C и имеет модуль $Q = q \cdot BC/2 = 4 \cdot 3/2 = 6$ кН.

Силу F представим в виде двух составляющих:

$$F_1 = F \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}; F_2 = F \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Изобразим также левую (рис. 14, б) и правую (рис. 14, в) части конструкции, приложив к ним помимо активной нагрузки и опорных реакций усилия в шарнире C , которые согласно третьему закону Ньютона связаны между собой равенствами

$$X_C = -X_C', Y_C = -Y_C'.$$

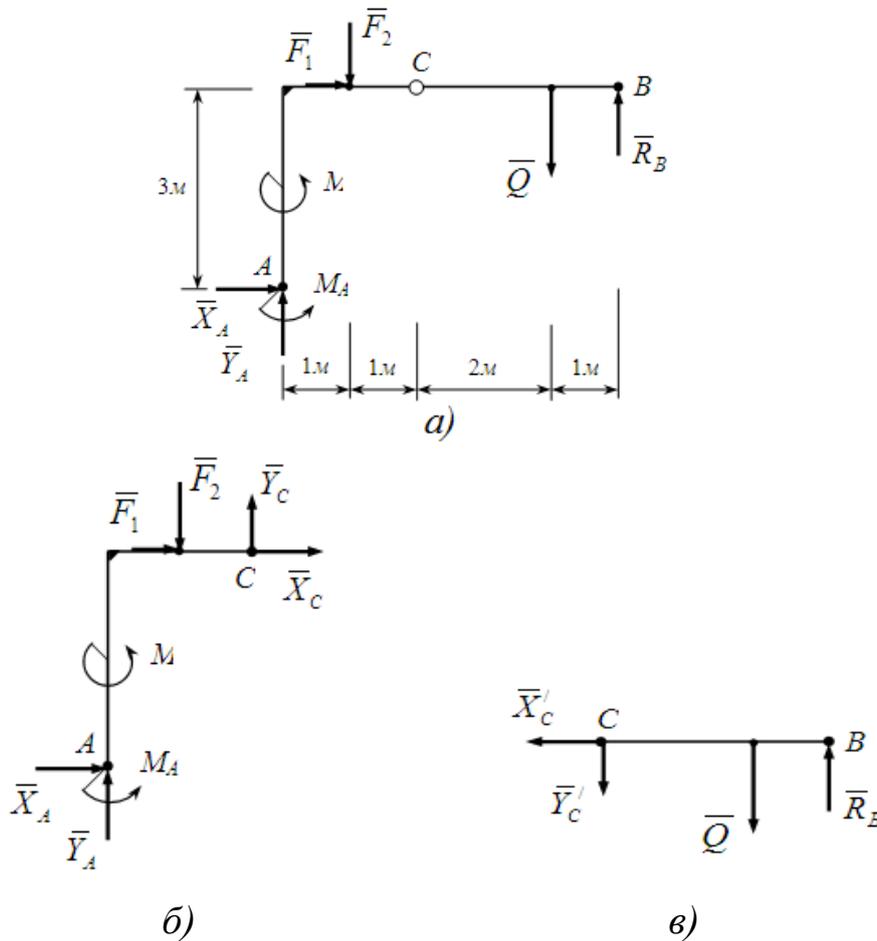


Рис. 14. Составные элементы конструкции

Решение задачи целесообразно начать с правой части конструкции, так как она содержит только три неизвестные реакции, что со-

ответствует числу уравнений равновесия. Запишем уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{kx}^{\text{пр}} = 0: X_C = 0;$$

$$\Sigma M_C^{\text{пр}}(F_k) = 0: R_B \cdot 3 - Q \cdot 2 = 0 \rightarrow R_B = (Q \cdot 2)/3 = (6 \cdot 2)/3 = 4 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_{ky}^{\text{пр}} = 0: -Y_C' - Q + R_B = 0 \rightarrow Y_C' = R_B - Q = 4 - 6 = -2 \text{ кН}.$$

Теперь рассмотрим равновесие левой части конструкции:

$$X_C = X_C' = 0, Y_C = Y_C' = -2 \text{ кН}.$$

Знак « \leftarrow » в последних равенствах опущен, так как в векторных равенствах он указывает на противоположные направления векторов X_C и X_C' и векторов Y_C и Y_C' , а этот факт уже учтён нами при составлении расчётной схемы – указанные векторы изображены противоположно направленными.

Таким образом, в левой части конструкции остаются только три неизвестные реакции, которые могут быть определены из уравнений равновесия:

$$\Sigma F_{kx}^{\text{лев}} = 0: X_A + F_1 + X_C = 0 \rightarrow X_A = -F_1 - X_C = -5 - 0 = -5 \text{ кН};$$

$$\Sigma F_{ky}^{\text{лев}} = 0: Y_A - F_2 + Y_C = 0 \rightarrow Y_A = F_2 - Y_C = 8,6 + 2 = 10,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A^{\text{лев}}(F_k) = 0: M_A + M - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 1 + Y_C \cdot 2 - X_C \cdot 3 = 0.$$

$$M_A = -M + F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 1 - Y_C \cdot 2 + X_C \cdot 3 = \\ = -8 + 5 \cdot 3 + 8,6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = -8 + 15 + 8,6 + 4 + 0 = 19,6 \text{ кН}.$$

Выполним проверку полученных результатов. Согласно аксиоме затвердевания конструкция в целом также должна удовлетворять уравнениям равновесия. Подставив в уравнения равновесия найденные значения реакций, получим

$$\Sigma F_{kx}^{\text{цел}} = X_A + F_1 = -5 + 5 = 0,$$

$$\Sigma F_{ky}^{\text{цел}} = Y_A + F_2 - Q + R_B = 10,6 - 8,6 - 6 + 4 = 14,6 - 14,6 = 0,$$

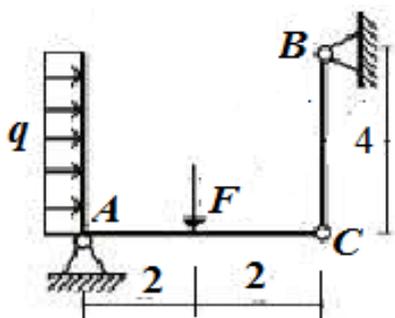
$$\Sigma M_A^{\text{цел}}(F_k) = M_A + M - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 1 - Q \cdot 4 + R_B \cdot 5 = \\ = 19,6 + 8 - 5 \cdot 3 - 8,6 \cdot 1 - 6 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 19,6 + 8 - 15 - 8,6 - 24 + 20 = \\ = 47,6 - 47,6 = 0.$$

Ответ: реакции определены верно.

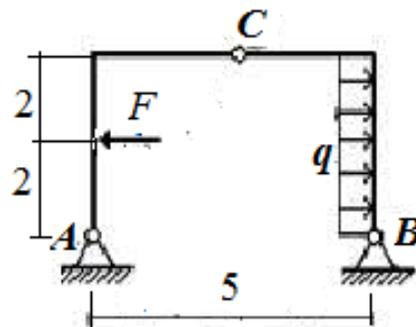
Практическое задание

Задача. Определить внешние (опорные) и внутренние связи составной конструкции. Варианты взять из рис. 15. и табл. 3.

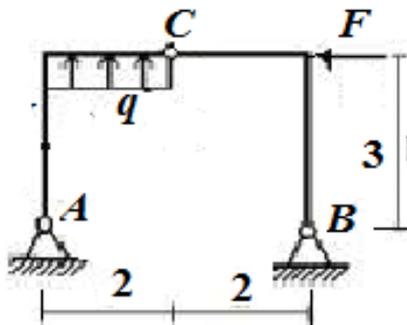
Вариант 1



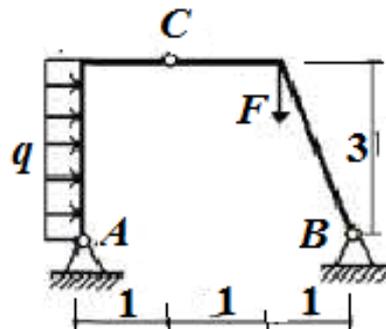
Вариант 2



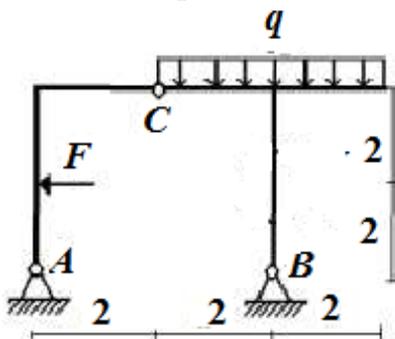
Вариант 3



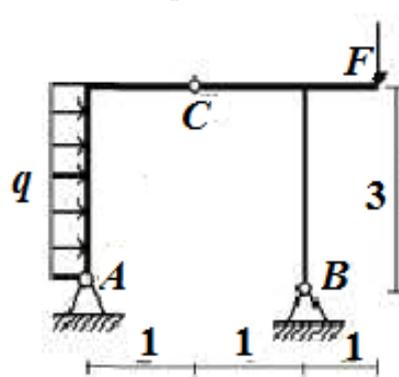
Вариант 4



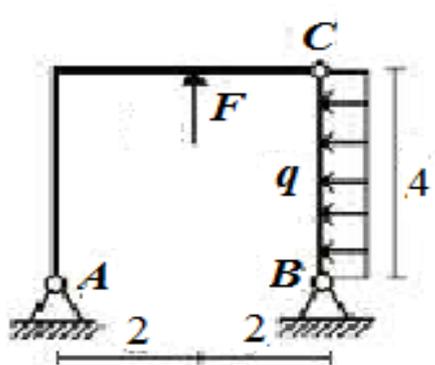
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8

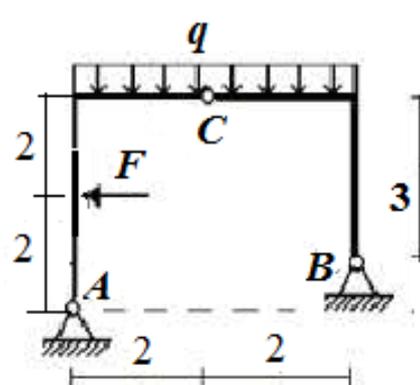


Рис. 15. Расчётные схемы составных конструкций

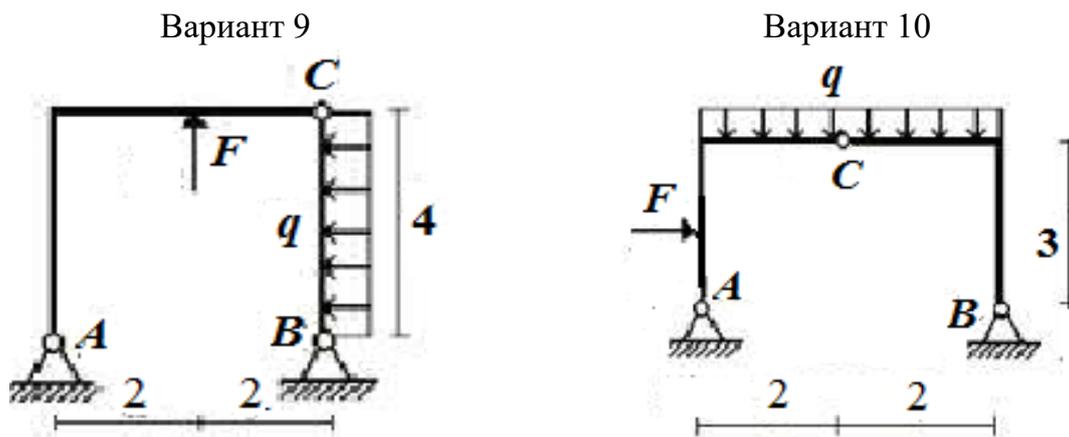


Рис. 15. Расчётные схемы составных конструкций (окончание)

Таблица 3

Вариант	F , кН	q , кН/м
1	10	12
2	6	18
3	14	10
4	12	24
5	7	26
6	16	16
7	8	20
8	10	14
9	4	22
10	15	28

Определение координат центра тяжести плоской фигуры (пластины)

Материальные тела состоят из элементарных частиц, положение которых в пространстве определяется их координатами. Силы притяжения каждой частицы к Земле можно считать системой параллельных сил, равнодействующая этих сил называется *силой тяжести* тела, или *весом* тела.

Центр тяжести тела – это геометрическая точка приложения силы тяжести тела, которая даже может быть расположена вне тела (например, диск с отверстием).

Большое практическое значение имеет определение центра тяжести тонких однородных пластин. Их толщиной обычно можно пренебречь и считать, что центр тяжести расположен в плоскости.

Существует несколько способов определения центра тяжести пластины. Рассмотрим один из них – метод дополнения, или отрицательных площадей (рис. 16).

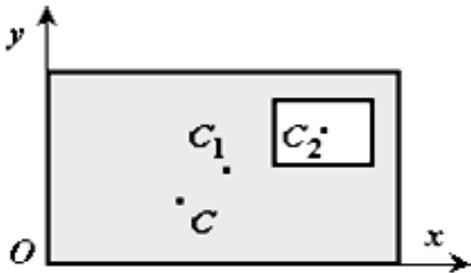


Рис. 16. Метод отрицательных площадей

Указание. С целью упрощения решения следует стремиться разбить заданную сложную плоскую фигуру на возможно меньшее число простых частей. Последовательность решения задачи:

- 1) изобразить на рисунке пластину и показать все её размеры;
- 2) разбить фигуру на возможно меньшее число простых фигур (треугольник, квадрат, круг, сегмент и т. д.);

3) вычислить площадь каждой части (если простая фигура вырезана из основной, то её площадь считается отрицательной);

4) найти центр тяжести выделенных простых фигур по стандартным формулам (если имеется ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси);

5) вычислить координаты x_c и y_c центра тяжести пластины.

$$A = A_1 - A_2.$$

$$x_c = (x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2) / (A_1 - A_2); \quad y_c = (y_1 \cdot A_1 - y_2 \cdot A_2) / (A_1 - A_2).$$

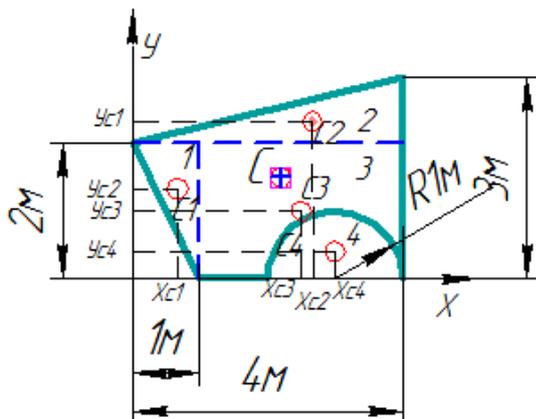


Рис. 17. Расчётная схема пластины

Пример. Определить координаты центра тяжести пластины (рис. 17).

Решение

1. Разобьём пластину на простые части, положение центров тяжести которых известно. Представим пластину в виде двух треугольников 1, 2, прямоугольника 3 и выреза 4 в виде полукруга.

2. Вычислим площадь и координаты центра тяжести каждой части:

$$A_1 = 1/2 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \text{ м}^2, x_1 = 2/3 \cdot 1 = 0,667 \text{ м}, y_1 = 2/3 \cdot 2 = 1,333 \text{ м};$$

$$A_2 = 1/2 \cdot 4 \cdot 1 = 2 \text{ м}^2, x_2 = 2/3 \cdot 4 = 2,667 \text{ м}, y_2 = 2 + 1/3 \cdot 1 = 2,333 \text{ м};$$

$$A_3 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ м}^2, x_3 = 1 + 1/2 \cdot 3 = 2,5 \text{ м}, y_3 = 1/2 \cdot 2 = 1 \text{ м};$$

$$A_4 = -(3,14 \cdot 1)/2 = -1,571 \text{ м}^2, x_4 = 3 \text{ м}, y_4 = (4 \cdot 1)/3 \cdot 3,14 = 0,424 \text{ м}.$$

Площадь выреза A_4 возьмём со знаком «-».

3. Площадь всей пластины

$$A = \Sigma A_i = 1 + 2 + 6 - 1,571 = 7,429 \text{ м}^2.$$

4. Найдём координаты центра тяжести всей пластины:

$$X_C = (\Sigma A_i x_i)/A = (0,667 \cdot 1 + 2,667 \cdot 2 + 2,5 \cdot 6 - 3 \cdot 1,571)/7,429 = 2,192 \text{ м};$$

$$Y_C = (\Sigma A_i y_i)/A = (1,333 \cdot 1 + 2,333 \cdot 2 + 1 \cdot 6 - 0,424 \cdot 1,571)/7,429 = 1,526 \text{ м}.$$

Практическое задание

Задача. Определить положение центра тяжести пластины. Варианты взять из рис. 18.

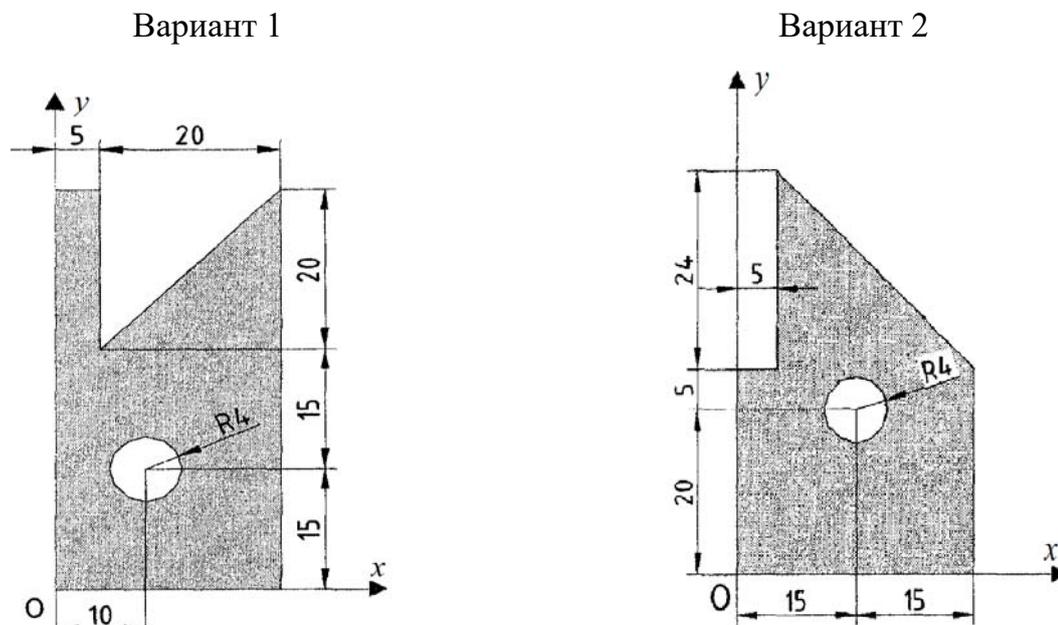
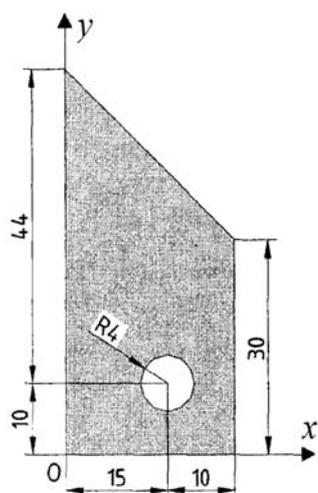
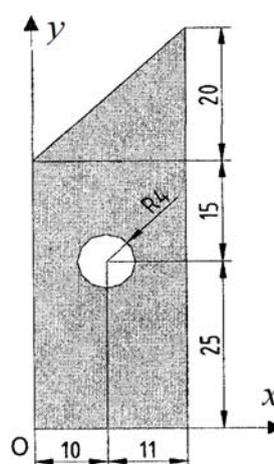


Рис. 18. Расчётные схемы пластин

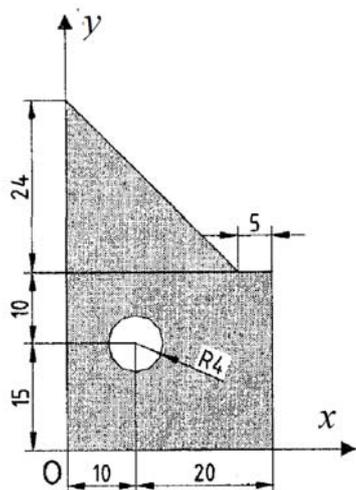
Вариант 3



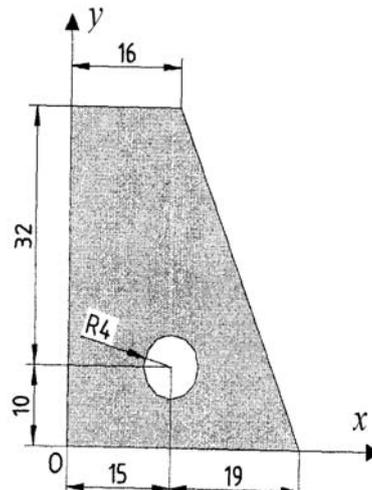
Вариант 4



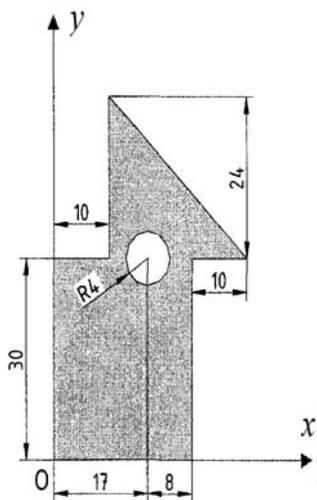
Вариант 5



Вариант 6



Вариант 7



Вариант 8

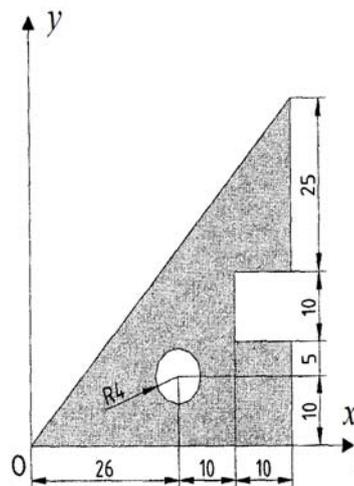
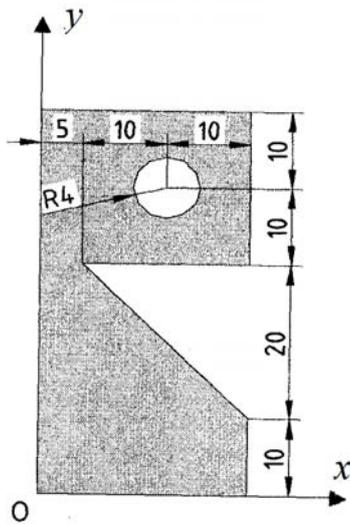


Рис. 18. Расчётные схемы пластин (продолжение)

Вариант 9



Вариант 10

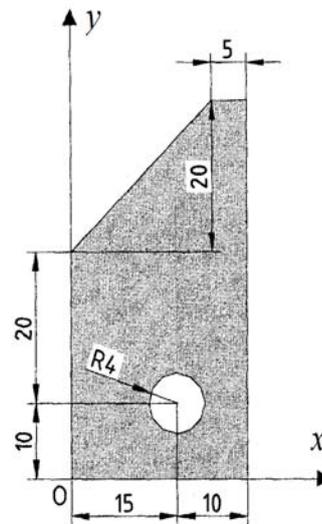


Рис. 18. Расчётные схемы пластин (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение таким понятиям статики, как материальная точка, абсолютно твёрдое тело.
2. Что называется свободным и несвободным телом?
3. Что называется силой? Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твёрдое тело?
4. Дайте понятие распределённой нагрузки.
5. Что такое сосредоточенная сила?
6. Что такое равнодействующая сила, уравнивающая силы?
7. Что называют связью?
8. Какие основные типы связей вам известны?
9. В чём заключается принцип освобождения от связей?
10. Что называется реакцией связи?
11. Как найти проекцию силы на ось?
12. В каком случае проекция силы на ось равна нулю?
13. В каком случае проекция силы на ось равна модулю силы?
14. В каком случае проекция силы на ось отрицательна?
15. Сколько уравнений равновесия составляется для плоской сходящейся системы сил?
16. В какую сторону направлена реакция стержня с шарнирным креплением концов?

17. Как найти момент силы относительно точки?
18. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
19. Как направлены реакции в неподвижном шарнире?
20. Как направлена реакция в подвижном шарнире?
21. Можно ли рассматривать силу тяжести как равнодействующую систему параллельных сил?
22. Может ли центр тяжести располагаться вне самого тела?
23. Какой знак имеет площадь отверстий в формуле для определения центра тяжести?
24. Если фигуру трудно разбить на небольшое число простых фигур, то какой способ определения центра тяжести может дать наиболее быстрый ответ?

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Статика»

Абсолютно твёрдое тело (твёрдое тело, тело) – материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками остаётся неизменным.

Вес тела – сумма модулей сил тяжести, действующих на частицы этого тела.

Внешняя сила – сила, действующая на какую-либо точку механической системы со стороны тел, не принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Внутренние силы – силы, действующие на какие-либо точки механической системы со стороны других точек, принадлежащих рассматриваемой механической системе.

Гибкая связь – нерастяжимые нить или трос, вес которых не учитывают.

Гладкая связь – материальное тело, имеющее поверхность, силами трения о которую рассматриваемой механической системы пренебрегают.

Материальная точка – тело, размерами и массой которого по условиям задачи можно пренебречь.

Механика – наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.

Механическое движение – изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел.

Механическая система – любая совокупность материальных точек, движения которых взаимозависимы.

Момент пары сил – векторная мера механического действия пары, равная моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

Момент силы относительно точки – вектор, приложенный в этой точке и направленный перпендикулярно к плоскости, содержащей силу и точку.

Несвободное твёрдое тело – тело, на перемещения которого в пространстве наложены ограничения.

Пара сил – система двух параллельных, противоположно направленных и равных по модулю сил, не лежащих на одной прямой.

Плечо пары сил – кратчайшее расстояние (длина перпендикуляра) между линиями действия сил, составляющих пару сил.

Плоская система сил – система сил, линии действия которых расположены в одной плоскости.

Проекция силы на координатную ось – величина, равная произведению модуля силы на косинус угла, составленного направлениями силы и оси.

Проекция силы на ось – скалярная величина, равная взятой со знаком «+» или «-» длине отрезка, заключенного между проекциями на ось начала и конца силы.

Равновесие механической системы – состояние механической системы, при котором её точки под действием приложенных сил остаются в покое по отношению к рассматриваемой системе отсчёта.

Распределённые силы – силы, действующие на все точки некоторой части линии, поверхности или объёма.

Реакции связей – силы, действующие на точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.

Свободное тело – тело, на перемещения которого в пространстве не наложено никаких ограничений.

Связи – материальные тела, накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любых действующих на систему силах.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического действия одного тела на другое.

Система сил – любая совокупность сил, действующих на механическую систему.

Сосредоточенная сила – сила, приложенная к телу в какой-либо одной его точке.

Статика – раздел механики, в котором изучают условия равновесия механических систем под действием сил.

Теоретическая механика – раздел механики, в котором изучают законы движения механических систем и общие свойства этих движений.

Уравновешенная система сил – система сил, которая, будучи приложена к свободному телу, находящемуся в равновесии, не выводит его из этого кинематического состояния.

Уравновешивающая система сил – система сил, которая вместе с заданной другой системой сил составляет уравновешенную систему сил.

Эквивалентные системы сил – две или несколько систем сил, имеющих одну и ту же уравновешивающую систему сил.

2. КИНЕМАТИКА

Кинематика (от греч. κινεῖν – *двигаться*) изучает математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа и т. д.) механического движения материальных тел в пространстве в зависимости от времени без рассмотрения причин движения, то есть без учёта сил, вызывающих это движение.

Кинематику называют иногда «геометрией движения».

Термин «кинематика» был введён французским физиком и математиком Андре-Мари Ампером (1775 – 1836).

Напомним, что положение точки в пространстве можно задать несколькими способами, но рассмотрим только один из них – положение задаётся радиус-вектором или тремя его проекциями на оси координат (рис. 19).

Следовательно, закон движения – это зависимость радиус-вектора от времени или зависимость координат от времени

$$r = r(t) \text{ или } x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Скорость точки – векторная физическая величина, характеризующая изменение положения точки в пространстве с течением времени

$$v = l/t.$$

Средняя скорость перемещения равна отношению полного перемещения к промежутку времени, за которое это перемещение совершено

$$v_{\text{cp}} = S/\Delta t.$$

Мгновенная скорость – скорость в заданный момент времени

$$v = r.$$

Модуль мгновенной скорости определяется равенством

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение точки a_n характеризует изменение скорости по направлению, и это всегда положительная величина.

Касательное (тангенциальное) ускорение a_τ характеризует изменение скорости точки по величине.

Нормальное и касательное ускорения точки являются главными кинематическими величинами, определяющими вид и особенности движения точки.

Полное ускорение – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости

$$a = v/t.$$

При криволинейном движении точки полное ускорение можно разложить на две составляющие

$$a = a_n + a_\tau.$$

Модуль полного ускорения равен

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Пример 1. Определить скорость и ускорение точки, которая движется по закону $S = 5t^3 + t^2 + 7$ в момент времени $t = 3$ с.

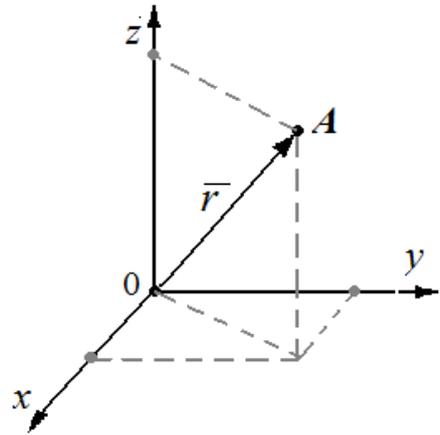


Рис. 19. Положение точки в пространстве

Решение

1. Определим закон изменения скорости движения точки:

$$v = dS/dt = 5 \cdot 3 \cdot t^2 + 2t = 15t^2 + 2t.$$

2. Определим закон изменения касательного ускорения:

$$a_{\tau} = dv/dt = 15 \cdot 2 \cdot t + 2 = 30t + 2.$$

3. Определим величину скорости при $t = 3$ с:

$$v = 15t^2 + 2t = 15 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 15 \cdot 9 + 6 = 135 + 6 = 141 \text{ м/с}.$$

4. Определим величину касательного ускорения:

$$a_{\tau} = 30t + 2 = 30 \cdot 3 + 2 = 90 + 2 = 92 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку движение точки прямолинейное, то нормальное ускорение отсутствует

$$a_n = 0.$$

Ответ: $v = 141$ м/с; $a = 92$ м/с² при $t = 3$ с.

Практическое задание 1

Задача. Точка движется прямолинейно согласно уравнению $S = f(t)$. Необходимо определить скорость и ускорение точки в заданный момент времени t . Варианты взять из табл. 4.

Таблица 4

Вариант	$S = f(t)$	Вариант	$S = f(t)$
1	$S = 6t^3 + 10t^2 + 5$ при $t = 2$ с	6	$S = 2t^3 + 2t^2 + 4$ при $t = 1$ с
2	$S = 3t^3 + 15t^2 + 8$ при $t = 1$ с	7	$S = 0,5t^3 + 11t^2 + 5$ при $t = 2$ с
3	$S = t^3 + 5t^2 + 7$ при $t = 2$ с	8	$S = 2t^3 + 3t^2 + 3$ при $t = 3$ с
4	$S = 2t^3 + 6t^2 + 6$ при $t = 3$ с	9	$S = 1,5t^3 + 5t^2 + 5$ при $t = 1$ с
5	$S = 4t^3 + 8t^2 + 7$ при $t = 1$ с	10	$S = 2t^3 + 2t^2 + 35$ при $t = 2$ с

Пример 2. Даны уравнения движения точки в плоскости xu $x = 2t$, $y = t^2$, где x, y – в сантиметрах, время t – в секундах.

Определить уравнение траектории точки; найти скорость и ускорение точки для момента времени $t_1 = 1$ с.

Решение

Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t .

Отсюда находим следующее уравнение траектории точки:
 $y = x^2/4$ (парабола, рис. 20)

Скорость точки найдём по её проекциям на координатные оси:

$$v_x = dx/dt = 2; \quad v_y = dy/dt = 2t; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t = 1$ с $v_x = 2$ см/с, $v_y = 2$ см/с, $v = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2,83$ см/с.

Аналогично найдём ускорение точки:

$$a_x = dv_x / dt = 0; \quad a_y = dv_y / dt = 2; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

и при $t = 1$ с $a_x = 0$ см/с², $a_y = 2$ см/с², $a = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$ см/с².

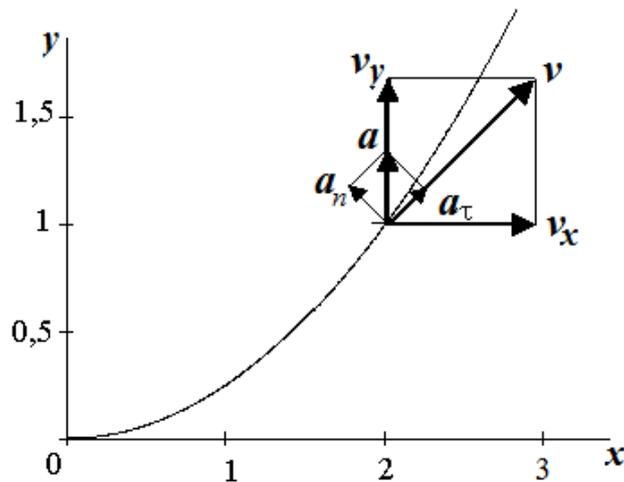


Рис. 20. Движение точки по параболе

Практическое задание 2

Задача. Точка B движется в плоскости xOy . Закон движения точки задан уравнениями $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; только для момента времени $t_1 = 1$ с определить скорость и ускорение точки.

Зависимость $x = f_1(t)$ – в табл. 5, а зависимость $y = f_2(t)$ – в табл. 6.

Указания. Задача относится к кинематике точки и решается с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения точки).

Таблица 5

Вариант	$x = f(t)$	Вариант	$x = f(t)$
1	$x = 4t$	6	$x = 2t$
2	$x = 3 - 2t$	7	$x = 2t + 2$
3	$x = 3t$	8	$x = 3t - 2$
4	$x = 4 - 2t$	9	$x = 6t - 3$
5	$x = 2t + 4$	10	$x = 4 - 2t$

Таблица 6

Вариант	$y = f(t)$	Вариант	$y = f(t)$
1	$y = t^2 - 2$	6	$y = 3t^2 - 2$
2	$y = (t + 4)^2$	7	$y = (t + 1)^3$
3	$y = 4 + 2t^2$	8	$y = 6t^2$
4	$y = 2(t + 1)^2$	9	$y = 2t^3$
5	$y = 4t^2 - 2$	10	$y = 4t^3$

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоят основные задачи кинематики?
2. Назовите кинематические характеристики.
3. Какие вы знаете способы задания движения точки?
4. Что такое абсолютная скорость точки?
5. Как определить относительную и переносную скорости точки?
6. В чём заключается координатный способ задания движения точки?
7. Что характеризуют нормальное и касательное ускорения точки?

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Кинематика»

Абсолютное движение точки – движение точки или тела по отношению к основной системе отсчёта.

Абсолютная скорость точки – скорость точки в абсолютном движении.

Абсолютная траектория точки – траектория точки по отношению к основной системе отсчёта.

Естественные оси – прямоугольная система осей с началом в движущейся точке, направленных соответственно по касательной главной нормали и бинормали к траектории этой точки.

Кинематика – раздел механики, в котором изучаются движения материальных тел без учёта их масс и действующих на них сил.

Примечание. В кинематике движущиеся объекты рассматриваются как геометрические точки или тела и именуются соответственно «точка» или «тело».

Касательное ускорение точки – составляющая ускорения точки вдоль касательной к траектории при разложении ускорения по естественным осям.

Механическое движение – изменение с течением времени взаимного положения в пространстве материальных тел или взаимного положения частей данного тела.

Примечания. 1. В пределах механики механическое движение можно кратко называть «движение». 2. Понятие «механическое движение» может относиться и к геометрическим объектам.

Нормальное ускорение точки – составляющая ускорения точки вдоль главной нормали к траектории при разложении ускорения по естественным осям.

Основная система отсчёта – при рассмотрении движения тел по отношению к нескольким системам отсчёта – та из этих систем, относительно которой определяется движение всех остальных.

Относительное движение точки – движение точки или тела по отношению к подвижной системе отсчёта.

Относительная скорость точки – скорость точки в относительном движении.

Относительная траектория точки – траектория точки по отношению к подвижной системе отсчёта.

Относительное ускорение точки – ускорение точки в относительном движении.

Переносная скорость точки – при сложном движении точки – скорость той неизменно связанной с подвижной системой отсчёта точки пространства, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка.

Переносное ускорение точки – при сложном движении точки – ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчёта точки пространства, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка.

Подвижная система отсчёта – система отсчёта, движущаяся по отношению к основной системе отсчёта.

Путь точки – расстояние, пройденное точкой за рассматриваемый промежуток времени, измеряемое вдоль траектории и направления движения точки.

Скорость точки – кинематическая мера движения точки, равная производной по времени от радиус-вектора этой точки в рассматриваемой системе отсчёта.

Траектория точки – геометрическое место положений точки в рассматриваемой системе отсчёта.

Ускорение точки – мера изменения скорости точки, равная производной по времени от скорости этой точки в рассматриваемой системе отсчёта.

3. ДИНАМИКА

Динамика (от греч. δύναμις – *сила*) изучает причины возникновения механического движения.

Основы динамики заложил итальянский физик, математик, астроном, механик Галилео Галилей (1564 – 1642), который опроверг положение в науке со времён Аристотеля (IV в. до н. э.) о том, что естественное состояние тела – покой, а движется оно только под действием силы или импульса; отсюда заблуждение о том, что из двух тел, падающих на Землю, более тяжёлое движется быстрее.

Аристотелевская традиция провозглашала также, что все законы, управляющие Вселенной, можно вывести путём чистого умозрения, без экспериментальной проверки.

Поэтому до Галилея никто не пытался удостовериться, действительно ли тела различной массы падают с разной скоростью.

На основе выводов Галилея английский физик, математик и механик Исаак Ньютон (1643 – 1727) в 1687 г. в «Математических началах натуральной философии» сформулировал основные аксиомы

(законы) движения, ставшие фундаментом, на который сотни лет опирается *классическая механика*.

Движение материальных тел всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчёта и во времени.

Пространство считается трёхмерным эвклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нём материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов, во всех системах отсчёта, движущихся относительно друг друга, протекает одинаково.

Принцип Даламбера для материальной точки

Впервые этот принцип сформулировал французский философ, математик и механик Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783).

Уравнение движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта под действием приложенных активных сил и сил реакции связей имеет вид

$$m \cdot a = F + R,$$

где F – равнодействующая активных сил, R – равнодействующая сил реакции связей.

Силой инерции материальной точки называют произведение массы точки на вектор ускорения, взятое с обратным знаком, то есть $\Phi = -m \cdot a$. Если использовать понятие силы инерции, то в таком случае можно сформулировать принцип Даламбера для материальной точки: *в каждый момент времени активные силы, действующие на материальную точку, силы реакций связей вместе с силой инерции точки образуют уравновешенную систему сил*

$$F + R + \Phi = 0.$$

Принцип Даламбера называют еще методом *кинетостатики*.

Понятие о силе инерции ввёл еще Ньютон. Он рассуждал так: если точка движется под действием силы $F = m \cdot a$, то тело (или система тел) является источником этой силы. По закону равенства действия и противодействия ускоряемая точка будет воздействовать на ускоряющие её тело с силой $\Phi = -m \cdot a$. Эту силу Ньютон назвал *силой инерции* точки. Силы F и Φ равны и противоположны, но приложены к разным телам. Поэтому складывать их нельзя. Сила

инерции точки на саму точку не действует. Для точки это *фиктивная* сила. Если бы на точку кроме силы F действовала бы еще и сила Φ , то точка оставалась бы в покое.

Принцип Даламбера даёт общий приём составления уравнений, необходимых для решения задач динамики системы, причём эти уравнения имеют ту же форму, что и уравнения статики. Этот приём оказывается особенно полезным при решении тех задач, в которых требуется найти динамические реакции связей, то есть реакции, возникающие при движении системы.

В задачах, в которых внешние силы, силы реакций связей и силы инерции образуют произвольную пространственную систему сил, требуется определить реакции двух закреплённых тел (например, в двух подшипниках), возникающие при вращении тела вокруг неподвижной оси, проходящей через эти точки.

После приложения всех внешних нагрузок, реакций связей и всех сил инерции можно рассматривать равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При этом в общем случае можно составить шесть известных из «пространственной» статики уравнений равновесия: три уравнения проекций сил и три уравнения моментов сил относительно координатных осей.

Пример. Определить усилия в стержнях S_1 и S_2 .

Дано: $m_1 = 55$ кг; $m_2 = 105$ кг; $m_3 = 90$ кг; $m_4 = 80$ кг; $R_1 = 0,35$ м; $R_2 = 0,70$ м; $l_1 = 0,95$ м; $l_2 = 1,35$ м; $\alpha = 45^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $q = 200$ кг/м; $T = 2500$ Н.

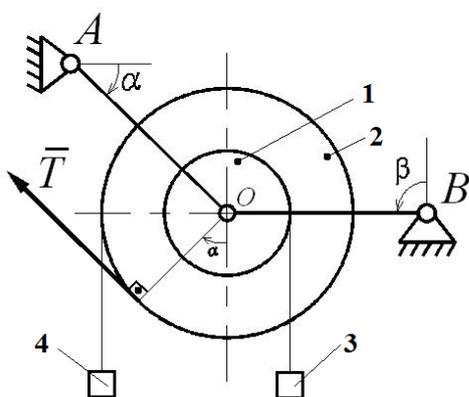


Рис. 21. Расчётная схема механической системы

Решение

1. Выполняем расчётную схему строго в соответствии с условием задачи (учитываем углы α и β и выбираем линейный масштаб). Расчётная схема, соответствующая условию задачи, представлена на рис. 21.

2. Для решения задачи воспользуемся принципом Даламбера для механической системы (или системы материальных точек): в любой мо-

мент времени векторная сумма главных векторов внешних сил, реакций связей и сил инерции и главных моментов этих сил относительно произвольного центра равняется нулю. Следовательно, необходимо выделить внешние силы, силы реакций связей и силы инерции.

3. Внешние силы.

К внешним силам относятся: сила T (направлена под углом 45° к горизонтали), силы тяжести $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, $m_3 \cdot g$, $m_4 \cdot g$ и силы тяжести стержней AO и BO – $m_5 \cdot g$ и $m_6 \cdot g$ соответственно

$$m_5 \cdot g = q \cdot l_1 \cdot g = 200 \cdot 0,95 \cdot 9,81 \approx 1860 \text{ Н};$$

$$m_6 \cdot g = q \cdot l_2 \cdot g = 200 \cdot 1,35 \cdot 9,81 \approx 2650 \text{ Н}.$$

При этом массы стержней равны

$$m_5 = q \cdot l_1 = 200 \cdot 0,95 = 190 \text{ кг};$$

$$m_6 = q \cdot l_2 = 200 \cdot 1,35 = 270 \text{ кг}.$$

Все вычисления выполняем с точностью до трёх значащих цифр.

На рис. 22 покажем эти силы. При этом учитываем, что поскольку стержни однородные, силы тяжести $m_5 \cdot g$ и $m_6 \cdot g$ приложены в геометрических центрах этих стержней. Таким образом, все внешние нагрузки T , $m_1 \cdot g$, $m_2 \cdot g$, $m_3 \cdot g$, $m_4 \cdot g$, $m_5 \cdot g$ и $m_6 \cdot g$ на расчётной схеме показаны.

4. Силы реакций связей. К силам реакций связей, которые в дальнейшем будем учитывать, относятся усилие S_1 в стержне AO и усилие S_2 в стержне BO . Реакции в шарнире O не рассматриваются, так как для данной механической системы эти реакции являются силами внутренними. Эти усилия показываем направленными вдоль стержней в произвольную сторону.

5. Силы инерции. При вычислении главного вектора и главного момента сил инерции твёрдого тела необходимо учитывать вид движения этого тела.

Блоки 1 и 2 жёстко соединены друг с другом, сидят на одной оси, поэтому, вращаясь, имеют равные угловую скорость и угловое ускорение. При вращательном движении

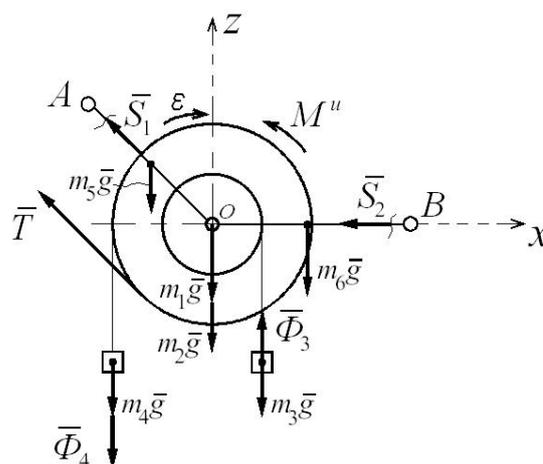


Рис. 22. Расчётная схема сил

твёрдого тела силы инерции приводятся к главному моменту сил инерции, равному и направленному в сторону, противоположную угловому ускорению

$$M^и = I_Z \cdot \varepsilon,$$

где $I_Z = I_{Z_1} + I_{Z_2}$ – момент инерции блоков 1 и 2 относительно оси вращения; ε – угловое ускорение блоков.

Следовательно,

$$I_Z = 0,5m_1 \cdot R_1^2 + 0,5m_2 \cdot R_2^2 = 0,5 \cdot 55 \cdot (0,35)^2 + 0,5 \cdot 105 \cdot (0,7)^2 = 3,37 + 25,7 = 29,07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

На данном этапе решение задачи определить угловое ускорение блоков по величине не представляется возможным. Поэтому допустим, что угловое ускорение ε блоков направлено по часовой стрелке (см. рис. 22). Тогда момент сил инерции $M^и$ направлен в противоположную сторону.

Грузы 3 и 4 совершают поступательное движение. В этом случае все силы инерции приводятся к главному вектору сил инерции, которые соответственно равны

$$\Phi_3 = -m_3 \cdot a_3 \text{ и } \Phi_4 = -m_4 \cdot a_4,$$

где знак « \rightarrow » означает, что главный вектор сил инерции направлен в сторону, противоположную ускорению тела;

$$a_3 = \varepsilon \cdot R_1 = 0,35\varepsilon \text{ м/с}^2 \text{ и } a_4 = \varepsilon \cdot R_2 = 0,7\varepsilon \text{ м/с}^2.$$

Направления a_3 и a_4 соответствуют выбранному ранее направлению ε .

С учётом изложенного покажем на рис. 22 силы инерции Φ_3 и Φ_4 .

6. Принцип Даламбера позволяет решать задачи динамики значительно более простыми методами статики. В соответствии с условием задачи механическая система расположена в вертикальной плоскости. Следовательно, все силы располагаются именно в этой плоскости. Направления сил произвольны. Таким образом, применяя принцип Даламбера, считаем, что имеет место равновесие механической системы под действием плоской произвольной системы сил. Составим три уравнения равновесия в выбранной и показанной на рис. 23 системе координат:

$$1) \sum F_{ix} = 0; -T \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ - S_2 = 0;$$

$$2) \sum F_{iz} = 0; T \sin 45^\circ + S_1 \sin 45^\circ - m_1 g - m_2 g - m_3 g - m_4 g - m_5 g - m_6 g - \Phi_4 + \Phi_3 = 0;$$

$$3) \sum M_o(\vec{F}_i) = 0; T \cdot R_2 - M^u + m_3 g R_1 - \Phi_3 \cdot R_1 - m_4 g \cdot R_2 - \Phi_4 \cdot R_2 - m_5 g \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \cos 45^\circ + m_6 g \cdot \frac{l_2}{2} = 0.$$

При составлении третьего уравнения равновесия за положительное направление момента силы принимаем направление момента внешней силы T , то есть по часовой стрелке.

С учетом значений сил и момента сил инерции получим

$$T \cdot R_2 + g(m_3 R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5 \frac{l_1}{2} \cos 45^\circ + m_6 \frac{l_2}{2}) - I_z \cdot \varepsilon - m_3 \cdot 0,35\varepsilon \cdot R_1 - m_4 \cdot 0,7\varepsilon \cdot R_2 = 0.$$

Находим угловое ускорение:

$$\varepsilon = \frac{T \cdot R_2 + g(m_3 R_1 - m_4 \cdot R_2 - m_5 \frac{l_1}{2} \cos 45^\circ + m_6 \frac{l_2}{2})}{I_z + 0,35m_3 R_1 + 0,7m_4 R_2} =$$

$$= \frac{2500 \cdot 0,7 + 9,8(90 \cdot 0,35 - 80 \cdot 0,7 - 190 \frac{0,95}{2} 0,707 + 270 \frac{1,35}{2})}{29,1 + 0,35 \cdot 90 \cdot 0,35 + 0,7 \cdot 80 \cdot 0,7} = 33,6.$$

Силы инерции равны

$$\Phi_3 = m_3 \cdot a_3 = m_3 \cdot 0,35\varepsilon = 90 \cdot 0,35 \cdot 33,6 \approx 1060 \text{ Н};$$

$$\Phi_4 = m_4 \cdot a_4 = m_4 \cdot 0,7\varepsilon = 80 \cdot 0,7 \cdot 33,6 \approx 1880 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия находим усилие в стержне 1:

$$S_1 = \frac{-T \sin 45^\circ + g(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6) + \Phi_4 - \Phi_3}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{-2500 \cdot 0,707 + 9,8(55 + 105 + 90 + 80 + 190 + 270) + 1880 - 1060}{0,707} = 9610 \text{ Н}.$$

Из уравнения равновесия находим усилие в стержне 2:

$$S_2 = -T \cos 45^\circ - S_1 \cos 45^\circ = -2500 \cdot 0,707 - 9610 \cdot 0,707 = -8560 \text{ Н}.$$

Ответ: $S_1 = 9610 \text{ Н}; S_2 = -8560 \text{ Н}.$

Практическое задание

Задача. Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из двух блоков 1 и 2, жёстко соединённых между собой и насаженных на общую ось, которая через шарнир (подшипник) O опирается на стержни AO (l_1) и BO (l_2). На каждый из блоков

намотана невесомая нерастяжимая нить, на концах которой прикреплены грузы 3 и 4. Блоки считать сплошными однородными цилиндрами, массы m_1 и m_2 и радиусы R_1 и R_2 .

Однородные стержни AO и BO , погонная масса которых q , наклонены к вертикали или горизонтали под углами α и β соответственно. Крепление стержней в опорах A и B шарнирное.

К механической системе приложены внешние нагрузки: постоянная сила T или постоянный момент M .

Определить усилия в стержнях. Варианты взять из табл. 7 и рис. 23.

Таблица 7

Вариант	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	l_1	l_2	α	β	q , кг/м	T , Н	M , Н·м
	кг				м				градус				
1	40	70	60	100	0,25	0,40	0,8	0,9	30	90	100	1200	480
2	60	100	20	80	0,20	0,50	1,0	1,1	45	60	120	1400	560
3	50	90	70	90	0,30	0,55	1,1	1,2	60	45	140	1600	600
4	30	80	40	70	0,35	0,60	0,9	0,8	60	90	150	1800	640
5	20	60	50	60	0,15	0,30	0,7	0,9	60	30	160	2000	680
6	45	90	100	50	0,40	0,60	1,2	1,0	45	90	180	1000	440
7	70	120	110	70	0,45	0,70	1,3	1,1	45	30	170	900	400
8	80	140	75	85	0,50	0,75	1,4	1,3	45	45	110	2100	720
9	90	180	85	110	0,55	0,80	1,5	1,4	30	60	180	2200	760
10	100	190	95	130	0,60	0,85	1,6	1,5	30	45	190	2300	800

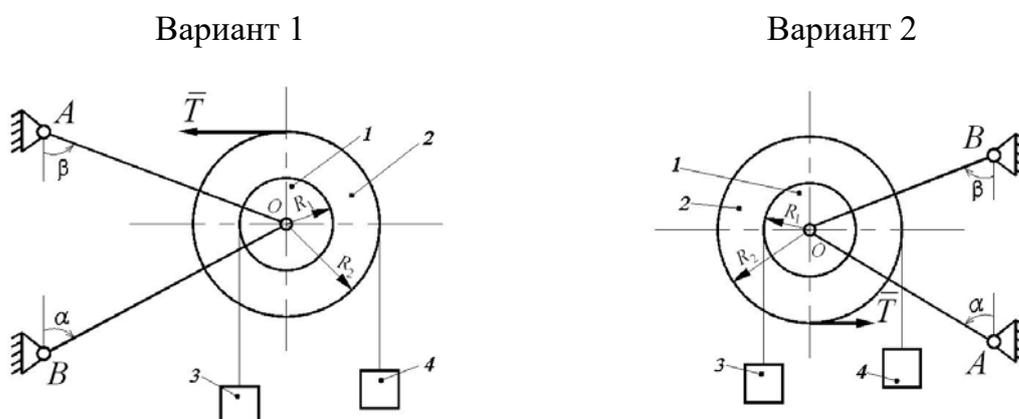


Рис. 23. Механическая система

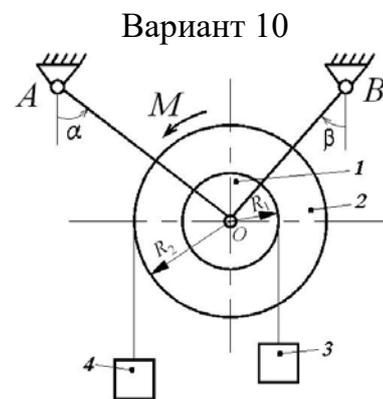
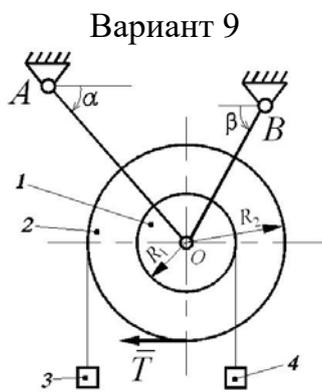
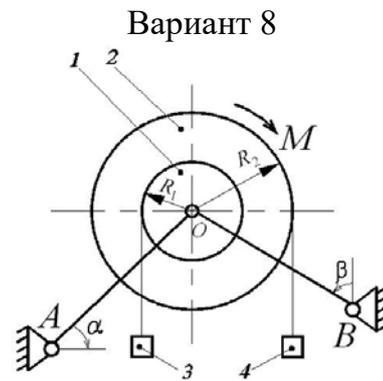
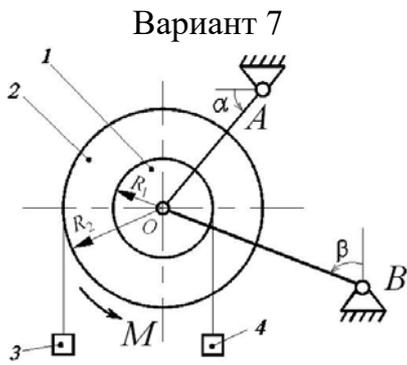
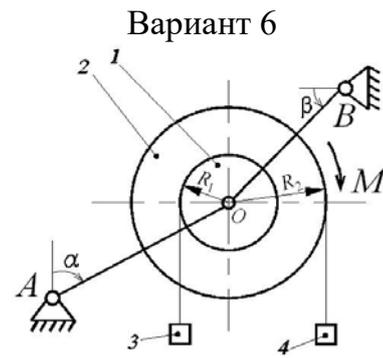
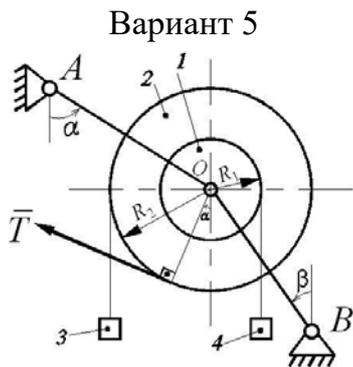
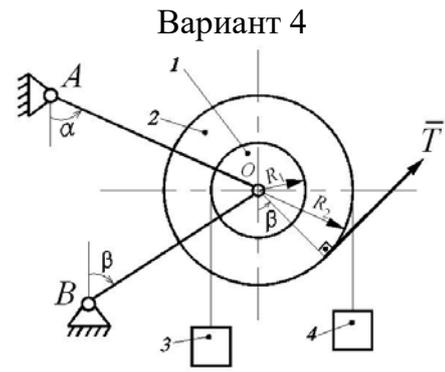
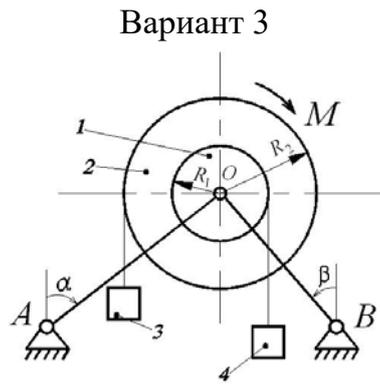


Рис. 23. Механическая система (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируются две основные задачи динамики?
2. Что такое принцип кинетостатики?
3. Назовите основные законы Ньютона.
5. Что такое сила инерции тела?
6. В чём состоит принцип Даламбера для механической системы?

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Динамика»

Вес тела – сила, с которой тело, находящееся в силовом (гравитационном) поле, действует на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес. Значит, вес приложен к опоре, подвесу, но не к телу.

Второй закон Ньютона – физический закон, в соответствии с которым ускорение, приобретаемое материальной точкой в инерциальной системе отсчёта, прямо пропорционально действующей на тело (равнодействующей) силе, обратно пропорционально массе тела и направлено в сторону действия силы. В такой форме закон применим только для тел, масса которых при движении не меняется. Более общая формулировка второго закона Ньютона гласит: скорость изменения импульса тела прямо пропорциональна действующей силе.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами.

Инертность – свойство материальных объектов приобретать разные ускорения при одинаковых внешних воздействиях со стороны других тел. Мерой инертности тела в поступательном движении является его *масса*.

Инерция – явление сохранения скорости прямолинейного равномерного движения или состояния покоя при компенсации внешних воздействий. Инерция присуща всем материальным объектам в одинаковой степени. Движение по инерции – движение тела, происходящее без внешних воздействий.

Инерциальная система отсчёта – система отсчёта, в которой тело находится в покое или движется равномерно и прямолинейно до

тех пор, пока на него не действуют другие тела или это действие скомпенсировано. Смысл *первого закона Ньютона* заключается в утверждении существования таких систем отсчёта.

Механическое движение – изменение с течением времени положения одного тела относительно другого или положения частей тела относительно друг друга. Механическое движение в этом смысле относительно.

Первый закон Ньютона (открыт Галилеем) – физический закон, в соответствии с которым материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного движения до тех пор, пока внешние воздействия не изменят это состояние.

Принцип независимости действия сил – принцип механики, согласно которому каждая из сил, действующих на тело, сообщает ему пропорциональное ей ускорение независимо от действия других сил. При этом *ускорение* тела равно векторной сумме ускорений, сообщаемых ему каждой из этих сил в отдельности.

Принцип относительности классической механики – постулат Галилео Галилея, согласно которому в любых инерциальных системах отсчёта все механические явления протекают одинаково при одних и тех же условиях.

Пространство и время – основные формы существования материи. Это философские категории, в физике они не определяются.

Силы инерции – фиктивные силы, которые вводятся в неинерциальных системах отсчёта, чтобы второй закон Ньютона можно было распространить на неинерциальные системы отсчёта.

Третий закон Ньютона – физический закон, в соответствии с которым силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки. Как и прочие законы Ньютона, третий закон справедлив только для инерциальных систем отсчёта. Краткая формулировка третьего закона: действие равно противодействию.

Ускорение свободно падающего тела – ускорение, с которым движется тело под действием силы тяготения.

Раздел 2

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Сопротивление материалов – раздел механики, рассматривающий прочность и деформируемость материалов и элементов различных технических сооружений, деталей механизмов и машин.

Основоположником сопротивления материалов заслуженно считают Архимеда (ок. 287 – 212 гг. до н. э.).

Напомним, что *твёрдое тело* в механике – это неизменяемая система материальных точек, то есть такая идеализированная система, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.

Силы притяжения и отталкивания обуславливают механическую прочность твёрдых тел, то есть их способность противодействовать изменению формы и объёма.

Растяжению тел препятствуют силы межатомного притяжения, а сжатию – силы отталкивания.

Недеформируемых тел в природе не существует.

Растяжение-сжатие – это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные продольные силы N , а прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю.

Растягивающие нормальные продольные силы принято считать положительными (рис. 24, а), а сжимающие – отрицательными (рис. 24, б).

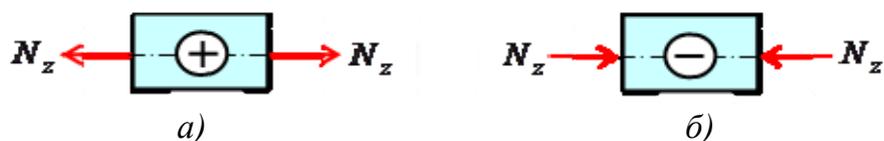


Рис. 24. Растягивающие продольные силы: а – положительные;
б – отрицательные

При расчёте стержней, испытывающих деформацию растяжения, на прочность и жесткость при статическом действии нагрузки, надо решить две основные задачи: это определение напряжений (от N), возникающих в стержне, и нахождение линейных перемещений в зависимости от внешней нагрузки.

Рассмотрим однородный стержень с одним жёстко заделанным концом, и другим – свободным, к которому приложена центральная продольная сила P (рис. 25).

До нагружения стержня его длина равнялась l , после нагружения она стала равной $l + \Delta l$. Величину Δl называют *абсолютной деформацией стержня*.

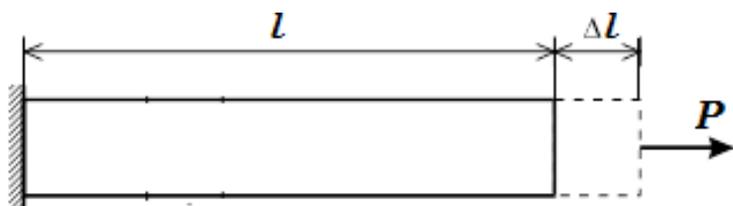


Рис. 25. Нагруженный стержень силой P

Отношение абсолютной деформации Δl к первоначальной длине образца l называют *относительной деформацией*

$$\varepsilon = \Delta l / l.$$

Английский учёный Роберт Гук (1635 – 1703) в пределах малых деформаций при простом растяжении или сжатии вывел закон: *механическое напряжение прямо пропорционально модулю относительной деформации*

$$\sigma = E \cdot \varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E в законе Гука называется *модулем продольной упругости* – он же модуль Юнга, названный в честь английского физика Томаса Юнга (1773 – 1823). Физический смысл: модуль Юнга численно равен такому нормальному напряжению, которое должно было бы возникнуть в теле при увеличении его длины в два раза (если бы для такой большой деформации выполнялся закон Гука). В СИ модуль Юнга выражают в паскалях ($1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$).

Продольные силы N , возникающие в поперечных сечениях стержня, определяются по внешней нагрузке с помощью метода сечений. График, показывающий изменение продольных сил по длине оси стержня, называется *эпюрой продольных сил*. Эпюра позволяет определить, в каком сечении действует максимальное внутреннее усилие (например, найти N_{\max} при растяжении-сжатии). Сечение, где действует максимальное усилие, называют *опасным*.

Перед построением эпюр необходимо установить границы участков, в пределах которых закон изменения внутренних сил постоянный. Границами таких участков являются сечения, где приложены сосредоточенные силы или начинается и кончается распределённая нагрузка, а также сечения, где имеется перелом стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков, изложенные выше, получаем уравнения изменения внутренних сил в пределах длины каждого участка стержня.

Расчёт стержней при центральном растяжении-сжатии

Пример. Построить эпюры при растяжении и сжатии продольных сил, нормальных напряжений и перемещений для стального ступенчатого стержня (рис. 26).

Решение

Чтобы построить эпюру продольных сил, нужно разбить стержень на несколько участков, на которых эта эпюра будет иметь постоянное значение. Конкретно для продольной эпюры границами участков служат те точки, где прикладываются силы. Таким образом, для нашего примера нужно рассмотреть всего два участка.

Следует отметить, что на эпюру продольных сил никак не влияет форма стержня в отличие от последующих эпюр.

На первом участке сила F_1 растягивает стержень на величину 5 кН, поэтому на этом участке продольная сила будет положительной и равной $N_1 = F_1 = 5$ кН. Отложим это значение на графике (см. рис. 26).

На втором участке сила F_2 сжимает стержень, поэтому в уравнение продольных сил она пойдёт со знаком « \leftarrow »

$$N_2 = F_1 - F_2 = 5 - 8 = -3 \text{ кН.}$$

Перейдём к построению эпюры нормальных напряжений, которые в отличие от продольных сил зависят от формы стержня, то есть от площади его поперечных сечений, и вычисляются по формуле

$$\sigma = N/A,$$

где A – площадь сечения стержня, мм^2 или см^2 .

Для заданного стержня наметим три участка, то есть места изменения геометрии стержня (см. рис. 26).

Зададим стержню на первом участке площадь поперечного сечения $A_1 = 2 \text{ см}^2$, а на второй и третьей ступени – $A_2 = 4 \text{ см}^2$.

Вычислим напряжения:

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}/2 \text{ см}^2 = 2500 \text{ Н/см}^2 = 25 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = N_1/A_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ Н}/4 \text{ см}^2 = 1250 \text{ Н/см}^2 = 12,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = N_2/A_2 = -3 \cdot 10^3 \text{ Н}/4 \text{ см}^2 = -750 \text{ Н/см}^2 = -7,5 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру нормальных напряжений σ_x (см. рис. 26).

Построим эпюру осевых перемещений поперечных сечений (эпюра перемещений). Воспользуемся формулой $W = (N \cdot l)/(E \cdot A)$.

Эта формула является следствием закона Гука, и её можно записать так:

$$W = (\sigma \cdot l)/E,$$

где $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ – модуль упругости Юнга для стального стержня.

Для удобства все характерные сечения стержня обозначим латинскими буквами (см. рис. 26).

Как правило, расчёт перемещений начинают с сечения в заделке, так как это сечение не имеет возможности перемещаться и, следовательно, оно равно нулю $W_A = 0$.

Далее для построения эпюры нужно вычислить перемещения в характерных сечениях, которые находятся на границах участков (B, C, D). Этого будет достаточно, так как в пределах участков эпюра будет меняться по линейному закону.

Рассчитаем перемещения сечений B, C, D :

$$W_B = W_A + (\sigma_3 \cdot l_3)/E = 0 + (-750 \cdot 300)/2 \cdot 10^7 = -0,0113 \text{ см};$$

$$W_C = W_B + (\sigma_2 \cdot l_2)/E = -0,0113 + (1250 \cdot 100)/2 \cdot 10^7 = 0,0051 \text{ см};$$

$$W_D = W_C + (\sigma_1 \cdot l_1)/E = 0,0051 + (2500 \cdot 500)/2 \cdot 10^7 = 0,068 \text{ см}.$$

Очевидно, что для каждого последующего сечения учитывается перемещение предыдущего!

И, наконец, строим эпюру перемещений W (см. рис. 26).

Вычислим удлинение стержня Δl . При переменных значениях продольной силы и площади поперечного сечения удлинение вычисляем по формуле

$$\Delta l = \Sigma(N \cdot l/E \cdot A) = N_1 \cdot 600/2 \cdot 10^4 \cdot 2 + N_2 \cdot 300/2 \cdot 10^4 \cdot 4 = \\ = 5 \cdot 600/2 \cdot 10\,000 \cdot 2 - 3 \cdot 300/2 \cdot 10\,000 \cdot 4 = 0,3 - 0,18 = 0,12 \text{ см}.$$

Таким образом, длина стержня увеличится на 1,2 мм.

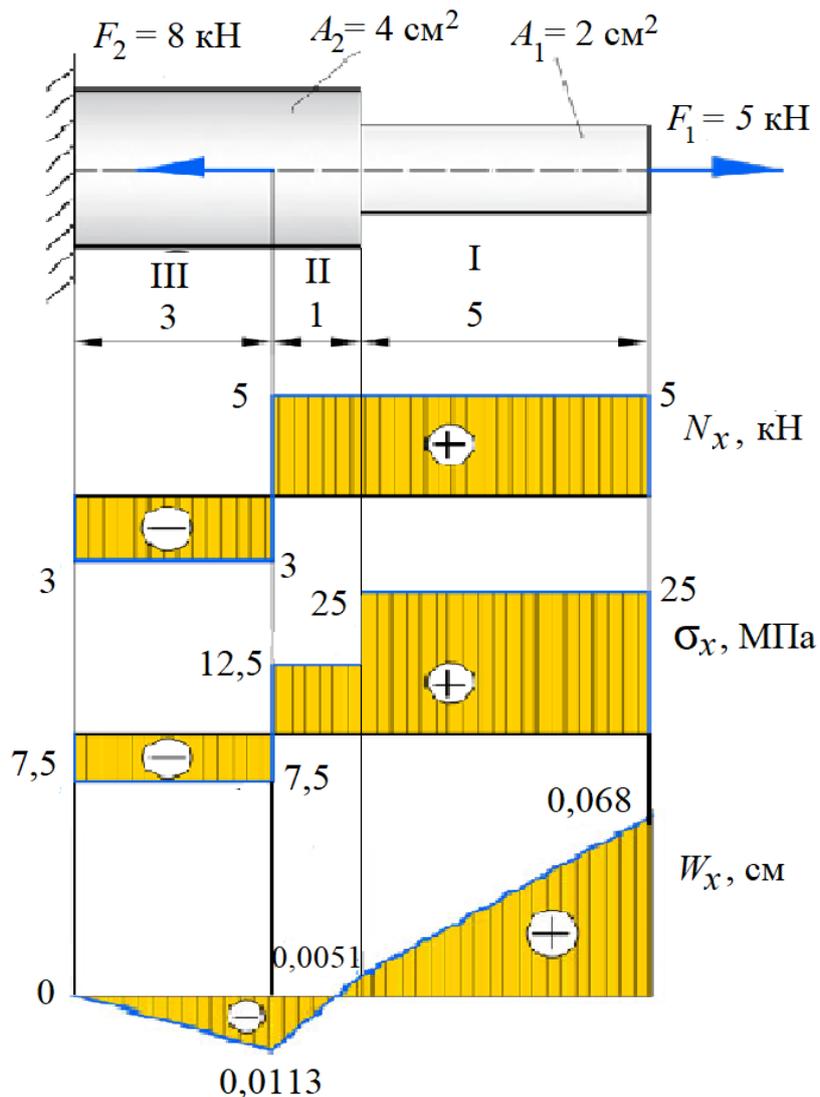


Рис. 26. Эпюры продольных сил N_x , напряжений σ_x и перемещений W_x

Практическое задание

Задача. Для стального ступенчатого стержня, нагруженного осевыми внешними силами $F_1 = 10 \text{ кН}$ и $F_2 = 15 \text{ кН}$ при площадях поперечных сечений $A_1 = 3 \text{ см}^2$, $A_2 = 2 \text{ см}^2$, линейные размеры – в метрах, построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений. Модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$. Варианты взять из рис. 27.

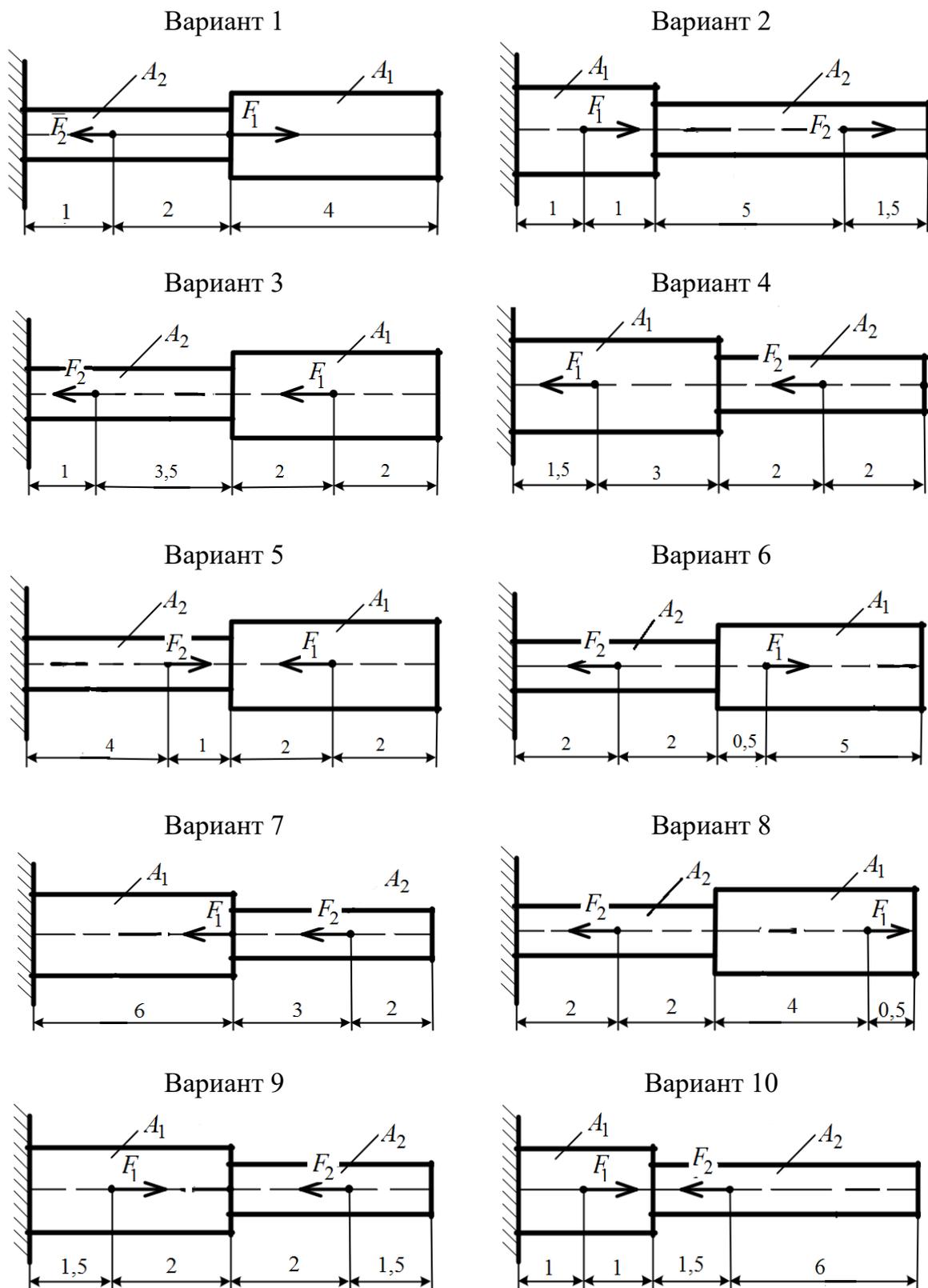


Рис. 27. Расчётные схемы стержней

Вопросы для самоконтроля

1. Как формулируется условие прочности при растяжении и сжатии?
2. Отличаются ли условия прочности при расчёте на растяжение и расчёте на сжатие?
3. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
4. Как назначаются знаки продольной силы на эпюре?
5. Как назначаются знаки нормального напряжения на эпюре?
6. Что показывает эпюра продольной силы?

Расчёт на прочность и жёсткость плоского тела

Пример 1. Абсолютно жёсткое плоское тело ($a = 0,8$ м, $b = 0,6$ м, $c = 0,5$ м) опирается на одну шарнирно неподвижную или на две шарнирно подвижные опоры и прикреплено к стальному стержню сечением $A = 1$ см² при помощи шарниров (рис. 28).

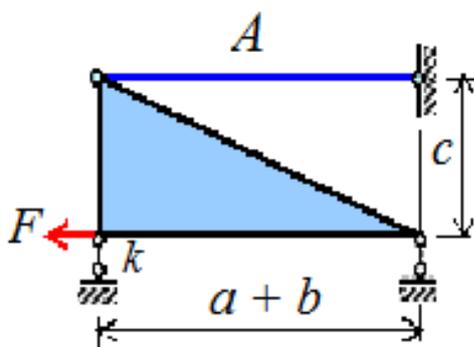


Рис. 28. Расчётная схема плоского тела

Требуется из условий прочности по нормальным напряжениям и жёсткости определить значение допускаемой нагрузки F , если предел текучести $\sigma_T = 240$ МПа, а запас прочности $n = 1,5$; модуль продольной упругости $E = 200$ ГПа; перемещение точки приложения силы $F \delta_k$ мм ограничено допускаемым $[\delta_k] = 2$ мм.

Решение

Расчёт на прочность и жёсткость рассмотрим статический и геометрический.

Для статического расчёта уравнение равновесия (рис. 29, а)

$$\Sigma F_x = 0, N - F = 0, N = F.$$

Расчёт на прочность.

Определим из условия прочности допускаемую нагрузку F :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], [\sigma] = \sigma_T/n, F/A \leq 1 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 16 \text{ кН.}$$

Расчёт на жёсткость.

Под действием силы F все точки тела горизонтально переместятся налево на одинаковую величину δ_k , при этом стержень A удлинится на Δl . Очевидно, что $\delta_k = \Delta l$ (рис. 29, б).

Тогда из условия жёсткости имеем

$$\delta_k \leq [\delta_k], \Delta l \leq [\delta_k], (N \cdot l)/(E \cdot A) \leq [\delta_k], (F \cdot l)/(E \cdot A) \leq [\delta_k],$$

отсюда $F \leq (E \cdot A \cdot [\delta_k])/l = (200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,002)/l = 28,57$ кН.

Ответ: окончательно принимаем меньшее значение силы $F = 16$ кН.

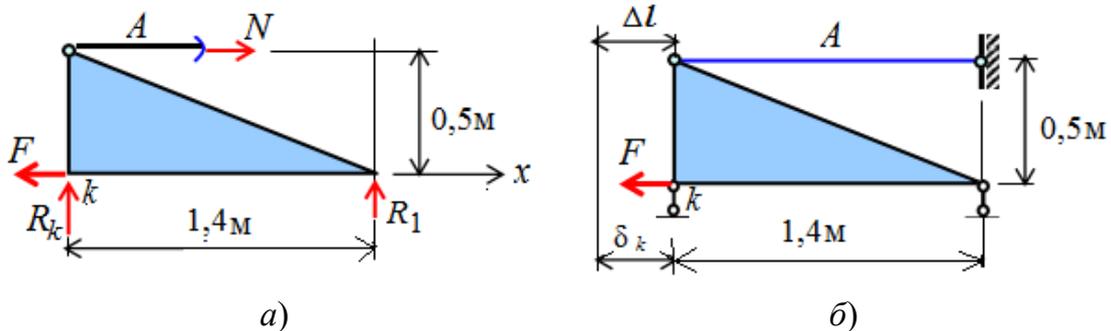


Рис. 29. Расчётные схемы плоского тела

Пример 2. См. условие в примере 1. $A = 1$ см², $a = 0,4$ м, $b = 0,6$ м, $c = 0,8$ м (рис. 30).

Решение

Рассмотрим расчёт на прочность и жёсткость статический и геометрический.

Для статического расчёта уравнение равновесия (рис. 31, а)

$$\Sigma M_n = 0, N \cdot c - F \cdot b = N \cdot 0,8 - F \cdot 0,6 = 0, N = 0,75 F.$$

Расчёт на прочность.

Определим из условия прочности допускаемую нагрузку F :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], [\sigma] = \sigma_T/n, 0,75 F/A \leq [\sigma],$$

отсюда $F \leq (1 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6)/0,75 = 21,33$ кН.

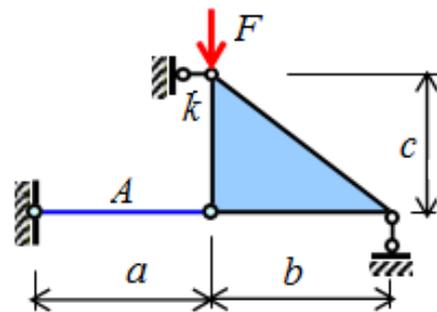


Рис. 30. Расчётная схема тела

Расчёт на жёсткость.

Под действием силы F тело поворачивается против часовой стрелки относительно мгновенного центра вращения (точка n), находящегося в точке пересечения реакций R_1 и R_2 .

Вследствие небольшого перемещения характерных точек жёсткого бруса по дугам окружностей (δ_k и δ_1) можно заменить перемещения по касательным к дугам окружностей.

Эти перемещения будут пропорциональны их радиусам

$\delta_k / r_k = \delta_1 / r_1$, отсюда

$$\delta_k = \delta_1 \cdot k / r_1 = \delta_1 \cdot b / \sqrt{b^2 + c^2} = \delta_1 \cdot 0,6 / \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = \delta_1 \cdot \sin \alpha = \delta_1 \cdot 0,6.$$

Чтобы совместить начальное положение l концевое сечение стержня с конечным, надо его растянуть на Δl и повернуть вдоль касательной по часовой стрелке (касательная δ_1 будет перпендикулярна продольной оси стержня) (рис. 31, б).

При этом $\Delta l = \delta_1 \cdot \cos \alpha$ или $\delta_1 = \Delta l / \cos \alpha$, $\cos \alpha = 0,8$.

Тогда из условия жёсткости имеем

$$\delta_k \leq [\delta_k], \Delta l \cdot \operatorname{tg} \alpha \leq [\delta_k], \operatorname{tg} \alpha = b/c = 0,6/0,8 = \leq [\delta].$$

$$[F] \leq E \cdot A \cdot [\delta_k] / 0,75^2 \cdot l = 200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 0,001 / 0,75^2 \cdot 0,4 = 88,89 \text{ кН}.$$

Ответ: окончательно принимаем меньшее значение силы $F = 21,33 \text{ кН}$.

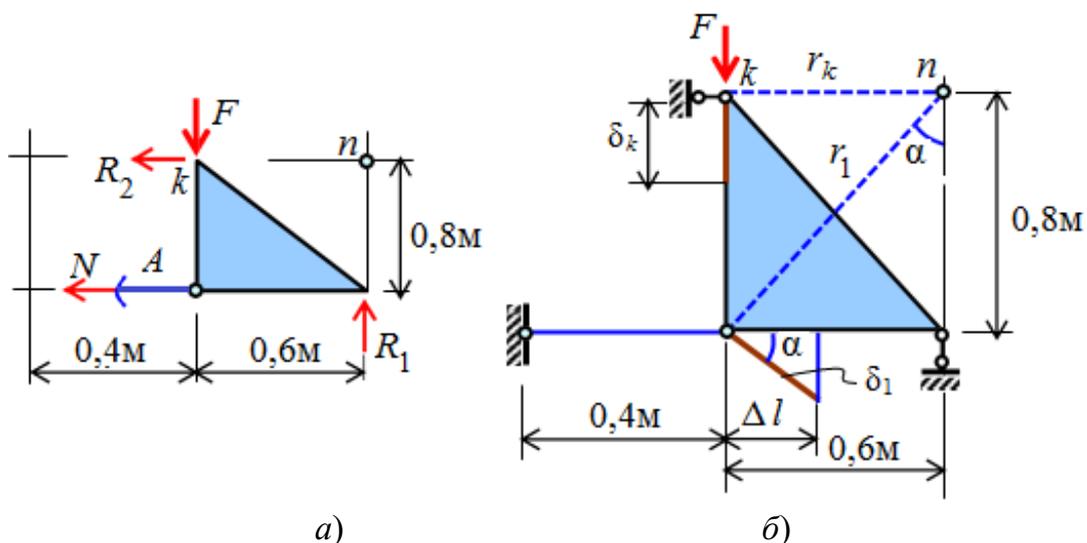


Рис. 31. Расчётные схемы

Практическое задание

Задача. Определить значение допускаемой нагрузки на абсолютно жёсткое плоское тело.

Варианты взять из табл. 8 и рис. 32.

Таблица 8

Вариант	[δ_k], мм	A , см ²	Расстояние, м		
			a	b	c
1	1	1	0,4	0,5	0,6
2	2	2	0,5	0,6	0,5
3	3	1	0,6	0,7	0,4
4	1	2	0,7	0,8	0,9
5	2	1	0,8	0,9	0,7
6	3	2	0,9	0,8	0,6
7	1	1	0,8	0,7	0,5
8	2	1	0,7	0,6	0,7
9	3	2	0,6	0,5	0,8
10	1	1	0,5	0,4	0,6

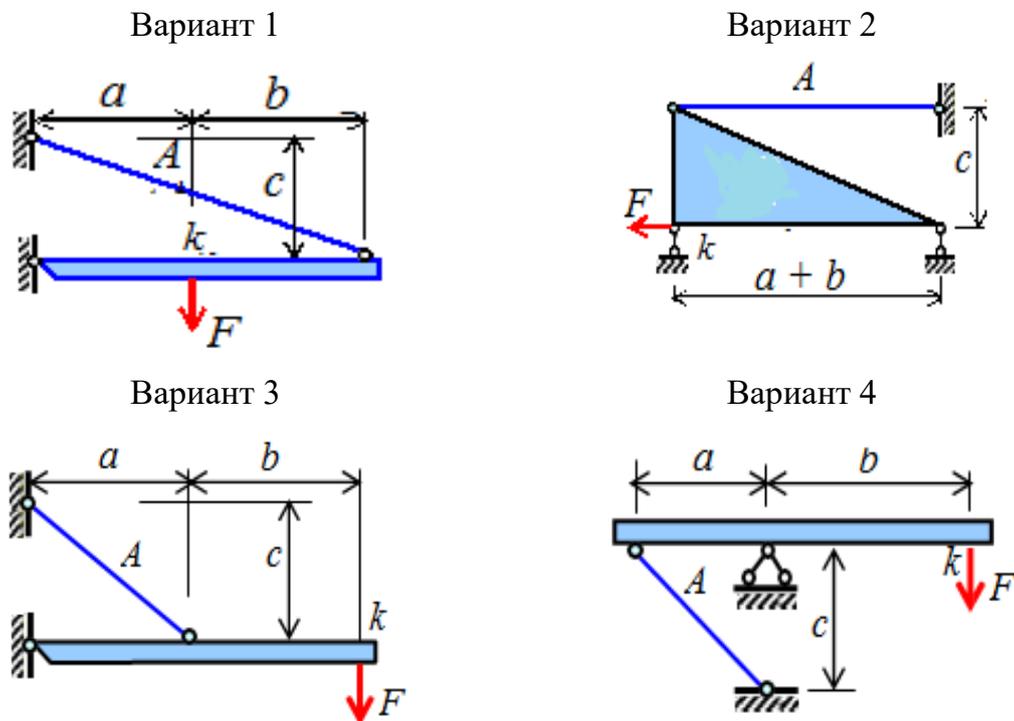


Рис. 32. Расчётные схемы тел

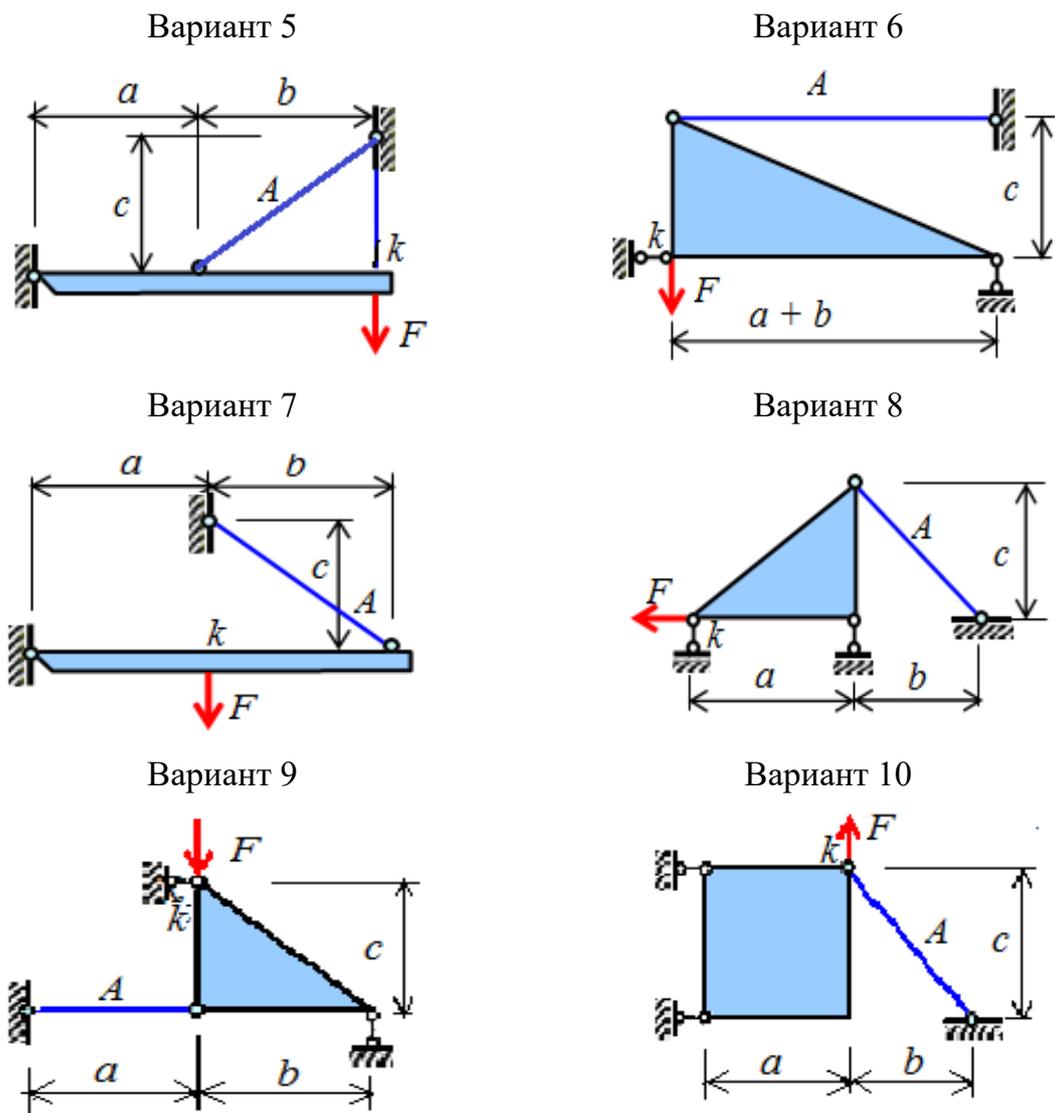


Рис. 32. Расчётные схемы тел (окончание)

Расчёт балок, работающих на поперечный изгиб

В этих задачах будем рассматривать только статически определимую балку – ту, в которой опорные реакции, а следовательно, и внутренние усилия можно найти из одних уравнений статики.

Напомним, что такое изгиб балки.

Самый распространённый *поперечный изгиб*, при котором в сечениях балки кроме внутреннего изгибающего момента M_x возникает и поперечная сила Q_y . Этот изгиб относят к простым видам сопротивления условно, так как в большинстве случаев для достаточно длинных балок действием поперечной силы при расчётах на прочность можно пренебречь (рис. 33).

Поперечная сила, возникающая в сечении балки, – это внутреннее усилие, равное алгебраической сумме проекций внешних сил, действующих по одну сторону от этого сечения на плоскость поперечного сечения.

Изгибающий момент в сечении балки – это внутреннее усилие, равное алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих по одну сторону от этого сечения относительно центра тяжести сечения.

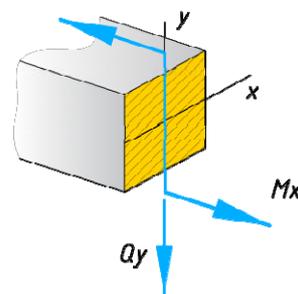


Рис. 33. Поперечный изгиб

Правило знаков: положительная поперечная сила поворачивает рассматриваемую часть балки по часовой стрелке (кратко: по часовой – «+», против – «-») (рис. 34, а); положительный изгибающий момент вызывает растяжение нижних волокон (рис. 34, б).

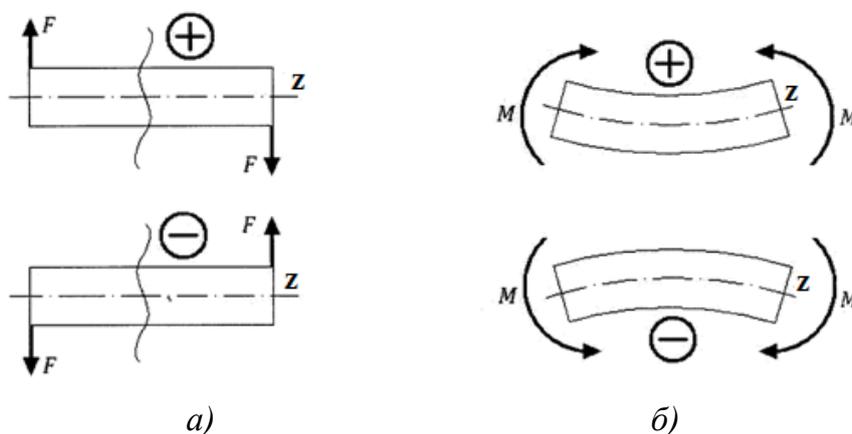


Рис. 34. Правила знаков для: а – поперечной силы; б – изгибающего момента

Последовательность построения эпюр сил и моментов:

- 1) определить реакции опор балки, проверить правильность решения;
- 2) построить эпюру поперечных сил (можно использовать метод сечения или по характерным точкам);
- 3) построить эпюру моментов.

Пример 1. Для консольной балки построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M) (рис. 35).

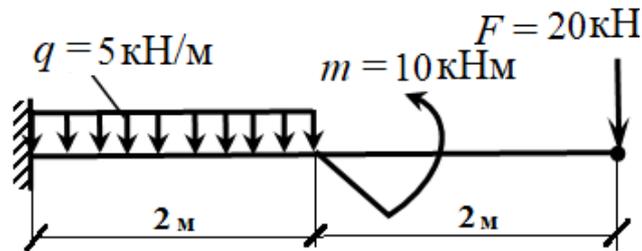


Рис. 35. Расчётная схема консольной балки

Решение

Расставим сечения от свободного конца балки – в этом случае можно построить эпюры, не определяя опорных реакций. Рассматривать в каждом случае будем правую часть – справа от сечения. Сечения расставим на характерных участках (между изменениями). По размерной нитке – два участка, два сечения (рис. 36).

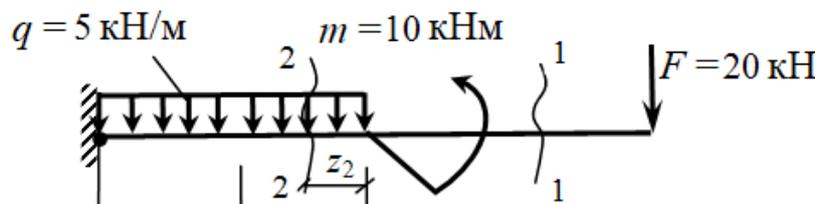


Рис. 36. Участки и сечения балки

Сечение 2-2 проходит по участку с равномерно распределённой нагрузкой, отметим размер z_2 вправо от сечения до начала участка.

Определим поперечные силы в сечениях:

$$Q_1 = F = 20 \text{ кН}; \quad Q_2 = F + q_{z_{0-2}};$$

$$z = 0 \rightarrow Q_2 = F = 20 \text{ кН};$$

$$z = 2 \rightarrow Q_2 = F + q \cdot 2 = 20 + 4 = 24 \text{ кН}.$$

Построим эпюру Q (рис. 37).

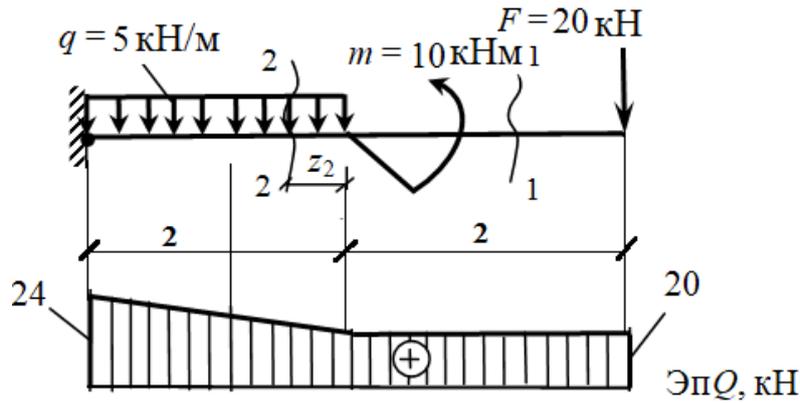


Рис. 37. Построение эпюры поперечных сил

Построим эпюру M методом характерных точек. Расставим точки на балке – это точки начала и конца балки (D , A), сосредоточенного момента (B), а также отметим в качестве характерной точки середину равномерно распределённой нагрузки (K) (рис. 38).

Определим значения изгибающих моментов в точках:

в точке D

$$M_D^{\text{прав}} = 0;$$

в точке B

$$M_B^{\text{прав}} = -F \cdot 2 = -20 \cdot 2 = -40 \text{ кНм и}$$

$$M_B^{\text{лев}} = M_B^{\text{прав}} + m = -40 + 10 = -30 \text{ кНм};$$

в точке K

$$M_K^{\text{прав}} = -q \cdot 1 \cdot 0,5 + m - F(2 + 1) = -2 \cdot 1 \cdot 0,5 + 10 - 20 \cdot 3 = \\ = -1 + 10 - 60 = -51 \text{ кНм};$$

в точке A

$$M_A^{\text{прав}} = q \cdot 2 \cdot 1 + m - F \cdot 4 = -4 + 10 - 80 = -74 \text{ кНм.}$$

Построим эпюру M . Участок AB – параболическая кривая (правило «зонтика»), участок BD – прямая наклонная линия.

Проведём проектировочный расчёт, то есть подбор размеров поперечного сечения балки, например для круглой балки.

Максимальный изгибающий момент с эпюры $M = 74 \text{ кНм}$.

$$W_x \geq M_{\text{max}} / R;$$

$$W_x = \pi \cdot d^3 / 32;$$

$$d \geq \sqrt[3]{32 \cdot M_{\text{max}} / \pi \cdot R} = \sqrt[3]{32 \cdot 74 \cdot 10^3 / 3,14 \cdot 10 \cdot 10^6} = 0,75 \text{ м} = 75 \text{ см.}$$

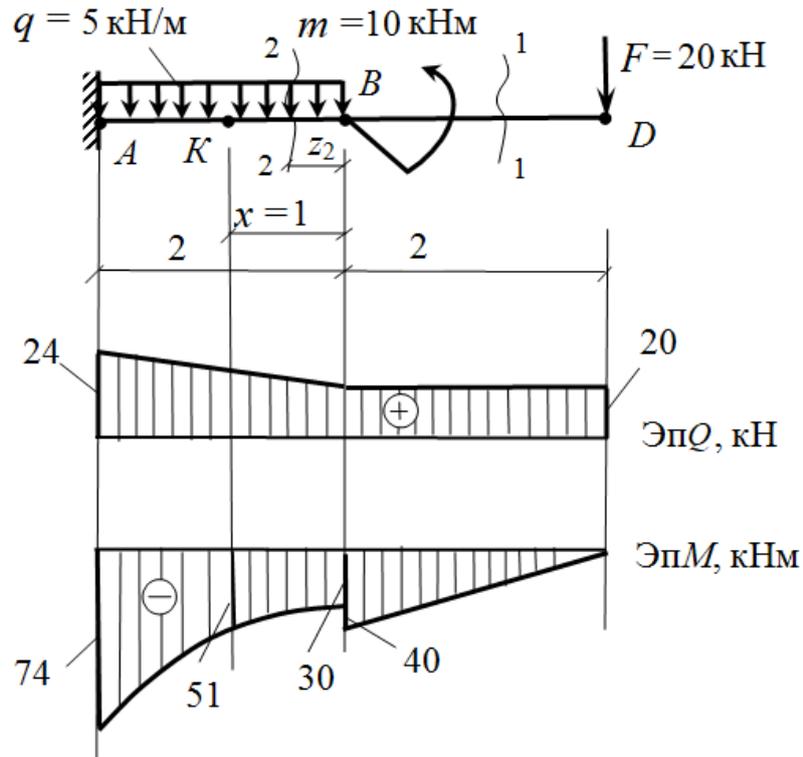


Рис. 38. Метод характерных точек для построения эпюр Q и M

Пример 2. Для балки определить опорные реакции и построить эпюры поперечных сил (Q) и изгибающих моментов (M). Схема балки с нагрузками изображена на рис. 39.

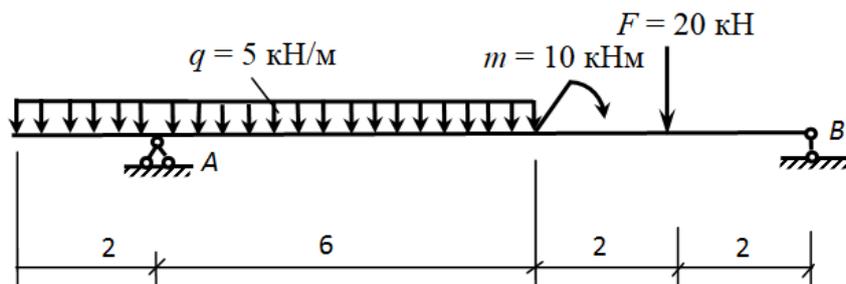


Рис. 39. Расчётная схема балки

Решение

1. Обозначим опоры буквами A и B и направим опорные реакции R_A и R_B (рис. 40).

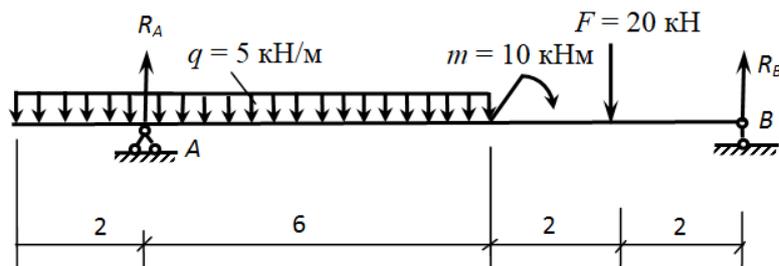


Рис. 40. Схема балки с реакциями опор R_A и R_B

Составим уравнения равновесия:

$$\Sigma M_A = 0, q \cdot 8 \cdot 2 + m + F \cdot 8 - R_B \cdot 10 = 0, \text{ отсюда}$$

$$R_B = (q \cdot 8 \cdot 2 + m + F \cdot 8) / 10 = (5 \cdot 8 \cdot 2 + 10 + 20 \cdot 8) / 10 = (80 + 10 + 160) / 10 = 250 / 10 = 25 \text{ кН.}$$

$$\Sigma M_B = 0, -q \cdot 8 \cdot 8 + R_B \cdot 10 + m - F \cdot 2 = 0, \text{ отсюда}$$

$$R_A = (q \cdot 8 \cdot 8 - m + F \cdot 2) / 10 = (5 \cdot 8 \cdot 8 - 10 + 20 \cdot 2) / 10 = (320 - 10 + 40) / 10 = 350 / 10 = 35 \text{ кН.}$$

Проверка. Сумма проекций всех сил на ось y равна нулю

$$\Sigma y = 0 \rightarrow -q \cdot 8 - F + R_A + R_B = 0 \rightarrow -5 \cdot 8 - 20 + 35 + 25 = 0; \\ +60 - 60 = 0; \quad 0 = 0.$$

Ответ: реакции опор найдены верно.

Запишем значения R_A и R_B на расчетную схему (см. рис. 40).

2. Построение эпюры поперечных сил методом сечений. Сечения расставим на характерных участках (между изменениями); по размерной нитке слева направо определим четыре участка и четыре сечения (рис. 41).

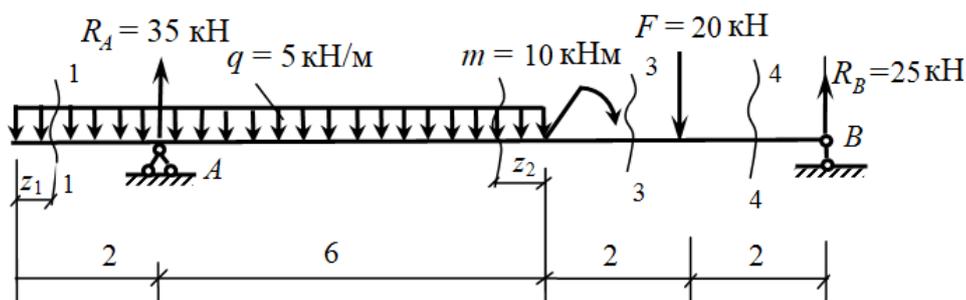


Рис. 41. Метод сечений

Определим значения поперечных сил:

сечение 1-1 проходит по участку с равномерно распределенной нагрузкой, отметим размер z_1 влево от сечения до начала участка; длина участка 2 м, тогда

$$Q_1 = -q \cdot z_1 \rightarrow \text{при } z_1 = 0 \quad Q_1 = 0$$

$$\text{и при } z_1 = 2 \quad Q_1 = -q \cdot 2 = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кНм};$$

сечение 2-2 проходит по участку равномерно от распределённой нагрузки, отметим размер z_2 вправо от сечения до начала участка; длина участка 6 м, тогда

$$Q_2 = q \cdot z_2 \rightarrow \text{при } z_2 = 0 \quad Q_2 = F - R_B = 20 - 25 = -5 \text{ кНм}$$

$$\text{и при } z_2 = 6 \quad Q_2 = q \cdot 6 + F - R_B = 30 + 20 - 25 = 25 \text{ кНм};$$

$$\text{сечение 3-3 } Q_2 = F - R_B = 20 - 25 = -5 \text{ кНм};$$

$$\text{сечение 4-4 } Q_2 = -R_B = -25 = -25 \text{ кНм}.$$

По найденным значениям построим эпюру Q (рис. 42).

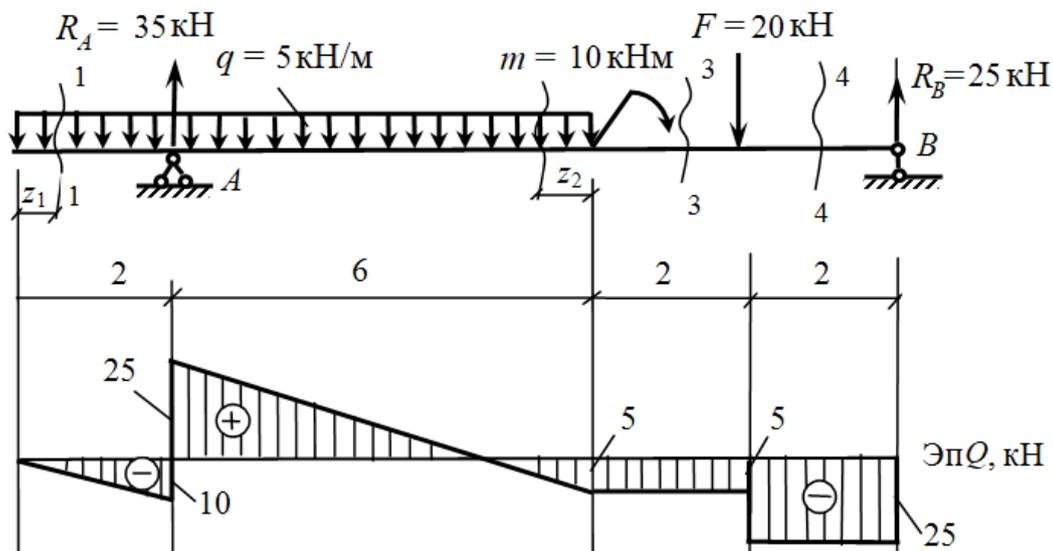


Рис. 42. Построение эпюры поперечных сил

3. Построение эпюры M методом характерных точек (рис. 43).

Характерная точка – точка, заметная на балке. Это точки A, B, C, D , а также точка K , в которой $Q = 0$ и изгибающий момент имеет экстремум. Также в середине консоли поставим дополнительную точку E , поскольку на этом участке под равномерно распределённой нагрузкой эпюра M описывается кривой линией, а она строится, как минимум, по трём точкам.

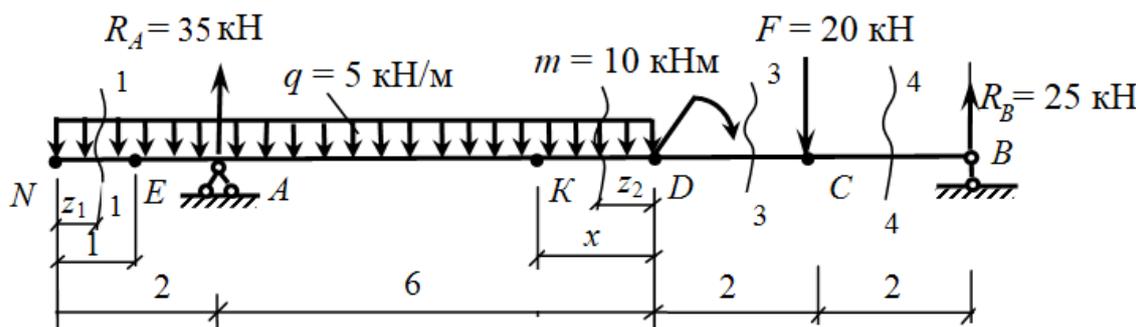


Рис. 43. Метод характерных точек

Итак, точки расставлены, приступим к определению в них значений изгибающих моментов:

$$\text{в точке } N \rightarrow M_N^{\text{лев}} = 0;$$

$$\text{в точке } E \rightarrow M_E^{\text{лев}} = -q \cdot 1 \cdot 0,5 = -5 \cdot 1 \cdot 0,5 = -2,5 \text{ кНм};$$

$$\text{в точке } A \rightarrow M_A^{\text{лев}} = -q \cdot 2 \cdot 1 = -5 \cdot 2 \cdot 1 = -10 \text{ кНм};$$

$$\text{в точке } B \rightarrow M_B^{\text{прав}} = 0;$$

$$\text{в точке } C \rightarrow M_C^{\text{прав}} = R_B \cdot 2 = 25 \cdot 2 = 50 \text{ кНм};$$

в точке D момент определим как слева, так и справа:

$$M_D^{\text{лев}} = -q \cdot 8 \cdot 4 + R_A \cdot 6 = -5 \cdot 8 \cdot 4 + 35 \cdot 6 = -160 + 210 = 50 \text{ кНм},$$

$$M_D^{\text{прав}} = -F \cdot 2 + R_B \cdot 4 = -20 \cdot 2 + 25 \cdot 4 = -40 + 100 = 60 \text{ кНм};$$

в точке K . Однако сначала определим положение самой точки K на расстоянии x (см. рис. 42). Так как точка K принадлежит второму характерному участку, в котором поперечная сила $Q_2 = 0$, а $z_2 = x$, тогда составим уравнение

$$0 = q \cdot x + F - R_B, \rightarrow qx = -F + R_B \rightarrow x = (R_B - F)/q = (25 - 20)/5 = 1 \text{ м},$$

теперь, зная x , определим момент в точке K с правой стороны:

$$\begin{aligned} M_K^{\text{прав}} &= -qx \cdot x/2 - m - F(2 + x) + R_B(4 + x) = \\ &= -5 \cdot 1^2/2 - 10 - 20(2 + 1) + 25(4 + 1) = -2,5 - 10 - 60 + 125 = \\ &= 52,5 \text{ кНм}. \end{aligned}$$

По найденным значениям построим эпюру M (рис. 44).

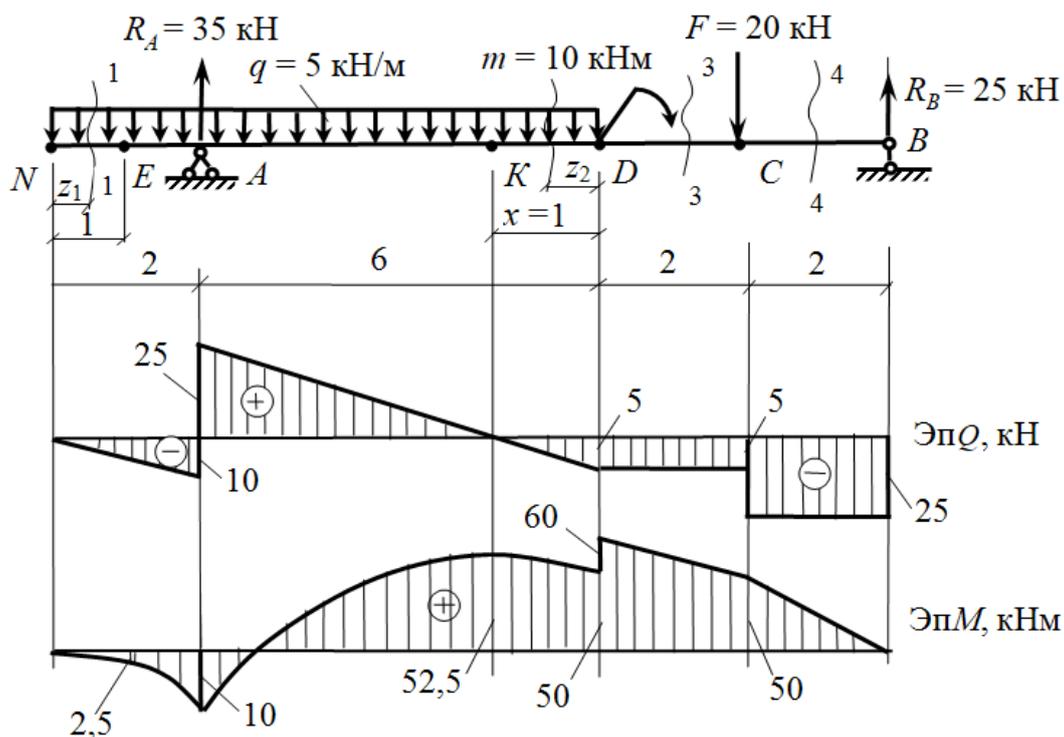


Рис. 44. Построение эюр поперечных сил и изгибающих моментов

Практическое задание 1

Задача. Для консольной балки построить эюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Варианты взять из табл. 9 и рис. 45.

Таблица 9

Вариант	a , м	b , м	c , м	m , кН · м	F , кН	q , кН/м
1	3	2	1	40	25	6
2	3	1	3	50	20	5
3	2	2	2	60	15	2
4	3	2	1	40	25	6
5	2	1	2	45	30	3
6	3	2	3	50	20	5
7	2	1	3	40	15	3
8	3	2	1	50	35	5
9	3	2	2	35	15	3
10	3	2	1	30	25	6

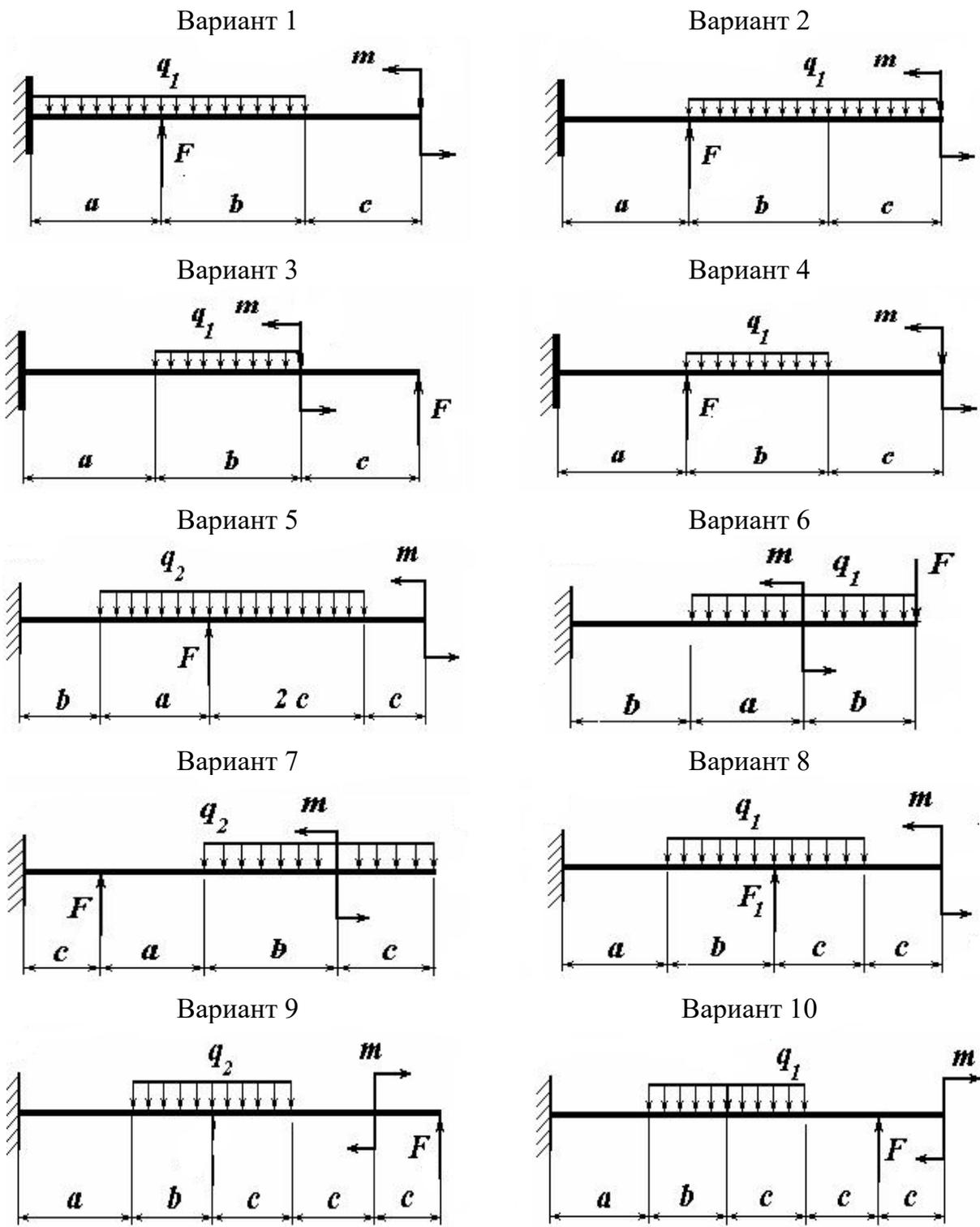


Рис. 45. Расчётные схемы консольных балок

Практическое задание 2

Задача. Для балки на двух опорах построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Варианты взять из табл. 10 и рис. 46.

Таблица 10

Вариант	a , м	b , м	c , м	m , кН·м	F , кН	q , кН/м
1	2	1	2	45	30	6
2	2	2	2	55	35	4
3	2	2	2	50	15	6
4	3	3	2	35	10	4
5	2	2	2	45	20	6
6	2	1	2	55	30	4
7	3	2	2	35	15	6
8	2	2	1	40	25	4
9	3	2	2	45	15	6
10	2	3	2	35	50	4

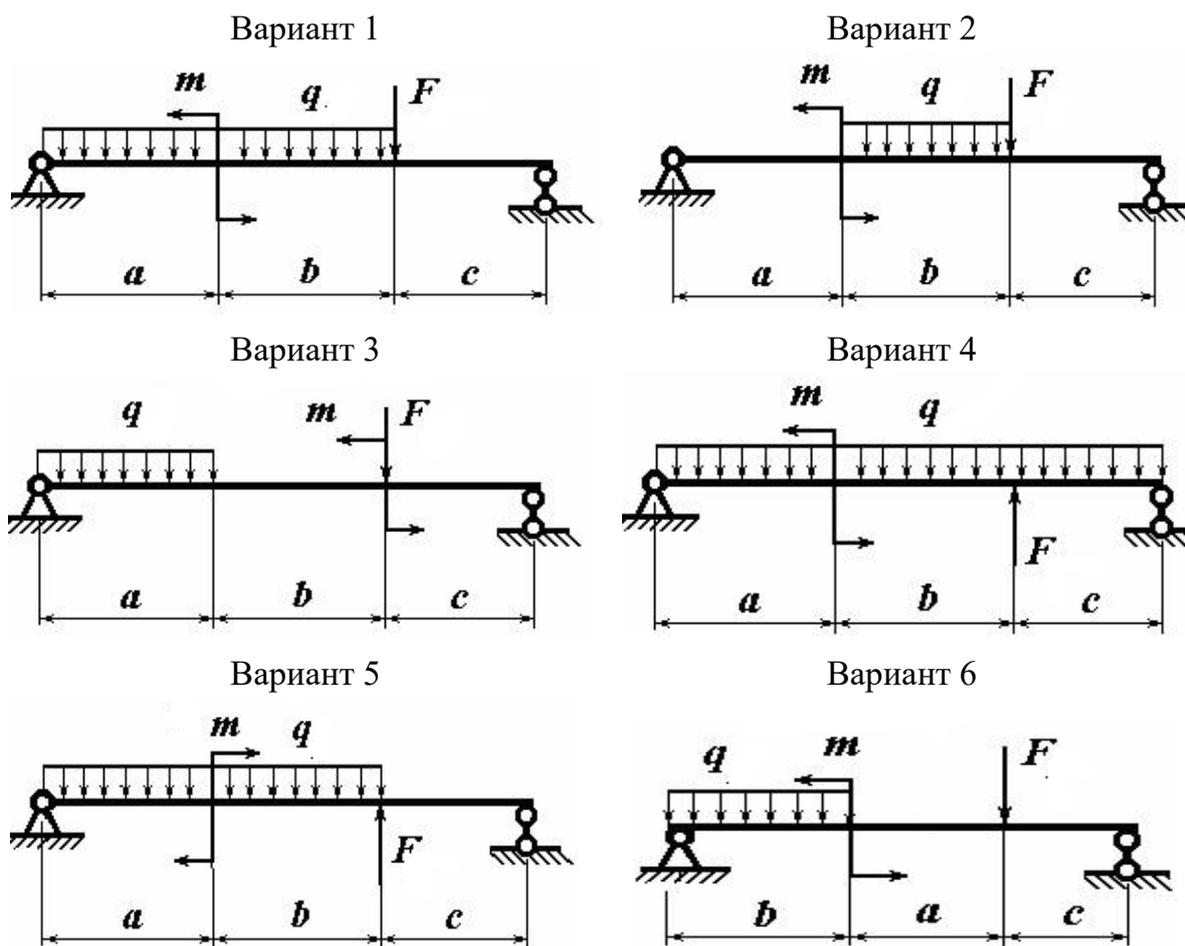


Рис. 46. Расчётные схемы балок с двумя опорами

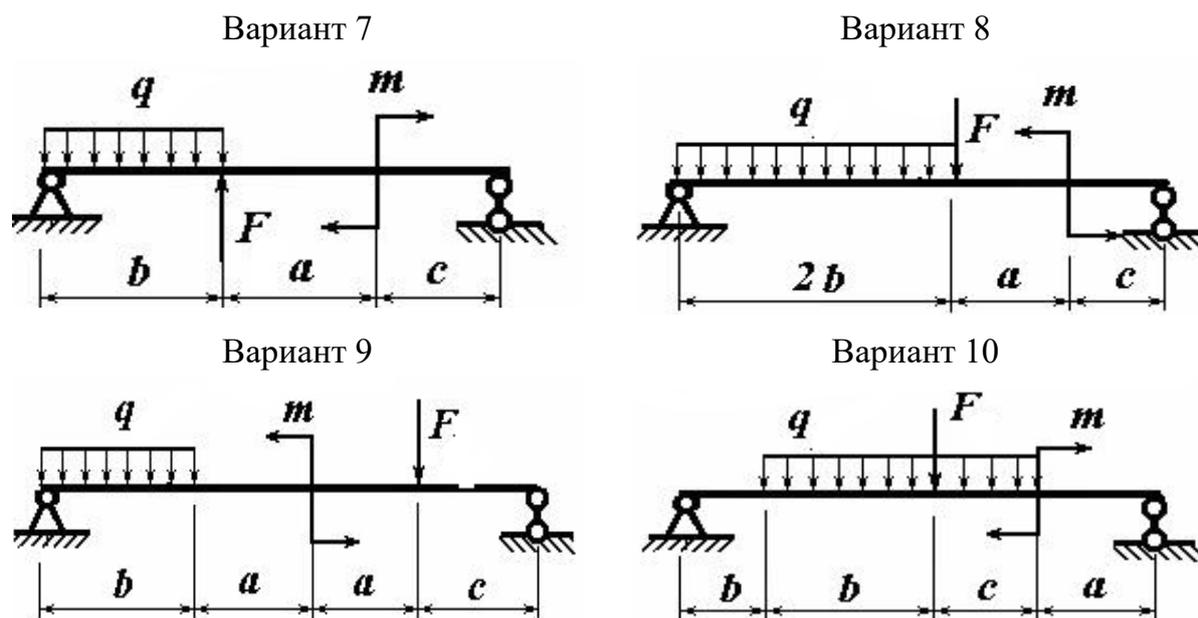


Рис. 46. Расчётные схемы балок с двумя опорами (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. Какие разновидности связей используют при проектировании балок?
2. Какой изгиб называется поперечным?
3. Какие силовые факторы возникают в сечении при поперечном изгибе?
4. Как определить поперечную силу в поперечном сечении балки и каково правило знаков при этом?
5. Как определить изгибающий момент в поперечном сечении балки и каково правило знаков при этом?
6. Как изменяется поперечная сила и изгибающий момент на тех участках балки, где приложена распределительная нагрузка?
7. Как изменяется поперечная сила в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенной силы?
8. Как изменяется изгибающий момент в сечении, соответствующем точке приложения сосредоточенного момента?
9. Какое значение имеет изгибающий момент в сечении, где поперечная сила меняет знак?

Кручение

Кручением называют такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент (остальные факторы равны нулю).

Стержень круглого поперечного сечения, работающий на кручение, называют *валом*.

Деформацию кручения испытывают валы машин и механизмов при вращении, работающие пружины и т. п.

Рассмотрим порядок определения величины крутящего момента:

1. Вал разбивают на участки, границами которых являются сечения, где приложены внешние крутящие моменты.

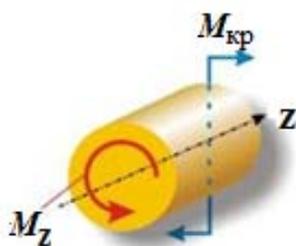


Рис. 47. Распределение моментов при кручении вала

2. В пределах каждого участка используют метод сечений – мысленно отбрасывают одну из частей вала; в поперечном сечении действует только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_Z (рис. 47).

3. Определяют величину крутящего момента: величина крутящего момента M_Z в произвольном сечении вала численно равна алгебраической сумме внешних крутящих моментов, приложенных к оставшейся части вала $M_Z = \Sigma M_{кр}$.

4. Определяют знак внешнего крутящего момента. Знак крутящего момента принципиального значения не имеет. Однако условимся

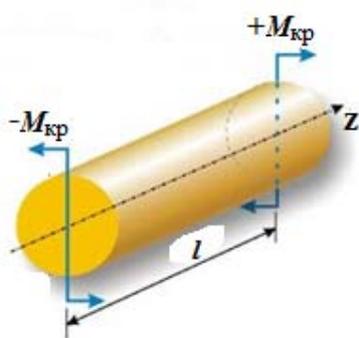


Рис. 48. Правило знаков для внешнего крутящего момента

в дальнейшем, что будем считать $M_{кр}$ *положительным*, если он действует по ходу часовой стрелки, и *отрицательным*, если против (рис. 48).

Крутящему моменту соответствуют касательные напряжения τ . Касательные напряжения в поперечных сечениях для точек вблизи контура направлены по касательной к дуге контура, в так называемой «опасной точке» (рис. 49).

Физический смысл крутящего момента M_Z – это момент результирующей пары внутренних касательных сил упругости, действующих в поперечном сечении вала.

Прочность вала, работающего на кручение, считается обеспеченной, если наибольшие касательные напряжения, возникающие в его опасном сечении, не превышают величины допустимого напряжения (допускается перенапряжение в пределах 5 %).

Для вала постоянного диаметра опасным считается участок, в котором действует наибольший крутящий момент, тогда условие прочности при кручении имеет вид

$$\tau_{\max} = M_Z / W_p \leq [\tau],$$

где τ_{\max} – максимальное касательное напряжение в опасном сечении вала; $W_p = \pi \cdot d^3/32 \approx 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала; $[\tau] \approx (0,55 \dots 0,60) [\sigma]$ – для пластичных материалов.

При кручении вала возникают деформации, характеристикой которых является угол закручивания φ , то есть угол, на который поперечное сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению (рис. 50).

В пределах упругих деформаций угол закручивания связан с крутящим моментом линейной зависимостью

$$\varphi = M_Z \cdot l / J_p \cdot G,$$

где l – длина участка вала (расстояние между сечениями, относительный (взаимный) угол поворота которых определяется); $J_p = \pi \cdot d^4/32 \approx 0,1d^4$ – полярный момент инерции для круглого сечения вала; G – модуль сдвига.

Мерой жёсткости при кручении вала будет относительный угол закручивания θ (угол закручивания на единицу длины вала).

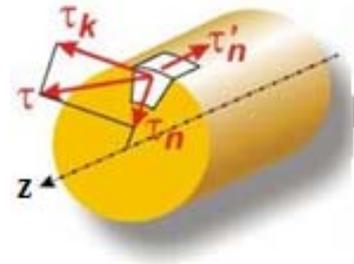


Рис. 49. Касательные напряжения

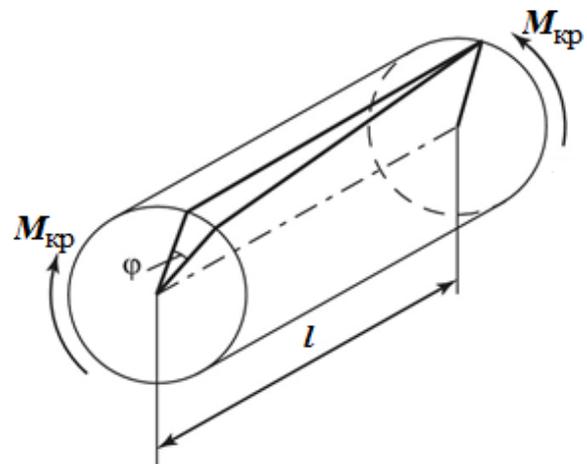


Рис. 50. Определение угла закручивания

В отличие от допускаемого напряжения, зависящего в первую очередь от материала вала, допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала. Значения допускаемых углов закручивания, встречающихся в различных отраслях машиностроения, весьма разнообразны; наиболее распространены значения $[\theta_0] = 0,25 \dots 1,00$ град/м.

Условие жёсткости при кручении вала имеет вид

$$\theta = M_Z / G \cdot J_p \leq [\theta_0].$$

При расчёте вала из двух значений диаметров, определённых из расчётов на прочность и жёсткость, в качестве окончательного (исполнительного размера) должен быть принят бóльший.

График изменения крутящего момента по длине стержня называется *эпюрой крутящих моментов*. По эпюре можно определить опасное сечение, где действует наибольший по абсолютной величине крутящий момент.

Построение эпюры $M_{кр}$ и эпюры N при растяжении-сжатии стержня ничем не отличается. Положительные значения $M_{кр}$ откладываются вверх от горизонтальной линии.

Пример. Стальной вал постоянного круглого поперечного сечения нагружен внешними скручивающими моментами M_1, M_2, M_3, M_4 . Значение трёх моментов приведено на рис. 51.

Требуется определить величину скручивающего момента M_4 ; рассчитать величины крутящих моментов по участкам вала и построить эпюру $M_{кр}$; определить требуемый диаметр вала, если допускаемое напряжение при кручении $[\tau_k] = 50$ МПа; рассчитать углы закручивания вала φ_i относительно крайнего левого сечения и построить эпюру φ ; определить наибольший относительный угол закручивания и сравнить его с допускаемой величиной $[\theta_0] = 1,5$ град/м.

Решение

1. Определим величину внешнего скручивающего момента M_4 из условий статики

$$\Sigma M = 0; \quad -0,8 + 1,2 - 1 + M_4 = 0; \quad \text{отсюда } M_4 = 0,8 - 1,2 + 1 = 0,6 \text{ кНм.}$$

2. Разобьём вал на участки: принимаются три участка ($i = 3$) между внешними скручивающими моментами. По участкам в отмеченных сечениях 1, 2, 3 рассчитаем крутящие моменты $M_{кр}$:

$$M_{кр1} = -M_1 = -0,8 \text{ кНм};$$

$$M_{кр2} = -M_1 + M_2 = -0,8 + 1,2 = 0,4 \text{ кНм};$$

$$M_{кр4} = -M_4 = -0,6 \text{ кНм}.$$

На основании выполненных расчетов построим эпюру $M_{кр}$ (рис. 51, а). По эпюре определим наибольшее значение крутящего момента:

$$M_{кр}^{\max} = |M_1| = 0,8 \text{ кНм}.$$

3. Из условия прочности вала на кручение рассчитаем требуемый диаметр поперечного сечения вала:

$$\tau_{\max} = M_{кр}^{\max}/W_p \leq [\tau_K].$$

Так как для вала сплошного круглого сечения $W_p = \pi d^3/16$, тогда

$$\tau_{\max} = 16M_{кр}^{\max}/\pi d^3 \leq [\tau_K], \text{ отсюда}$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16M_K^{\max}}{\pi \cdot [\tau_K]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 80}{3,14 \cdot 5}} = 4,34 \text{ см}.$$

Округляя диаметр вала в большую сторону, примем окончательно $d = 45 \text{ мм}$.

4. Определим жёсткость вала на кручение

$$GJ_p = G\pi d^4/32 = 8 \cdot 10^3 \cdot 3,14 \cdot 4,5^4/32 = 32,2 \cdot 10^4 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

5. Рассчитаем углы закручивания границ участков относительно левого крайнего сечения:

$$\varphi_0 = 0;$$

$$\varphi_1 = (M_{кр1} \cdot l_1)/GJ_p = (-0,8 \cdot 100 \cdot 50)/32,2 \cdot 10^4 = -0,0124 \text{ рад} = -0,71 \text{ град};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + (M_{кр2} \cdot l_2)/GJ_p = -0,0124 + (0,4 \cdot 100 \cdot 55)/(32,2 \cdot 10^4) = -0,0124 + 0,0068 = -0,0056 \text{ рад} = -0,32 \text{ град};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + (M_{кр3} \cdot l_3)/GJ_p = -0,0056 - (0,6 \cdot 100 \cdot 50)/(32,2 \cdot 10^4) = -0,0056 - 0,006893 = -0,0149 \text{ рад} = -0,86 \text{ град}.$$

На основании выполненных расчётов построим эпюру углов закручивания вала (рис. 51, б).

Определим наибольший относительный угол закручивания θ_{\max} . Он соответствует в нашем примере наибольшему по модулю крутящему моменту $M_{кр}^{\max} = |M_{кр1}| = 0,8 \text{ кНм} = 80 \text{ кН} \cdot \text{см}$.

$$\theta_{\max} = 100M_{кр}^{\max}/GJ_p \cdot 180/3,14 = (80 \cdot 100 \cdot 180)/(32,2 \cdot 10^4 \cdot 3,14) = 1,425 \text{ град/м} \leq [\theta] = 1,5 \text{ град/м}.$$

Следовательно, условие жёсткости для вала выполняется.

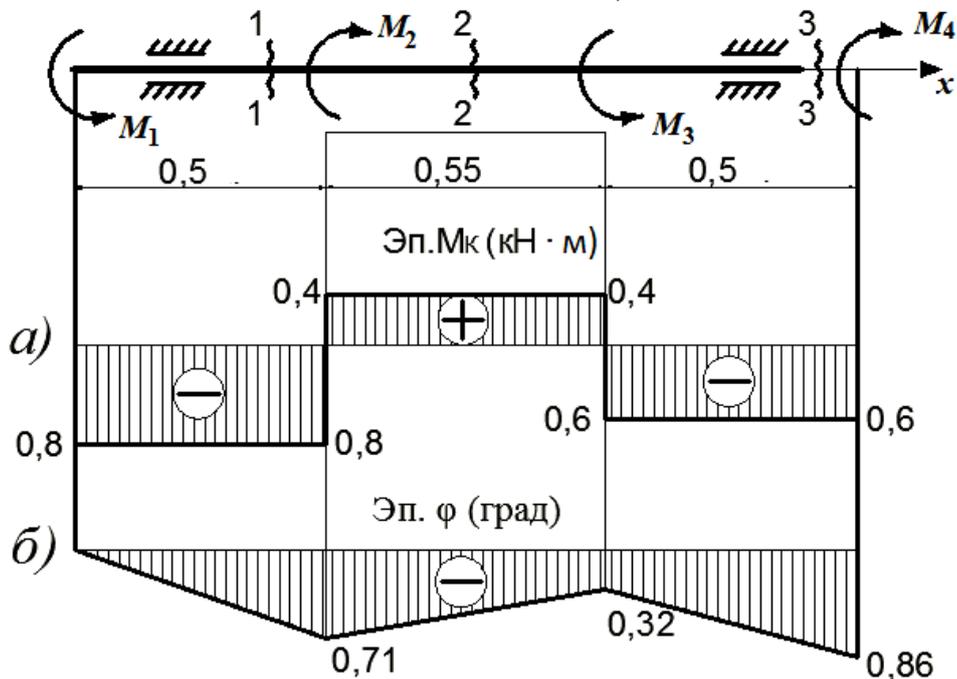


Рис. 51. Расчётная схема вала при кручении:
а – эпюра моментов; б – эпюра углов закручивания

Практическое задание

Задача. Для стального вала постоянного круглого поперечного сечения требуется определить значения моментов M_1 , M_2 и M_3 , соответствующих передаваемым мощностям, а также уравновешивающий момент M_0 ; построить эпюры крутящих моментов по длине вала; определить требуемый диаметр вала из расчётов на прочность и жёсткость.

При расчёте использовать следующие данные: вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 30 \text{ с}^{-1}$, допустимое напряжение кручения $[\tau_k] = 20 \text{ МПа}$, модуль упругости при сдвиге $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, допускаемый угол закручивания $[\phi_0] = 0,02 \text{ рад/м}$.

Данные взять из табл. 11 и в соответствии с рис. 52.

Окончательное значение диаметра округлить до ближайшего четного (или оканчивающегося на пять) числа.

Мощность, кВт	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
P_2	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
P_3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0

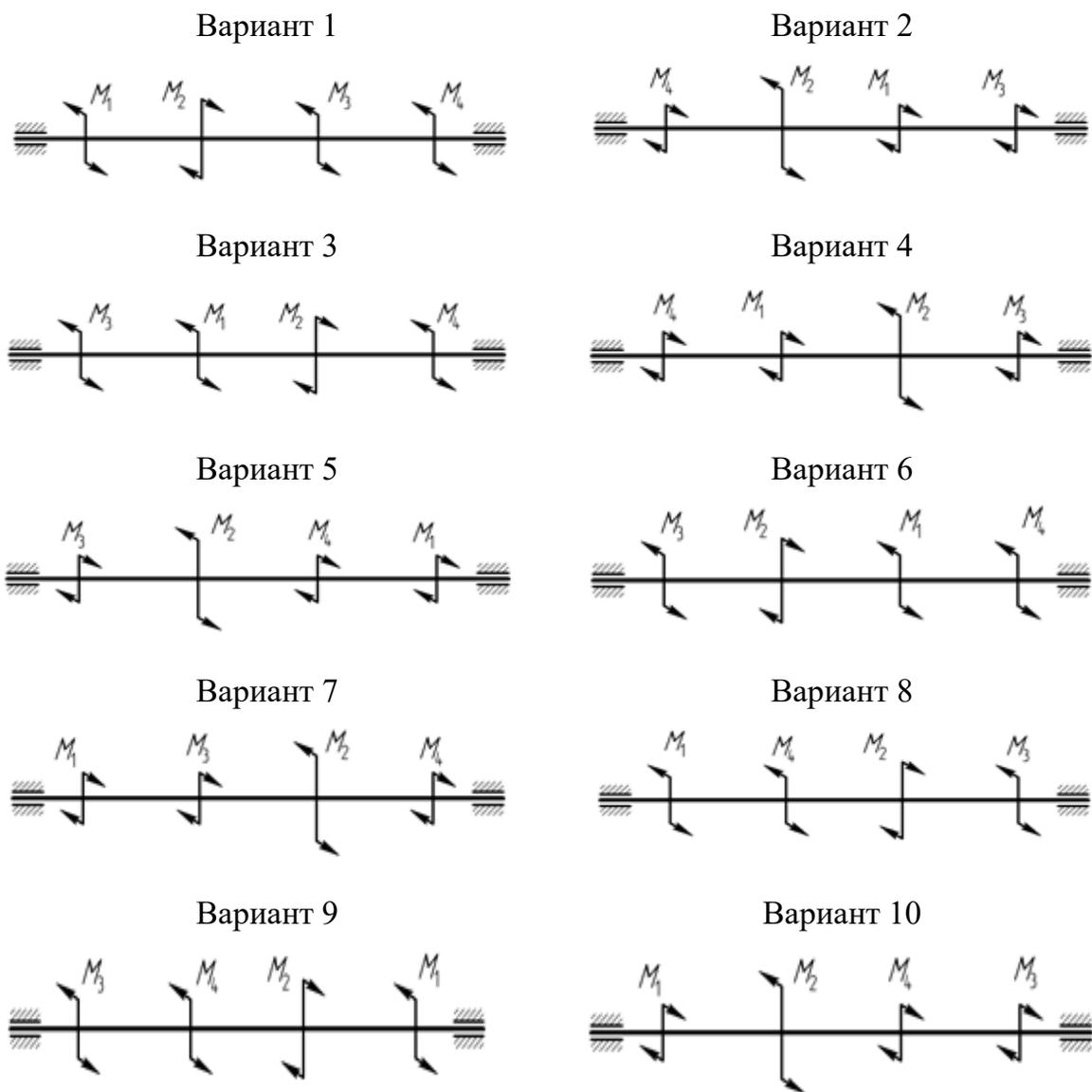


Рис. 52. Расчётные схемы валов

Кручение с изгибом

Ранее нами был рассмотрен расчёт на прочность валов при чистом кручении. Однако круглые валы редко работают на чистое кручение. Как правило, при работе вал изгибается собственным весом, весом шкивов, давлением на зубья шестерён, натяжением ремней и т. д. В таком случае вал будет находиться в условиях сложного сопротивления и испытывать совместное действие кручения и изгиба.

Кручение с изгибом – частный случай сложного сопротивления, который может рассматриваться как сочетание чистого кручения и поперечного изгиба.

Как пример, на рис. 53 показан вал, заключённый в подшипники и работающий на кручение с изгибом.

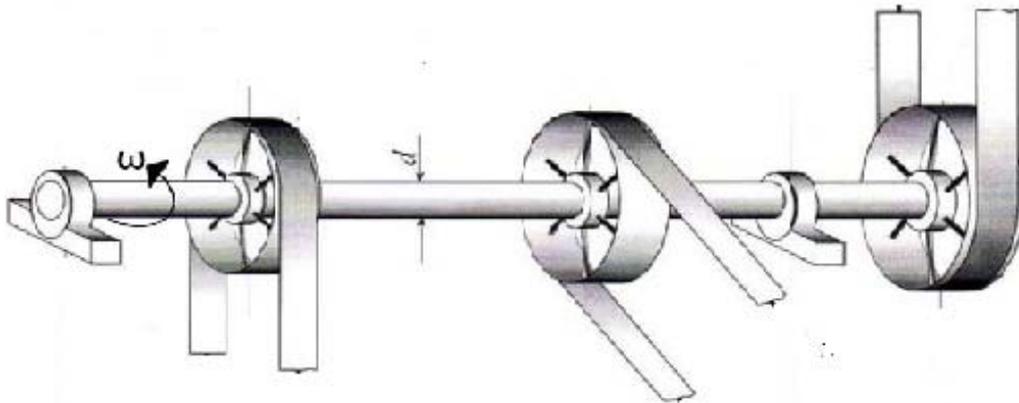


Рис. 53. Вал со шкивами

Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось x (рис. 54, а). Силу F разложим на составляющие F_z и F_y . Известным методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении (рис. 54, б).

Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдём внутренние усилия. Из шести внутренних усилий не равно нулю пять:

$$\begin{aligned}\Sigma x &= 0; & N &= 0; & \Sigma M_x &= 0; & T &= F \cdot e; \\ \Sigma y &= 0; & Q_y &= F_y; & \Sigma M_y &= 0; & M_y &= F_z \cdot x; \\ \Sigma z &= 0; & Q_z &= F_z; & \Sigma M_z &= 0; & M_z &= F_y \cdot x.\end{aligned}$$

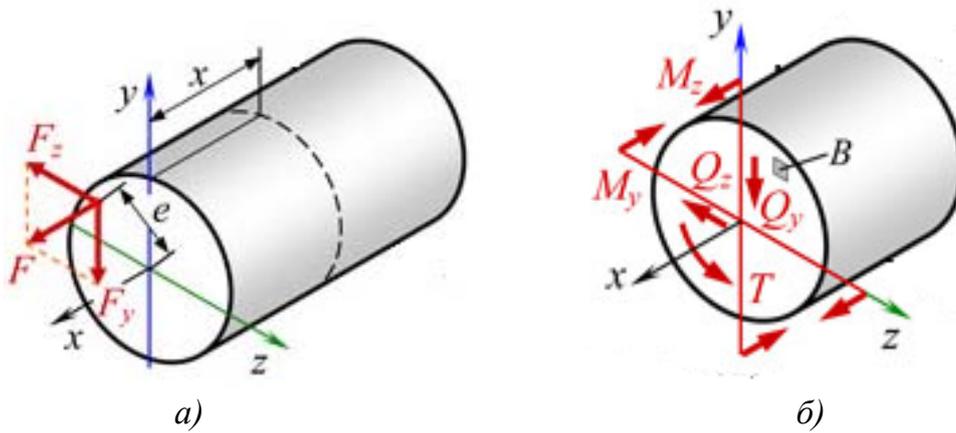


Рис. 54. Определение внутренних усилий при изгибе с кручением

На выделенном элементе B (см. рис. 54, б) показаны действующие по его граням напряжения (рис. 55, а). От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения τ_{Q_y} , τ_{Q_z} , τ_T . От изгибающих моментов – нормальные напряжения σ' и σ'' . Для длинных валов ($l > 10d$) влиянием поперечных сил часто пренебрегают. Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (рис. 55, б).

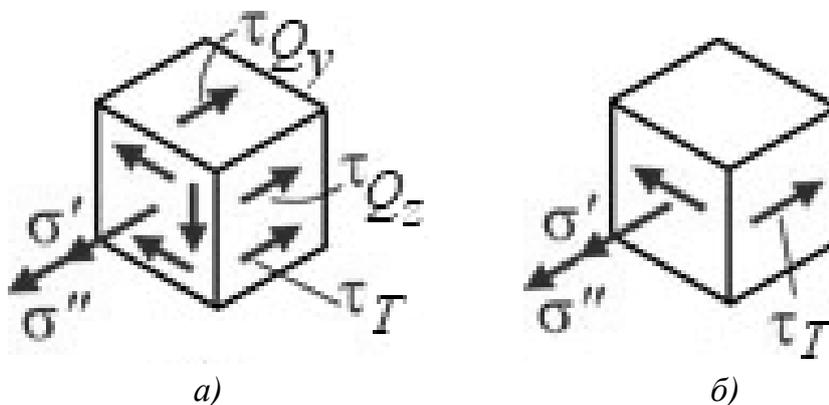


Рис. 55. Анализ напряжённого состояния

Расчёт вала, работающего на кручение с изгибом

Пример. Для стального вала постоянного поперечного сечения с двумя зубчатыми колёсами (рис. 56, а), передающего мощность $P = 6$ кВт при угловой скорости $\omega = 48$ с⁻¹, определить диаметр вала по двум вариантам:

а) по третьей гипотезе прочности (гипотеза наибольших касательных напряжений);

б) по пятой гипотезе прочности (гипотеза потенциальной энергии формоизменения).

Принять $[\sigma] = 70$ МПа, $F_{r1} = 0,4 F_1$, $F_{r2} = 0,4 F_2$.

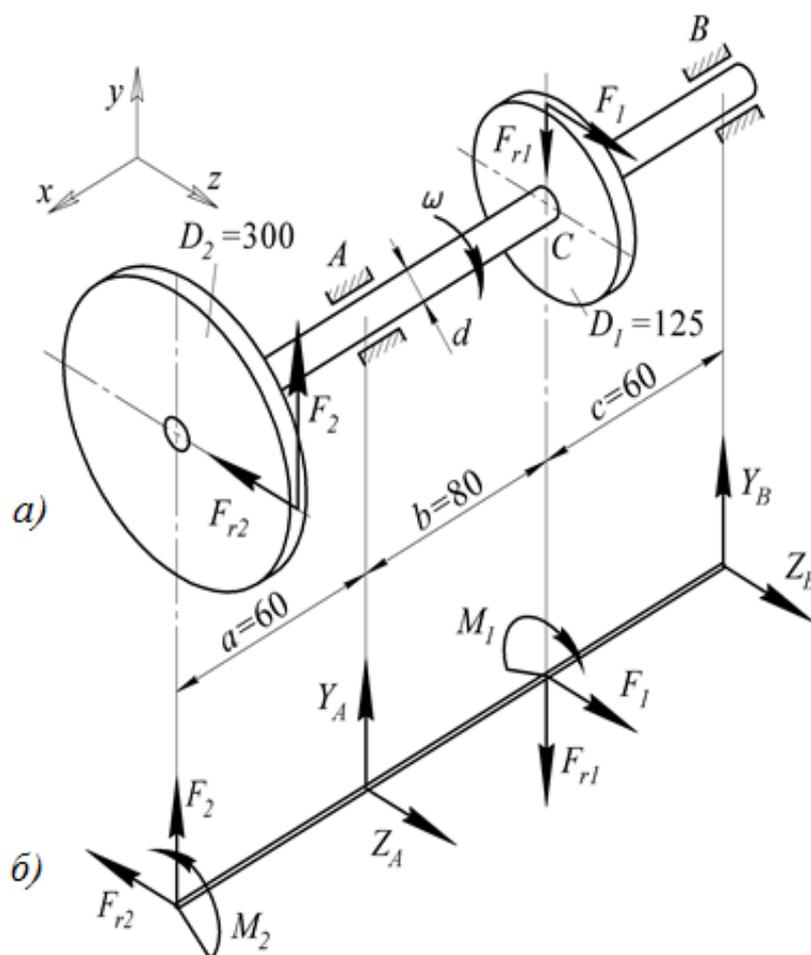


Рис. 56. Расчётная схема вала

Решение

1. Составим расчётную схему вала. Для этого «снимем» зубчатые колёса с вала, а действующую нагрузку приведём к оси вала.

2. Определим вращающий момент, действующий на вал. Так как вал вращается с постоянной скоростью (в механике такое движение называют динамическим равновесием), то, очевидно, движущий момент M_1 (его направление совпадает с направлением вала) должен

уравновешиваться моментом сопротивления M_2 (он направлен противоположно вращению вала)

$$M_1 = M_2 = P/\omega = 6000/48 = 125 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Рассчитаем силы, действующие на вал:

$$F_1 = 2M_1/D_1 = 2 \cdot 125/0,125 = 2000 \text{ Н},$$

$$F_2 = 2M_2/D_2 = 2 \cdot 125/0,3 = 833 \text{ Н},$$

$$F_{r1} = 0,4 F_1 = 800 \text{ Н}, \quad F_{r2} = 0,4 F_2 = 333 \text{ Н}.$$

4. Определим реакции опор A и B . Для этого рассмотрим равновесия вала (рис. 57, б):

– для вертикальной плоскости вдоль оси Y

$$\Sigma m_A(F) = 0: -F_2 \cdot a - F_{r1} \cdot b + Y_B(b + c) = 0, \text{ отсюда}$$

$$Y_B = (1/(b + c))(F_2 \cdot a + F_{r1} \cdot b) = (1/0,14)(833 \cdot 0,06 + 800 \cdot 0,08) = 7,143(49,98 + 64) = 7,143 \cdot 113,98 = 814 \text{ Н}.$$

$$\Sigma m_B(F) = 0: -F_2(a + b + c) - Y_A(b + c) + F_{r1} \cdot c = 0, \text{ отсюда}$$

$$Y_A = (1/(b + c))(F_{r1} \cdot c - F_2(a + b + c)) = (1/0,14)(800 \cdot 0,06 - 833 \cdot 0,2) = 7,143(48 - 166) = -847 \text{ Н}.$$

– для горизонтальной плоскости вдоль оси Z

$$\Sigma m_A(F) = 0: -F_{r2} \cdot a - F_1 \cdot b - Z_B(b + c) = 0, \text{ отсюда}$$

$$Z_B = (1/(b + c))(-F_{r2} \cdot a - F_1 \cdot b) = (1/0,14)(-333 \cdot 0,06 - 2000 \cdot 0,08) = 7,143(-19,98 - 160) = -1286 \text{ Н}.$$

$$\Sigma m_A(F) = 0: -F_{r2}(a + b + c) + F_1 \cdot c + Z_A(b + c) = 0, \text{ отсюда}$$

$$Z_A = (1/(b + c))(F_{r2}(a + b + c) - F_1 \cdot c) = (1/0,14)(333 \cdot 0,2 - 2000 \cdot 0,06) = 7,143(66,6 - 120) = -381 \text{ Н}.$$

5. Построим эпюры крутящих моментов.

Крутящий момент $M_x = \Sigma m_x(F^{\text{внеш}})$. Так как момент всех действующих внешних сил относительно оси x , относительно оси вала равен нулю, то, очевидно, $M_x = M_1 = M_2 = 125 \text{ Н} \cdot \text{м}$, причём возникать он будет на участке между сечениями, в которых приложены внешние моменты M_1 и M_2 (см. рис. 57, б).

6. Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Изгиб вала происходит в двух плоскостях – вертикальной (относительно оси y) и горизонтальной (относительно оси z). Поэтому построим эпюры сначала в вертикальной плоскости (рис. 57, в и е), а затем – в горизонтальной (рис. 57, г и д).

7. Определим опасное сечение вала.

Опасным является то сечение вала, в котором эквивалентный момент принимает максимальное значение, именно в этом сечении вала возникнут максимальные напряжения и может произойти поломка вала.

По третьей гипотезе прочности эквивалентный момент

$$M_{III} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

В наших расчётах подозрительными являются два сечения:

– сечение, соответствующее левому подшипнику, – сечение *A*;

– сечение, соответствующее зубчатому колесу, – сечение *C*.

В обоих сечениях крутящий момент $M_x = 125 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (см. рис. 57, б).

Однако моменты M_y и M_z разные, причём M_y больше в сечении *C*, а M_z – в сечении *A* (рис. 57, е и з).

Поэтому для определения опасного сечения рассчитаем эквивалентный момент для каждого сечения:

сечение *A*

$$M_3 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{125^2 + 50^2 + 20^2} = 136 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

сечение *C*

$$M_3 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{125^2 + 48,8^2 + 77,2^2} = 155 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Вывод: так как по расчётам M_{III} оказался больше в сечении *C*, то это сечение вала и принимаем за опасное.

8. Рассчитаем диаметр вала из условия прочности.

По третьей теории прочности диаметр вала должен быть

$$d_3 = \sqrt{(32 \cdot M_{III}) / (\pi \cdot [\sigma])} = \sqrt{(32 \cdot 155) / (3,14 \cdot 70 \cdot 10^6)} = 28,26 \text{ мм}.$$

По пятой гипотезе прочности сначала определим эквивалентный момент, а затем рассчитаем диаметр вала:

$$M_5 = \sqrt{0,75(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)} = \sqrt{0,75(125^2 + 48,8^2 + 77,2^2)} = 142 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$d_5 = \sqrt{(32 \cdot M_5) / \pi \cdot [\sigma]} = \sqrt{(32 \cdot 142) / (3,14 \cdot 70 \cdot 10^6)} = 27,45 \text{ мм}.$$

Вывод: как видно из расчётов, третья и пятая гипотезы прочности дают примерно одинаковый размер диаметра вала, но более точной считают пятую гипотезу прочности. Окончательно примем диаметр вала $d = 30 \text{ мм}$, то есть округлим до ближайшего чётного числа в сторону увеличения, чтобы иметь небольшой запас прочности.

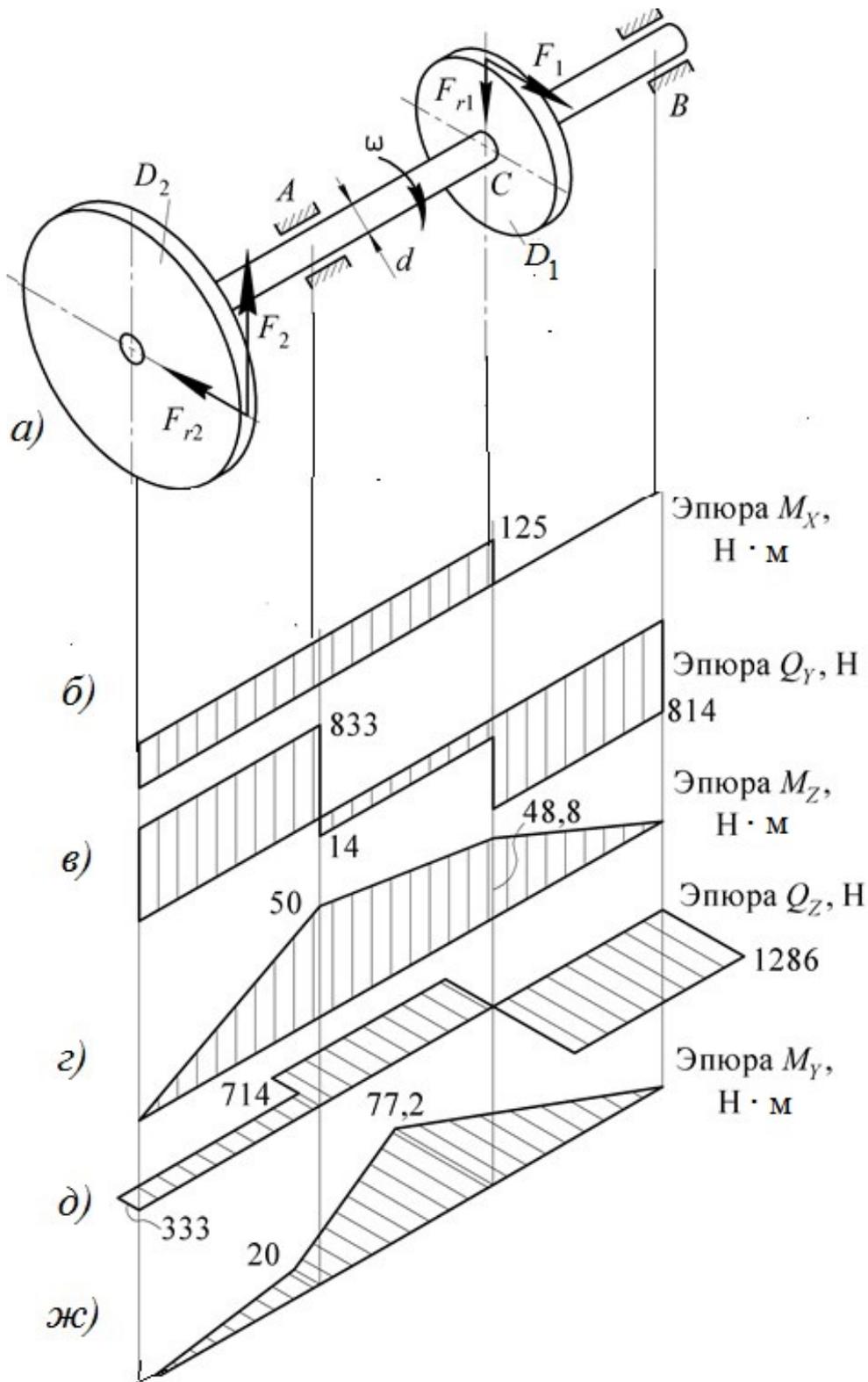


Рис. 57. Построение эюр

Практическое задание

Задача. Из условия прочности рассчитать необходимый диаметр вала постоянного поперечного сечения с двумя зубчатыми колёсами, передающего мощность P при заданной угловой скорости ω .

Принять $[\sigma] = 70$ МПа, $F_{r1} = 0,4F_1$, $F_{r2} = 0,4F_2$.

Варианты взять из табл. 12 и рис. 58.

Таблица 12

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кВт	40	30	53	25	12	28	20	10	16	35
ω , c^{-1}	60	55	45	35	30	70	65	25	50	40
D_1 , мм	130	125	150	150	70	120	140	100	60	120
D_2 , мм	300	260	320	260	200	240	250	200	240	220
a , мм	80	60	70	80	80	80	100	90	120	100
b , мм	120	80	70	100	120	100	150	140	120	80
c , мм	60	60	70	80	80	70	100	90	80	100

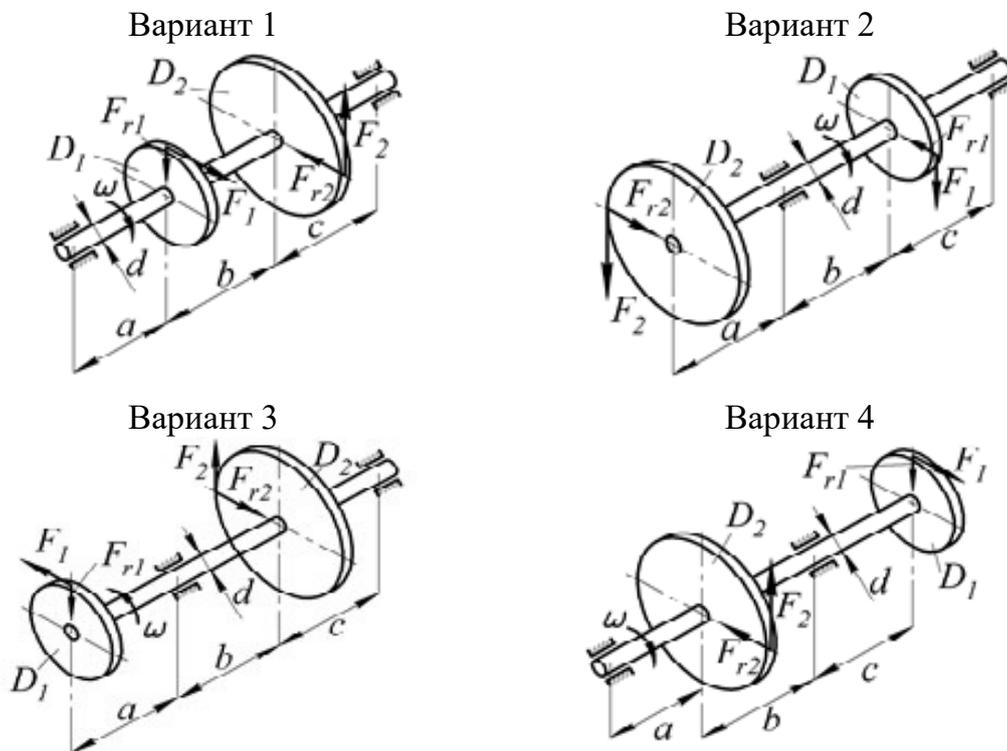


Рис. 58. Расчётные схемы валов

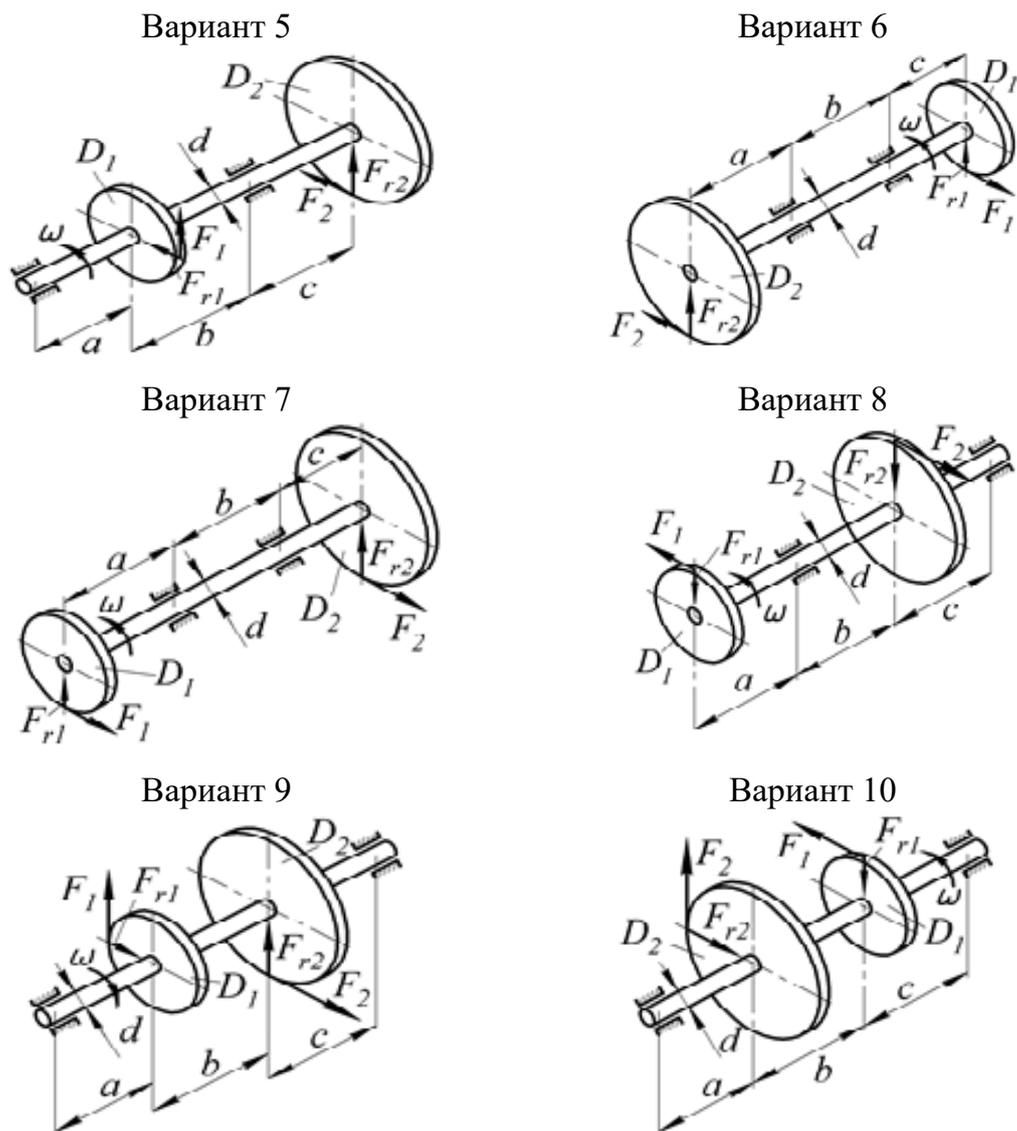


Рис. 58. Расчётные схемы валов (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. Какие разновидности связей используют при проектировании балок?
2. Какой изгиб называется чистым?
3. Какой изгиб называется поперечным?
4. Как определить знаки поперечной силы и изгибающего момента?
5. Как изменяется поперечная сила в сечении балки, к которому приложена сосредоточенная сила?
6. Как определить нормальное напряжение в любой точке данного поперечного сечения при прямом изгибе?

7. Как называется напряжённое состояние, возникающее при кручении круглого вала?
8. Какая связь между углом сдвига и углом закручивания?
9. Как распределяется касательное напряжение при кручении?
10. Почему для деталей, работающих на кручение, выбирают круглое поперечное сечение?
11. В чём заключается расчёт на прочность?
12. В чём заключается расчёт на жёсткость?
13. Какое напряжённое состояние возникает в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручении?
14. По каким теориям прочности выбирается опасное сечение вала?

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы сопротивления материалов»

Абсолютная деформация – величина изменения размеров тел: длины, объёма и т. д.

Балка, брус, стержень, вал – это модель в сопротивлении материалов, у которой один размер (длина) значительно превышает другие.

Деформация (от лат. *deformatio* – *искажение*) – изменение формы и объёма тела под действием внешних сил.

Жёсткость – способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформации.

Запас прочности – отношение предела прочности материала к максимальному нормальному механическому напряжению, которое будет испытывать деталь в работе.

Закон Гука – связь между величиной упругой деформации и силой, действующей на тело.

Изгиб – вид деформации бруса (стержня), балки или другого объекта, характеризующийся изменением кривизны оси или срединной поверхности деформируемого объекта под действием внешних сил.

Косой изгиб – вид деформации, характеризующийся изменением кривизны бруса под действием внешних сил, проходящих через его ось и не совпадающих ни с одной из главных плоскостей.

Кручение (от франц. *torsion*) – это такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях стержня, бруса, вала и так далее возникает только крутящий момент.

Относительная деформация – отношение величины изменения размера тела к его исходному размеру. Часто относительная деформация выражается в процентах.

Поперечный изгиб – изгиб, возникающий при наличии изгибающих моментов и поперечных сил.

Предел упругости – наибольшее механическое напряжение, при котором материал сохраняет свои упругие свойства (деформация исчезает после снятия нагрузки), при превышении предела появляются первые признаки пластической деформации (в пластичных материалах).

Предел текучести – напряжение, при котором происходит рост деформаций без заметного увеличения нагрузки.

Предел прочности (временного сопротивления) – максимальное механическое напряжение, которое способен выдержать материал, не разрушаясь.

Продольный изгиб – изгиб первоначально прямолинейного стержня под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил вследствие потери им устойчивости.

Пролёт балки – это расстояние между её опорами.

Простой изгиб – изгиб прямого бруса, при котором внешние силы лежат в одной из плоскостей, проходящих через его ось и главные оси инерции поперечного сечения (в одной из главных плоскостей бруса). При плоском изгибе в поперечных сечениях бруса возникают нормальные и касательные напряжения.

Растяжение-сжатие – вид деформации стержня под действием сил, равнодействующая которых нормальна поперечному сечению стержня и проходит через его центр тяжести.

Релаксация – процесс самопроизвольного уменьшения внутреннего напряжения с течением времени при неизменной деформации.

Сдвиг – деформация упругого тела, характеризующаяся взаимным смещением параллельных слоев (или волокон) материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

Сила упругости – сила, возникающая в деформируемом теле и направленная в сторону, противоположную смещению частиц при деформации.

Сложное сопротивление – деформация бруса, стержня или другого упругого тела, возникающая как результат нескольких простейших деформаций, происходящих одновременно: изгиба и растяжения, изгиба и кручения и т. д.

Сложный изгиб – изгиб прямого бруса, вызываемый силами, расположенными в разных плоскостях. Частным случаем сложного изгиба является косой изгиб.

Сопротивление материалов – наука о прочности и деформируемости элементов (деталей) сооружений и машин. Основные объекты изучения сопротивления материалов – стержни и пластины, для которых устанавливаются соответствующие методы расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость при действии статических и динамических нагрузок. Сопротивление материалов базируется на законах и выводах теоретической механики, а также учитывает способность материалов деформироваться под действием внешних сил.

Твёрдость – способность материала сопротивляться механическому проникновению в него посторонних тел.

Чистый изгиб – изгиб, возникающий при наличии только изгибающих моментов.

Раздел 3

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Механизм – система тел, предназначенная для преобразования заданного движения одного или нескольких тел в требуемое движение других тел (например, вращательного движения в возвратно-поступательное движение или наоборот).

Одно или несколько неподвижно соединённых твёрдых тел, входящих в состав механизма, называются *звеном*. Звенья механизма подразделяются на входные и выходные, на ведущие и ведомые. Заданное движение совершает входное звено, требуемое – выходное звено.

Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительную подвижность, представляет собой *кинематическую пару*.

Все пары делятся на пять классов в зависимости от числа налагаемых связей на подвижность каждого из звеньев.

Известно, что тело, находясь в пространстве (в трёхмерной декартовой системе координат x, y, z), имеет шесть степеней свободы. Оно может перемещаться вдоль каждой из трёх осей x, y, z , а также вращаться вокруг каждой оси (рис. 59). Если тело (звено) образует с другим телом (звеном) кинематическую пару, то оно теряет одну или несколько из этих шести степеней свободы.

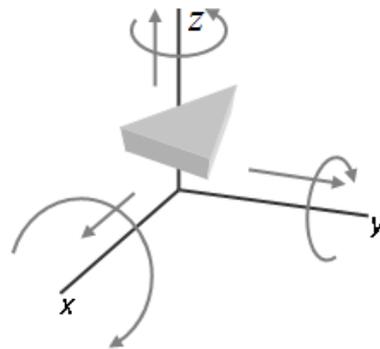


Рис. 59. Шесть степеней свободы тела в пространстве

Число степеней подвижности обозначается за H . Число налагаемых связей обозначается S . При этом число степеней подвижности можно определить по формуле $H = 6 - S$.

По характеру соприкосновения звеньев, образующих кинематическую пару, пары делятся на *низшие*, в которых контакт звеньев осуществляется по поверхности, и *высшие*, в которых контакт звеньев осуществляется по линиям или точкам.

Механизм, подвижные звенья которого совершают плоское движение, параллельное одной и той же плоскости, называется *плоским механизмом*. Все остальные механизмы относятся к *пространственным*.

Плоский механизм называют *рычажным*, если его звенья образуют только низшие кинематические пары. Наиболее распространенными кинематическими парами в плоских рычажных механизмах являются одноподвижные кинематические пары: вращательная (рис. 60, а) и поступательная (рис. 60, б).

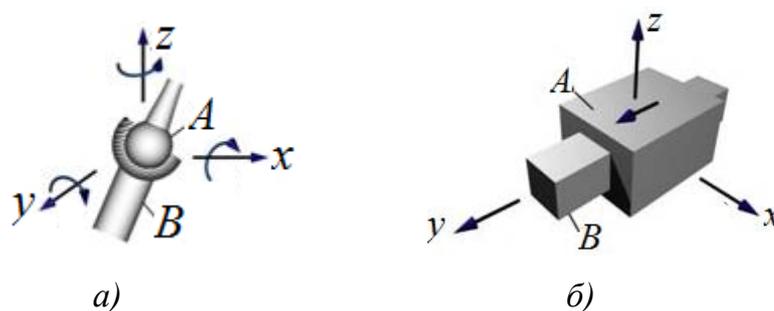


Рис. 60. Кинематические пары

Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма

Кинематический анализ механизма – исследование его основных параметров без учёта действующих на него сил с целью изучения законов изменения и на основе этого выбор из ряда известных наилучшего механизма.

Одна из целей кинематического анализа – это оценка кинематических условий работы рабочего звена, в частности ползуна.

Основные задачи – определение перемещений звеньев механизма, а также скоростей и ускорений точек звеньев механизма.

Существует несколько методов решения основных задач.

В этом задании выбран графоаналитический метод, то есть метод планов. Этот метод наиболее простой, основан на непосредственном геометрическом построении планов скоростей и ускорений звеньев и точек механизма.

Недостаток метода – невысокая точность, которая зависит от точности графических построений.

Пример. Для кривошипно-ползунного механизма задана кинематическая схема, размеры его звеньев – l_{O_1A} и l_{AB} , угол наклона φ_1 , угловая скорость ω_1 и угловое ускорение ε его ведущего звена – кривошипа O_1A (рис. 61, а, б, в).

Требуется построить планы скоростей и ускорений механизма в заданном положении.

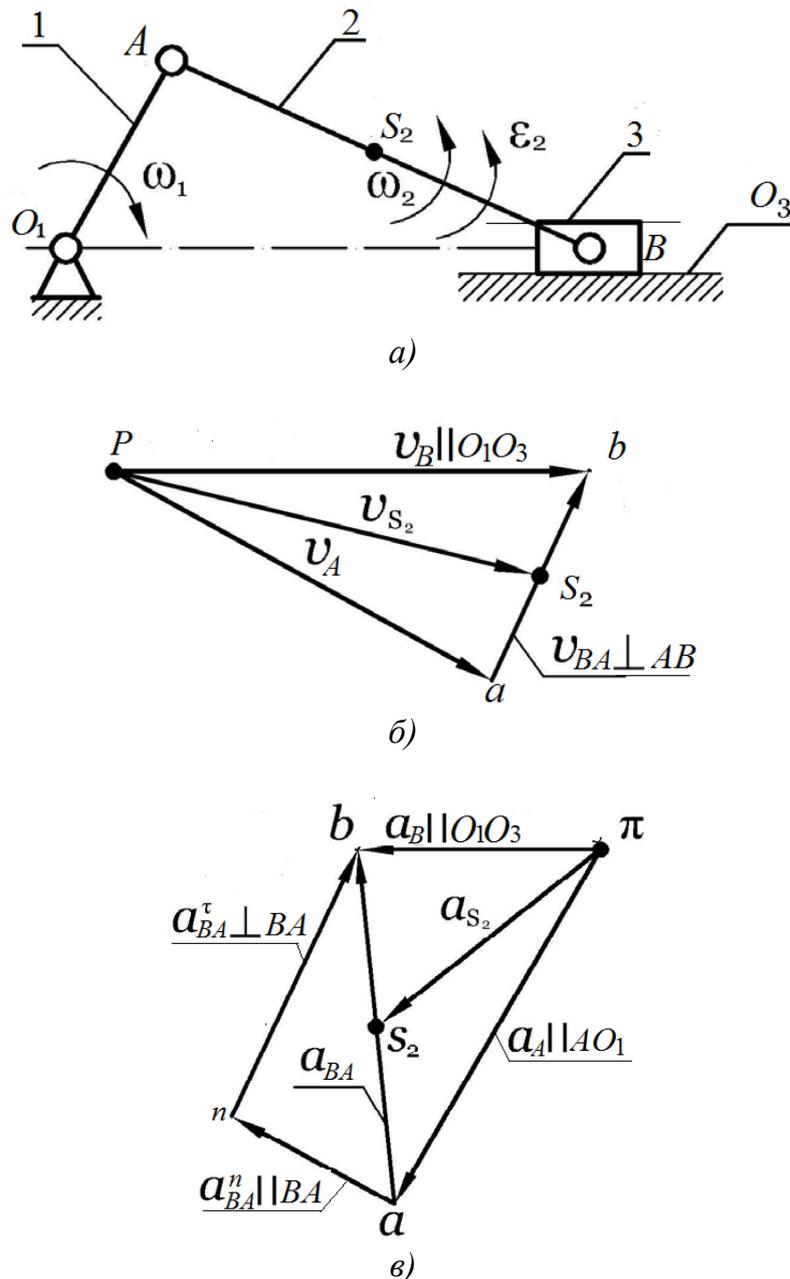


Рис. 61. Построение планов скоростей и ускорений кривошипно-ползунного механизма: а – кинематическая схема механизма; б – план скоростей; в – план ускорений

Решение

1. Начертим кинематическую схему механизма на миллиметровой бумаге. Обозначим: звено-стойка – точка O_1 , звено 1 (кривошип), звено 2 (шатун), звено 3 (ползун), направляющая ползуна – O_3 .

2. Определим длины звеньев 1 и 2. Для этого нужно выбрать масштаб длин

$$\mu_l = l_{O_1A} / O_1A, \text{ м/мм},$$

где O_1A – длина отрезка, мм, изображающая кривошип длиной l_{O_1A} на схеме механизма; l_{O_1A} выбирают произвольно, удобную для дальнейших расчётов (можно принять 30...35 мм).

Вычислим длину шатуна $AB = l_{AB} / \mu_l$, мм, изображающего его на схеме механизма (см. рис. 61, а).

3. Построим план скоростей.

Линейную скорость v_A точки A можно определить, учитывая, что кривошип совершает вращательное движение вокруг точки O_1

$$v_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A}, \text{ м/с}.$$

4. Шатун 2 совершает плоско-параллельное движение, поэтому абсолютная скорость точки B конца кривошипа AB (ползуна 3) равна

$$v_B = v_A + v_{BA},$$

здесь v_{BA} – скорость точки B относительно точки A .

5. Для того чтобы начертить план скоростей механизма, сначала определим масштаб плана скоростей

$$\mu_v = v_A / Pa, \text{ (м/с)/мм},$$

где Pa – вектор скорости точки A , длина которого выбирается произвольно в мм (можно принять 40...50 мм), и изобразим план скоростей на миллиметровой бумаге, учитывая, что направление v_A перпендикулярно кривошипу и направлено в сторону его вращения ω_1 , направление v_{BA} перпендикулярно шатуну, а скорость v_B , согласно движению ползуна, направлена горизонтально.

Произвольно выберем на листе бумаге точку P (полюс плана скоростей) и построим векторы скоростей v_A , v_B и v_{BA} (см. рис. 61, б).

Так как точка S_2 делит шатун AB пополам, тогда на плане скоростей делим вектор av пополам и определяем положение точки S_2 . Соединив полюс P с точкой S_2 , построим вектор скорости этой точки.

6. С помощью линейки и выбранного масштаба μ_v определим действительные скорости:

$$v_B = \mu_v \cdot Pb, \text{ м/с},$$

$$v_{BA} = \mu_v \cdot ba, \text{ м/с},$$

$$v_{S_2} = \mu_v \cdot PS_2, \text{ м/с}.$$

7. Построим план ускорений (см. рис. 61, в).

Линейное ускорение a_A точки A удобно рассмотреть в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих, направление которых известно. Нормальное ускорение a_A^n (вдоль звена к точке O) и тангенциальное ускорение a_A^t (перпендикулярно звену и нормальному ускорению в сторону углового ускорения)

$$a_A = a_A^n + a_A^t,$$

тогда можно определить их значение:

$$a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A \text{ и } a_A^t = \varepsilon_1 \cdot O_1A.$$

8. Ускорение ползуна 3 – точки B

$$a_B = a_A + a_{BA}.$$

9. Выберем масштаб для плана ускорений:

$$\mu_a = a_A^n / \pi a,$$

где πa – вектор ускорения точки A на плане ускорений, величину которого можно выбирать произвольно (можно принять 50 мм), и изобразим план ускорений на миллиметровой бумаге, учитывая направление нормальных и тангенциальных ускорений, а также то, что направление движения ползуна (значит, и направление ускорения точки B) горизонтально (рис. 61, б).

Для построения вектора ускорения точки S_2 разделим вектор va пополам, найдём положение точки S_2 и, соединив полюс π с этой точкой, получим вектор ускорения точки S_2 .

10. С помощью линейки (замеряя соответствующий вектор на плане ускорений в мм) и выбранного масштаба μ_a определим действительные ускорения:

$$a_B = \mu_a \cdot \pi b, \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA} = \mu_a \cdot ba, \text{ м/с}^2,$$

$$a_{S_2} = \mu_a \cdot \pi S_2, \text{ м/с}^2.$$

Практическое задание

Задача. Для заданной кинематической схемы кривошипно-ползунного механизма определить истинную скорость и истинное ускорение рабочего звена – ползуна. Варианты взять из табл. 13 и рис. 61, а.

Параметр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_1 , град	45	60	80	120	60	30	105	135	120	45
l_{OA} , м	0,1	0,12	0,14	0,18	0,2	0,22	0,24	0,26	0,28	0,3
l_{AB} , м	0,35	0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,4	0,35	0,45	0,5
ω_1 , с ⁻¹	25	30	28	32	25	30	23	24	28	26
ε_1 , с ⁻²	45	70	75	60	50	65	75	55	50	60
m_2 , кг	24	20	25	30	32	35	25	20	22	30
m_3 , кг	45	40	35	50	52	25	30	42	35	40

Кинестатический расчёт кривошипно-ползунного механизма

Задачей кинестатического расчёта является определение сил, действующих в кинематических парах кривошипно-ползунного механизма и его уравновешивающего момента. Кинематическая схема механизма приведена на рис. 61, а.

Кривошип совершает равномерное вращение с угловой скоростью $\omega_1 = \text{const}$ ($\varepsilon_1 = 0$). Для расчёта используется метод планов сил.

Алгоритм решения задачи:

1. Механизм расчленить на группу начальных звеньев и группы с нулевой степенью свободы (группы Ассура). В данном случае звено 1 (кривошип) – группа начальных звеньев, звенья 2 – 3 – группа Ассура.

2. Действие отсоединённых звеньев заменить силами реакций. Расчёт нужно начать с последней группы, закончить начальным звеном.

3. К звеньям приложить силы тяжести, а также соответствующие силы инерции и моменты сил инерции, учитывая, что точка приложения силы инерции – центр масс (середина) звена $F_u = -m \cdot a_c$.

Величину и направление ускорения центра масс a_c можно найти с помощью плана ускорений.

4. Записать для каждой группы уравнения равновесия сил и моментов в векторном виде:

$$\Sigma F = 0, \Sigma m(F) = 0.$$

5. Построить план сил в масштабе μ_F .
6. Используя линейку и выбранный масштаб, найти неизвестные силы.

Пример. Провести силовой расчёт кривошипно-ползунного механизма (рис. 62).

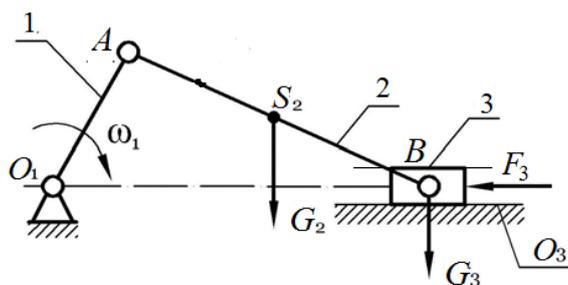


Рис. 62. Расчётная кинематическая схема механизма

Решение

Составим уравнения равновесия для группы 2 – 3 относительно точки B (рис. 63):

$$\Sigma M_B = 0; R_{12}^{\tau} \cdot A_{21}B + G_2 \cdot L_2 - F_{ин2} \cdot L_2 = 0;$$

$$\Sigma F_i = 0; R_{12}^n + R_{12}^{\tau} + F_{ин2} + G_2 + G_3 + F_3 + F_{ин3} + R_3 = 0.$$

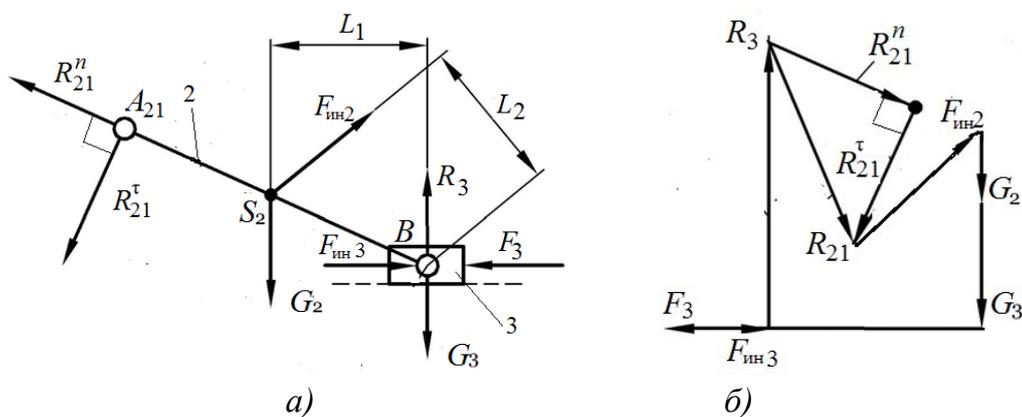


Рис. 63. Силовой расчёт: а – расчётная схема группы 2 – 3; б – план сил

Составим уравнения равновесия первичного механизма (кривошипа O_1A) (рис. 64):

$$\Sigma M_{O_1} = 0; R_{12} \cdot L_3 - F_y \cdot O_1A_{12} = 0;$$

$$\Sigma F_i = 0; R_{12} + F_y + R_{O_1} = 0.$$

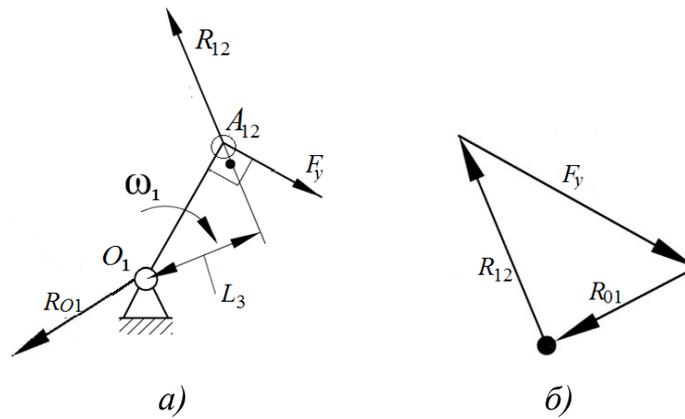


Рис. 64. Силовой расчёт: а – расчётная схема первичного механизма; б – план сил первичного механизма

Практическое задание

Задача. Для заданной кинематической схемы кривошипно-ползунного механизма выполнить силовой расчёт. Варианты взять из табл. 13 и рис. 61, а.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется звеном? Какое звено называется входным, выходным, ведомым?
2. Как называются звенья рычажных механизмов в зависимости от характера их движения относительно стойки или других звеньев?
3. Что называется кинематической парой?
4. По каким признакам классифицируются кинематические пары?
5. Что называется кинематической цепью?
6. Что называется группой Ассура?
7. Что в ТММ называется масштабным коэффициентом (масштабом)?
8. Что такое план скоростей (ускорений) звена, механизма?
9. Когда применяется теорема о подобии и как она используется при определении скоростей и ускорений точек звена?
10. Как определяются величина и направление нормального и кориолисова ускорений?
11. Как определить действительные величины скорости и ускорения какой-либо точки звена механизма, пользуясь планами скоростей и ускорений?

12. Как определить характер движения звена? Какое движение называется замедленным, какое – ускоренным?

13. Как определяются по величине и направлению силы инерции и момент от сил инерции?

14. Как формулируется принцип, согласно которому задачи силового исследования механизмов можно решить методами статики?

15. Какие задачи решает кинетостатика?

16. Что такое движущие силы?

17. Чем отличаются силы полезного сопротивления от сил вредного сопротивления?

18. Что такое реакции в кинематической паре?

Кулачковый механизм

Кулачковым механизмом называется механизм, образующий высшую кинематическую пару, имеющий подвижное звено, совершающее вращательное движение, – кулак (кулачок) с поверхностью переменной кривизны или имеющий форму эксцентрика, взаимодействующий с другим подвижным звеном – толкателем, если подвижное звено совершает прямолинейное движение, или коромыслом, если подвижное звено совершает качание.

На рис. 65 приведены плоские кулачковые механизмы. Они состоят из кулачка 1, толкателя 2 и стойки (опоры) 3. Для уменьшения трения в кулачковый механизм вводится ролик.

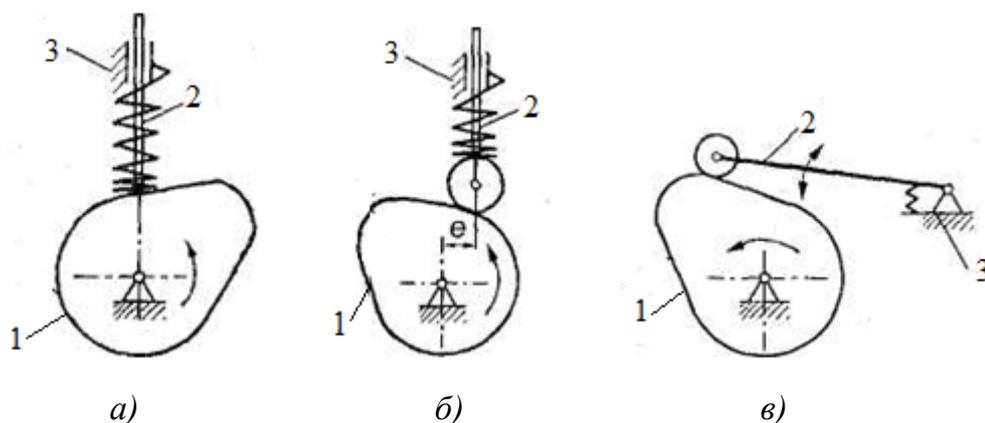


Рис. 65. Плоские кулачковые механизмы:
а – с игольчатым толкателем; б – с роликовым толкателем;
в – с коромысловым толкателем

Основные достоинства кулачковых механизмов: 1) малое количество деталей (кулачок и толкатель), что позволяет просто изготавливать и обслуживать механизм; 2) возможность получения заранее заданного закона движения толкателя с помощью профиля кулачка.

При изучении кинематических плоских механизмов во многих случаях удобно условно заменить высшие кинематические пары на низшие вращательные или поступательные пятого класса. Степень свободы механизма после замены должна сохраняться. Для этого применяют несколько методов.

Пример. Рассмотрим графический метод на примере кулачкового механизма с игольчатым толкателем (рис. 66, а). Пусть кулачок 1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 . Требуется построить планы скоростей и ускорений механизма.

Замену осуществим так, что движение заменяемого механизма в момент замены соответствует движению заменяющего. Обозначим цифрой 3 добавочное звено.

Заменяющим механизмом будет кривошипно-шатунный механизм OAB с кривошипом OA , где точка A является центром кривизны кривой теоретического профиля кулачка в точке B . Скорость и ускорение точки B толкателя определим, построив планы скоростей (рис. 66, б) и ускорений (рис. 66, в) по векторным уравнениям:

$$v_B = v_A + v_{BA}; a_B = a_{BA}^n + a_{BA}^t.$$

На плане скоростей вектор скорости точки A направлен перпендикулярно кривошипу OA в сторону угловой скорости ω_1 . Вектор скорости точки B направлен параллельно толкателю 2, а вектор скорости звена 3 – перпендикулярно AB .

На плане ускорений вектор ускорения точки B направлен параллельно толкателю 2, вектор ускорения точки A – параллельно кривошипу OA от точки A к точке O .

Точность построения планов зависит от точности определения центра A кривизны кривой профиля кулачка.

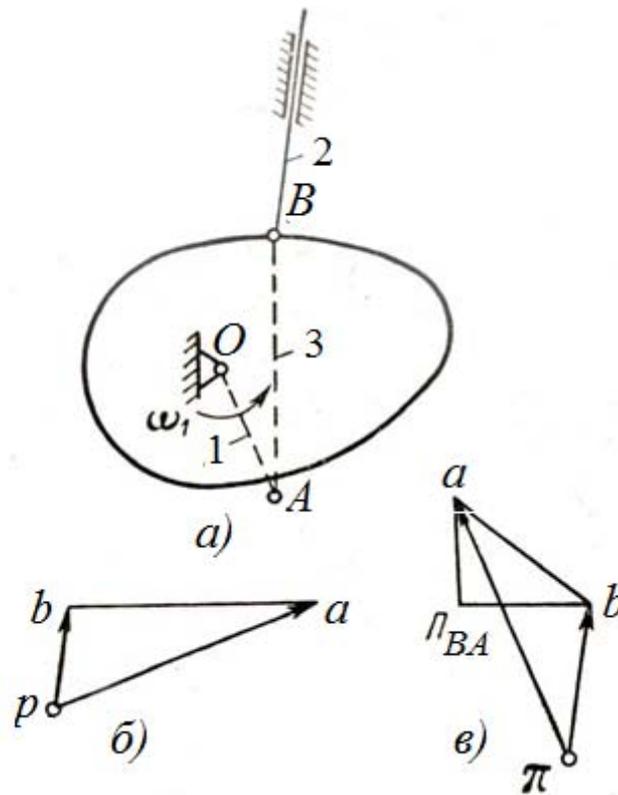


Рис. 66. Кулачковый механизм: а – кинематическая схема; б – план скоростей; в – план ускорений

В частных случаях возможны различные варианты замены, при этом можно производить кинематический анализ кулачкового механизма как обычного рычажного (рис. 67).

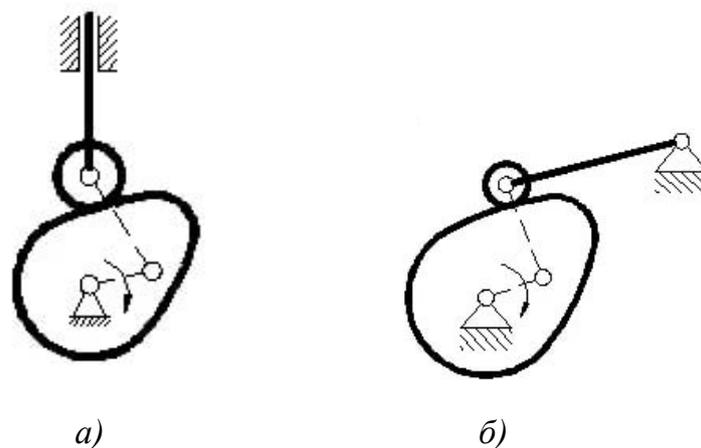
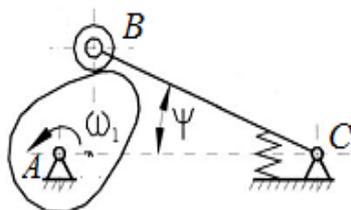


Рис. 67. Схемы замены кулачкового механизма на низшие кинематические пары: а – с роликовым толкателем; б – с коромысловым толкателем

Практическое задание

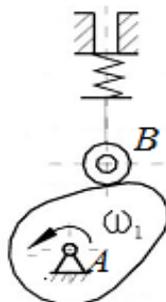
Задача. Начертить схему кулачкового механизма. Построить планы скоростей и ускорений для заменяющего механизма. При этом масштабные коэффициенты планов скоростей и ускорений $\mu_V = \mu_l \cdot \omega_1$, м/(с² · мм); $\mu_a = \omega_1^2$, м/(с² · мм).
Варианты взять из рис. 68.

Вариант 1



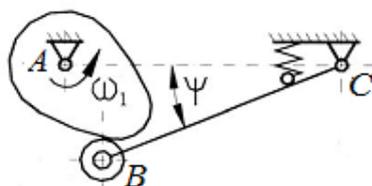
Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 8,9$ (1\с);
 $\psi = 18^\circ$ – максимальный угол качания коромысла;
длина коромысла $l_{BC} = 0,13$ м.

Вариант 2



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 9,42$ с⁻¹

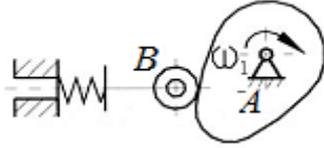
Вариант 3



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 7,85$ (1\с);
 $\psi = 15^\circ$ – максимальный угол качания коромысла;
длина коромысла $l_{BC} = 0,14$ м.

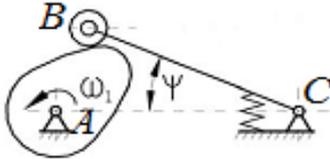
Рис. 68. Схемы кулачковых механизмов

Вариант 4



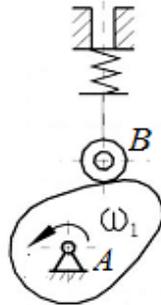
Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 10,4 \text{ с}^{-1}$

Вариант 5



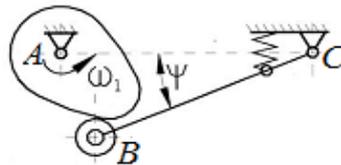
Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 11,42 \text{ (1\с)}$;
 $\psi = 25^\circ$ – максимальный угол качания коромысла;
длина коромысла $l_{BC} = 0,11 \text{ м}$.

Вариант 6



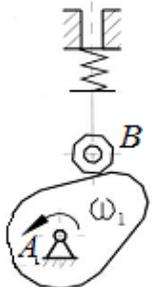
Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 11,15 \text{ с}^{-1}$

Вариант 7



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 9,42 \text{ (1\с)}$;
 $\psi = 20^\circ$ – максимальный угол качания коромысла;
длина коромысла $l_{BC} = 0,17 \text{ м}$.

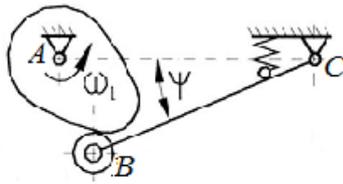
Вариант 8



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 8,37 \text{ с}^{-1}$

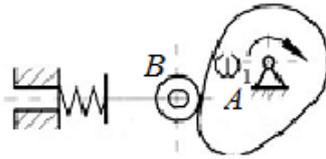
Рис. 68. Схемы кулачковых механизмов (продолжение)

Вариант 9



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 7,85 \text{ (1\csc)}$;
 $\psi = 15^\circ$ – максимальный угол качания коромысла;
длина коромысла $l_{BC} = 0,12 \text{ м}$.

Вариант 10



Угловая скорость кулачка $\omega_1 = 8,37 \text{ с}^{-1}$

Рис. 68. Схемы кулачковых механизмов (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит назначение кулачковых механизмов?
2. Какие типы кулачковых механизмов известны?
3. Каковы достоинства и недостатки кулачковых механизмов?
4. Как классифицированы толкатели кулачковых механизмов?
5. Что такое угол давления в кулачковых механизмах?
6. От чего зависит величина угла давления?
7. Каковы цели кинематического анализа кулачковых механизмов?
8. От чего зависит точность построения плана скоростей?
9. От чего зависит точность построения плана ускорений?
10. В какой связи находятся между собой перемещение, скорость и ускорение?

Планетарный механизм

Планетарные механизмы – механизмы для передачи и преобразования вращательного движения, содержащие зубчатые колёса с перемещающейся в пространстве осью вращения хотя бы одного из

них. Своё название они получили по аналогии с планетами Солнечной системы, которые вращаются вокруг светила.

Основными звеньями являются зубчатые колёса (рис. 69, а, б):

1) колесо 1 с внешними зубьями называется центральным, или солнечным;

2) колёса с внешними зубьями 2, оси которых подвижны – сателлиты (от лат. *satellitum* – спутник), или планетные колёса. Количество сателлитов обычно от двух до шести (чаще всего три);

3) большое опорное колесо 3 с внутренними зубьями – «корона»;

4) водило *H* (от заглавной буквы слова *hedel* – рычаг) является основой механизма – это неотъемлемая деталь абсолютно любого механизма и краеугольный камень всей идеи передачи вращения через планетарную систему. Водило представляет из себя рычажный механизм – обычно такую пространственную вилку.

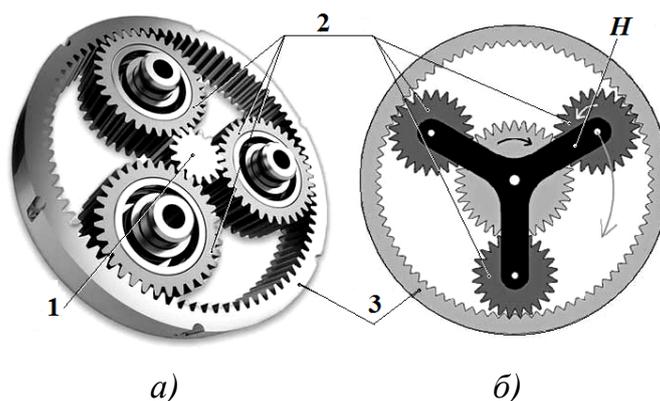


Рис. 69. Однорядный планетарный механизм:
а – общий вид; б – схема

Планетарный механизм применяют как редуктор (при степени подвижности механизма $W = 1$) в силовых передачах; коробку передач, передаточное отношение в которой изменяют путём поочерёдного торможения различных звеньев (например, водила или одного из колёс); дифференциал (при степени подвижности $W \geq 2$) в транспортных машинах, автомобилях, авиации, станках, разнообразных приборах. Планетарные и дифференциальные механизмы иначе называют эпициклическими.

Часто применяют планетарную передачу, совмещённую с электродвигателем (мотор-редуктор, мотор-колесо).

В общем случае при кинематическом исследовании планетарных механизмов пользуются формулой английского механика Роберта Виллиса (1800 – 1875)

$$i_{1-n}^{(H)} = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_n - \omega_H),$$

где $i_{1-n}^{(H)}$ – передаточное отношение от первого колеса к n -му при неподвижном водиле H , ω_1 – угловая скорость центрального колеса, ω_n – угловая скорость n -го колеса, ω_H – угловая скорость водила H .

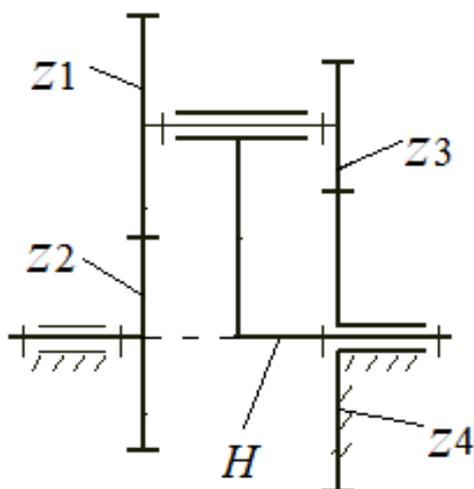


Рис. 70. Кинематическая схема редуктора Давида

Пример. Рассмотрим схему механизма (рис. 70), известного под названием *редуктора Давида* (русский механик Давид Рахмилевич Меркин (1912 – 2009)).

В нём четыре зубчатых колеса внешнего зацепления и водило H .

Колесо с числом зубьев z_4 неподвижное. Число зубьев

$$z_1 = z_3 = 100, z_2 = 101, z_4 = 99.$$

Найдём передаточное отношение от водила H к колесу z_1 по формуле Виллиса:

$$i_{14}^{(H)} = (\omega_1 - \omega_H) / (\omega_4 - \omega_H) = -(z_2 / z_1) - (z_4 / z_3) =$$

$$= -(101/100) - (99/100) = 1,01 \cdot 0,99 = 0,9999.$$

Учитывая, что $\omega_4 = 0$, найдём отношение $i_{H1}^{(4)}$, то есть при неподвижном 4 колесе:

$$i_{H1}^{(4)} = \omega_H / \omega_1 = (z_1 \cdot z_3) / (z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4) =$$

$$= (100 \cdot 100) / (100 \cdot 100 - 101 \cdot 99) = 10\,000 / (10\,000 - 9999) =$$

$$= 10\,000 / 1 = 10\,000,$$

то есть для того, чтобы колесо 1 сделало один оборот, необходимо повернуть водило H 10 000 раз.

Если немного изменить условие

$z_2 = z_4 = 100$, тогда $i_{H1}^{(4)} \rightarrow \infty$, то есть ведомое колесо 1 остаётся неподвижным.

Передаточное отношение $i_{H1}^{(4)}$ можно определить графически (рис. 71).

Выберем на водиле H точку F так, чтобы $O_2F = O_1A$ (валы O_1 и O_2 соосны и вращаются в разные стороны). Точка C может быть выше

или ниже точки A . FF' – произвольный отрезок (линейная скорость точки F'). Для колёс 2 и 3 точка C – мгновенный центр скоростей (МЦС).

Передаточное отношение

$$i_{H1}^{(4)} = \omega_H / \omega_1 = (V_B / O_2B) / (V_F / O_1F) = (BB' / O_2B) / (FF' / O_1F) = \operatorname{tg} \psi_H / \operatorname{tg} \psi_1 = BB' / FF'$$

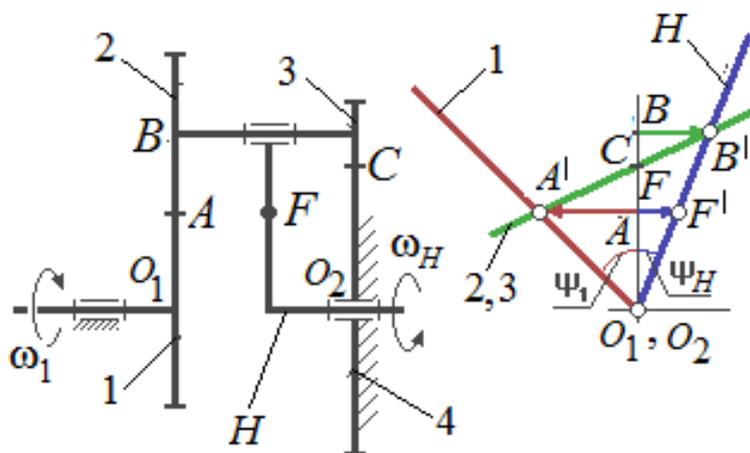


Рис. 71. Редуктор Давида: 1, 2 – внешняя зубчатая пара, 3 – колесо, 4 – коронная шестерня, H – водило

Вывод: редуктор Давида применяется в не силовых передачах. Понижает скорость при передаче от водила H (входное звено) к колесу 1 (выходное звено). Практически такие большие передаточные отношения трудно получить из-за высоких требований к точности изготовления зубчатых колёс. Даже небольшие погрешности при высоких передаточных отношениях приводят к тому, что ведомое колесо ведёт себя нестабильно и непредсказуемо: двигается рывками, останавливается и даже начинает вращаться в противоположную сторону. Поэтому обычно на практике передаточное отношение $i_{H1}^{(4)} \approx 100 \dots 150$.

Практическое задание

Задача. Определить передаточное отношение планетарного механизма. Варианты взять из рис. 72.

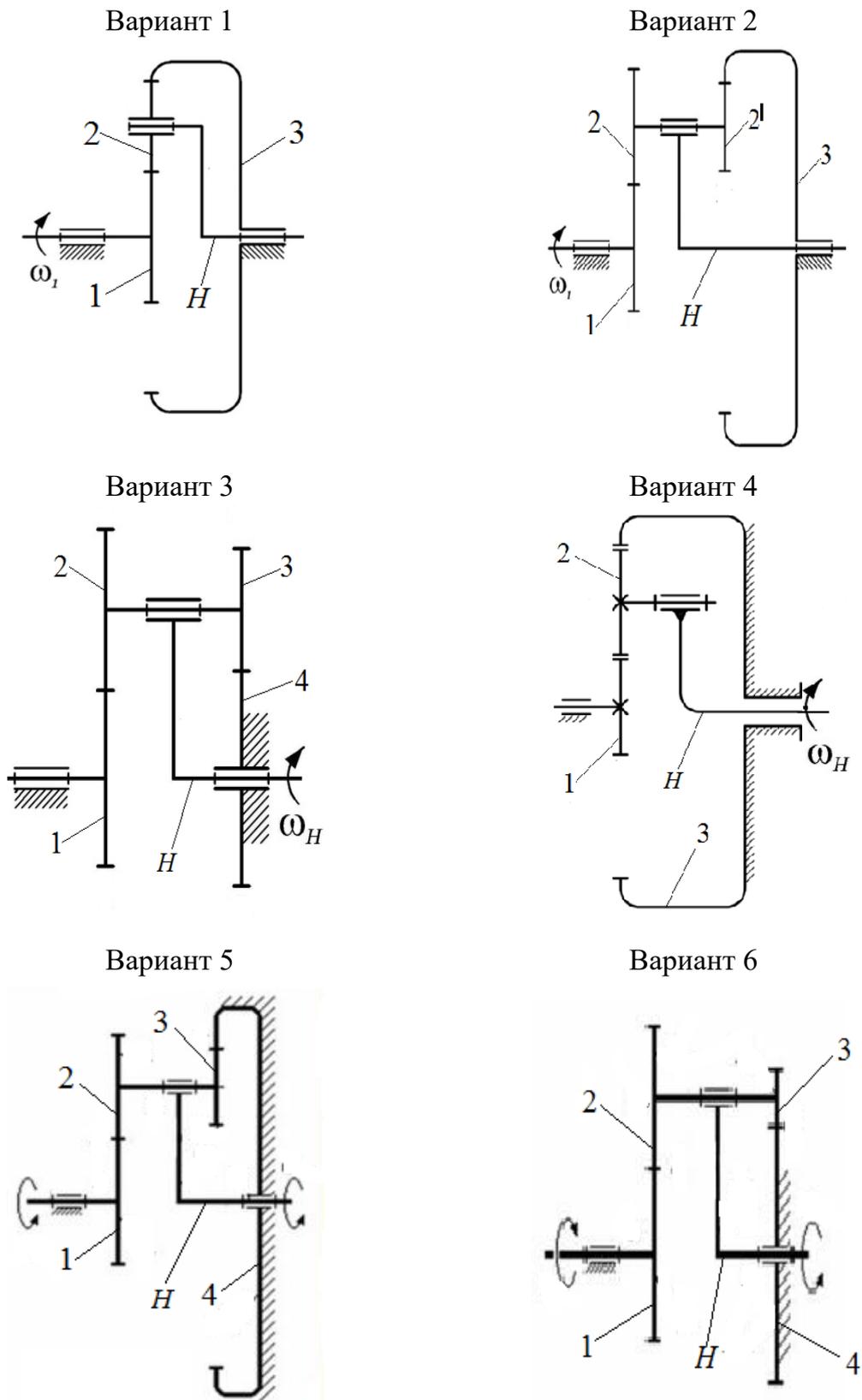


Рис. 72. Схемы планетарных механизмов

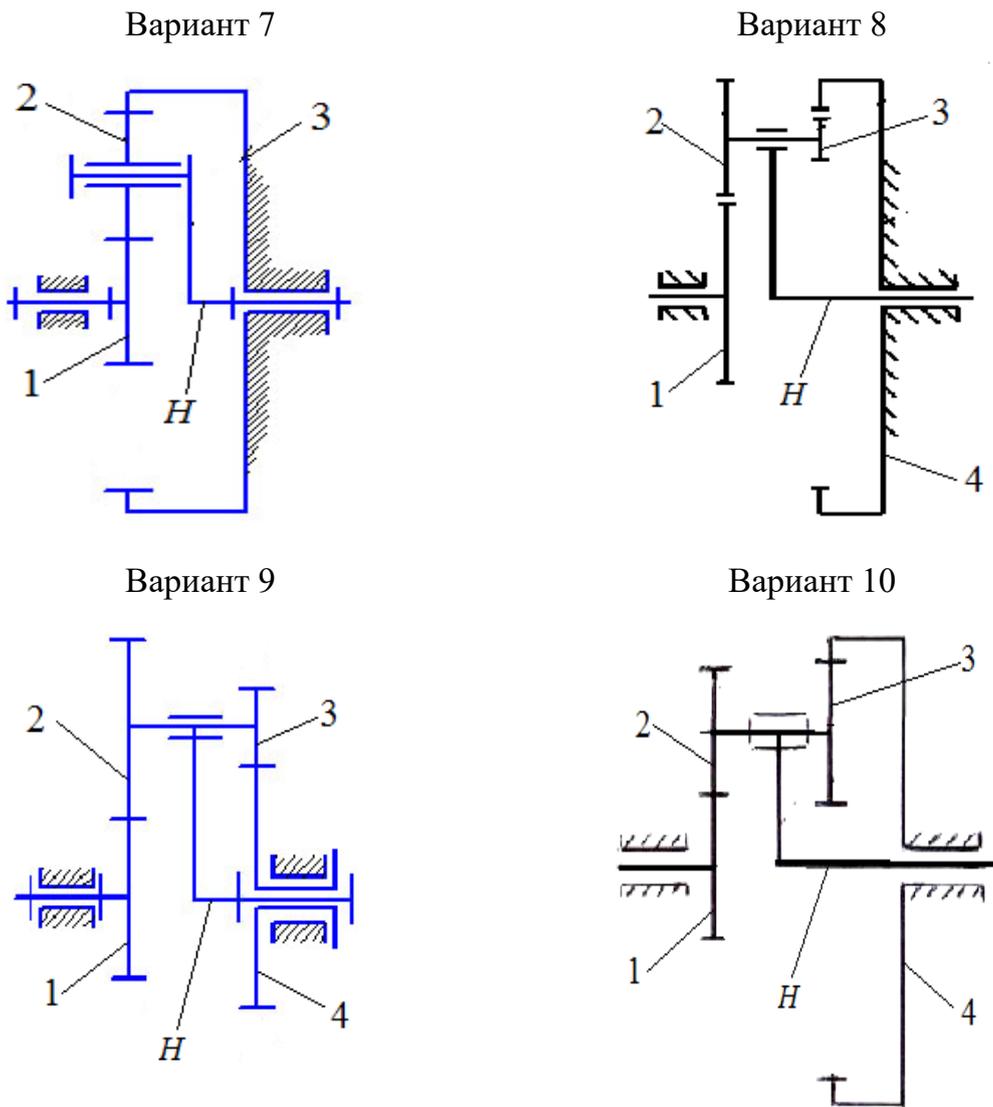


Рис. 72. Схемы планетарных механизмов (окончание)

Вопросы для самоконтроля

1. Из каких звеньев состоят планетарные зубчатые передачи?
2. По какой формуле вычисляют общее передаточное отношение планетарной зубчатой передачи?
3. Какие звенья планетарного зубчатого механизма называют центральными?
4. Какие достоинства имеют планетарные зубчатые передачи по сравнению с простыми зубчатыми передачами?
5. Чем отличается планетарный зубчатый механизм от дифференциального зубчатого механизма?

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы теории механизмов и машин»

Анализ механизма (машины) – исследование структурных, кинематических и динамических свойств механизма (машины).

Ведомое звено – звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил отрицательна или равна нулю.

Ведущее звено – звено, для которого элементарная работа приложенных к нему внешних сил положительна.

Виллиса теорема (теорема зацепления) – общая нормаль в точке контакта сопряженных профилей в любой момент зацепления должна проходить через полюс зацепления, положение которого на межосевой линии определяется заданным относительным движением звеньев.

Внешнее зацепление – зубчатое зацепление, при котором аксоидные поверхности зубчатых колёс расположены одна вне другой.

Внутреннее зацепление – зубчатое зацепление, при котором аксоидные поверхности зубчатых колёс расположены одна внутри другой.

Водило – звено планетарного механизма, которое несёт на себе ось сателлита(ов).

Вращательная пара – одноподвижная пара, допускающая вращательное движение одного звена относительно другого.

Входное звено – звено механизма, которому сообщается движение, преобразуемое в требуемое движение других звеньев. Входное звено соединено с двигателем либо с выходным звеном другого механизма.

Высшая пара – кинематическая пара, в которой требуемое относительное движение звеньев может быть получено только соприкосновением её элементов по линиям или в точках.

Выходное звено – звено механизма, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Выходное звено соединено с исполнительным устройством (рабочим органом, указателем прибора) либо со входным звеном другого механизма.

Вычислительный масштаб (только для ТММ) – отношение действительного значения физической величины к длине отрезка, которым эта величина изображается на чертеже.

Группа Ассура (структурная группа) – плоская кинематическая цепь, присоединение которой к другой кинематической цепи не изменяет числа степеней свободы последней, то есть группа Ассура имеет нулевую степень свободы.

Делительная поверхность зубчатого колеса – соосная поверхность зубчатого колеса, которая является базовой для определения элементов зубьев и их размеров.

Зацепление зубчатое – высшая кинематическая пара с последовательно взаимодействующими элементами двух звеньев.

Звено механизма – одно или несколько жёстко соединённых между собой твёрдых тел, входящих в состав механизма и движущихся как единое целое. Звенья различают входные (ведущие), выходные (ведомые) и промежуточные.

Зуб – выступ на звене для передачи движения посредством взаимодействия с соответствующим выступом другого звена.

Зубчатая передача – передаточный механизм, в котором подвижными звеньями являются зубчатые колёса, образующие со стойкой или водилом вращательные и поступательные пары.

Зубчатое зацепление – высшая кинематическая пара с последовательно взаимодействующими элементами двух звеньев.

Зубчатое колесо – звено механизма, имеющее замкнутую систему зубьев, обеспечивающее непрерывное движение другого звена. Меньшее из зубчатых колёс (обычно ведущее) называется шестернёй, ведомое (обычно большее) – колесом.

Зубчатый механизм эпициклический (планетарный) – зубчатый механизм, в составе которого имеются подвижные оси зубчатых колёс.

Исполнительный орган (звено) машины – твёрдое тело, выполняющее в технологической машине заданные перемещения с целью изменения или контроля формы, размеров и свойств обрабатываемого предмета.

Кинематический анализ механизма – определение параметров движения звеньев по заданному движению входных звеньев.

Кинематический синтез механизма – проектирование кинематической схемы механизма.

Кинематическая пара – соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение (или подвижное соединение двух звеньев).

Кинематическая пара низшая – кинематическая пара, в которой элементом соприкосновения двух звеньев является поверхность.

Кинематическая пара поступательная – одноподвижная пара, допускающая прямолинейно-поступательное движение одного звена относительно другого.

Кинематической пары класс – число связей, наложенных на относительное движение звеньев кинематической пары. В плоских механизмах подвижность пары не связана однозначно с её классом.

Кинематическая схема механизма – графическое изображение механизма с применением условных обозначений звеньев и кинематических пар и с указанием размеров, необходимых для кинематического анализа.

Кинематическая цепь – система звеньев, соединённых между собой кинематическими парами.

Кинестатика – раздел механики, изучающий движение с помощью уравнений движения, записанных в форме уравнений статики с использованием принципа Даламбера.

Класс кинематической пары – число связей, наложенных на относительное движение звеньев.

Коронная шестерня – центральное колесо в планетарном механизме, имеющее внутренние зубья.

Коэффициент полезного действия механизма (КПД) – отношение полезной работы к работе движущих сил.

Кривошип (иногда *коленчатый вал*) – вращающееся звено рычажного механизма, которое может совершать полный оборот вокруг неподвижной оси.

Кривошипно-ползунный механизм – рычажный четырёхзвенный механизм, в состав которого входят кривошип и ползун. Кривошипно-ползунный механизм служит для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-поступательное движение ползуна.

Кулачок – звено, имеющее элемент высшей кинематической пары, выполненный в виде поверхности переменного радиус-вектора.

Кулачковый механизм – трёхзвенный механизм с высшей кинематической парой, в состав которого входит кулачок (входное звено,

рабочая поверхность которого имеет переменную кривизну) и толкатель (коромысло, выходное звено).

Линия зацепления – траектория точки контакта профилей в её абсолютном движении (то есть в движении по отношению к неподвижному звену зубчатой передачи).

Масштабный коэффициент – отношение истинной величины, измеренной в соответствующих единицах, к длине отрезка линии, изображающей эту величину на чертеже, измеренного в миллиметрах.

Машина (от лат. *machina*) – устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов и информации с целью замены или облегчения физического и умственного труда человека.

Машина технологическая – машина, предназначенная для преобразования обрабатываемого предмета, состоящего в изменении его размеров, формы, свойств или состояния.

Механизм – искусственно созданная замкнутая кинематическая цепь, в которой при заданном движении одного или нескольких звеньев относительно любого из них все остальные звенья совершают однозначные движения, или система тел, предназначенная для преобразования движения одних тел (одного или нескольких) в требуемое движение других.

Модуль зубьев – линейная величина в π раз меньше шага зубьев зубчатого колеса.

Начальный механизм (механизм 1-го класса) – группа звеньев, состоящая из входного звена и стойки. Начальный механизм обладает одной степенью подвижности, и дальнейшее наложение кинематических цепей не должно изменять степени подвижности всего механизма.

Начальное звено – входное звено механизма, которому сообщается заданное движение.

Передаточное отношение – отношение угловой скорости ведущего звена к угловой скорости ведомого звена (i).

Передаточный механизм – механизм для воспроизведения функциональной зависимости между перемещениями звеньев, образующих кинематические пары со стойкой.

План положений механизма – графическое изображение взаимного расположения звеньев механизма в определённый момент времени.

План скоростей механизма – совокупность планов скоростей звеньев механизма с одним общим полюсом.

Плана скоростей свойства – фигура на плане скоростей, образованная векторами относительных скоростей, подобна фигуре на звене, образованной отрезками, соединяющими соответствующие точки.

План ускорений механизма – совокупность планов ускорений звеньев механизма с одним общим полюсом.

Плана ускорений свойства – фигура на плане ускорений, образованная векторами относительных ускорений, подобна фигуре на звене, образованной отрезками, соединяющими соответствующие точки.

Планетарный механизм – эпициклический механизм, имеющий в своём составе хотя бы одно звено с подвижной геометрической осью в пространстве и степенью подвижности, равной единице.

Плоский механизм – механизм, подвижные звенья которого совершают плоское движение, параллельное одной и той же плоскости.

Подвижность кинематической пары – число степеней свободы в относительном движении её звеньев. Различают одно-, двух-, трёх-, четырёх-, пятиподвижные кинематические пары.

Подвижности механизма – это независимые возможные перемещения его звеньев. Число подвижностей механизма и число степеней свободы механизма – синонимы.

Понижающая передача (редуктор) – передача, в которой угловая скорость ведомого звена меньше угловой скорости ведущего звена.

Полезная работа машины – работа движущих сил за вычетом работы, затраченной на преодоление сил вредного сопротивления в машине.

Ползун – звено рычажного механизма, образующее поступательную пару с неподвижным звеном-направляющей.

Полюс зацепления (зубчатой передачи) – точка или одна из точек касания начальных поверхностей зубчатых колёс передачи.

Поступательная пара – одноподвижная пара, допускающая прямолинейно-поступательное движение одного звена относительно другого.

Привод машины – система, состоящая из двигателя и связанных с ним устройств для приведения в движение одного или нескольких твёрдых тел, входящих в состав машины.

Профиль зуба – линия пересечения боковой поверхности зуба с плоскостью, перпендикулярной к оси вращения колеса.

Расстояние межосевое (передачи) – кратчайшее расстояние между осями вращения колёс.

Реакции связей – силы, учитывающие эффект действия связей и действующие на материальные точки механической системы со стороны материальных тел, осуществляющих связи, наложенные на эту систему.

Рычажный механизм – механизм, звенья которого образуют только низшие (поступательные, вращательные, цилиндрические и сферические) кинематические пары.

Сателлит – зубчатое колесо планетарной передачи с подвижной осью вращения. Сателлит одновременно вращается вокруг своей оси и совершает движение вместе с водилом.

Солнечное (центральное) зубчатое колесо планетарного механизма – зубчатое колесо, вокруг оси которого вращается сателлит.

Силы движущие – силы, приложенные к ведущему звену механизма и совершающие механическую работу.

Силы инерции – силы обратного воздействия ускоряемого тела на тела, вызывающие его ускорение.

Силы вредного сопротивления – силы, приложенные к звеньям механизма и совершающие отрицательную работу (не являющуюся работой полезных сопротивлений, которая также отрицательна). Силы вредных сопротивлений делятся на *силы трения* и *силы сопротивления среды*.

Силы полезного сопротивления – силы, совершающие работу, требуемую от механизма.

Силы сопротивления – силы из числа приложенных к звеньям механизма, которые стремятся замедлить движение ведущего звена, их элементарная работа отрицательна. Различают *силы полезного и вредного сопротивления*.

Силы реактивные (реакции) – силы, возникающие в кинематических парах и представляющие собой давление звеньев друг на друга.

Силы тяжести – вес самой машины и вес её звеньев.

Силы трения – силы сопротивления, возникающие на поверхности двух соприкасающихся тел при относительном их движении. По видам относительного движения различают: *трение скольжения* (в высших и низших кинематических парах) и *трение качения* (в высших парах).

Силовой анализ механизма – определение реактивных и движущих сил.

Синтез механизма – проектирование схемы механизма по заданным его свойствам. Синтез включает в себя выбор структурной схемы и определение постоянных параметров выбранной схемы механизма по заданным его свойствам.

Солнечное колесо – центральное колесо в планетарном механизме, имеющее внешние зубья.

Степень подвижности механизма – целое число (W), показывающее, сколько независимых движений нужно подвести к механизму, чтобы на выходе получить одно или наоборот.

Стойка – звено, принимаемое за неподвижное.

Структурная схема механизма – схема механизма, указывающая стойку, подвижные звенья, виды кинематических пар и их взаимное расположение. Может изображаться графически, либо в виде цифровой, либо буквенно-цифровой записи.

Структурный анализ механизма – это определение количества звеньев и кинематических пар, классификация кинематических пар, определение степени подвижности механизма, а также установление класса и порядка механизма.

Теория машин и механизмов (ТММ) – наука, изучающая строение, кинематику и динамику механизмов и машин в связи с их анализом и синтезом.

Технологическая машина – машина, предназначенная для преобразования обрабатываемого предмета, состоящего в изменении его размеров, формы, свойств или состояния.

Толкатель – звено кулачкового механизма, взаимодействующее с рабочей поверхностью кулачка своим наконечником (башмаком), который может быть острым (точечный или линейный), плоским, грибовидным и роликовым, и совершающее поступательное или вращательное движение.

Формула Чебышева – формула, которая производит расчёт степени свободы плоских механизмов.

Центральные зубчатые колеса планетарного механизма – зубчатые колеса, имеющие неподвижную геометрическую ось в пространстве.

Шатун – звено рычажного механизма, образующее кинематические пары только с подвижными звеньями (совершает сложноплоское движение относительно стойки).

Раздел 4

ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ДЕТАЛИ МАШИН

Напомним, что такое машина и деталь машины.

Машина (от лат. *machina*) – механическое устройство, выполняющее движения с целью преобразования энергии, материалов или информации.

Деталь – наименьшая неделимая (не разбираемая) часть машины, то есть деталь – это часть машины, которую изготавливают без сборочных операций.

История использования деталей машин общего назначения начинается с глубокой древности.

Развитие теории и расчёта деталей машин связано со многими именами русских учёных: математиком и механиком Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821 – 1894); «отцом русской авиации» Николаем Егоровичем Жуковским (1847 – 1921); Виктором Львовичем Кирпичёвым, автором первого учебника по деталям машин.

Цель конструирования – наиболее полное решение поставленной функциональной задачи. Для решения этой задачи одинаково важны геометрическая форма (собственно конструкция), материалы и технология.

Все основные рабочие процессы осуществляются машинами или с применением средств механизации. Современные машины многократно повышают производительность труда человека и решают задачи, порой непосильные человеку. Например, мощность энергетических машин достигает миллионов киловатт.

Конструирование – это творческий процесс создания оптимального варианта машины в документах (главным образом в чертежах) на основе теоретических расчетов, конструкторского, технологического и эксплуатационного опыта.

Успешная работа деталей машин заключается в обеспечении работоспособности и надёжности.

Работоспособность деталей машин определяется как свойство выполнять свои функции с заданными показателями.

Надёжность определяется как свойство детали машины выполнять свои функции, сохраняя заданные показатели в течение заданного

времени и, по существу, представляет собой перспективы сохранения работоспособности.

В процессе работы детали машины подвергаются не только расчётным нагрузкам, которые конструктор ожидает и учитывает, но и попадают во внештатные ситуации, которые очень трудно предусмотреть, как, например, удары, вибрация, загрязнение, экстремальные природные условия и т. п. При этом возникает отказ – утрата работоспособности вследствие разрушения деталей или нарушения их правильного взаимодействия.

Надёжность трудно рассчитать количественно, она обычно оценивается как вероятность безотказной работы на основании статистики эксплуатации группы идентичных машин.

Прочность – способность детали сопротивляться разрушению или необратимому изменению формы (деформации); является важнейшим критерием работоспособности и надёжности. Невыполнение условия прочности автоматически делает бессмысленными все другие требования и критерии качества машин.

Каждый шаг конструктора сопровождаются *расчётами*. Это естественно, так как грамотно выполненный расчёт намного проще и в сотни раз дешевле экспериментальных испытаний.

Рассмотрим зубчатые передачи как наиболее распространённые в машиностроении и приборостроении. Их применяют для передачи вращательного движения с одного вала на другой или для преобразования вращательного движения в поступательное и изменение скорости вращения валов (рис. 73, а).

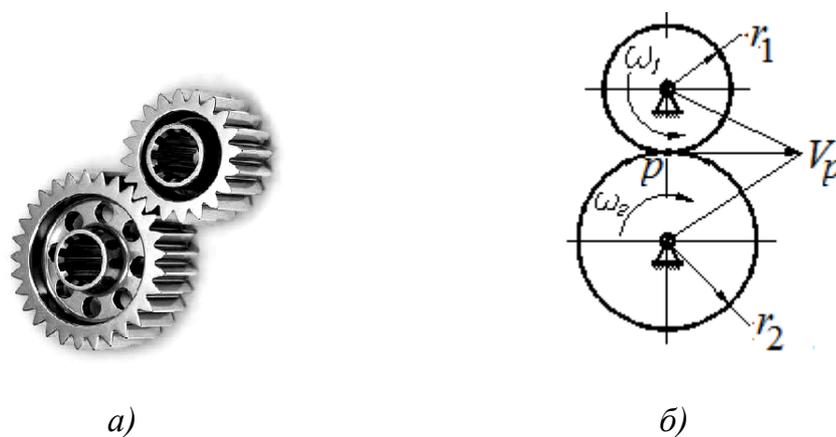


Рис. 73. Зубчатая передача: а – общий вид; б – схема

Любую зубчатую передачу можно схематично представить в виде двух начальных поверхностей, контактирующих между собой, а плоскую передачу – в виде двух начальных окружностей, перекатывающихся друг по другу без скольжения и контактирующих в полюсе p (рис. 73, б).

Основной характеристикой преобразования вращательного движения зубчатых передач является *передаточное отношение* – отношение угловой скорости ведущего звена механизма к угловой скорости ведомого звена.

Передаточное отношение обозначается латинской буквой i с индексами. Индексы указывают на то, от какого колеса (1-й индекс) к какому (2-й индекс) вычисляется передаточное отношение. Например, i_{12} обозначает передаточное отношение от первого колеса ко второму. Согласно определению, $i_{12} = \omega_1/\omega_2 = \pm r_2 / r_1$.

Знаки «+» и «-» перед отношением радиусов появились в связи с тем, что в отличие от угловых скоростей радиусы не могут быть отрицательными, и знак «-» относится к данной схеме (см. рис. 73, б), а знак «+» имел бы место при внутреннем зацеплении колёс.

Передаточным числом называется отношение числа зубьев ведомой шестерни к числу зубьев ведущей $u = z_1/z_2$.

Величины i и u могут меняться или оставаться постоянными за время одного оборота ведущего вала.

В современном машиностроении применяются зубчатые колёса самых разнообразных конструкций. Конструктивные формы и разме-

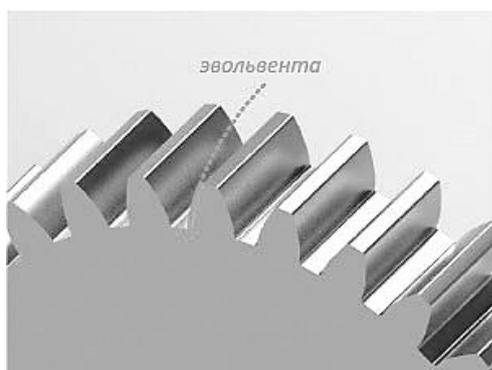


Рис. 74. Зубчатое колесо с эвольвентным профилем

ры зубчатого колеса зависят от нагрузок. Наибольшее распространение получили цилиндрические зубчатые эвольвентные колёса с профилем, предложенным Леонаром Эйлером в 1754 г. Преимущество этого профиля состоит в простоте изготовления, достаточной высокой нагрузочной способности, малой чувствительности к неточностям межцентрового расстояния (рис. 74).

Рассмотрим основные размеры зубчатых колёс с эвольвентным профилем (рис. 75). Эвольвентные профили удовлетворяют условию

синтеза зубчатого зацепления – получению заданного u_{12} . Выполнение дополнительного условия синтеза зависит от размеров зубьев, которые удобно задавать в долях, какой-либо одной линейной величины.

Выразим длину некоторой окружности, имеющей диаметр d , через число зубьев z :

$$\pi \cdot d = P \cdot z,$$

где P – окружной шаг, то есть расстояние, измеренное по дуге делительной окружности диаметром d между двумя соответствующими точками соседних зубьев;

$$d = (P/\pi) \cdot z \text{ или } d = m \cdot z, \text{ откуда } m = P/\pi = d/z,$$

где m – модуль зуба, равный отношению окружного шага P к числу π , или доля делительного диаметра d , приходящаяся на один зуб. Модуль зуба выбирается из ряда рациональных чисел от 0,05 до 100.

Делительная окружность r – характеристика одного зубчатого колеса, а начальные окружности r_f дают характеристику зацепления двух зубчатых колёс, и диаметры этих окружностей зависят от межосевого расстояния.

Делительная окружность делит зуб на две части: *головка зуба* h_a – часть зуба, расположенная между делительной окружностью r и окружностью вершин r_a ; *ножка зуба* h_f – часть зуба, расположенная между делительной окружностью r и окружностью впадин r_f .

Общая высота зуба $h = h_a + h_f$, причём $h_f > h_a$.

При проектировании зубчатой передачи конструктор решает несколько задач:

1) выбирает тип зубчатого механизма, его передаточное отношение и число зубьев колёс;

2) проводит проектный прочностной расчёт механизма и определяет величину межосевого расстояния или модуль зубчатых колёс (модуль зубчатых колёс округляется до ближайшей величины из стандартного ряда модулей);

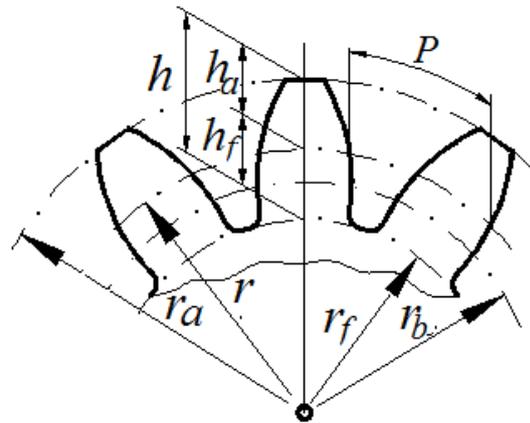


Рис. 75. Профиль зубчатого колеса

3) проводит геометрический расчёт для благоприятного или оптимального сочетания качественных показателей зубчатой передачи.

Пример. Провести расчёт эвольвентной зубчатой передачи наибольшей прочности по излому зубьев (*НИ*), $z_1 = 17$, $z_2 = 22$, модуль зацепления $m = 10$ мм. Ведущее колесо 2. Угол профиля $\alpha = 20^\circ$; коэффициент высоты головки зуба $h_a^* = 1$; коэффициент радиального зазора $c^* = 0,25$.

В соответствии с прочностными требованиями для числа зубьев 17 и 22 определяем коэффициенты смещения $x_1 = 0,42$; $x_2 = 0,74$.

Все расчёты геометрических параметров необходимо выполнять тщательно, при проверках добиваться совпадения результатов с точностью до двух десятичных знаков.

Решение

1. Коэффициент суммы смещения

$x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0,42 + 0,74 = 1,16$, где x_1 и x_2 , величины алгебраические.

2. Угол зацепления

$\text{inv } \alpha_w = 2x_\Sigma \text{tg } \alpha / (z_1 + z_2) + \text{inv } \alpha = 2 \cdot 1,16 \cdot 0,3640 + 0,01490 = 0,03655$.

По эвольвентной функции (табл. 14) определим $\alpha_w = 26^\circ 37'$.

Расчёт величины $\text{inv } \alpha_w$ необходимо делать с точностью до шестого десятичного знака и округлять до пятого знака. Угол зацепления определяется с точностью до одной минуты.

3. Межосевое расстояние

$a_w = (z_1 + z_2)m/2 \cdot (\cos \alpha / \cos \alpha_w) = (17 + 22)10/2 \cdot (0,9397/0,8941) = 204,95$ мм.

Значение косинусов и их отношение определяется с точностью до четырех десятичных знаков, a_w и последующие линейные величины вычисляются с точностью до второго десятичного знака.

Определение угла α_w

Угол	Минута					
	Град.	0	10	20	30	40
25	0,0300	0,0306	0,0313	0,0319	0,0326	0,0333
26	0,0339	0,0346	0,0354	0,0361	0,0368	0,0375

4. Делительное межосевое расстояние

$$a = (z_1 + z_2)m = (\Sigma z \cdot m)/2 = ((17 + 22)10)/2 = 390/2 = 195 \text{ мм.}$$

5. Делительные радиусы

$$r_1 = z_1 \cdot m/2 = 17 \cdot 10/2 = 17 \cdot 5 = 85 \text{ мм;}$$

$$r_2 = z_2 \cdot m/2 = 22 \cdot 10/2 = 22 \cdot 5 = 110 \text{ мм.}$$

6. Основные радиусы

$$r_{e1} = r_1 \cdot \cos \alpha = 85 \cdot 0,9397 = 79,87 \text{ мм;}$$

$$r_{e2} = r_2 \cdot \cos \alpha = 110 \cdot 0,9397 = 103,37 \text{ мм.}$$

7. Передаточное число

$$u = z_2/z_1 = 22/17 = 1,29.$$

8. Начальные радиусы

$$r_{w1} = a_w / (u + 1) = 204,95 / (1,29 + 1) = 89,50 \text{ мм;}$$

$$r_{w2} = a_w \cdot u / (u + 1) = 204,95 \cdot 1,29 / (1,29 + 1) = 115,45 \text{ мм.}$$

$$\text{Проверим: } a_w = r_{w1} + r_{w2} = 89,50 + 115,45 = 204,95 \text{ мм.}$$

9. Коэффициент воспринимаемого смещения – отношение воспринимаемого смещения к модулю

$$y = (a_w - a)/m = (204,95 - 195)/10 = 0,995. \text{ Значение } y \text{ подсчитывается с точностью до трёх знаков.}$$

$$\text{Проверим: } a_w = a + y \cdot m = 195 + 0,995 \cdot 10 = 204,95 \text{ мм.}$$

10. Коэффициент уравнительного смещения

$$\Delta y = x_\Sigma - y = 1,16 - 0,995 = 0,165.$$

11. Радиусы вершин зубьев

$$r_{a1} = r_1 + (h_a^* + x_1 - \Delta y)m = 85 + (1 + 0,42 - 0,165)10 = 97,55 \text{ мм;}$$

$$r_{a2} = r_2 + (h_a^* + x_2 - \Delta y)m = 110 + (1 + 0,74 - 0,165)10 = 125,75 \text{ мм.}$$

12. Радиусы впадин

$$r_{f1} = r_1 - (h_a^* + c^* - x_1)m = 85 - (1 + 0,25 - 0,42)10 = 76,70 \text{ мм;}$$

$$r_{f2} = r_2 - (h_a^* + c^* - x_2)m = 110 - (1 + 0,25 - 0,74)10 = 104,90 \text{ мм.}$$

13. Высоты зубьев

$$h_1 = r_{a1} - r_{f1} = 97,55 - 76,70 = 20,85 \text{ мм;}$$

$$h_2 = r_{a2} - r_{f2} = 125,75 - 104,90 = 20,85 \text{ мм.}$$

Проверим: $h_1 = h_2 = 20,85 \text{ мм.}$

14. Толщина зубьев

$$s_1 = (\pi/2 + 2x_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha)m = (3,1415/2 + 2 \cdot 0,42 \cdot 0,3640)10 = 18,77 \text{ мм;}$$

$$s_2 = (\pi/2 + 2x_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha)m = (3,1415/2 + 2 \cdot 0,74 \cdot 0,3640)10 = 21,09 \text{ мм.}$$

15. Шаг зубьев

$$P = \pi \cdot m = 3,1415 \cdot 10 \approx 31,42 \text{ мм.}$$

Расчёт некоторых геометрических и кинематических показателей, определяющих качество зубчатой передачи

Нагрузочная способность и долговечность зубчатой передачи определяется материалом и технологией изготовления зубчатых колёс, а также показателями, определяющими качество зацепления.

К числу основных качественных показателей относятся следующие:

1. *Коэффициент повышения контактной прочности* показывает приблизительно (теоретически), во сколько раз контактная прочность передачи, имеющей угол зацепления α_w , выше по сравнению с передачей, у которой $\alpha_w = 20^\circ$ при прочих равных параметрах (модулях, числах зубьев колёс и др.). Смысл этого показателя становится яснее, если вспомнить, что с увеличением угла зацепления возрастают радиусы кривизны рабочих поверхностей зубьев, а следовательно, и допустимая нагрузка на зубья.

Для нашего примера

$$\varphi_k = \operatorname{tg} \alpha_w / \operatorname{tg} \alpha = 0,5012/0,3640 = 1,38.$$

2. *Коэффициент торцевого перекрытия* ε_α — отношение угла торцевого перекрытия φ_α зубчатого колеса цилиндрической передачи к его угловому шагу $\tau = 360/z$.

Этот коэффициент характеризует плавность работы зацепления. С уменьшением ε_α (особенно до величины, меньшей 1,2) возрастают колебания угловых скоростей зубчатых колёс, а следовательно, и дополнительные динамические нагрузки. Поэтому коэффициент тор-

цевого перекрытия косвенно влияет на нагрузочную способность передачи. Уменьшение его до $\varepsilon_\alpha < 1,2$ нежелательно, хотя передача будет работать при предельном значении $\varepsilon_\alpha = 1$.

Коэффициент торцевого перекрытия может быть определен по формуле

$$\varepsilon_\alpha = (z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1} + z_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} - (z_1 + z_2) \operatorname{tg} \alpha_w) / 2\pi.$$

Значения углов α_{a1} и α_{a2} определяются соответственно тригонометрическими функциями

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1} / r_{a1} \text{ и } \cos \alpha_{a2} = r_{b2} / r_{a2}.$$

Для нашего примера

$$\cos \alpha_{a1} = r_{b1} / r_{a1} = 79,87 / 97,55 = 0,8187, \text{ тогда } \alpha_{a1} = 35^\circ 03' \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_{a1} = 0,7015; \\ \cos \alpha_{a2} = r_{b2} / r_{a2} = 103,37 / 125,75 = 0,8220, \text{ тогда } \alpha_{a2} = 34^\circ 42' \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_{a2} = 0,6924.$$

Отсюда $\varepsilon_\alpha = 1,21$.

3. *Удельное скольжение в контактной точке* профиля зуба – отношение скорости скольжения контактных точек к скорости общей точки по профилю зуба данного зубчатого колеса в направлении скольжения.

От его значения зависит износостойкость зубьев и стойкость их против заедания, которые возрастают по мере уменьшения удельного скольжения. Удельное скольжение переменное вдоль профиля зуба и достигает максимума в одной из крайних точек активного профиля зуба. В полюсе зацепления оно равно нулю.

Наибольших значений удельные скольжения достигают обычно на ножках зубьев (в нижних точках активных профилей).

Для рассматриваемой передачи они равны

$$\text{у шестерни } v_{p1} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / [\operatorname{tg} \alpha_w - u(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)] = -2,76; \\ \text{у колеса } v_{p2} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / [u \cdot \operatorname{tg} \alpha_w - (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)] = -1,28.$$

Наибольшее значение удельных скольжений на головках зубьев (в верхних точках активных профилей)

$$\text{у шестерни } v_{h1} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / u \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1} = 0,51; \\ \text{у колеса } v_{h2} = [(\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)(u + 1)] / u \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} = 0,63.$$

4. *Коэффициент формы зуба* Y характеризует соотношение высоты зуба и его толщины у основания.

От величины Y зависит прочность зуба на излом. Чем больше Y , тем большую нагрузку может выдержать зуб. Формулы для вычисления коэффициента формы зуба довольно сложны, и поэтому здесь не приводятся.

Практическое задание

Задача. Провести расчёт некоторых геометрических параметров цилиндрической зубчатой эвольвентной передачи. Начертить эскиз трёх зубьев (см. рис. 75). Варианты взять из табл. 15.

Таблица 15

Вариант	Число зубьев, коэффициент суммы смещения	Вариант	Число зубьев, коэффициент суммы смещения
1	$z_1 = 14; z_2 = 31; x_{\Sigma} = 1$	6	$z_1 = 17; z_2 = 50; x_{\Sigma} = 1$
2	$z_1 = 15; z_2 = 42; x_{\Sigma} = 1$	7	$z_1 = 18; z_2 = 42; x_{\Sigma} = 1$
3	$z_1 = 17; z_2 = 28; x_{\Sigma} = 1$	8	$z_1 = 20; z_2 = 38; x_{\Sigma} = 1$
4	$z_1 = 15; z_2 = 38; x_{\Sigma} = 1$	9	$z_1 = 22; z_2 = 42; x_{\Sigma} = 1$
5	$z_1 = 18; z_2 = 25; x_{\Sigma} = 1$	10	$z_1 = 22; z_2 = 34; x_{\Sigma} = 1$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие механизмы называются передачами?
2. Что называют эвольвентой окружности?
3. Какую окружность зубчатого колеса называют начальной?
4. Какую окружность зубчатого колеса называют делительной?
5. Какую окружность зубчатого колеса называют основной?
6. Что называется высотой головки зуба колеса?
7. Что называют высотой ножки зуба колеса?
8. Что называют шагом зубчатого колеса?
9. Что называют модулем зубчатого колеса?
10. Что такое линия зацепления?
11. Какой угол называется углом зацепления?
12. Что такое профиль зуба?
13. Как рассчитать модуль, зная диаметр окружности выступов?
14. Как, зная модуль и число зубьев колеса, рассчитать диаметр окружности впадин и выступов?
15. Как, зная модуль и число зубьев колеса, рассчитать диаметр делительной окружности?

Подшипники качения

Подшипники являются опорами валов и вращающихся осей. Они воспринимают нагрузки, приложенные к валу или оси, и передают их на корпус машины. Качество подшипников в значительной степени определяет надёжность и долговечность машины. Наибольшее применение получили подшипники качения. Применение этих подшипников позволило заменить трение скольжения на трение качения, при котором коэффициент трения $f = 0,0015 \dots 0,0060$. Конструкция позволяет производить их в больших количествах различных размеров. Они стандартизированы и изготавливаются на ряде специализированных заводов.

Практический расчёт (подбор) подшипников качения по динамической грузоподъёмности

Экспериментально установлена грузоподъёмность каждого типоразмера подшипника. Поэтому при проектировании машин подшипники качения не конструируют и не рассчитывают, а подбирают из числа стандартных по условным формулам.

Условие подбора

$$C_{r \text{ расч}} \leq C_0,$$

где $C_{r \text{ расч}}$ – расчётное значение динамической грузоподъёмности принятого подшипника, кН, C_0 – базовая динамическая грузоподъёмность для принятого подшипника, кН (выбирается по справочной литературе).

Если расчётное значение больше базовой для принятого подшипника, то переходят к более тяжёлой серии или принимают другой тип подшипника (например, вместо шарикового – роликовый) и расчёт повторяют.

Если для обеих опор вала принимают подшипники одного типа и размера, то расчёт и подбор подшипника ведут по наиболее нагруженной опоре. В этом случае уменьшается количество типоразмеров подшипников в конструкции машины (механизма).

Пример. Для вала редуктора подобрать подшипники качения. Нагрузка нереверсивная, спокойная. Ресурс работы подшипника $L_h \geq 12\,000$ ч – механизмы для односменной работы при переменном режиме работы. Величина осевой нагрузки $F_a = 570$ кН. Реакции опор $R_{AY} = 1394$ Н, $R_{BY} = 2364$ Н, $R_{AX} = 2336$ Н, $R_{BX} = 335$ Н. Диаметр вала $d = 40$ мм, угловая скорость вала $\omega = 24,8$ с⁻¹ (рис. 76).

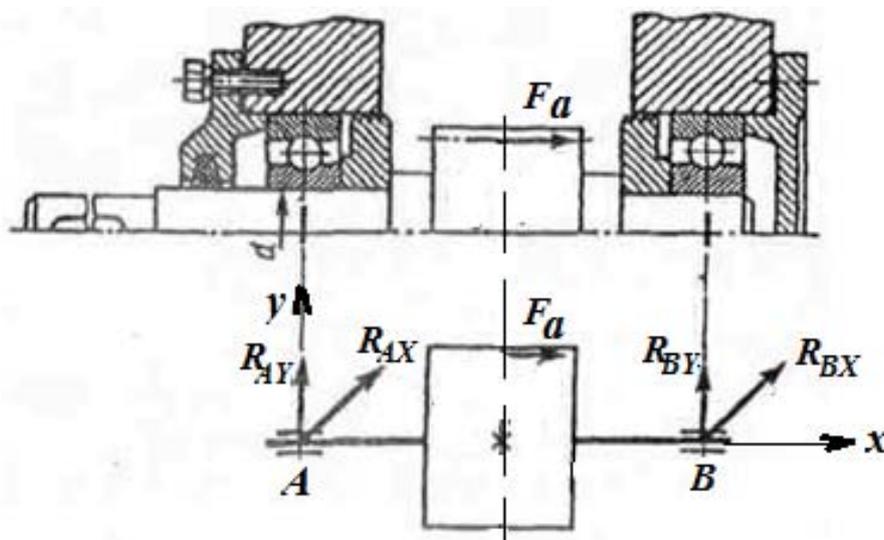


Рис. 76. Пример установки вала на шариковых подшипниках качения

Решение

1. Определим радиальные опорные реакции для каждой опоры вала:

для опоры A

$$R_A = \sqrt{R_{AY}^2 + R_{AX}^2} = \sqrt{1394^2 + 2336^2} \text{ Н} = 2720 \text{ Н};$$

для опоры B

$$R_B = \sqrt{R_{BY}^2 + R_{BX}^2} = \sqrt{2364^2 + 335^2} \text{ Н} = 2390 \text{ Н}.$$

Из расчёта следует, что более нагруженной является опора A , по которой и ведём дальнейший расчёт подшипника.

2. Выберем тип подшипника 208. По условиям работы подшипникового узла (небольшая угловая скорость, малая осевая нагрузка) наметим для обеих опор шариковый радиальный подшипник лёгкой серии диаметров 2 (внутренний диаметр $d = 08 \cdot 5 = 40$, мм), узкой

серии ширины 0, который состоит из двух колец (внутреннего 1 и наружного 2,) тел качения 3 и сепаратора 4 (от лат. *separator* – *отделитель*), разделяющего тела качения друг от друга (рис. 77).

Радиальные шариковые подшипники предназначены для восприятия главным образом радиальных нагрузок. Однако они кроме радиальной нагрузки могут передавать осевую нагрузку в пределах 70 % от неиспользованной радиальной нагрузки. При использовании этих подшипников предъявляются менее высокие требования к соосности опор и жёсткости валов. Они дешевле подшипников других типов, допускают более простой монтаж и демонтаж. Поэтому их наиболее часто используют в различных машинах и механизмах.

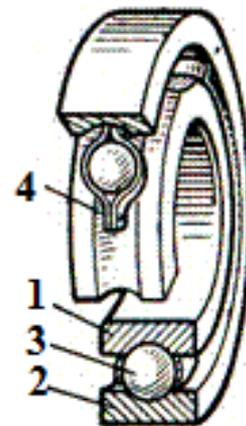


Рис. 77. Устройство шарикового радиального подшипника

По табл. ГОСТ 8338-75 определим характеристики подшипника 208:

- базовая динамическая радиальная грузоподъёмность $C = 32\,000\text{ Н}$,
- базовая статическая радиальная грузоподъёмность $C_0 = 17\,800\text{ Н}$.

3. Расчётные коэффициенты.

В соответствии с условиями работы подшипника примем

$V = 1$ – коэффициент вращения при вращении внутреннего кольца подшипника;

$K_B = 1,3$ – коэффициент безопасности, учитывающий характер нагрузки, для спокойной нагрузки подшипникового узла;

$K_T = 1$ – температурный коэффициент, так как рабочая температура подшипникового узла не должна превышать 65° .

4. Коэффициент осевого нагружения e .

При осевой нагрузке $R_a = F_a = 570\text{ кН}$ вычисляем отношение $R_a/C_0 = 570/17\,800 = 0,032$.

Для подшипника 208 $e = 0,23$.

Коэффициент радиальной нагрузки X и коэффициент осевой нагрузки Y , которые зависят от отношения

$$R_a/V_r = 570/2720 = 0,21 \leq e = 0,23,$$

тогда примем $X = 1$ и $Y = 0$.

5. Вычислим эквивалентную динамическую радиальную нагрузку наиболее нагруженного подшипника (опора A):

$$R_E = (X \cdot V \cdot R_B + Y \cdot R_a) \cdot K_B \cdot K_T = (1 \cdot 1 \cdot 2720 + 0) \cdot 1,3 \cdot 1 = 3536 \text{ Н.}$$

6. Расчётная динамическая радиальная грузоподъёмность подшипника

$$C_{r \text{ расч}} = R_E \sqrt[3]{573 \omega L_n / 10^6} = 3536 \sqrt[3]{537 \cdot 24,8 \cdot 12 \cdot 10^3 / 10^6} = 19\,600 \text{ Н} < C = 32\,000 \text{ Н.}$$

Вывод: принятый подшипник 208 удовлетворяет заданному режиму работы.

Практическое задание

Задача. Условие смотреть в примере, а варианты – в табл. 16.

Таблица 16

Исходные данные	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Величина осевой нагрузки F_a , Н	325	541	620	242	298	401	483	495	451	407
Реакция опор:										
R_{AV}	124	110	356	150	56	380	194	180	148	119
R_{BV}	691	1284	508	574	802	844	1233	1207	652	950
$R_{AX} = R_{BX}$	1105	1750	1599	797	1154	1376	1640	1598	1802	1389
Диаметр вала в месте посадки подшипников d , мм	35	40	65	30	30	35	30	30	30	35
Угловая скорость вала ω , с ⁻¹	20	18	8	36	26	10	15	13	11	24

Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы конструирования и детали машин»

Вал – деталь машин (механизмов), предназначенная для передачи крутящего момента вдоль своей осевой линии.

Деталь – наименьшая неделимая (не разбираемая) часть машины (механизма).

Жёсткость – способность детали выдерживать заданные нагрузки без изменения формы и размеров.

Изнашивание – процесс отделения материала с поверхности твёрдого тела и накопления его остаточной деформации при трении, проявляющийся в постепенном изменении размеров и форм тел.

Износостойкость – способность детали сопротивляться изнашиванию.

Надёжность – способность машин выполнять заданные функции, сохраняя во времени значения установленных эксплуатационных показателей в заданных пределах, соответствующих заданным режимам и условиям их использования, технического обслуживания, ремонта, хранения и транспортирования.

Ось – деталь для поддержания вращающихся частей механизма, не передающая крутящий момент.

Отказ – событие, нарушающее работоспособность.

Прочность – способность материала детали в определённых условиях и пределах воспринимать нагрузки не разрушаясь и без значительных остаточных деформаций. Критериями прочности материала являются: предел текучести, предел прочности, предел выносливости.

Работоспособность – состояние изделия, при котором в данный момент времени его основные параметры находятся в пределах, установленных требованиями нормативно-технической документации и необходимых для выполнения его функциональной задачи.

Стойкость к специальным воздействиям – способность детали сохранять работоспособное состояние при проявлении специальных воздействий, таких как теплостойкость, вибростойкость, радиационная стойкость, коррозионная стойкость и т. п.

Эквивалентная динамическая нагрузка подшипника качения (ПК) – постоянная нагрузка, под действием которой ПК будет иметь такую же долговечность, как и в действительных условиях нагружения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебная дисциплина «Механика» рассматривает общетехнические вопросы структуры, кинематики и динамики механизмов современной техники.

Обучение происходит на лекционных занятиях, где осуществляется сообщение теоретических основ дисциплины, и на лабораторных и практических занятиях, позволяющих произвести закрепление полученных теоретических знаний и приобрести практические умения и навыки при решении задач.

При освоении теоретического материала особое внимание следует обратить на формирование устойчивых знаний и понимание основных понятий дисциплины, без которых невозможны успешное изучение последующих тем и выполнение лабораторно-практических работ. В ходе изучения теоретического материала студенты должны усвоить методы поиска и оценки информации, этапы конструкторской и проектной деятельности, основные методы поиска оптимальных решений технических задач.

Учебное пособие основано на последовательном усложнении учебных вопросов, а также сопровождается списком соответствующих информационных ресурсов, что позволяет студентам учиться работать с печатными и электронными источниками информации.

Выполнение индивидуальных заданий по каждому разделу позволяет сформировать у студентов навыки самостоятельного решения конкретных вопросов при проектировании новых машин, механизмов и приборов.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Доронин, Ф. А.* Теоретическая механика : учеб. пособие / Ф. А. Доронин. – СПб. : Лань, 2018. – 480 с. – ISBN 978-5-8114-2585-3.

2. *Павлов, П. А.* Сопротивление материалов : учебник / П. А. Павлов [и др.] ; под ред. Б. Е. Мельникова. – 5-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2019. – 556 с. – ISBN 978-5-8114-4208-9.

3. *Шевченко, А. П.* Теория механизмов и машин : учеб. пособие / А. П. Шевченко, Б. А. Беляев ; под ред. проф. А. П. Шевченко ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 192 с. – ISBN 978-5-9984-0848-9.

4. *Балдин, В. А.* Детали машин и основы конструирования : учеб. для бакалавриата и специалитета / В. А. Балдин, В. В. Галенко ; под ред. В. В. Галенко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2018. – 333 с. – ISBN 978-5-534-06285-4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
------------------	---

ВВЕДЕНИЕ.....	4
---------------	---

Раздел 1. ОСНОВЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1. СТАТИКА	5
Проекция силы на ось	5
<i>Практическое задание</i>	7
Равновесие плоской системы сил (общий случай)	9
Статически определимые стержневые системы, работающие на растяжение-сжатие	12
<i>Практическое задание</i>	15
Расчёт балок.....	17
<i>Практическое задание 1</i>	18
<i>Практическое задание 2</i>	21
Определение реакций опор в составных конструкциях.....	22
<i>Практическое задание</i>	25
Определение координат центра тяжести плоской фигуры (пластины)	27
<i>Практическое задание</i>	29
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	31
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Статика»	32
2. КИНЕМАТИКА.....	34
<i>Практическое задание 1</i>	36
<i>Практическое задание 2</i>	37
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	38
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Кинематика»	38
3. ДИНАМИКА.....	40
Принцип Даламбера для материальной точки.....	41
<i>Практическое задание</i>	45
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	48
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Динамика».....	48

Раздел 2. ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

Расчёт стержней при центральном растяжении-сжатии	52
<i>Практическое задание</i>	54
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	56
Расчёт на прочность и жёсткость плоского тела	56
<i>Практическое задание</i>	59
Расчёт балок, работающих на поперечный изгиб.....	60
<i>Практическое задание 1</i>	68
<i>Практическое задание 2</i>	69
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	71
Кручение	72
<i>Практическое задание</i>	76
Кручение с изгибом.....	78
Расчёт вала, работающего на кручение с изгибом	79
<i>Практическое задание</i>	84
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	85
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы сопротивления материалов».....	86

Раздел 3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Кинематический анализ кривошипно-ползунного механизма.....	90
<i>Практическое задание</i>	93
Кинетостатический расчёт кривошипно-ползунного механизма	94
<i>Практическое задание</i>	96
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	96
Кулачковый механизм	97
<i>Практическое задание</i>	100
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	102
Планетарный механизм.....	102
<i>Практическое задание</i>	105
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	107
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы теории механизмов и машин».....	108

Раздел 4. ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ДЕТАЛИ МАШИН

Расчёт некоторых геометрических и кинематических показателей, определяющих качество зубчатой передачи	122
<i>Практическое задание</i>	124
<i>Вопросы для самоконтроля</i>	124
Подшипники качения	125
Практический расчёт (подбор) подшипников качения по динамической грузоподъёмности	125
<i>Практическое задание</i>	128
Словарь терминов, определений, понятий по разделу «Основы конструирования и детали машин»	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	131

Учебное издание

БЕЛЯЕВ Борис Александрович

МЕХАНИКА

Учебное пособие к практическим занятиям

Редактор Е. А. Платонова

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректор О. В. Балашова

Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 27.11.20.

Формат 60 × 84/16. Усл. печ. л. 7,91. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.