Министерство образования Российской Федерации

Владимирский государственный университет

Кафедра менеджмента

Краев В.Н.

Экономико-математическое моделирование

Методические указания

по выполнению контрольной работы

Владимир - 2003

Цель работы:

Изучить теоретически и применить на практике симплекс-метод для составления оптимальной производственной программы предприятия.

Порядок исполнения:

1. Выбрать вариант контрольной работы согласно приложению 1,2,3, соответственно для групп 1,2 и 3. Номер контрольной работы выбирается в соответствии с порядковым номером студента в журнале учебной группы.
2. Составить систему линейных ограничений.
3. Решить задачу графическим методом.
4. Привести систему неравенств к каноническому виду и составить симплекс-таблицу.
5. Решить задачу симплекс-методом.
6. Составить и проанализировать двойственную задачу. *
7. Оформить отчет по контрольной работе.

Рекомендуемая литература:

Ларионов А.И. и др. Экономико-математические методы в планировании, М., 1991 г.

Крыньский Х.Э. Математика для экономистов, М., 1970 г.

Указания по выполнению контрольной работы

Предприятие осваивает выпуск двух новых изделий. Расходы по заработной плате, амортизационным отчислениям, материалам, лимиты, выделенные предприятию и прибыль на одно изделие, приведены в таблице.

Наименование ресурса	Расход сырья на единицу изделия, у.е.		Общий объем ресурсов, у.е.
	1	2	
Заработная плата	9	3	270
Амортизация	2	3,2	160
Материалы	1,5	1	60
Прибыль	15	10	

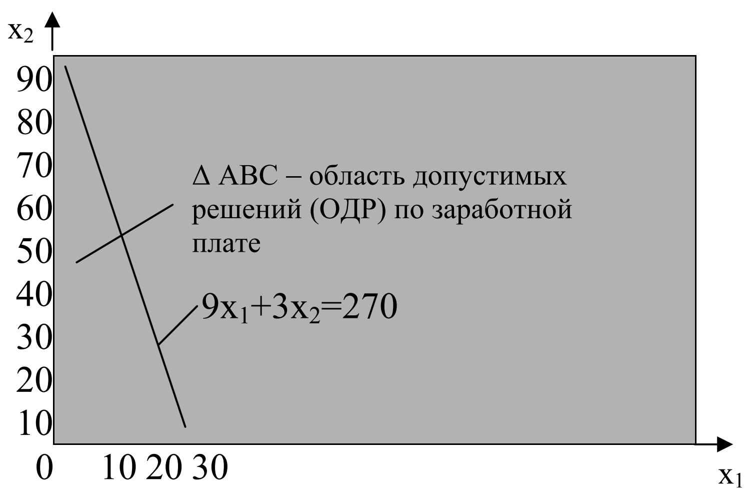
Необходимо составить такой план выпуска, который обеспечит максимум прибыли.

Обозначим x_1 и x_2 – соответственно количество 1 и 2, получим:

$$\begin{cases} \mathbf{9x_1+3x_2\leq 270} \\ \mathbf{2x_1+3{,}2x_2\leq 160} \qquad \mathbf{(1)} \\ \mathbf{1{,}5x_1+x_2\leq 60} \\ \\ F = 15x_1+10x_2\to \max \end{cases}$$

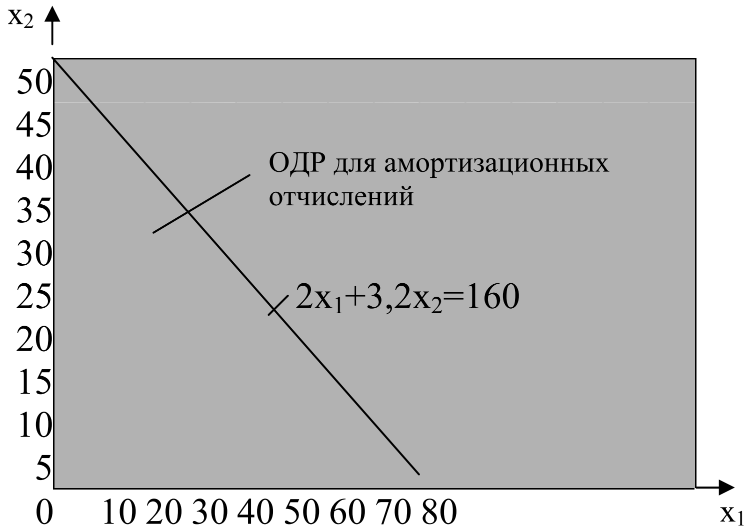
1. Решение задачи графическим методом.

Каждое из ограничений задачи можно представить на графике в виде области, ограниченной осями x_1 и x_2 и прямой линией, соответствующей ограничению, представленному в виде равенства.



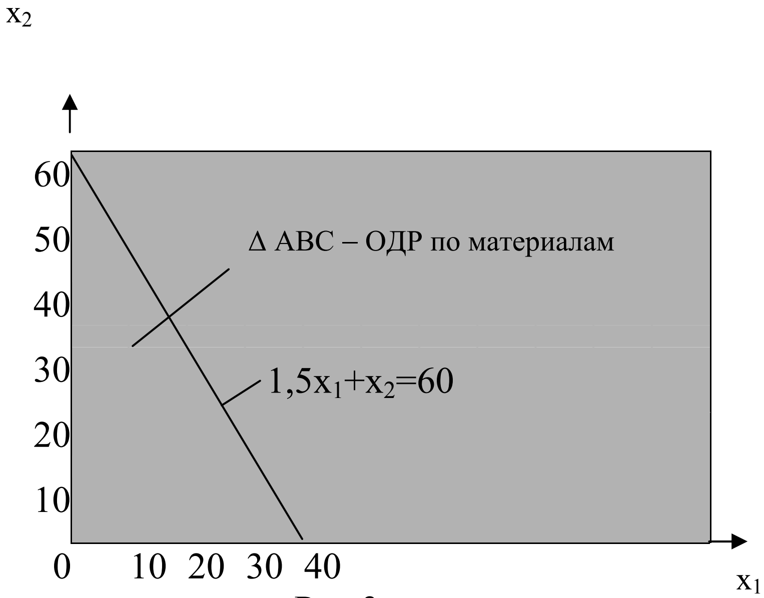
$x_1=0,\ x_2=90$
$x_1=30,\ x_2=0$

Рис. 1



$x_1=0,\ x_2=50$
$x_1=80,\ x_2=0$

Рис. 2



$x_1=0,\ x_2=60$
$x_1=40,\ x_2=0$

Рис.3

Совмещая все эти решения на одном графике, получим область допустимых решений, которая удовлетворяет всем ограничениям (рис. 4).

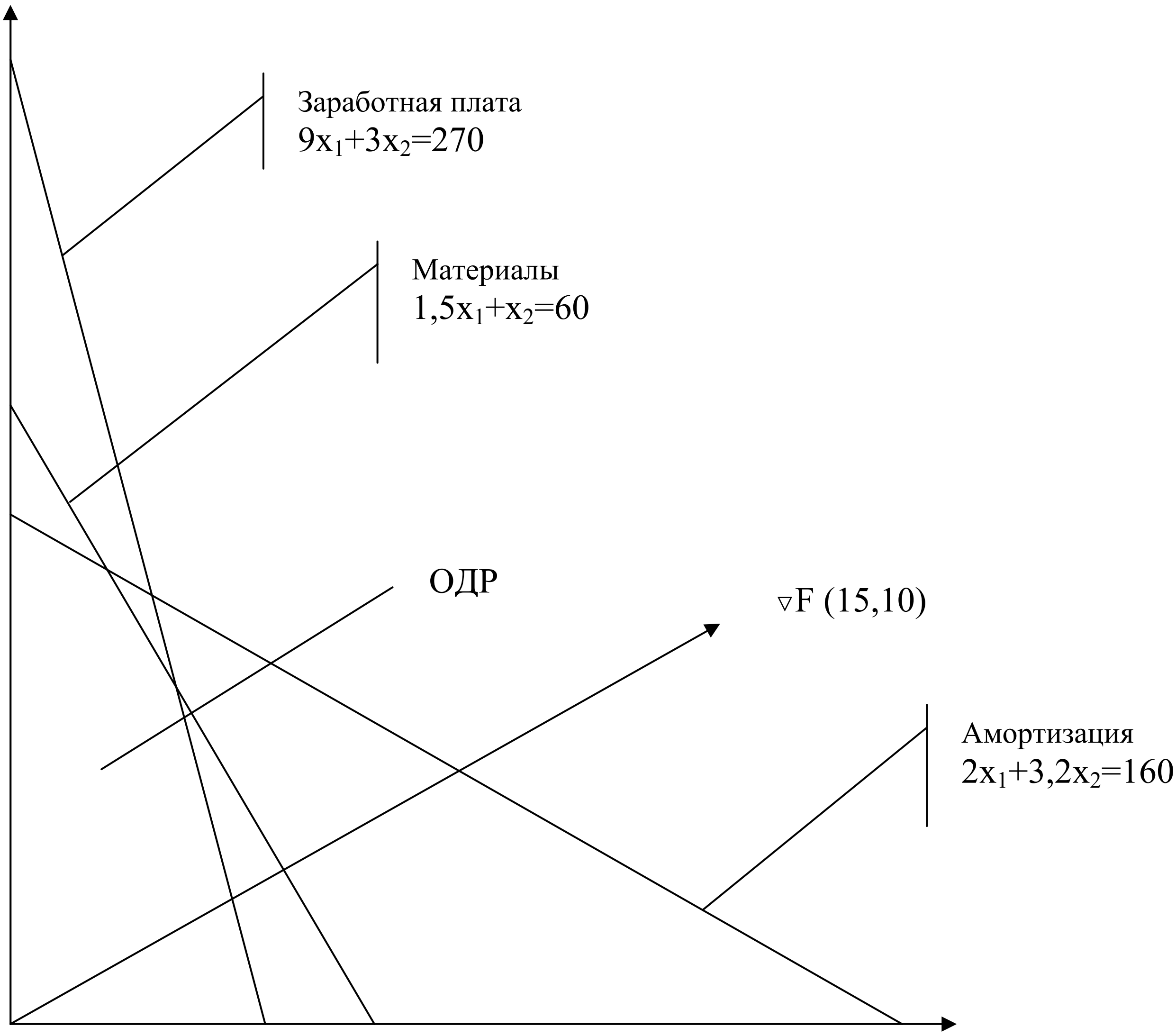


Рис. 4

Заштрихованная область есть область допустимых решений (ОДР) системы линейных уравнений. Любая точка внутри этой области – решение системы. Для нахождения наилучшего (оптимального) решения рассмотрим геометрический смысл целевой функции задачи линейного программирования.

Так как к началу решения задачи значение целевой функции неизвестно, то ее можно представить семейством параллельных прямых при различных значениях $F=15x_1+10x_2$, которым ортогонален (перпендикулярен) вектор-градиент ∇F с координатами (0,0) и (15,10), т.е. вектор-градиент проходит через эти точки. Он указывает на направление скорейшего возрастания целевой функции. Последняя точка ОДР, через которую проходит перпендикулярная вектору-градиенту прямая и есть оптимальное решение. В нашем случае это точка с координатами (20,30). То есть оптимальный план производства состоит в выпуске 20 изделий первого вида и 30 изделий второго вида, при этом прибыль будет $F=15\times20+10\times30=600$.

На этом решение задачи геометрически заканчивается.

2. Решение задачи симплекс-методом

Для решения задачи симплекс-методом необходимо выполнить следующие этапы:

1. Приводим систему линейных ограничений (1), состоящую из неравенств к системе равенств путем введения дополнительных (базисных) переменных x_3, x_4, x_5, которые соответственно означают недоиспользованные ресурсы по заработной плате, амортизации и материалам. Такая операция называется приведением системы к каноническому виду

$$(1)\ \begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 270 & (1) \\ 2x_1 + 3{,}2x_2 + x_4 = 160 & (2) \\ 1{,}5x_1 + x_2 + x_5 = 60 & (3) \\ 15x_1 + 10x_2 = F & (4) \end{cases}$$

2. Далее составляем симплекс таблицу.

Таблица 1

№ строки	шаг	Базисные перемен.	оценки	15	10	0	0	0	Свободный член	Контрольный столбец
			оценки	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_j	9×3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	1	x_3	0	9	3	1	0	0	270	270×0=0
2.		x_4	0	2	3,2	0	1	0	160	160×0=0
3.		x_5	0	1,5	1	0	0	1	60	60×0=0
4.				15	10	0	0	0	F	Σ=0

Первый шаг симплексной таблицы составляется следующим образом:

- ✓ **базисные переменные** – это x_3, x_4, x_5, т.е. недоиспользованные ресурсы по заработной плате, амортизации и материалам, которые мы ввели в систему неравенств для превращения ее в систему равенств (т.е. для приведения системы к каноническому виду);
- ✓ **оценки перем**енных – это коэффициенты при переменных в целевой функции, т.е. для переменных x_1 и x_2 – это значение прибыли, которое дает каждая единица изделия 1 и 2, для переменных x_3, x_4, x_5 – 0.
- ✓ **контрольный столбец** – это произведения свободных членов системы уравнений (1) на оценки переменных; сумма произведений контрольного столбца по строкам 1, 2 и 3 дает значение целевой функции (значение 0 в контрольном столбце строки 4); строки 1, 2 и 3 – это соответственно коэффициенты при неизвестных при в уравнениях 1,2 и 3 системы уравнений (1);
- ✓ **строка 4** – строка целевой функции.

Шаг первый в симплексной таблице представляет собой первоначальный (опорный план). В данном случае этот план означает, что предприятия ничего не выпускает и, соответственно, не получает прибыли. Значение целевой функции равно 0.

2. На втором шаге будем пытаться улучшить опорный план, для чего пересчитываем элементы таблицы 1 на нулевом (или первом) шаге с помощью специальных преобразований. Последовательность действий следующая.

По данным шага 1 определяем ведущий столбец, ведущую строку и ведущий элемент.

Ведущий столбец – это столбец, имеющий максимальное положительное значение коэффициента при переменных в строке целевой функции (строка 4, таблица 1). В данном случае это столбец 4 с переменной x_1. Для выбора ведущей строки разделим свободные члены на коэффициенты ведущего столбца и выберем среди них минимальное: 270:9=30; 160:2=80; 60:1,5=40. Минимальное отношение равно 30, следовательно, строка, отвечающая этим условиям, и будет ведущей. На пересечении ведущего столбца и ведущей строки находится элемент, который называется ведущим элементом или коэффициентом. В нашем случае это 9.

Переменная, стоящая при ведущем столбце (в нашем случае x_1) переводится на место соответствующей базисной переменной (в нашем случае x_3) со своей оценкой – 15 (шаг 2). Остальные базисные переменные с их оценками переносятся во второй шаг без изменения (рис.5).

№	1	2	3	
1.	2	$\mathbf{x_1}$	15	
2.		x_4	0	
3.		x_5	0	

Рис. 5

Дальнейшее решение состоит в переформировании таблицы 1.

Пересчет элементов табл.1 (шаг 1) начинаем с элементов ведущей строки и ведущего столбца, руководствуясь следующим правилом: на следующем шаге все коэффициенты ведущего столбца, кроме ведущего, принимают значение равное 0, а ведущий коэффициент – значение равное 1.

шаг 1

	2	3	4	
	x_3	0	**9**	
	x_4	0	**2**	
	x_5	0	**1,5**	
			15	

шаг 2

	2	3	4	
	x_1	15	**1**	
	x_4	0	**0**	
	x_5	0	**0**	
			0	

Рис. 6

Все коэффициенты при переменных ведущей строки делятся на ведущий коэффициент: в нашем случае 3:9=1/3; 1:9=1/9; 0:9=0; 270:9=30; 9:9=1 (рис. 7).

шаг 1

2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_3	**0**	**9**	**3**	**1**	**0**	**0**	**270**	**270×0=0**

шаг 2

2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	**15**	**1**	**1/3**	**1/9**	**0**	**0**	**30**	**30×15=450**

Рис. 7

После этих преобразований второй шаг будет выглядеть следующим (табл. 2). Т.е. мы нашли новое значение коэффициентов при переменных на шаге 2 для столбца 4 и строки 1.

Таблица 2

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	2	x_1	15	1	1/3	1/9	0	0	30	30×15=450
2.		x_4	0	0						
3.		x_5	0	0						
4.				0						

Далее нам необходимо полностью заполнить таблицу на шаге 2. Для этого необходимо найти новые значения всех остальных коэффициентов при неизвестных. Они находятся методом прямоугольника, суть которого в следующем.

Коэффициент, для которого необходимо найти новое значение и ведущий элемент, лежат на одной диагонали прямоугольника. Например, для коэффициента a_{25}^{1*} (таблица 1, строка 2, столбец 5) прямоугольник выглядит следующим образом (рис. 9).

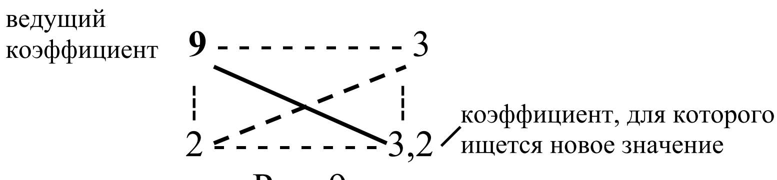


Рис. 9.

[*] верхний индекс означает номер шага

Новое его значение будет равно старому минус произведение коэффициентов, лежащих на противоположной диагонали прямоугольника, делится на ведущий коэффициент, т.е.

$$a_{25}^{2} = 3{,}2 - \frac{2\times 3}{9} = \frac{38}{15}.$$

Заносим его в соответствующую клетку таблицы 2 (строка 2, столбец 5). Для коэффициентов a_{37}^{1} =0 (строка 3, столбец 7, табл. 1); a_{29}^{1} =160 (строка 2, столбец 9, табл. 1) и a_{49}^{1} =F получим соответственно: прямоугольники и значения.

$$\begin{matrix} \mathbf{9} & 0 \\ 1{,}5 & 0 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \mathbf{9} & 270 \\ 2 & 160 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} \mathbf{9} & 270 \\ 15 & F \end{matrix}$$

$$a_{37}^{2} = 0 - \frac{15\times 0}{9} = 0 \qquad a_{29}^{2} = 160 - \frac{2\times 270}{9} = 100 \qquad a_{49}^{2} = F - \frac{15\times 270}{9} = F - 450$$

Также заносим эти значения в таблицу второго шага. Окончательно на втором шаге получаем (табл. 2):

Таблица 2.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	2	x_1	15	1	1/3	1/9	0	0	30	30×15=450
2.		x_4	0	0	38/15	-2/9	1	0	100	100×0=0
3.		x_5	0	0	1/2	-1/6	0	1	15	15×0=0
4.				0	5	-5/3	0	0	F-450	Σ=450

Из нее видно, что у нас остается 100 у.е. ресурсов по амортизационным отчислениям и 15 у.е. – по материалам (столбец 9, табл. 2).

Эта таблица представляет собой (улучшенный) план выпуска, в котором предусмотрено выпустить 30 изделий первого вида (строка 5, шаг 2) и получение прибыли в 450 единиц (строка 8 второго шага). Для проверки оптимальности этого плана обратимся к строке целевой функции на втором шаге (строка 8). В этой строке есть коэффициенты, значения которых больше нуля: это 5 (столбец 5, шаг 2), т.е. полученный план можно улучшить, для чего необходимо пересчитать элементы таблицы, полученной на шаге 2, применив к ней вышеописанные процедуры. В итоге на третьем шаге получаем:

Таблица 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	3	x_1	15	1	0	2/9	0	-2/3	20	20×15=300
2.		x_4	0	0	0	28/45	1	-76/15	24	24×0=0
3.		x_2	10	0	1	-1/3	0	2	30	10×30=300
4.				0	0	0	0	-10	F-600	600

Решение находится в столбце 9, табл. 3. Для нашего примера x_1=20, x_2=30, x_4=24, x_3=x_5=0, т.е. ресурсы по материалам и заработной плате использованы полностью, а излишек амортизационных отчислений составляет 24 у.е.

В строке целевой функции (строка 4, таблица 3) все коэффициенты при известных равны 0 или отрицательны. Это означает, что на третьем шаге мы получим оптимальный план (совпадает с графическим решением). Значение прибыли: F=600 у.е. (строка 4, столбец 10, таблица 3) Окончательный вид таблицы следующий:

Таблица 4.

№ строки	шаг	Базисные перемен.	оценки	15	10	0	0	0	Свободный член	Контрольный столбец
			оценки	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_j	9×3
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	1	x_3	0	9	3	1	0	0	270	270×0=0
2.		x_4	0	2	3,2	0	1	0	160	160×0=0
3.		x_5	0	1,5	1	0	0	1	60	60×0=0
4.				15	10	0	0	0	F	Σ=0

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	2	x_1	15	1	1/3	1/9	0	0	30	30×15=450
2.		x_4	0	0	38/15	-2/9	1	0	100	100×0=0
3.		x_5	0	0	1/2	-1/6	0	1	15	15×0=0
4.				0	50	-5/3	0	0	F-450	Σ=450

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	3	x_1	15	1	0	2/9	0	-2/3	20	20×15=300
2.		x_4	0	0	0	28/45	1	-76/15	24	24×0=0
3.		x_2	10	0	1	-1/3	0	2	30	10×30=300
4.				0	0	0	0	-10	F-600	600

3. Двойственная задача

- если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная – минимизации;
- коэффициенты при неизвестных в целевой функции прямой задачи становятся свободными членами в ограничениях двойственной задачи;
- свободные члены из ограничений прямой задачи становятся коэффициентами при неизвестных в целевой функции двойственной задачи.

В нашем случае получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{9u_1+2u_2+1{,}5u_3\geq 15} \\ \mathbf{3u_1+3{,}2u_2+5u_3\geq 10} \end{cases}$$

$$\mathbf{F=270u_1+160u_2+60u_3\rightarrow min}$$

Здесь $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ и $\mathbf{u_3}$ – «цена», соответственно, 1 у.е. заработной платы, плановых амортизационных отчислений и материалов.

Решив эту задачу, получим:

$\mathbf{u_1=0;}$ $\mathbf{u_2=0;}$ $\mathbf{u_3=10,}$

т.е. увеличение ресурсов по материалам на 1 у.е. приведет к увеличению прибыли на 10 у.е.

Решение двойственной задачи находится в строке целевой функции на последнем шаге (табл. 4).

ВОПРОСЫ

для самопроверки по результатам контрольной работы

1. Общая постановка задач линейного программирования.
2. Что означает термин «линейное»?
3. Как решить задачу линейного программирования графически?
4. Что такое область допустимых решений?
5. Нарисуйте возможные области допустимых решений задачи линейного программирования.
6. Как определяется направление наискорейшего возрастания целевой функции и находится решение задачи?
7. В чем смысл решения задачи симплекс-методом?
8. Как привести систему линейных ограничений к каноническому виду?
9. В чем экономический смысл базисных переменных?
10. Последовательность решения задачи симплекс-методом.
11. Как выбираются «ведущая» строка, «ведущий» столбец и «ведущий» элемент?
12. Как определяется момент получения решения в симплекс-таблице?
13. В чем смысл двойственной задачи?
14. Общая постановка двойственной задачи.

(образец оформления титульного листа)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОУ ВПО ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра менеджмента

Отчет

по контрольной работе по курсу
«Экономико-математическое моделирование»

на тему
«Линейное программирование»

вариант _____

Выполнил:
студент группы _______
____
«____»_________200_ г.

Подпись ______

Принял:
преподаватель
____
«____»_________200_ г.

Подпись ______

Владимир 200_ г.

ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ

Примечание: предприятие осваивает выпуск 2-х новых изделий. Расходы по заработной плате, амортизационным отчислениям, материалам, лимиты, выделенные предприятию, и прибыль на одно изделие приведены ниже в таблицах. Решить задачу на максимум прибыли геометрически и аналитически, проанализировать полученные результаты.

Группа 1

№ вар.	Расход ресурсов на единицу изделия, тыс. руб						Ресурсы материалов, выданные предприятию, тыс. руб.			Прибыль на одно изделие, тыс. руб.	
	Изделие 1			Изделие 2			З/плата	Амортизация	Материалы	Изделие 1	Изделие 2
	З/плата	Амортизация	Материалы	З/плата	Амортизация	Материалы					
1.	8	6	12	5	5	7	290	240	450	15	11
2.	9	2	1,5	3	3,2	1	270	160	60	15	10
3.	6	10	7	9	5	7	540	500	490	25	20
4.	5	10	7	13	6	8	650	600	560	20	15
5.	0,5	0,5	1,2	0,6	1	4	3	3,5	12	4	6
6.	5	6	12	10	6	3	500	360	360	18	16
7.	5	6	9	10	8	6	500	480	540	20	15
8.	1	2	1	1	1	3	6	10	12	2	3
9.	5	15	10	2	3	10	115	255	410	7	3
10.	9	6	2	2	4	4	270	240	200	50	40
11.	5	4	1	5	2	2	300	180	100	16	12
12.	5	10	4	6	4	8	300	400	320	20	15
13.	3	5	5,5	5	3	2	52	44	44	4,5	6
14.	8	6	12	5	5	7	290	240	450	15	11
15.	1	4	25	3	5	100	1000	2000	3000	10	14
16.	1	1	13	2	1	5	10	6	65	4	6
17.	15	20	40	60	60	40	1500	1800	1600	20	25
18.	8	3	12	10,6	3	8	85	27	96	3	4
19.	13	9	7	5,5	6,5	12	715	585	840	50	60
20.	35	50	80	70	40	35	2450	2000	2800	10	15
21.	2	4	8	2	7	4	100	280	320	15	10
22.	9	6	2	3	4	6	540	420	420	20	30
23.	12	3	2	4,8	4,5	1,25	300	171	61,5	18	16,8
24.	6	8	1	15	10	7	900	800	840	35	30
25.	80	50	40	40	50	80	3200	2500	3200	20	25

Группа 2

№ вар.	Расход ресурсов на единицу изделия, тыс. руб						Ресурсы материалов, выданные предприятию, тыс. руб.			Прибыль на одно изделие, тыс. руб.	
	Изделие 1			Изделие 2			З/плата	Амортизация	Материалы	Изделие 1	Изделие 2
	З/плата	Амортизация	Материалы	З/плата	Амортизация	Материалы					
1.	3	5	5,5	5	3	2	52	44	44	4,5	6
2.	45	55	95	80	65	60	3600	3575	5700	30	50
3.	8	6	12	5	5	7	290	240	450	15	11
4.	5	6	10	7	4	3	350	240	300	40	35
5.	1	4	25	3	5	100	1000	2000	30000	10	14
6.	40	7	20	20	18	30	1600	630	1200	15	10
7.	1	1	13	2	1	5	10	6	65	4	6
8.	10	3	4	10	5	10	650	225	400	25	30
9.	15	20	40	60	60	10	1500	1800	1600	20	25
10.	1	1	1	3	2	1	21	18	11	5	6
11.	8	3	12	10,6	3	8	85	27	96	3	4
12.	5	8	13	10	4	3,5	50	32	45,5	26	17,5
13.	13	9	7	5,5	6,5	12	715	585	840	50	60
14.	10	9	6	5	6	8	110	108	120	5	6
15.	35	50	80	70	40	35	2450	2000	2800	10	15
16.	12	5	3	11	15	4	820	550	240	20	19
17.	2	4	8	2	7	4	100	280	320	15	10
18.	10	12	6	5	15	9	50	78	45	2	1,5
19.	9	6	2	3	4	6	540	420	420	20	30
20.	8	2	2	4	2	4	240	70	120	15	10
21.	5	10	7	13	6	8	650	600	560	20	15
22.	5	15	10	20	5	10	500	400	450	200	250
23.	0,5	0,5	1,2	0,6	1,0	4,0	3	3,5	12	4	6
24.	2	8	1,5	2	4	4	80	240	120	12	10
25.	5	6	12	10	6	3	500	360	360	18	16