

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Владимирский государственный университет

Е.Н. Талицкий

МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ И ЗАЩИТА ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

Учебное пособие
В 3 частях

Часть 1

Владимир 2004

УДК 621.396.2
Т16

Рецензенты:

Заслуженный деятель науки РФ, доктор технических наук,
профессор, заведующий кафедрой ИУ-4
Московского государственного
технического университета им. Н.Э. Баумана
В.А. Шахнов

Доктор технических наук, профессор
Московского авиационного института
(государственного технического университета)
А.В. Назаров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Талицкий Е.Н.

Т16 Механические воздействия и защита электронной аппаратуры:
Учеб. пособие: В 3 ч. Ч. 1 / Владим. гос. ун-т. Владимир, 2004. 128 с.
ISBN 5-89368-514-8

Рассматриваются основы защиты электронной аппаратуры подвижных объектов от вибраций и ударов. Особое внимание уделено теории полимерных демпферов, применяемых для подавления резонансных колебаний электронных средств аэрокосмического комплекса.

В первой части дается общая характеристика механических воздействий и способов защиты аппаратуры. Рассматриваются вопросы моделирования и расчета конструкций, приводимых к системам с сосредоточенными и распределенными параметрами.

Предназначено для студентов специальностей 200800 – проектирование и технология радиоэлектронных средств, 220500- проектирование и технология электронно-вычислительных средств и магистрантов по направлению 551100 – проектирование и технология электронных средств. Может быть полезно студентам приборостроительных специальностей, а также аспирантам и инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами вибро-, ударозащиты изделий.

Табл. 9 Ил. 67 Библиогр.: 29 назв.

УДК 621.396.2

ISBN 5-89368-514-8

© Владимирский государственный
университет, 2004

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

z – перемещение (расстояние);

Z – амплитуда виброперемещения;

\ddot{Z} – амплитуда виброускорения;

W – полная энергия колебаний;

Π – потенциальная энергия;

T – кинетическая энергия;

ΔW – энергия, рассеиваемая за цикл колебаний;

k – коэффициент жесткости;

η – коэффициент механических потерь;

ω – угловая частота, рад/с;

ω_0, p – собственная частота колебаний, рад/с;

f – частота, Гц;

f_0 – собственная частота колебаний, Гц;

m – масса;

m_s – масса элементов;

$H(j\omega)$ – передаточная функция;

K_s – абсолютное значение продольной жесткости i -го слоя;

g – ускорение силы тяжести.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЭА – электронная аппаратура;

АРК – амплитуда резонансных колебаний;

АЧХ – амплитудно-частотная характеристика;

ДГК – динамический гаситель колебаний;

КП – коэффициент передачи;

ПД – полимерный демпфер;

РЭС – радиоэлектронные средства;

СФК – собственная форма колебаний;

СЧК – собственная частота колебаний;

ЭРЭ – электрорадиоэлементы;

ЭС – электронное средство.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электронная аппаратура (ЭА) широко применяется в системах аэрокосмического комплекса и на других подвижных объектах. Такая ЭА работает в условиях воздействия вибраций, ударов и других интенсивных механических воздействий. При этом надежность и стабильность работы ЭА без применения специальных средств защиты могут значительно снижаться.

Это вызывает необходимость у инженеров-конструкторов электронных средств (ЭС) овладевать знаниями в области защиты приборов и аппаратов от механических воздействий. В связи с этим в учебные планы специальностей радиоконструкторского профиля включается дисциплина «Механические воздействия и защита ЭС», подготовлены и изданы учебник и учебные пособия [1; 6; 21 и др.]. Тем не менее, создание теоретической базы указанной дисциплины далеко от завершения.

В настоящем учебном пособии автор излагает основы теории защиты ЭА от механических воздействий с учетом специфики задач, решаемых инженерами-конструкторами ЭС. При этом учитывается, что они являются специалистами широкого профиля и в не меньшей степени должны владеть знаниями в области компоновки ячеек, блоков; уметь обеспечивать тепловые режимы ЭА, решать вопросы электромагнитной совместимости и множество других вопросов. Поэтому противоречие, заключающееся, с одной стороны, в сложности рассматриваемых вопросов, а с другой – в ограниченности времени, отводимого учебным планом на их изучение, можно преодолеть за счет различных требований на разных уровнях подготовки (бакалавров, инженеров, магистров).

При подготовке пособия автор учитывал, что конструкторы ЭС не имеют фундаментальной подготовки в области механики сплошной среды, и стремился к максимально простому изложению материала. Такие методы анализа, как метод конечных элементов и некоторые другие, по этой причине рассматриваются на уровне основных понятий, они необходимы для использования известных машинных систем конечно-элементных расчетов

«NASTRAN», «COSMOS», «ANSYS» и др. Значительное внимание в пособии уделено методам расчета полимерных демпферов, наиболее перспективных для устранения резонансных колебаний ЭС аэрокосмических систем.

Пособие состоит из трех частей.

Объем изучаемого материала может изменяться в зависимости от длительности обучения (бакалавры, инженеры, магистры). В полном объеме материал пособия целесообразно изучать в случае специализации в области защиты ЭА от механических воздействий при обучении в магистратуре или аспирантуре.

В основу данной книги положены учебные пособия, подготовленные в разные годы автором лично или в соавторстве [1, 16], а также новые результаты, полученные в научно-исследовательских работах, проводимых во Владимирском государственном университете под руководством автора.

Автор выражает благодарность аспиранту А.Е. Тыкоцкому, оказавшему большую помощь при оформлении рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Практически все современные автоматизированные технические системы и объекты имеют электронные устройства, осуществляющие функции управления, регулирования, координации и связи. При этом круг задач, решаемых с помощью ЭА, с каждым годом расширяется, а их сложность возрастает. Это привело к тому, что оснащенность электронной аппаратурой таких объектов, как корабли, самолеты, спутники, чрезвычайно возросла, и отказ в работе хотя бы одного из устройств может привести к отказу всего объекта. Поэтому требования к надежности электронных и электронно-вычислительных средств постоянно растут.

Надежность и стабильность работы ЭА значительно ухудшается при механических воздействиях – вибрациях, ударах, линейных перегрузках, акустических шумах. Источниками этих воздействий могут быть различные двигатели, в том числе и реактивные, дорожная тряска, быстро вращающиеся разбалансированные массы, взрывы и многое другое. Механические воздействия на ЭА приводят к изменению активного сопротивления в полупроводниках, магнитной проницаемости ферритов, нарушению электрических контактов, наводкам и изменению параметров электрических, магнитных и электромагнитных полей, деформации электрорадиоэлементов (ЭРЭ) и другим отрицательным явлениям [1]. Они приводят в одних случаях к помехам в каналах передачи информации, так как параметры электрорадиоэлементов и узлов могут претерпеть обратимые и необратимые изменения, в других – к снижению точности работы аппаратуры, в третьих – к механическим разрушениям элементов конструкций. Сложность задачи защиты ЭА от механических воздействий обусловлена тем, что, несмотря на непрерывное повышение надежности элементной базы (резисторов, конденсаторов, микросхем и других элементов), интенсивность механических воздействий возрастает быстрыми темпами из-за увеличения скоростей подвижных объектов. Кроме того, узлы и блоки ЭА представляют собой сложные механические конструкции, в которых могут возникать резонансные колебания, усиливающие механические нагрузки в десятки раз.

Для обеспечения необходимой надежности и стабильности работы ЭА при интенсивных механических воздействиях применяется ряд способов:

- использование наиболее устойчивых к механическим воздействиям электрорадиоэлементов и узлов; повышение прочности конструктивных элементов;

- изоляция ЭА от источников механических воздействий;

- устранение или уменьшение до допустимого уровня резонансных явлений в конструкциях ЭА, достигаемое путем выведения спектров собственных частот колебаний элементов конструкций за верхнюю границу диапазона частот возмущающего воздействия или увеличением демпфирующих свойств;

- уменьшение активности источников механических воздействий;

- применение активной виброзащиты в виде автоматических систем с внешним источником энергии.

Работа по обеспечению нормального функционирования ЭА начинается с сопоставления допустимых параметров механических воздействий на электрорадиоэлементы (ЭРЭ) с требованиями технического задания (ТЗ). Если применяемые ЭРЭ удовлетворяют требованиям ТЗ, дальнейшие усилия необходимо направить на устранение резонансных колебаний и обеспечение прочности элементов конструкций ЭА. В случае успешного решения этих вопросов задачу по обеспечению защиты ЭА от механических воздействий на данном этапе проектирования можно считать выполненной. Если устранить или уменьшить резонансные колебания до допустимого уровня не удастся, то следует применить общую или локальную виброизоляция. Для обеспечения необходимой защиты от механических воздействий часто приходится применять рассмотренные способы совместно.

Решение этих задач возможно, если конструктор ЭА глубоко понимает физические основы защиты аппаратуры от механических воздействий, знает математические методы их расчета и умеет реализовать выбранные меры защиты в конструкции. Необходимо помнить, что задача обеспечения надежности ЭА при механических воздействиях тесно связана с другими задачами конструирования, такими как обеспечение высоких массогабаритных показателей изделий, теплового режима, ремонтпригодности. Это оказывает существенное влияние на выбор тех или иных способов вибро- и ударозащиты. Например, заливка электронных узлов полимерными компаундами значительно повышает их жесткость и прочность, но

ухудшает тепловой режим и ремонтпригодность и поэтому не всегда возможна.

Выдающийся вклад в развитие методов расчета конструкций, работающих в условиях механических воздействий, внесли отечественные ученые: Б.В. Голицын, А.Н. Крылов, С.П. Тимошенко. Значительное развитие теория колебаний получила в фундаментальных трудах академиков Н.М. Крылова, А.А. Андропова и А.А. Витта, профессоров С.Э. Хайкина, Н.Н. Боголюбова, зарубежных ученых Р. Бишоп, С. Крандалла, С. Крида и др.

В 60 – 80-е годы в СССР появилось большое число публикаций в области теории колебаний и удара, динамической прочности конструкций [1 – 5]. Наиболее полно вопросы теории и практики виброзащиты приборов и машин рассмотрены в шеститомном справочнике «Вибрация в технике» под редакцией академика В.Н. Челомея [2]. Этими работами была подготовлена база для разработки методов оценки устойчивости ЭС к механическим воздействиям, а также научно обоснованных методов защиты от них. Данным вопросам посвящены труды известных российских [5; 11 – 15; 19 и др.] и зарубежных [8; 12] ученых.

Глава 1

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И СПОСОБОВ ЗАЩИТЫ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ

1.1. ИСТОЧНИКИ И ХАРАКТЕРИСТИКА МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Электронная аппаратура может применяться в изделиях наземной, морской (корабельной), бортовой авиационной, ракетной и космической техники. Каждый класс подвергается определённому комплексу внешних воздействующих факторов, возникающих на этапах эксплуатации и транспортирования изделий [19].

Уровни механических воздействий, к которым относятся вибрации, удары, линейные перегрузки и акустические давления зависят также от вида носителя и места расположения изделия на носителе.

Механические воздействия на ЭА наземной техники. Все объекты наземной техники в зависимости от условий эксплуатации можно разделить на стационарные, подвижные и носимые. Различают подвижные объекты на колесном и гусеничном ходу.

Основными механическими воздействиями на изделия наземной техники являются вибрация, механический удар и акустические шумы.

Источниками вибрации аппаратуры, размещаемой в кузовах грузовых и легковых автомобилей, на тракторах гусеничного типа и на танках, являются, в основном, вибрации двигателя и неровности дороги.

Перевозку изделий можно осуществлять по дорогам с твёрдым покрытием (асфальтированное и булыжное шоссе), грунтовыми дорогам (профилированным и непрофилированным) и естественной местности. Воздействие дорожных условий на перевозимые изделия обусловлено неровностью поверхности, скоростью движения и состоянием покрытия. Различают малоизношенные, сильно изношенные, разбитые дороги и пересечённую местность.

Вибрации аппаратуры характеризуются следующими данными: в объектах на колесном ходу – частота до 250 Гц, амплитуда до 2,5 мм; в объектах на гусеничном ходу – частота до 2000 Гц, амплитуда до 4 мм [19].

Механические удары в объектах наземной техники возникают при преодолении ими естественных и искусственных препятствий на трассах движения. Различают механические удары многократного действия (пиковое ударное ускорение – до 1500 м/с^2 при длительности действия ударного ускорения 2 – 5 мс) и одиночного действия (пиковое ударное ускорение – до 30000 м/с^2 при длительности действия ударного ускорения до 5 мс).

Механические воздействия на ЭА корабельной техники. Выделяют три вида воздействий, вызывающих установившиеся и неустановившиеся колебания конструкций и корпуса судна в целом:

- нагрузки, связанные с неполной уравновешенностью главных и вспомогательных механизмов, с дефектами изготовления гребных винтов, неточностями центрирования и монтажа гребных валов;
- нагрузки, связанные с работой гребных винтов внутри корпуса;
- нагрузки, вызванные воздействием на судно морского волнения (гидродинамические силы).

Гидродинамические силы вызываются действием морских волн и ветра. Под действием этих сил судно испытывает три вида колебаний: вращательное движение вокруг вертикальной оси, килевую качку вокруг горизонтальной оси, боковую качку вокруг продольной оси. При килевой качке наибольшую амплитуду колебаний имеют нос и корма. При боковой качке наибольшее перемещение совершают средние части борта.

Помимо гидродинамических сил, на корпус судна оказывают влияние вибрации, вызванные работой двигателя и вращением винта. Вибрация корпуса корабля, вызванная вращением винта, имеет незначительную частоту и значительную амплитуду. Например, для судов с трёхлопастным винтом частота вибрации изменяется от 0 до 15 Гц, а для судов с пятилопастным винтом – до 25 Гц.

Уровень и частота вибраций, воздействующих на изделия, размещаемые на судах, зависят от водоизмещения судна и от места размещения изделий. В этом отношении можно условно разделить судно на 4 участка (рис. 1.1): кормовой 1, мачтовый 2, носовой 3 и основной (центральная часть) 4.

Изделия, расположенные в основном и кормовом участках судна с большим водоизмещением, испытывают вибрации в диапазоне 1 – 12 Гц, в пределах мачтового участка в основном на частоте 2 Гц (вибрации создаются поперечными колебаниями судна).

На небольших быстроходных судах с небольшим водоизмещением в кормовом участке возникают вибрации с максимальной амплитудой до $\pm 0,3$ мм на частоте от 5 до 15 Гц и с минимальной амплитудой $\pm 0,05$ мм на частоте 150 Гц.

2
3

Рис 1.1. Корпус судна, разделённый на участки в зависимости от уровня вибраций: 1 – кормовой; 2 – мачтовый; 3 – носовой; 4 – основной (центральная часть)

Изделия, установленные непосредственно на двигателях судов испытывают вибрации с частотой до 2000 Гц при амплитудах до 2,5 мм.

Механические воздействия на ЭА летательных аппаратов. При проектировании и эксплуатации летательной техники рассматривают два типа колебаний [19]:

- траекторные колебания – колебания летательного аппарата как абсолютно жёсткого тела, при которых основное значение имеют изменения параметров траектории полёта. Эти колебания определяют динамику полёта летательного аппарата – его устойчивость и управляемость;

- упругие колебания – изменения напряжённо-деформированного состояния конструкции. Эти колебания могут привести к возникновению опасных напряжений (вплоть до разрушающих), ухудшению условий работы оборудования, аппаратуры и снижению комфорта экипажа и пассажиров.

Источниками возникновения вибраций на самолёте являются: работа силовой установки; работа системы управления; аэродинамическая вибрация.

Вибрации, возникающие при работе силовой установки, характеризуются сравнительно высокой частотой, кратной половине числа оборотов двигателя. Вибрации, связанные с работой системы управления, вызываются автоколебаниями рулей и элеронов. Частоты аэродинамических вибраций обычно близки к частотам собственных колебаний элементов конструкции. Чем тяжелее самолёт, тем ниже собственные частоты колебаний конструкции и больше амплитуды (достигают десятков сантиметров). Неуравновешенные силы инерции двигателей, срывающиеся с крыльев вихри

и другие периодически возникающие силы порождают вынужденные колебания.

На рис. 1.2 показаны участки вибраций самолёта. Центральный участок включает в себя почти весь фюзеляж, центроплан и примерно 1/3 размаха крыльев. Изделия, расположенные на этом участке у винтовых самолётов, испытывают вибрацию с частотой от 3 до 50 Гц, на участке силового оборудования – от 10 до 500 Гц, на крайних участках – от 3 до 150 Гц.

Вибрации на реактивных самолётах создаются звуковыми колебаниями, вызываемыми реактивной струёй и турбулентностью горения, и имеют характеристики: частота вибрации 500 – 10000 Гц, амплитуда на частотах до 500 Гц достигает 0,025 мм [19].

При взлётах и посадках самолёта изделия испытывают также линейные перегрузки.

Основными источниками вибраций, возникающих на ракетах, являются работа ракетного двигателя, системы управления и аэродинамические эффекты (звуковые колебания, вызываемые струёй и турбулентностью горения).

Ракетные двигатели на жидком топливе создают вибрации с частотой в несколько сотен герц с ускорением до 500 м/с^2 . Менее мощные двигатели создают вибрации с частотами до 2000 Гц.

Более высокому уровню вибраций подвергаются изделия, расположенные в зоне двигателя.

Возникающие в момент старта и разделения ступеней ракеты ударные нагрузки достигают 5000 м/с^2 .

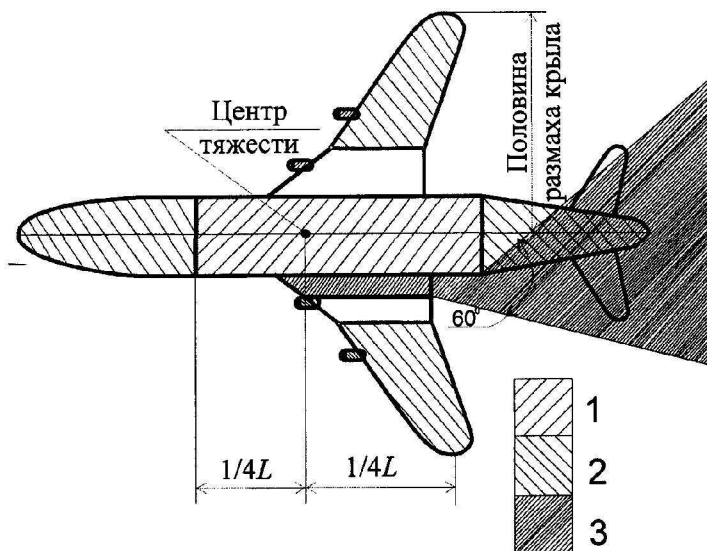


Рис. 1.2. Планер самолёта, разделённый на участки в зависимости от уровня вибрации; L – длина планера; 1 – центральный участок; 2 – крайние участки; 3 – участок силового оборудования

Для всех изделий ракетной техники существенным является воздействие акустического шума в диапазоне десятков тысяч герц при звуковом давлении, превышающем 150 дБ.

В табл. 1.1 приведены примерные обобщённые данные о возрастании уровней механических воздействий на электронную аппаратуру [24] начиная с 1960 г.

Интенсивным механическим нагрузкам может подвергаться и стационарная ЭА вследствие воздействия ударной волны, вибраций и звукового давления от работающих двигателей. В соответствии с [29] на приборы, расположенные вблизи помещений, где установлены работающие двигатели, воздействует вибрация в диапазоне до 2000 – 5000 Гц.

Для определения работоспособности ЭА в условиях механических воздействий предусмотрены соответствующие виды испытаний. Так, в соответствии с ГОСТ 20.57.406-81 [27] изделия электронной техники должны подвергаться испытаниям на виброустойчивость и вибропрочность при воздействии гармонической вибрации по одной из 14 степеней жесткости (табл. 1.2) или испытаниям на воздействие широкополосной случайной вибрации (4-я степень жесткости) (табл. 1.3).

Т а б л и ц а 1.1

Уровень требований к ЭА

Воздействия	Уровень требований			
	1960 г.	1965 г.	1970 г.	1995 г.
Вибрации:				
Частота, Гц	5...60	5...1000	5...2500	5...5000
Ускорение, g	7,5	10	15	40
Линейное ускорение, g	25	75	150	500
Одиночные удары, g	75	150	500	1000
Многократные удары, g	40	75	150	150
Акустические шумы, дБ	-	-	-	165

Т а б л и ц а 1.2

Испытания на вибропрочность и виброустойчивость

Степень жесткости	Диапазон частот, Гц	Амплитуда ускорения, g
I	10 – 35	0,5
II	10 – 55	1,0
...
XIII	10 – 2000	40
XIV	10 – 5000	40

Т а б л и ц а 1.3

Испытания на воздействие широкополосной случайной вибрации

Степень жесткости	Диапазон частот, Гц	Спектральная плотность ускорения, $g^2 \cdot Гц^{-1}$
I	20 – 2500	0,05
II	20 – 2500	0,20
III	20 – 5000	0,20
IV	20 – 5000	0,50

Испытания на влияние ударов многократного действия проводят по одной из четырех степеней жесткости с ударным ускорением до 150 g (4-я степень) и числом ударов до 12000.

Испытание на воздействие одиночных ударов проводят по одной из 13 степеней жесткости, а на воздействие линейных ускорений – по одной из 14 степеней жесткости. Причем максимальные амплитуды ускорений при этих испытаниях могут достигать 100000 g [27].

Испытания на акустическое воздействие проводят в диапазоне частот от 125 Гц до 10 кГц при уровне звукового давления от 130 дБ (степень жесткости I) до 170 дБ (степень жесткости V).

Механические испытания бортовой авиационной и ракетной техники проводят по стандартам на эти изделия.

1.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЕ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ МЕХАНИЧЕСКИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Широкий диапазон различных по виду и уровню механических воздействий, большое разнообразие и сложность современной радиоэлектронной аппаратуры приводят к тому, что картина возможных нарушений её работы, отказов, повреждений и поломок становится весьма сложной. Одной из важных задач конструктора является умение правильно оценить условия будущей работы конструируемой радиоаппаратуры и на основе объективного прогноза возможных неполадок разработать необходимые меры её защиты. Базой такого прогноза являются изучение и анализ физических явлений, вызываемых механическими воздействиями в элементах РЭА.

В результате механических воздействий в элементах аппаратуры могут происходить обратимые и необратимые изменения. Обратимые изменения, в основном, происходят в электро- и радиоэлементах и приводят к нарушению устойчивости, а следовательно, ухудшению качества работы аппаратуры. Необратимые изменения происходят в функциональных и конструктивных элементах аппаратуры, часто приводят к нарушению условий прочности, к поломкам и разрушениям.

Влияние механических воздействий на устойчивость работы РЭА. Механические воздействия вызывают искажение формы передаваемого или преобразуемого сигналов и отклонения его параметров от установленной нормы, снижение точности функционирования аппаратуры и ухудшение стабильности ее работы (периодический уход параметров и т.д.). Наиболее часто эти нарушения происходят в результате деформаций или соударений элементов конструкции РЭА, возникающих под влиянием механических воздействий. В достаточно жёстких конструкциях такие вибрационные возбуждения легко передаются от одного элемента к другому, в том числе и к радиоэлементам. В результате в электрическом тракте радиоприёмных устройств возникают помехи в виде шорохов, тресков, фона и т. п. Такие явления получили название виброшумов.

Для борьбы с виброшумами и другими видами нарушений работы аппаратуры необходимо исследовать динамику сложной механической системы, учитывая связь происходящих в нём механических и электрических явлений. При этом в зависимости от физической основы возникаю-

щих нарушений или повреждений эти явления можно объединить в следующие группы:

1) деформации в активных и пассивных функциональных элементах электрических цепей, приводящие к изменению параметров этих элементов (ёмкости, индуктивности и др.);

2) нарушения электрического контакта в разъёмных и неразъёмных соединениях, приводящие к изменению омического сопротивления контактов;

3) наводка и изменение параметров электрических, магнитных и электромагнитных полей.

Рассмотрим некоторые характерные дефекты в работе РЭА, вызываемые механическими воздействиями и приводящие к нарушению качества её функционирования.

Среди явлений, связанных с деформациями функциональных элементов аппаратуры, наиболее широко известны такие, как микрофонный эффект в электронных лампах и паразитная модуляция сигнала из-за нарушения геометрии элементов резонансных контуров, тензорезисторный эффект в полупроводниковых приборах и др. Физический смысл явления микрофонного эффекта в лампах заключается в том, что в процессе вибрации изменяются форма электродов и межэлектродные расстояния (рис. 1.3). В результате происходят изменения анодного тока I_a , крутизны характеристики S и межэлектродных ёмкостей $C_{кс}$. Например, для триода с плоской системой электродов

$$I_a = k \frac{F_a}{d^2} U_{эф}^{3/2},$$

$$S = k \frac{F_a}{d_{кс}^2} U_{эф}^{1/2},$$

$$C_{кс} = k' \frac{F_a}{d_{кс}} (F_a = F_k),$$

где F_a – площадь поверхности анода; $d_{кс}$ – расстояние между катодами и сеткой; $U_{эф}$ – эффективный потенциал сетки; k , k' – коэффициенты распределения тока и ёмкости соответственно.

Из этих формул видно, что указанные параметры радиолампы существенно зависят от расстояния $d_{кс}$ между катодом и сеткой. Таким образом,

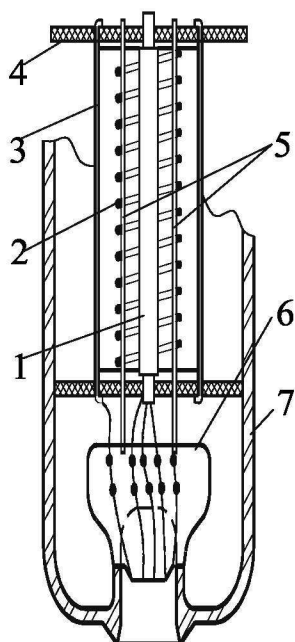


Рис 1.3. Схематический разрез электронной лампы: 1 – катод;
2 – сетка; 3 – анод; 4 – изолятор;
5 – траверсы; 6 – цоколь; 7 – баллон

при колебаниях этих элементов параметры I_a , S , $C_{кс}$ будут меняться, что приведёт к нарушению нормального режима работы радиолампы. Частоты колебаний указанных элементов могут составлять от нескольких сотен до нескольких тысяч герц, и в зависимости от режима использования радиолампы эти колебания могут существенно повлиять на параметры полезного сигнала. В частности, флуктуации анодного тока будут приводить к выделению на анодной нагрузке паразитного напряжения виброшума, а флуктуации крутизны характеристики и межэлектродных ёмкостей – к произвольным изменениям амплитуды и в частности сигнала, т.е. к паразитной модуляции.

Исследования показывают, что при увеличении виброускорений в радиолампах наряду со сравнительно низкочастотными гармоническими виброшумами возникают также шумы с более высоким частотным спектром. Эти шумы возникают от ударов катодов и траверссеток о края слюдяного изолятора. Кроме этого в радиолампах могут возникать шумы

вследствие спорадических утечек, замыканий и других дефектов, появляющихся в процессе их работы в условиях механических воздействий.

Нарушение под влиянием механических воздействий геометрии элементов конструкции переменных конденсаторов, контурных катушек, вариометров, настраиваемых широкодиапазонных контуров и других аналогичных устройств приводит к их расстройке и паразитной модуляции сигнала. Особенно чувствительны к механическим воздействиям ВЧ и СВЧ устройства, где незначительные по абсолютной величине изменения геометрии могут привести к существенным отклонениям параметров электрической цепи.

Рассмотрим влияние механических воздействий на элементы резонансных контуров. По общеизвестной формуле ёмкость трёхпластинчатого конденсатора

$$C = \frac{(n-1)\epsilon S}{3,6\pi d} = 2A \frac{S}{d}, \quad 2A = \frac{(n-1)\epsilon}{3,6\pi}$$

где n – число пластин; d – зазор между ними; S – площадь пластины; ϵ – диэлектрическая проницаемость.

При вибровоздействии и асимметричном зазоре результирующая ёмкость

$$C_{ac} = AS \left(\frac{1}{d + \Delta d} + \frac{1}{d - \Delta d} \right) = \frac{2AS}{d} \frac{1}{1 - (\Delta d / d)^2}.$$

Приращение ёмкости определяется как разность этих величин

$$\Delta C = C_{ac} - C = \frac{2AS}{d} \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 \frac{1}{1 - (\Delta d / d)^2}.$$

Следовательно, относительное изменение ёмкости можно оценить, взяв отношение вида

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{(\Delta d / d)^2}{1 - (\Delta d / d)^2},$$

Эта зависимость показана на рис. 1.4, откуда видно, что при колебаниях пластин конденсатора могут быть значительные отклонения ёмкости от номинальной и, следовательно, значительное изменение собственной частоты контура, в который входит конденсатор.

Некоторые взаимные смещения пластин и соответственно изменения ёмкости будут и при поперечных и угловых смещениях в подшипниках ро-

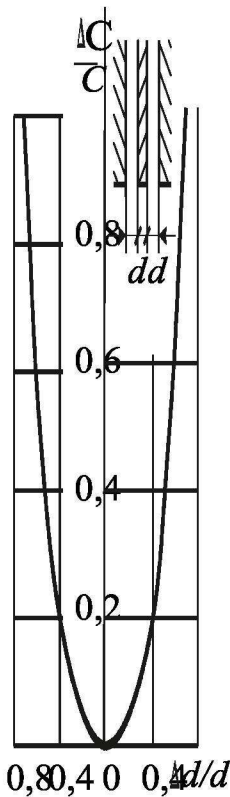


Рис 1.4. Зависимость относительного изменения ёмкости трехпластинчатого конденсатора от смещения средней пластины
тора конденсатора переменной ёмкости.

Изменение индуктивности бескар-касных катушек происходит главным образом вследствие изменения взаимо-индуктивности отдельных витков при их смещении относительно друг друга. Индуктивность катушки, состоящей из n одинаковых витков:

$$L_n = nL_1 + 2M_{11}(n-1) + \dots + 2M_{12}(n-2) + \dots,$$

где L_1 – индуктивность одного витка; M_{ik} – взаимоиנדуктивностъ между i -м и k -м витками.

При $D \gg a$ $M = 0,0628D X [\ln (D/a) - 2]$, т.е. взаимоиנדуктивностъ зависит от диаметра витка D и расстояния a между соседними витками. Поэтому в случае вибрации катушки её индуктивностъ (а также и собственная ёмкостъ) будет изменяться, а следовательно, будет изменяться и собственная частота контура, в который входит индуктивностъ. Аналогичное изменение взаимоиנדуктивности будет происходить и у двух катушек, колеблющихся относительно друг друга, у различных вариометров и других устройств с катушками индуктивности.

В СВЧ-аппаратуре наиболее чувствительны к механическим воздействиям резонансные линии и волноводы, а также двухпроводные линии, обладающие малой механической жёсткостью. Деформация элементов линии приводит к изменению волнового сопротивления p :

$$p = \sqrt{L_1 / C_1},$$

где L_1 и C_1 – погонные индуктивностъ, Гн/м, и ёмкостъ, пФ/м.

Отклонения L_1 и C_1 от заданных значений приводят к искажению генерируемого сигнала. В коаксиальных линиях при резонансных колебаниях могут происходить изгиб внутренней трубы и изменение формы внешней трубы.

При этом будут изменяться параметры линии, в частности ёмкостъ C конденсатора подстройки или обратной связи (рис. 1.5, а). В конструкциях малой жёсткости (рис. 1.5, б) и с малыми зазорами могут происходить короткие замыкания.

короткие замыкания.

В волноводах под влиянием механических воздействий происходит нарушение распределения электромагнитного поля, что ведёт к искажению сигнала и увеличению потерь энергии [14].



Рис. 1.5. Схематический разрез коаксиальной линии: а – с ёмкостной связью, б – со спиральным проводником

Причинами этих отклонений являются: нарушения геометрии волнового тракта, резонансные механические колебания элементов конструкции (например вибратора), поверхностные упругие волны в стенках волноводов. К изменению характера электромагнитной волны в волноводе весьма чувствительны магнетроны. Практика эксплуатации показывает, что под влиянием механических воздействий на волноводный тракт частота колебаний, генерируемых магнетроном, может изменяться весьма существенно [14].

Другим примером влияния геометрической формы на качество функционирования РЭА является случай деформации элементов радиолокационной антенны. Под влиянием механических воздействий могут возникать периодические отклонения антенны от нормального ее положения, а также колебания зеркала и облучателя (рис. 1.6). Экспериментальные исследования показывают, что для некоторых типов антенн максимальные отклонения зеркала и конца облучателя от исходных положений могут составлять 5 ... 15 мм. Такие отклонения вызывают нарушение требуемого хода лучей и, как следствие, значительное искажение фронта волны и отклонение диаграммы направленности антенны от расчетной.

У сканирующих антенн, которые приводятся в движение механическими передачами, возможны отклонения зеркала из-за вибрации элементов привода и люфтов в соединениях. В результате диаграмма направленности антенны может отклоняться настолько, что это приводит к полному нарушению функционирования станции [17].

Интенсивные механические нагрузки могут приводить к обратимым

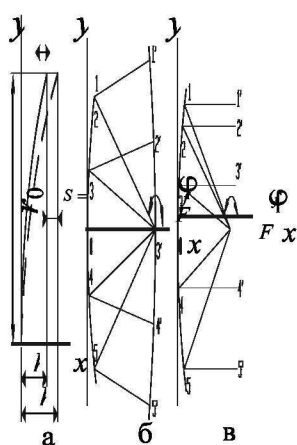


Рис. 1.6. Упрощенная схема для оценки колебаний антенны РЛС: а – колебания зеркала антенны (s_0 – амплитуда колебаний); б – ход лучей при колебании зеркала (φ_f – угол отклонения луча, $1' - 5'$ – искаженный фронт волны); в – ход лучей при колебании облучателя

и необратимым изменениям параметров полупроводниковых приборов – диодов, транзисторов и т.п. Наблюдаются изменения вольт-амперных характеристик $p - n$ переходов диодов с барьером Шотки, транзисторов и других приборов, их емкости и напряжения пробоя, коэффициента усиления транзисторов, некоторых характеристик диода Ганна, длины волны, излучаемой полупроводниковым лазером, и т.п. В основе этих явлений также лежат деформационные эффекты, физическая сущность которых заключается в смещении энергетических уровней и изменении ширины запрещенной зоны полупроводников при деформации. Могут изменяться также эффективные массы, время жизни и подвижность носителей тока.

Деформационный эффект в однородных полупроводниках выражается зависимостью электрического сопротивления от механического напряжения и известен как тензорезистивный эффект. Величина этого эффекта зависит от направлений кристаллографических осей.

Изменение тока ΔI в диоде при действии ударной нагрузки можно оценить по формуле

$$\Delta I = SI_0(e^{-\alpha P/kT} - 1),$$

где S – площадь перехода; I_0 – плотность тока в полупроводнике при отсутствии механического напряжения; α – постоянная, связанная с константами деформации полупроводника и зависящая от ориентации силы относительно кристаллографических осей; P – нагрузка; T – температура; k – постоянная Больцмана.

Транзистор как усилительный элемент обычно используется в схеме с общей базой или с общим эмиттером. Коллекторный ток транзистора, являющийся основной выходной характеристикой, в схеме с общей базой находится по формуле

$$I_k = \frac{SeD_p n_i}{N_D} \exp\left(\frac{eU_э}{kT}\right),$$

где S – площадь эмиттера; N_D – концентрация доноров в базе; D_p – константа диффузии дырок в базе; $U_э$ – внешнее напряжение на переходе эмиттер -

база; n_i – концентрация носителей тока в полупроводнике в недетерминированном состоянии; e – элементарный заряд.

При механическом напряжении в базе полупроводника изменяются величина n_i и константа D_p .

Расчеты и эксперименты показывают, что деформации, возникающие в диодах, транзисторах и других полупроводниковых приборах, могут приводить к изменениям тока, превышающим допустимый уровень. Величина этих изменений в значительной степени зависит от конструкции. Особенно подвержены деформации те полупроводниковые приборы, в которых контакт осуществляется с помощью пружины или проволоки, прижатой к полупроводнику или впаянной в него. В таких приборах степень деформации пружины, а следовательно, и величина тока, протекающего через полупроводниковый прибор, могут в десять раз и больше различаться в зависимости от формы конца пружины или проволоки. При механических напряжениях, близких к пределу упругости, возникают также необратимые изменения электрических характеристик полупроводниковых приборов. Они, в частности, проявляются в том, что при снятии нагрузки вольт-амперные характеристики не восстанавливаются. Подробный анализ физических процессов и методов расчета тензочувствительности полупроводниковых приборов дан в книге А.Л. Поляковой [18].

Электромагнитные параметры моточных изделий: катушек индуктивности, трансформаторов, дросселей – определяются электромагнитными параметрами сердечников и их стабильностью при эксплуатации.

Есть сведения, что механические воздействия (удары и вибрации) могут приводить как к обратимым, так и к необратимым изменениям параметров сердечников из марганец-цинковых и никель-цинковых ферритов, в первую очередь к изменению их магнитной проницаемости [1]. Физическая сущность этого явления заключается в том, что при механическом воздействии в магнитном материале сердечника возникают волны механических напряжений, вызывающие смещения границ доменов, положение которых становится неустойчивым. Эти смещения происходят в направлении внешнего магнитного поля, и намагниченность возрастает у материалов как с положительной, так и с отрицательной магнитострикцией.

U

Если кольцевой сердечник намагничивается синусоидальным



током, протекающим по первичной обмотке, то на вторичной (измерительной) обмотке в момент удара наблюдается увеличение напряжения на А5 (рис. 1.7). В момент удара напряжение на обмотках определяется по формуле

$$U(t) = U + \Delta U = L(di/dt) + i(dL/dt),$$

где первая составляющая $U = L(di/dt)$ определяет напряжение на обмотках сердечника до удара при перемагничивании синусоидальным током; вторая $\Delta U = i(dL/dt)$ проявляется вследствие изменения магнитной проницаемости по времени при механическом ударе.

На рис. 1.8 приведены зависимости относительного изменения напряжения $\Delta U/U$ от частоты перемагничивания при различных значениях ускорения для сердечников из феррита марки 400НН. Видно, что отношение $\Delta U/U$ зависит от частоты перемагничивания, амплитуды ускорения и направления удара. При намагничивании сердечника постоянным током на обмотке вследствие изменения магнитной проницаемости во времени в момент удара наводится ЭДС:

$$E = Ik \frac{d\Delta\mu_0(t)}{dt},$$

где I – сила тока; k – коэффициент пропорциональности; $\Delta\mu$ – изменение магнитной проницаемости.

При действии ударной нагрузки в плоскости сердечника в нем возникают собственные механические колебания. Пробегающая по

$\Delta U/U, \%$

$f, \text{кГц}$

Рис. 1.8. Зависимости изменения напряжения на вторичной обмотке от частоты сигнала и амплитуды ударного импульса: 1 – 1000 g; 2 – 500 g; 3 – 150 g; 4 –

сердечнику при ударе упругая волна изменяет во времени напряжения в различных точках как по величине, так и по знаку. Наблюдаемые на обмотках сердечников ЭДС имеют вид затухающих колебаний (рис. 1.9). Зависимость амплитудного значения наведенной на обмотке сердечника ЭДС от ускорения и намагничивающего тока для сердечников из феррита марки 400НН показана на рис. 1.10.

Таким образом, искажение сигналов и наведение дополнительной ЭДС в момент удара могут являться источниками дополнительных помех в РЭА, работающей в условиях воздействия ударных нагрузок.

Имеются сведения [1] о необратимых изменениях магнитной проницаемости и добротности сердечников из марганец-цинковых ферритов.

После ударных нагрузок с амплитудой ускорения в 1000 g и длительностью ударного импульса 0,3 мс было определено, что добротность в зависимости от марки феррита уменьшается на 6 ... 22 % после одного

E

0

Рис. 1.9. Осциллограмма ЭДС при ударе в плоскости сердечника.

E
mV

3

2

1

0

6

удара и на 27 ... 35 % после 30. Магнитная проницаемость соответственно увеличивается на 1,2 ... 8,5 и 3,2 ... 15 %. Однако эти отклонения с течением времени несколько уменьшаются.

Как уже отмечалось, рассмотренные физические явления приводят как к обратимым, так и необратимым изменениям параметров ЭРЭ, и, как результат, к искажению параметров сигналов РЭА, т.е. к нестабильности в ее работе. Свойство изделий изменять свои параметры (электрические, магнитные, механические и др.) при действии вибрации получило название *вибрационной чувствительности*.

Количественно вибрационная чувствительность оценивается коэффициентом чувствительности, который определяется изменением некоторого параметра (часто шумов) изделия по отношению к изменению параметра

Рис. 1.10. Зависимость амплитудного значения ЭДС от ускорения ударного импульса и амплитуды намагничивающего тока: 1 – 25 мА;

(или группы параметров) вибрации и удара. В [1] приведены результаты исследования вибрационной чувствительности некоторых видов радиоламп, транзисторов, микросхем, электромеханических преобразователей, резисторов. Испытания проводились вибрационно-спектральным методом, более подробно рассмотренным в 1.4. В качестве примера на рис. 1.11 приведены спектры колебания вибрирующего основания $A(f)$ и флуктуации $B(f)$ анодного тока радиолампы 6С6Б. Спектрограммы показывают, что радиолампа-нелинейная механическая система, так как спектр ее шумов отличается от спектра возмущающих колебаний. По спектрограмме шумов резонансная частота радиолампы приблизительно равна 2500 Гц. Коэффициент вибрационной чувствительности a партии радиоламп 6С6Б находится в пределах $10 \text{ мкВт/г} > a > 1 \text{ мкВт/г}$.

При испытаниях на действие гармонической вибрации полупроводниковых диодов, транзисторов и микросхем с виброускорениями до 50 g в выходных сигналах были обнаружены составляющие, обусловленные вибрацией. Однако их вибрационная чувствительность ниже, чем у радиоламп.

Нарушение электрического контакта в соединениях вызывает отказ радиоэлектронной аппаратуры, возникающий в результате влияния механических воздействий. Нарушение контакта в разъёмных и разборных соединениях является одной из причин появления виброшумов и других помех, в то время как нарушение контакта в неразборных соединениях играет доминирующую роль среди факторов, обуславливающих ухудшение показателей их вибропрочности и ударопрочности.

2
1
0
2
1
0

жГц

Рис. 1.11. Спектры колебания вибрирующего основания

Основными требованиями к контактам являются: малое переходное сопротивление, стабильность и износоустойчивость. Эти характеристики зависят в первую очередь от контактного усилия Q_k . Характер этих зависимостей противоречив. Так, величину переходного сопротивления можно упрощённо записать как [1]

$$R_{\Pi} = a_k / Q_k^n,$$

где a_k – постоянная, зависящая от вида материала и состояния поверхности; n – показатель степени, характеризующий форму контакта. Таким образом, качество контактирования прямо зависит от контактного усилия.

Стабильность также прямо зависит от Q_k . Однако износ контактов и усилие, необходимое для их разъединения (или смещения скользящего контакта), с ростом Q_k возрастают. Эти причины заставляют поддерживать контактное усилие на определённом уровне, не прерывающем значения, соответствующего допустимому переходному сопротивлению R_{Π} . В этих условиях дополнительные инерционные силы, возникающие в контактных устройствах в результате механических воздействий, легко могут изменяться или даже полностью компенсировать контактное усилие. В результате в узле контакта изменяется переходное сопротивление и, как следствие, возникают флуктуации протекающего тока. Это явление носит название динамической нестабильности контакта.

Рассмотрим динамическую нестабильность на примере контактной пары на рис. 1.12. Контактное усилие создаётся предварительным натягом ΔH контактной пружины.

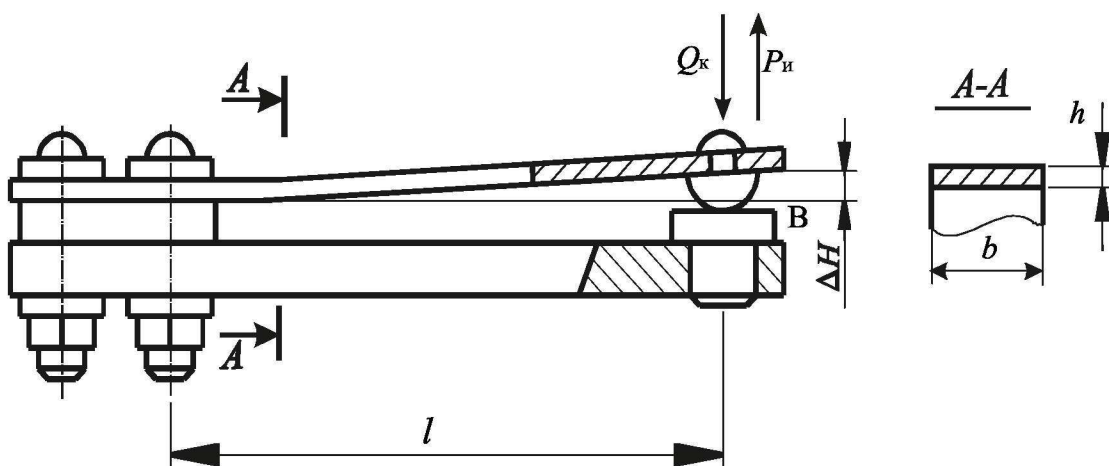


Рис. 1.12. Контактное устройство с нормально замкнутыми контактами

Считая, что ΔH – прогиб конца консоли под действием нагрузки Q_k , по известной формуле сопротивления материалов получаем:

$$\Delta H = Q_k l^3 / 3EJ,$$

где l – длина консоли; E – модуль упругости материала пружины; $J = bh^3 / 12$ – момент инерции поперечного сечения пружины.

Отсюда $Q_k = \frac{E bh^3}{4 l^3} \Delta H.$

При механических воздействиях на подвижный контакт и пружину будет действовать сила инерции

$$P_{и} = m_{пр} \alpha = m_{пр} gn,$$

где $m_{пр}$ – приведённая в точке B масса контакта и движущейся части пружины; $n = a/g$ – коэффициент эксплуатационной перегрузки. Очевидно, что, если сила $P_{и}$ будет направлена противоположно силе Q_k , она будет ослаблять контактное давление, в результате переходное сопротивление будет возрастать. Если $|P_{и}| > Q_k$, подвижный контакт будет отрываться от неподвижного (основание которого здесь для простоты считается неподвижным).

Аналогичное явление может возникать и в некоторых разборных соединениях элементов конструкции аппаратуры (рис. 1.13). Если контакт между соединяемыми деталями 1 и 2 конструкции достигается за счёт упругости, в частности пружинной шайбы 3 и винта 4, то при нагружении соединения силой инерции $P_{и}$ (или другой силы, приложенной к детали 2) за счёт деформации деталей давление в стыке будет



1.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

Оборудование. Экспериментальные методы исследования динамических свойств конструкций в настоящее время находят широкое применение при испытаниях и изучении свойств конструкций с целью последующего их совершенствования и доработки. Таким образом, экспериментальные исследования дают возможность производить объективный анализ и синтез конструкций РЭА и ЭВА.

Для проведения экспериментальных исследований используют испытательные средства, включающие вибрационные и ударные установки (стенды), измерительную аппаратуру и другое оборудование. Испытательные установки создают необходимые механические воздействия на исследуемую аппаратуру, укрепленную на их подвижных платформах. В зависимости от источника энергии стенды подразделяются на механические,

гидравлические, электродинамические и др. [22].

Для испытаний на вибрацию обычно используют электродинамические вибростенды, обеспечивающие возбуждение колебаний в широком диапазоне частот и допускающие регулирование частоты и амплитуды колебаний по нужному закону в процессе испытаний. Устройство электродинамического стенда показано на рис. 1.21. При протекании тока через подвижную катушку 4 вибратора, которая находится в электромагнитном поле, создаваемом катушкой подмагничивания 5,

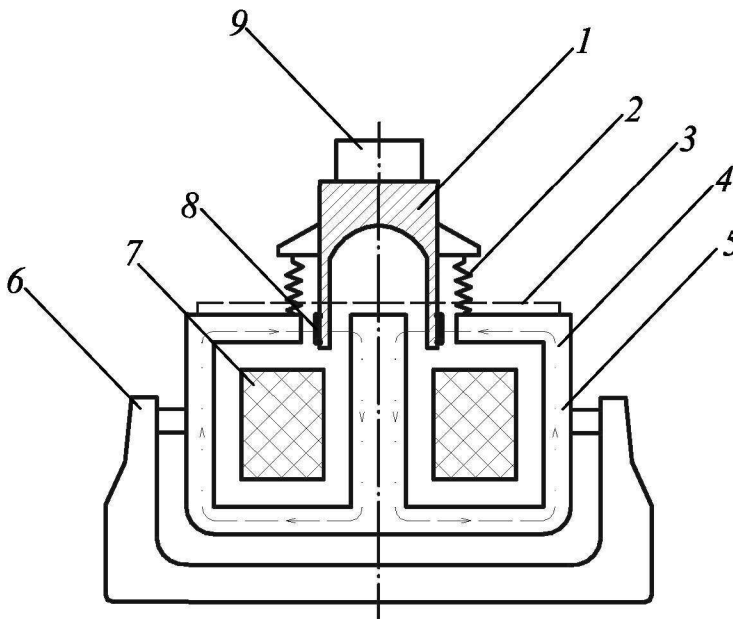


Рис. 1.21. Электродинамический вибростенд: 1 – стол вибратора; 2 – упругие подвески стола; 3 – магнитный экран; 4 – путь магнитного потока; 5 – магнитопровод; 6 – основание; 7 – катушка подмагничивания; 8 – подвижная катушка; 9 – испытуемое изделие

на неё будет действовать сила

$$P_e(t) = Bli(t),$$

где B – индукция магнитного поля в зазоре; l – длина проводника; $i(t)$ – ток с частотой вибрации ω_v .

Подвижную систему вибратора (платформа – подвес) приближённо можно считать системой с одной степенью свободы с достаточно низкой собственной частотой ω_0 . Тогда в широком диапазоне частот возбуждения $\omega_e > \omega_0$ платформа получит ускорение с амплитудой $\ddot{Z}_0 = \bar{P}_e/m_0 = B\bar{l}i/m_0$. Сила, создаваемая вибратором при заданном значении i питающего тока и частоте $\omega_e > \omega_0$, называется выталкивающей силой: $P_{is} = B\bar{l}i$.

Отечественная промышленность выпускает широкую серию виброустановок для диапазона частот $f = 5 \dots 10000$ Гц, с грузоподъёмностью 1 – 300 кг, развиваемым ускорением до 1000 м/с^2 и выталкивающей силой от 100 до 100 000 Н [22]. Для питания вибраторов в таких установках используются сложные системы с мощными усилителями.

Для испытаний на удар используются ударные установки со свободным падением и принудительным разгоном рабочего стола (рис. 1.22).

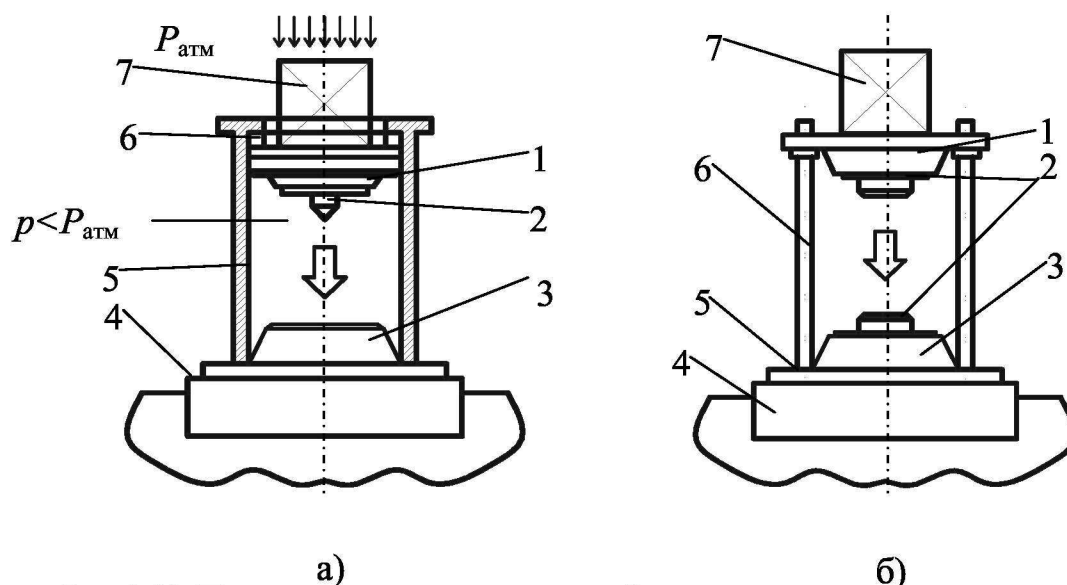


Рис. 1.22. Принципиальная схема ударной установки: а – пневматическая ударная установка с ускоренным падением подвижной части: 1 – ударная платформа; 2 – тормозное устройство; 3 – ударная наковальня; 4 – фундамент; 5 – направляющее устройство; 6 – уплотнение; 7 – испытуемый объект; б – ударная установка с жестким креплением ударной наковальни: 1 – ударная платформа; 2 – тормозное устройство; 3 – ударная наковальня; 4 – фундамент; 5 – основание установки; 6 – направляющее устройство; 7 – испытуемый объект

Для формирования ударного импульса применяются специальные буферы (крешеры).

Отечественная промышленность выпускает ударные установки, позволяющие создавать ударные импульсы различной формы с максимальным ускорением до 13 000 g и длительностью до 32 мс.

Для измерения параметров механических воздействий, создаваемых вибрационными и ударными установками, используются измерительные вибропреобразователи, усилители, фильтры, анализаторы, регистрирующие приборы и другая аппаратура [22].

Измерительные преобразователи вибрации, шума и удара предназначены для преобразования параметров движения исследуемых объектов в электрические сигналы, которые легко могут быть измерены, преобразованы, проанализированы и записаны. При этом обеспечивается возможность дистанционного измерения и одновременного наблюдения движения в нескольких точках.

По принципу действия все измерительные вибропреобразователи делятся на два класса: активные – создающие электродвижущую силу и пассивные – изменяющие какой-либо параметр электрической цепи и, следовательно, протекающий в ней ток. К активным преобразователям относятся индукционные (электромагнитные, магнитоэлектрические и электродинамические), пьезоэлектрические, магнитострикционные. К пассивным – индуктивные, резистивные, ёмкостные, электретные и др.

Наиболее широкое применение получили пьезоэлектрические и индукционные вибропреобразователи, а также резистивные тензометрические.

Типовые схемы устройств пьезоэлектрических вибропреобразователей приведены на рис. 1.23. Вибропреобразователь состоит из корпуса, чувствительного элемента и инерционного элемента (сейсмомассы). Для крепления к объекту он имеет резьбовой наконечник или фланец (при малых размерах они могут крепиться к объекту с помощью гермозамазки).

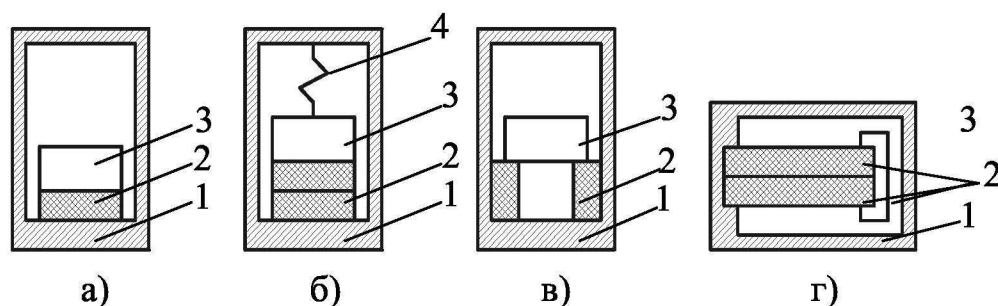


Рис. 1.23. Пьезоэлектрические вибропреобразователи:
1 – корпус; 2 – пьезоэлемент; 3 – сейсмомасса; 4 – пружина

Пьезоэлемент выполняется в виде диска, кольца или пластины из пьезокерамики (например, из титаната бария и цирконата титаната свинца с различными присадками).

При перемещении корпуса вибропреобразователя на сейсмомассу будут действовать инерционные силы, вследствие чего пьезоэлемент будет испытывать растяжение – сжатие, сдвиг, изгиб или сложную деформацию. В результате на обкладках пьезоэлемента будут возникать электрические заряды, пропорциональные действующей на элемент механической силе (или ускорению). При знакопеременном ускорении на выводах датчика возникает переменное напряжение с той же частотой, что и частота изменения ускорения. При заданной величине ускорения это напряжение зависит от чувствительности преобразователя, которая оценивается коэффициентом преобразования $K_{\Pi} = u/\omega$, где u – выходное напряжение (при разомкнутой цепи); ω – виброускорение.

Линейные ускорения a обычно воспроизводят с помощью *центрифуг*. При этом испытуемое изделие устанавливают на специальной ферме 1, которая может вращаться вокруг своей оси. Установка испытуемого изделия производится на расстоянии R от оси вращения, при этом угловая скорость вращения фермы Ω может регулироваться. Линейное ускорение W_{Ω} обеспечивается при заданном значении угловой скорости и радиусе вращения изделия R (рис. 1.24) и рассчитывается по формуле (2.12).

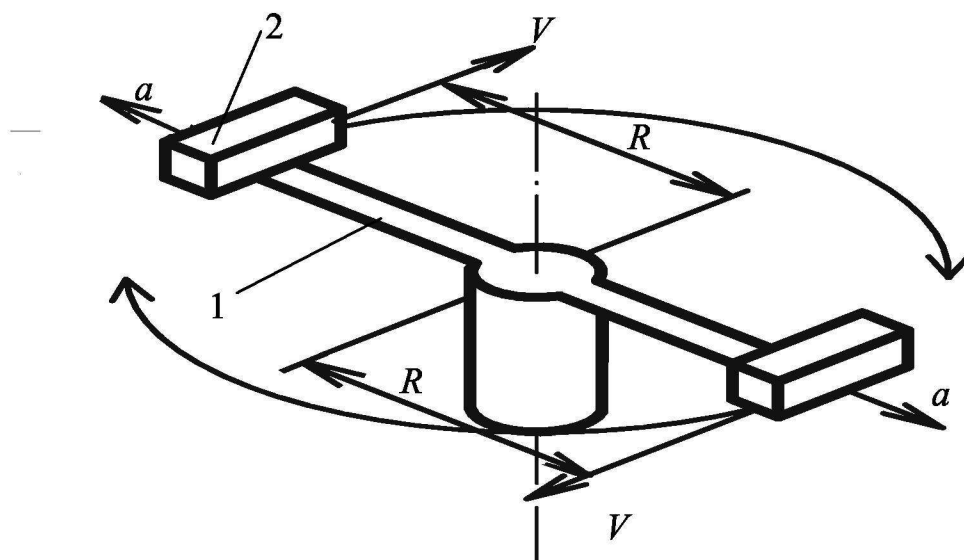


Рис. 1.24. Схема центрифуги для испытания на линейные ускорения

Акустические шумы моделируют с помощью акустических испытательных установок, в качестве которых используют заглушенные и реверберационные камеры, а также резонансные камеры – трубы. Источниками акустических шумов могут быть пневматические, динамические или статические сирены, а также электродинамические громкоговорители.

Методы исследования. При исследовании динамических свойств конструкций используют ряд методов, среди которых наибольшее распространение получили резонансный, фазовый и метод свободных колебаний.

Резонансный метод. Он используется для определения резонансных частот, форм колебаний и демпфирующих свойств конструкции.

Для определения резонансных частот конструкция возбуждается гармонической силой, создаваемой вибрационной установкой. Затем определяется зависимость амплитуды колебаний в различных точках исследуемого объекта от частоты, т.е. снимается амплитудно-частотная характеристика (АЧХ). Определяются резонансные пики и соответственно резонансные частоты.

Для определения форм колебаний используется несколько вибропреобразователей, но в данном случае они должны регистрировать амплитуды колебаний в различных точках исследуемой детали, поэтому число вибропреобразователей для выяснения функции распределения амплитуд выбирается с учётом требуемой точности. При дискретном задании частот шаг следует выбирать таким, чтобы не пропустить резонанс. Например, для одно- и многослойных плат рекомендуется выбирать шаг в пределах $5 \text{ Гц} > \Delta f > 0$ [1]. Демпфирующие свойства конструкции могут быть определены путём анализа резонансного пика.

Логарифмический декремент колебаний Λ для случая резонанса связан с шириной полосы резонансного пика, отсчитанной на уровне 0,707, соотношением

$$\Lambda = \pi(\Delta\omega_{0,7} / \omega_0),$$

где ω_0 – резонансная частота колебаний.

Удовлетворительные результаты при расчёте по этой формуле можно получить, если исследуемая система слабо демпфирована и влиянием близких по частоте колебаний других элементов конструкции можно пренебречь.

Фазовый метод. Этот метод основан на измерении угла сдвига фаз α между возбуждающей гармонической силой и деформацией (перемещением) исследуемой системы, вызванной этой силой. Фазовый метод применяется для определения резонансных частот и демпфирующих свойств конструкции. При резонансе $\alpha = 90^\circ$. Это свойство используется для определения резонансных частот.

Относительное рассеивание энергии ψ можно определить, зная угол α :

$$\psi = 2\pi(1 - \omega^2/\omega_0^2) \text{ tg } \alpha.$$

В свою очередь, относительное рассеивание энергии ψ связано с логарифмическим декрементом колебаний зависимостью $\Lambda = \psi / 2$.

Метод свободных колебаний. Он применяется в основном для определения первой собственной частоты колебаний и демпфирующих свойств

конструкции на этой частоте по спектрограмме свободных затухающих колебаний. Причём частота находится через период колебаний $f_1 = 1/T_1$, а показатель затухания – по интенсивности затухания амплитуды в соответствии с формулой

$$A = \ln(A_i/A_{i+1}).$$

Значение A для затухания, пропорционального скорости, не зависит от амплитуды колебаний и может определяться по любым двум смежным амплитудам. Свободные колебания могут возбуждаться заданием предварительного прогиба конструкции, приложением ударного импульса, возбуждением резонансных колебаний с последующим снятием возбуждающей силы.

Разновидностью метода свободных колебаний является метод ударного возбуждения, который часто применяется для определения коэффициентов передачи систем со многими степенями свободы. Сущность метода состоит в том, что с помощью ударного импульса, создаваемого ударным стендом, в конструкции возбуждаются переходные процессы. Коэффициент передачи конструкции и собственные частоты определяются с помощью спектрального воздействия входного воздействия и реакции исследуемой системы.

Перспективным методом определения динамических характеристик является векторный метод, позволяющий определять амплитудно- и фазо-частотные характеристики конструкций.

Кроме рассмотренных методов, в которых возбуждения механических колебаний производятся стандартными стендами, применяются методы точечного возбуждения [1], которые предпочтительнее при испытаниях крупногабаритных конструкций типа стоек. Для возбуждения конструкции могут применяться один или несколько точечных вибраторов. Показатель затухания вибрации δ находится из функции распространения виброскорости

$$V(L) = V(0)e^{-\delta L},$$

где $V(0)$, $V(L)$ – значения амплитуд виброскоростей в месте установки вибратора и вибропреобразователя соответственно.

Вибрационно-спектральный метод. Он применяется для определения вибрационной чувствительности. Метод позволяет определять мощности вибропроцессов основания и выходного сигнала, а также частотные характеристики в режиме гармонических и случайных колебаний, и в импульсном режиме. Случайная вибрация записывается на магнитную ленту и воспроизводится магнитофоном.

Для измерения статических деформаций и напряжений используются также оптический метод, метод муаровой сетки и рентгеноскопический, излагаемые в курсе сопротивления материалов.

Контрольные вопросы

1. Назовите источники механических воздействий на ЭА наземной и корабельной техники, летательных аппаратов.
2. Назовите примерные режимы испытаний на вибропрочность и виброустойчивость, случайную вибрацию, удар, акустическое воздействие.
3. Как влияют механические воздействия на устойчивость работы ЭА?
4. Что понимается под микрофонным эффектом в электровакуумных приборах?
5. Как влияют механические воздействия на функционирование резисторов, конденсаторов, полупроводниковых приборов, точных изделий, электрических контактов?
6. Как влияют механические воздействия на прочность ЭА?
7. Дайте общие понятия виброизоляции, частотной отстройки, демпфирования колебаний.
8. Какое оборудование применяется при механических испытаниях?
9. Для чего применяются измерительные преобразователи и на каких принципах основана их работа?
10. Приведите схемы пьезоэлектрических вибропреобразователей.
11. Какие методы применяются при исследовании динамических свойств конструкций и на чём они основаны?

Глава 2

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ И СИЛ

2.1. ВИДЫ МОДЕЛЕЙ

Конструкции ЭС разнообразны, но среди них можно выделить типовые [15]. Все они могут быть разбиты на иерархические уровни. К первому относят электрорадиоэлементы (ЭРЭ) – резисторы, конденсаторы, полупроводниковые приборы, микросхемы и т.п. Второй иерархический уровень объединяет конструкции, не имеющие самостоятельного применения и входящие в состав конструкции третьего уровня. К этому уровню относят печатные платы с ЭРЭ, ячейки, каркасы блочные, пасси и т.д. К третьему иерархическому уровню относят конструкции блоков и пультов. В качестве примера на рис. 2.1 показан блок РЭА, включающий конструкции первого, второго и третьего уровней.

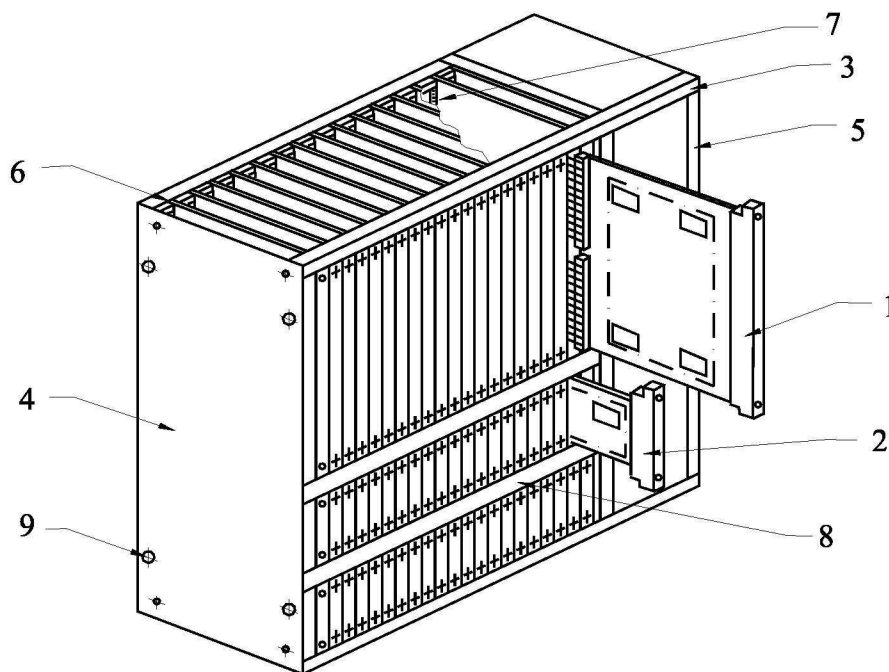


Рис. 2.1. Блок разъемной конструкции:

- 1, 2 – ячейки; 3 – каркас; 4 – панель передняя;
- 5 – панель задняя; 6 – плата печатная соединительная;
- 7 – розетка разъема ГРППЗ; 8 – направляющая; 9 – замок

При аналитическом решении конкретных задач динамики ЭС, возникающих в процессе её конструирования и эксплуатации, прежде всего необходимо составить правильные физическую и математическую модели исследуемого объекта или процесса, которые достаточно полно учитывают задачи исследования, характер внешних воздействий и динамические параметры исследуемой механической системы.

Если уравнения движения составлены и определены граничные и начальные условия, то дальнейшее исследование сводится к решению математической задачи. Решение задачи усложняется при учете второстепенных явлений, относящихся к внешним воздействиям и динамическим параметрам исследуемой механической системы, и побочных явлений, возникающих одновременно с изучаемым. Поэтому при аналитическом исследовании РЭА по возможности упрощают физическую и математическую модели процесса, т.е. составляют для реальной механической системы некоторую рационально выбранную приближенную схему, пригодную для решения поставленных вопросов с заданной степенью точности. Таким образом, при исследовании динамических процессов, возникающих в ЭС при механических воздействиях, неизбежен переход от реальных систем и процессов к их абстрактным моделям.

Основные допущения и приближения, которые вводятся при построении расчетной модели реальной механической системы, касаются следующих вопросов:

- выбор моделей геометрической формы и способов крепления конструкции;

- распределение инерционных и упругих характеристик системы и число её степеней свободы;

- выбор моделей сил.

Ниже рассмотрим вопросы моделирования, составления и решения уравнений движения.

2.2. МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ И СПОСОБОВ КРЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим несколько примеров составления расчетных моделей для ЭРЭ. На рис. 2.2, *a* показан радиоэлемент (резистор, конденсатор, диод), используемый в модуле. При определении, например, собственной частоты поперечных колебаний можно использовать расчетную модель в виде уп-

ругой балки с сосредоточенной массой (рис. 2.2, б). Если масса радиоэлемента значительно больше массы выводов, то последней пренебрегают. В противном случае общую массу считают равной сумме массы радиоэлемента и одной трети массы выводов.

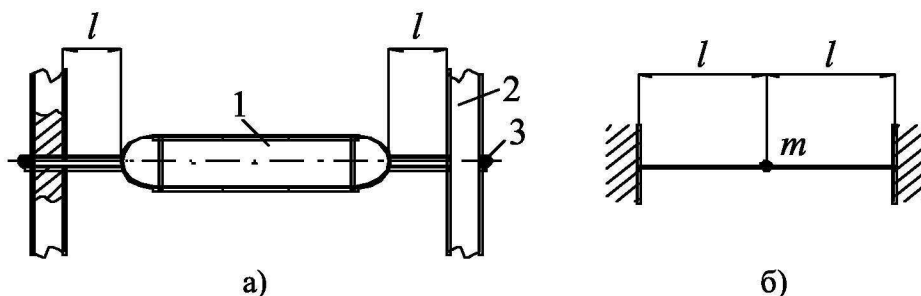


Рис. 2.2. Радиоэлемент, установленный в модуле (а) и его расчетная модель (б): 1 – радиоэлемент; 2 – плата; 3 – место пайки

Расчетную модель радиоэлемента, показанного на рис. 2.3,а, можно представить в виде прямоугольной рамы с защемленными краями и сосредоточенной массой (рис. 2.3,б). В зависимости от направления динамической силы такую модель при определении собственных частот колебаний можно рассматривать как систему с одной или, например, тремя степенями

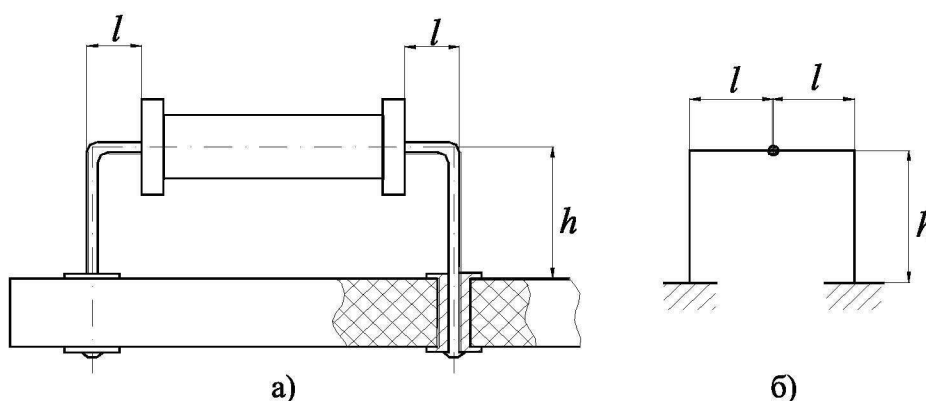


Рис. 2.3. Резистор, установленный на плате (а), и возможная расчетная модель в виде прямоугольной рамы (б)

свободы. При расчете напряжений в выводах эту же конструкцию можно рассматривать и как систему с распределенными параметрами, на которую действует инерционная сила. Такие задачи успешно решаются с использованием методов сил и перемещений, широко используемых в строительной механике для расчета статически неопределимых систем.

В качестве примера на рис. 2.4 приведены различные типы крепления радиоэлементов и их возможные расчетные модели в виде рам.

Значительные упрощения часто применяются при расчете систем виброизоляции ЭС. Блок ЭС, установленный на виброизоляторах, принимают за абсолютно твердое тело, массой виброизоляторов по сравнению с массой блока пренебрегают. Такие допущения позволяют считать блок системой, имеющей не более шести степеней свободы, которые определяются линейными перемещениями блока в направлении осей x , y , z прямоугольной системы координат и вращательными движениями вокруг этих осей. Эти допущения приводят к тому, что амплитудно-частотные характеристики реального блока и расчетной модели будут различаться.

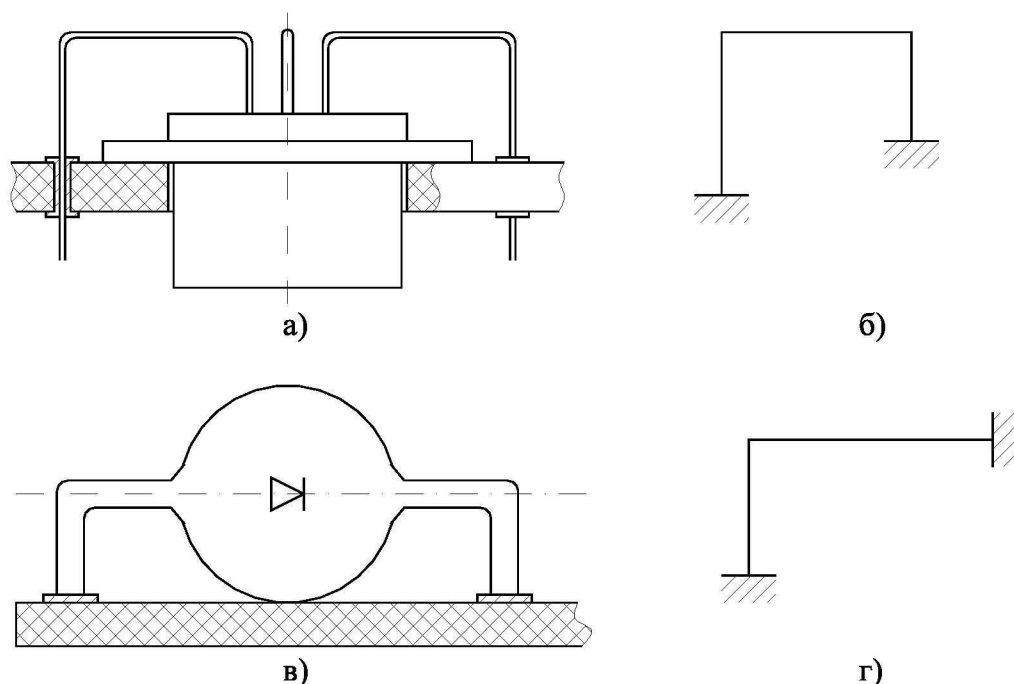


Рис. 2.4. Крепления радиоэлементов (а, в) и возможные расчетные модели выводов транзистора (б) и диода (г)

Однако если частотный диапазон возмущения узкий и элементы внутри блока достаточно жесткие, эти различия несущественны.

При расчете динамических характеристик ячеек ЭС их часто представляют в виде пластин с жестко заземленными или шарнирно закрепленными краями. У ячеек, показанных на рис. 2.1, крепление платы наиболее точно соответствует схеме упругоподатливой заделки. Так как конструктору часто неизвестен коэффициент жесткости такого крепления, то используют схему жесткого заземления (рис. 2.5, а) или шарнирного опи-

рания (рис. 2.5, б). При расчете собственной частоты колебаний в первом случае получится завышенное значение, во втором – заниженное. Масса микросхем принимается равномерно распределенной по всей площади пластины, а жесткость модели можно принять примерно равной жесткости платы [1].

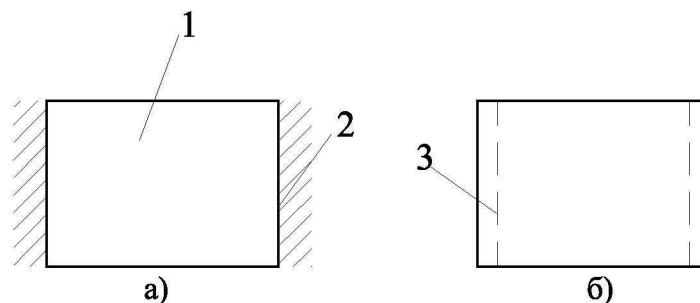


Рис 2.5. Модель ячейки:

1 – свободный край; 2 – жестко защемленный край; 3 – свободный край

2.3. СИСТЕМЫ С РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Конструкция, как и любая реальная механическая система, состоит из бесконечно большого числа материальных точек. Так как связи между ними не являются абсолютно жесткими, то все конструкции ЭС или отдельные их элементы есть системы с распределенными параметрами. Тем не менее, в практике конструирования часто используются модели механических систем с сосредоточенными массами и сосредоточенными связями (упругими и демпфирующими). Для расчета отдельных деталей типа балок, стержней и других могут использоваться и модели с распределенными параметрами. На сложность решаемой задачи в значительной степени влияет также выбор числа степеней свободы.

Числом степеней свободы механической системы называется минимальное число независимых координат, однозначно определяющих положение всех материальных точек системы в любой момент времени. Чаще всего оно равно числу возможных независимых перемещений. Любая реальная механическая система состоит из бесконечно большого числа материальных точек и поэтому имеет бесконечно большое число степеней свободы. Однако для решения практических задач реальные конструкции часто представляют упрощенными схемами, имеющими всего одну или несколько степеней свободы. В таких схемах некоторые части системы считаются совсем лишенными массы и представляются в виде деформируемых безынерционных связей, а другие части, имеющие значительную

массу, считаются или материальными точками, или абсолютно твердыми телами. На рис. 2.6 приведена схема системы с одной степенью свободы,

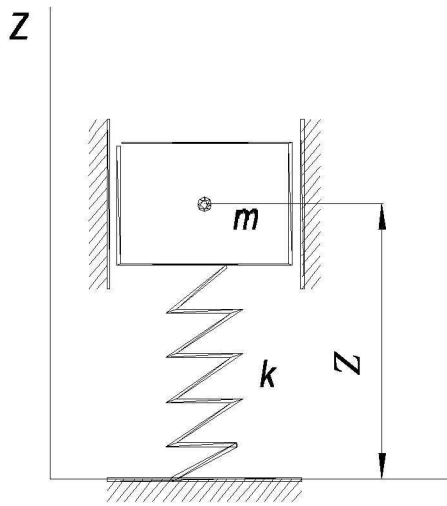


Рис. 2.6. Система с одной степенью свободы

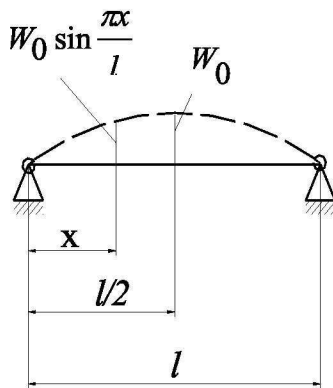


Рис. 2.7. Форма колебаний балки

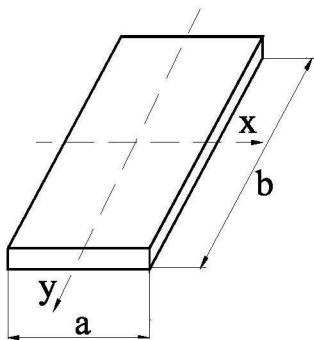


Рис. 2.8. Модель плиты

виде системы с одной степенью свободы.

В заключение отметим, что число степеней свободы зависит не только от типа конструкции, но и от характера решаемой задачи, требуемой

состоящая из абсолютно твердого тела массой m , установленного на упругом элементе с жесткостью k . Так как тело может перемещаться только в направлении оси Z , то координата Z_i полностью определяет положение системы. Иногда в расчетной схеме как бы признается, что инерцией, упругостью и другими свойствами обладают все элементы системы, но ограничение числа степеней свободы достигается априорным заданием конфигурации системы при колебаниях, т.е. *формы колебаний*. Например, при колебаниях однородной балки, шарнирно закрепленной на концах (рис. 2.7), ось изгиба может быть представлена выражением

$$W(x, t) = W_0(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right).$$

Следовательно, прогиб в любой точке оси может быть определен по известной величине $W_0(t)$. Если использовать более сложное представление оси изгиба, например

$$W(x, t) = W_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + W_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right),$$

то положение любой точки будет определяться двумя величинами $W_1(t)$ и $W_2(t)$. Следовательно, такая система имеет две степени свободы.

Для решения некоторых задач форму колебаний плиты (рис. 2.8) можно представить в виде

$$W(x, t, y) = W_0(t) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),$$

точности решения расчета и других факторов. Для практических целей обычно достаточно учитывать небольшое число степеней свободы.

2.4. КЛАССИФИКАЦИЯ И МОДЕЛИ СИЛ

В общем случае на динамическую механическую систему могут воздействовать восстанавливающие и диссипативные силы, силы инерции и вынуждающие силы. Восстанавливающими силами наиболее часто являются силы упругости, вынуждающие силы обусловлены воздействиями вибрации, удара, линейного ускорения и акустического давления.

Силы упругости. Силы упругости могут быть линейными и нелинейными. Если между силой и вызванной ею деформацией имеется линейная зависимость, упругие свойства системы с одной степенью свободы характеризуются одним числом – коэффициентом k , который определяется как отношение действующей силы P к деформации z : $k = P/z$.

Коэффициенты жесткости для некоторых простых систем приведены в табл. 2.1 [4].

Нелинейную связь между силой P и перемещением z обычно представляют графиком (рис. 2.9). Если наклон характеристики уменьшается, то она называется мягкой, если увеличивается – жесткой. Силы упругости имеют направление, противоположное перемещению.

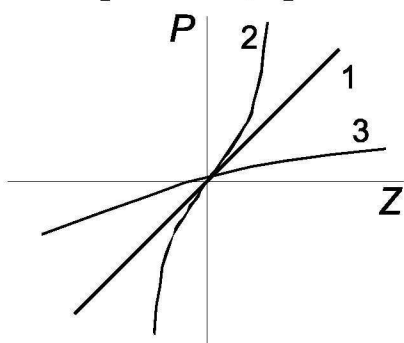


Рис. 2.9. Виды упругих характеристик: 1 – линейная; 2 – нелинейная жесткая; 3 – нелинейная мягкая

Диссипативные силы. Такие силы возникают при движении механической системы и вызывают рассеяние механической энергии, приводящее, например, к уменьшению (демпфированию) вибрации. Модели диссипативных сил зависят от механизма демпфирования. Эти механизмы различны в соединениях и материалах конструкций.

Демпфирование в соединениях.

При сухом трении, возникающем в соединениях, диссипативная сила P_d описывается выражением

$$P_d = P_0 \operatorname{sgn} \dot{z},$$

где P_0 – сила сухого трения; $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ – относительная скорость перемещения поверхностей в соединении.

Графически эта зависимость показана на рис. 2.10.

Во многих случаях разделение упругой и диссипативной силы физически невозможно. Тем не менее, можно определить величину этих составляющих, если деформировать упруго-диссипативный элемент (рис. 2.11) по закону $z = Z_0 \sin \omega t$ и определить зависимость деформации от силы. В этом случае на диаграмме сила – деформация обнаруживается различие линий нагрузки и разгрузки. Появляется так называемая петля гистерезиса (рис. 2.12). Площадь петли численно равна работе диссипативных сил и, следовательно, определяет энергию ΔW , рассеиваемую за один цикл деформирования: $\Delta W = \oint P(z, \dot{z}) dz$,

где $P(z, \dot{z})$ – обобщенная сила, учитывающая диссипативную и упругую составляющие.

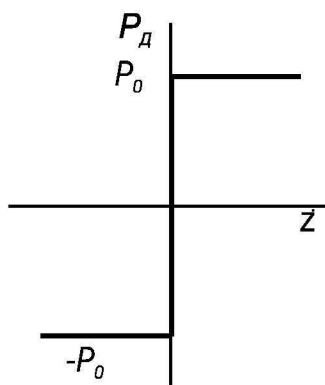


Рис. 2.10. Силовая характеристика демпфера сухого трения

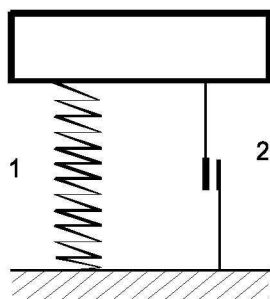


Рис. 2.11. Упруго-диссипативный элемент:
1 – упругий элемент;
2 – диссипативный элемент

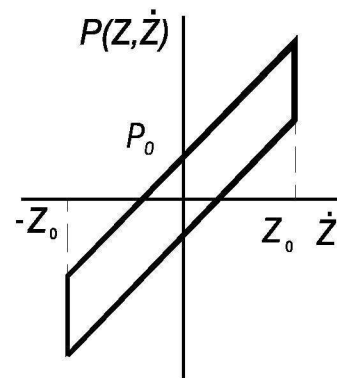
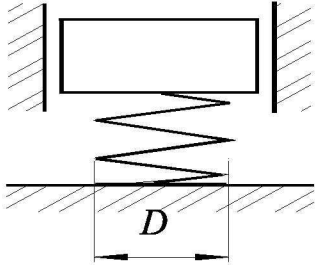
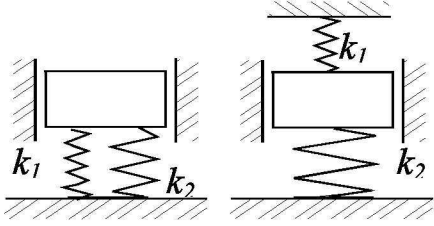
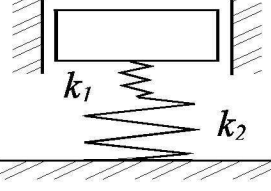
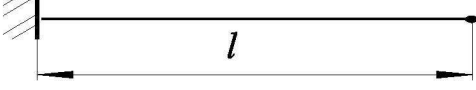
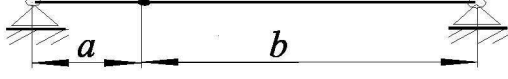
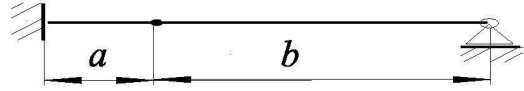
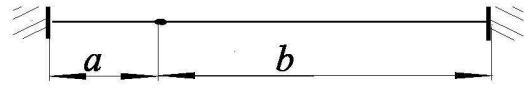
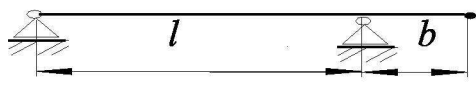
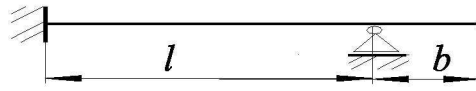


Рис. 2.12. Петля гистерезиса при сухом трении

Таблица 2.1

Коэффициент жесткости k для некоторых простых систем

Схема	Коэффициент k
	$\frac{Gd^4}{8nD^3}$ <p>где d – диаметр сечения витка, D – диаметр пружины; G – Модуль сдвига; n – ЧИСЛО ВИТКОВ</p>
	$k_1 + k_2$
	$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$
	$\frac{3EJ}{l^3}$
	$\frac{3EJ(a+b)}{a^2 b^2}$
	$\frac{12EJ(a+b)^3}{a^3 b^2 (3a+4b)}$
	$\frac{3EJ(a+b)^3}{a^3 b^3}$
	$\frac{3EJ}{(b+l)b^2}$
	$\frac{12EJ}{(4b+3l)b^3}$

Для петли гистерезиса, показанной на рис. 2.12,

$$\Delta W = 4Z_0 P_0.$$

Теоретически определить рассеянную за цикл колебаний энергию можно только для простейших соединений. Некоторые из расчетных формул приведены в справочнике [10]. Результаты экспериментальных исследований отличаются большим разбросом, но на их основе можно сделать несколько общих выводов:

– частота колебаний практически не влияет на рассеяние (поглощение) энергии;

– силы трения, действующие на поверхности контактов, приблизительно подчиняются закону Амонтона – Кулона

$$P(z) = fN,$$

где f – коэффициент трения; N – сила контактного давления.

В настоящее время практически отсутствуют работы, посвященные исследованиям демпфирования в соединениях конструкций ЭС. По данным справочника [10], в котором приводятся результаты исследований демпфирования в соединениях машиностроительных конструкций, например в плоских сухих стыках при изгибных колебаниях, коэффициент механических потерь (КМП), определяющий демпфирование, практически не зависит от давления в диапазоне $(1 \dots 20) \cdot 10^5$ Н/м². Он не зависит также от размера стыка и слабо возрастает с увеличением ширины поверхности контакта. В резьбовых соединениях КМП практически не зависит от силы затяжки в диапазоне $(2,9 \dots 15) \cdot 10^6$ Н. Результаты испытаний ячеек ЭС показывают, что их КМП лежит обычно в пределах 0,025 – 0,07. Большая доля КМП определяется демпфированием в соединениях.

Демпфирование в конструкционных материалах. Для учета внутреннего трения в конструкционных материалах часто применяются гипотезы Е.С. Сорокина и Н.Н. Давиденкова.

В соответствии с гипотезой Сорокина диссипативная сила принимается пропорциональной силе упругости

$$P_D = j\eta kz, \quad (2.1)$$

где k – коэффициент жесткости; η – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом механических потерь и определяющий, какую часть диссипативная сила составляет от силы упругости; j – мнимая единица, показывающая, что векторы сил сдвинуты на угол $\pi/2$.

Согласно гипотезе Давиденкова, называемой также гипотезой упругого гистерезиса, энергия, рассеиваемая за цикл колебаний, может быть определена по формуле $\Delta W = mZ_0^{n+1}$,

где Z_0 – амплитуда виброперемещения; n, m – коэффициенты, определяемые по виду петли гистерезиса для каждого материала отдельно.

В соответствии с этой гипотезой потери энергии зависят от амплитуды деформации (напряжения). В табл. 2.2 приведены коэффициенты механических потерь, полученные при деформациях чистого изгиба, для ряда конструкционных материалов, применяемых для изготовления несущих конструкций ЭС.

Многочисленные исследования показывают, что ΔW , а следовательно, и показатели демпфирования, зависят также от вида напряженного состояния, асимметрии цикла нагружения, структуры материала, длительности вибрационного воздействия и некоторых других факторов.

Среди материалов особое место занимают вязкоупругие материалы, часто относимые к классу полимеров. Диссипативная сила в таких материалах наиболее часто в соответствии с гипотезой Фохта принимается пропорциональной скорости

$$P_d = b\dot{z}, \quad (2.2)$$

где b – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом сопротивления

Т а б л и ц а 2.2

Демпфирующие свойства конструкционных материалов

Материал	Напряжение $\sigma \cdot 10^7, \text{Н/м}^2$	$\eta \cdot 10^{-2}$
Алюминиевый сплав АЛ - 9	2 – 10	0,06 – 0,14
Алюминиевый сплав Д - 16	2 – 8	0,08 – 0,22
Магниевый сплав АмцАМ	1,5 – 6	0,12 – 0,22
Магниевый сплав Амг	2 – 8	0,1 – 0,13
Магниевый сплав Мл5	1,5 – 6	0,05 – 0,12
Красная медь	2 – 16	0,15 – 4
Латунь ЛС59 - 1	5 – 15	0,05 – 0,1
Текстолит	1 – 4	0,5 – 1,3
Гетинакс	1 – 4	0,05 – 1,3
Стеклотекстолит	0,5 – 4	0,3 – 1,3

Применяются также гипотезы Максвелла – Каргина, Слонимского и другие.

Так как вязкоупругие материалы, называемые также вибропоглощающими, применяются для создания полимерных демпферов, они подробно рассмотрены в п.2, главе 6.

Модели вынуждающих сил – вибраций, ударов, линейных перегрузок и акустических давлений, называемых механическими воздействиями, рассмотрим в §2.5.

2.5. МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Как отмечалось раньше, к механическим воздействиям относятся линейные ускорения, вибрации, удары.

Непосредственное воздействие вынуждающей силы на аппарат (или на какой-нибудь элемент его конструкции) будем называть *силовым возбуждением*. Случай, когда заданы законы движения отдельных точек системы (например, закон движения основания), будем называть *кинематическим возбуждением*.

Под **вибрацией** аппаратуры понимают механические колебания её элементов или конструкции в целом. Вибрация может быть периодической и случайной. В свою очередь, периодическая вибрация может быть гармонической и полигармонической, а случайная – стационарной, нестационарной, узкополосной и широкополосной.

Гармоническая вибрация (рис. 2.13 а) сравнительно редко встречается

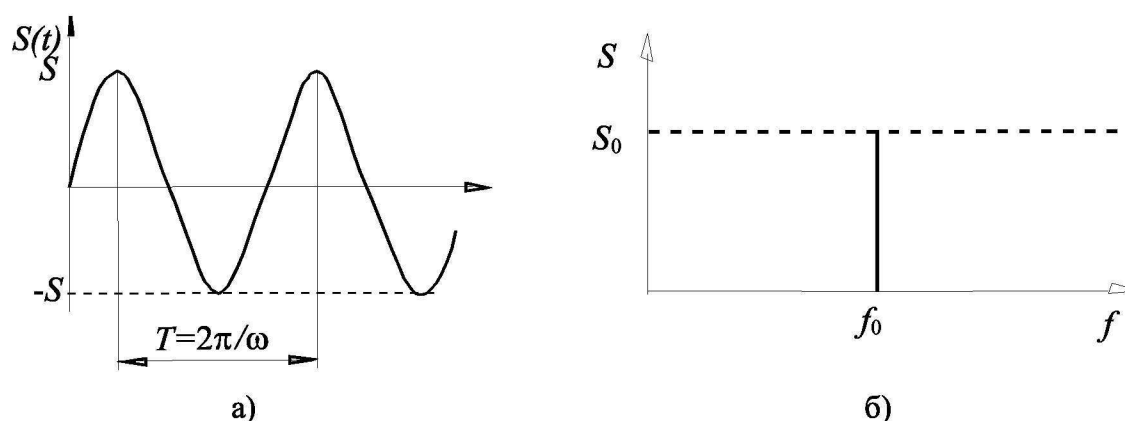


Рис. 2.13. Гармоническая вибрация: а – форма; б – частотный спектр

ся в реальных условиях, но широко используется при лабораторных испытаниях и при анализе, она важна также при определении динамических ха-

рактических конструкций, которые используются для нахождения реакции системы при более сложных формах вибрации.

Виброперемещение при гармонической вибрации описывается выражением

$$z(t) = S \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.3)$$

где S – амплитуда виброперемещения, ω – угловая частота, t – время, φ – начальная фаза колебаний.

Виброскорость и виброускорение находят путём последовательного дифференцирования выражения (2.3):

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \omega S \cos \omega t, \\ \ddot{z}(t) &= -\omega^2 S \sin \omega t, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ωS – амплитуда виброскорости; $S = \omega^2 S$ – амплитуда виброускорения, S .

Сравнивая (2.3), (2.4), можно заключить, что при синусоидальных колебаниях ускорение опережает по фазе перемещение на угол π . Так как выражение $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, называемое уравнением Эйлера, также описывает гармонические колебания с угловой частотой ω , то для описания гармонической вибрации часто используется комплексная форма записи в виде

$$z(t) = S e^{j\omega t}, \quad (2.5)$$

таким образом, основными характеристиками гармонической вибрации являются: амплитуда виброперемещения, виброскорости, виброускорения и угловая частота колебаний.

Гармоническая вибрация часто характеризуется коэффициентом виброперегрузки:

$$n_b = \frac{S_0}{g} = \frac{S\omega^2}{g} = \frac{Sf^2}{250}, \quad (2.6)$$

где f – частота, Гц; S – амплитуда виброперемещения, мм.

Полигармоническую вибрацию создают электродвигатели, вентиляторы и другие электромеханические устройства, имеющие несбалансированные быстровращающиеся массы. Такую вибрацию, как показано на

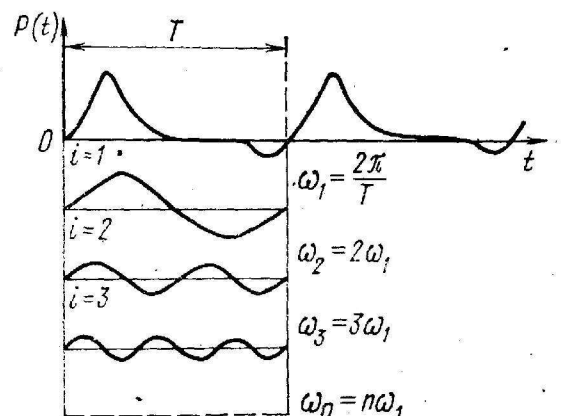


Рис. 2.14. Разложение периодической кривой в гармонический ряд

рис. 2.14, можно разложить на сумму гармонических составляющих. Аналитически это разложение может быть представлено рядом Фурье

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t), \quad (2.7)$$

где $\omega_i = i\omega$, $\omega = 2\pi/T$ – основная частота, соответствующая периоду изменения возмущающей силы.

Коэффициенты разложения a_i и b_i определяются по известным формулам

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos i \omega t dt; \quad b_i = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin i \omega t dt \quad (2.8)$$

и представляют собой амплитуды косинусных и синусных составляющих каждой из этих гармоник. Амплитуда S_i и начальная фаза φ_i каждой i -й гармоники с частотой $\omega_i = i\omega$ определяется по формулам

$$S_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}; \quad \text{tg } \varphi_i = b_i/a_i.$$

В комплексной форме ряд Фурье имеет вид

$$P(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_i e^{ji\omega t}, \quad (2.8a)$$

где $A_i = \frac{1}{i} \int_0^t P(t) e^{ji\omega t} dt$.

Коэффициент $a_0/2$ соответствует среднему значению периодической возбуждающей силы $P(t)$.

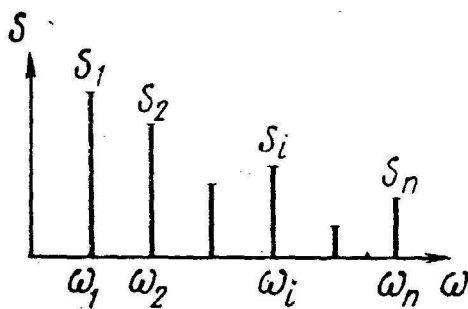


Рис.2.15. Амплитудный спектр периодического процесса

Совокупность частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, расположенных в порядке их возрастания, называется *частотным спектром*, а совокупность амплитуд S_1, S_2, \dots, S_n – амплитудным спектром данного периодического возмущения (рис. 2.15).

Вибрация, параметры которой (амплитуда виброперемещения, частота и др.) изменяются во времени случайным образом, называется *случайной*. Она может быть стационарной и нестационарной. У стационарной

вибрации математическое ожидание виброперемещения равно нулю, математическое ожидание виброскорости и виброускорения постоянны, корреляционная функция не зависит от начала отсчета. У нестационарной вибрации постоянства статических характеристик не наблюдается. К такому виду можно отнести вибрацию, возникающую при движении транспортных средств, при работе реактивных двигателей.

Наиболее информативной характеристикой стационарного случайного процесса является корреляционная функция. Поэтому определение реакции динамической системы сводится к решению задачи о преобразовании корреляционной функции износа. Такой метод получил название *корреляционного* метода. Его разновидностью, широко применяемой на практике, является *спектральный* метод, основанный на возможности спектрального разложения стационарного случайного процесса. Важнейшая характеристика спектрального разложения – спектральная плотность дисперсии, или просто спектральная плотность $S_z(\omega)$ виброперемещения (виброускорения):

$$S_z(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_z}{\Delta\omega}, \quad (2.9)$$

где D_z – дисперсия виброперемещения.

Если спектр непрерывный, она может быть представлена в виде некоторой кривой (рис. 2.16).

Используя прямое и обратное преобразования Фурье, можно записать:

$$S_z(\omega) = \frac{2}{\pi_0} \int_0^{\infty} k_z(\tau) \cos \omega\tau d\tau ;$$

$$k_z(\tau) = \int_0^{\infty} S_z(\omega) \cos \omega\tau d\omega, \quad (2.10)$$

где k_z – корреляционная функция.

Используя формулу (2.10), нетрудно убедиться, что среднеквадратическое (действующее) значение процесса

$$\sigma_z = \sqrt{D_z} = \sqrt{k_z(0)} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_z(\omega) d\omega} .$$

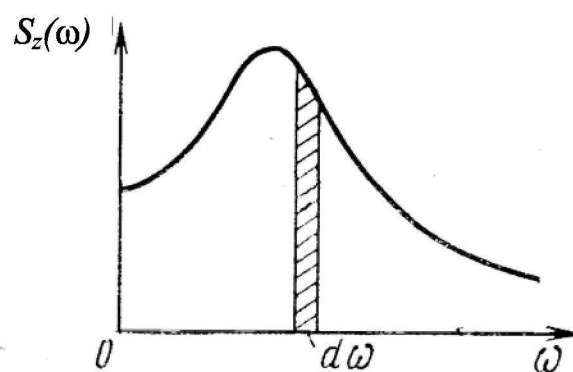


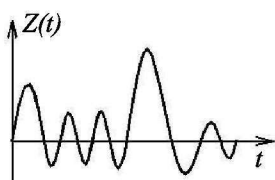
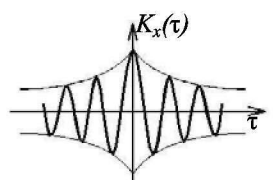
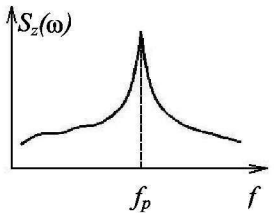
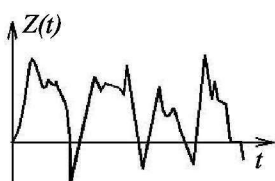
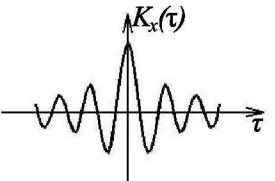
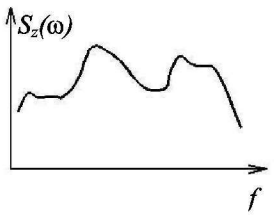
Рис.2.16. График спектральной плотности

$$(2.11)$$

Случайная вибрация может рассматриваться как белый шум, марковский процесс, но наиболее часто представляется как узкополосный случайный процесс. Основой деления случайной вибрации на узко- и широкополосную является относительная ширина полосы частот относительно средней частоты. Некоторые характеристики узко- и широкополосного процессов показаны в табл. 2.3.

Т а б л и ц а 2.3

Графическое представление характеристик вибрационных процессов

Название процесса	Изображение процесса	Автокоррекция функция	Спектральная плотность
Узкополосный			
Широкополосный			

Кроме вибрации, аппаратура может подвергаться **ударным воздействиям**, возникающим при транспортировке, монтаже или эксплуатации, при действии ударной волны и т. д. В процессе удара нагрузки к элементам

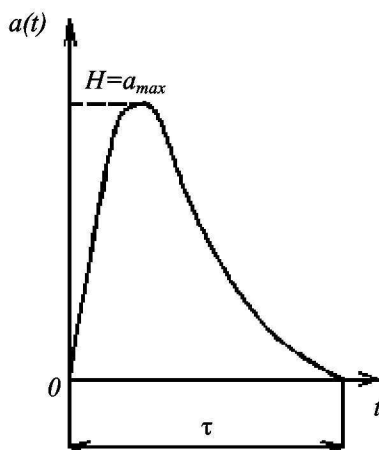


Рис. 2.17. Графическое изображение ударного импульса

аппаратуры прикладываются в течение короткого промежутка времени τ . Вследствие этого возникающие ускорения элементов аппаратуры могут достигать больших значений [5] и вызывать различные повреждения. Интенсивность ударного воздействия зависит от формы, амплитуды и длительности ударного импульса.

Формой ударного импульса называется зависимость ударного ускорения от времени $a(t)$ (рис. 2.17). Для упрощения при расчете ударных воздействий форму ударного импульса идеализируют, заменяя ее подходящей более простой

формой, например прямоугольной, треугольной, полусинусоидальной. При замене реального импульса идеализированным особое внимание обращается на крутизну *фронта* и *среза*, так как от них зависит «жесткость» удара. *Амплитудой* импульса называют максимальное значение ударного ускорения A , а *длительностью* – интервал времени действия импульса τ . Эти три характеристики – $a(t)$, A и τ – задаются обычно для расчета ударных воздействий и конструирования средств защиты.

На рис. 2.18 приведены простейшие формы ударных импульсов.

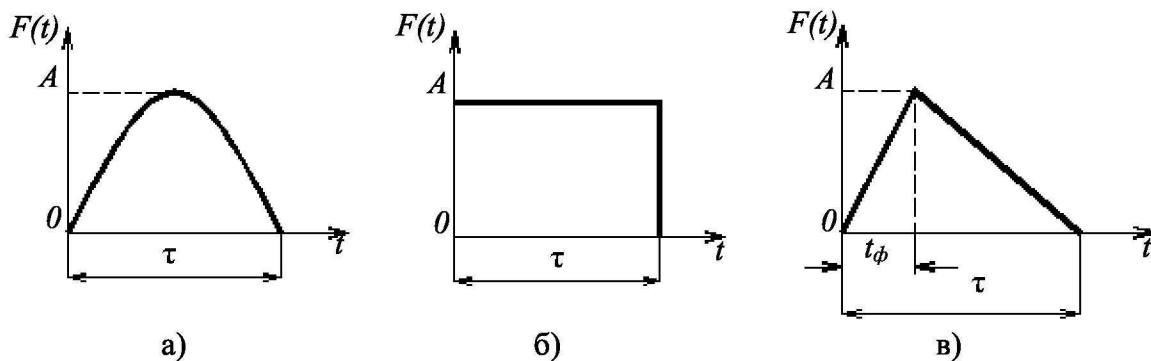


Рис. 2.18. Формы ударных импульсов:

а – полусинусоидальная; б – прямоугольная; в – треугольная

Математическая модель полусинусоидального импульса

$$F(t) = A \sin \omega t \text{ при } 0 \leq t < t_\phi;$$

$$F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau,$$

прямоугольного – $F(t) = A$ при $0 \leq t < \tau$;

$$F(t) = 0 \text{ при } t \geq \tau,$$

треугольного – $F(t) = \frac{At}{\tau}$ при $0 \leq t < \tau$;

$$F(t) = \frac{A}{\tau - t_\phi} (\tau - t) \text{ при } t_\phi \leq t < \tau.$$

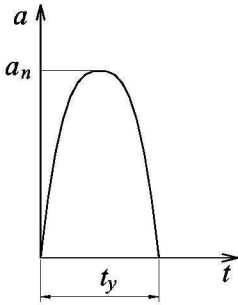
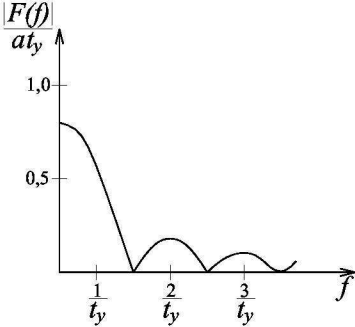
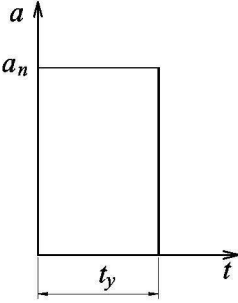
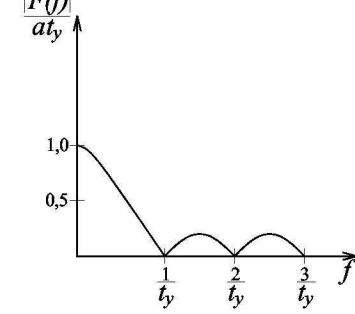
Представление ударных импульсов в виде простейших форм оправдано не всегда. К более точным результатам приводит представление ударного процесса в виде частотного спектра $F(\omega)$, получаемого путем преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{j\omega t} dt .$$

В табл. 2.4 приведены примеры ударных импульсов и соответствующие им частотные спектры [2].

Т а б л и ц а 2.4

Ударные импульсы и ударные спектры

Импульс	Функция времени	Частотный спектр
Полусинусоидальный		
Прямоугольный		

Линейные ускорения характерны для всех объектов, движущихся с переменной скоростью (например, при разгоне, торможении). Влияние линейных ускорений на детали конструкций и электрорадиоэлементы обусловлено инерционными силами, которые могут достигать и во много раз превышать силы тяготения. Так, если на элемент с массой m в состоянии покоя действует сила тяжести $G = mg$, то при наличии ускорения тот же элемент дополнительно подвергается воздействию силы инерции $P_{\text{и}} = ma(t)$, тогда результирующая сила составит $\vec{P}_{\text{р}} = \vec{G} + \vec{P}_{\text{и}}$, а результирующее ускорение $\vec{a}_{\text{р}}(t) = \vec{g} + \vec{a}(t)$.

При движении объекта по криволинейной траектории, например по дуге окружности радиуса R , элементы конструкции аппарата будут испытывать центробежное ускорение:

$$a = m\Omega^2 R = mV^2/R, \quad (2.12)$$

где Ω – угловая, а V – линейная скорости движения объекта.

При расчетах аппаратуры, работающей в условиях линейных ускорений, последние обычно считаются равными максимальному их значению за время их действия либо изменяющимися по ступенчатому или линейному закону. В технических условиях на аппаратуру часто задают закон, изменения ускорения во времени $a(t)$ и длительность его действия τ (рис. 2.19) в виде ступенчатой функции. Отношение действующего ускорения к ускорению свободного падения называют перегрузкой :

$$n = a / g.$$

Трудность борьбы с влиянием линейных перегрузок заключается в том, что они практически не поддаются ослаблению. Только в случае кратковременного действия линейных перегрузок могут быть использованы некоторые конструктивные меры защиты [5]. Во всех же остальных случаях обеспечение работоспособности элементов конструкции может быть достигнуто только за счет увеличения их жесткости или прочности, что ведет к увеличению массы. Так как нагрузкой для элементов являются силы инерции, то повышение их прочности может быть достигнуто за счет применения материалов с более высоким отношением $[\sigma]/\rho$, где $[\sigma]$ – допустимое напряжение, ρ – плотность.

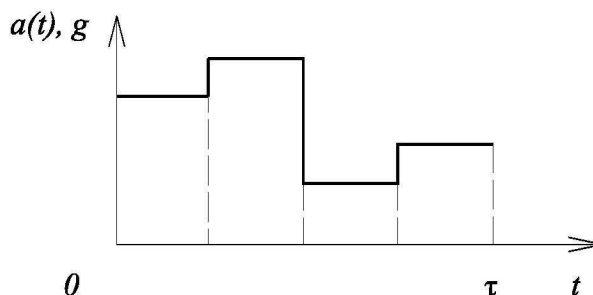


Рис. 2.19. Закон изменения линейного ускорения

Акустические шумы можно характеризовать как вибрационный волновой процесс, распространяющийся в газообразных, жидких и твердых средах и имеющий практически непрерывный частотный спектр.

Источником акустического шума чаще всего бывает вибрирующее твердое тело, механические колебания которого вызывают возбуждение звуковых волн в окружающей среде. Однако интенсивные акустические шумы могут генерироваться и непосредственно в газообразных и жидких средах благодаря различным физическим явлениям, происходящим в них.

Примерами интенсивных акустических шумов природного происхождения являются грозовые разряды, во время которых генерируются также интенсивные электромагнитные импульсы.

Значительные акустические шумы возникают при работе реактивных двигателей, взрывах, стрельбе, движении транспортного средства со сверхзвуковыми скоростями и т.п. Однако конструктор РЭС должен иметь в виду, что действие акустических шумов может проявляться и в стационарной аппаратуре, например при работе электродинамических громкоговорителей. При этом может возникнуть так называемая акустическая обратная связь, приводящая к нарушению нормального функционирования аппаратуры.

Формой существования и распространения акустических шумов является, как было указано выше, звуковая волна. Звуковой волной называется процесс распространения деформаций сжатия и разряжения в сплошной среде, происходящий с конечной скоростью (скоростью звука). Скорость звука зависит от параметров среды, в которой распространяется звуковая волна.

Звуковая волна может возникать и распространяться только в такой среде, которая обладает определенной упругостью (сжимаемостью) и инерционностью (плотностью). Реальная среда, кроме того, характеризуется еще и диссипативными свойствами, приводящими к потерям энергии волнового движения. Область среды, в которой возбуждены звуковые волны, называется звуковым полем.

Акустический шум представляет собой случайный процесс, и поэтому при измерении его параметров используют такие же энергетические величины, как при измерении случайных вибраций.

Кроме того, акустические шумы характеризуют звуковое давление, интенсивность звука и другие параметры.

Звуковое давление – давление, дополнительно возникающее в газообразной или жидкой среде при прохождении через нее звуковых волн. Звуковое давление – величина переменная, меняющаяся периодически с частотой, равной частоте звуковых колебаний $P(t) = P_m \sin \omega t$, где P_m – амплитуда звукового давления, $P_m = \omega c_0 \rho_0 A_m$; ω – угловая частота колебаний, c – скорость распространения звуковой волны в воздухе, м/с ($c_0 = 3,41 \cdot 10^2$ м/с при нормальном атмосферном давлении, температуре 20°C и плотности

воздуха $\rho_0 = 1,22 \text{ кг/м}^3$); A_m – амплитуда колебаний частиц среды, м. Звуковое давление измеряется в паскалях (Па).

Пороговое минимальное звуковое давление, воспринимаемое человеком с нормальным слухом при частоте 1000 Гц, определено $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па. Диапазон изменения звукового давления можно выразить в децибелах (дБ) относительно порогового уровня:

$$L = 20 \lg \frac{P}{P_0} = 20 \lg \frac{P}{2 \cdot 10^{-5}},$$

где P – измеренное значение звукового давления в воздухе.

Предельное максимальное звуковое давление, достижимое в воздухе при нормальном атмосферном давлении $P_a = 1,013 \cdot 10^5$ Па, составляет примерно $P_{\max} = 2 \cdot 10^5$ Па, или 200 дБ.

2.6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА

Уравнения движения (уравнения динамики), описывающие колебательные процессы, называются также уравнениями колебаний. В общем случае на основе принципа Даламбера они включают восстанавливающие, диссипативные, вынуждающие силы и силы инерции. Имеются отличия в составлении уравнений движения систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. При составлении уравнений движения систем с сосредоточенными параметрами могут использоваться два способа – основной и прямой [4].

При основном способе используют уравнения Лагранжа [4], которые представляют наиболее общую форму уравнений движения и могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + F(t) \quad (2.13)$$

где $F(t)$ – внешняя сила; Π , Γ , Φ – соответственно потенциальная, кинетическая энергия системы и диссипативная сила, определяемые выражениями:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S k_{ij} q_i q_j; \quad \Gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad \Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^S b_{ij} q_i q_j. \quad (2.14)$$

В этих выражениях s – число степеней свободы; a_{ij} , k_{ij} , b_{ij} – соответственно коэффициенты инерции, упругости и диссипации, q_i – обобщенная координата; \dot{q}_i – обобщенная скорость. Например, уравнение вынужденных колебаний для системы с одной степенью свободы может быть сразу записано из уравнения Лагранжа при $s = 1$:

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + kq = F(t). \quad (2.15)$$

При прямом способе массы мысленно отделяют от упругого скелета системы и для каждой из них записывают дифференциальное уравнение движения. При этом действия упругих связей заменяют их реакциями. Например, для системы, показанной на рис. 1.6 можно записать уравнение движения в виде

$$m\ddot{z} + kz = 0, \quad (2.16)$$

где $m\ddot{z}$ – сила инерции; kz – сила упругости.

В наиболее общем случае трехмерной конструкции с распределенными параметрами колебания механической системы могут быть представлены через уравнения колебания отдельных точек системы, называемых уравнениями Ламе. В прямоугольной системе координат они имеют вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}; \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) &= \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)};$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Здесь E – модуль упругости; ρ – плотность материала; ν – коэффициент Пуассона. U , V , W – отклонения точки от положения равновесия в направлении осей x , y , z прямоугольной системы координат.

Уравнения Ламе могут применяться и для анализа дискретных систем, если систему с распределенными параметрами заменить системой с дискретными параметрами.

Решение системы уравнений Ламе в общем случае сложно, поэтому по возможности их стремятся упростить. При этом используются особенности формы конструкций и различные гипотезы об их деформировании. При расчете пластин, например, можно исключить координату Z , а при расчете балок – координаты Y и Z . Трехмерная задача в этих случаях приводится соответственно к двухмерной и одномерной. Если при этом использовать гипотезу прямых нормалей [6], получим известные уравнения свободных изгибных колебаний

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = 0 \quad (2.18)$$

для пластин и

$$m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0 \quad (2.19)$$

для балок.

В этих уравнениях

$$D = \frac{EH^3}{2(1-\nu^2)} - \quad (2.20)$$

цилиндрическая жесткость пластины, EJ – жесткость балки на изгиб.

Уравнения (2.18) и (2.19) могут быть получены и при помощи обратного способа составления уравнений движения.

Сущность обратного способа, применяемого, как правило, для систем с распределенными параметрами, состоит в мысленном отделении всех масс системы от ее упругого скелета и рассмотрении его деформации под действием сил инерции и внешних сил [4]. Например, из статической теории изгиба балок известно дифференциальное уравнение упругой линии балок

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = q(x) \quad , \quad (2.21)$$

где $W = W(x)$ – прогибы от поперечной нагрузки $q(x)$; E – модуль продольной упругости; J – момент инерции сечения.

Если считать, что внешние силы являются инерционными, то, заменяя в уравнении (2.21) статическую силу $q(x)$ силой инерции $m \partial^2 W / \partial t^2$, получим уравнение (2.19) свободных незатухающих колебаний балки.

Аналогично, учитывая известное из теории упругости дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины, находящейся под статической нагрузкой $q(x, y)$,

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q(x, y) \quad (2.22)$$

получим уравнение (2.18) свободных незатухающих колебаний пластины.

Если в выражения (2.21) и (2.22) добавить силы трения, то получим уравнения свободных затухающих колебаний стержня и пластины, а после добавления внешних вынуждающих сил – уравнения вынужденных колебаний систем с затуханием.

Несмотря на то, что уравнения (2.21), (2.22) не являются волновыми, так как не учитывают инерцию вращения и деформацию сечений, они позволяют получать в большинстве случаев приемлемые результаты при колебаниях на частотах до 3 – 5 кГц.

Уравнения (2.21), (2.22) решаются сравнительно просто для стационарных задач, к которым относятся и задачи об определении собственных частот и амплитуд резонансных колебаний. В этих случаях движения всех точек происходят по известному закону, например гармоническому, что позволяет представить решение в виде простой функции времени и исключить его после подстановки решения в данные уравнения.

Методы решения уравнений движения могут быть аналитическими и численными. Аналитические методы, к которым относятся методы разделения переменных, позволяют получить решение в виде формулы или

группы формул, анализ которых дает наглядное представление о влиянии конструктивных параметров на характеристики динамических процессов и оптимизировать конструкции. Основным недостатком аналитических методов в трудности математического описания собственной формы колебаний и граничных условий для сложных конструкций. Поэтому аналитические методы наиболее часто применяют для конструкций простой формы с “классическими” способами крепления типа жесткого защемления, свободного опирания или незакрепленного края пластины или конца балки.

Численные методы, среди которых наибольшее применение получили методы конечных элементов (МКЭ), конечных разностей (МКР), граничных элементов, не имеют принципиальных препятствий для решения сложных конструкций со сложными способами крепления. Характерной для них является замена исходных дифференциальных уравнений алгебраическими за счет дискретизации конструкции. К недостаткам этих методов относятся [6]:

- необходимость решения большой системы алгебраических уравнений;
- решение получается в виде таблицы чисел, и любое изменение конструкции приводит к необходимости решения на ЭВМ;
- дискретизация приводит к погрешности, оценка которой часто более сложная задача, чем нахождение основного решения.

Поэтому применение численных методов целесообразно, если аналитические методы не пригодны. Это объясняет целесообразность параллельного развития как аналитических, так и численных методов. Можно ожидать наибольшего эффекта от разумного сочетания этих методов.

Контрольные вопросы

1. Какие виды моделей конструкций ЭС применяются?
2. Приведите примеры моделей геометрической формы и способов крепления.
3. Что понимается под степенью свободы механической системы?
4. Какие силы действуют при колебаниях систем? Напишите их математические модели.
5. Расскажите о гипотезах Сорокина и Фохта.
6. Что понимается под гармонической и полигармонической вибрацией? Приведите их математические описания.

7. Дайте характеристику случайной вибрации.
8. Какими параметрами описывается ударный импульс? Приведите формы ударных импульсов.
9. Что понимается под линейным ускорением?
10. Какие применяются уравнения колебаний систем с сосредоточенными параметрами?
11. Расскажите об уравнениях колебаний систем с распределенными параметрами.

Глава 3

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ, ПРИВОДИМЫХ К СИСТЕМАМ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Свободные колебания. Можно рассматривать свободные колебания без затухания и с затуханием. Несмотря на то, что свободные колебания без затухания в природе не встречаются, их анализ часто проводится с целью определения собственных частот колебаний системы.

Допустим, что состояние равновесия системы, показанной на рис. 2.6, каким-то образом нарушено. Тогда движение системы будет представлять свободные колебания, описываемые выражением (2.16):

$$m\ddot{z} + kz = 0,$$

или, учитывая, что свободные колебания линейных систем являются гармоническими,

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (3.1)$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \quad (3.2)$$

постоянная, определяемая только свойствами системы.

Очевидно, что частными решениями уравнения (3.1) являются $z = C_1 \sin \omega_0 t$ или $z = C_2 \cos \omega_0 t$, а его общее решение (общий интеграл)

$$z = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t, \quad (3.3)$$

где C_1 и C_2 – постоянные, определяемые из начальных условий.

Принимая эти условия ($t = 0, z = z_0, \dot{z} = \dot{z}_0$) из уравнения (3.3) найдём

$$C_1 = \frac{\dot{z}_0}{\omega_0} \text{ и } C_2 = z_0$$

Выражение (3.3) можно также представить в виде

$$z = A \sin(\omega_0 t + \alpha), \quad (3.4)$$

где $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ – амплитуда колебаний; $\alpha = \text{arctg} \frac{C_2}{C_1}$ – начальная фаза.

Из выражения (3.4) видно, что движение системы повторяется после такого промежутка времени T , когда аргумент $\omega_0 t + \alpha$ возрастает на 2π , то есть должно быть $\omega_0(t + T) + \alpha = \omega_0 t + \alpha + 2\pi$.

Отсюда период колебаний $T = 2\pi/\omega_0$, а постоянная ω_0 имеет смысл *собственной угловой частоты колебаний*.

К уравнению типа (2.16) приводятся многие задачи о колебаниях механических систем и в этих случаях собственная угловая частота колебаний может быть найдена по формуле (3.2).

Отметим, что формулу (3.2) для собственной частоты колебаний можно получить используя закон сохранения энергии, в соответствии с которым в системах без потерь энергии справедливо равенство

$$T_{\max} = \Pi_{\max}, \quad (3.5)$$

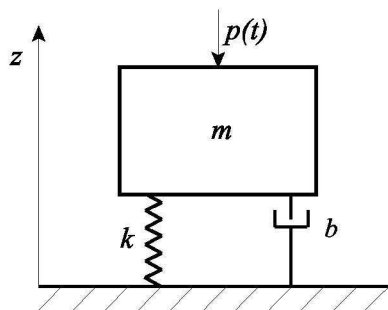
где T_{\max} , Π_{\max} – соответственно максимальные кинетическая и потенциальная энергии.

Для системы на рис. 2.6 можно записать

$$\Pi_{\max} = \frac{kz_0^2}{2}, \quad T_{\max} = \frac{k\dot{z}_0^2}{2}.$$

Учитывая выражение (3.4), находим $\dot{z} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$, то есть амплитуда $\dot{z}_0 = \omega_0 A$. Приравняв Π_{\max} и T_{\max} , получим формулу для собственной частоты, аналогичную (3.2).

Силовое гармоническое возбуждение линейной системы. Уравнение движения такой системы (рис. 3.1) при действии силы $p(t) = P_0 e^{j\omega t}$ с амплитудой P_0 и частотой ω можно представить в следующем виде:



$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = P_0 e^{j\omega t}, \quad (3.6)$$

где k , b – коэффициенты жесткости и сопротивления соответственно.

Общее решение уравнения (3.6) состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения и одного из частных решений уравнения (3.6). Физически этот результат представляет собой наложение свободных и вынужденных колебаний системы, и результирующее колебание не будет гармоническим. Однако так как через определенный промежуток времени свободные колебания затухнут, то для практики представляет интерес вторая, «стационарная» часть решения. Она может быть представлена в виде:

$$z = z(t) = Z_0 e^{j(\omega t + \alpha)}, \quad (3.7)$$

где Z_0 – амплитуда вибрации; α – сдвиг фаз между силой и перемещением:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{k - m\omega^2}.$$

Подставляя решение (3.7) в уравнение (3.6), получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega b + k)z(t) = p(t),$$

откуда $z(t) = p(t)H_z(j\omega)$. Величина

$$H_z(j\omega) = 1/(k - m\omega^2 + j\omega b), \quad (3.8)$$

являющаяся по смыслу передаточной функцией, называется *частотной характеристикой* системы. Она показывает, как изменяется амплитуда Z_0 вынужденных колебаний с изменением частоты возбуждения ω . Знаменатель выражения (3.8) называется *динамической жесткостью* системы. Она характеризует сопротивление системы воздействию гармонической силы.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$Z_0 = |z(t)| = \frac{z_{ст}}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}}, \quad (3.8a)$$

где $z_{ст} = P_0/k$ – статическое смещение системы под воздействием силы P_0 ; $\nu = \omega/\omega_0$ – коэффициент расстройки, или частотное отношение;

$$\eta = b\omega_0/k - \quad (3.8b)$$

коэффициент механических потерь (КМП). Из (3.8a) находим одну из основных динамических характеристик системы – коэффициент динамического усиления, или *коэффициент динамичности*:

$$\mu = \frac{Z_0}{z_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}}, \quad (3.9)$$

который показывает, как изменяется амплитуда S_b вынужденных колебаний системы по отношению к ее статическому смещению под действием силы P_0 в зависимости от коэффициента расстройки ν .

Для системы с диссипативной силой в виде $j\eta kz$ уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{z} + (1 + j\eta)kz = P_0 e^{j\omega t}. \quad (3.10)$$

Подставляя в это уравнение частное решение (3.5), получаем:

$$Z_0 = |z(t)| = z_{ст} / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2},$$

откуда находим коэффициент динамического усиления

$$\mu = Z_0 / z_{\text{н}0} = 1 / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2}. \quad (3.11)$$

Для расчета резонансных амплитуд необходимо в формулы (3.9) или (3.11) подставить значение $\nu = 1$. Тогда получим: $\mu = 1/\eta$ независимо от принимаемой модели диссипативной силы.

Кинематическое гармоническое возбуждение. Пусть основание системы (рис. 3.2) перемещается по гармоническому закону

$$z_1 = z_1(t) = Z_{01} e^{j\omega t}, \quad (3.12)$$

где Z_{01} – амплитуда виброперемещения основания.

Тогда уравнение движения системы с вязким трением имеет вид:

$$m\ddot{z} + b(\dot{z} - \dot{z}_1) + k(z - z_1) = 0. \quad (3.13)$$

Здесь $z - z_1 = \xi$ – упругая деформация связей.

Подставляя в это уравнение частное решение в виде выражения (3.5), где угол α будет определять сдвиг фаз между перемещением основания и системы, и выражение для виброперемещения основания z_a из (3.12), после преобразований получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega b + k)z = (j\omega b + k)z_1, \quad (3.13a)$$

откуда найдем передаточную функцию

$$H(j\omega) = z/z_1 = (k + j\omega b)/(k - m\omega^2 + j\omega b). \quad (3.13b)$$

Амплитуда колебаний системы

$$Z_0 = |z| = |z_1| \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2 b^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2 b^2}} = Z_{01} \frac{\sqrt{1 + \eta^2 \nu^2}}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2}}.$$

Величина

$$\mu = Z_0 / Z_{01} = \sqrt{1 + \eta^2 \nu^2} / \sqrt{(1 - \nu^2)^2 + \eta^2 \nu^2} \quad (3.14)$$

получила название *коэффициента передачи*. Она выражает соотношение между амплитудами Z_0 системы и Z_{01} основания при кинематическом возбуждении колебаний.

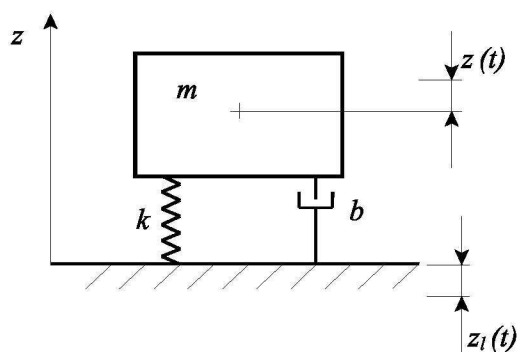


Рис. 3.2. Система с одной степенью свободы при кинематическом возбуждении

Подставляя в выражение (3.13) переменную ξ и используя формулу (3.12), получаем уравнение, описывающее деформацию связи в процессе колебаний:

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + k\xi = m\omega^2 Z_{01} e^{j\omega t}.$$

Принимая решение этого уравнения в виде $\xi_1 = \xi_0 e^{j\omega t}$, где ξ_0 – амплитудное значение деформации, получаем:

$$(-m\omega^2 + j\omega b + k)\xi = m\omega^2 z_1.$$

Отсюда найдем коэффициент передачи для деформации связи

$$\mu_1 = \frac{\xi_0}{Z_{01}} = \frac{v^2}{\sqrt{(1-v^2)^2 + \eta^2 v^2}}. \quad (3.15)$$

При $v = 0$ $\mu_1 = 0$; при $v = 1$ $\mu_1 = 1/\eta$; при $v \rightarrow \infty$ $\mu_1 = 1$.

Для системы с демпфированием, пропорциональным перемещению, уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{z} + (1 + j\eta)(z - z_1)k = 0. \quad (3.16)$$

Подставляя в это уравнение выражения (3.7) и (3.12), получаем:

$$Z_0 = |z| = \left[\frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\sqrt{(1-v^2)^2 + \eta^2}} \right] Z_{01}.$$

Следовательно, коэффициент передачи

$$\mu = \sqrt{1+\eta^2} / \sqrt{(1-v^2)^2 + \eta^2}. \quad (3.17)$$

График зависимости величины μ от коэффициента v приведен на рис. 3.3.

Эти графики позволяют объяснить основные способы виброзащиты ЭС – виброизоляция, частотную отстройку, вибродемпфирование. Как видим, на рис. 3.3 можно выделить три области.

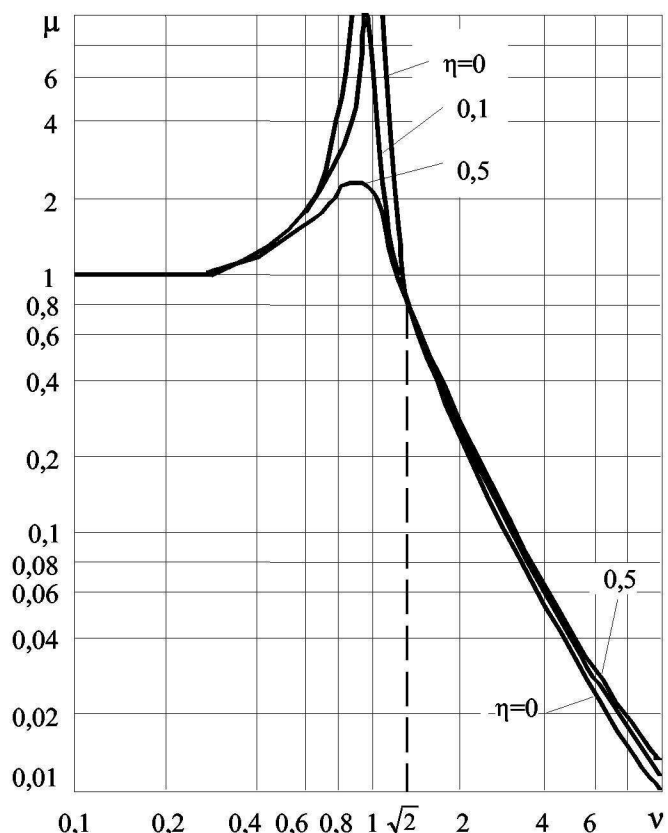


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента передачи от коэффициента настройки для деформации связи

Первая, при $\nu < 0,4$ и $\mu \approx 1$, называется областью *дорезонансных колебаний*. Так как $\nu = f/f_0$, для этой области справедливо неравенство $f_0 > 2,5f$. То есть для исключения возможности резонансных колебаний необходимо, чтобы собственная частота колебаний f_0 в 2,5 раза превышала частоту возбуждения. На практике чаще используют соотношение

$$f_0 > 2f. \quad (3.18)$$

Это объясняется тем, что в государственных стандартах [27,28] указано: резонанс отсутствует, если $\mu \leq 2$. Это условие обычно выполняется при соотношении $\nu < 0,5$, из которого и получается условие (3.18). Этот способ устранения резонансных колебаний называется *частотной отстройкой*. Его обычно применяют, если частоты возбуждающих колебаний не превышают 500 Гц, так как при действии вибраций в более широком диапазоне для увеличения f_0 приходится повышать жесткость конструкции (см. формулу (3.2)). Конструктивно это достигается увеличением толщины конструкции, применением ребер жесткости и так далее, что может привести к значительному увеличению массы.

Поэтому, если частотный диапазон возбуждения превышает 500 Гц, полностью устранить резонансные колебания не удастся и конструкция будет находиться в области *резонансных колебаний*, когда $0,5 < f/f_0 < 1,5$. В этом случае обычно $\mu \gg 1$, что недопустимо, так как могут возникать отказы из-за многократного возрастания амплитуд колебаний. Уменьшить амплитуды можно увеличением КМП, то есть увеличением *демпфирующих* свойств конструкции. Этот способ особенно перспективен для ЭС аэрокосмического комплекса и будет подробно рассмотрен в ч. 2, гл. 6 – 8.

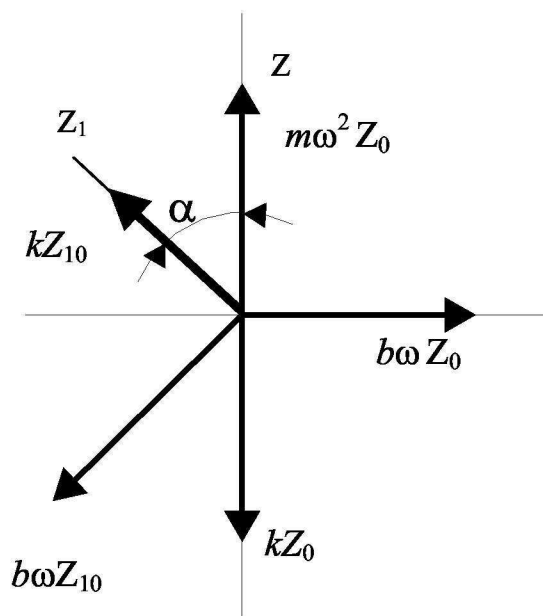


Рис. 3.4. Векторная диаграмма сил

На практике часто возникают ситуации, когда амплитуды возбуждающих колебаний, задаваемые нормативно-технической документацией (НТД), превышают допустимые для ЭРЭ или других элементов конструкции. Это требует изоляции изделия от виброактивного основания с целью обеспечения условия $\mu < 1$. Это достигается в *зарезонансной области*, когда $\nu > \sqrt{2}$. Для обеспечения эффективной *виброизоляции*,

когда $\mu < 0,1 \dots 0,2$, необходимо выполнить условие

$$f/f_0 > 4 \div 5 .$$

Более подробно вопросы виброизоляции будут рассмотрены в ч. 3 пособия.

Представляет интерес график зависимости угла сдвига фаз α между перемещениями основания и системы. Для нахождения такой зависимости на рис. 3.4 представлена векторная диаграмма сил, действующих на систему. При составлении диаграммы считалось, что в рассматриваемый момент времени система двигалась вертикально вверх. Вектор силы инерции, равный $m\omega^2 S_0$ (см. уравнение 3.13а), совпадает с направлением движения. Вектор силы упругости, равный kS_0 , имеет противоположное направление. Вектор диссипативной силы опережает вектор силы упругости на 90° . Перемещение основания опережает перемещение системы на угол α , вектор силы упругости kZ_{10} совпадает с направлением перемещения основания, а вектор диссипативной силы $b\omega Z_{10}$ опережает вектор силы kZ_0 на 90° . Суммы всех сил, а следовательно, и их проекции на оси координат, равны нулю. Следовательно, для проекции сил на горизонтальную и вертикальную оси можно написать соответствующие уравнения

$$\begin{aligned} m\omega^2 Z_0 + kZ_{01} \cos \alpha &= kZ_0 + b\omega Z_{10} \cos(90^\circ - \alpha), \\ b\omega Z_0 &= kZ_{01} \cos(90^\circ - \alpha) + b\omega Z_{01} \cos \alpha \end{aligned}$$

Решая совместно эти уравнения, найдем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\eta v^3}{(1 - v^2 + \eta^2 v^2)}. \quad (3.19)$$

Из графиков на рис. 3.5, построенных на основе этого выражения, видно, что при резонансе сдвиг фаз между виброперемещением основания и системы равен $\pi/2$, при $v > \sqrt{2}$ сдвиг фаз приближается к π , то есть колебания становятся противофазными, чем и объясняется эффект виброизоляции.

Кинематическое периодическое возбуждение колебаний. Уравнение (3.13) можно привести к виду:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = kz_1 + b\dot{z}_1. \quad (3.20)$$

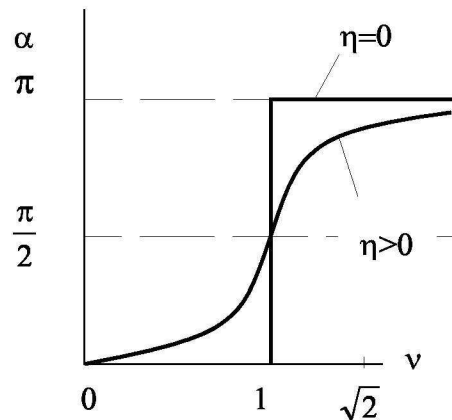


Рис. 3.5. Фазовая характеристика

Периодические колебания основания (см. рис. 2.2) представим в виде

комплексного ряда Фурье:
$$z_1 = \sum_{i=0}^{\infty} Z_{1i} e^{j\omega_i t},$$

где $Z_{1i} = \frac{1}{T} \int_0^T z_1 e^{j\omega_i t} dt$, $\omega_i = i\omega$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – основная частота, соответствующая периоду T изменения возмущающей силы.

Тогда колебания системы:

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i e^{j(\omega_i t + \alpha_i)}. \quad (3.21)$$

Подставляя выражение для z_1 и z в уравнение (3.20), получим:

$$\begin{aligned} m \sum (j^2 \omega_i^2) Z_{0i} e^{j\omega_i t} + b \sum (j\omega) Z_{0i} e^{j\omega_i t} + k \sum Z_{0i} e^{j\omega_i t} = \\ = k \sum Z_{1i} e^{j\omega_i t} + b \sum (j\omega_i) Z_{1i} e^{j\omega_i t}. \end{aligned}$$

Это уравнение справедливо, если оно выполняется для каждой i -й частоты, то есть должно быть:

$$Z_{0i} (-m\omega_i^2 + jb\omega_i + k) = Z_{1i} (k + jb\omega_i).$$

Отсюда получим:

$$Z_i = \frac{k + jb\omega_i}{k - m\omega_i^2 + jb\omega_i} Z_{1i}.$$

Подставляя это выражение в выражение (3.21), получим:

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k + jb\omega_i}{k - m\omega_i^2 + jb\omega_i} Z_{1i} e^{j(\omega_i t + \alpha_i)}.$$

Модуль этого выражения равен амплитуде колебаний системы. Учитывая выражения (3.2) и (3.86), получим:

$$Z_0 = |z| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \eta_i^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}}{\sqrt{(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2})^2 + \eta_i^2 \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}} Z_{1i}$$

Если одна из частот спектра ω_i будет совпадать с собственной частотой системы ω_0 , то член ряда, когда $\omega_i = \omega_0$ обычно значительно превышает другие члены и ими можно пренебречь, и следовательно:

$$Z_0 \approx \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta} Z_{1i}.$$

Коэффициент передачи на этой частоте

$$\mu_i = \frac{Z_0}{Z_{1i}} = \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\eta}$$

совпадает с (3.17) при $\gamma = 1$.

Следовательно, при воздействии периодического возбуждения реакция системы практически равна реакции системы при гармоническом воздействии с частотой, равной собственной частоте колебаний.

Кинематическое случайное вибрационное возбуждение. Будем считать, что основание системы (см. рис. 2.6) колеблется по случайному закону с постоянной спектральной плотностью ускорения $S_{\ddot{z}_1}(\omega)$. В соответствии с формулой (2.11) действующее значение реакции системы

$$\sigma_{\ddot{z}} = \sqrt{D_{\ddot{z}}} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{\ddot{z}}(\omega) d\omega} \quad (3.22)$$

где $S_{\ddot{z}}(\omega)$ – спектральная плотность ускорения системы – может быть определена по формуле [13]

$$S_{\ddot{z}}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{\ddot{z}_1}(\omega), \quad (3.23)$$

справедливой для линейных систем. Подставляя (3.23) в (3.22), получим

$$\sigma_{\ddot{z}} = \sqrt{\int_0^{\infty} |H(j\omega)|^2 S_{\ddot{z}_1}(\omega) d\omega}. \quad (3.24)$$

Передаточная функция $H_{z/z_1}(i\omega)$ определена выше при анализе системы в условиях гармонического воздействия (см. формулу 3.13б). Для расширения круга рассматриваемых задач найдем передаточную функцию $H_{z/\ddot{z}_1}(i\omega)$, то есть когда входом системы является ускорение основания $\ddot{z}_1(t)$ а выходом (реакцией) – перемещение $z(t)$.

Вводя обозначение $\xi = z - z_1$, а также прибавив к обеим частям уравнения (3.13) выражение $-m\ddot{z}_1$, получим

$$m\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + k\xi = -m\ddot{z}_1. \quad (3.25)$$

Так как передаточная функция не зависит от вида воздействия, будем считать, что воздействие $z_1(t)$, а следовательно, и реакция ξ , представляющая в данном случае деформацию пружины, являются гармоническими функциями $z_1 = z_{10}e^{i\omega t}$, $\xi = \xi_0 e^{i\omega t}$. Подставляя ξ в (3.25), получим

$$-m\omega^2\xi + jb\omega\xi + k\xi = -m\ddot{z}_1.$$

Отсюда найдем

$$\begin{aligned} |H_{z/\xi}(j\omega)| &= \frac{|\xi|}{|\ddot{z}_1|} = \frac{m}{|k - m\omega^2 + jb\omega|} = \frac{m/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \frac{b^2\omega^2}{k^2} \cdot \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} = \\ &= \left(\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя выражение (3.26) в (3.24) и принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получим

$$\sigma_{\ddot{z}} = \sqrt{\frac{\pi S_{\ddot{z}_1}(\omega)}{2\omega_0^3\eta}}. \quad (3.27)$$

На практике часто требуется определить вероятность превышения пиковыми значениями случайного процесса определенного уровня. Реакцией слабодемпфированных систем на широкополосное случайное воздействие является узкополосный случайный процесс [13]. Если он нормаль-

ный, то пиковые значения z_n процесса распределены по закону Рэля и вероятность превышения ими заданного уровня можно найти по формуле

$$P\left(\frac{|z_n|}{\sigma_{\ddot{z}}}\right) = \exp\left[\frac{-z_n^2}{2\sigma_{\ddot{z}}^2}\right]. \quad (3.28)$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 3.6. Например, из рис. 3.6 видно, что только 1 % всех пиков не превышает среднеквадратичное значение, вычисленное по формуле (3.27).

Ударное воздействие [5]. Рассмотрим воздействие ударного импульса на систему, показанную на рис. 3.7. Будем считать, что воздействие кинематическое, то есть определяется законом по которому происходит перемещение основания $z_1 = f(t)$.

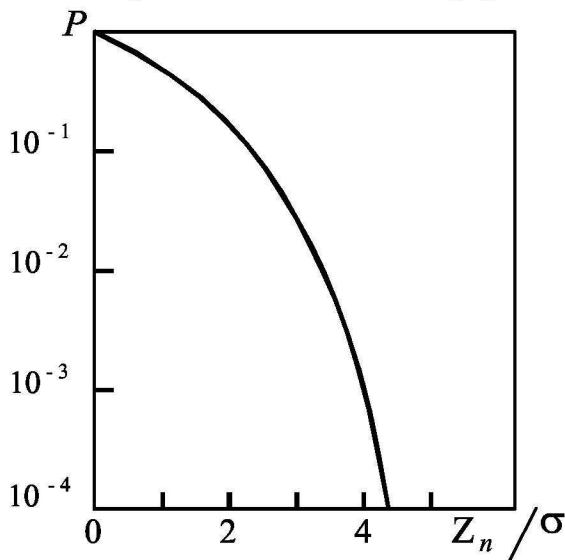


Рис. 3.6. График зависимости (3.28)

Такие задачи возникают, когда аппаратура устанавливается на упругие элементы для изоляции от динамически активного основания. На практике обычно задается не смещение основания, а его ускорение в виде импульса определенной формы.

Рассмотрим часто встречаемую форму ударного импульса, воздействующего на основание, в виде *полуволны синусоиды* (рис. 3.8)

$$\ddot{z}_1 = A \sin pt, \quad 0 \leq t \leq \pi/p = t_{\text{И}},$$

где A – амплитуда импульса в единицах ускорения; $p = \pi/t_{\text{И}}$ — условная «частота» импульса; $t_{\text{И}}$ — длительность импульса.

Уравнение движения системы имеет вид

$$m\ddot{z} + k(z - z_1) = 0.$$

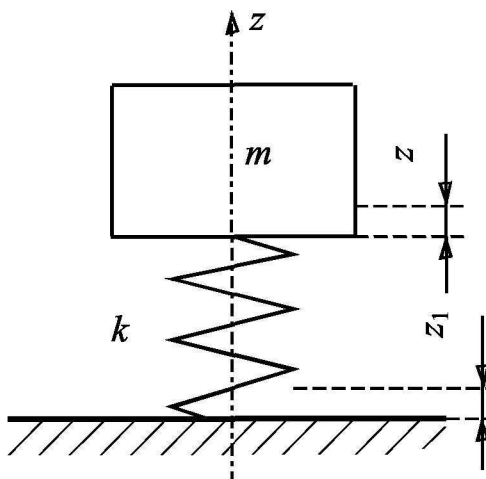


Рис. 3.7. Модель системы с одной степенью свободы

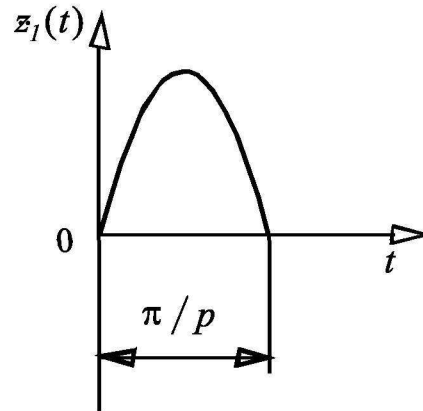


Рис. 3.8. Форма ударного импульса

Перепишем его в виде $m\ddot{z} + kz = kz_1$ и продифференцируем дважды по времени

$$m\ddot{z}'' + kz = kz_1. \quad (3.29)$$

Введем обозначения: $\ddot{z} = J$; $\ddot{z}' = \ddot{J}$, где J — ускорение массы m . Тогда уравнение (3.29) можно представить в виде

$$m\ddot{J} + kJ = k\ddot{z}_1. \quad (3.30)$$

Если подставить в уравнение (3.30) функцию $\ddot{z}_1 = A \sin pt$, то найденное решение будет справедливо только для моментов времени $0 < t < t_{\text{И}}$, находящихся в пределах длительности импульса. Чтобы определить движение системы в последующие за $t_{\text{И}}$ моменты времени, \ddot{z}_1 необходимо выразить в виде такой функции времени, в которой аргумент может изменяться от 0 до ∞ . Такую возможность обеспечивает *операторный метод*. Известно, что умножение функции на оператор сдвига e^{-st} ,

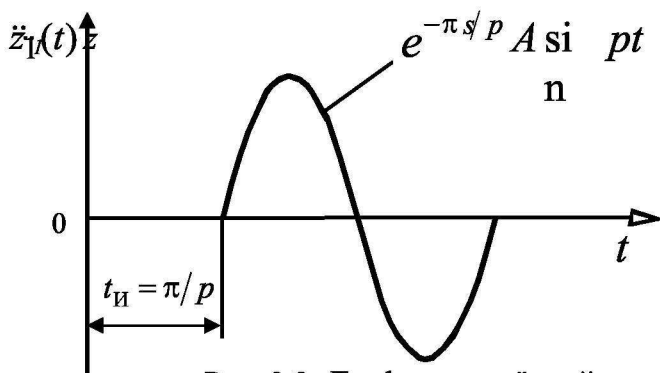


Рис. 3.9. График смещённой функции

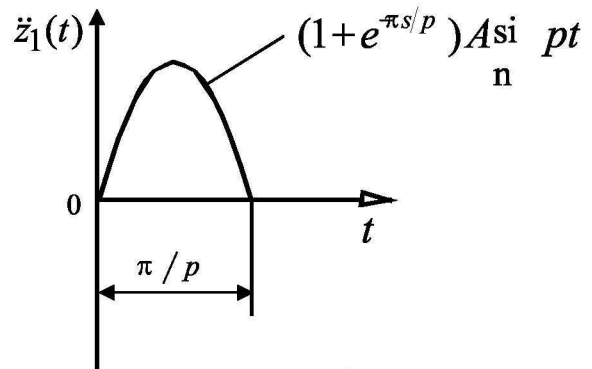


Рис. 3.10. График суммы функций

где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная переменная, вызывает смещение графика на длину $t_{\text{н}}$ в положительном направлении оси времени. Таким образом, функция $\ddot{z}_1 = A \sin pt$, будучи умноженной на $e^{-\pi s/p}$, соответствует графику на рис. 3.9.

Если сложить несмещённую и смещённую функции, то получится функция, представленная на рис. 3.10. Как видим, эта функция удовлетворяет поставленным требованиям. Сохраняя вид одиночного импульса, она в то же время остается пригодной для любого момента времени $0 < t < \infty$.

Подставив полученную функцию вместо \ddot{z}_1 в выражение (3.30), получим дифференциальное уравнение, описывающее поведение массы m для любого момента времени t при действии на основание импульса ускорения в виде полуволны синусоиды

$$m\ddot{J} + kJ = k(1 + e^{-\pi s/p})A \sin pt. \quad (3.31)$$

Учитывая начальные условия $J(0) = \dot{J}(0) = 0$, поскольку до возбуждения система была в покое, уравнение (3.31) в изображениях можно представить в виде

$$ms^2 J + kJ = kA(1 + e^{-\pi s/p})p/(s^2 + p^2), \quad (3.32)$$

откуда

$$J = \frac{A\omega^2 p}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)}(1 + e^{-\pi s/p}), \quad (3.33)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$.

Учитывая, что

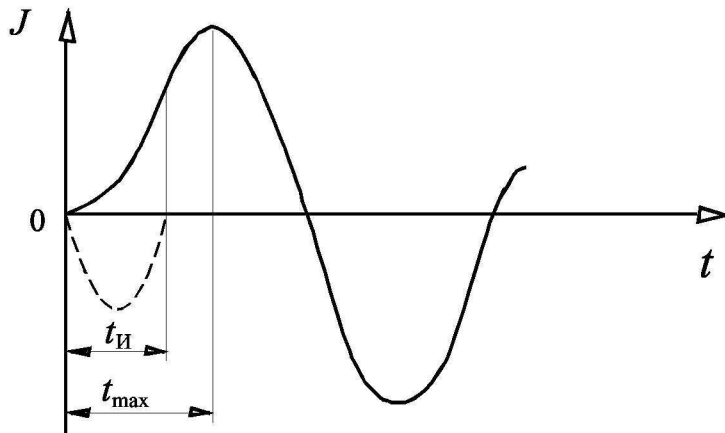
$$\begin{aligned} \frac{A\omega^2 p}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} &\xrightarrow{\cdot} A\omega \left(\frac{p \sin \omega t - \omega \sin pt}{p^2 - \omega^2} \right); \\ \frac{A\omega^2 p e^{-\pi s/p}}{(s^2 + p^2)(s^2 + \omega^2)} &\xrightarrow{\cdot} A\omega \left(\frac{p \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{p} \right) - \omega \sin p \left(t - \frac{\pi}{p} \right)}{p^2 - \omega^2} \right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

и полагая $t_{\text{н}} = \pi/p$, получаем в оригиналах

$$\begin{aligned} J &= A\omega(p \sin \omega t - \omega \sin pt)/(p^2 - \omega^2) + A\omega(p \sin \omega t \cos \omega t_{\text{н}} - \\ &\quad - p \cos \omega t \sin \omega t_{\text{н}} + \omega \sin pt)/(p^2 - \omega^2) = \\ &= A\omega p \sqrt{2(1 + \cos \omega t_{\text{н}})} \sin(\omega t - \omega t_{\text{н}}/2)/(p^2 - \omega^2). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Ускорение на изделии отстает по фазе от ускорения на основании на

величину $\theta = -\omega t_{И}$. Временной ход ускорения согласно уравнению (3.35) показан на рис. 3.11. Первый максимум ускорения на массе m наступает



при значении времени
 $t_{\max} = \pi/2\omega + t_{\dot{E}}/2$. (3.36)

Рис. 3.11. Зависимость $J=f(t)$

Максимальное ускорение

$$J_{\max} = [A\omega p / (p^2 - \omega^2)] \sqrt{2(1 + \cos \omega t_{\dot{E}})}. \quad (3.37)$$

Коэффициент изоляции удара

$$\mu = J_{\max} / \ddot{z}_{1\max} = [2\nu / (\nu^2 - 1)] \cos(\pi / 2\nu), \quad (3.38)$$

где $\nu = p / \omega$ – «настройка» системы.

Из выражения (3.38) следует, что при $\nu \rightarrow \infty$ $\mu \rightarrow 0$; при $\nu \rightarrow 1$ $\mu \rightarrow \pi/2$; при $\nu \rightarrow 0$ $\mu \rightarrow 0$.

Пользуясь формулой (3.38), можно найти ускорение на изолируемом изделии

$$J_{И} = \mu J_{ос}, \quad (3.39)$$

если задано ускорение на основании $J_{ос}$ и «настройка» изолирующей подвески $\nu = p / \omega = T / 2t_{И}$, где $T = 2\pi / \omega t_{И}$ – период свободных колебаний объекта в направлении удара; $t_{И}$ – длительность импульса удара.

Таким образом, для определения максимальных усилий и напряжений в элементах объекта достаточно знать длительность ударного импульса $t_{И}$ и максимальное ускорение $J_{ос}$ на основании, а также период свободных колебаний T объекта в направлении удара и коэффициент изоляции удара μ .

Если проинтегрировать выражение (3.35) по времени, то получим выражения для смещения изделия

$$\dot{z} = [2Ap \cos(\omega t_{\dot{E}} / 2) / (p^2 - \omega^2)] [-\cos(\omega t - \omega t_{\dot{E}})];$$

$$z = [2Ap/(p^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_{\dot{E}}/2) \int [-\cos(\omega(-\omega t_{\dot{E}}/2) + B_1)] dx =$$

$$= [2Ap/(p^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_{\dot{E}}/2) [(-1/\omega) \sin(\omega(-\omega t_{\dot{E}}/2) + B_1 t + B_2)],$$

где B_1 и B_2 — постоянные, определяемые из начальных условий. При $t = 0$, $z = \dot{z} = 0$, например, имеем

$$B_1 = \cos(\omega t_{\dot{E}}/2); \quad B_2 = -(1/\omega) \sin(\omega t_{\dot{E}}/2);$$

$$\dot{z} = [2Ap/(p^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_{\dot{E}}/2) [\cos(\omega t_{\dot{E}}/2) - \cos(\omega t - \omega t_{\dot{E}}/2)];$$

$$z = [2Ap/(p^2 - \omega^2)] \cos(\omega t_{\dot{E}}/2) [t \cos(\omega t_{\dot{E}}/2) - (1/\omega) \sin(\omega t_{\dot{E}}/2) -$$

$$- (1/\omega) \sin(\omega t - \omega t_{\dot{E}}/2)].$$

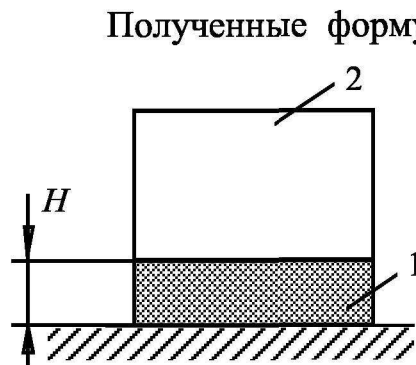


Рис. 3.12. Защита Изделий.
Прокладка (1) для защиты
изделия (2)

Полученные формулы можно использовать при расчете толщины прокладки (рис. 3.12) для защиты от случайных падений изделий или однократных толчков при транспортировании. Будем считать, что основание испытывает вертикальные толчки в виде полусинусоидального импульса с амплитудой $\dot{Z}_{10\max}$ и длительностью $t_{\text{И}}$, допустимое ускорение $J_{\text{аи}}$.

По формуле (3.38) найдем минимальное значение коэффициента изоляции μ_{\min} , а также значение ν , при котором правая

часть выражения (3.38) превысит μ_{\min} .

Так как $\nu = \omega/\omega_0$ и $\omega = \pi/t_{\text{И}}$, найдем

$$\omega_0 = \frac{\pi}{t_{\dot{E}} \nu};$$

используя формулу (3.2), найдём требуемую жесткость прокладки:

$$k = m\omega_0^2 = 4\pi^2 m f_0^2.$$

Жесткость прокладки можно найти также по формуле $k = P/\Delta H$, где P — сила, ΔH — деформация прокладки. Применяя закон Гука $\sigma = E\varepsilon$ и учитывая, что $E = \Delta H/H$, $p = \sigma S$, где S — площадь прокладки, найдем

$$k = \frac{ES}{H}. \quad \text{Отсюда требуемая толщина прокладки } H = \frac{ES}{k}.$$

Воздействие произвольной силы [4]. Рассмотрим вначале случай, когда к системе (см. рис. 2.6) приложена в момент времени $t = \tau$ постоянно действующая сила $P = 1$ (рис. 3.13, а).

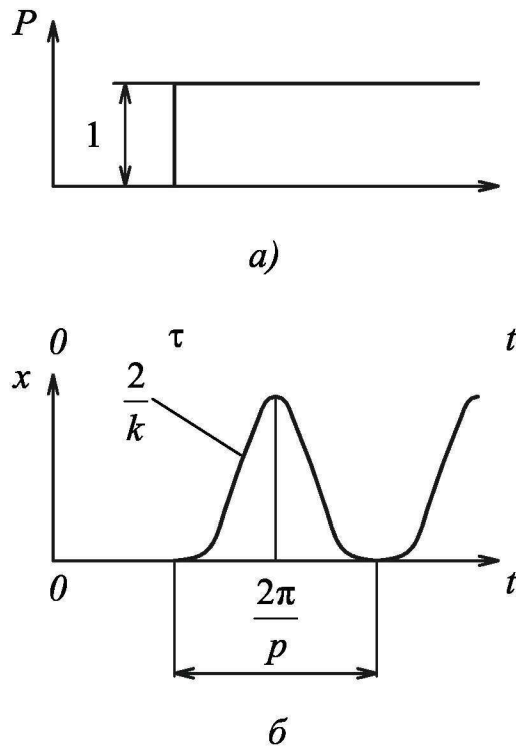


Рис. 3.13. Воздействие постоянной силы

Для $t \geq \tau$ дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{z} + p^2 z = \frac{1}{m}, \quad (3.40)$$

где $p = \sqrt{k/m}$ – собственная частота колебаний.

Решение уравнения при $t = \tau$ должно удовлетворять начальным условиям $z = 0; \dot{z} = 0$.

Это решение представляет собой сумму, составленную из решения соответствующего однородного дифференциального уравне-

ния

$$z_1 = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt$$

и частного решения заданного дифференциальным уравнения (3.40)

$$Z_2 = \frac{1}{mp^2} = \frac{1}{k},$$

т.е.

$$Z = C_1 \sin pt + C_2 \cos pt + \frac{1}{k}.$$

Из начальных условий определяем постоянные

$$C_1 = -\frac{\sin p\tau}{k}; \quad C_2 = -\frac{\cos p\tau}{k}$$

и находим

$$z = \frac{1 - \cos p(t - \tau)}{k}.$$

Полученный закон движения представлен на рис. 3.13, б. Как видно, наибольшее значение z составляет $z_{\max} = 2/k$, т.е. вдвое больше перемещения, вызываемого статически приложенной силой $P = 1$.

К той же формуле можно привести задачу о вынужденных колебаниях при кинематическом возбуждении. Чтобы пояснить это, вновь рассмот-

рим ту же одномассовую систему, но предположим, что причиной колебаний груза служат заданные колебания основания в виде $f(t)$.

Рассмотрим сначала абсолютное движение груза и обозначим через z текущее значение его перемещения. Тогда удлинение пружины равно $z - z_1$, и, следовательно, на груз действует сила упругости пружины $-k(z - z_1)$. Соответственно дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\begin{aligned} & -k(z - z_1) = m\ddot{z}, \\ \text{или} & \ddot{z} + p^2 z = \frac{k f(t)}{m} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Произведение $kf(t)$ можно рассматривать как *приведенную возмущающую силу*

$$P(t) = kf(t),$$

и уравнение движения примет вид

$$\ddot{z} + p^2 z = p(t).$$

Решение этого неоднородного уравнения следует искать в виде суммы решения соответствующего уравнения без правой части (т. е. уравнения свободных колебаний) и какого-либо частного решения соответствующего уравнения. Для того чтобы отчетливее выявить физическую сущность результатов, поступим по-иному и рассмотрим сначала свободные колебания груза на упругой связи, вызываемые единичным мгновенным импульсом $S = 1$; пусть этот импульс прикладывается в мгновение τ . Тогда при

$t > \tau$ движение описывается выражением

$$z = A \sin(pt + \alpha),$$

а скорость – выражением

$$\dot{z} = A \cos(pt + \alpha)$$

Для определения постоянных A и α нужно использовать начальные условия, которые относятся к моменту исчезновения мгновенного импульса. В этот момент перемещение груза ещё отсутствует, т. е. $Z(\tau) = 0$, а скорость согласно закону об изменении количества движения системы имеет конечное значение $V(\tau) = S/m$. Таким образом, начальные условия имеют вид

$$0 = A \sin(p\tau + \alpha); \quad \frac{1}{m} = A p \cos(p\tau + \alpha).$$

Отсюда находим

$$A = \frac{1}{mp}; \quad \alpha = -p\tau.$$

Следовательно, движение происходит по закону

$$z = \frac{1}{mp} \sin p(t - \tau). \quad (3.42)$$

Решив эту вспомогательную задачу, вернёмся к случаю действия произвольной возмущающей силы и будем рассматривать её как последовательность бесконечно малых импульсов $P(\tau)d\tau$ (рис. 3.14). От одного такого импульса перемещение в мгновение $t > \tau$ согласно формуле (3.42) составит

$$\frac{P(\tau)d\tau}{mp} \sin p(t - \tau).$$

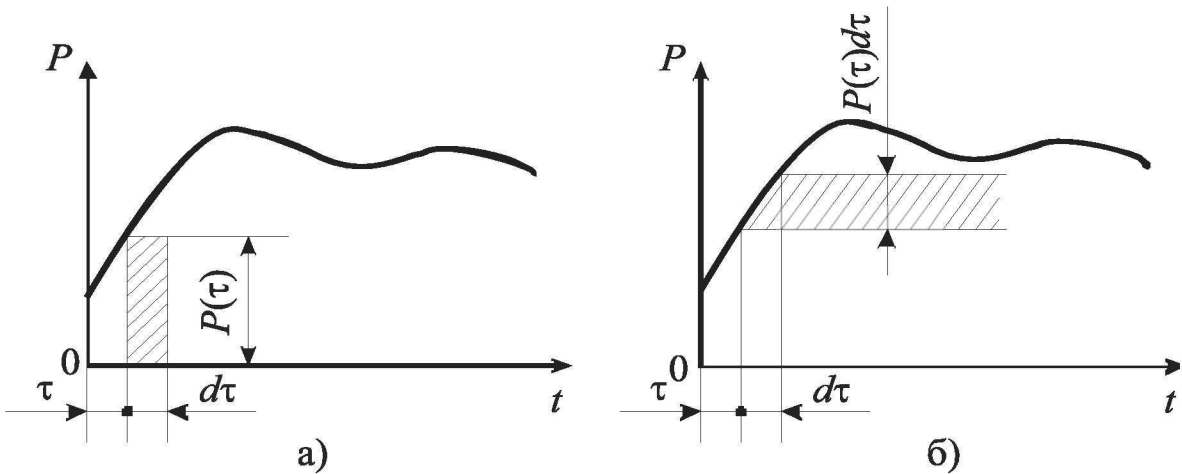


Рис. 3.14. Вид произвольной силы

Перемещение, вызванное всей последовательностью импульсов, расположенных в интервале $(0, t)$, найдём при помощи интегрирования:

$$z = \frac{1}{mp} \int_0^t P(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau. \quad (3.43)$$

Интегрирование ведётся по переменной τ , и поэтому при вычислении интеграла, входящего в выражение (3.43), букву t следует считать постоянной; после подстановки пределов образуется зависимость перемещения z от времени t , что и представляет собой решение задачи, соответствующее начальным условиям $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 0$.

Подчеркнём, что использованное в процессе вывода формулы (3.43) суммирование результатов справедливо ввиду линейности системы; подобный подход для нелинейной системы был бы необоснован.

Вернёмся к случаю, показанному на рис. 3.14, когда вынужденные колебания являются результатом движения основания. Согласно соотно-

шению (3.41) при колебаниях этой точки по закону $f(t)$ груз колеблется так, как если бы на него действовала возмущающая сила $kf(t)$. Это соотношение позволяет записать основное решение (3.43) в виде

$$Z = p \int_0^t f(\tau) \sin p(t - \tau) d\tau \quad (3.44)$$

Для системы с демпфированием уравнение свободных затухающих колебаний представим в виде

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + p^2 z = 0,$$

где $n = b/2m$.

Обычно выполняется неравенство $p^2 > n^2$, и общее решение этого уравнения можно представить в виде

$$z = A e^{-nt} \sin(\sqrt{p^2 - n^2} t + \alpha),$$

где A и α – постоянные, определенные из начальных условий:

$$A = \sqrt{Z_0^2 + \frac{\left(\dot{Z}_0 + nZ_0\right)^2}{p^2 - n^2}};$$

$$\alpha = \text{arctg} \frac{Z_0 \sqrt{p^2 - n^2}}{\dot{Z}_0 + nZ_0}.$$

Если считать, что на систему действует внешняя произвольная сила $P(t)$, то, представляя её, как и раньше, в виде последовательности бесконечно малых импульсов $p(\tau)d\tau$, при нулевых начальных условиях ($Z = \dot{Z} = 0$) получим

$$z = \frac{1}{mp_*} \int_0^t p(\tau) e^{-n(t-\tau)} \sin p_*(t - \tau) d\tau,$$

где

$$p_* = \sqrt{p^2 - n^2}.$$

3.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Свободные колебания. Будем считать, что приведенная на рис. 3.15 система с массами m_1 и m_2 может иметь только перемещения в направлении оси z . Такая система обладает двумя степенями свободы. Уравнения движения масс m_1 и m_2 системы, если пренебречь диссипативными силами, могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1 z_1 - k_2 (z_2 - z_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2 (z_2 - z_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

Принимая в качестве частных решений этой системы выражения

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= Z_{01} \sin(\omega t + \varphi), \\ z_2 &= Z_{02} \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

получим следующую систему однородных относительно Z_{01} и Z_{02} уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) Z_{01} - k_2 Z_{02} &= 0 \\ -k_2 Z_{01} + (k_2 - m_2 \omega^2) Z_{02} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

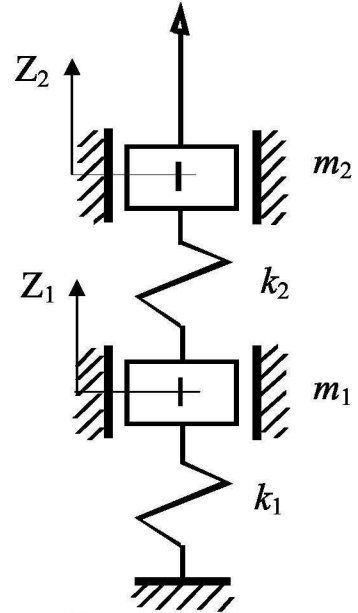


Рис. 3.15. Система с двумя степенями свободы

Приравнивая к нулю определитель, составленный из коэффициентов при Z_{01} и Z_{02} :

$$\Delta = (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2 = 0, \quad (3.48)$$

придем к частотному уравнению системы

$$\omega^4 - \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0. \quad (3.49)$$

Из (3.47) определяется также отношение амплитуд колебаний по координатам z_1 и z_2 , или коэффициент формы колебаний:

$$\chi = \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{k_1 + k_2 - m_1 \omega^2}{k_2} = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2}. \quad (3.50)$$

Решение уравнения (3.49) дает два значения собственных частот колебаний:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)} \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right)^2 - \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}}. \quad (3.51)$$

Следовательно, в общем случае колебания системы (см. 3.15) происходят на двух частотах, и общие решения уравнений (3.45) будут иметь вид

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi) + Z_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi); \\ z_2 &= Z_{21} \sin(\omega_1 t + \varphi) + Z_{22} \sin(\omega_2 t + \varphi). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Здесь ω_1 и ω_2 – первая и вторая собственные частоты (индексы у амплитуд обозначают соответственно первый – номер координаты (массы), второй – номер частоты).

При соответствующем возбуждении процесс колебаний может происходить на одной частоте ω_1 или ω_2 . Тогда в уравнениях (3.52) будут отсутствовать первые или вторые члены. Такие колебания называются *главными*. Соответствующие им *собственные формы* колебаний определяются из (3.50) подстановкой частот ω_1 и ω_2 . В частотном уравнении (3.51) члены в скобках имеют размерность квадрата частоты:

$$(k_1 + k_2)/m_1 = \omega_{01}^2; \quad k_2/m_2 = \omega_{02}^2.$$

Здесь ω_{01} и ω_{02} — *парциальные частоты*, т. е. собственные частоты парциальных одномассовых систем с массами m_1 и m_2 и жесткостями связей (k_1+k_2) и k_2 соответственно.

Рассмотрим соотношения между частотами и амплитудами главных колебаний на примере системы (см. рис. 3.15), у которой $m_1 = m_2 = m$ и $k_1 = k_2 = k$. По формуле (3.51) найдем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \approx 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \approx 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\omega_1 = 0,618 \omega_{01}; \quad \omega_2 = 1,618 \omega_{02}$$

и по формуле (3.50)

$$\chi_{21} = \frac{S_{21}}{S_{11}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618;$$

$$\chi_{22} = \frac{S_{22}}{S_{12}} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618.$$

Таким образом, вторая собственная частота выше первой; при колебаниях по первой форме обе массы движутся в фазе, при колебаниях по второй форме – в противофазе, о чем свидетельствуют разные знаки коэффициентов χ_{21} и χ_{22} .

Вынужденные колебания. Динамический гаситель колебаний. Рассмотрим колебания системы с двумя степенями свободы (см. рис.3.15) при кинематическом возбуждении основания по закону $z_a = Z_0 \sin \omega t$. В этом случае справедливы уравнения:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_a) + k_2(z_1 - z_2) &= 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 + k_2(z_2 - z_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

Здесь $k_1+k_2 = r_{11}$; $r_{12}+r_{21} = -k_2$; $r_{22} = k_2$, произведение $k_1 Z_0$ играет роль амплитуды вынуждающей силы. Принимая частные решения системы (3.53) в виде

$$z_1 = Z_{10} \sin \omega t; \quad z_2 = Z_{20} \sin \omega t,$$

получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1\omega^2)Z_{10} - k_2Z_{20} &= k_1Z_0, \\ -k_2Z_{10} + (k_2 - m_2\omega^2)Z_{20} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда находим зависимость амплитуд Z_{10} и Z_{20} от частоты:

$$Z_{10} = k_1Z_0(k_2 - m_2\omega^2)/\Delta; \quad (3.54)$$

$$Z_{20} = k_1k_2Z_0/\Delta, \quad (3.55)$$

где $\Delta = (k_1+k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2$.

Из выражения (3.54) видно, что масса m_1 не будет вибрировать ($Z_{10} = 0$), когда $k_2 - m_2\omega^2 = 0$. Отсюда видно, что должно выполняться условие

$$\omega = \sqrt{k_2/m_2} = \omega_{02},$$

то есть собственная частота колебаний массы m_2 должна равняться частоте возбуждения. Это явление получило название динамического гашения колебаний, а система $m_2 - k_2$ – динамического гасителя колебаний (ДГК). Как видно из выражения (3.55), при $\omega = \omega_{02}$ амплитуда колебаний ДГК

$$Z_{20} = -k_1Z_0.$$

Отсюда $Z_2 = -k_1S_0 \sin \omega t = k_1Z_0(\sin \omega t \pm \pi)$. Следовательно, эффект ДГК основан на противофазных колебаниях массы m_1 , под которой понимается виброзащищаемый объект, и массы m_2 .

Недостатком ДГК является то, что он подавляет резонансные колебания только на одной частоте ω_{02} и в то же время может привести к возникновению резонансных колебаний на двух других частотах (рис. 3.16). Это ограничивает его применение для устранения резонансных колебаний ЭС, на которые часто действуют вибрации в широком диапазоне частот. Однако применение ДГК с демпфированием позволяет резко уменьшить амплитуды резонансных колебаний. Так как этот эффект достигается за счет демпфирующих свойств, ДГК можно рассматривать как демпфер. Теория таких демпферов будет рассмотрена в ч. 2 гл. 8.

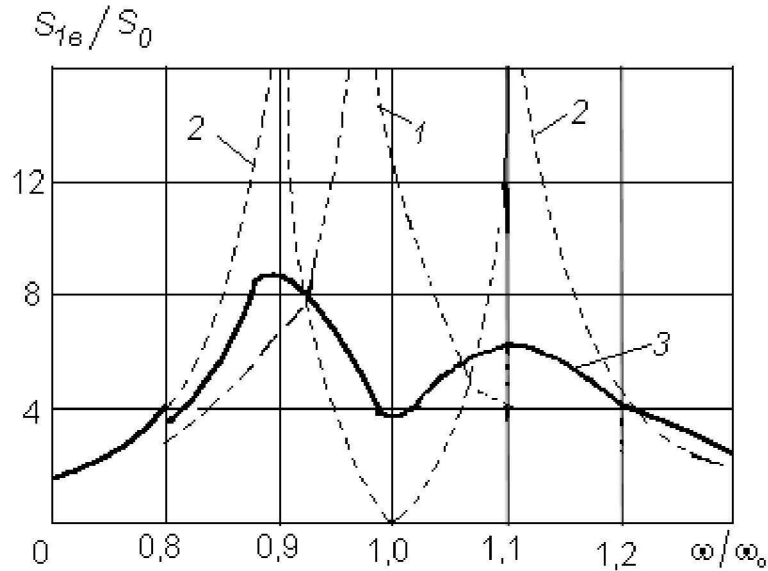


Рис. 3.16. Амплитудно-частотные характеристики: 1 – масса m_1 при отсутствии массы m_2 ; 2 – масса m_1 с ДГК без демпфирования; 3 – масса m_1 с ДГК с демпфированием

3.3. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

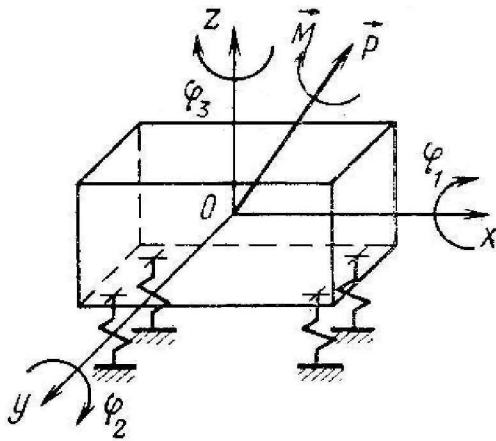


Рис. 3.17. Расчетная модель виброизолируемого прибора

При расчете блока (аппарата) на виброизоляторах он рассматривается как абсолютно твердое тело, установленное на упругих связях, соединяющих блок с основанием (рис. 3.17). Такая система имеет шесть степеней свободы. Они определяются смещениями $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ центра масс O вдоль осей x, y, z и углами поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ относительно этих осей.

Свободные колебания. Наиболее общей формой уравнений свободных колебаний системы без демпфирования являются уравнения Лагранжа.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.56)$$

где q_i – i -я обобщенная координата; \dot{q}_i – i -я обобщенная скорость; Γ – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия системы.

Рассмотрим, как при помощи этой системы уравнений можно определить собственные частоты колебаний.

Как известно из теоретической механики, потенциальная энергия системы с m степенями свободы определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^m \alpha_{ik} q_i q_k, \quad (3.57)$$

где α_{ik} – обобщенные коэффициенты жесткости, представляющие собой единичные реакции связей в i -м направлении при перемещении системы в k -м направлении, при этом $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

Для системы с шестью степенями свободы имеющие реальный физический смысл коэффициенты жесткости можно разбить на следующие четыре группы:

– линейные: $\alpha_{11} = \sum k_x$; $\alpha_{22} = \sum k_y$; $\alpha_{33} = \sum k_z$;

– линейно-поворотные: $\alpha_{15} = \sum k_x z$; $\alpha_{16} = -\sum k_x y$; $\alpha_{24} = -\sum k_y z$; $\alpha_{26} = \sum k_y x$; $\alpha_{34} = \sum k_z y$; $\alpha_{35} = -\sum k_z x$;

– гироскопические: $\alpha_{45} = -\sum k_x y z$; $\alpha_{46} = -\sum k_y z x$; $\alpha_{56} = -\sum k_x y z$;

– крутильные: $\alpha_{44} = \sum (k_y z^2 + k_z y^2)$; $\alpha_{55} = \sum (k_z x^2 + k_x z^2)$; $\alpha_{66} = \sum (k_x y^2 + k_y x^2)$.

Здесь k_x, k_y, k_z – коэффициенты жесткости виброизоляторов в направлении соответствующих осей; x, y, z – координаты их расположения.

Для примера рассмотрим определение некоторых из приведенных коэффициентов жесткости для одного из опорных виброизоляторов, изображенных на рис. 3.18.

1. Линейно-поворотный коэффициент α_{34} можно представить как вертикальную упругую реакцию P_z , возникающую в точке A крепления виброизолятора (рис. 3.19) при повороте блока вокруг оси x , отнесенную к углу поворота φ_1 . Таким образом, $\alpha_{34} = P_z / \varphi_1 = k_z / \Delta \varphi_1 = k_z y_A$, где y_A – расстояние точки крепления виброизолятора от плоскости xOz .

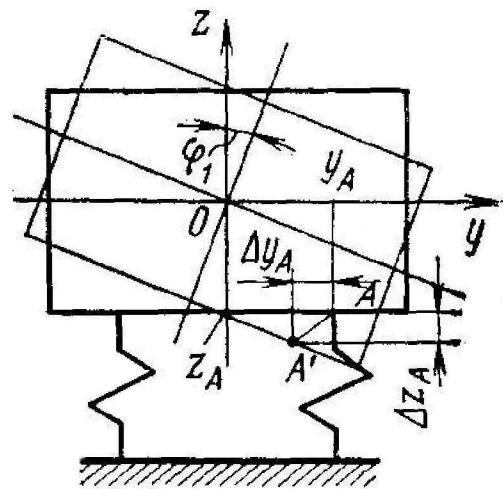


Рис. 3.18. К определению линейно-поворотного коэффициента жесткости

2. Гироскопический коэффициент α_{45} можно выразить как момент M_2 упругой реакции P_z относительно оси Y , отнесенный к углу поворота точки A вокруг оси X (см. рис. 3.19):

$$M_2 = P_z x_A = k_z \Delta z x_A = k_z x_A \varphi_2 x_A.$$

Из рис. 3.19 видно, что $x_A \varphi_2 = -y_A \varphi_1$. Поэтому $\alpha_{45} = M_2 / \varphi_1 = -k_z x_A y_A$, где x_A, y_A – координаты точки крепления виброизолятора.

3. Крутильный коэффициент α_{44} определим как отношение момента M_1 к углу поворота φ_1 . При вычислении момента M_1 следует учитывать, что точка A смещается в новое положение A' по дуге (рис. 3.20). Поэтому здесь будут возникать две реакции: P_z и P_y . Тогда $M_1 = P_z y_A + P_y z_A = -k_z \Delta z_{AyA} - k_y \Delta y_{AzA} = k_z y_A^2 \varphi_1 + k_y z_A^2 \varphi_1$. Откуда $\alpha_{44} = M_1 / \varphi_1 = k_z y_A^2 + k_y z_A^2$.

Аналогично вычисляются все другие коэффициенты жесткости формулы (3.51).

Кинетическая энергия системы с шестью степенями свободы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 \beta_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad (3.58)$$

где β_{ik} – коэффициенты инерции.

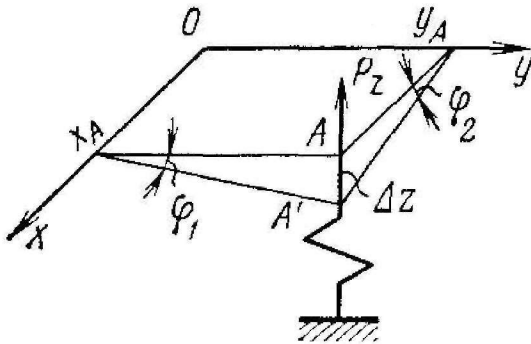


Рис. 3.19. К определению гироскопического коэффициента жесткости

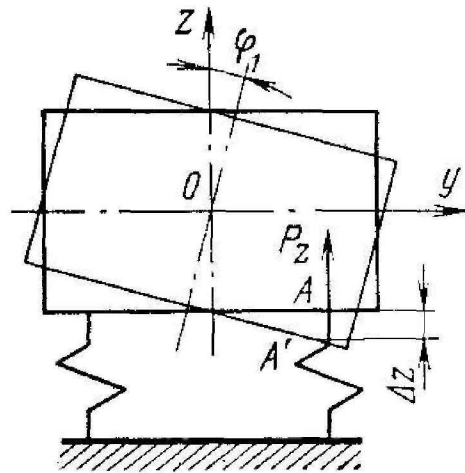


Рис. 3.20. К определению крутильного коэффициента жесткости

Для линейных смещений $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} = m$. Для поворотов $\beta_{44} = J_x$, $\beta_{55} = J_y$, $\beta_{66} = J_z$ – моменты инерции аппарата относительно осей x, y, z ; $\beta_{46} = J_{xz}$, $\beta_{45} = J_{xy}$, $\beta_{56} = J_{yz}$ – соответствующие центробежные моменты.

Рассеиваемая энергия определяется *диссипативной функцией*, которая имеет такое же выражение, как и кинетическая энергия:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^6 h_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

где h_{ik} – обобщенные коэффициенты трения, которые определяются аналогично коэффициентам α_{ik} через соответствующие коэффициенты трения виброизоляторов.

Если целью расчета является определение собственных частот системы, то в уравнении (3.56) можно также опустить члены, учитывающие трение, которое, как было отмечено выше, мало влияет на частоту свободных колебаний.

Учитывая сказанное, подставим выражения (3.57) и (3.58) для потенциальной и кинетической энергии в уравнение (3.56) и произведем последовательно дифференцирование по каждой из шести координат. В результате получим шесть уравнений свободных колебаний системы:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11}\ddot{\delta}_1 + \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{15}\varphi_2 + \alpha_{16}\varphi_3 &= 0, \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_2 + \alpha_{22}\delta_2 + \alpha_{24}\varphi_1 + \alpha_{26}\varphi_3 &= 0, \\ \beta_{11}\ddot{\delta}_3 + \alpha_{33}\delta_3 + \alpha_{34}\varphi_1 + \alpha_{35}\varphi_2 &= 0, \\ \beta_{44}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{45}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{46}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{24}\delta_2 + \alpha_{34}\delta_3 + \alpha_{44}\varphi_1 + \alpha_{45}\varphi_2 + \alpha_{46}\varphi_3 &= 0, \\ \beta_{45}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{55}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{15}\delta_1 + \alpha_{35}\delta_3 + \alpha_{45}\varphi_1 + \alpha_{55}\varphi_2 + \alpha_{56}\varphi_3 &= 0, \\ \beta_{46}\ddot{\varphi}_1 + \beta_{56}\ddot{\varphi}_2 + \beta_{66}\ddot{\varphi}_3 + \alpha_{16}\delta_1 + \alpha_{26}\delta_2 + \alpha_{46}\varphi_1 + \alpha_{56}\varphi_2 + \alpha_{66}\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \right\} (3.59)$$

Частные решения системы уравнений (3.59) можно принять в виде гармонических функций

$$\begin{aligned} \delta_1 &= A_1 \sin(\omega t + \alpha), & \varphi_1 &= A_4 \sin(\omega t + \alpha), \\ \delta_2 &= A_2 \sin(\omega t + \alpha), & \varphi_2 &= A_5 \sin(\omega t + \alpha), \\ \delta_3 &= A_3 \sin(\omega t + \alpha), & \varphi_3 &= A_6 \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Подставив эти решения в (3.59) и учитывая, что $\delta_i = \frac{d^2\delta_i}{dt^2} = -\omega^2\delta_i$, $\varphi_i = \frac{d^2\varphi_i}{dt^2} = -\omega^2\varphi_i$, ($i = 1, 2, 3$), получим систему однородных алгебраических уравнений, определитель которой

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ 0 & \alpha_{22} - \beta_{11}\omega^2 & 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{26} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} - \beta_{11}\omega^2 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} - \beta_{44}\omega^2 & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 \\ \alpha_{13} & 0 & \alpha_{35} & \alpha_{45} - \beta_{45}\omega^2 & \alpha_{55} - \beta_{55}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 \\ \alpha_{16} & \alpha_{26} & 0 & \alpha_{46} - \beta_{46}\omega^2 & \alpha_{56} - \beta_{56}\omega^2 & \alpha_{66} - \beta_{66}\omega^2 \end{vmatrix} \quad (3.61)$$

Развернув этот определитель и приравняв его к нулю, получим частотное уравнение шестой степени относительно ω^2 , из которого можно найти шесть собственных частот:

$$A\omega^{12} + B\omega^{10} + C\omega^8 + D\omega^6 + E\omega^4 + F\omega^2 + G = 0 ,$$

где A, B, \dots, G – постоянные коэффициенты, которые могут быть найдены после развертывания определителя и сведения подобных членов. Их аналитические выражения имеют довольно громоздкий вид. Поэтому целесообразно находить собственные частоты как собственные значения матрицы (3.61). Численное значение определителя

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

можно найти по правилу

$$\Delta_n = a_{11} a_{22}^{(1)} \dots a_{nn}^{(n-1)} ,$$

где

$$a_{ii}^{(k)} = a_{ii} - a_{ik} a_{ki} / a_{kk} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = n - 1) ,$$

например

$$a_{55}^{(4)} = a_{55} - a_{54} a_{45} / a_{44} .$$

Алгоритм определения собственных частот состоит в следующем. Задаваясь некоторым значением частоты ω (заведомо меньшим низшей

собственной частоты блока), вычисляем значение определителя Δ_1 . Затем, увеличивая последовательно частоту на 5 – 10% (или на другую величину в зависимости от требуемой точности), вычисляем значения Δ_2, Δ_3 и т. д., проверяя все время выполнение условия $\Delta_m - \Delta_{m+1} > 0$. Прекращение выполнения этого условия свидетельствует о том, что значение определителя перешло через нуль. Следовательно, истинное значение собственной частоты лежит между двумя последними принятыми в расчет значениями.

Аналогично можно найти остальные собственные частоты.

Вынужденные колебания. Для аппарата на виброизоляторах с внутренним демпфированием для каждой из обобщенных координат получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} \ddot{\delta}_1 + (1 + j\eta)(\alpha_{11} \delta_1 + \alpha_{15} \varphi_2 + \alpha_{16} \varphi_3) &= P_1(t) ; \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_2 + (1 + j\eta)(\alpha_{22} \delta_2 + \alpha_{24} \varphi_1 + \alpha_{26} \varphi_3) &= P_2(t) ; \\ \beta_{11} \ddot{\delta}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{33} \delta_3 + \alpha_{34} \varphi_1 + \alpha_{35} \varphi_2) &= P_3(t) ; \\ \beta_{44} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{45} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{46} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{24} \delta_2 + \alpha_{34} \delta_3 + \\ &+ \alpha_{44} \varphi_1 + \alpha_{45} \varphi_2 + \alpha_{46} \varphi_3) &= M_1(t) ; \\ \beta_{45} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{55} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{15} \delta_1 + \alpha_{35} \delta_3 + \\ &+ \alpha_{45} \varphi_1 + \alpha_{55} \varphi_2 + \alpha_{56} \varphi_3) &= M_2(t) ; \\ \beta_{46} \ddot{\varphi}_1 + \beta_{56} \ddot{\varphi}_2 + \beta_{66} \ddot{\varphi}_3 + (1 + j\eta)(\alpha_{16} \delta_1 + \alpha_{26} \delta_2 + \\ &+ \alpha_{46} \varphi_1 + \alpha_{56} \varphi_2 + \alpha_{66} \varphi_3) &= M_3(t) . \end{aligned} \right\} (3.62)$$

Если обобщенные возмущающие нагрузки являются гармоническими функциями времени, то целесообразно применить комплексную форму их записи:

$$P_i(t) = \bar{P}_{0i} e^{j\omega t} ; \quad M_i(t) = \bar{M}_{0i} e^{j\omega t}$$

и искать частные решения в виде

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \bar{A}_{1B} e^{j\omega t} , & \delta_2 &= \bar{A}_{2B} e^{j\omega t} , & \delta_3 &= \bar{A}_{3B} e^{j\omega t} , \\ \varphi_1 &= \bar{A}_4 e^{j\omega t} , & \varphi_2 &= \bar{A}_5 e^{j\omega t} , & \varphi_3 &= \bar{A}_6 e^{j\omega t} , \end{aligned}$$

где $\bar{P}_{0i}, \bar{M}_{0i}$ – комплексные амплитуды возмущающих сил и моментов;

\bar{A}_{iB} – комплексная амплитуда смещения по i -й координате; ω – частота возбуждения.

Подставляя эти решения в (3.62), получим систему из шести алгебраических уравнений, из которых можно найти амплитуды A_{iB} в функции частоты ω . Решение этой задачи в общем виде весьма трудоемко, однако при рациональном размещении виброизоляторов и расположении аппарата относительно действующих нагрузок задача может быть существенно упрощена.

Контрольные вопросы

1. Как определяется СЧК системы с одной степенью свободы (ОСС)?
2. Выведите формулу коэффициента динамического усиления колебаний для системы с ОСС.
3. Выведите формулу для коэффициента передачи (КП) системы с ОСС.
4. Нарисуйте график зависимости КП от частоты и объясните основные способы защиты изделий от вибраций.
5. Приведите векторную диаграмму сил, действующих на систему с ОСС.
6. Дайте анализ системы с ОСС при случайном вибрационном воздействии.
7. Почему при анализе системы с ОСС на ударное воздействие применяется операторный метод?
8. Как определяется СЧК системы с двумя степенями свободы?
9. Что понимается под собственной формой колебаний, парциальной частотой?
10. Дайте анализ вынужденных колебаний системы с двумя степенями свободы.
11. Что понимается под динамическим гасителем колебаний? Принцип работы и недостатки ДГК.
12. Напишите уравнения Лагранжа для свободных колебаний системы с шестью степенями свободы.
13. Как определяется СЧК систем с шестью степенями свободы?
14. Как составляются уравнения вынужденных колебаний для систем с шестью степенями свободы?

Глава 4

АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ, ПРИВОДИМЫХ К СИСТЕМАМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. СВОБОДНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

Расчет собственных частот колебаний. Жесткость балки на изгиб обычно бывает значительно ниже жесткости на растяжение и кручение, поэтому расчет изгибных колебаний балок представляет для практики наибольший интерес. При расчете обычно предполагают, что упругая ось балки совпадает с линией центров масс поперечных сечений, и при колебаниях все точки балки смещаются перпендикулярно первоначальному (прямолинейному) направлению оси. Все поперечные сечения при этом остаются плоскими.

В расчете учитываются только силы инерции, действующие в направлении оси z , и силы упругости, препятствующие деформации изгиба балки. В этом случае уравнение движения однородной балки (рис. 4.1) имеет вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ_y \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right] + m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Здесь J_y – момент инерции сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба; EJ_y – жесткость балки при изгибе, характеризующая его способность сопротивляться искривлению оси, m_0 – масса единицы длины балки.

Уравнение (4.1) выражает равенство действующих на элемент балки равномерно распределенных нагрузок от сил инерции и упругости. Для его решения представим функцию $z(x, t)$ в виде

$$z(x, t) = w_i(x) \cos(\omega_{0i}t + \varphi), \quad (4.2)$$

где $w_i(x)$ – амплитудная функция, характеризующая отклонение точек

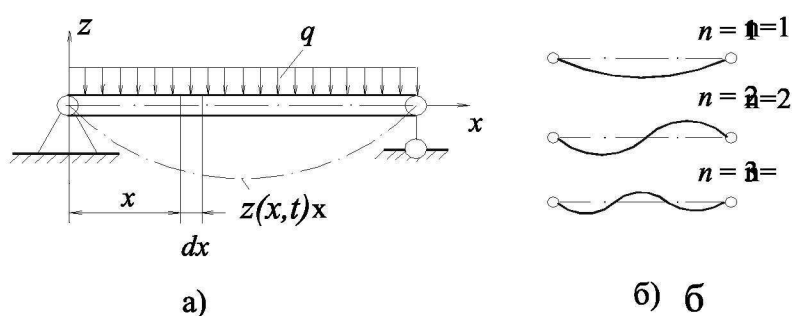


Рис. 4.1. Изгибные колебания балки:
а – схема нагружения; б – формы колебаний

балки от положения равновесия на i -й резонансной частоте.

Функция $w_i(x)$ называется собственной формой колебаний балки и зависит от граничных условий и номера собственной формы. Номер собственной формы n определяется по числу $n_{\text{вс}}$ внутренних узловых точек: $n = n_{\text{вс}} + 1$ (точки крепления балки не учитываются). Подстановка выражения (4.2) в выражение (4.1) дает

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right] - \omega_{0i}^2 m_0 w = 0. \quad (4.3)$$

В общем случае m_0, E, J_y могут быть переменными по длине балки, и тогда (4.3) не имеет точного решения. Поэтому для анализа основных зависимостей рассмотрим случай, когда эти значения постоянны. Уравнение (4.3) примет вид (символ аргумента у функции w опущен)

$$EJ_y \frac{d^4 w}{dx^4} - \omega_{0i}^2 m_0 w = 0,$$

или

$$w^4 - k_i^4 w = 0, \quad (4.4)$$

где

$$k_i^4 = \omega_{0i}^2 \frac{\rho F}{EJ_y}. \quad (4.5)$$

Общее решение уравнения (4.4) состоит из суммы четырех частных решений. Оно может быть представлено в виде известных функций Крылова [4] или в виде

$$w_i(x) = A_i \sin k_i x + B_i \cos k_i x + C_i \operatorname{sh} k_i x + D_i \operatorname{ch} k_i x. \quad (4.6)$$

Таким образом, форма колебаний зависит от постоянных интегрирования A_i, B_i, C_i, D_i и параметра k_i , т.е. от частоты ω_{0i} . Для определения постоянных A_i, B_i, C_i, D_i должны быть рассмотрены граничные условия, зависящие от способа закрепления концов балки.

Наиболее часто встречаются следующие виды граничных условий:

1) на опертом конце балки (шарнирное крепление) прогиб и изгибающий момент равны нулю, или $w = 0; w'' = 0$;

2) на жестко закрепленном конце прогиб и угол поворота сечения равны нулю, т.е. $w = 0; w' = 0$;

3) на свободном конце балки изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, откуда $w'' = 0; w''' = 0$.

Известны другие виды граничных условий [2; 10].

Используя решение выражение (4.6) и граничные условия, можно найти частные виды решений и получить для каждого из них частотное уравнение, из которого вычислить параметры k (а следовательно, и частоты ω) для любой формы колебания. В частности, для приведенного выше случая балки с шарнирно закрепленными концами (см. рис. 4.1) граничные условия будут

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad w = w'' = 0; \\ \text{при } x = l \quad w = w'' = 0. \end{aligned}$$

Используя первые два граничных условия, находим: $B_i = D_i = 0$. Два других условия приводят к следующей системе линейных однородных относительно A_i и C_i уравнений:

$$\begin{cases} A_i \sin k_i l + C_i \operatorname{sh} k_i l = 0; \\ -A_i \sin k_i l + C_i \operatorname{sh} k_i l = 0. \end{cases}$$

Приравняв определитель этой системы к нулю, получим уравнение частот $\sin k_i l \operatorname{sh} k_i l = 0$. Так как $\operatorname{sh} k_i l$ обращается в нуль только при $k_i l = 0$ (что обозначает отсутствие колебаний), частотное уравнение для данного способа закрепления балки будет

$$\sin \lambda = 0 \quad (\lambda = kl), \quad (4.7)$$

а его корни $\lambda_n = i\pi$ ($i=1, 2, \dots$).

Уравнением формы колебаний для данного частного случая будет уравнение синусоиды

$$w_i(x) = A_i \sin i\pi x / l, \quad (4.8)$$

амплитуда которой A_i представляет собой максимальный прогиб балки и определяется начальными условиями.

Значение корня частотного уравнения (4.7) определяет форму колебаний (в данном случае i – число полуволн синусоидальной линии изгиба, укладываемых на длине балки) и соответствующую собственную частоту. Эта частота находится из выражения (4.5) подстановкой в него корней частотного уравнения (4.7):

$$\omega_{0i} = \frac{\lambda_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}} \quad \text{или} \quad f_{0i} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_y}{\rho F}}. \quad (4.9)$$

Для балки прямоугольного сечения $F = bh$ и $J_y = bh^3 / 12$, и тогда

$$\omega_{0i} = \frac{(i\pi)^2}{l^2} \frac{h}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (4.10)$$

Таким образом, собственная частота балки прямоугольного сечения не зависит от его ширины b .

Для консольно закрепленной балки (рис. 4.2) граничные условия будут:

$$\text{при } x = 0 \quad w = w' = 0;$$

$$\text{при } x = l \quad w'' = w''' = 0.$$

Используя выражение (4.6) и граничные условия, приходим к частотному уравнению

$$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + 1 = 0. \quad (4.11)$$

Из этого уравнения находим следующие значения параметра λ :

$$\lambda_1 = 1,875; \quad \lambda_2 = 4,694; \quad \lambda_i \approx (2i - 1)\pi/2 \quad (i \geq 3).$$

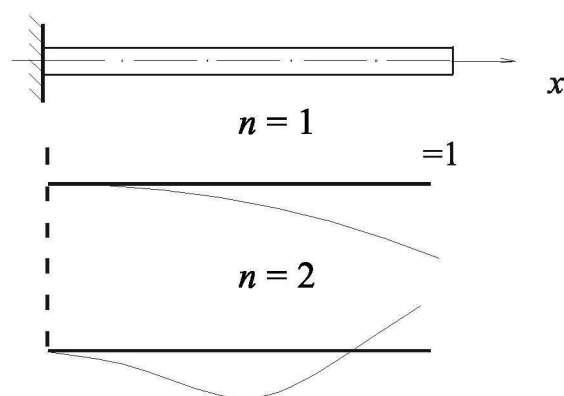


Рис. 4.2. Формы изгибных колебаний консольной балки

Подставив эти значения в (4.9), можно найти любую из собственных частот консольной балки.

Формы колебаний балки (см. рис. 4.2) могут быть определены из уравнения амплитудной функции подстановкой в нее соответствующих корней λ частотного уравнения (4.11) и постоянной, зависящей от начальных условий.

Для балки, оба конца которой жестко закреплены, граничные условия будут:

$$w = w' = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

При этих граничных условиях получим частотное уравнение в виде

$$\cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 = 0,$$

которое дает следующие значения λ :

$$\lambda_1 = 4,730; \quad \lambda_2 = 7,853; \quad \lambda_i \approx (2i + 1)\pi/2 \quad (i \geq 3).$$

Подстановка этих значений в (4.9) дает собственные частоты балки, оба конца которой жестко закреплены ¹.

Частотные коэффициенты для первых трех СЧК ($i = 1, 2, 3$) и типовых способов крепления концов балки приведены в табл. 4.1.

¹ Такие же частоты будет иметь балка с двумя свободными концами.

Т а б л и ц а 4.1

Частотные коэффициенты λ_i

Схема балки	i	λ_i	Схема балки	i	λ_i
	1	3,14		1	1,88
	2	6,28		2	4,69
	3	9,43		3	7,86
	1	4,73		1	0,00
	2	7,85		2	4,73
	3	11,00		3	7,85
	1	3,93		1	0,00
	2	7,07		2	3,93
	3	10,21		3	7,07

СЧК балок с сосредоточенной массой рассчитываются по формулам, приведенным в табл. 4.2 [10].

Т а б л и ц а 4.2

Собственные частоты колебаний балок с сосредоточенными массами

Схема балки	СЧК	Схема балки	СЧК
	$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EJL}{mL^3}}$		$f_0 = \frac{1}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJL}{m}}$
	$f_0 = \frac{L}{\pi ab} \sqrt{\frac{3EJL}{ma(3a+4b)}}$		$f_0 = \frac{L}{2\pi ab} \sqrt{\frac{3EJL}{mab}}$

Анализ выражения (4.10) показывает, что балка имеет бесконечное число собственных форм колебаний и соответствующее им число собственных частот, при этом частоты всех тонов быстро возрастают. Из выражения (4.10) видно также, что любая собственная частота балки сильно зависит от ее длины (обратно пропорционально квадрату длины) и в меньшей степени от размеров и формы поперечного сечения и свойств мате-

риала. Это дает возможность конструктору корректировать частотные характеристики разрабатываемой конструкции.

Пример 4.1. Рассчитать три первые собственные частоты колебаний балки, свободно опертой на концах и имеющей следующие параметры: поперечное сечение круглое с диаметром $d = 0,5 \cdot 10^{-3}$ м, длина $L = 2,8 \cdot 10^{-2}$ м. Балка (вывод ЭРЭ) выполнена из меди с характеристиками $E = 1,27 \cdot 10^{11}$ н/м²; $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³ (табл. П.1).

Решение. Для балки круглого сечения находим

$$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14(0,5 \cdot 10^{-3})^4}{64} = 3,1 \cdot 10^{-15} \text{ м}^4;$$

$$m = \rho \frac{\pi d^2}{4} = \frac{8,9 \cdot 10^3 \cdot 3,14(0,5 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 1,75 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

По формуле (4.9), взяв из табл. 4.1 $\lambda_1 = 3,14$; $\lambda_2 = 6,28$ и $\lambda_3 = 9,43$, найдем

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{3,14^2}{6,28(2,8 \cdot 10^{-2})^2} \sqrt{\frac{1,27 \cdot 10^{11} \cdot 3,1 \cdot 10^{-15}}{1,75 \cdot 10^{-3}}} = 968 \text{ Гц};$$

$$f_{02} = 3873 \text{ Гц}; f_{03} = 8734 \text{ Гц}.$$

В тех случаях, когда точное решение получить не удаётся, применяют приближённые методы, из которых наибольшее распространение получили методы Рэлея и Ритца.

Метод Рэлея. Этот метод основан на простых энергетических соображениях и не требует составления дифференциального уравнения колебаний. Точность его зависит от выбора формы колебаний, и поэтому решение неоднозначно.

Метод основан на использовании закона сохранения энергии, в соответствии с которым максимальные значения потенциальной и кинетической энергии системы равны, т.е.

$$P_{\max} = T_{\max}.$$

Из этого уравнения и определяется собственная частота ω_0 .

Рассмотрим метод Рэлея применительно к задаче о поперечных колебаниях балки. Пусть перемещения точек оси балки описываются законом

$$w(x, t) = w(x) \sin(\omega t + \alpha), \quad (4.12)$$

где $w(x)$ – форма колебаний. Уравнение (4.12) означает, что колебания всех точек происходят с одной и той же частотой и находятся в одной фазе.

В соответствии с выражением (4.12) скорости точек оси балки определяются зависимостью

$$\dot{w}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t} = \omega w(x) \cos(\omega t + \alpha),$$

а максимальные скорости – зависимостью

$$\dot{w}_{\max}(x) = \omega w(x).$$

Следовательно, максимальная потенциальная энергия

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^1 m w^2(x) dx, \quad (4.13)$$

а максимальная кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^1 m \dot{w}_{\max}^2 dx = \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^1 m w^2(x) dx, \quad (4.13, a)$$

где $m = m(x)$ – интенсивность распределённой массы балки.

Приравнявая выражения (4.13) и (4.13 а), получим формулу

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^1 EJ [w''(x)]^2 dx}{\int_0^1 m w^2(x) dx}. \quad (4.14)$$

Если на балке имеются грузы с массами m_i , то общая кинетическая энергия

$$T_{\max} = \frac{\omega_0^2}{2} \int_0^1 m w^2(x) dx + \frac{\omega_0^2}{2} \sum m_i w_i^2(x),$$

и формула (4.14) примет вид

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^1 EJ [w''(x)]^2 dx}{\int_0^1 m w^2(x) dx + \sum m_i w_i^2(x)}. \quad (4.15)$$

Формулы (4.14) и (4.15) дают точные результаты при условии, что в них подставляется истинная форма колебаний $w(x)$. Но так как она, как правило, неизвестна, то это вносит некоторую неточность. Рэлеем доказано, что получаемое по этим формулам приближённое значение собственной частоты всегда выше истинного значения или, в крайнем случае, равно ему. Из формулы (4.14) видно, что умножение функции $w(x)$ на любое число не изменит результата, т.е. при выборе функции $w(x)$ её масштаб никакой роли не играет. Необходимо лишь стремиться к тому, чтобы как можно лучше отразить ожидаемую форму колебаний, или, как минимум, обеспечить выполнение граничных условий, соответствующих условиям закрепления концов балки.

Рэле́й предложил также брать в качестве первой, основной формы колебаний $w(x)$ форму статической деформации системы от нагрузки, приложенной к системе или близкой к ней нагрузки.

Пример 4.2. Методом Рэлея рассчитать первую собственную частоту колебаний балки постоянного сечения, показанной на рис. 4.3.,а Погонная масса балки равна m . Решение.

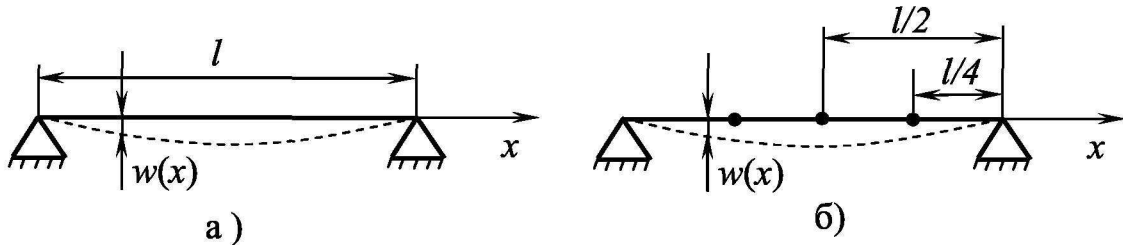


Рис. 4.3. Формы колебаний балок: а – с распределенной массой; б – с инерционными грузами

Зададимся формой колебаний в виде $w(x) = w_0 \sin \frac{\pi x}{l}$. Это выражение удовлетворяет граничным условиям (при $x = 0$ и $x = l$, $w = w' = 0$). Так как сосредоточенные грузы отсутствуют, используем формулу (4.14). Числитель этой формулы

$$\int_0^l EJ(w'')^2 dx = EJw_0^2 \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = \frac{EJw_0^2 \pi^4}{2l^3},$$

а знаменатель

$$\int_0^l mw^2 dx = mw_0^2 \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = mw_0^2 \frac{l}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}.$$

Видим, что формула совпадает с выражением (4.10), полученной точным методом ($i = 1$). Совпадение формул обусловлено точным выбором формы колебаний.

Предположим теперь, что на балке имеется три одинаковых груза (рис. 4.3, б). Масса каждого из них равна m_i . Задаваясь той же формой колебаний и добавляя в знаменателе слагаемое

$$\sum m_i w_i^2 = m_i \left(\frac{w_0}{2}\right)^2 + m_i w_0^2 + m_i \left(\frac{w_0}{2}\right)^2,$$

получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\pi^4 EJ}{2l^3 \left(\frac{ml}{2} + \frac{3}{2} m_i \right)}} = \frac{\pi^2}{l^{1,5}} \sqrt{\frac{EJ}{ml + 3m_i}}.$$

Эту формулу можно привести к виду $f_0 = \frac{\alpha}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m_\Sigma}}$, где $\alpha = \pi^2 \sqrt{l}$,

$$m_\Sigma = ml + 3m_i.$$

Метод Рунца. Сущность этого метода заключается в следующем. Подбирается несколько функций: $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$ каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям задачи и образует функцию $w(x)$ как сумму

$$w(x) = \sum_{i=1}^n c_i w_i(x). \quad (4.16)$$

Если эту функцию подставить в формулу (4.14), то результат будет зависеть от конкретного выбора коэффициентов $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n$. Они выбираются так, чтобы вычисление по формуле (4.14) дало наименьшее значение для ω_0 , так как из теоремы Рэлея вытекает, что такой выбор будет наилучшим.

Условия минимума ω_0 имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \frac{\int_0^l EJ(w'')^2 dx}{\int_0^l mw^2 dx} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots),$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l EJ(w'')^2 dx \right] \left[\int_0^l mw^2 dx \right] - \left[\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l mw^2 dx \right] \left[\int_0^l EJ(w'')^2 dx \right] = 0.$$

Разделив это уравнение на интеграл $\int_0^l mw^2 dx$ с учётом формулы

(4.14), получим

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^l \left[EJ(w'')^2 - \omega_0^2 mw^2 \right] dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (4.17)$$

Уравнения (4.17) однородны и линейны относительно $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n$,

и их число равно числу коэффициентов. Приравняв к нулю определитель, составленный из коэффициентов при $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \dots, \tilde{n}_n$, получим частотное уравнение, которое не только даёт хорошее приближение для низшей частоты, но также позволяет определить (хотя и с меньшей точностью) значения высших частот. При этом можно найти столько частот, сколько слагаемых принято в выражении (4.16). Так как этот метод основан на использовании метода Рэлея, то его часто называют методом Рэлея – Ритца.

4.2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ ТИПА БАЛОК

Определение амплитуд колебаний при гармоническом возбуждении. Для определения резонансных амплитуд, деформаций и механических напряжений в элементах балочных конструкций в процессе эксплуатации необходимо рассмотреть уравнения их движения при вынужденных колебаниях. Эти уравнения будут отличаться от однородного уравнения (4.1) правой частью, в которой будут находиться внешние силы: кроме того, в левую часть уравнений необходимо ввести диссипативную силу, которая определяет потери энергии при колебаниях. Вид уравнений вынужденных изгибных колебаний зависит от принимаемой гипотезы о диссипативной силе.

Для конструкций с демпфирующими слоями из полимерных материалов широкое распространение получила экспериментально проверенная гипотеза, согласно которой диссипативная сила принимается пропорциональной скорости деформации [3]. Уравнение вынужденных изгибных колебаний балки записывается в виде

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ_y \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + h \frac{\partial^5 z}{\partial x^4 \partial t} \right) = P(x, t), \quad (4.18)$$

где $P(x, t)$ – внешняя сила, возбуждающая колебания и приложенная к точке с координатой x ; h – коэффициент пропорциональности.

Для конструкций из металлов и жестких полимеров наиболее широко применяется гипотеза Сорокина, в соответствии с которой диссипативная сила пропорциональна упругой восстанавливающей силе, но сдвинута относительно последней на угол $\pi/2$. Уравнение движения при этой гипотезе имеет вид

$$m_0 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + EJ_y (1 + j\eta) \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = P(x, t), \quad (4.19)$$

где η – коэффициент механических потерь (КМП).

Для решения уравнений типа (4.18) или (4.19) широко применяется метод разложения функции $z = z(x, t)$, определяющей смещение точек балки, в ряд по собственным формам [3]:

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) w_i(x), \quad (4.20)$$

где $a_i(t) = A_{0i} e^{j\omega t}$; $w_i(x)$ – собственные формы колебаний, представленные в виде

$$w_i(x) = \sin k_i x + \overline{A}_i \cos k_i x + \overline{B}_i \operatorname{sh} k_i x + \overline{C}_i \operatorname{ch} k_i x. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.20) получается из формулы (4.6) делением левой и правой частей последнего на коэффициент A_i . Следовательно, $\overline{A}_i = B/A_i$, $\overline{B}_i = C/A_i$, $\overline{C}_i = D/A_i$. Волновые числа $k_i = \lambda_i/l$ определяются из граничных условий. Для типичных случаев крепления балок коэффициенты \overline{A}_i , \overline{B}_i , \overline{C}_i и параметр λ_i приведены в табл. П.2.

Внешнюю гармоническую силу $P(x, t) = P(x) e^{j\omega t}$ также представим в виде разложения по тем же функциям $w_i(x)$:

$$P(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x), \quad (4.22)$$

где $b_i(t) = B_{0i} e^{j\omega t}$.

Умножая обе части функции (4.22) на функцию $w_i(x)$, сокращая на $e^{j\omega t}$ и интегрируя их по длине балки, получаем:

$$\int_0^l P(x) w_i(x) dx = \int_0^l B_{01} w_1(x) w_i(x) dx + \dots + \int_0^l B_{0i} w_i^2(x) dx + \dots \quad (4.23)$$

Из условия ортогональности собственных форм колебаний [3] следует, что при $i \neq n$

$$\int_0^l w_i(x) w_n(x) dx = 0,$$

и из уравнения (4.23) найдем

$$B_{0i} = \int_0^l P(x) w_i(x) dx \Big/ \int_0^l w_i^2(x) dx. \quad (4.24)$$

Подставив разложения (4.20) и (4.22) в одно из уравнений движения, например в (4.18), получим:

$$m_0 \sum_{i=1}^{\infty} (j\omega)^2 a_i(t) w_i(x) + EJ(1 + jh\omega) \sum_{i=1}^{\infty} k_i^4 a_i(t) w_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x).$$

Учитывая выражение (4.5), найдем

$$m_0 \sum_{i=1}^{\infty} (j\omega)^2 a_i(t) w_i(x) + m_0(1 + jh\omega) \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{0i}^2 a_i(t) w_i(x) = \\ = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) w_i(x).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых $w_i(x)$ в левой и правой частях последнего уравнения, получим:

$$a_i(t) = \frac{b_i(t)}{m_0 [(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + jh\omega\omega_{0i}^2]}.$$

Подставляя его в разложение (4.20), найдем комплексное смещение

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(t) w_i(x)}{m_0 [(\omega_{0i}^2 - \omega^2) + jh\omega\omega_{0i}^2]}. \quad (4.25)$$

Если считать, что балка возбуждается кинематически, т.е. за счет колебаний опор, то гармоническую возбуждающую силу можно представить в виде

$$P(x, t) = m_0 \ddot{Z}(t),$$

где $\ddot{Z}(t) = \ddot{Z}_0 e^{j\omega t}$ – ускорение мест крепления балки, не зависящее от координаты x :

$$z(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ddot{Z}(t) K_i(x)}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + jh\omega\omega_{0i}^2}, \quad (4.26)$$

где

$$K_i(x) = \frac{\int_0^l w_i(x) dx}{\int_0^l w_i^2(x) dx} w_i(x). \quad (4.27)$$

Интегралы, входящие в формулу (4.27), для типичных случаев крепления краев можно определить при помощи табл. П.3. Для ускорения рас-

четов можно воспользоваться табл. П.4, в которой приведены значения $K_i(x/l)$ для пяти собственных форм колебаний.

Используя формулу (4.26), передаточную функцию балки в точке с координатой x представим в виде

$$\Phi_{z/\ddot{Z}}(j\omega) = \frac{z(x,t)}{\ddot{Z}(t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 + jh\omega\omega_{0i}^2}. \quad (4.28)$$

Коэффициент передачи в этой точке

$$\mu_{i,z/\ddot{Z}}(x) = |\Phi_{z/\ddot{Z}}(j\omega)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 \sqrt{(1 - \gamma_i^2)^2 + \eta_i^2 \gamma_i^2}}, \quad (4.29)$$

где $\gamma_i = \omega / \omega_{0i}$.

При резонансе, когда частота возбуждающих колебаний равна одной из собственных частот колебаний, приближенно можно считать, что форма вынужденных резонансных колебаний совпадает с собственной формой колебаний балки, т.е. $z(x,t) = Z_0(x) = A_{0i} w_i(x)$. Отсюда следует:

$$\mu_{i,z/\ddot{Z}}(x) = \frac{Z_0(x)}{\ddot{Z}_0} = \frac{K_i(x)}{\omega_{0i}^2 \eta_i}. \quad (4.30)$$

Выражение (4.30) определяет коэффициент передачи для перемещения $Z_0(x)$ при заданном ускорении опор. Учитывая, что при гармоническом возбуждении $\ddot{Z}_0(x) = \omega^2 Z_0(x)$ коэффициент передачи ускорения при резонансе в точке балки с координатой x по отношению к ускорению опор производится по формуле:

$$\mu_{i,\ddot{Z}_0(t)/\ddot{Z}_0}(x) = \frac{\ddot{Z}_0(x)}{\ddot{Z}_0} = \frac{K_i(x)}{\eta_i}. \quad (4.31)$$

Часто требуется знать не относительное, а абсолютное ускорение. Учитывая, что при резонансе сдвиг фаз между колебаниями балки и возмущающими колебаниями равен $\pi/2$, получим:

$$\begin{aligned} \ddot{Z}_{0\text{абс}}(x) &= \sqrt{\ddot{Z}_{0i}^2 + \ddot{Z}_0^2}; \\ \mu_{i,\ddot{Z}_{0\text{абс}}/\ddot{Z}_0}(x) &= \frac{\ddot{Z}_{0\text{абс}}(x)}{\ddot{Z}_0} = \sqrt{\frac{K_i^2(x)}{\eta_i^2} + 1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Коэффициент механических потерь (КМП) балки можно приближенно найти по эмпирической формуле [8]

$$\eta_i = \sqrt{\frac{1}{f_{0i}}}, \quad (4.33)$$

где f_{0i} – i -я собственная частота колебаний, определяемая по формулам, приведенным в 4.1.

Пример 4.3. Определить амплитуду виброускорения в точке балки с координатой $x = 1 \cdot 10^{-2}$ м при первом резонансе, если балка длиной $L = 2 \cdot 10^{-2}$ м возбуждается кинематически через колебания опор с амплитудой виброускорения 5 g. Все остальные параметры балки и способ крепления соответствуют примеру 4.1.

Решение. Находим по формуле (4.33) КМП балки:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{942}} = 0,033.$$

Из табл. П.4 для относительной координаты $\xi = (1 \cdot 10^{-2} / 2,8 \cdot 10^{-2}) = 0,36$ выбираем $K_i(x) = 1,15$.

По формуле (4.32) найдем коэффициент передачи

$$\mu_1(0,5) = \sqrt{\frac{1,15}{0,033} + 1} = 6,5$$

и по формуле (4.31) – ускорение в середине балки

$$\ddot{Z}(0,5) = 6,5 \cdot 5 \text{ g} = 32,5 \text{ g}.$$

Расчет по формулам (4.30), (4.32) может вызвать затруднение, если способы крепления концов балки не соответствуют строго типовым – шарнирному опиранию, жесткому заземлению и т.п. Сравнение значений коэффициентов λ в формуле (4.9) для основного тона при различных способах крепления показывает, что наибольшая ошибка получится, если балку со свободно опертными концами ($\lambda = 3,14$) рассчитать для случая жесткого заземления концов ($\lambda = 4,73$) и наоборот. Поэтому если способы крепления не соответствуют строго типовым и не ясно, к какому типовому креплению ближе реальные условия, то ошибка в определении коэффициента передачи $\mu_{i,Z/\dot{Z}}(x)$ за счет неточного определения частоты ω_{0i} может оказаться недопустимо большой. В этом случае частоту ω_{0i} целесообразно находить экспериментально. Для последующих обертонов ошибка будет меньше, и коэффициент λ_i можно принимать как среднюю величину для предельных с точки зрения определения собственной частоты способов закрепления.

Значение возможной ошибки в определении коэффициента $K_i(x)$ наглядно видно из рис. 4.4, на котором приведены графики, построенные на основе данных табл. П.4. Видно, что максимальные значения коэффициента $K_i(x)$ при различных способах закрепления различаются несущественно, а наибольшее значение соответствует случаю жесткого заземления. Этот вывод важен для практики, так как именно максимальные ам-

плитуды вибро смещения и напряжения часто требуется находить для определения прочности конструкции. Поэтому, если способ крепления балки не соответствует типовому, максимальную амплитуду целесообразно рассчитывать как для балки с жестко заземленными концами при $\xi_x = 0,5$ для первого резонанса, $\xi_x = 0,225; 0,775$ для второго резонанса и т.д., т.е. для сечений, у которых амплитуда и напряжения максимальны. Ошибка в этом случае не будет превышать 5 ... 10 % для первого резонанса, 15 ... 20 % для второго и последующего резонансов.

Если необходимо рассчитать амплитуды в нескольких точках балки, расчет рекомендуется также вести для наихудшего случая, выбирая из табл. П.4 наибольшие значения коэффициента $K_i(x)$ для различных способов крепления.

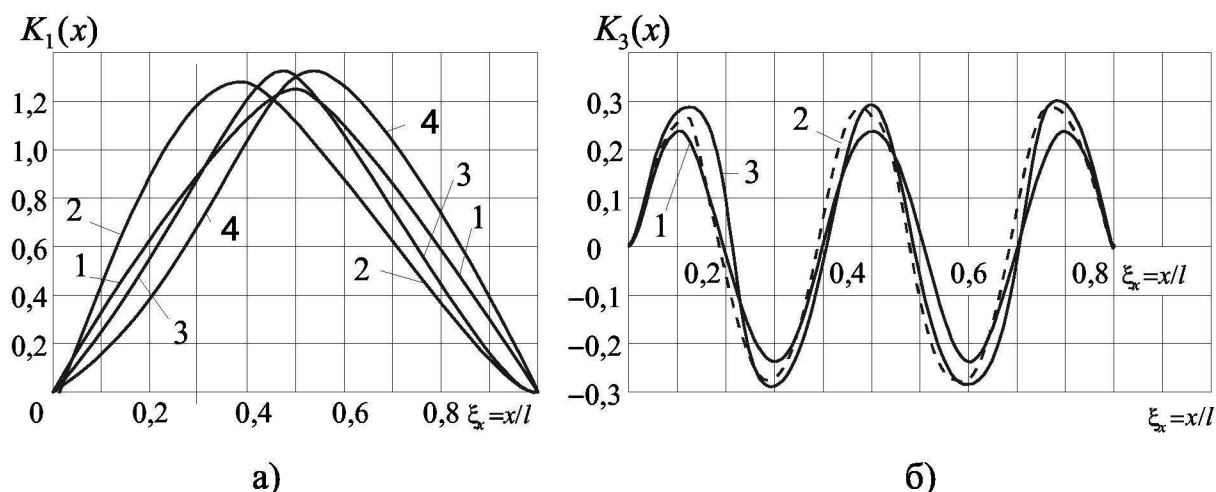


Рис. 4.4. Значения коэффициента формы колебаний в различных точках балки при первой (а) и третьей (б) гармониках:

1 – свободное опирание – свободное опирание; 2 – свободное опирание – жесткое заземление; 3 – жесткое заземление – жесткое заземление; 4 – жесткое заземление – свободное опирание

Определение реакции балки при случайном воздействии. Будем считать, что места крепления балки испытывают случайные колебания. Среднеквадратическое отклонение точки балки, имеющей координату x , находится по формуле

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} = \sqrt{\int_0^{\infty} |\hat{O}(j, \omega)|^2 S(\omega) d\omega},$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность возмущающих колебаний.

Учитывая формулу (4.29) и принимая во внимание [13], что

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + \eta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{\pi\omega_0}{2\eta},$$

получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_k^2(x) S(\omega) \pi}{2\omega_{0k}^3 \eta_k}}.$$

Первое слагаемое, соответствующее перемещению на первой собственной частоте колебаний, значительно превышает все остальные, и поэтому

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} \approx K_1(x) \sqrt{\frac{\pi S(\omega)}{2\omega_{01}^3 \eta_1}}.$$

Учитывая, что $f = \omega/2\pi$ и $S(f) = S(\omega) 2\pi/g^2$, получаем

$$\sqrt{\bar{v}^2(x)} \approx K_1(x) \sqrt{\frac{S(f) g^2}{32\pi^3 f^3 \eta_1}}. \quad (4.34)$$

Средний квадрат относительного ускорения $\bar{\ddot{v}}_k^2(x)$ на k -й резонансной частоте

$$\bar{\ddot{v}}_k^2(x) = K_k^2(x) \frac{S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k}.$$

В отличие от перемещения средний квадрат ускорения существенно зависит от средних квадратов ускорения на всех резонансных частотах [13]:

$$\sqrt{\bar{\ddot{v}}^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \bar{\ddot{v}}_k^2(x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{K_k^2(x) S(f) g^2 \pi f_k}{2\eta_k}}, \quad (4.35)$$

где n – число собственных частот колебаний в заданном диапазоне частот.

Пример 4.4. Определить среднеквадратическое значение ускорения в точке балки с координатой $X = 0,8 \cdot 10^{-2}$ м, если балка длиной $L = 2 \cdot 10^{-2}$ м возбуждается кинематически случайной вибрацией в диапазоне от 10 до 5000 Гц с постоянной спектральной плотностью ускорения $S(f) = 0,1 \text{ г}^2/\text{Гц}$. Концы балки свободно оперты. Остальные параметры как в примере 4.1.

Решение. Как было определено в примере 4.1, в диапазоне 10 – 5000 Гц имеются две собственные частоты колебаний: 968 Гц и 3873 Гц. Из табл. П.4. для относительной координаты $\xi = (0,8 \cdot 10^{-2} / 2,8 \cdot 10^{-2}) = 0,29$ находим $K_1 = 1,03$; $K_2 = 1,21$. Используя формулу (4.35) и учитывая формулу (4.33), найдем

$$\bar{v}(x) = \left\{ 1,03^2 \frac{3,14 \cdot 9,81^2 \cdot 0,1 \cdot 968 \sqrt{968}}{2} + 1,21^2 \frac{3,14 \cdot 9,81^2 \cdot 0,1 \cdot 3873 \sqrt{3873}}{2} \right\}^{0,5} = 2411 \text{ м} / \text{с}^2.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите уравнение свободных колебаний балки. Какие силы входят в это уравнение?
2. Какие виды граничных условий наиболее часто рассматриваются?
3. Как выглядит общее решение уравнения свободных колебаний балки?
4. Напишите уравнение вынужденных колебаний балки при силовом и кинематическом возбуждении.
5. Какой метод применяется при решении уравнения вынужденных колебаний балки?
6. Как можно приближенно рассчитать СЧК и АРК балок, если граничные условия точно не известны?

Приложение

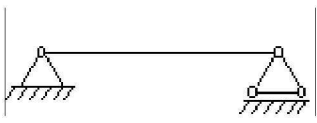
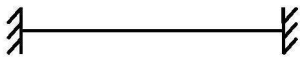
Т а б л и ц а П.1

Физические параметры материалов

Материал	$E \cdot 10^{11}, \text{Н/М}^2$	$\rho \cdot 10^3, \text{кг/М}^3$	ν	$[\sigma] \cdot 10^8, \text{Н/М}^2$
Сталь	2 – 2,2	7,8	0,24 – 0,3	1,6
Алюминий	0,68	2,7	0,32 – 0,36	0,3 – 0,8
Медь	1,27	8,9	0,31 – 0,34	0,3 – 1,2
Серебро	0,82	10,5	---	---
Золото	0,78	19,3	---	---
Дюралюминий	0,72	2,7	---	0,8 – 1,5
Стеклотекстолит				
СТЭФ (Н=1,33 мм)	0,33	2,47	0,279	---
СТЭ (Н=1,22 мм)	0,35	1,98	0,14	---
НФД (Н=0,92 мм)	0,345	2,32	0,238	---
СТЭФ (с печатной схемой, Н=1,22 мм)	0,302	2,05	0,22	---
Текстолит	0,06 – 0,1	---	---	0,3 – 0,4
Гетинакс	0,1 – 0,17	---	---	0,5 – 0,7

Т а б л и ц а П.2

Значения параметров λ_i и коэффициентов A_i, B_i, C_i , базисных функций

Условия закрепления	i	λ_i	A_i	B_i	C_i
	1	3,142	0	0	0
	2	6,283	0	0	0
	3	9,425	0	0	0
	4	12,566	0	0	0
	5	15,708	0	0	0
	1	4,730	-1,0178	-1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	-1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	-1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	-1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	-1	-1,0000001

Окончание табл. П.2



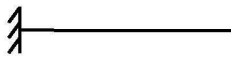
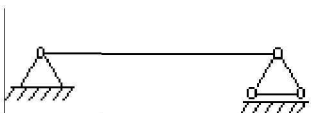
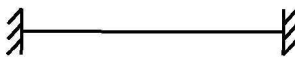

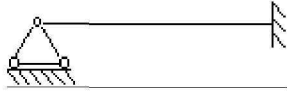
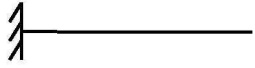
Условия закрепления	i	λ_i	A_i	B_i	C_i
	1	4,730	-1,0178	1	-1,0178
	2	7,853	-0,999223	1	-0,999223
	3	10,996	-1,0000335	1	1,0000335
	4	14,137	-0,9999986	1	-0,9999986
	5	17,279	-1,0000001	1	-1,0000001
	1	3,927	0	0,027875	0
	2	7,069	0	-0,0012041	0
	3	10,210	0	0,0000520	0
	4	13,352	0	-0,0000022	0
	5	16,494	0	0,0000001	0
	1	1,875	-1,3622	-1	1,3622
	2	4,694	-0,98187	-1	0,98187
	3	7,855	-1,000777	-1	1,000777
	4	10,996	-0,999965	-1	0,999965
	5	14,137	-1,0000015	-1	1,0000015

Таблица П.3

Численные значения некоторых интегралов

Способ крепления	i	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i^2 dx$	$l \int_0^l x_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l x_i''^2 dx$
	1	0,6366	0,5	4,9348	48,70454
	2	0,6366	0,5	19,739	779,2727
	3	0,6366	0,5	44,413	3945,068
	4	0,6366	0,5	78,956	12468,36
	5	0,6366	0,5	123,37	30440,34
	1	0,8456	1,0358	12,748	518,4548
	2	0,8594	0,9985	45,975	3797,111
	3	0,8737	1,0026	98,664	14347,29
	4	0,8764	0,9976	172,08	39844,88
	5	0,9152	1,0447	256,77	93140,375
	1	0,8903	1,0357	51,250	518,4726
	2	0,8863	0,9984	108,75	3797,502
	3	0,8910	1,0000	186,85	14618,15
	4	0,8921	0,9973	283,14	39838,21
	5	0,9068	1,0448	436,23	93132,35

Окончание табл. П.3

Способ крепления	i	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i dx$	$\frac{1}{l} \int_0^l x_i^2 dx$	$l \int_0^l x_i'^2 dx$	$l^3 \int_0^l x_i''^2 dx$
	1	0,6078	0,4995	5,7524	118,8525
	2	0,6208	0,4999	21,450	1248,754
	3	0,6256	0,4999	47,021	5432,763
	4	0,6334	0,4992	108,74	15865,02
	5	0,6309	0,5008	127,54	37076,88
	1	1,0664	1,8552	8,6228	22,93523
	2	0,8426	0,9639	31,248	468,0322
	3	0,8738	1,0017	77,461	3813,367
	4	0,8819	1,0026	143,85	14656,03
	5	0,8785	0,9814	215,65	39201,60