Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

С. В. ТИХОМИРОВА

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Множества

Учебно-практическое пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2020

УДК 74.26
ББК 373.3.016
Т46

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
профессор кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Ю. А. Алхутов

Кандидат педагогических наук, доцент
проректор по научно-методической работе
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. Л. Харчевникова

Тихомирова, С. В.
Т46 Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов : Множества : учеб.-практ. пособие / С. В. Тихомирова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 200 с.
ISBN 978-5-9984-1234-9

Содержится необходимый теоретический материал начальной математики, основанный на «Теории множеств», большое количество примеров решений типовых задач, задания рейтинг-контролей и задачи для самостоятельного решения.

Составлено в соответствии с программой учебной дисциплины «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» для бакалавров начального образования.

Ил. 10. Библиогр.: 13 назв.

УДК 74.26
ББК 373.3.016

ISBN 978-5-9984-1234-9

© ВлГУ, 2020
© Тихомирова С. В., 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебный курс «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» включает изучение «Теории множеств», «Элементов математической логики», «Бинарных соответствий и отношений», «Алгебраических операций и их структур», «Комбинаторики», а также изучение «Величин и их измерений», «Различных подходов к построению множества целых неотрицательных чисел $\{\mathbb{N} \cup 0\}$». Математика начальной школы выстроена в теоретико-множественном русле, где основными понятиями являются «множество», «натуральное число», «величина».

Учебно-практическое пособие с одноименным названием учебной дисциплины для бакалавров начального образования составлено в двух частях. Первая часть содержит вопросы, базирующиеся на теории множеств, во второй части основой изучения служат число и величина.

Пособие включает пять глав с изложением основ теории и практических образцов решений типовых задач по темам, а также подборкой заданий для рейтинг-контроля и задач для самостоятельного решения.

В первой главе даются основные понятия теории множеств, рассматриваются отношения между множествами, выполняются операции над ними. Во второй главе изучается множество предложений математической теории, логические операции и дедуктивные умозаключения. Правильность умозаключений устанавливается с помощью таблиц истинности или проверяется на кругах Эйлера. Подробному рассмотрению алгебраических операций на множествах чисел и предложений отведена четвёртая глава.

Исследование различных связей между элементами одного или двух множеств проводится в третьей главе «Бинарные соответствия и отношения». Будущему учителю начальных классов необходимы как теоретическая платформа для исследования связей между объектами, так и практические навыки в вопросах сортировки различных соответствий.

Пятая глава «Комбинаторика» завершает теоретическое изложение вопросов начальной математики части «Множества». Цель изучения главы – знакомство с основными понятиями и методами комбинаторики, позволяющими анализировать ситуацию и делать правильный выбор. Образовательными задачами здесь служат одновременно получение новых знаний о комбинаторике и способах решения комбинаторных задач, а также умение анализировать и интерпретировать данные, представленные в различной форме.

Обозначенные главы содержат распределения по темам, объяснения в которых снабжены рисунками, схемами-алгоритмами для решения задач. Во всех темах вопросы теории закрепляются выполнением практических упражнений. При работе над конкретным заданием описаны шаги-рассуждения для его решения, обязательны ссылки на определения, законы, свойства и другие предложения математической теории. Задачи разбираются как на множествах абстрактных предметов (не учитывая природы элементов), так и на числовых множествах. Много заданий геометрического содержания, что существенно для бакалавра – будущего учителя начальной школы, – понимать отношения на множествах геометрических фигур, разбираться в свойствах и признаках конкретной фигуры, классифицировать геометрические фигуры по разным основаниям.

В главе «Задачи для самостоятельного решения» задания также сгруппированы по темам согласно изложенному теоретическому материалу глав. Различные типы заданий раздела представлены набором вариантов, что обеспечивает полноценную работу со студентами и в группе, и индивидуально.

При подготовке пособия автор использовал учебники, задачники-практикумы по математике для студентов высших педагогических учебных заведений, написанные Л. П. Стойловой, Н. Я. Виленкиным, А. А. Столяром, а также методические разработки коллег-предшественников И. И. Цыганок и Н. Ф. Булатовой.

Глава I. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Основные понятия теории множеств. Способы задания множеств

Одним из фундаментальных *неопределяемых* математических понятий является понятие *множества*. Содержание этого понятия можно раскрыть на примерах. Читателю ясно, когда речь идет, например, о множестве деревьев в парке, множестве цветных карандашей в наборе, множестве букв в слове "абитуриент", множестве дней в году.

Немецкий математик Георг Кантор (1845-1918 гг.) говорил, что «множество есть многое, мыслимое как единое целое». Множество можно представить как совокупность (собрание, класс, набор) некоторых предметов или объектов, объединённых по какому-либо признаку.

Теория множеств занимается изучением общих свойств множеств, не зависящих от природы объектов, образующих множества. Предметы (объекты), из которых составлено множество, называют *элементами* множества.

Произвольные множества принято обозначать большими латинскими буквами A, B, M, K, ..., а элементы множеств – малыми латинскими буквами a, b, m, k, ... или буквами с индексами a_1, a_2, a_3, ...

Если a является элементом множества A, то это записывают в виде $a \in A$ и читают «Элемент a принадлежит множеству A». Если a не содержится в множестве A, то это записывают в виде $a \notin A$ и читают «Элемент a не принадлежит множеству A».

Множество, которое не содержит элементов, называют пустым и обозначают символом $\emptyset$. Пустым будет, например, множество действительных решений уравнения $x^2 + 1 = 0$, множество натуральных решений неравенства $4x + 5 < 3$.

Множества бывают

конечные	бесконечные
количество $m(A)$ элементов множества A можно выразить натуральным числом	количество элементов множества A нельзя выразить натуральным числом
Например, множество дней недели, или множество учащихся класса	Например, множество натуральных чисел

Множество считается заданным, если есть способ, позволяющий для любого данного элемента решить, принадлежит или не принадлежит он данному множеству.

Основные способы задания множеств

Перечисление элементов множества	Указание *характеристического* свойства $P(x)$ (т.е. такого свойства, которым обладают *все* элементы x данного множества и только они)
$A = \{a, b, c, d\}$	$A = \{x \mid P(x)\}$
Элементы множества записываются в фигурных скобках через запятую	В фигурных скобках после обозначения элемента x множества ставится вертикальная черта, а затем указывается характеристическое свойство $P(x)$

Например, множество натуральных чисел, меньших 8 можно задать двумя способами

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 8\}$

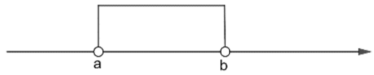
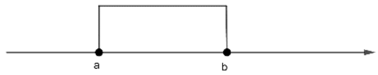
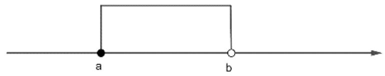
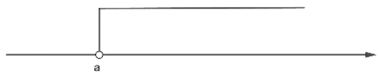
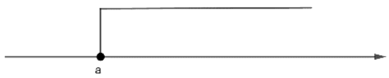
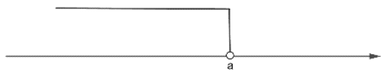
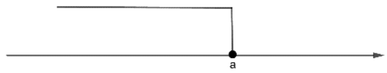
О каждом из этих способов задания множеств отметим, что он применим:

только для задания конечных множеств	для задания бесконечных и конечных множеств

Замечание. Для обозначения произвольного элемента множества использовали x, но возможно использование любой буквы латинского алфавита. Для обозначения характеристического свойства использовали $P(x)$, но возможно использование букв греческого алфавита α, β, γ…

В математике особую роль играют множества, элементами которых являются математические объекты (числа, точки, уравнения, функции, др.). Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Для них введены общепринятые обозначения: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ – множество целых неотрицательных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Геометрической моделью множества $\mathbb{R}$ является числовая (координатная) прямая. Это значит, что любое действительное число может быть изображено точкой на этой прямой, и наоборот, любая точка числовой прямой соответствует какому-либо действительному числу. Кроме того, если $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, то на числовой прямой можно рассмотреть следующие множества:

Множество	Обозначение	Название	Изображение
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$	(a, b)	Интервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	Отрезок	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$	$[a, b)$	Полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$	$(a, b]$	Полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}$	$(a, +\infty)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x < a\}$	$(-\infty, a)$	Бесконечный полуинтервал	
$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	Бесконечный полуинтервал	

2. Отношения между множествами

Различные множества могут содержать или не содержать одинаковые элементы. В зависимости от этого выделяют различные *отношения* между множествами. Чтобы наглядно изобразить множества и отношения между ними, используют *круги Эйлера*. Построенные диаграммы называют *диаграммами Эйлера-Венна*. Рассмотрим отношения между множествами.

<u>Определение.</u> Множества A и B находятся в *отношении пустого пересечения* $A \cap B = \emptyset$, если у них нет общих элементов, т.е. нет ни одного элемента x, для которого условия $x \in A$ и $x \in B$ выполнялись бы одновременно.

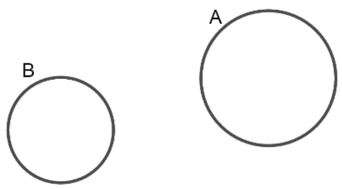


Диаграмма Эйлера-Венна в этом случае выглядит так:

Например, A – множество студентов 1 курса Педагогического института, B – множество студентов 3 курса Педагогического института. Множества A и B находятся в отношении пустого пересечения $A \cap B = \emptyset$, так как нет ни одного студента, обучающегося на этих двух курсах одновременно.

Пусть A – множество квадратов плоскости, B – множество треугольников плоскости. Множества A и B находятся в отношении пустого пересечения $A \cap B = \emptyset$, так как нет ни одного квадрата x, $x \in A$, который был бы треугольником $x \in B$ одновременно.

<u>Определение.</u> Множества A и B находятся в *отношении пересечения* $A \cap B \neq \emptyset$, если выполнены условия:

1) существуют элементы x, для которых $x \in A$ и $x \in B$ одновременно;

2) существуют элементы y, для которых $y \in A$ и $y \notin B$ одновременно;

3) существуют элементы z, для которых $z \notin A$ и $z \in B$ одновременно.

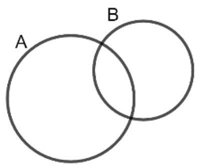


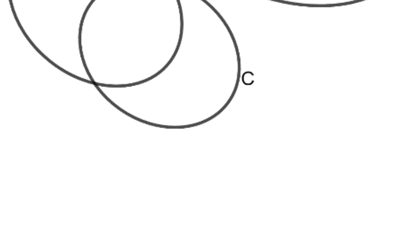
Диаграмма Эйлера-Венна данного отношения представлена на рисунке.

Например, множества $A = \{x | x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$ и $B = \{x | x \in \mathbb{N},\ x \vdots 3\}$ находятся в отношении пересечения $A \cap B \neq \emptyset$, потому что:

1) существуют числа x, которые делятся на 2 ($x \in A$) и делятся на 3 ($x \in B$) одновременно;

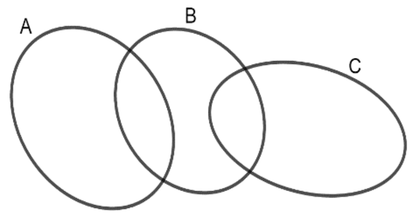
2) существуют числа y, которые делятся на 2 ($x \in A$) и не делятся на 3 ($y \notin B$) одновременно;

3) существуют числа z, которые не делятся на 2 ($z \notin A$) и делятся на 3 ($z \in B$) одновременно.



Отметим следующее: если $A \cap B = \emptyset$, то и $B \cap A = \emptyset$. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то и $B \cap A \neq \emptyset$. Но если $A \cap B = \emptyset$ и $B \cap C = \emptyset$, то необязательно $A \cap C = \emptyset$. При выполненных условиях диаграмма может выглядеть, например, как на рисунке, и тогда заключение не выполняется.

Аналогично, если $A \cap B \neq \emptyset$ и $B \cap C \neq \emptyset$, то необязательно $A \cap C \neq \emptyset$. На диаграмме видно, что при выполненных условиях заключение $(A \cap C \neq \emptyset)$ не выполняется.

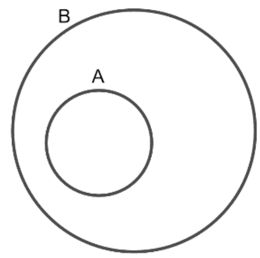


<u>Определение.</u> Множества A и B находятся в *отношении включения* $A \subset B$, если выполнены условия:

1) все элементы x множества A $(x \in A)$ являются элементами множества B $(x \in B)$ одновременно;

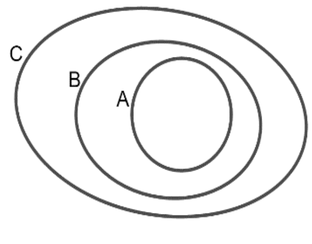
2) существуют такие элементы y, для которых $y \notin A$ и $y \in B$ одновременно.

Вид диаграммы Эйлера-Венна в этом случае показан на рисунке.



Например, A – множество квадратов плоскости, B – множество ромбов плоскости. Множества A и B находятся в отношении включения $A \subset B$, потому что
1) все квадраты x $(x \in A)$ являются ромбами $(x \in B)$ одновременно;
2) существуют такие фигуры y, которые не являются квадратами $y \notin A$ и являются ромбами $y \in B$ одновременно.

Пусть A – множество студентов Педагогического института ВлГУ, B – множество студентов ВлГУ. Все студенты Педагогического института ВлГУ являются студентами ВлГУ, но не наоборот.



Очевидно, что если $A \subset B$ и $B \subset C$, то и $A \subset C$ для любых множеств A, B, C. Это заключение имеет место и подтверждено диаграммой Эйлера-Венна на рисунке.

Если $A \subset B$, то A называют *собственным подмножеством* B.

Из второго условия определения отношения включения ясно, что если A – собственное подмножество B, то B не может быть собственным подмножеством множества A.

Принято считать, что $A \subset A$, $\emptyset \subset A$. В этом случае A и $\emptyset$ называют *несобственными подмножествами* множества A.

Если множества A и B находятся в отношении включения, то запись $A \subset B$ может быть прочитана по-разному:

– A включено в B;

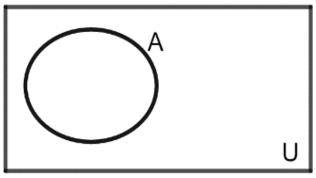
– A подмножество B;

– A содержится в B;

– B содержит A, $B \supset A$.

Если множество A конечно и содержит n элементов ($n \in \mathbb{N}$), то количество всех подмножеств множества A определяется как 2^n.

В теории множеств введено понятие *универсального множества*.



Под универсальным понимают множество всех множеств.

Понятно, что любое множество является подмножеством универсального. Универсальное множество принято обозначать U, а на диаграмме Эйлера-Венна изображать прямоугольником.

Определение. Множества A и B находятся в *отношении равенства* $A = B$, если эти множества состоят из одинаковых элементов, или:

1) все элементы x множества A ($x \in A$) являются элементами множества B ($x \in B$) одновременно, т.е. $A \subset B$;

2) все элементы y множества B (y$\in B$) являются элементами множества A ($y \in A$) одновременно, т.е. $B \subset A$.

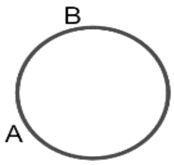


Диаграмма в этом случае очень простая.

Например, A – множество квадратов плоскости, B – множество ромбов плоскости с прямым углом. Множества A и B находятся в отношении равенства $A = B$, потому что 1) все квадраты являются ромбами с прямым углом $A \subset B$; 2) все ромбы с прямым углом являются квадратами $B \subset A$.

Очевидно, что $A = A$, и если $A = B$, то $B = A$, а также если $A = B$ и $B = C$, то $A = C$ для любых множеств A, B, C.

Проводить рассуждения, связанные с определением типа отношений между двумя данными множествами, удобно, отвечая на ряд вопросов по следующей схеме:

Даны множества A и B

Существуют ли общие элементы у множеств A и B?

Да

$A \cap B \neq \emptyset$

Все ли элементы A принадлежат B?

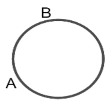
Да

$A \subset B$

Все ли элементы B принадлежат A?

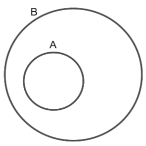
Да

$A = B$



Нет

$A \subset B$

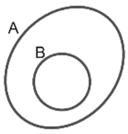


Нет

$A \not\subset B$

Да

$B \subset A$



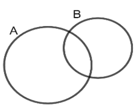
Нет

$A \not\subset B$

$B \not\subset A$

$A \cap B \neq \emptyset$

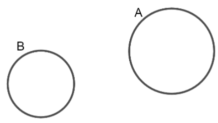
Пересекающиеся множества



Нет

$A \cap B = \emptyset$

Непересекающиеся множества



Приведём примеры задач и их решений

<u>Задача 1.</u> Построить диаграмму Эйлера-Венна для множеств A, B, C, D, если A – множество правильных многоугольников плоскости, B – множество треугольников плоскости, C – множество квадратов плоскости, D – множество трапеций плоскости.

<u>Решение.</u> Чтобы построить диаграмму Эйлера-Венна для данных множеств, нужно выяснить в каких отношениях находятся эти множества.

Определим тип отношения между множествами A и B. Ввиду того, что на плоскости:

1) существуют правильные многоугольники ($x \in A$), которые являются треугольниками ($x \in B$) одновременно;

2) существуют правильные многоугольники ($y \in A$), которые не являются треугольниками ($y \notin B$);

3) существуют неправильные многоугольники ($z \notin A$), которые являются треугольниками ($z \in B$),

заключаем, что $A \cap B \neq \emptyset$. (1)

Определим тип отношения между множествами A и C. Потому как:

1. Все квадраты ($x \in C$) являются правильными многоугольниками ($x \in A$) одновременно;
2. существуют на плоскости правильные многоугольники ($y \in A$), которые не являются квадратами ($y \notin C$),

получаем, что $C \subset A$. (2)

Определим тип отношения между множествами A и D. Ни одна трапеция плоскости не является правильным многоугольником, поэтому

$A \cap D = \emptyset$. (3)

Определим тип отношения между множествами B и D. Ни один треугольник плоскости не является квадратом, поэтому

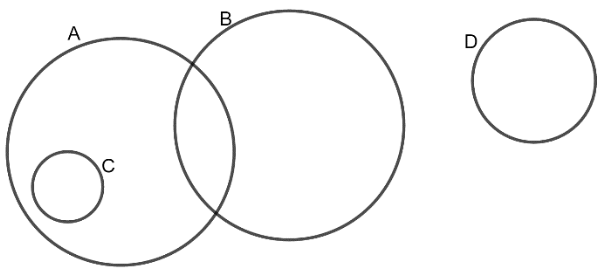
$B \cap C = \emptyset$. (4)

Рассуждая аналогично, получим

$B \cap D = \emptyset$. (5)

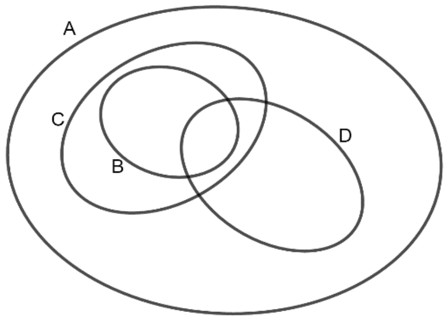
$C \cap D = \emptyset$. (6)

Анализируя условия (1) – (6), приходим к диаграмме вида:



<u>Задача 2.</u> Привести пример множеств A, B, C, D, для которых данная диаграмма Эйлера-Венна была бы верна. Ответ пояснить.

Решение.



A – множество всех четырёхугольников плоскости, B – множество прямоугольников плоскости, C – множество параллелограммов плоскости, D – множество четырёхугольников плоскости, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали.

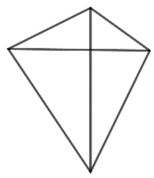
Потому как на плоскости все прямоугольники, все параллелограммы, все четырёхугольники с взаимно перпендикулярными диагоналями являются четырёхугольниками, имеем отношения включения для пар множеств B и A, C и A, D и A:

$B \subset A$ (1) $C \subset A$ (2) $D \subset A$ (3)

Все прямоугольники являются параллелограммами и на плоскости существуют параллелограммы, которые не являются прямоугольниками, значит, $B \subset C$. (4)

На плоскости:

1. существуют параллелограммы с взаимно перпендикулярными диагоналями (ромбы);
2. существуют параллелограммы, диагонали которых не взаимно перпендикулярны;
3. существуют четырёхугольники с взаимно перпендикулярными диагоналями, но не параллелограммы (например, фигуры вида[1], изображённого на рисунке),



следовательно, $C \cap D \neq \emptyset$. (5)

На плоскости:

1. существуют прямоугольники с взаимно перпендикулярными диагоналями (квадраты);
2. существуют прямоугольники, у которых диагонали не взаимно перпендикулярны;
3. существуют четырёхугольники с взаимно перпендикулярными диагоналями, но не прямоугольники,

получим, что $B \cap D \neq \emptyset$. (6)

1

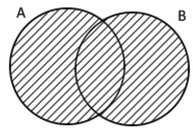
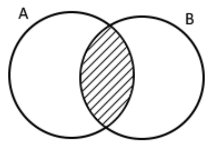
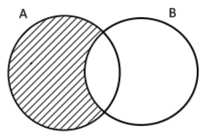
В частности, примером может быть фигура *дельтóид* (от др.-греч. δελτοειδής — «дельтовидный», напоминающий заглавную букву дельта) — четырёхугольник, четыре стороны которого можно сгруппировать в две пары равных смежных сторон

Условия (1) – (6) соответствуют данной диаграмме, поэтому указанные множеств A, B, C, D служат примером решения задачи.

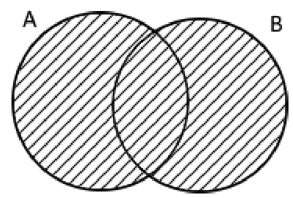
3. Операции над множествами: объединение, пересечение, вычитание, декартово умножение

С множествами, как и с числами, можно выполнять определённые действия – *операции*. В начальной школе изучают следующие действия с числами: сложение, вычитание, умножение, деление. В результате действий с числами получается новое число.

Теперь определим операции над множествами, научимся выполнять их и находить результат действия каждой операции. В результате действий с множествами всегда будет получаться *новое множество*.

Название операции	Название результата действия операции	Обозначение	Изображение на кругах Эйлера (в случае $A \cap B \neq \emptyset$)
Объединение	Объединение множеств A и B	$A \cup B$	
Пересечение	Пересечение множеств A и B	$A \cap B$	
Вычитание	Разность множеств A и B	$A \backslash B$	
Декартово умножение	Декартово произведение множеств A и B	$A \times B$	В координатной плоскости: – система точек, – система отрезков, – часть плоскости

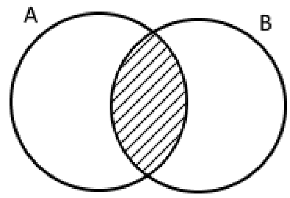
<u>Определение.</u> *Объединением множеств* A и B называется новое множество $A \cup B$, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B: $A \cup B = \{x |\ x \in A \text{ или } x \in B\}$.



На диаграммах новые множества отмечают штриховками. Объединение множеств выглядит:

Данное определение объединения множеств распространяется на любое конечное число множеств.

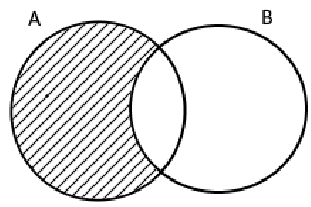
<u>Определение.</u> *Пересечением множеств* A и B называется новое множество $A \cap B$, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A и B: $A \cap B = \{x |\ x \in A \text{ и } x \in B\}$.



На диаграмме пересечение множеств A и B отмечают так, как показано на рисунке.

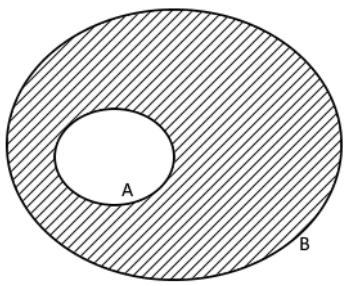
Определение пересечения множеств распространяется на любое конечное число множеств.

<u>Определение.</u> *Разностью множеств* A и B называется новое множество $A \backslash B$, состоящее из элементов, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B: $A \backslash B = \{x |\ x \in A \text{ и } x \notin B\}$.



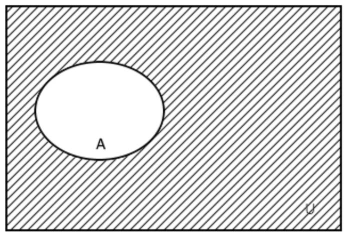
На диаграмме разность $A \backslash B$ закрыта штриховкой.

Если $A \subset B$, то $A \backslash B = \emptyset$, а $B \backslash A$ определяется как *дополнение множества A до множества B*, которое обозначают как $\bar{A}_B$. На диаграмме дополнение множества A до множества B отмечено штриховкой.



<u>Определение.</u> Разность между универсальным множеством U и множеством A называют *дополнением* множества A и обозначают $\bar{A}$.

На диаграмме дополнение множества A отмечают штриховкой аналогично.



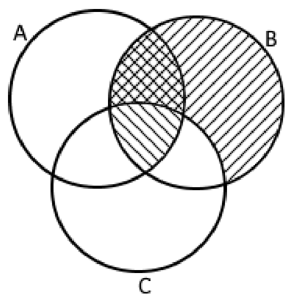
Определение. *Декартовым произведением* множеств A и B называется новое множество $A \times B$, элементами которого являются упорядоченные пары с первой компонентой из множества A, а второй компонентой – из множества B: $A \times B = \{(x, y) |\ x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Замечание. *Упорядоченной* является любая пара, в которой порядок следования элементов *важен*.

Любое множество можно декартовым образом умножать на себя, при этом получающееся новое множество называют *декартовым квадратом множества* A: $A \times A = \{(a, b) | \ a \in A \text{ и } b \in A\}$.

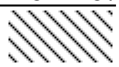
Декартово произведение двух числовых множеств определяется как множество упорядоченных пар чисел, в которых первая компонента принадлежит первому множеству, а вторая – второму. Значит, декартово произведение двух числовых множеств всегда может быть изображено в координатной плоскости: любая точка плоскости однозначно определяется упорядоченной парой чисел – координатами этой точки.

Рассмотрим примеры задач и их решений



Задача 1. Отметить штриховкой на кругах Эйлера множество X, если: а) $X = (A \cap B) \cup (B \backslash C)$; б) $X = \left(\overline{A \backslash B}\right) \cap (B \cup C)$. При построении диаграммы считать, что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Решение. а) $X = (A \cap B) \cup (B \backslash C)$

1.  – $A \cap B$ (по определению пересечения)

2.  – $B \backslash C$ (по определению разности)

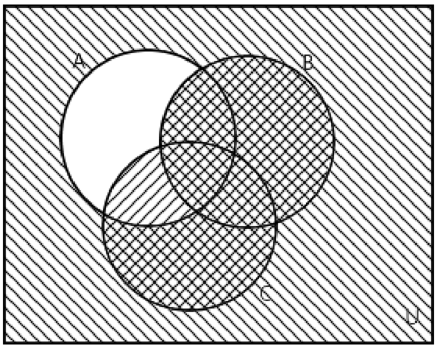
3. Множество X представляет собой объединение выделенных множеств. Значит, область, где штриховка прошла хотя бы один раз, и определяет множество X. На диаграмме выделена граница этого множества.

б) $X = \left(\overline{A \backslash B}\right) \cap (B \cup C)$.

1.  – $\overline{A\backslash B}$ (по определению дополнения)

2.  – $B \cup C$

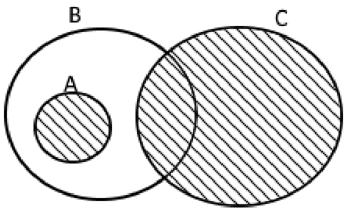
3. Множество X представляет собой пересечение выделенных множеств. Значит, область, где штриховка прошла дважды и определяет множество X. На диаграмме указана граница этого множества.



Замечание. На диаграмме присутствует универсальное множество U, потому что в процессе решения задачи находили дополнение множества.

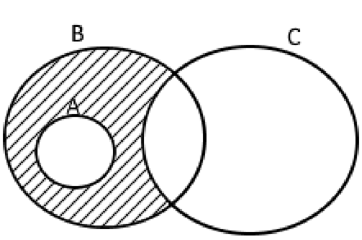
Задача 2. Отметить штриховкой на диаграмме Эйлера-Венна множество $X = B\backslash(A \cup C)$ и сформулировать характеристическое свойство его элементов, если A – множество квадратов плоскости, B – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один прямой угол, C – множество треугольников этой плоскости.

Решение. 1. Множества A, B, C заданы конкретными характеристическими свойствами своих элементов, поэтому сначала нужно определить, в каких отношениях находятся эти множества. Пользуясь схемами рассуждений, аналогичными задачам 1 и 2 предыдущего параграфа, получаем $A \subset B, A \cap C = \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$. С учётом полученных условий диаграмма построена на рисунке. Штриховкой отмечено $A \cup C$.



2. Теперь найдём множество X как разность между множеством B и объединением $A \cup C$, на диаграмме множество X закроем штриховкой.

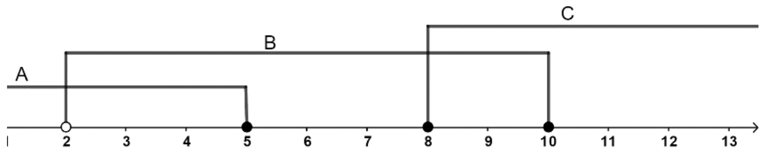
Видно, что в заштрихованную область попали многоугольники плоскости, имеющие хотя бы один прямой угол, но не квадраты и не треугольники (например, прямоугольные трапеции). Это и будет характеристическим свойством элементов множества X.



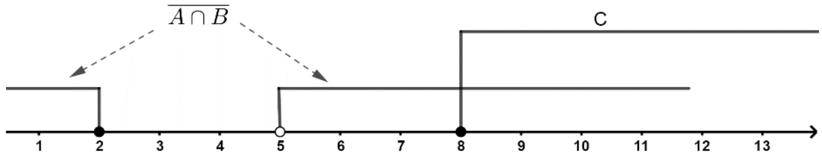
Ответ: X – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один прямой угол, но не треугольников и не квадратов.

Задача 3. На числовой прямой отметить множество $X = (\overline{A \cap B})\backslash C$ и сформулировать характеристическое свойство его элементов, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ x \leq 5\}$, $B = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ 2 < x \leq 10\}$, $C = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 8\}$.

Решение. С учётом характеристических свойств элементов множеств A, B и C отметим их на числовой прямой

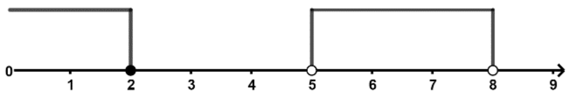


1. Найдём $A \cap B$. Используя определение пересечения множеств, получаем, что $A \cap B = (2, 5]$. При этом $2 \notin A \cap B$, т.к. $2 \notin B$; $5 \in A \cap B$, т.к. $5 \in A$ и $5 \in B$.
2. Найдём $\overline{A \cap B}$. Используя определение дополнения, получаем, что $\overline{A \cap B} = (-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$. При этом $2 \in \overline{A \cap B}$, т.к. $2 \notin A \cap B$; $5 \notin \overline{A \cap B}$, т.к. $5 \in A \cap B$.
3. Теперь отметим на числовой прямой множества $\overline{A \cap B}$ и C и найдём множество X:



$X = (\overline{A \cap B})\backslash C == (-\infty, 2] \cup (5, +\infty)$. При этом $8 \notin X$, т.к. $8 \in C$.

4. Отметим на числовой прямой множество X:



5. Запишем характеристическое свойство элементов множества X:

$$X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, \quad x \leq 2 \ \text{ или } \ 5 < x < 8\}.$$

Задача 4. Изобразить в координатной плоскости декартово произведение множеств $X \times Y$и декартово произведение множеств $Y \times X$, если:

а) $X = \{x|x \in \mathbb{N},\ x \leq 3\}$, $Y = \{y|y \in \mathbb{Z},\ |y| < 3\}$;
б) $X = \{x|x \in \mathbb{N},\ x \leq 4\}$, $Y = \{y|y \in \mathbb{R},\ |y| < 3\}$;
в) $X = \{x|x \in \mathbb{R},\ x < 4\}$, $Y = \{y|y \in \mathbb{R},\ |y| \leq 3\}$.

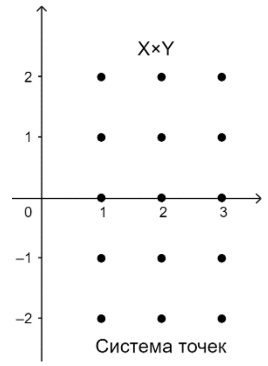
Решение.

а) С учётом характеристических свойств элементов множеств находим, что $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Тогда по определению декартова произведения:

$$X \times Y = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и } b \in Y\} =$$
$$\{(1, -2), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, -2), (2, -1),$$
$$(2, 0), (2, 1), (2, 2), \ (3, -2), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Изображением этого декартова произведения в координатной плоскости будет *система точек*.



Теперь найдем декартово произведение $Y \times X$. По определению имеем:

$$Y \times X = \{(a, b) |\ a \in Y \text{ и } b \in X\}$$
$$= \begin{matrix} \{(-2, 1), (-2, 2), (-2, 3), (-1, 1), (-1, 2), (-1, 3), (0, 1), \\ (0, 2), (0, 3), (1, 1), \qquad (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\} \end{matrix}$$

Изображением этого декартова произведения в координатной плоскости будет *система точек* (см. выше рисунок справа).

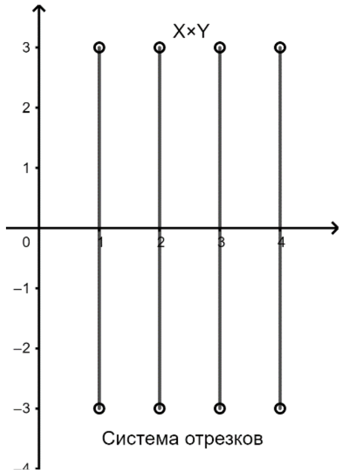
б) С учётом характеристических свойств элементов множеств находим: $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = (-3,\ 3)$.

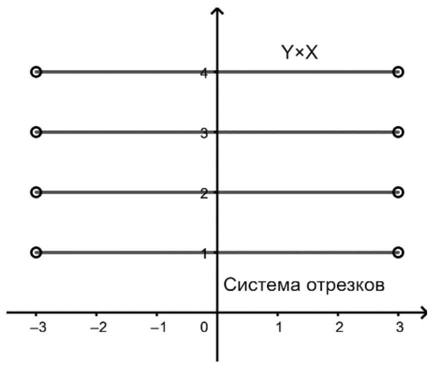
В этом случае перечислить элементы декартовых произведений $X \times Y$и $Y \times X$ невозможно, поскольку Y – бесконечное множество. Но можно сформулировать характеристические свойства элементов этих множеств. Далее, согласно указанным свойствам, найдём изображения этих декартовых произведений в координатной плоскости.

$$X \times Y = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и } b \in Y\} = \{(a, b) |\ a \in X \text{ и} - 3 < b < 3\}.$$

Нужно найти на плоскости множество точек, первая координата которых может быть равна $1, 2, 3$ или 4, а вторая координата изменяется от -3 до 3.

Итак, изображением декартова произведения $X \times Y$ служит *система отрезков*, параллельных оси OY, при этом концы отрезков не принадлежат этому множеству, поскольку, например, упорядоченная пара $(1, 3) \notin X \times Y$ вследствие того, что $3 \notin Y$.





Теперь сформулируем характеристическое свойство элементов декартова произведения $Y \times X$:

$Y \times X = \{(a, b) | \ a \in Y \text{ и } b \in X\} = \{(a, b) | \ -3 < a < 3 \text{ и } b \in Y\}$.

Нужно найти на плоскости множество точек, первая координата которых изменяется от -3 до 3, а вторая координата может быть равна $1, 2, 3, 4$.

Изображением декартова произведения $Y \times X$ служит *система отрезков*, параллельных оси OX (концы отрезков не принадлежат этому множеству).

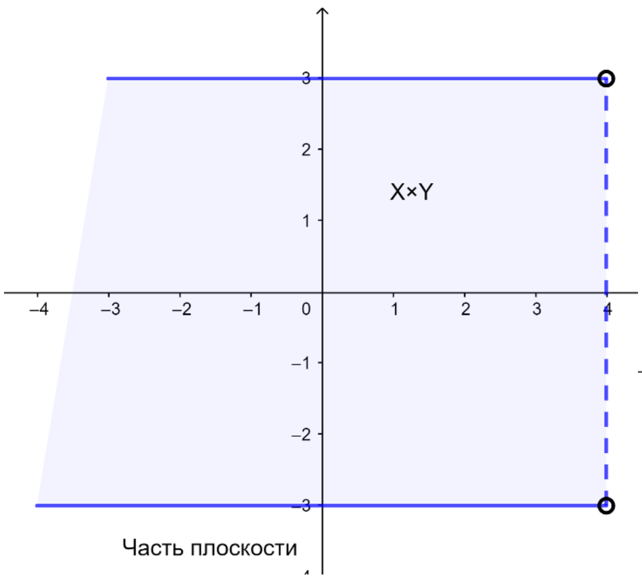
в) С учётом характеристических свойств элементов множеств находим: $X = (-\infty, 4)$, $Y = [-3, 3]$.
Тогда $X \times Y = \{(a, b) | \ a \in X \text{ и } b \in Y\} = \{(a, b) | \ a, b \in \mathbb{R}, \ a < 4 \text{ и } -3 \leq b \leq 3\}$.

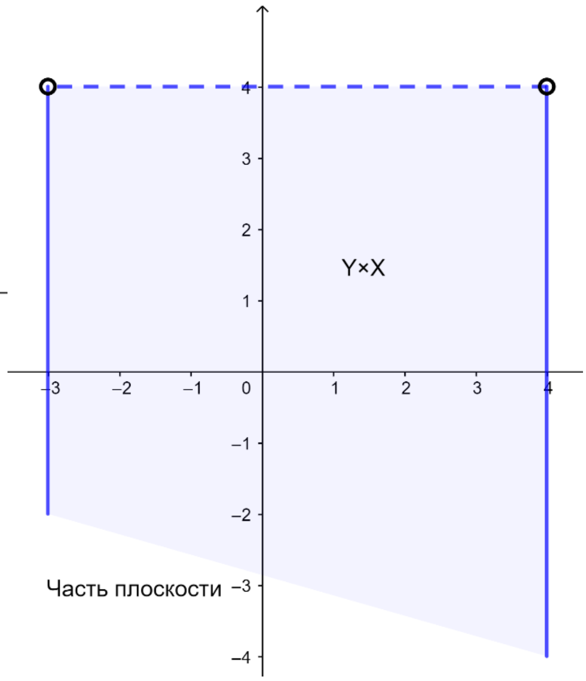
На плоскости это должно быть множество точек, у которых первая координата меньше 4, а вторая изменяется от -3 до 3 включительно.

Декартово произведение $Y \times X = \{(a, b) | \ a \in Y \text{ и } b \in X\} = \{(a, b) | \ a, b \in \mathbb{R}, \ -3 \leq a \leq 3 \text{ и } b < 4\}$.

На плоскости это должно быть множество точек, у которых первая координата изменяется от -3 до 3 включительно, а вторая меньше 4. Ниже на рисунке слева построено множество $X \times Y$, справа – $Y \times X$.

Декартовы произведения множеств в данном случае представляют *часть плоскости*: пунктиром отмечены границы, не принадлежащие соответствующим декартовым произведениям.





Следует отметить, что определение декартова произведения двух множеств можно обобщить на любое число множеств. Так, *декартовым произведением трёх множеств* будет множество упорядоченных троек элементов: $A \times B \times C = \{(x, y, z) |\ x \in A,\ y \in B$ и $z \in C\}$.

По аналогии определяется произведение четырёх, пяти и более множеств. Заметим, что упорядоченные наборы элементов в математике называют *кортежами* заданной длины. Так, упорядоченная пара – это кортеж длины 2, упорядоченная тройка – кортеж длины 3 и т.п. В общем случае, упорядоченный набор из n элементов называют кортежем длины n. Поэтому теперь можно определить декартово произведение n множеств.

Определение. *Декартовым произведением множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют новое множество $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, элементами которого будут кортежи длины n: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) |\ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$.

Если все множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ равны между собой и равны множеству A, то определяется декартова n-ная степень множества A:

$$A^n = \{(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) |\ a_1 \in A,\ a_2 \in A, \dots, a_n \in A\}.$$

4. Законы операций над множествами

Законы операции объединения

1. Объединение множества с самим собой равно самому множеству $A \cup A = A$.

2. Объединение множества с пустым множеством равно самому множеству $A \cup \emptyset = A$.

3. Коммутативный закон. Объединение множеств A и B равно объединению множеств B и A $A \cup B = B \cup A$.

4. Ассоциативный закон. Объединение множества A с объединением множеств B и C равно объединению объединения множеств A и B с множеством C $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Законы операции пересечения

1. Пересечение множества с самим собой равно самому множеству $A \cap A = A$.

2. Пересечение множества с пустым множеством равно пустому множеству $A \cap \emptyset = \emptyset$.

3. Коммутативный закон. Пересечение множеств A и B равно пересечению множеств B и A $A \cap B = B \cap A$.

4. Ассоциативный закон. Пересечение множества A с пересечением множеств B и Cравно пересечению пересечения множеств A и B с множеством C $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Дистрибутивные законы объединения относительно пересечения

1. Левый дистрибутивный закон объединения относительно пересечения.

Объединение множества A с пересечением множеств B и C равно пересечению объединения множеств A и B с объединением множеств A и C $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

2. Правый дистрибутивный закон объединения относительно пересечения.

Объединение пересечения множеств A и B с множеством C равно пересечению объединения множеств A и C с объединением множеств B и C $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Дистрибутивные законы пересечения относительно объединения

1. Левый дистрибутивный закон пересечения относительно объединения.

Пересечение множества A с объединением множеств B и C равно объединению пересечения множеств A и B с пересечением множеств A и C $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. Правый дистрибутивный закон пересечения относительно объединения.

Пересечение объединения множеств A и B с множеством C равно объединению пересечения множеств A и C с пересечением множеств B и C $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Правые дистрибутивные законы вычитания относительно объединения и относительно пересечения

1. Разность между объединением множеств A и B и множеством C равна объединению разности множеств A и C с разностью множеств B и C $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$.

2. Разность между пересечением множеств A и B и множеством C равна пересечению разности множеств A и C с разностью множеств B и C $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$.

Тождества

1. Разность между множеством A и объединением множеств B и C равна пересечению разности множеств A и B с разностью множеств A и C $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

2. Разность между множеством A и пересечением множеств B и C равна объединению разности множеств A и B с разностью множеств A и C $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Законы де Моргана

1. Дополнение объединения множеств равно пересечению дополнений этих множеств $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Дополнение пересечения множеств равно объединению дополнений этих множеств $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Доказательство любого из приведённых равенств (или неравенств) выполняется по определенной схеме рассуждений:

1. Проверяется истинность равенства (или неравенства) с использованием диаграмм Эйлера-Венна;

2. Проводится развёрнутое доказательство на основе определения равных множеств (см. определение равных множеств в п. 1 настоящей главы) и определений объединения, пересечения, разности множеств (см. соответствующие определения в п. 2 настоящей главы).

Законы операции умножения

Декартово произведение множества A с пустым множеством (также как и декартово произведение пустого множества с множеством A) равно пустому множеству $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Дистрибутивные законы умножения относительно объединения, относительно пересечения и относительно вычитания

1. Левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения.

Декартово произведение множества A и объединения множеств B и C равно объединению декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

2. Правый дистрибутивный закон умножения относительно объединения.

Декартово произведение объединения множеств A и B с множеством C равно объединению декартовых произведений множеств A и C и B и C $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

3. Левый дистрибутивный закон умножения относительно пересечения.

Декартово произведение множества A и пересечения множеств B и C равно пересечению декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

4. Правый дистрибутивный закон умножения относительно пересечения.

Декартово произведение пересечения множеств A и B с множеством C равно пересечению декартовых произведений множеств множеств A и C и B и C $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

5. Левый дистрибутивный закон умножения относительно вычитания.

Декартово произведение множества A и разности множеств B и C равно разности декартовых произведений множеств A и B и множеств A и C $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

6. Правый дистрибутивный закон умножения относительно вычитания.

Декартово произведение разности множеств A и B с множеством C равно разности декартовых произведений множеств A и C и B и C $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

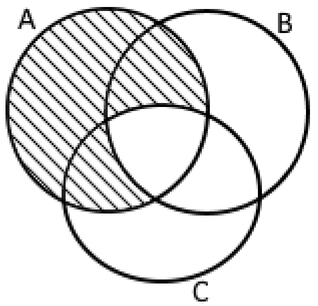
Приведём примеры доказательств равенства и закона для двух множеств

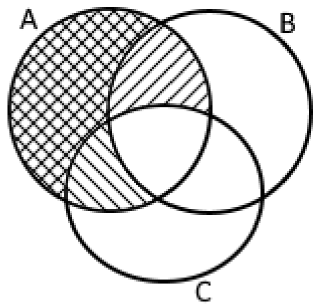
<u>Задача.</u> Доказать, что для любых множеств A, B, C имеет место равенство: $A\setminus(B \cap C) = (A\setminus B) \cup (A\setminus C)$.

<u>Доказательство.</u> Для удобства рассуждений обозначим:

$\underbrace{A\setminus(B \cap C)}_{X} = \underbrace{(A\setminus B) \cup (A\setminus C)}_{Y}$.

1. Проверим истинность равенства, используя диаграммы Эйлера-Венна. Для этого на одной отметим штриховкой множество X, на другой – множество Y и сравним заштрихованные области.
2.





$A\setminus(B \cap C)$ – $A\setminus B$,   – $A\setminus C$

Множество X на диаграмме закрыто штриховкой. Y выделено областью, где штриховка прошла хотя бы один раз.

Сравнивая области X и Y, приходим к выводу, что $X = Y$.

3. Проведём развёрнутое доказательство равенства множеств X и Y на основе определения равных множеств.

Чтобы доказать, что $X = Y$, нужно доказать:

а) $X \subset Y$;

б) $Y \subset X$.

а) Чтобы доказать, что $X \subset Y$, нужно доказать, что <u>все</u> элементы множества X являются элементами множества Y. Докажем это.

Выберем <u>произвольный</u> элемент $x \in X$ и покажем, что $x \in Y$.

Имеем:

$$x \in X, \text{т.е. } x \in A\setminus(B \cap C) \xrightarrow{\text{по определению разности}}$$

$$x \in A\ (1)\ \boxed{\text{и}}\ x \notin (B \cap C)\ (2) \xrightarrow{\text{по определению дополнения}} x \in \overline{(B \cap C)}$$

$$\xrightarrow{\text{по закону де Моргана}} x \in \overline{B} \cup \overline{C} \xrightarrow{\text{по определению объединения}}$$

$$x \in \overline{B} \quad \text{или} \quad x \in \bar{C}$$

$$\text{по определению дополнения}\downarrow \qquad \downarrow\text{по определению дополнения}$$

$$x \notin B\ (3) \quad \text{или} \quad x \notin C\ (4)$$

Условие (1) должно выполняться одновременно с условием (3) <u>или</u> условием (4).

Пусть выполнены условия (1) и (3). Тогда по определению разности:

$$x \in A\backslash B \xrightarrow{\text{по определению объединения}} x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C), \text{т.е. } x \in Y. \ (5)$$

(Элемент принадлежит объединению множеств, если принадлежит <u>хотя бы одному</u> из этих множеств.)

Пусть выполнены условия (1) и (4). Тогда аналогично:

$$x \in A\backslash C \xrightarrow{\text{по определению объединения}} x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C), \text{т.е. } x \in Y. \ (6)$$

Из условий (5), (6) и в силу произвольности элемента x доказано, что <u>все</u> элементы множества X принадлежат множеству Y. Значит, доказано, что $X \subset Y$. (I)

б) Чтобы доказать, что $Y \subset X$, нужно доказать, что <u>все</u> элементы множества Y являются элементами множества X. Докажем это.

Выберем <u>произвольный</u> элемент $y \in Y$ и покажем, что $y \in X$.

Имеем:

$$y \in Y, \text{т.е. } y \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \xrightarrow{\text{по определению объединения}}$$

$$y \in A\backslash B\ (1) \ \boxed{\text{или}} \ y \in A\backslash C\ (2)$$

$$\text{по определению разности}\downarrow \qquad \downarrow\text{по определению разности}$$

$$y \in A\ (3) \qquad\qquad y \in A\ (5)$$

$$\text{и} \qquad\qquad \text{и}$$

$$y \notin B\ (4) \qquad\qquad y \notin C\ (6)$$

Поскольку условия (1) и (2) выполняются не одновременно, то группы условий (3), (4) и (5), (6) нужно рассматривать отдельно.

Пусть выполнены условия (3), (4).

Из условия (4) по определению дополнения следует

$$y \in \overline{B} \xrightarrow{\text{по определению объединения}} y \in \overline{B} \cup \overline{C} \xrightarrow{\text{по закону де Моргана}} y \in \overline{(B \cap C)} \xrightarrow{\text{по определению дополнения}} y \notin (B \cap C). \ (7)$$

Из условий (3) и (7) по определению разности следует, что

$y \in A\backslash(B \cap C)$, т.е. $y \in X$. (8)

Пусть теперь выполнены условия (5), (6).

Из условия (6) по определению дополнения следует

$y \in \overline{C} \xrightarrow{\text{по определению объединения}} y \in \overline{B} \cup \overline{C} \xrightarrow{\text{по закону де Моргана}} y \in \overline{(B \cap C)} \xrightarrow{\text{по определению дополнения}} y \notin (B \cap C)$. (9)

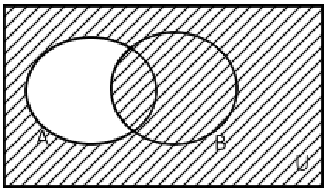
Из условий (5) и (9) по определению разности следует, что $y \in A \backslash (B \cap C)$, т.е. $y \in X$. (10)

Из условий (8), (10) и в силу произвольности элемента y доказано, что <u>все</u> элементы множества Y принадлежат множеству X. Значит, доказано, что $Y \subset X$. (II)

В силу условий (I) и (II) доказано, что $X = Y$.

В приведённом примере доказательства использовался закон де Моргана для получения условий, при выполнении которых элемент <u>не принадлежит пересечению</u> данных множеств. Аналогично можно получить условия, при выполнении которых элемент не будет принадлежать объединению данных множеств: $x \notin A \cup B \to x \in \overline{A \cup B} \to x \in \overline{A} \cap \overline{B} \to x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \to x \notin A$ и $x \notin B$.

Кроме того, при доказательстве равенств используются и условия, при выполнении которых элемент *не принадлежит разности* множеств. Эти условия можно получить, работая с диаграммой Эйлера-Венна. В самом деле, если элемент не принадлежит разности данных множеств, значит он попадает в заштрихованную область – дополнение разности множеств (см. рисунок).



Эта область с использованием операций над множествами описывается как $\overline{A} \cup B$. Значит, $x \notin A \backslash B$, если $x \notin A$ или $x \in B$.

Итак, при доказательстве равенства множеств полезно помнить:

По определению операций над множествами	По определению отрицания операции над множествами и законам де Моргана
$x \in A \cup B \iff x \in A$ или $x \in B$	$x \notin A \cup B \iff x \notin A$ и $x \notin B$, потому что $x \notin A \cup B \to x \in \overline{A \cup B} \to$ $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \to x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{B} \to x \notin A$ и $x \notin B$
$x \in A \cap B \iff x \in A$ и $x \in B$	$x \notin A \cap B \iff x \notin A$ или $x \notin B$, потому что $x \notin A \cap B \to x \in \overline{A \cap B} \to x \in \overline{A} \cup$ $\overline{B} \to x \in \overline{A}$ или $x \in \overline{B} \to x \notin A$ или $x \notin B$
$x \in A \backslash B \iff x \in A$ и $x \notin B$	$x \notin A \backslash B \iff x \notin A$ или $x \in B$, потому что $x \notin A \backslash B \to x \in \overline{A \backslash B} \to x \in \overline{A} \cup$ $B \to x \in \overline{A}$ или $x \in B \to x \notin A$ или $x \in B$

$(p, q) \in A \times B \iff p \in A$ и $q \in B$ $\qquad$ $(p, q) \notin A \times B \iff p \notin A$ или $q \notin B$

Задача 2. Доказать, что для любых множеств A, B, C имеет место левый дистрибутивный закон умножения относительно объединения:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C).$$

Доказательство. Для удобства рассуждений обозначим:

$$\underbrace{A \times (B \cup C)}_{X} = \underbrace{(A \times B) \cup (A \times C)}_{Y}.$$

Проведём развёрнутое доказательство равенства множеств X и Y на основе определения равных множеств.

Чтобы доказать, что $X = Y$, нужно доказать: а) $X \subset Y$ (I); б) $Y \subset X$ (II).

а) Чтобы доказать, что $X \subset Y$, нужно доказать, что все элементы множества X являются элементами множества Y. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $x \in X$ и покажем, что $x \in Y$.

Элемент $x \in A \times (B \cup C)$, $\Rightarrow$ x – это упорядоченная пара вида (p, q), где $p \in A$ (1) $\boxed{\text{и}}$ $q \in B \cup C$ (2)

$\downarrow$ по определению объединения

$q \in B$ (3)

$\boxed{\text{или}}$

$q \in C$ (4)

Условие (1) должно выполняться одновременно с условием (3) или условием (4).

Пусть выполнены условия (1) и (3). Тогда имеем:

$$p \in A \ \text{ и } \ q \in B \xrightarrow{\text{по определению декартова произведения}} (p, q) \in (A \times B),$$

что означает $x \in (A \times B)$. (5)

Пусть выполнены условия (1) и (4). Аналогично получаем:

$$p \in A \ \text{ и } \ q \in C \xrightarrow{\text{по определению декартова произведения}} (p, q) \in (A \times C),$$

что означает $x \in (A \times C)$. (6)

Из условий (5),(6) $\xrightarrow{\text{по определению объединения}}$ $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$. (7)

Из условия (7) в силу произвольности элемента x доказано, что все элементы множества X принадлежат множеству Y. Значит, доказано, что $X \subset Y$. (I)

б) Чтобы доказать, что $Y \subset X$, нужно доказать, что все элементы множества Y являются элементами множества X. Докажем это.

Выберем произвольный элемент $y \in Y$ и покажем, что $y \in X$.

Имеем:

$$\text{y} \in \text{Y}, \Longrightarrow \text{y} \in (A \times B) \cup (A \times C) \xrightarrow{\text{по определению декартова произведения}}$$

$$\text{y – это упорядоченная пара вида } (p, q), \Longrightarrow$$

$$(p, q) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\downarrow \text{по определению объединения}$$

$$(p, q) \in (A \times B) \text{ (1) } \boxed{\text{или}} \text{ } (p, q) \in (A \times C) \text{ (2)}$$

по определению декартова произведения $\downarrow$ $\qquad\qquad$ $\downarrow$ по определению декартова произведения

$p \in \text{A}$ (3) и $q \in B$ (4) $\qquad\qquad$ $p \in \text{A}$ (5) и $q \in B$ (6)

Поскольку условия (1) и (2) выполняются не одновременно, то группы условий (3), (4) и (5), (6) нужно рассматривать отдельно.

Пусть выполнены условия (3), (4).

Из условия (4) по определению объединения следует $q \in (B \cup C)$. (7)

Из условий (3) и (7) по определению декартова произведения имеем: $p \in \text{A}$ и $q \in (B \cup C), \Longrightarrow (p, q) \in A \times (B \cup C), \Longrightarrow \text{y} \in A \times (B \cup C), \Longrightarrow$ $\text{y} \in \text{X}$. (8)

Пусть теперь выполнены условия (5), (6).

Из условия (6) по определению объединения следует $q \in (B \cup C)$. (9)

Из условий (5) и (9) по определению декартова произведения: $p \in \text{A}$ и $q \in (B \cup C), \Longrightarrow (p, q) \in A \times (B \cup C), \Longrightarrow \text{y} \in A \times (B \cup C), \Longrightarrow \text{y} \in \text{X}$. (10)

Из условий (8), (10) и в силу произвольности элемента y доказано, что <u>все</u> элементы множества Y принадлежат множеству X. Значит, доказано, что $\text{Y} \subset \text{X}$. (II)

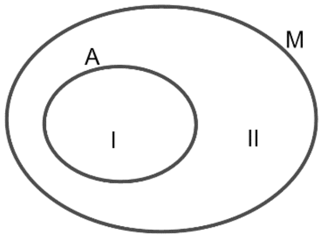
В силу условий (I) и (II) доказано, что $\text{X} = \text{Y}$.

5. Разбиение множества на классы

Операции объединения и пересечения множеств являются основой для понятия разбиение множества на классы. В общем случае разбиение любого множества M на классы $K_1, K_2, \dots, K_n$ определяется следующими условиями:

1. $K_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$;
2. $K_i \cap K_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ при $i, j = 1, 2, \dots, n$;
3. $K_1 \cup \dots \cup K_n = M$.

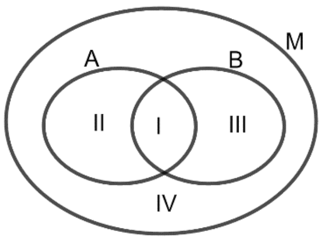
Выделить подмножество A из множества M можно, указав одно свойство, которым обладают некоторые элементы множества M. Но для элементов подмножества A это свойство будет характеристическим, и мы можем обозначить его α (см. замечание на стр. 6). Разбиение множества M на классы в этом случае будет очень простым:



$$K_1 = A,$$
$$K_2 = \overline{A}_M$$

Условия разбиения множества M на классы K_1 и K_2 выполняются.

Если для элементов множества M задать два свойства α и β, то первое из них выделит в M подмножество A, второе – подмножество B, и классы определятся следующим образом:



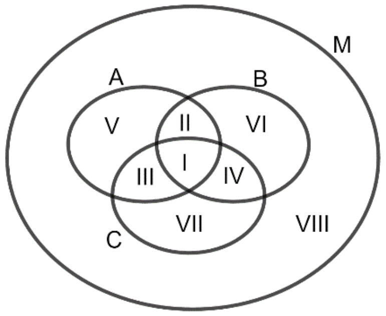
$K_1 = A \cap B$ – множество элементов, для которых имеют место свойства α и β,

$K_2 = A \cap \overline{B}$ – множество элементов, для которых выполняется свойство α и не выполняется свойство β,

$K_3 = \overline{A} \cap B$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α, но выполняется свойство β.

$K_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$ – множество элементов, для которых не выполняется свойство α и не выполняется свойство β.

Замечание 1. При задании двух свойств для элементов множества M получим разбиение не более чем на 4 класса. Меньшее число классов получается, если выделенные свойствами подмножества A и B не находится в отношении пересечения.



Если для элементов множества M задать 3 свойства α, β и γ, то первое из них выделит в M подмножество A, второе – подмножество B, третье – подмножество C. В этом случае разбиение на классы произойдет так, как показано на диаграмме.

$K_1 = A \cap B \cap C,$
$K_2 = A \cap B \cap \bar{C},$
$K_3 = A \cap \bar{B} \cap C,$
$K_4 = \bar{A} \cap B \cap C,$

$K_5 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$,
$K_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$,
$K_7 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$,
$K_8 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

Зная строение каждого класса, легко можно определить, какие элементы его образуют. Например, класс K_6 состоит из элементов, для которых не выполняется свойство α, выполняется свойство β и не выполняется свойство γ.

Замечание 2. При задании трёх свойств для элементов множества M получим разбиение не более чем на 8 классов. В случаях, когда выделенные подмножества находятся, например, а отношении включения или отношении пустого пересечения, количество получаемых классов будет уменьшаться.

Разбиение *конечного множества* на классы часто используется при решении задач. При этом полезно знать, что

$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, если $A \cap B = \emptyset$,
$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$, если $A \cap B \neq \emptyset$,
$m(\bar{A}_B) = m(B) - m(A)$, если $A \subset B$.

Здесь $m(A)$ – численность множества A, $m(B)$ -численность множества B, $m(A \cup B)$ – численность объединения множеств A и B, $m(A \cap B)$ – численность пересечения множеств A и B, $m(\bar{A}_B)$ – численность дополнения множества A до множества B.

Рассмотрим примеры задач и их решений

Задача 1. В классе 20 девочек, которых 15 принимали участие в экскурсии по городу. Сколько в классе учащихся, если 10 мальчиков не принимали участия в экскурсии по городу, а всего принимавших участие в экскурсии учащихся 25.

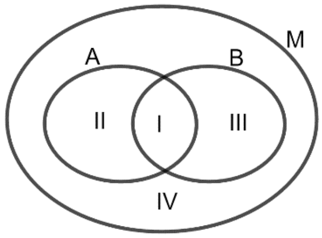
Решение.

1. По условию задачи для элементов множества M (множества учащихся класса) заданы 2 свойства:

α – «быть девочкой» (это свойство выделяет подмножество A),

β – «принимать участие в экскурсии» (это свойство выделяет подмножество B).

2. По условию задачи $A \cap B \neq \emptyset$.
3. Диаграмма Эйлера-Венна, соответствующая условию задачи, принимает вид:



4. Получены следующие классы

$K_1 = A \cap B$ – множество девочек, принимавших участие в экскурсии,

$K_2 = A \cap \overline{B}$ – множество девочек, не принимавших участие в экскурсии,

$K_3 = \overline{A} \cap B$ – множество мальчиков, принимавших участие в экскурсии,

$K_4 = \overline{A} \cap \overline{B}$ – множество мальчиков, не принимавших участие в экскурсии.

5. Составим краткую запись условия задачи.

Дано: $m(A) = 20$, $m(B) = 25$, $m(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = 10$, $m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 15$.

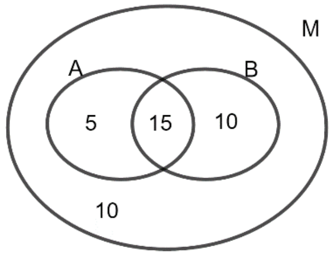
Найти: $m(M)$.

6. Ответ на вопрос можно найти двумя способами.

<u>1 способ.</u> $m(M) = m(A \cup B) + m(\bar{A} \cap \bar{B}) = m(A) + m(B) - m(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + m(\bar{A} \cap \bar{B}) = 20 + 25 - 15 + 10 = 40$.

<u>2 способ.</u> $m(M) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4)$.

При этом можно найти численность каждого класса и проставить их на диаграмме:



$m(K_1) = 15$,
$m(K_2) = m(A) - m(K_1) = 20 - 15 = 5$,
$m(K_3) = m(B) - m(K_1) = 25 - 15 = 10$,
$m(K_4) = 10$,
$m(M) = 15 + 5 + 10 + 10 = 40$.

Ответ: в классе 40 учащихся.

<u>Задача 2.</u> Известно, что в множестве M 37 чисел являются трёхзначными, из которых 15 – являются чётными. Всего чётных чисел 30, из которых 13 – меньше 500. Всего чисел, меньших 500, в множестве M 38, из которых 17 являются трёхзначными. Сколько всего чисел в множестве M, если 10 чётных трёхзначных чисел меньше 500, а 10 нечётных чисел, не меньших 500, не являются трёхзначными?

<u>Решение.</u>

1. По условию задачи для элементов множества M (множества чисел) заданы 3 свойства:

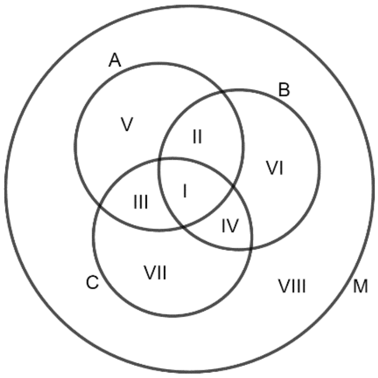
α – «быть трёхзначным числом» (это свойство выделяет подмножество A),

β – «быть чётным числом» (это свойство выделяет подмножество B),

γ – «быть числом, меньшим 500» (это свойство выделяет подмножество C).

2. По условию задачи $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset, B \cap C \neq \emptyset, A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

3. Диаграмма Эйлера-Венна, соответствующая условию задачи, принимает вид:



4. Получены следующие классы:

$K_1 = A \cap B \cap C$ – множество трёхзначных чётных чисел, меньших 500.

$K_2 = A \cap B \cap \bar{C}$ – множество трёхзначных чётных чисел, не меньших 500.

$K_3 = A \cap \bar{B} \cap C$ – множество трёхзначных нечётных чисел, меньших 500.

$K_4 = \bar{A} \cap B \cap C$ – множество чётных чисел, меньших 500, не являющихся трёхзначными.

$K_5 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество трёхзначных чисел, не меньших 500 и не являющихся трёхзначными.

$K_6 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ – множество четных чисел, не меньших 500 и не являющихся трёхзначными.

$K_7 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ – множество чисел, меньших 500, нечётных и не являющихся трёхзначными.

$K_8 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество нечётных чисел, не являющихся трёхзначными и не меньших 500.

5.Составим краткую запись условия задачи	6. Решение
Дано:	По условию имеем:
$m(A) = 37,$	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5) = 37,$
$m(B) = 30,$	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_4) + m(K_6) = 30,$
$m(C) = 38,$	$m(K_1) + m(K_3) + m(K_4) + m(K_7) = 38,$
$m(K_1) = 10,$	$m(K_1) = 10,$
$m(K_8) = 10,$	$m(K_8) = 10,$
$m(A \cap B) = 15,$	$m(K_1) + m(K_2) = 15,$
$m(B \cap C) = 13,$	$m(K_1) + m(K_4) = 13,$
$m(A \cap C) = 17.$	$m(K_1) + m(K_3) = 17.$
Найти: $m(M)$	

$m(M) = m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) + m(K_5) + m(K_6) + m(K_7) + m(K_8)$.

Согласно известным численностям классов, получаем:

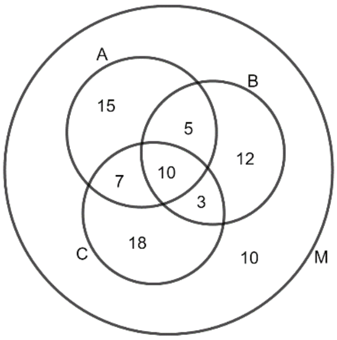
$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5) = 37$,

$m(K_4) + m(K_6) = 30 - \big(m(K_1) + m(K_2)\big) = 30 - 15 = 15$,

$m(K_7) = 38 - \big(m(K_1) + m(K_3) + m(K_4)\big) = 38 - (m(K_1) + m(K_3)) - \big(13 - m(K_1)\big) = 38 - 17 - 3 = 18$.

В результате получаем

$m(M) = \big(m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_5)\big) + \big(m(K_4) + m(K_6)\big) + m(K_7) + m(K_8) = 37 + 15 + 18 + 10 = 80$.



Ответ: $m(M) = 80$.

Задача 3. Известно, что из 30 чисел в множестве M 8 делятся на 12, 14 чисел делятся на 6, 17 чисел делятся на 5, 6 чисел не делятся ни на 5, ни на 6, а 4 числа делятся на 30, но не делятся на 60. Сколько чисел делятся на 60? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 6? Сколько чисел делятся на 6, но не делятся ни на 5, ни на 12?

Решение.

1. По условию задачи для элементов множества M (множества чисел) заданы 3 свойства:

α – «делиться на 12» (это свойство выделяет подмножество A),

β - «делиться на 6» (это свойство выделяет подмножество B),

γ - «делиться на 5» (это свойство выделяет подмножество C).

2. Ввиду того, что все числа, которые делятся на 12, делятся и на 6, получаем $A \subset B$. (1)

Поскольку:

– существуют числа, которые делятся и на 12, и на 5 одновременно,

– существуют числа, которые делятся на 12, но не делятся на 5,

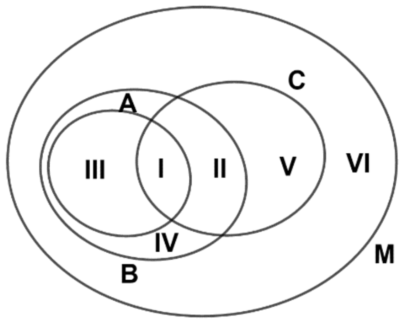
– существуют числа, которые не делятся на 12, но делятся на 5,

имеем $A \cap C \neq \emptyset$. (2)

Аналогично:

– существуют числа, которые делятся и на 6, и на 5 одновременно,
– существуют числа, которые делятся на 6, но не делятся на 5,
– существуют числа, которые не делятся на 6, но делятся на 5,
поэтому $B \cap C \neq \emptyset$. (3)

3. Диаграмма Эйлера-Венна с учетом условий (1) – (3) принимает вид:



4. Получены следующие классы:

$K_1 = A \cap B \cap C$– множество чисел, которые делятся на 12 (а значит и на 6) и на 5, т.е. фактически множество чисел, которые делятся на 60,

$K_2 = \bar{A} \cap B \cap C$– множество чисел, которые не делятся на 12, но делятся на 6 и на 5 одновременно, т.е. фактически делятся на 30, но не делятся на 60,

$K_3 = A \cap B \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые делятся на 12 (а значит, делятся и на 6), но не делятся на 5,

$K_4 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые делятся на 6, но не делятся на 12 и не делятся на 5,

$K_5 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ – множество чисел, которые делятся на 5, но не делятся на 6,

$K_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$ – множество чисел, которые не делятся ни на 6 (а значит, не делятся и на 12), ни на 5.

5.Составим краткую запись условия задачи	6. Решение
Дано:	По условию имеем:
$m(M) = 30$,	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) + m(K_5) + m(K_6) = 30$,
$m(A) = 8$,	$m(K_1) + m(K_3) = 8$,
$m(B) = 14$,	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) = 14$,
$m(C) = 17$,	$m(K_1) + m(K_2) + m(K_5) = 17$,
$m(K_2) = 4$,	$m(K_2) = 4$,
$m(K_6) = 6$.	$m(K_6) = 6$.

Найти: а) $m(K_1)$,
б) $m(K_5)$,
в) $m(K_4)$.

Согласно известным численностям классов, получаем:

а) $m(K_1) + m(K_2) + (14 - \big(m(K_1) + m(K_2)\big)) + (17 - (m(K_1) + m(K_2))) + m(K_6) = 30$,

$m(K_2) = 4$,

$m(K_6) = 6$.

$m(K_1) + 4 + (14 - (m(K_1) + 4)) + \big(17 - (m(K_1) + 4)\big) + 6 = 30$,

$14 + 17 - m(K_1) - 4 + 6 = 30$,

$m(K_1) = 33 - 30$,

$m(K_1) = 3$.

б) $m(K_1) + m(K_2) + m(K_5) = 17$,

$3 + 4 + m(K_5) = 17$,

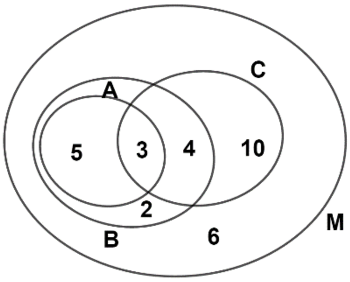
$m(K_5) = 10$.

в) $m(K_1) + m(K_2) + m(K_3) + m(K_4) = 14$,

$m(K_1) + m(K_2) + \big(8 - m(K_1)\big) + m(K_4) = 14$,

$4 + 8 + m(K_4) = 14$,

$m(K_4) = 2$.



Ответ: а) 3 числа делятся на 60; б) 10 чисел делятся на 5, но не делятся на 6; в) 2 числа делятся на 6, но не делятся ни на 12, ни на 5.

6. Задания рейтинг-контроля по теме «Множества и операции над ними»

Вариант I

Задание 1. Дано множество $C = \{213, 45, 324, 732, 136\}$. Составьте подмножество множества C, состоящее из чисел, которые: а) делятся на 3; б) делятся на 9; в) не делятся на 4; г) не делятся на 5; д) не делятся на 3.

Задание 2. Изобразите на числовой прямой множества: а) $|x| < 5$; б) $|x+3| \leq 4$; в) $|x-3| \geq 4$; г) $|x+1| > 3$.

Задание 3. Пусть $E_1 = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 20 = 0\}$, $E_2 = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ x^2 + x - 12 = 0\}$. Задать множества E_1, E_2 перечислением элементов. Образовать множества $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$.

Задание 4. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Укажите характеристическое свойство элементов множеств $A \cap B \cap C$, $A \cap \bar{B} \cap C$.

Задание 5. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных двум; 115 чисел, кратных трём; 120 чисел, кратных пяти; 45 чисел, кратных шести; 38 чисел, кратных десяти; 50 чисел, кратных пятнадцати; 20 чисел, кратных тридцати. Составьте диаграмму Эйлера-Венна и определите, сколько элементов в заданном множестве.

Задание 6. Даны множества $A = (-\infty, 1)$, $B = (-3, +\infty)$, $C = (7, 12]$. Отметить на числовой прямой множество $X = B \backslash (A \cup C)$ и сформулировать характеристическое свойство его элементов. Ответ обосновать. Можно указать в множестве X наибольшее натуральное число? Существует ли в множестве X наименьшее натуральное число? Если наименьшее или наибольшее натуральное существует, то назовите его.

Задание 7. В координатной плоскости постройте прямые, параллельные оси OY и проходящие через точки $(2, 3)$ и $(-2, 3)$. Установите, декартово произведение каких двух множеств изображается в координатной плоскости в виде полосы, заключённой между построенными прямыми.

Задание 8. Даны множества: $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$. Докажите, что множество $A \times (B \cup C)$ равно множеству $(A \times B) \cup (A \times C)$. Докажите, что множество $(B \backslash C) \times A$ равно множеству $(B \times A) \backslash (C \times A)$.

Задание 9. Докажите, что для любых множеств A, B, C верны равенства $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) = A \backslash (B \cup C)$ и $A \cap B \backslash C = A \cap (B \backslash C)$. Сначала осуществите проверку справедливости равенств на диаграмме Эйлера-Венна, затем проведите развёрнутое доказательство их, пользуясь определениями операций объединения, пересечения и разности множеств.

Задание 10. Проверьте правильность следующих классификаций: а) треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные; б) все пары окружностей делятся на концентрические и пересекающиеся; в) натуральные числа разделяются на чётные, нечётные и делящиеся на 3; г) целые числа разделяются на положительные и отрицательные. В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

Вариант II

Задание 1. Даны множества: A – множество натуральных чисел, B – множество чётных натуральных чисел, C – множество нечётных натуральных чисел, D – множество чисел, кратных 2 и 3 одновременно, E множество чисел, десятичная запись которых оканчивается нулём, F – множество чисел, кратных 6, K множество чисел, кратных 3, M – множество чисел, кратных 2 и 5 одновременно. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других данных множеств. Есть ли среди данных множеств равные?

Задание 2. Покажите на координатной прямой множество решений неравенства: а) $|x| - 2 < 5$; б) $|x - 4| \leq 7$; в) $|x + 2| \geq 3$; г) $|x - 3| > 3$.

Задание 3. Дана пара множеств $A = \{a, b, c, d, f, h\}$ и $B = \{a, c, f, l\}$. Найдите а) $A \cap B$, б) $A \cup B$ в) $A \backslash B$ г) $\bar{A}_{A \cup B}$.

Задание 4. Пусть U – универсальное множество всех треугольников, A – множество равнобедренных треугольников, B – множество равносторонних треугольников, C – множество прямоугольных треугольников. Для множеств $A \cap B \cap \bar{C}$ и $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$ укажите характеристическое свойство их элементов.

Задание 5. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, все три языка изучают 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык? Составьте диаграмму Эйлера-Венна и ответьте на вопросы задачи.

Задание 6. Даны множества $A = (-\infty, 6]$, $B = (-7, +\infty)$, $C = [-2, 15]$. Отметить на числовой прямой множество $X = B \backslash (A \cap C)$ и сформулировать характеристическое свойство его элементов. Ответ обосновать. Можно ли в множестве X указать наименьшее целое число? Если наименьшее целое существует, то назовите его.

Задание 7. В координатной плоскости постройте прямые, параллельные оси OX и проходящие через точки $(2, 3)$ и $(2, -1)$. Установите, декартово произведение каких двух множеств изображается в координатной плоскости в виде полосы, заключённой между построенными прямыми.

Задание 8. Даны множества: $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, $C = \{c, m\}$. Докажите, что множество $A \times (B \backslash C)$ равно множеству $(A \times B) \backslash (A \times C)$. Докажите, что множество $(B \cap C) \times A$ равно множеству $(B \times A) \cap (C \times A)$.

Задание 9. Докажите, что для любых множеств A, B, C верны равенства $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash B$ и $\overline{(A \backslash B)} = \bar{A} \cup (A \cap B)$. Сначала осуществите проверку справедливости равенств на диаграмме Эйлера-Венна, затем проведите развёрнутое доказательство их, пользуясь определениями операций объединения, пересечения и разности множеств.

Задание 10. Проверьте правильность следующих классификаций: а) треугольники делятся на разносторонние, равносторонние и равнобедренные; б) линии делятся на ломаные и кривые; в) параллелограммы делятся на ромбы, прямоугольники и параллелограммы, не имеющие оси симметрии; г) рациональные числа разделяются на целые и дробные. В тех случаях, когда классификации неверны, установите характер допущенной ошибки.

Глава II. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И ИХ СТРУКТУРЫ

1. Понятие высказывания и операций над высказываниями

Любая наука, в том числе математика, описывая различные процессы, использует как естественный словесный язык, так и свой символический. Эти описания строятся при помощи предложений. Но чтобы новые знания были достоверными, правильно отражали окружающую реальность, эти предложения должны быть истинными.

Как узнать, истинное или ложное знание заключено в том или ином математическом предложении? Этот вопрос и многие другие определяют предмет *формальной логики*, изучающей формы (структуры) рассуждений без учёта их конкретного содержания. Основоположником формальной логики по праву считается древнегреческий философ *Аристотель* (384-322 гг. до н.э.), разработавший впервые теорию логического вывода (дедукции). Ему принадлежит открытие формального характера логического вывода, состоящего в том, что в наших рассуждениях одни предложения выводятся из других в силу определённой связи между их формой, структурой, независимо от их конкретного содержания. (Эти вопросы подробнее рассматриваются в параграфе 7 настоящей главы).

Логика Аристотеля дополнялась, изменялась, совершенствовалась в течение многих веков, но значительного прогресса эта наука достигла лишь в XIX веке, когда в ней стали применять математические методы и математический язык, в результате чего возникла современная формальная логика – *математическая логика.*

Основоположником математической логики считают английского математика Джорджа Буля (1815-1864 гг.). В дальнейшем она получила развитие в трудах многих математиков и логиков (в том числе, наших соотечественников: И.И. Жигалкина, П.С. Новикова, А.А. Маркова, А.И. Мальцева, А.Н. Колмогорова, С.А. Яновской, а ткже их многочисленных учеников), и широкое применение как внутри, так и вне математики.

В данном учебном курсе рассмотрим лишь некоторые простейшие понятия математической логики и соответствующий язык, которые в адаптированной форме находят применение уже при начальном обучении математике. Например, в начальном курсе математики можно встретить такие предложения:

1. число 16 – чётное;

2. $2 + 5 > 8$;
3. $x + 5 = 8$
4. в числе 12 один десяток и две единицы;
5. от перестановки множителей произведение не меняется;
6. некоторые числа делятся на 5;

Замечаем, что предложения, используемые в математике, могут быть записаны как на обычном русском языке, так и на математическом, с использованием символов. Далее, о предложениях 1, 4, 5, и 6 можно сказать, что они несут верную информацию, а предложение 2 – неверную. Относительно предложения 3 вообще нельзя сказать, какую информацию оно несет – верную (истинную) или неверную (ложную).

Взгляд на предложение с позиции – истину или ложь оно сообщает – привел к понятию высказывания.

Определение. *Высказыванием* является любое повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

В приведённых примерах предложения 1, 4, и 6 являются истинными высказываниями, предложение 2 – ложное высказывание, а предложение 3 не является высказыванием. Кроме того, из определения ясно, что высказываниями не являются вопросительные и восклицательные предложения.

Высказывания принято обозначать прописными буквами латинского алфавита A, B, C, ... Если высказывание А истинно, то записывают: A – «*и*», если же высказывание A ложно, то пишут: A – «*л*». «Истина» и «ложь» – это *значения истинности высказываний*. Каждое высказывание имеет только одно значение истинности – может быть либо истинным, либо ложным, быть (или не быть) тем и другим одновременно оно не может.

Название операции	Логическая связка	Название результата действия	Обозначение
отрицание	«не» «неверно, что»	отрицание высказывания	$\overline{A}$
конъюнкция	«и»	коньюнкция высказываний	$A \wedge B$
дизъюнкция	«или»	дизъюнкция высказываний	$A \vee B$
импликация	«если…, то…»	импликация высказываний	$A \Rightarrow B$
эквиваленция	«тогда и только тогда,когда …», «если и только если …»	эквиваленция высказываний	$A \Leftrightarrow B$

Над высказываниями можно выполнять определённые *операции* (подобно тому, как в теории множеств над множествами выполнялись операции объединения, пересечения, вычитания и декартова умножения). Эти операции называются *логическими*, за каждую из них «отвечает» совершенно определенная *логическая связка* (частица, союз или союзные слова). Результатом действий логической операции является *новое высказывание:*

Получаемые в результате действий логических операций высказывания являются *составными*, а входящие в них высказывания – *элементарными*. Значения истинности составных высказываний определяются на основе *таблиц истинности.* Приведём далее определения этих составных высказываний и соответствующие им таблицы истинности.

Отрицание высказывания	
A	$\bar{A}$
и	л
л	и

Определение. *Отрицанием* высказывания A, называют новое высказывание $\bar{A}$, полученное из данного с помощью слов «неверно, что» или частицы «не». Отрицание высказывания истинно, когда само высказывание ложно, и ложно, когда само высказывание истинно.

Например, если A: «Число 12 делится на 3», тогда $\bar{A}$: «Неверно, что число 12 делится на 3», или, что то же самое, $\bar{A}$: «Число 12 не делится на 3». Здесь A – *«и»*, а $\bar{A}$ – *«л»*.

A	B	$A \wedge B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

Определение. *Конъюнкцией высказываний A и B* называется новое высказывание $A \wedge B$, полученное из данных с помощью союза «*и*». Конъюнкция высказываний истина, когда оба высказывания истины, и ложна, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Например, если A: «Число 12 делится на 3», B: «Число 12 делится на 4», то $A \wedge B$: «Число 12 делится на 3 и делится на 4». Здесь A – *«и»* и B – *«и»*, тогда $A \wedge B$– *«и»*. Если же A: «Москва – столица России», B: «Киев – столица Франции», то $A \wedge B$:«Москва – столица России и Киев – столица Франции». Здесь A – *«и»*, B – *«л»,*тогда A ∧ B – *«л»*.

<u>Определение.</u> *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется новое высказывание $A \vee B$, полученное из данных с помощью союза «*или*». Дизъюнкция высказываний истинна, когда хотя бы одно из высказываний истинно, и ложна, когда оба высказывания ложны.

A	B	$A \vee B$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

Например, если A: «Число 12 делится на 5», B: «Число 12 делится на 8»,то $A \vee B$: «Число 12 делится на 5 <u>или</u> на 8». Здесь A – «л», B – «л», тогда $A \vee B$– «л». Если же A: «Москва – столица России», B: «Москва – столица Франции», то $A \vee B$: «Москва – столица России <u>или</u> столица Франции». Здесь A – «*и», B – «л»,* тогда $A \vee B$– «*и*».

<u>Определение.</u> *Импликацией высказываний* A и B называется новое высказывание $A \Rightarrow B$, полученное из данных с помощью слов *если…, то…*. Импликация высказываний ложна только в одном случае: когда первое высказывание истинно, а второе – ложно, в остальных случаях импликация высказываний истинна.

A	B	$A \Rightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Например, пусть A: «Число 12 делится на 3» , B: «Число 12 делится на 4»,тогда $A \Rightarrow B$: «Если число 12 делится на 3,то оно делится на 4». Здесь A – «*и*», B – «*и*» ,значит $A \Rightarrow B$ – «*и*». Или, пусть A: «Москва – столица России», B: «Москва – столица Франции», тогда $A \Rightarrow B$: «Если Москва – столица России, то Москва – столица Франции». Здесь A – «*и*», B – «*л*», тогда $A \Rightarrow B$ – «л».

<u>Определение.</u> *Эквиваленцией высказываний* A *и* B называется новое высказываение $A \Leftrightarrow B$, полученное из данных с помощью слов *тогда и только тогда, когда* или *если и только если*. Эквиваленция высказываний истинна при одинаковых значениях высказываний, в остальных случаях она ложна.

A	B	$A \Leftrightarrow B$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	и

Например, если A: «число 12 делится на 5», B: «Число 12 делится на 8», то $A \Leftrightarrow B$: «Число 12 делится на 5 <u>тогда и только тогда, когда</u> 12 делится на 8». Здесь A – «л», B – «л», но $A \Leftrightarrow B$ – «л». Если же A:

«Москва – столица России», B: «Москва – столица Франции», тогда $A \Leftrightarrow B$: «Москва – столица России если и только если Москва – столица Франции». Здесь A – «и», B – «л», $A \Leftrightarrow B$ – «л».

Приведём примеры задач и их решений

Задача 1. Из высказываний A: «$8 > 3$», B: «8 – однозначное число», C: «8 – простое число»; D: «8 делится на 3» сформулировать высказывания структуры: а) $A \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge (C \vee D))$; б) $\overline{(A \wedge D) \Rightarrow (\bar{C} \vee B)}$ и определить их значение истинности.

Решение. Для того, чтобы сформулировать высказывания заданной структуры, нужно знать, какая логическая связка отвечает за ту или иную логическую операцию. Для того, чтобы определить значение истинности высказывания заданной структуры, нужно знать значения истинности данных высказываний A, B, C и D, а также значения истинности конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквиваленции и отрицания высказываний (см.таблицы истинности).

а) $A \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge (C \vee D))$: «8 больше 3 тогда и только тогда, когда 8 не является однозначным числом и является простым или делится на 3».

По условию задачи имеем: A – «и», B – «и», C – «л» D – «л». Тогда по определению логических операций получаем: $C \vee D$ – «л», $\bar{B}$ – «л», $\bar{B} \wedge (C \vee D)$ – «л» и, наконец, $A \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge (C \vee D))$ – «л».

б) $\overline{(A \wedge D) \Rightarrow (\bar{C} \vee B)}$: «Неверно, что если 8 больше 3 и делится на 3, то 8 не является простым числом или является однозначным».

При определении значения истинности этого высказывания можно использовать таблицу:

A	B	C	D	$A \wedge D$	$\bar{C}$	$\bar{C} \vee B$	$(A \wedge D) \Rightarrow (\bar{C} \vee B)$	$\overline{(A \wedge D) \Rightarrow (\bar{C} \vee B)}$
и	и	л	л	л	и	и	и	л

Ответ: при заданных значениях истинности высказываний A, B, C и D, высказывания $A \Leftrightarrow (\bar{B} \wedge (C \vee D))$ и $\overline{(A \wedge D) \Rightarrow (\bar{C} \vee B)}$– ложны.

Задача 2. Определить структуру высказывания и найти его значение истинности: «14 делится на 2 тогда и только тогда, когда 14 является натуральным числом и если 14 меньше 20, то неверно, что 14 – простое».

Решение. Для определения структуры этого высказывания нужно выяснить, из каких элементарных высказываний оно составлено и с помощью каких логических операций (на это указывают логические связки). Видим, что для составления этого высказывания использованы операции: эквиваленция, импликация, конъюнкция и отрицание, примененные к высказываниям:

A: «14 делится на 2», B: «14 является натуральным числом»,

C: «14 меньше 20», D: «14 – число простое».

Структура данного высказывания имеет вид: $A \Leftrightarrow (B \wedge (C \Rightarrow \overline{D}))$.
Определим значение истинности этого высказывания с помощью таблицы:

A	B	C	D	$\overline{D}$	$C \Rightarrow \overline{D}$	$D \wedge (C \Rightarrow \overline{D})$	$A \Leftrightarrow (B \wedge (C \Rightarrow \overline{D}))$
и	и	и	л	и	и	и	и

Ответ: данное высказывание имеет структуру $A \Leftrightarrow (B \wedge (C \Rightarrow \overline{D}))$ и является истинным для введенных высказываний A, B, C и D.

Задача 3. Составить таблицу истинности высказывания $(A \wedge B) \Rightarrow \bar{C}$ и привести пример высказываний A, B и C так, чтобы высказывание заданной структуры было истинным.

Решение. Чтобы составить таблицу истинности высказывания заданной структуры, нужно учесть все возможные значения входящих высказываний A, B, C (конкретные значения истинности этих высказываний не заданы). Имеем:

A	B	C	$A \wedge B$	$\overline{C}$	$(A \wedge B) \Rightarrow \overline{C}$
и	и	и	и	л	л
и	и	л	и	и	и
и	л	и	л	л	и
и	л	л	л	и	и
л	и	и	л	л	и
л	и	л	л	и	и
л	л	и	л	л	и
л	л	л	л	и	и

Теперь приведём пример конкретных высказываний A, B и C так, чтобы высказывание заданной структуры было истинным. Из составленной таблицы истинности видно, что высказывание заданной структуры будет истинным в тех случаях, когда A, B и C не являются одновременно истинными. Это и нужно учесть при выборе высказываний A, B и C. Например (в соответствии со значениями в третьей строке таблицы):

A: «В 2020 году отмечается 205-летие со дня рождения русского поэта, прозаика и драматурга Петра Павловича Ершова»,

B: «Город Владимир – родина П.П. Ершова»,

C: «П.П. Ершов – автор сказки Конёк-горбунок».

2. Законы логических операций. Тавтологии

Рассмотренные в параграфе 1 логические операции подчиняются целому ряду логических законов. Но прежде чем формулировать и доказывать эти законы, определим *равносильные* (или *эквивалентные*) высказывания.

Два высказывания называются *равносильными* (или *эквивалентными*) тогда и только тогда, когда принимают *одинаковые значения истинности* при *одинаковых* значениях входящих высказываний.

Для обозначения равносильных высказываний используют символ ≡ (или в некоторых изданиях ~).

Любые два истинных высказывания равносильны, равно как и любые два ложных выказывания.

Логические законы устанавливают равносильность высказываний определённой структуры.

Доказательство любого логического закона связано с доказательством равносильности высказываний и использует таблицы истинности.

Перечислим основные законы, которым подчиняются логические операции. Эти законы принято называть логическими тождествами.

Коммутативные законы:

1. Коммутативный закон конъюнкции высказываний: конъюнкция высказываний A и B равносильна конъюнкции высказываний B и A. $A \land B \equiv B \land A$.
2. Коммутативный закон дизъюнкции высказываний: дизъюнкция высказываний A и B равносильна дизъюнкции высказываний B и A. $A \lor B \equiv B \lor A$.

3. Коммутативный закон эквиваленции высказываний: эквиваленция высказываний A и B равносильна эквиваленции высказываний B и A. $A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$.

Ассоциативные законы:

1. Ассоциативный закон конъюнкции высказываний: конъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний B и C равносильна конъюнкции конъюнкции высказываний A и B с высказыванием C. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$.
2. Ассоциативный закон дизъюнкции высказываний: дизъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний B и C равносильна дизъюнкции дизъюнкции высказываний A и B с высказыванием C. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$.

Дистрибутивные законы:

1. Левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: конъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний B и C равносильна дизъюнкции конъюнкций высказываний A и B с A и C. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.
2. Правый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: конъюнкция дизъюнкции высказываний A и B с высказыванием C равносильна дизъюнкции конъюнкций высказываний A и C с B и C. $(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
3. Левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции: дизъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний B и C равносильна конъюнкции дизъюнкций высказываний A и B с A и C. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
4. Правый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно конъюнкции: дизъюнкция конъюнкции высказываний A и B с высказыванием C равносильна конъюнкции дизъюнкций высказываний A и C с B и C. $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

Законы де Моргана (законы общей инверсии):

1. Отрицание конъюнкции высказываний A и B равносильно дизъюнкции отрицания A и отрицания B. $\overline{A \wedge B} \equiv \bar{A} \vee \bar{B}$.
2. Отрицание дизъюнкции высказываний A и B равносильно конъюнкции отрицания A и отрицания B. $\overline{A \vee B} \equiv \bar{A} \wedge \bar{B}$.

Закон двойного отрицания:

Отрицание $\bar{\bar{A}}$ отрицания $\bar{A}$ высказывания A равносильно самому высказыванию A. $\bar{\bar{A}} \equiv A$.

Законы идемпотентности:

1. Конъюнкция высказывания A с самим собой равносильна высказыванию A. $A \wedge A \equiv A$.
2. Дизъюнкция высказывания A с самим собой равносильна высказыванию A. $A \vee A \equiv A$.

Закон исключения констант:

1. Конъюнкция высказывания A с заведомо истинным высказыванием равносильна высказыванию A. $A \wedge \text{и} \equiv A$.
2. Конъюнкция высказывания A с заведомо ложным высказыванием равносильна ложному высказыванию. $A \wedge \text{л} \equiv \text{л}$.
3. Дизъюнкция высказывания A с заведомо истинным высказыванием равносильна истинному высказыванию. $A \vee \text{и} \equiv \text{и}$.
4. Дизъюнкция высказывания A с заведомо ложным высказыванием равносильна высказыванию A. $A \vee \text{л} \equiv A$.

Закон противоречия:

Конъюнкция высказывания A с отрицанием $\bar{A}$ высказывания A равносильна заведомо ложному высказыванию. $A \wedge \bar{A} \equiv \text{л}$.

Закон исключённого третьего:

Дизъюнкция высказывания A с отрицанием $\bar{A}$ высказывания A равносильна заведомо истинному высказыванию. $A \vee \bar{A} \equiv \text{и}$.

Законы поглощения:

1. Конъюнкция высказывания A с дизъюнкцией высказываний A и B равносильна высказыванию A. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.
2. Дизъюнкция высказывания A с конъюнкцией высказываний A и B равносильна высказыванию A. $A \vee (A \wedge B) \equiv A$.

Законы исключения:

1. Конъюнкция дизъюнкции высказываний A и B с дизъюнкцией высказываний $\bar{A}$ и B равносильна высказыванию B. $(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) \equiv B$.
2. Дизъюнкция конъюнкции высказываний A и B с конъюнкцией высказываний $\bar{A}$ и B равносильна высказыванию B. $(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) \equiv B$.

Законы контрапозиции:

1. Импликация высказываний A и B равносильна импликации отрицаний высказываний B и A. $A \Rightarrow B \equiv \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.
2. Эквиваленция высказываний A и B равносильна эквиваленции высказываний B и A. $A \Leftrightarrow B \equiv B \Leftrightarrow A$.

Характер законов имеют и следующие **тождества**, позволяющие осуществлять переход от одних логических операций к другим:

1. Импликация высказываний A и Bравносильна дизъюнкции отрицания $\bar{A}$ высказывания A с высказыванием B. $A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$.
2. Эквиваленция высказываний A и Bравносильна конъюнкции импликации высказываний A и B с импликацией высказываний B и A. $A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
3. Отрицание импликации высказываний A и Bравносильно конъюнкции высказывания A с отрицания $\bar{B}$ высказывания B. $\overline{A \Rightarrow B} \equiv A \wedge \bar{B}$.
4. Отрицание эквиваленции высказываний A и Bравносильно дизъюнкции конъюнкции высказываний A с отрицанием $\bar{B}$ высказывания B и конъюнкции отрицания $\bar{A}$ высказывания A с высказыванием B. $\overline{A \Leftrightarrow B} \equiv (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$.

Для доказательства любого из приведенных законов нужно установить равносильность высказываний из левой и правой части тождества, то есть нужно показать, что эти высказывания принимают одинаковые значения истинности при одинаковых значениях входящих высказываний. Такое сравнение проводится с использованием таблиц истинности.

Например, докажем левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно дизъюнкции: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Составим таблицу истинности:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
и	и	и	и	**и**	и	и	**и**
и	и	л	и	**и**	и	л	**и**
и	л	и	и	**и**	л	и	**и**
и	л	л	л	**л**	л	л	**л**
л	и	и	и	**л**	л	л	**л**
л	и	л	и	**л**	л	л	**л**
л	л	и	и	**л**	л	л	**л**
л	л	л	л	**л**	л	л	**л**

Видим, что высказывания $A \wedge (B \vee C)$ и $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ принимают одинаковые значения истинности при одинаковых значениях входящих высказываний. Значит, эти высказывания равносильны, и закон выполняется: $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

Составные высказывания, истинные при любых значениях входящих элементарных высказываний, называются *тавтологиями*. Тавтологией будет, например, высказывание структуры $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$.

Установим справедливость этого высказывания с помощью таблицы истинности.

A	B	$A \Rightarrow B$	$((A \Rightarrow B) \wedge A$	$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$
и	и	и	и	**и**
и	л	л	л	**и**
л	и	и	л	**и**
л	л	и	л	**и**

В самом деле, высказывание $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$ истинно независимо от значений входящих высказываний A и B, и по определению является тавтологией.

Тавтологию легко получить из любого закона, заменив знак равносильности на знак эквиваленции. Например, коммутативный закон для конъюнкции высказываний определит тавтологию $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$.

Приведём примеры задач и их решений.

Задача 1. Определить, являются ли равносильными высказывания $A \Leftrightarrow (B \vee C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$.

Решение: Составим таблицу истинности этих высказываний

A	B	C	$B \vee C$	$A \Leftrightarrow (B \vee C)$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Leftrightarrow C$	$(A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$
и	и	и	и	и	и	и	и
и	и	л	и	и	и	л	и
и	л	и	и	и	л	и	и
и	л	л	л	л	л	л	л
л	и	и	и	л	л	л	л
л	и	л	и	**л**	л	и	**и**
л	л	и	и	**л**	и	л	**и**
л	л	л	л	и	и	и	и

Эти высказывания не являются равносильными, потому что не принимают одинаковых значений истинности при одинаковых значениях входящих высказываний A, B и C.

Ответ: $A \Leftrightarrow (B \vee C) \not\equiv (A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$.

Задача 2. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно импликации $A \vee (B \Rightarrow C)$? $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$. Если закон выполняется, то сформулировать его.

Решение: Для ответа на вопрос задачи нужно проверить, являются ли равносильными выказывания из левой $A \vee (B \Rightarrow C)$ и правой частей закона $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$. Составим таблицу истинности этих высказываний:

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \vee (B \Rightarrow C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$
и	и	и	и	и	**и**	и	**и**
и	и	л	л	и	**и**	и	**и**
и	л	и	и	и	**и**	и	**и**
и	л	л	и	и	**и**	и	**и**
л	и	и	и	и	**и**	и	**и**
л	и	л	л	л	**и**	л	**л**
л	л	и	и	и	**л**	и	**и**
л	л	л	и	и	**л**	л	**и**

Сравнивая значение истинности высказываний $A \vee (B \Rightarrow C)$ и $(A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$, приходим к выводу, что они равносильны: $A \vee (B \Rightarrow C) \equiv (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$. Значит, левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно импликации имеет место.

Ответ. Левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно импликации формулируется следующим образом: дизъюнкция высказывания A с импликацией высказываний B и C равносильна импликации дизъюнкции высказываний A и B с дизъюнкцией высказываний A и C $A \vee (B \Rightarrow C) \equiv (A \vee B) \Rightarrow (A \vee C)$.

Задача 3. Проверить, является ли высказывание $B \Rightarrow (A \vee B)$ тавтологией.

Решение: По определению, тавтологией будет высказывание, являющееся истинным независимо от значений входящих высказываний. Поэтому нужно составить таблицу истинности этого высказывания.

A	B	$A \vee B$	$B \Rightarrow (A \vee B)$
и	и	и	и
и	л	и	и
л	и	и	и
л	л	л	и

Видим, что действительно высказывание $B \Rightarrow (A \vee B)$ истинно независимо от значений высказываний A и B, а значит, является тавтологией.

3. Понятие предиката и операций над предикатами

Предложение вида $x + 5 = 8$ не является высказыванием, поскольку нельзя определить его значение истинности. Но после подстановки конкретных значений переменной x легко можно рассудить, истинно или ложно полученное высказывание. В логике такие предложения определяются как высказывательные формы или предикаты.

Определение. Предложение с переменной x, где $x \in X$, называют *одноместными предикатом* или *одноместной высказывательной формой*, если оно обращается в высказывание при подстановке любого конкретного значения переменной x из множества X.

Множество X называют *областью определения предиката*.

Одноместные предикаты обозначают $A(x)$, $B(x)$, …

В рассмотренном примере $A(x){:}\, x + 5 = 8$.

Данный предикат может определяться на любом числовом множестве. Именно это множество и будет областью определения предиката $A(x)$.

Особое внимание уделяется тем значениям переменной, подстановка которых в данный предикат обращает его в *истинное* высказывание.

Определение. Множество значений переменной x из области определения X предиката $A(x)$, подстановка которых обращает предикат в истинное высказывание, называют *множеством* или *областью истинности предиката* и обозначают $T_{A(x)}$.

Из определения ясно, что $T_{A(x)} \subset X$.

Замечание 1. Переменная в предикате может содержаться неявно. Например, в предложениях «Число чётное» или «Четырёхугольник является параллелограммом» переменных нет, но они подразумеваются:

$A(x)$: «Число x – чётное»,

$B(x)$: «Четырёхугольник x – параллелограмм».

Областью определения для $A(x)$ может служить множество натуральных чисел $\mathbb{N}$, тогда областью истинности предиката $A(x)$ является множество чётных натуральных чисел: $T_{A(x)} = \{x|\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$.

Областью определения для $B(x)$ может служить множество четырёхугольников плоскости, тогда областью истинности предиката $B(x)$ является множество параллелограммов плоскости.

Видим, что одноместный предикат является ни чем иным, как характеристическим свойством, позволяющим из области определения предиката выделить подмножество – область истинности этого предиката.

Замечание 2. Предложение может содержать две, три или более переменных, подстановка конкретных значений которых обращает это предложение в высказывание. В этом случае говорят о двуместных, трёхместных или многоместных предикатах. Например, двуместным будет предикат $A(x, y)$: $x + y = 8,\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$. Областью определения этого предиката будет декартов квадрат – множество $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а областью истинности $T_{A(x,y)}$ – множество упорядоченных пар значений x и y, при которых предикат $A(x, y)$ обращается в истинное высказывание. Так, пара чисел $(1{,}7) \in T_{A(x,y)}$, потому что «1+7=8» – «и», а пара чисел $(-3{,}5) \notin T_{A(x,y)}$, потому что «–3+5=8 – «л».

Похожим образом определяются трёхместные, четырёхместные и, в общем случае, n-местные предикаты.

Определение. *n-местным предикатом* является предложение, содержащее n различных переменных и обращающееся в высказывание при подстановке конкретных значений этих переменных.

Обозначают такие предикаты $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, …, $x_n \in X_n$, то областью определения предиката $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является множество $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, а областью истинности – подмножество этого декартова произведения (наборы значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, при которых данный предикат обращается в истинное высказывание).

В дальнейших рассуждениях чаще всего будем использовать одноместные предикаты, но это не ограничивает общности множества предложений, потому схема изложения останется прежней, если использовать многоместные предикаты.

Над предикатами выполняются те же логические операции, что и над высказываниями. Результатом действия операций в таком случае будут новые предикаты. При этом нужно учитывать, что области определения исходных предикатов должны быть одинаковы. Кроме того, всегда нужно знать, как на основе областей истинности данных предикатов находится область истинности нового предиката. Определим теперь новые предикаты, являющиеся результатом действий логических операций, и сформулируем правила, по которым находятся их области истинности.

Определение. *Отрицанием предиката* $A(x)$ называется новый предикат $\overline{A(x)}$, полученный из данного с помощью логической связки «неверно, что» или частицы «не».

При этом, если X – область определения предиката $A(x)$, то X будет областью определения и для предиката $\overline{A(x)}$.

Найдём область истинности $T_{\overline{A(x)}}$ отрицания $\overline{A(x)}$ предиката $A(x)$.

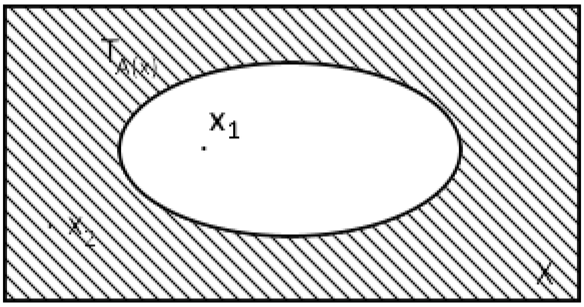
Известно, что $T_{A(x)} \subset X$, и любое конкретное значение переменной x из области $T_{A(x)}$ обращает предикат $A(x)$ в истинное высказывание:

$$\left(x_1 \in T_{A(x)}\right) \to (A(x_1) - \text{"и"}),$$
$$\left(x_2 \notin T_{A(x)}\right) \to (A(x_2) - \text{"л"}).$$

Теперь подставим эти конкретные значения x_1 и x_2 в отрицание $\overline{A(x)}$ предиката $A(x)$. При значении x_1 сам предикат обращается в истинное высказывание, значит отрицание предиката при значении x_1 должно обращаться в ложное высказывание. При значении x_2 сам предикат обращается в ложное высказывание, тогда при этом значении отрицание предиката должно обращаться в истинное высказывание:

$$(A(x_1) - \text{"и"}) \to \left(\overline{A(x_1)} - \text{"л"}\right),$$
$$(A(x_2) - \text{"л"}) \to \left(\overline{A(x_2)} - \text{"и"}\right).$$

Изобразим на кругах Эйлера область определения предикатов $A(x)$ и $\overline{A(x)}$, область истинности $T_{A(x)}$ предиката $A(x)$ и отметим штриховкой область истинности отрицания предиката $\overline{A(x)}$ (это должна быть область, из которой выбирается значение x_2, т.е. те значения переменной, которые обращают отрицание предиката в истинное высказывание):



Заштрихованная область есть дополнение $T_{A(x)}$ до X.

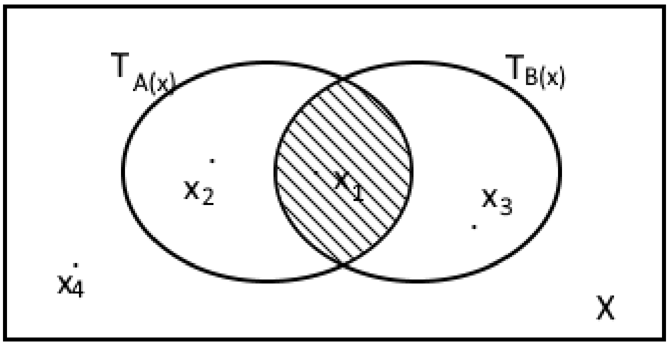
Значит, область истинности отрицания предиката $A(x)$ находится как дополнение области истинности предиката $A(x)$ до области определения X:

$T_{\overline{A(x)}} = \overline{T_{A(x)}}$.

<u>Определение.</u> *Конъюнкцией* двух *предикатов* $A(x)$ и $B(x)$ называют новый предикат $A(x) \wedge B(x)$, полученный из данных с помощью логической связки – союза «и».

Найдем область истинности нового предиката $A(x) \wedge B(x)$, если известны области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

Изобразим на кругах Эйлера область определения X предикатов и их области истинности, предполагая, что $T_{A(x)} \cap T_{B(x)} \neq \emptyset$:



На диаграмме видим, что множество X разбито на 4 области. Из каждой выберем конкретное значение переменой и определим значение истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $A(x) \wedge B(x)$ при этих значениях переменной:

1. $\left.\begin{array}{l}(x_1 \in T_{A(x)}) \to (A(x_1) - \text{"и"}), \\ (x_1 \in T_{B(x)}) \to (B(x_1) - \text{"и"}),\end{array}\right\} \to A(x_1) \wedge B(x_1) - \text{"и"};$

$$2.\quad \left.\begin{array}{l}(x_2 \in T_{A(x)}) \to (A(x_2) - "и"),\\ (x_2 \notin T_{B(x)}) \to (B(x_2) - "л"),\end{array}\right\} \to A(x_2) \wedge B(x_2) - "л";$$

$$3.\quad \left.\begin{array}{l}(x_3 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_3) - "л"),\\ (x_3 \in T_{B(x)}) \to (B(x_3) - "и"),\end{array}\right\} \to A(x_3) \wedge B(x_3) - "л";$$

$$4.\quad \left.\begin{array}{l}(x_4 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_4) - "л"),\\ (x_4 \notin T_{B(x)}) \to (B(x_4) - "л"),\end{array}\right\} \to A(x_4) \wedge B(x_4) - "л".$$

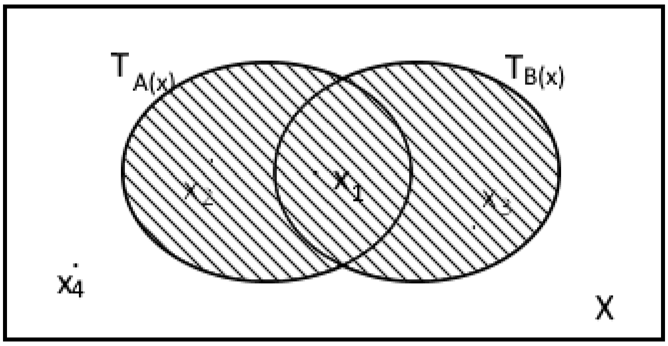
Таким образом, конъюнкция предикатов обращается в истинное высказывание только при значениях x_1, т.е. при таких значениях переменной, которые и первый предикат, и второй обращают в истинное высказывание . На диаграмме область истинности конъюнкции предикатов отмечена штриховкой и описывается как пересечение областей истинности самих предикатов:

$$T_{A(x)\wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)}.$$

Определение. *Дизъюнкцией* двух *предикатов* $A(x)$ и $B(x)$ называют новый предикат $A(x) \vee B(x)$, полученный из данных с помощью логической связки – союза «или».

Найдем область истинности нового предиката $A(x) \vee B(x)$, если известны области истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

Изобразим на кругах Эйлера область определения X предикатов и их области истинности, предполагая, что $T_{A(x)} \cap T_{B(x)} \neq \emptyset$:



На диаграмме видим,что множество X разбито на 4 области. Из каждой выберем конкретное значение переменной и определим значения истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $A(x) \vee B(x)$ при этих значениях переменной:

$$1.\quad \left.\begin{array}{l}(x_1 \in T_{A(x)}) \to (A(x_1) - "и"),\\ (x_1 \in T_{B(x)}) \to (B(x_1) - "и"),\end{array}\right\} \to A(x_1) \vee B(x_1) - "и";$$

2. $\left.\begin{array}{l}(x_2 \in T_{A(x)}) \rightarrow (A(x_2) - "и"),\\ (x_2 \notin T_{B(x)}) \rightarrow (B(x_2) - "л"),\end{array}\right\} \rightarrow A(x_2) \vee B(x_2) - "и";$

3. $\left.\begin{array}{l}(x_3 \notin T_{A(x)}) \rightarrow (A(x_3) - "л"),\\ (x_3 \in T_{B(x)}) \rightarrow (B(x_3) - "и"),\end{array}\right\} \rightarrow A(x_3) \vee B(x_3) - "и";$

4. $\left.\begin{array}{l}(x_4 \notin T_{A(x)}) \rightarrow (A(x_4) - "л"),\\ (x_4 \notin T_{B(x)}) \rightarrow (B(x_4) - "л"),\end{array}\right\} \rightarrow A(x_4) \vee B(x_4) - "л".$

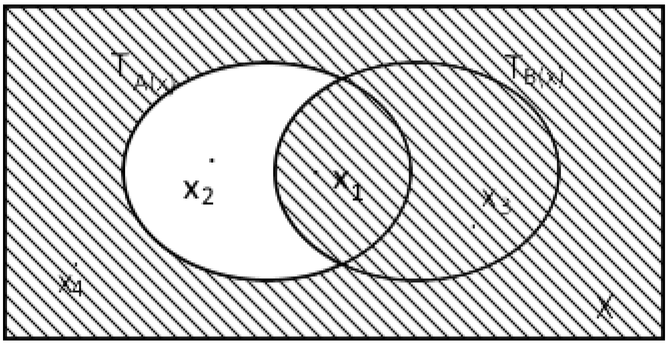
На диаграмме *область истинности дизъюнкции предикатов* отмечена штриховкой и легко описывается как *объединение областей истинности* самих предикатов:

$T_{A(x)\vee B(x)} = T_{A(x)} \cup T_{B(x)}$.

Определение. *Импликацией* двух *предикатов* $A(x)$ и $B(x)$ называют новый предикат $A(x) \Rightarrow B(x)$, полученный из данных с помощью логической связки – союзных слов «если…, то…».

Область истинности нового предиката $A(x) \Rightarrow B(x)$ можно найти, рассуждая как и в предыдущих случаях.

Изобразим на кругах Эйлера область определения X предикатов и их области истинности, предполагая, что $T_{A(x)} \cap T_{B(x)} \neq \emptyset$:



Как и в предыдущих случаях, множество X разбито на 4 области. Из каждой выберем конкретное значение переменной и определим значения истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $A(x) \Rightarrow B(x)$ при этих значениях переменной:

1. $\left.\begin{array}{l}(x_1 \in T_{A(x)}) \rightarrow (A(x_1) - "и"),\\ (x_1 \in T_{B(x)}) \rightarrow (B(x_1) - "и"),\end{array}\right\} \rightarrow A(x_1) \Rightarrow B(x_1) - "и";$

2. $\left.\begin{array}{l}(x_2 \in T_{A(x)}) \rightarrow (A(x_2) - "и"),\\ (x_2 \notin T_{B(x)}) \rightarrow (B(x_2) - "л"),\end{array}\right\} \rightarrow A(x_2) \Rightarrow B(x_2) - "л";$

3. $\left.\begin{array}{l}(x_3 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_3) - \text{"л"}),\\ (x_3 \in T_{B(x)}) \to (B(x_3) - \text{"и"}),\end{array}\right\} \to A(x_3) \Rightarrow B(x_3) - \text{"и"};$

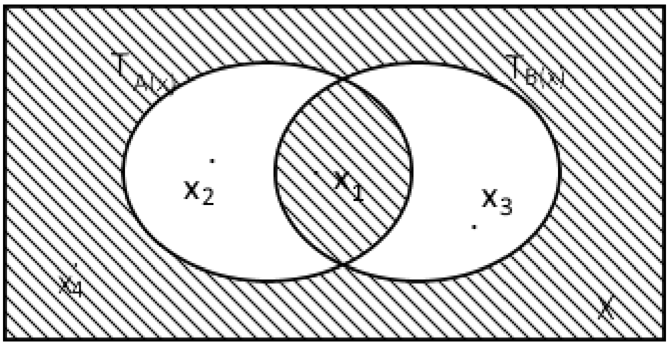
4. $\left.\begin{array}{l}(x_4 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_4) - \text{"л"}),\\ (x_4 \notin T_{B(x)}) \to (B(x_4) - \text{"л"}),\end{array}\right\} \to A(x_4) \Rightarrow B(x_4) - \text{"и"}.$

На диаграмме *область истинности импликакции предикатов* отмечена штриховкой. Это множество является объединением дополнения области истинности первого предиката с *областью истинности* второго:

$T_{A(x)\Rightarrow B(x)} = \overline{T_{A(x)}} \cup T_{B(x)}.$

<u>Определение.</u> *Эквиваленцией* двух *предикатов* $A(x)$ и $B(x)$ называют новый предикат $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, полученный из данных с помощью логической связки – союзных слов «тогда и только тогда, когда» или «если и только если».

Найдём область истинности нового предиката $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Для этого, как и в предыдущих случаях, изобразим на кругах Эйлера область определения X предикатов и их области истинности, предполагая, что $T_{A(x)} \cap T_{B(x)} \neq \emptyset$:



Из каждой области выберем конкретное значение переменной и определим значения истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$ и $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ при этих значениях переменной:

1. $\left.\begin{array}{l}(x_1 \in T_{A(x)}) \to (A(x_1) - \text{"и"}),\\ (x_1 \in T_{B(x)}) \to (B(x_1) - \text{"и"}),\end{array}\right\} \to A(x_1) \Leftrightarrow B(x_1) - \text{"и"};$

2. $\left.\begin{array}{l}(x_2 \in T_{A(x)}) \to (A(x_2) - \text{"и"}),\\ (x_2 \notin T_{B(x)}) \to (B(x_2) - \text{"л"}),\end{array}\right\} \to A(x_2) \Leftrightarrow B(x_2) - \text{"л"};$

3. $\left.\begin{array}{l}(x_3 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_3) - \text{"л"}),\\ (x_3 \in T_{B(x)}) \to (B(x_3) - \text{"и"}),\end{array}\right\} \to A(x_3) \Leftrightarrow B(x_3) - \text{"л"};$

$$4.\quad \left.\begin{array}{l}(x_4 \notin T_{A(x)}) \to (A(x_4) - \text{"л"}),\\ (x_4 \notin T_{B(x)}) \to (B(x_4) - \text{"л"}),\end{array}\right\} \to A(x_4) \Leftrightarrow B(x_4) - \text{"и"}.$$

На диаграмме область истинности эквиваленции предикатов отмечена штриховкой. Это множество является объединением пересечения областей истинности самих предикатов и пересечением дополнений областей истинности этих предикатов:

$$T_{A(x)\Leftrightarrow B(x)} = (T_{A(x)} \cap T_{B(x)}) \cup (\overline{T_{A(x)}} \cap \overline{T_{B(x)}}).$$

Рассмотрим пример задачи и её решения.

Задача. На множестве $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z},\ |x| < 3\}$ заданы предикаты $A(x)$: «Число x делится на 2» и $B(x)$: «Число x меньше 1». Найти области истинности этих предикатов. Сформулировать $\overline{A(x)}$, $\overline{B(x)}$, $A(x) \wedge B(x)$, $A(x) \vee B(x)$, $A(x) \Rightarrow B(x)$, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ и найти их области истинности.

Решение.

С учётом характеристического свойства элементов множества X получаем: $X = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$.

Области истинности предикатов находятся как значения переменной x из множества X, при которых предикаты обращаются в истинные высказывания. Значит, $T_{A(x)} = \{-2, 0, 2\}$, $T_{B(x)} = \{-2, -1, 0\}$.

Сформулируем отрицание $\overline{A(x)}$ предиката $A(x)$: «Неверно, что число x делится на 2». Или $\overline{A(x)}$: «Число x не делится на 2».

Воспользуемся правилом и найдём область истинности нового предиката $\overline{A(x)}$:

$$T_{\overline{A(x)}} = \overline{T_{A(x)}} = \{-1, 1\}.$$

Аналогично, $\overline{B(x)}$: «Неверно, что число x меньше 1». Или $\overline{B(x)}$: «Число x не меньше 1». Тогда $T_{\overline{B(x)}} = \overline{T_{B(x)}} = \{1, 2\}$.

Теперь сформулируем конъюнкцию предикатов $A(x)$ и $B(x)$.

$A(x) \wedge B(x)$: «Число x делится на 2 и меньше 1». Для нахождения области истинности конъюнкции предикатов воспользуемся правилом: $T_{A(x)\wedge B(x)} = T_{A(x)} \cap T_{B(x)} = \{-2, 0\}$.

Далее формулируем новый предикат – импликацию предикатов $A(x)$ и $B(x)$. $A(x) \Rightarrow B(x)$: «Если число x делится на 2, то оно меньше 1». Находим область истинности $T_{A(x)\Rightarrow B(x)}$ импликации предикатов $A(x)$ и $B(x)$:

$$T_{A(x)\Rightarrow B(x)} = \overline{T_{A(x)}} \cup T_{B(x)} = \{-1, 1\} \cup \{-2, -1, 0\} = \{-2, -1, 0, 1\}.$$

Далее формулируем новый предикат – эквиваленцию предикатов $A(x)$ и $B(x)$. $A(x) \Leftrightarrow B(x)$: «Число x является чётным тогда и только тогда, когда оно меньше 1». Находим область истинности $T_{A(x)\Leftrightarrow B(x)}$ эквиваленции предикатов $A(x)$ и $B(x)$:

$$T_{A(x)\Leftrightarrow B(x)} = \left(T_{A(x)} \cap T_{B(x)}\right) \cup \left(\overline{T_{A(x)}} \cap \overline{T_{B(x)}}\right) = \{-2, 0\} \cup (\{-1, 1\} \cap \{1, 2\}) = \{-2, 0\} \cup \{1\} = \{-2, 0, 1\}.$$

<u>Замечание.</u> В предложенной задаче предикаты $A(x)$ и $B(x)$ заданы на конечном множестве $X = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$. Поэтому решение можно осуществить с использованием таблиц истинности. Эта таблица имеет вид:

X	$A(x)$	$B(x)$	$\overline{A(x)}$	$\overline{B(x)}$	$A(x) \wedge B(x)$	$A(x) \Rightarrow B(x)$	$A(x) \Leftrightarrow B(x)$
-2	и	и	л	л	и	и	и
-1	л	и	и	л	л	и	л
0	и	и	л	л	и	и	и
1	л	л	и	и	л	и	и
2	и	л	л	и	л	л	л

Области истинности предикатов выписываются как множества значений переменной, при которых предикат обращается в истинное высказывание:

$T_{A(x)} = \{-2, 0, 2\}$, $T_{B(x)} = \{-2, -1, 0\}$,
$T_{\overline{A(x)}} = \{-1, 1\}$, $T_{\overline{B(x)}} = \{1, 2\}$,
$T_{A(x)\wedge B(x)} = \{-2, 0\}$, $T_{A(x)\Rightarrow B(x)} = \{-2, -1, 0, 1\}$,
$T_{A(x)\Leftrightarrow B(x)} = \{-2, 0, 1\}$.

4. Кванторы

Из определения предиката, следует, что обратить предикат в высказывание можно, подставив конкретное значение переменной. Существует ещё один способ обращения предиката в высказывание. Для построения таких высказываний вводится операция *связывания переменных кванторами*. Различают два типа кванторов: *квантор общности* и *квантор существования*.

Квантор общности вводится словами «для всех x», «для любого x», «для каждого x» и обозначается $\forall x$.

Квантор существования вводится словами «существует такое x, что...», «найдётся такое x, что...», «для некоторого x» и обозначается $\exists x$.

Рассмотрим на множестве X предикат $A(x)$. Он задаёт характеристическое свойство элементов множества. Если это свойство выполнено для всех элементов множества X, то будет истинным высказыванием $(\forall x)A(x)$. Если этим свойством обладают лишь некоторые элементы множества X, то истинным будет высказывание $(\exists x)A(x)$. Например, если X – множество натуральных чисел, предикат $A(x)$: «x – простое число», то высказывание

$(\forall x)A(x)$: «Любое натуральное число x является простым» будет ложным, потому что заданным свойством $A(x)$ обладают не все натуральные числа, а высказывание

$(\exists x)A(x)$: «Существует натуральное число x, которое является простым» будет истинным, потому что в множестве натуральных чисел есть элементы, обладающие заданным характеристическим свойством $A(x)$.

Замечание 1. В формулировках высказываний, содержащих кванторы, переменную x можно опускать.

В теории истинность высказывания, содержащего квантор общности, устанавливается путём доказательства. Чтобы доказать, что высказывание, содержащее квантор общности, ложно, достаточно привести контрпример.

Чтобы установить истинность высказывания с квантором существования, достаточно привести конкретный пример. Ложность такого высказывания устанавливается путём доказательства.

Это связано с тем, что квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции, а квантор существования – как обобщение дизъюнкции. По этой причине *отрицание* высказывания с квантором общности равносильно высказыванию с квантором существования, после которого стоит отрицание предиката.

$\overline{(\forall x)A(x)} \equiv (\exists x)\overline{A(x)}$.

Аналогично, *отрицание* высказывания с квантором существования равносильно выказыванию с квантором общности, после которого стоит отрицание предиката:

$$\overline{(\exists x)A(x)} \equiv (\forall x)\overline{A(x)}$$

Чтобы двуместный предикат обратить в высказывание, нужно связать квантором каждую переменную. При этом возможны варианты:

1. $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$, 5. $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$,

2. $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$, 6. $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$,

3. $(\exists x)(\exists y)A(x,y)$, 7. $(\exists x)(\forall y)A(x,y)$,

4. $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$, 8. $(\forall y)(\exists x)A(x,y)$

Нужно помнить, что высказывания (1) и (2) равносильны, как равносильны высказывания (3) и (4). То есть изменение порядка следования одноименных кванторов не влияет на смысл и значение высказывания. Этого нельзя сказать о высказываниях (5) и (6) и высказываниях (7) и (8) (подробнее см. *задачу* в конце параграфа).

Отрицание высказываний, содержащих два квантора, строится аналогично отрицанию высказывания с одним квантором: *квантор общности меняется на квантор существования, квантор существования – на квантор общности, а вместо предиката берется его отрицание.* Например,

$$\overline{(\exists x)(\forall y)A(x,y)} \equiv (\forall x)(\exists y)\overline{A(x,y)}$$

Замечание 2. Чтобы n-местный предикат обратить в высказывание, нужно связать квантором каждую из n переменных. Если же связать кванторами только k переменных ($k < n$), то в результате получим $(n-k)$-местный предикат.

Замечание 3. Квантор существования имеет ещё одну разновидность, а именно, квантор *существования и единственности.* Он вводится с помощью слов «существует только одно значение x, для которого …» или «существует единственное значение x, для которого…». Обозначают квантор существования и единственности символом $\exists!\,x$.

Приведём пример задачи и её решения

Задача. Обратить данные предикаты в высказывания, используя кванторы, и определить их значения истинности, а также сформулировать отрицания этих высказываний:

а) $A(x)$: «x – прямоугольник » (X – множество фигур плоскости);

б) $A(x,y)$: «$x < y$» (X – множество действительных чисел).

Решение.

а) Сформулируем высказывание с квантором общности:
$(\forall x)A(x)$: «Все фигуры плоскости – прямоугольники».
На плоскости среди фигур имеются треугольники, трапеции, пятиугольники и пр., поэтому высказывание $(\forall x)A(x)$ – ложно.

Отрицание этого высказывания формулируется по правилу: $\overline{(\forall x)A(x)} \equiv (\exists x)\overline{A(x)}$: «Существуют фигуры на плоскости, которые не являются прямоугольниками». Это высказывание *истинно*.

Сформулируем высказывание с квантором существования: $(\exists x)A(x)$: «Существуют фигуры на плоскости, являющиеся прямоугольниками». Это высказывание *истинно*.

Отрицание высказывания $(\exists x)A(x)$ формулируем по правилу: $\overline{(\exists x)A(x)} \equiv (\forall x)\overline{A(x)}$: «Все фигуры плоскости не являются прямоугольниками». Известно, что на плоскости прямоугольники всё-таки присутствуют, значит, последнее высказывание *ложно*.

б) Сначала сформулируем все возможные высказывания.

1. $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$: «Для любого x и любого y выполняется условие $x < y$».
2. $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$: «Для любого y и любого x выполняется условие $x < y$».
3. $(\exists x)(\exists y)A(x,y)$: «Существует x и существует y, такие, что $x < y$».
4. $(\exists y)(\exists x)A(x,y)$: «Существует y и существует x, такие, что $x < y$».
5. $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$: «Для любого x найдётся y, такое, что $x < y$».
6. $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$: «Существует y такое, что для любого x выполняется $x < y$»
7. $(\exists x)(\forall y)A(x,y)$: «Существует x такое, что для любого y выполняется $x < y$».
8. $(\forall y)(\exists x)A(x,y)$: «Для любого y существует x, такое, что $x < y$».

Высказывания (1) и (2) одинаковы по смыслу и ложны.

Высказывания (3) и (4) одинаковы по смыслу и истинны.

Высказывание (5) утверждает, что в множестве действительных чисел отсутствует наибольшее число. Значит, высказывание (5) истинно.

Высказывание (6) утверждает, что в множестве действительных чисел есть наибольшее число. Значит, высказывание (6) ложно.

Видим, что изменение порядка следования разноимённых кванторов привело к изменению смысла высказывания.

Высказывание (7) утверждает, что в множестве действительных чисел есть наименьшее число. Значит, высказывание (7) ложно.

Высказывание (8) утверждает, что в множестве действительных чисел отсутствует наименьшее число. Значит, высказывание (8) истинно.

Отрицания этих высказываний формулируем по правилам.

1. $\overline{(\forall x)(\forall y)A(x,y)} \equiv (\exists x)(\exists y)\overline{A(x,y)}$: «Существует x и существует y, такие, что выполняется условие $x \geq y$».

2. $\overline{(\forall y)(\forall x)A(x,y)} \equiv (\exists y)(\exists x)\overline{A(x,y)}$: «Существует y и существует x, такие, что выполняется условие $x \geq y$».

Высказывания (1) и (2) одинаковы по смыслу и истинны.

3. $\overline{(\exists x)(\exists y)A(x,y)} \equiv (\forall x)(\forall y)\overline{A(x,y)}$: «Для любого x и любого y выполняется условие $x \geq y$».

4. $\overline{(\exists y)(\exists x)A(x,y)} \equiv (\forall y)(\forall x)\overline{A(x,y)}$: «Для любого y и любого x выполняется условие $x \geq y$».

Высказывания (3) и (4) одинаковы по смыслу и ложны.

5. $\overline{(\forall x)(\exists y)A(x,y)} \equiv (\exists y)(\forall x)\overline{A(x,y)}$: «Существует x, такое, что для любого y выполняется $x \geq y$».

Это высказывание ложно, потому что утверждает, что в множестве действительных чисел существует наибольший элемент.

6. $\overline{(\exists y)(\forall x)A(x,y)} \equiv (\forall y)(\exists x)\overline{A(x,y)}$: «Для любого y существует x такое, что выполняется $x \geq y$».

Это высказывание истинно, поскольку утверждает, что в множестве действительных чисел нет наибольшего элемента.

7. $\overline{(\exists x)(\forall y)A(x,y)} \equiv (\forall x)(\exists y)\overline{A(x,y)}$: «Для любого x существует y такое, что выполняется $x \geq y$».

Это высказывание истинно, потому что утверждает, что в множестве действительных чисел нет наименьшего элемента.

8. $(\forall y)(\exists x)A(x,y) \equiv (\exists y)(\forall x)A(x,y)$: «Существует y, такое, что для любого x выполняется $x \geq y$».

Это высказывание ложно, потому что утверждает, что в множестве действительных чисел присутствует наименьший элемент.

5. Отношения логического следования и равносильности. Необходимые и достаточные условия

Часто встречаются такие предикаты, что для всех значений переменной $x \in X$ истинность одного определяет истинность другого. Например, рассмотрим предикаты $A(x)$: «$x > 5$» и $B(x)$: «$x > 2$». Здесь как только выбираем значение переменной, при котором $A(x)$ обращается в истинное высказывание (при $x_1 = 10$, например), то при этом значении переменной и предикат $B(x)$ обращается в истинное высказывание. В таком случае говорят, что предикаты находятся в *отношении логического следования* и записывают: $A(x) \vdash B(x)$.

Последняя запись может быть прочитана как:

– из предиката $A(x)$ следует предикат $B(x)$,
– предикат $B(x)$ следует из предиката $A(x)$,
– предикат $B(x)$ является следствием предиката $A(x)$,
– для всех значений x, если $A(x)$, то $B(x)$.

Определение. Два предиката находятся в *отношении логического следования* в том случае, когда при всех значениях переменной, обращающих первый предикат в истинное высказывание, второй предикат также обращается в истинное высказывание. Для этого нужно, чтобы высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ было истинным:

$$\big(A(x) \vdash B(x)\big) \Leftrightarrow \big((\forall x)A(x) \Rightarrow B(x) - \text{"и"}\big)$$

Высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ построено на основе импликации, поэтому часто отношение логического следования тоже обозначают как импликацию. Однако не всякая импликация предикатов определяется как логическое следование этих предикатов. Здесь существенно условие, которому должны подчиняться области истинности предикатов, находящихся в отношении логического следования. Если второй предикат обращается в истинное высказывание при *всех* значениях переменной, для которых первый предикат обращается в истинное высказывание, значит, область истинности первого предиката должна быть подмножеством области истинности второго.

$$\big(A(x) \vdash B(x)\big) \Leftrightarrow (T_{A(x)} \subset T_{B(x)}).$$

Итак, два предиката находятся в отношении логического следования $\big(A(x) \vdash B(x)\big)$ тогда и только тогда, когда:

$B(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях переменной, при которых $A(x)$ обращается в истинное высказывание,

или

истинно высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$,

или

$T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$.

При решении задач может быть использовано любое из приведённых условий.

Замечание. Там, где не будет двойного истолкования, отношение логического следования будем обозначать как импликацию.

Среди свойств отношения логического следование отметим:

1°. Свойство рефлексивности. Любой предикат находится в отношении логического следования с самим собой: $A(x) \vdash A(x)$;

2°. Свойство транзитивности. Если из предиката $A(x)$ следует $B(x)$ и из $B(x)$ следует $C(x)$, то из предиката $A(x)$ следует $C(x)$: $\big(A(x) \vdash B(x) \wedge B(x) \vdash C(x)\big) \Rightarrow (A(x) \vdash C(x))$.

Если имеет место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$, то предикат $A(x)$ называют *достаточным условием* для $B(x)$, а предикат $B(x)$ – *необходимым условием* для $A(x)$.

Поэтому предложение $A(x) \vdash B(x)$ может быть прочитано ещё и так:

– для $B(x)$ достаточно $A(x)$;

– для $A(x)$ необходимо $B(x)$.

Если имеют место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ и одновременно логическое следование $B(x) \vdash A(x)$, то говорят, что предикаты $A(x)$ и $B(x)$ находятся в *отношении равносильности* (или предикаты $A(x)$ и $B(x)$ равносильны) и обозначают $A(x) \equiv B(x)$:

$$\big(A(x) \equiv B(x)\big) \Leftrightarrow \big(A(x) \vdash B(x) \wedge B(x) \vdash A(x)\big).$$

Если $A(x) \vdash B(x)$, то $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$. (1)

Если $B(x) \vdash A(x)$, то$T_{B(x)} \subset T_{A(x)}$. (2)

Если $A(x) \equiv B(x)$, то условия (1) и (2) должны выполняться одновременно, а это значит, что $T_{A(x)} = T_{B(x)}$. Поэтому можно говорить, что предикаты равносильны тогда и только тогда, когда их области истинности равны: $\big(A(x) \equiv B(x)\big) \Leftrightarrow (T_{A(x)} = T_{B(x)})$.

Из свойств отношения равносильности отметим следующие:

1°. Свойство рефлексивности. Каждый предикат равносилен самому себе: $A(x) \equiv B(x)$.

2°. Свойство симметричности. Если предикат $A(x)$ равносилен предикату $B(x)$, то и предикат $B(x)$ равносилен предикату $A(x)$: $\big(A(x) \equiv B(x)\big) \Leftrightarrow \big(B(x) \equiv A(x)\big)$;

3°. Свойство транзитивности. Если предикат $A(x)$ равносилен предикату $B(x)$ и предикат $B(x)$ равносилен предикату $C(x)$, то предикат $A(x)$ равносилен предикату $C(x)$: $(A(x) \equiv B(x) \wedge B(x) \equiv C(x)) \Rightarrow \big(A(x) \equiv C(x)\big)$.

Рассмотрим примеры задач и их решений

Задача 1. Проверить, находятся ли предикаты $A(x)$: «Фигура x – прямоугольник" и $B(x)$: «Фигура x – квадрат» в отношении логического следования. Если предикаты находятся в отношения логического следования, то сформулировать полученное предложение разными способами.

Решение.

Шаг 1. Проверим, имеет ли место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$.

Для этого должно быть *истинным* высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$: «Любая фигура, если она является прямоугольником, то она является и квадратом». На плоскости существуют прямоугольники, которые не являются квадратами. Поэтому сформулированное высказывание является *ложным*, и логическое следование $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ не имеет места.

Шаг 2. Проверим, имеет ли место логическое следование $B(x) \vdash A(x)$. Для этого должно быть истинным высказывание $(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$: «Любая фигура, если она является квадратом, то она является и прямоугольником». Сформулированное высказывание является *истинным*: действительно, все квадраты являются прямоугольниками, $T_{B(x)} \subset T_{A(x)}$. Значит, логическое следование $B(x) \vdash A(x)$ имеет место.

Шаг 3. Полученное предложение можно сформулировать разными способами:

1. Из того, что фигура является квадратом, следует, что она является прямоугольником.
2. Условие "быть прямоугольником" является следствием условия «быть квадратом».
3. Все квадраты являются прямоугольниками.
4. Для того, чтобы фигура была квадратом, *необходимо*, чтобы она была прямоугольником.
5. Для того, чтобы фигура была прямоугольником, *достаточно,* чтобы она была квадратом.

Последние две формулировки используют определения необходимого условия и достаточного условия.

Задача 2. Вместо многоточия вставить слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученное предложение было истинным. Ответ обосновать.

а) Для того, чтобы число делилось на 4, ... , чтобы оно делилось на 2.

б) Для того, чтобы элемент не принадлежал разности множеств A и B, ... , чтобы он не принадлежал множеству A.
в) Для того, чтобы ромб был квадратом, ... , чтобы диагонали в ромбе были равны.
г) Для того, чтобы импликация двух высказываний была истинной, ..., чтобы второе высказывание было ложным.

Решение.

а) Для того, чтобы число делилось на 4, .?. , чтобы оно делилось на 2.

В предложении использованы два предиката:

$A(x)$: «Число x делится на 4»

$B(x)$: «Число x делится на 2».

По структуре предложения нужно определить, каким условие $B(x)$ является для условия $A(x)$.

Проверим условие $B(x)$ на *достаточность* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $B(x) \vdash A(x)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывание: $(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$: «Для любого числа, если оно делится на 2, то оно делится и на 4».

Это высказывание ложно, потому что существуют числа, которые делятся на 2, но не делятся на 4 (например, число 6. Тогда $B(6)$ – «и», $A(6)$ – «л» и $B(6) \Rightarrow A(6)$ – «л». Значит, импликация $B(x) \Rightarrow A(x)$ не может быть истинной для всех значений x).

Таким образом, логическое следование $B(x) \vdash A(x)$ не имеет места, и $B(x)$ не может быть достаточным условием для условия $A(x)$.

Проверим теперь условие $B(x)$ *на необходимость* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывания: $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$: «Для любого числа, если оно делится на 4, то оно делится и на 2».

Это высказывание истинно, поскольку все числа, кратные 4, кратны и 2, $T_{B(x)} \subset T_{A(x)}$.

Значит, логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ имеет место, и $B(x)$ является *необходимым* условием для условия $A(x)$.

Данное в условии задачи предложение должно быть сформулировано так: «Для того, чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно делилось на 2».

б) Для того, чтобы элемент не принадлежал разности множеств A и B, .?. , чтобы он не принадлежал множеству A.

В предложении использованы два предиката:

$A(x)$: «Элемент x не принадлежит разности множеств A и B»,

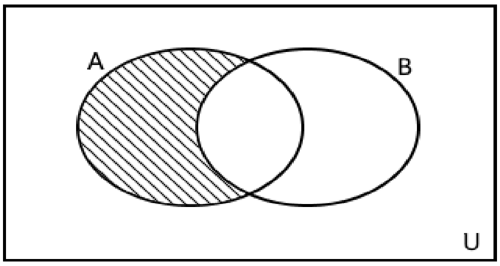
$B(x)$: «Элемент x не принадлежит множеству A».

По структуре предложения нужно определить, каким условие $B(x)$ является для условия $A(x)$.

Проверим условие $B(x)$ *на достаточность* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $B(x) \vdash A(x)$. Проверим, так ли это.

Сформулируем высказывание: $(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$: «Для любого элемента x, если он не принадлежит множеству A, то он не принадлежит и разности множеств A и B».

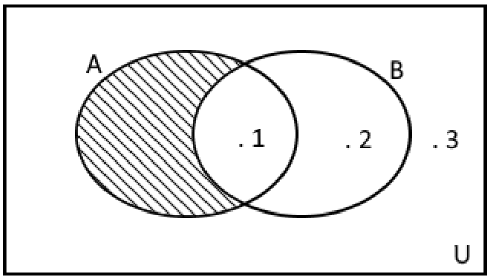


Это высказывание *истинно*. В самом деле, если элемент не принадлежит множеству A, то он не может попасть в заштрихованную на диаграмме область, определяющую разность множеств A и B.

Таким образом, логическое следование $B(x) \vdash A(x)$ имеет место, и $B(x)$ является *достаточным* условием для условия $A(x)$.
Проверим теперь условие $B(x)$ на *необходимость* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывание: $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$: «Для любого элемента x, если он не принадлежит множеству A, то он не принадлежит и разности множеств A и B».

Это высказывание ложно. В самом деле, чтобы элемент x не принадлежал разности множеств A и B, нужно, чтобы элемент не попал в заштрихованную область. При этом возможны ситуации 1, 2 и 3, см. рисунок.



Видим, что в ситуации 1 условие $A(x)$ выполнено, а условие $B(x)$ – нет.

Значит, высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ не может быть истинным для всех значений x, и логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ не имеет места. Поэтому условие $B(x)$ не является необходимым для условия $A(x)$. Данное в условии задачи предложение должно быть сформулировано следующим образом: «Для того, чтобы элемент не принадлежал разности множеств A и B, *достаточно,* чтобы он не принадлежал множеству A».

в) Для того, чтобы ромб был квадратом, .?. , чтобы диагонали в ромбе были равны.

В предложении использованы два предиката:

$A(x)$: "Ромб x - квадрат",

$B(x)$: "В ромбе x диагонали равны".

По структуре предложения нужно определить, каким условие $B(x)$ является для условия $A(x)$.

Проверим условие $B(x)$ *на достаточность* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $B(x) \vdash A(x)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывание: $(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$: «Для любого ромба, если он является квадратом, то диагонали в нём равны».

Это высказывание *истинно*, потому что не существует квадрата, в котором были бы разные диагонали.

Таким образом, логическое следование $B(x) \vdash A(x)$ имеет место, и $B(x)$ является *достаточным* условием для условия $A(x)$.

Проверим теперь условие $B(x)$ *на необходимость* для условия $A(x)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывание: $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ и определим его значение истинности.

$(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$: «Для любого ромба, если диагонали в нём равны, то он является квадратом».

Это высказывание *истинно*, поскольку все ромбы с равными диагоналями являются квадратами.

Значит, логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ имеет место, и $B(x)$ является *необходимым* условием для условия $A(x)$.

Данное в условии задачи предложение должно быть сформулировано так: «Для того, чтобы ромб был квадратом, *необходимо и достаточно*, чтобы диагонали в ромбе были равны».

г) Для того, чтобы импликация двух высказываний была истинной, .?., чтобы второе высказывание было ложным.

В предложении использованы два предиката:

$A(X, Y)$: «Импликация высказываний X и Y истинна»,

$B(Y)$: «Высказывание Y ложно».

По структуре предложения нужно определить, каким условие $B(Y)$ является для условия $A(X, Y)$.

Проверим условие $B(Y)$ *на достаточность* для условия $A(X, Y)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $B(Y) \vdash A(X, Y)$. Проверим, так ли это. Сформулируем высказывание: $(\forall X)(\forall Y)B(Y) \Rightarrow A(X, Y)$ и определим его значение истинности.

$(\forall X)(\forall Y)B(Y) \Rightarrow A(X, Y)$: «Для любых высказываний X и Y, если высказывание Y ложно, то импликация высказываний X и Y истинна».

X	Y	$X \Rightarrow Y$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Это высказывание *ложно.* Чтобы в этом убедиться, нужно посмотреть на таблицу истинности импликации высказываний (во второй строке).

Таким образом, логическое следование $B(Y) \vdash A(X, Y)$ не имеет места, и условие $B(Y)$ не является достаточным условием для условия $A(X, Y)$.

Проверим теперь условие $B(Y)$ на необходимость для условия $A(X, Y)$. В этом случае должно иметь место логическое следование $A(X, Y) \vdash B(Y)$. Проверим это. Сформулируем высказывание: $(\forall X)(\forall Y)A(X, Y) \Rightarrow B(Y)$ и определим его значение истинности.

$(\forall X)(\forall Y)A(X, Y) \Rightarrow B(Y)$: «Для любых высказываний X и Y, если импликация высказываний X и Y истинна, то высказывание Y ложно».

X	Y	$X \Rightarrow Y$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Это высказывание ложно. Убедиться в этом опять поможет таблица истинности импликации высказываний (первая и третья строчки).

Значит, и логическое следование $A(X, Y) \vdash B(Y)$ не имеет места, и $B(Y)$ не является необходимым условием для условия $A(X, Y)$.

Поскольку выделенные условия *не связаны отношением логического следования*, вписать вместо многоточия указанные в условии задачи слова невозможно.

6. Строение и виды теорем

Каждая математическая теория представляет собой множество предложений. Среди них выбираются заведомо истинные, которые называются *аксиомами.* Все остальные предложения этой теории не должны противоречить аксиомам и являться их следствиями. Понятие логического следования позволяет уточнить вопросы, связанные с предложениями, которые в математике называют теоремами.

<u>Определение.</u> *Теорема* – это математическое предложение, истинность которого доказывается на основе аксиом или же других предложений этой теории, доказанных раннее.

Большинство теорем формулируются как импликация предикатов, которая является истинной для всех значений переменной – то есть в виде предложения $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$. В любой теореме выделяют

– условие $A(x)$ теоремы,
– заключение $B(x)$ теоремы,
– разъяснительную часть теоремы.

В *разъяснительной части* теоремы описывается множество объектов, для которых формулируется эта теорема, в *условии* теоремы устанавливаются данные факты, в *заключении* записываются факты, требующие доказательства.

Заметим, что в словесной формулировке разъяснительная часть обычно опускается, но она всегда подразумевается, и при работе с теоремами её нужно выделять.

Например, определим строение теоремы «Во всяком прямоугольнике диагонали равны». В этой теореме условием является предикат $A(x)$: «Четырёхугольник x – прямоугольник», заключением является предикат $B(x)$: «В четырёхугольнике x диагонали равны», разъяснительная часть должна описывать множество X, из которого выбираются элементы x. Значит, множество X – это множество четырёхугольников плоскости. Формула этой теоремы имеет вид: $(\forall x \in X)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$, и поэтому более точной с точки зрения строения теоремы является формулировка: «Для любого четырёхугольника, если он является прямоугольником, то диагонали в нём равны».

Замечание 1. Истинность предложения $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ определяет логическое следование $A(x) \vdash B(x)$. Значит, в любой теореме условие и заключение связаны отношением логического следования, и любая теорема может быть сформулирована с использованием терминов «необходимое условие» или «достаточное условие».

Замечание 2. Для импликации высказываний $A \Rightarrow B$ (как и для импликации предикатов $A(x) \Rightarrow B(x)$) определяются ещё три импликации:

– обратная: $B \Rightarrow A$;

– противоположная: $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$;

– обратная противоположной $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$.

В силу закона контрапозиции являются равносильными импликации прямая и обратная противоположной:

$A \Rightarrow B \;\equiv\; \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$,

а также обратная и противоположная:

$B \Rightarrow A \;\equiv\; \bar{A} \Rightarrow \bar{B}$.

Доказательство равносильности этих импликаций легко проводится с использованием таблиц истинности (см. параграф 2 настоящей главы).

Теперь можно утверждать, что и с любой теоремой $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ будут связаны ещё три предложения:

– предложение, обратное теореме: $(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$ (поменяли местами условие и заключение прямой теоремы). Если это предложение будет *истинным*, то оно определит *теорему, обратную данной*.

– предложение, противоположное теореме: $(\forall x)\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$ (взяли отрицание условия и отрицание заключения). Если это предложение будет *истинным*, то оно определит *теорему, противоположную данной*.

– предложение, обратное противоположной теореме: $(\forall x)\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ (взяли отрицание условия, отрицание заключения и поменяли местами). Это предложение будет истинным, поскольку равносильно прямой теореме, а она истинна. Значит, предложение $(\forall x)\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$ определяется как *теорема, обратная противоположной.*

Замечание 3. Если истинны прямая и обратная теоремы, то условие и заключение прямой теоремы связаны логическими следованиями

$A(x) \vdash B(x)$ и $B(x) \vdash A(x)$. Это значит, что условие $A(x)$ является необходимым и достаточным для $B(x)$ и наоборот. В таком случае теорема формулируется как необходимый и достаточный признак, или использует в формулировке слова «тогда и только тогда, когда…».

Приведём пример задачи и её решения

Задача. В данной теореме выделить условие, заключение, разъяснительную часть. Сформулировать предложения обратное, противоположное, обратное противоположному и выяснить, являются ли они теоремами.

а) В прямоугольном теугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$.

б) Сумма двух чётных натуральных чисел чётна.

Решение.

а) В данной теореме (теореме Пифагора) *условием* является предикат $A(x)$: «Фигура x – прямоугольный треугольник», *заключением* является предикат $B(x)$: «В треугольнике x сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$». *Разъяснительная часть* описывает множество X как множество треугольников плоскости. Уточним формулировку с точки зрения строения теоремы:

$(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$: «Для любого треугольника плоскости, если он прямоугольный, то в нём сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$».

Теперь сформулируем предложения обратное, противоположное, обратное противоположному и выясним, являются ли они теоремами.

Предложение, обратное теореме:

$(\forall x)B(x) \Rightarrow A(x)$: «Для любого треугольника плоскости, если в нём сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы: $a^2 + b^2 = c^2$, то он является прямоугольным».

Чтобы это предложение было теоремой, нужно, чтобы оно было *истинно.* Истинность этого предложения устанавливается на основе теоремы косинусов. Значит, предложение, обратное данной теореме, является *теоремой, обратной данной.*

Если истинны прямая и обратная теоремы, то имеем дело с признаком. Поэтому будут верными предложения:

– Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы для его сторон имело место соотношение: $a^2 + b^2 = c^2$.

– Треугольник будет прямоугольным тогда и только тогда, когда для его сторон имеет место соотношение: $a^2 + b^2 = c^2$.

Предложение, противоположное теореме:

$(\forall x)\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$: «Для любого треугольника, если он не является прямоугольным, то для его сторон: $a^2 + b^2 \neq c^2$».

Это предложение определяется как *теорема, противоположная данной* (в силу равносильности с обратной теоремой).

Предложение, обратное противоположной теореме:

$(\forall x)\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$: «Для любого треугольника если для его сторон $a^2 + b^2 \neq c^2$, то треугольник не является прямоугольным».

Это предложение определяется как теорема, обратная противоположной, в силу равносильности с данной теоремой.

б) В данной теореме условием будет предикат $A(x, y)$: «x – чётное число и y – чётное число» , заключением является предикат $B(x, y)$: «$x + y$ – чётное число», разъяснительная часть описывает множество, из которого выбираются значения x и y, как множество натуральных чисел. Уточним формулировку с точки зрения строения теоремы:

$(\forall x)(\forall y)A(x, y) \Rightarrow B(x, y)$: ‹‹Для любых двух натуральных чисел, если они чётные, то и их сумма – чётная››.

Теперь сформулируем предложения обратное, противоположное, обратное противоположному и выясним, являются ли они теоремами.

Предложение, обратное теореме:

$(\forall x)(\forall y)B(x, y) \Rightarrow A(x, y)$: «Для любых двух натуральных чисел, если их сумма является чётной, то и сами числа являются чётными».

Чтобы это предложение было теоремой, нужно, чтобы оно было истинно. Но это не так. Например, чётное число 8 можно представить в виде суммы двух слагаемых, не являющихся чётными: 8=3 +5. Поэтому сформулированное предложение не выполняется <u>для всех</u> натуральных чисел. Значит, предложение, обратное данной теореме ложно и <u>не является теоремой.</u>

Предложение, противоположное теореме:

$(\forall x)(\forall y)\overline{A(x, y)} \Rightarrow \overline{B(x, y)}$: ‹‹Для любых двух натуральных чисел, если хотя бы одно из них не является чётным, то и сумма их не является чётной››.

Это предложение ложно (в силу равносильности с обратным) и не является теоремой.

Предложение, обратное противоположной теореме:

$(\forall x)(\forall y)\overline{B(x,y)} \Rightarrow \overline{A(x,y)}$: «Для любых двух натуральных чисел, если их сумма не является четной, то не является чётным хотя бы одно из этих чисел».

Это предложение определяется как *теорема, обратная противоположной*, в силу равносильности с данной теоремой.

Замечание 4. При формулировке отрицания предиката $A(x,y)$ «x – чётное число и y – чётное число» использовали закон де Моргана, по которому строится отрицание конъюнкции. В самом деле, $\overline{A(x,y)}$: «Неверно, что x – чётное число и y – чётное число», что по закону де Моргана равносильно предложению: «x – нечётное число или y – нечётное число». Последнее предложение равносильно сформулированному в теореме: «Хотя бы одно из чисел не является чётным» (что не исключает варианта, когда нечётными являются оба числа).

7. Правильные умозаключения

Большую часть общих знаний об окружающей действительности человек получает с помощью рассуждений. Знание будет истинным, если оно получено путем правильного рассуждения, а такими считают рассуждения, построенные по правилам логики. В логике вместо термина «рассуждение» чаще используют «умозаключение». Тема «Правильные умозаключения» является завершающей в главе «Математические предложения и их структуры». Анализ заданий по этой теме основан на понятиях «отношения между множествами» и «отношение логического следования», требует практического навыка в решении задач на множествах и умения в составлении таблиц истинности для высказываний и предикатов.

Техникой проверки умозаключений на предмет правильности стремятся овладеть не только математики и учителя, но и юристы, экономисты, психологи. Значимость вопроса связана с логическим анализом событий в конкретной научной области, с умением последовательно выстраивать какой-либо процесс, учитывая вариативность ситуаций, давать однозначный ответ об истинности (или ложности) заключения.

Определение. *Умозаключение* – это форма мышления или логическое действие, в результате которого из одного или нескольких определенным образом связанных суждений получается новое суждение, в котором содержится новое знание.

Умозаключение состоит из посылок и заключения. *Посылки* A_1, A_2, …, A_n– это суждения или высказывания, содержащие исходные знания. *Заключение* B – это суждение или высказывание, содержащее новое знание, полученное из исходных. В математической логике подробно изучаются классификации умозаключений по различным основаниям, а также всевозможные виды умозаключений. Ограничимся здесь рассмотрением лишь дедуктивных умозаключений.

Определение. *Дедуктивным* называется умозаключение, в котором посылки и заключение находятся в отношении логического следования: $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \vdash B$. Общепринятой для такого умозаключения является запись $\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$, где черта дроби отделяет посылки от заключения и читается как «следовательно», «значит». Дедуктивные умозаключения строятся на основе логического следования, поэтому истинность посылок в них должна гарантировать истинность заключения. Но как строить такие умозаключения и определять их правильность?

В логике считают, что правильность умозаключения определяется его формой и не зависит от конкретного содержания входящих в него утверждений. Логика предлагает так называемые *правила вывода* или *схемы дедуктивных умозаключений*. Именно по этим правилам и строятся дедуктивные умозаключения. Самыми популярными из множества схем считаются:

правило заключения
$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), A(a)}{B(a)}$$

правило отрицания
$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), \overline{B(a)}}{\overline{A(a)}}$$

правило контрапозиции
$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)}{(\forall x)\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}}$$

правило силлогизма
$$\frac{(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x), B(x) \Rightarrow C(x)}{(\forall x)A(x) \Rightarrow C(x)}$$

При записи этих правил использованы *общие* посылки (вида $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$) и *частные* посылки (вида $A(a)$ или $\overline{B(a)}$). Общей посылкой может быть теорема, определение или любое логическое следование. Частная посылка получается при подстановке конкретных значений переменной.

Рассмотрим пример задачи и её решения

Задача 1. Привести примеры конкретных рассуждений с использованием правил заключения, отрицания, контрапозиции и силлогизма.

Решение.

1. Рассуждение с использованием правила заключения: «Если четырехугольник – прямоугольник, то в нем диагонали равны. Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник. Значит, диагонали в четырехугольнике $ABCD$ равны».

Здесь $A(x)$: «Четырехугольник x – прямоугольник», $B(x)$: «В четырехугольнике x диагонали равны», $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x)$: «В любом прямоугольнике диагонали равны», a – $ABCD$, $A(a)$: «Четырехугольник $ABCD$ – прямоугольник», $B(a)$: «Диагонали в четырехугольнике $ABCD$ равны».

2. Рассуждение с использованием правила отрицания: «Равные треугольники имеют равные площади. Площади треугольников ABC и KLM различны. Значит, треугольники ABC и KLM не равны».

Здесь $A(x,y)$: «Треугольник x равен треугольнику y», $B(x,y)$: «$S_x = S_y$», $(\forall x,y)\, A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$: «Все равные треугольники имеют равные площади», a – ABC, $b - KLM$, $\overline{B(a,b)}$: «$S_{ABC} \neq S_{KLM}$», $\overline{A(a,b)}$: «Треугольники ABC и KLM не равны».

3. Рассуждение с использованием правила контрапозиции: «Все квадраты являются прямоугольниками. Следовательно, все фигуры, не являющиеся прямоугольниками, не являются и квадратами».

Здесь $A(x)$: «x – квадрат», $B(x)$: «x – прямоугольник», $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x)$: «Все квадраты являются прямоугольниками», $\overline{B(x)}$: «x – не прямоугольник», $\overline{A(x)}$: «x – не квадрат», $(\forall x)\, \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$: «Все фигуры, не являющиеся прямоугольниками, не являются и квадратами».

4. Рассуждение с использованием правила силлогизма: «Все квадраты являются ромбами. Все ромбы имеют взаимно перпендикулярные диагонали. Следовательно, все квадраты имеют взаимно перпендикулярные диагонали».

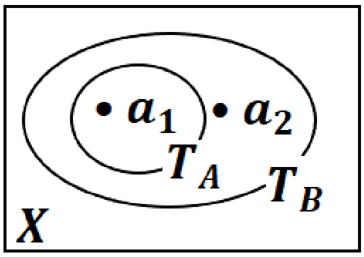
Здесь $A(x)$: «x – квадрат», $B(x)$: «x – ромб», $C(x)$: «x – имеет взаимно перпендикулярные диагонали» $(\forall x)\, A(x) \Rightarrow B(x)$: «Все квадраты являются ромбами» $(\forall x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$: «Все ромбы имеют взаимно перпендикулярные диагонали», $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$: «Все квадраты имеют взаимно перпендикулярные диагонали».

Замечание 1. Рассуждения, проведенные по схемам, являются правильными. Если же схема рассуждения не совпадает с приведенными, то требуется установить правильность такого рассуждения. При этом нужно убедиться, что истинность посылок гарантирует истинность заключения (т.е. не должно быть ситуации, когда посылки истинны, а заключение ложно). Для проверки правильности рассуждения часто используют круги Эйлера.

Задача 2. Проверить, являются ли рассуждения правильными: а) Всякое целое число, если оно оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5. Число 1845 делится на 5. Следовательно, 1845 оканчивается цифрой 5; б) Все прямоугольники являются параллелограммами. Некоторые параллелограммы имеют равные стороны. Следовательно, некоторые прямоугольники имеют равные стороны.

Решение: а) Данное рассуждение проведено по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}$. Здесь $A(x)$: «Число x оканчивается цифрой 5», $B(x)$: «Число x делится на 5», $a = 1845$.

Полученная схема рассуждения не совпадает с приведенными правилами. Поэтому нужно проверить, будет ли оно правильным: всегда ли при истинных посылках в рассуждении по этой схеме гарантировано истинное заключение. Проверку осуществим на кругах Эйлера. Учитывая, что $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$ – истинное высказывание, то имеет место логическое следование $A(x) \vdash B(x)$ и $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$.



Вторая посылка $B(a)$ тоже должна быть истинной, тогда $a \in T_{B(x)}$. Чтобы заключение было истинным, нужно, чтобы $a \in T_{A(x)}$. Всегда ли будет так? Изобразив на кругах Эйлера условия, определяющие истинность посылок, видим, что элемент a может быть выбран двумя способами (см. рисунок). В первом случае $a_1 \in T_{A(x)}$ и заключение истинно. Но есть и второй случай, при котором $a_2 \notin T_{A(x)}$, это значит, что при истинных посылках не получим истинного заключения. Вывод: рассуждение по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x), B(a)}{A(a)}$ не является правильным.

Замечание 2. Если в качестве элемента a выбрать не число 1845, а, например, число 1840, то становится понятным сразу, что из истинных посылок выводится ложное заключение, и такое рассуждение не может быть правильным. В этом случае $a_1 = 1845$ соответствует ситуации 1, $a_2 = 1840$ – ситуации 2.

б) Введем условия $A(x)$: «x – прямоугольник», $B(x)$: «x – параллелограмм», тогда первая посылка «Все прямоугольники являются параллелограммами» имеет структуру $(\forall x)\ A(x) \Rightarrow B(x)$. Далее условие $C(x)$: «x – имеет равные стороны», вторая посылка «Некоторые параллелограммы имеют равные стороны» структуры $(\exists x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$. Заключение «Некоторые прямоугольники имеют равные стороны» структуры $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$. Получается схема рассуждения вида $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x), (\exists x)\ B(x)\Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x)\Rightarrow C(x)}$.

Проверку истинности этого рассуждения проведем на кругах Эйлера.

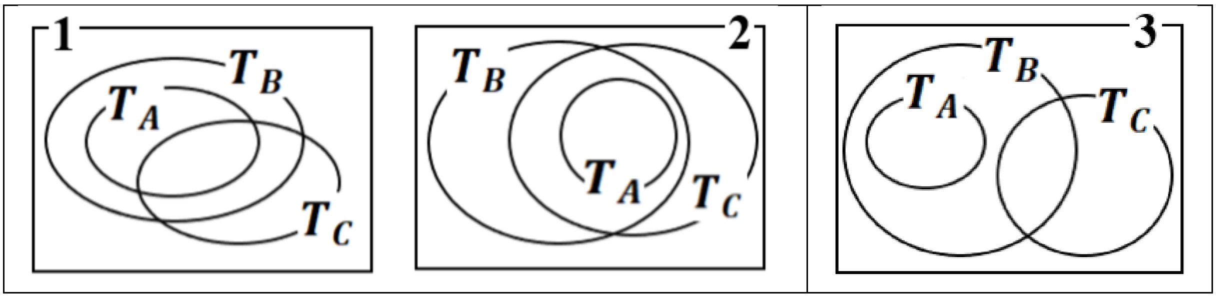
Определим условия, гарантирующие истинность посылок.

– Высказывание $(\forall x)A(x) \Rightarrow B(x)$ – истинно, значит, $T_{A(x)} \subset T_{B(x)}$.

– Высказывание $(\exists x)\ B(x) \Rightarrow C(x)$ – истинно, значит, $T_{B(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$.

Чтобы высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ было истинным, нужно чтобы $T_{A(x)} \cap T_{C(x)} \neq \emptyset$. Будет ли всегда так?

Изобразим на кругах Эйлера условия, гарантирующие истинность посылок:



На рисунке видно, что в первом и втором случаях высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ истинно, в третьем случае это высказывание $(\exists x)\ A(x) \Rightarrow C(x)$ ложно.

Значит, рассуждение, проведенное по схеме $\frac{(\forall x)A(x)\Rightarrow B(x), (\exists x)\ B(x)\Rightarrow C(x)}{(\exists x)\ A(x)\Rightarrow C(x)}$, может привести к ложному выводу и не является правильным.

Замечание 3. Если выбрать условия $B(x)$: «x – четырехугольник» и $C(x)$: «Многоугольник x содержит угол $30°$», то легко убедиться, что рассуждение, проведенное по указанной схеме, не является правильным, потому что из истинных посылок выводится ложное заключение: «Все прямоугольники являются четырехугольниками. Некоторые четырехугольники содержат угол $30°$. Следовательно, некоторые прямоугольники содержат угол $30°$».

Замечание 4. Изучены правильные дедуктивные умозаключения на примере задач математического содержания. В других областях знаний точно так же, как в задаче 1, можно строить умозаключения, и, аналогично задаче 2, определять структурные единицы рассуждений, проводить анализ логического следования заключения из посылок, делать вывод о правильности умозаключения.

Завершая главу о математических предложениях и их структурах, предлагается определить правило вывода, по которому выстроено следующее рассуждение: «Умозаключения, являясь одной из форм логического мышления, формируют мыслительную деятельность. «Мысли правят миром», – утверждал великий мыслитель древности Платон. Значит, умозаключения отчасти правят миром!»

8. Вопросы для собеседования по теме «Множества и математические предложения»

1. Множество A – это множество цветов светофора. Перечислите всевозможные подмножества множества A. Сколько таких подмножеств?

2. В классе 24 ученика, из которых: 15 мальчики, 17 – имеют темные волосы и есть 2 блондинки. Сколько в классе мальчиков-брюнетов?

3. С точки зрения логики, дайте название следующему предложению: «Натуральное число x является чётным». Что можно сказать о значении истинности данного предложения? Изменится ли значение истинности этого предложения в случае формулировки: «Некоторые натуральные числа являются чётными». Осталось ли прежним название математического предложения?

4. С точки зрения логики, дайте название следующему предложению: «Натуральное число x является двузначным». Что можно сказать о значении истинности данного предложения? Сформулируйте отрицание этого предложения, определите его значение истинности. Как связано построенное отрицание с предложением: «Все натуральные числа являются двузначными?

5. С точки зрения логики, дайте название следующему предложению: «Натуральное число x является простым». Что можно сказать о значении истинности данного предложения? Сформулируйте отрицание этого предложения, определите его значение истинности. Как связано построенное отрицание с предложением: «Некоторые натуральные числа являются простыми»?

6. С точки зрения логики, дайте название следующему предложению: «Натуральное число x является нечётным». Что можно сказать о значении истинности данного предложения? Сформулируйте отрицание этого предложения, определите его значение истинности. Как связано построенное отрицание с предложением: «Любое натуральное число является нечётным»?

7. С точки зрения логики, дайте название следующему предложению: «Натуральное число x является составным». Что можно сказать о значении истинности данного предложения? Изменится ли зна-

чение истинности этого предложения в случае формулировки: «Существуют простые натуральные числа». Осталось ли прежним название математического предложения?

8. В классе 22 ученика, из которых: 13 девочки, 17 – имеют темные волосы и есть 2 блондина. Сколько в классе девочек-брюнеток?

9. Решите неравенство $2x+3>5$. Какое отношение имеет данное задание к изученным Вами темам дисциплины Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов?

10. Решите уравнение $2x-3=5$. Охарактеризуйте данное задание с точки зрения усвоенных Вами тем в теории множеств и математической логике при изучении дисциплины Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов?

11. В каком отношении находится множество прямоугольников с множеством параллелограммов?

12. В каком отношении находится множество ромбов с множеством параллелограммов?

13. В каком отношении находятся множества квадратов, прямоугольников и ромбов?

14. В каком отношении находятся множества прямоугольников, ромбов и параллелограммов?

15. Приведите пример высказывания. Сформулируйте теперь это высказывание так, чтобы оно имело другое значение истинности.

16. Сформулируйте известные Вам законы операции пересечения множеств. Продемонстрируйте доказательство одного из них на диаграмме Эйлера-Венна.

17. Какие законы в математике называются дистрибутивными? Приведите пример одного дистрибутивного закона для операций над множествами или для логических операций. (Информация для сведения. Дистрибути́вность: от лат. *Distributivus* – «распределительный», также *распределительный закон* – свойство согласованности двух бинарных операций, определённых на одном и том же множестве)

18. Сформулируйте условия разбиения множества на классы с помощью двух свойств и приведите примеры, учитывая, что подмножества, отвечающие заданным свойствам, находятся в отношении пустого пересечения, пересечения, включения.

19. Объясните с точки зрения логики <u>отрицание</u> операции объединения двух множеств: «если элемент принадлежит множеству, полученному в результате действия операции объединения, то…?….». Теперь формулируем отрицание данной операции «если элемент не

принадлежит множеству, полученному в результате действия операции объединения, то…?….». Согласно какому закону выстроено данное отрицание?

20. Объясните с точки зрения логики отрицание операции пересечения двух множеств: «если элемент принадлежит множеству, полученному в результате действия операции пересечения, то…?….». Теперь формулируем отрицание данной операции «если элемент не принадлежит множеству, полученному в результате действия операции пересечения, то…?….». Согласно какому закону выстроено данное отрицание?

21. Объясните с точки зрения логики отрицание операции вычитания двух множеств: «если элемент принадлежит множеству, полученному в результате действия операции вычитания, то…?….». Теперь формулируем отрицание данной операции «если элемент не принадлежит множеству, полученному в результате действия операции вычитания, то…?….». Подтвердите свой ответ с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

22. Приведите пример двуместного предиката. Назовите область определения и область истинности данного двуместного предиката.

23. Может ли пересечение двух отрезков быть пустым множеством, отрезком, точкой, интервалом? Ответ подтвердите на числовой прямой.

24. Может ли объединение двух отрезков (ненулевой длины) быть пустым множеством, отрезком, точкой, интервалом? Ответ подтвердите на числовой прямой.

25. Может ли вычитание двух отрезков быть пустым множеством, отрезком, точкой, интервалом? Ответ подтвердите на числовой прямой.

9. Задания рейтинг-контроля по теме «Математические предложения и их структуры»

Вариант I

№ 1. Определить значения истинности следующих сложных высказываний, если известно, что P – «л», Q – «и», R – «и»: а) $P \wedge (Q \wedge R)$; б) $(P \wedge Q) \wedge R$; в) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$; г) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$; д) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (R \vee \bar{Q})$; е) $((P \vee Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$.
№ 2. Доказать тождественную истинность формул: а) $(A \vee B \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$; б) $(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A$.
№ 3. Составить таблицы истинности следующих составных высказываний: а) $\bar{A} \wedge \bar{B}$; б) $A \wedge (B \vee C)$; в) $A \Rightarrow B \vee C$; г) $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$; д) $\overline{A \vee B}$. Какие из высказываний являются равносильными.
№ 4. Выразите следующие теоремы без использования союзов "если..., то...": а) если треугольники подобны, то их высоты относятся как сходственные стороны; б) если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность; в) если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны; г) если две стороны треугольника конгруэнтны друг другу, то биссектриса угла между ними перпендикулярна третьей стороне и делит её пополам; д) если стороны параллелограмма конгруэнтны, то его диагонали взаимно перпендикулярны е) если хорды одной и той же окружности конгруэнтны, то они стягивают конгруэнтные дуги.
№ 5. Ответить (с помощью диаграмм Эйлера-Венна), предварительно записав посылку и предполагаемое заключение на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение.

Посылка	Заключение
Все A суть B	1) Все B суть A; 2) Некоторые B суть A; 3) Некоторые B не суть A; 4) Некоторые A суть B?
Некоторые A суть B	1) Некоторые A не суть B; 2) Некоторые B суть A; 3) Некоторые B не суть A?
Ни одно A не есть B	1) Ни одно B не есть A; 2) Некоторые A не суть B; 3) Некоторые B не суть A?

Некоторые A не суть B	1) Некоторые B не суть A; 2) Ни одно B не есть A; 3) Некоторые B суть A; 4) Некоторые A суть B?

№. 6. Даны предикаты: $P(a,b)$: «прямая a параллельна прямой b», $Q(a,\alpha)$: «прямая a лежит в плоскости α», $R(a,\alpha)$: «прямая a параллельна плоскости α». Запишите словами следующие высказывания, записанные в символическом виде: а) $(\forall\alpha)(\exists a)Q(a,\alpha)$; б) $(\forall a)(\forall b)(\forall\alpha)(Q(a,\alpha)\wedge P(a,b)\Rightarrow Q(b,\alpha))$; в) $(\forall a)(\forall\alpha)(\overline{R(a,\alpha)}\Rightarrow \overline{Q(a,\alpha)})$.

№ 7. Пусть $n \vdots m$ обозначает двухместный предикат «n делится на m без остатка». С помощью этого предиката запишите в символическом виде следующие предложения: а) для того, чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3; б) если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6; в) существуют целые числа, делящиеся на 2 и на 3; г) неверно, что существует единственное число, делящееся на 71.

№ 8. Равносильны ли теоремы: а) через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность и притом только одну; б) через любые три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность; в) любые три точки окружности не лежат на одной прямой?

№ 9. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученное предложение было истинным: а) для того, чтобы $2n > 7$, …, чтобы $n > 4$, где n – натуральное число; б) для того, чтобы число делилось на 24, …, чтобы оно делилось на 4 и на 3.

№ 10. Определить схему рассуждения приведённых умозаключений, проверить, будут ли они правильными. Ответ установить построением заключения из посылок и иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. а) Все квадраты – правильные многоугольники; ни один разносторонний прямоугольник не есть правильный многоугольник; следовательно, ни один разносторонний прямоугольник не есть квадрат. б) Все целые числа – рациональные; некоторые дроби не являются целыми числами; следовательно, некоторые дроби не являются рациональными числами; в) Лимон, малина, облепиха относятся к фруктам с низким содержанием сахара. Значит, к фруктам с высоким содержанием сахара лимон, малина, облепиха не относятся.

Вариант II

№ 1. а) Известно, что импликация $P \Rightarrow Q$ истинна, а эквиваленция $P \Leftrightarrow Q$ ложна. Что можно сказать о значении импликации $Q \Rightarrow P$? б) Известно, что эквиваленция $P \Leftrightarrow Q$ истинна. Что можно сказать о значениях эквиваленций $\bar{P} \Leftrightarrow Q$ и $\bar{Q} \Leftrightarrow P$ о значениях импликаций $\bar{P} \Leftrightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$?

№ 2. Доказать тождественную ложность формул: а) $\overline{(\bar{A} \Rightarrow A) \Rightarrow A}$; б) $\overline{(A \wedge B \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)}$.

№ 3. Составить таблицы истинности следующих составных высказываний: а) $\overline{A \vee B}$; б) $A \wedge B \vee A \wedge C$; в) $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$; г) $\bar{A} \wedge \bar{B}$; д) $A \vee B \wedge C$. Какие из высказываний являются равносильными.

№ 4. В следующих теоремах выделите условие и заключение и сформулируйте их в виде "если..., то...": а) во всяком треугольнике против конгруэнтных углов лежат конгруэнтные стороны; б) отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки; в) перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр к другой; г) сумма величин углов треугольника равна 180°; д) сумма величин смежных углов равна 180°; е) параллелограмм имеет центр симметрии; ж) дуги, заключенные между параллельными хордами, конгруэнтны.

№ 5. Ответить (с помощью диаграмм Эйлера-Венна), предварительно записав посылки и предполагаемое заключение на языке множеств, следует ли из посылки приведенного типа заключение.

Посылки	Заключение
Все B суть C; все B суть A	1) Все A суть C; 2) Некоторые A суть C; 3) Все C суть A; 4) Некоторые C суть A?
Все B суть C; ни одно B не есть A	1) Ни одно C не есть A; 2) Некоторые C не суть A; 3) Ни одно A не есть C; 4) Некоторые A не суть C?
Все C суть B; все A суть B	1) Все A суть C; 2) Некоторые A суть C; 3) Все C суть A; 4) Некоторые C суть A?

Все C суть B; ни одно A не есть B	1) Ни одно C не есть A; 2) Некоторые C не суть A; 3) Ни одно A не есть C; 4) Некоторые A не суть C?

№. 6. Даны предикаты: $P(a,b)$: «прямая a параллельна прямой b», $Q(a,\alpha)$: «прямая a лежит в плоскости α», $R(a,\alpha)$: «прямая a параллельна плоскости α». Пользуясь этими предикатами, запишите в символическом виде следующие высказывания: а) чтобы прямая a была параллельна плоскости α, необходимо и достаточно, чтобы a была параллельна прямой b, лежащей в плоскости α; б) существуют прямые, параллельные плоскости α и не лежащие в плоскости α; в) если прямая a параллельна плоскости α и прямая b параллельна плоскости α, то прямые a и b параллельны. Истинны ли эти высказывания?

№ 7. Известны предикаты $N(x)$: «x есть натуральное число», $Z(x)$: «x есть целое число», $Q(x)$: «x есть рациональное число», $R(x)$: «x есть действительное число». Запишите словами следующие высказывания, записанные в символическом виде: а) $\overline{(\forall x)(N(x) \Rightarrow R(x))}$; б) $(\forall x)(R(x) \wedge \overline{Z(x)} \Rightarrow \overline{N(x)})$; в) $(\exists x)(Q(x) \wedge \overline{N(x)})$.

№ 8. Докажите равносильность следующих теорем: а) длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон; б) длина одной из сторон треугольника меньше суммы длин двух других, но больше их разности; в) наибольшая из длин сторон треугольника меньше суммы длин двух других сторон; г) наименьшая длина стороны треугольника больше разности длин двух других сторон.

№ 9. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученное предложение было истинным: а) для того, чтобы вычитание было выполнимо в множестве натуральных чисел, …, чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого; б) для того, чтобы $(a-1)\cdot 5=0$, …, чтобы $a=1$.

№ 10. Определить схему рассуждения приведённых умозаключений, проверить, будут ли они правильными. Ответ установить построением заключения из посылок и иллюстрировать с помощью диаграмм Эйлера-Венна. а) Все квадраты – ромбы; некоторые прямоугольники не являются ромбами; следовательно, некоторые прямоугольник не являются квадратами. б) Ни одна трапеция не есть правильный многоугольник; ни один треугольник не есть трапеция; следовательно, ни один треугольник не есть правильный многоугольник; в) Любая выпечка содержит сахар. В чесноке 3,2% сахара. Значит, чеснок – это выпечка.

Глава III. БИНАРНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И ОТНОШЕНИЯ

1. Понятие бинарного соответствия. Способы задания соответствий

Начальные математические представления базируются на теории множеств. В теоретико-множественном русле выстроена математика начальной школы. Рассматривая представителей каких-либо множеств, мы часто задаемся вопросами: «Как объекты множеств контактируют между собой? Как взаимосвязаны множество карандашей и множество цветов, множество учеников и множество имен, множество натуральных чисел и множество дней недели?». Например, при работе с числовым выражением требуется найти его значение, при измерении длин отрезков и площадей фигур каждому данному отрезку и каждой данной фигуре плоскости ставится в соответствие определенная числовая характеристика – значение длины отрезка или площади фигуры. В первом случае нас интересует связь между множеством выражений и множеством чисел, являющихся результатом арифметических действий в этом выражении, а при измерении величин речь идет о связи между множеством фигур плоскости и множеством чисел. В ходе решения задач на движение устанавливается зависимость между пройденным расстоянием и временем, если скорость движения постоянна.

Будущему учителю начальных классов необходима теоретическая платформа для исследования связей между объектами, а также практический опыт в вопросах сортировки таких связей. Основные понятия теории множеств и логики высказываний и предикатов теперь нам уже хорошо знакомы, более того, мы умеем читать, формулировать и записывать математические предложения на языке математической логики.

Для начала определим и обозначим *бинарное соответствие*, введем понятия *образа* и *прообраза элементов множеств*, связанных соответствием, а также *области определения* и *области значения соответствия*, научимся различать *бинарные отношения* от соответствий, задавать те и другие разными способами, работать с соответствиями и отношениями, *обратными* и *противоположными* данным. Далее подробно изучим *свойства отношений* и рассмотрим *особые виды бинарных соответствий*. Приведём алгоритм исследования отношения по наличию свойств, а также алгоритм по сортировке видов соответствий.

Определение. Под *бинарным соответствием* R понимается сопоставление элементов x одного данного множества X $(x \in X)$ элементам y другого данного множества Y $(y \in Y)$ по некоторому правилу, закону, при этом множество X называют *областью отправления соответствия*, множество Y – *областью прибытия соответствия*.

Другими словами, два множества и указанная зависимость между элементами этих множеств задают бинарное соответствие. Бинарным соответствием можно считать и любое подмножество декартова произведения множеств. Действительно, пары элементов (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$ декартова произведения $X \times Y$ *упорядочены* (это означает, что компоненты в пару формируются по некоторому «согласованию», какой-либо закономерности).

Для установления связей между элементами используют двуместный предикат $R(x, y)$ с указанием множеств, из которых выбираются значения x и y. Например, предикат $R(x, y)$: «Человек x носит фамилию y» позволяет установить связи между множеством людей X $(x \in X)$ и множеством фамилий Y $(y \in Y)$, а предикат $R(x, y)$: «Фигура x имеет площадь y» позволяет установить связи между множеством фигур плоскости X $(x \in X)$ и множеством положительных действительных чисел Y $(y \in Y)$. Известно, что область истинности двуместного предиката является подмножеством декартова произведения $X \times Y$. Поэтому озвученное определение соответствия можно уточнить и сформулировать следующим образом.

Определение. Бинарным соответствием R является тройка множеств $(X, Y, R(X, Y))$, где множество X – *область отправления соответствия*, множество Y – *область прибытия соответствия*, $R(X, Y)$ – график соответствия, $R(X, Y) \subset X \times Y$.

Заметим, что если известен предикат, определяющий соответствие R, то $R(X, Y)$ – это не что иное, как область истинности предиката R. Значит, для определения графика соответствия R нужно фактически найти область истинности предиката $R(X, Y)$.

Если элементы a и b связаны соответствием R, то используют запись aRb. В таком случае предикат $R(x, y)$ при $x = a$ и $y = b$ обращается в истинное высказывание: $R(a, b)$ – «истина». Значит, пара (a, b) содержится в области истинности предиката $R(x, y)$. Элемент a для b является *прообразом*: $a = R^{-1}(b)$; элемент b для a является *образом*: $b = R(a)$.

Полным прообразом элемента b называется множество таких элементов x, для которых выполнено условие xRb. Обозначают полный прообраз элемента b как $R^{-1}(b)$.

Полным образом элемента a называется множество таких элементов y, для которых выполнено условие aRy. Обозначают полный образ элемента a как $R(a)$.

Множество элементов $x \in X$, для которых находятся образы, называют *областью определения соответствия* R и обозначают D_R. Множество элементов $y \in Y$, для которых находятся прообразы, называют *областью значений соответствия* R и обозначают E_R.Очевидно, что $D_R \subseteq X$, $E_R \subseteq Y$.

Основным способом задания соответствия является задание с помощью *графика* (потому что именно график соответствия «заложен» в определение). Однако, этот способ не является единственным.

Соответствие можно задавать с помощью *графа*. В этом случае:

– множества X и Y изображаются кругами;

– элементы множеств X и Y изображаются точками;

– стрелками (направление от X к Y) соединяются те элементы, которые находятся в заданном соответствии.

Соответствие можно задавать и с помощью *таблицы*, в которой по горизонтали отмечают элементы множества Y, по вертикали отмечают элементы множества X, а штриховкой закрывают те «клеточки», которые определяются парой связанных данным соответствием элементов.

Замечание. Эти способы задания соответствий используются для конечных множеств. Задание соответствий для элементов бесконечных множеств чаще всего осуществляется с помощью формул, содержащих знаки равенства или разного рода неравенств.

Приведём пример задачи и её решения

Задача. Для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$: «Число x является делителем числа y», где $x \in X$, $y \in Y$ и $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{7, 5, 6, 11\}$ найти область определения, область значений, график соответствия, полные образы и полные прообразы элементов множеств X и Y, а также построить граф и таблицу, задающие данное соответствие R.

Решение. Начинать решение этой задачи удобнее с нахождения графика соответствия.

1. Выпишем график соответствия:

$R(X,Y) = \{(1,7),(1,5),(1,6),(1,11),(2,6),(3,6)\}$.

Действительно, $(a,b) \in R(X,Y)$, если aRb. Это значит, предикат $R(x,y)$ должен обратиться в истинное высказывание при $x = a$ и $y = b$. Например, пара $(1,7)$ принадлежит графику, $(1,7) \in R(X,Y)$, так как подстановка значений $x = 1$ и $y = 7$ в предикат $R(x,y)$ обращает его в истинное высказывание $R(1,7)$: «Число 1 является делителем числа 7».

2. Теперь по графику легко найти область определения D_R соответствия R: $D_R = \{1,2,3\}$ (D_R находится как множество элементов $x \in X$, для которых определяются образы, значит, в упорядоченных парах из графика выбираем элементы, стоящие на первых местах).

3. Аналогично находим область значений E_R соответствия R (как множество элементов $y \in Y$, для которых определяются прообразы, значит, в упорядоченных парах из графика выбираем элементы, стоящие на вторых местах): $E_R = \{7,5,6,11\}$.

Видим, что $D_R \subset X$, $D_R \neq X$, $E_R = Y$.

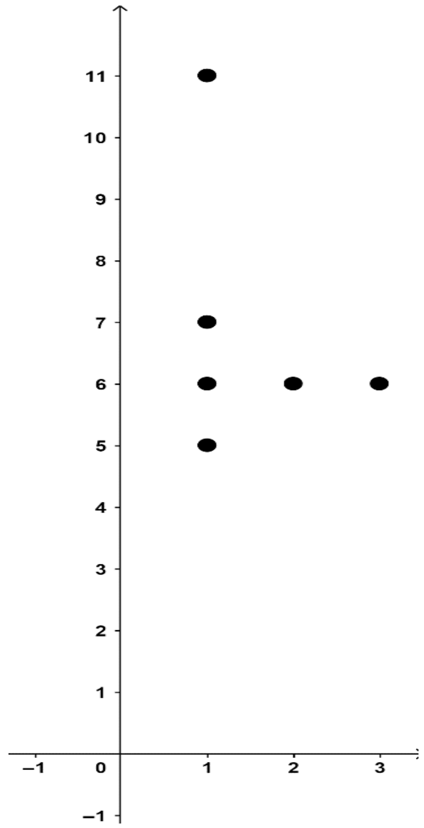
4. Теперь, используя график, можно найти полные образы элементов множества X и полные прообразы элементов множества Y, находящихся в заданном соответствии:

$R(0) = \emptyset$, $R(1) = \{7,5,6,11\}$, $R(2) = \{6\}$, $R(3) = \{6\}$, $R(4) = \emptyset$.

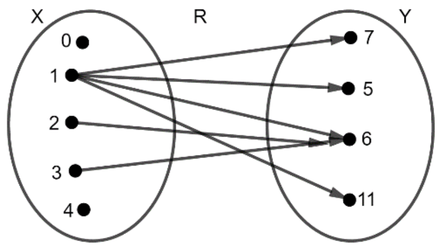
$R^{-1}(7) = \{1\}$, $R^{-1}(5) = \{1\}$, $R^{-1}(6) = \{1,2,3\}$, $R^{-1}(11) = \{1\}$.

5. Поскольку X и Y – числовые множества, то график соответствия R можно изобразить в координатной плоскости, см. на рисунке справа.

6. Построим граф и таблицу для соответствия R.



Граф



Таблица

$X \backslash Y$	7	5	6	11
0				
1				
2				
3				
4				

2. Соответствия, обратное данному и противоположное данному

Пусть дано соответствие $R = (X, Y, R(X, Y))$.

<u>Определение.</u> Если элемент x находится в соответствии R с элементом y, то элемент y с элементом x находится в соответствии R^{-1}, *обратном* данному: $(xRy) \Rightarrow (yR^{-1}x)$.

Областью отправления соответствия R^{-1} является множество Y, областью прибытия соответствия R^{-1} является множество X.

График соответствия R^{-1} определяется упорядоченными парами вида (y, x). Значит, $R^{-1} = (Y, X, R^{-1}(Y, X))$.

Если множества X и Y – числовые, то при изображении графиков R и R^{-1} в одной координатной плоскости можно заметить, что они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Если соответствие R задано с помощью графа, то для построения графа соответствия R^{-1}, обратного данному, нужно просто изменить направление стрелок, потому что соответствие R^{-1} устанавливается только для элементов, связанных соответствием R, но в обратном порядке.

Определение. Если элемент x не находится в соответствии R с элементом y, то говорят, что элемент x с элементом y находится в соответствии $\bar{R}$, *противоположном* данному: $(\overline{xRy}) \Rightarrow (x\bar{R}y)$.

Областью отправления соответствия $\bar{R}$, противоположного данному, является множество X, областью прибытия соответствия $\bar{R}$ – множество Y. График соответствия $\bar{R}$ определяется как подмножество декартова произведения $X \times Y$.

Значит, $\bar{R} = (X, Y, \bar{R}(X, Y))$.

Нужно заметить, что нет ни одной упорядоченной пары (x, y), которая одновременно принадлежала бы графику R и графику $\bar{R}$ (по определению). Поэтому имеем: $R(X, Y) \cap \bar{R}(X, Y) = \emptyset$.

Из определений R и $\bar{R}$ также следует, что $R(X, Y) \cup \bar{R}(X, Y) = X \times Y$. Значит, чтобы найти график соответствия, противоположного данному, нужно составить разность между декартовым произведением $X \times Y$ и графиком соответствия R: $\bar{R}(X, Y) = (X \times Y) \backslash R(X, Y)$.

Если множества X и Y – числовые, то при изображении графиков соответствий R и $\bar{R}$ в одной координатной плоскости легко увидеть, что их объединение даёт декартово произведение множеств X и Y.

Если соответствие R задано с помощью графа, то для построения графа соответствия $\bar{R}$ нужно стрелками соединить те элементы, которые не соединены на графе R (направление стрелок от X к Y при этом сохраняется).

Замечание 1. Области определения, области значений, а также полные образы и полные прообразы элементов для соответствий R^{-1} и $\bar{R}$ находятся согласно определениям (см. параграф 1 настоящей главы)

Рассмотрим пример задачи и её решения

Задача. Для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$: «Число x больше числа y», где $x \in X$, $y \in Y$ и $X = \{2, 7, 9\}$, $Y = \{3, 5, 9, 11\}$ задать соответствие R^{-1}, обратное данному и соответствие $\bar{R}$, противоположное данному, найти их области определения и области значений, а также графики. Построить изображения графиков соответствий R^{-1} и $\bar{R}$ в координатной плоскости. Построить графы соответствий R^{-1} и $\bar{R}$. Найти полные образы и полные прообразы элементов при соответствиях R^{-1} и $\bar{R}$.

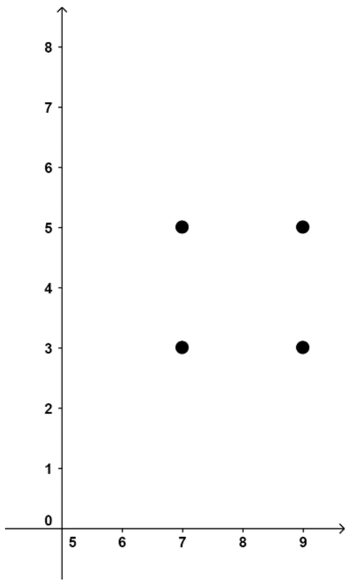
Решение. Для удобства решения задачи найдём все определяющие параметры для соответствия R.

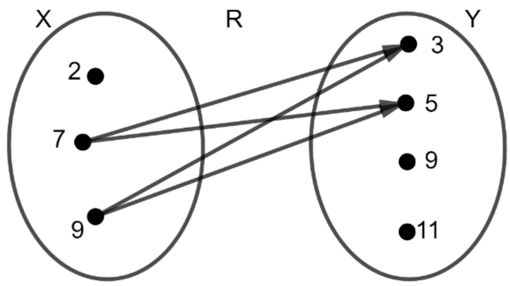
$R(X, Y) = \{(7,3), (7,5), (9,3), (9,5)\}$, $D_R = \{7,9\}$, $E_R = \{3,5\}$.

$R(2) = \emptyset$, $R(7) = \{3,5\}$, $R(9) = \{3,5\}$.

$R^{-1}(3) = \{7,9\}$, $R^{-1}(5) = \{7,9\}$, $R^{-1}(9) = \emptyset$, $R^{-1}(11) = \emptyset$.

Далее изобразим в координатной плоскости график соответствия R, а также построим граф соответствия R.

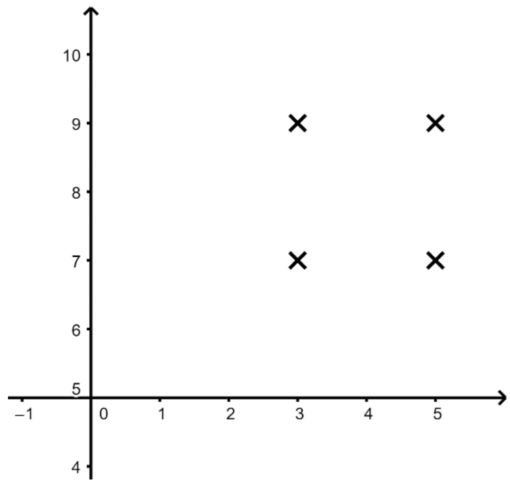


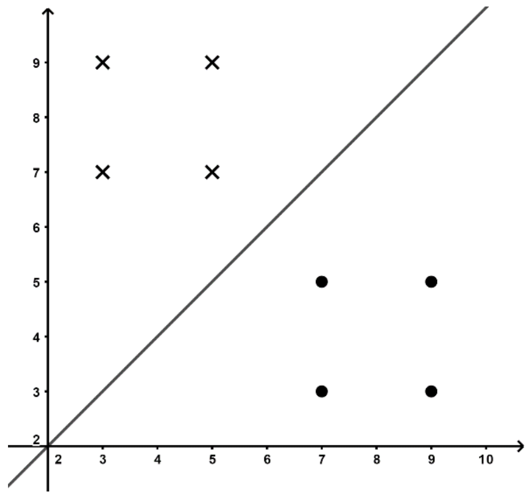


1. Зададим соответствие R^{-1}, обратное данному. По определению R^{-1}: $(xRy) \Rightarrow (yR^{-1}x)$. Значит, R^{-1} будет определяться с помощью предиката $R^{-1}(y, x)$: «Число y меньше числа x». (В самом деле, ведь если число x больше числа y, то число y меньше числа x). Поэтому график соответствия R^{-1} запишется в виде: $R^{-1}(Y, X) = \{(3,7), (5,7), (3,9), (5,9)\}$, откуда находим, что $D_{R^{-1}} = \{3,5\}$, $(= E_R)$, $E_{R^{-1}} = \{7,9\}$, $(= D_R)$.

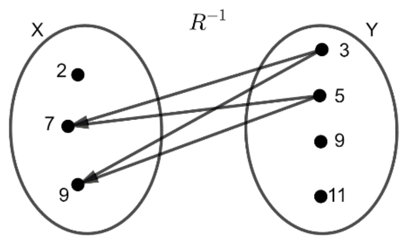
Видим, что область определения и область значений для R^{-1} поменялись местами с областью значений и областью определения для R. Как следствие этого, полные образы элементов 3, 5, 9, 11 при R^{-1} являются полными прообразами их при соответствии R, а полные прообразы элементов 2, 7, 9 при R^{-1} являются полными образами их при соответствии R. Заметим здесь, что $(R^{-1})^{-1} = R$.

2. Изобразим в декартовой плоскости график R^{-1}:





при совмещении с графиком R:



Видим, что изображения графиков R и R^{-1} симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

3. Построим граф соответствия R^{-1} (см. граф R^{-1} на рисунке слева).

4. Зададим соответствие $\bar{R}$, противоположное данному.

По определению $\bar{R}$: $(\overline{xRy}) \Rightarrow (x\bar{R}y)$.

Значит, $\bar{R}$ будет определяться с помощью предиката $\bar{R}(x,y)$: «Число x не больше числа y». (В самом деле, если неверно, что число x больше числа y, то число x не больше числа y, или, что то же самое, число x меньше или равно числу y).

Поэтому график соответствия $\bar{R}$ запишется в виде:

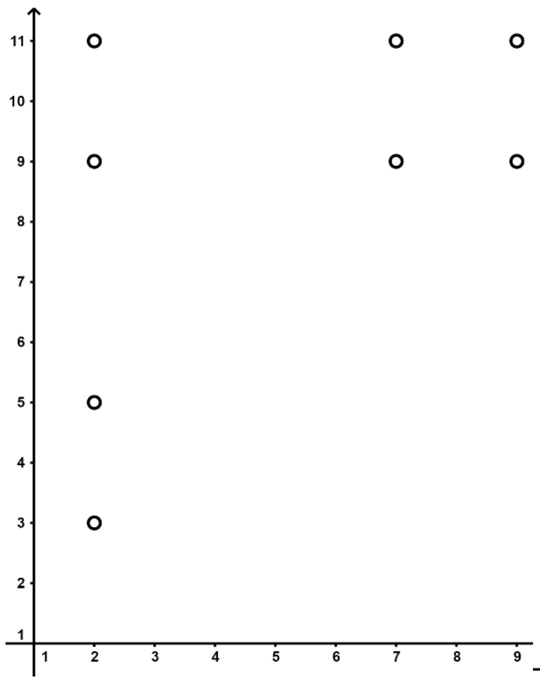
$\bar{R}(X,Y) =$ $\{(2,3),(2,5),(2,9),(2,11),(7,9),(7,11),(9,9),(9,11)\}$, а значит, $D_{\bar{R}} = \{2,7,9\}$ $(= X)$, $E_{\bar{R}} = \{3,5,9,11\}$ $(= Y)$.

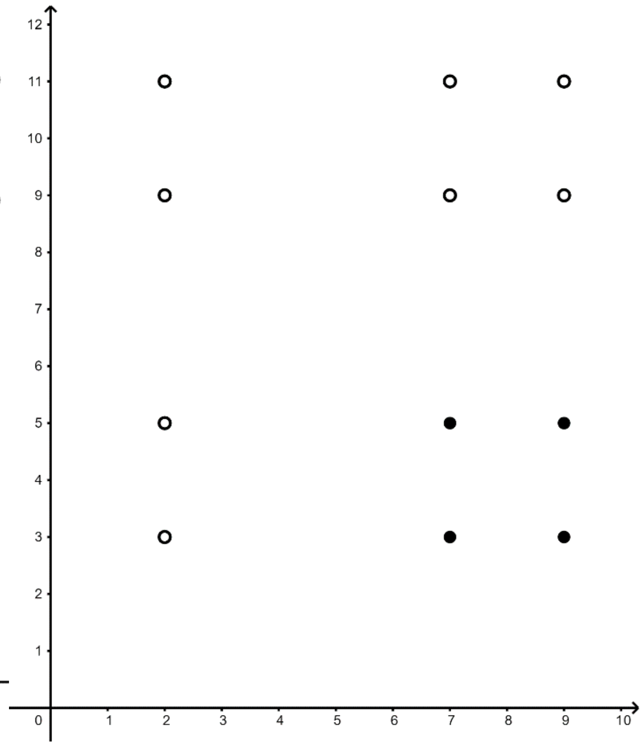
По графику соответствия $\bar{R}$ найдём полные образы элементов 2, 7, 9 и полные прообразы элементов 3, 5, 9, 11:

$\bar{R}(2) = \{3,5,9,11\}$, $\bar{R}(7) = \{9,11\}$, $\bar{R}(9) = \{9,11\}$;

$(\bar{R})^{-1}(3) = \{2\}$, $(\bar{R})^{-1}(5) = \{2\}$, $(\bar{R})^{-1}(9) = \{2,7,9\}$, $(\bar{R})^{-1}(11) = \{2,7,9\}$

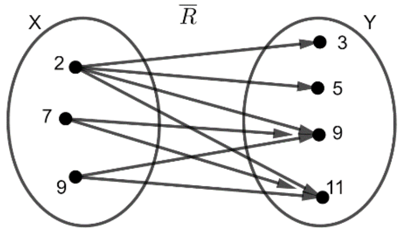
5. Изобразим в декартовой плоскости график $\bar{R}$:





Видим, что изображения графиков $\bar{R}$ и R, построенные в одной координатной плоскости, в объединении дают декартово произведение множеств X и Y.

6. Построим граф соответствия $\bar{R}$:



Замечание 2. В п.4 решения задачи график соответствия $\bar{R}$ можно было получить, составив разность между декартовым произведением множеств $X \times Y$ и графиком соответствия R:

$X \times Y = \{(2,3),(2,5),(2,9),(2,11),\underline{(7,3)},\underline{(7,5)},(7,9),(7,11),$ $\underline{(9,3)},\underline{(9,5)}\,(9,9),(9,11)\}$;

$R(X,Y) = \{(7,3),(7,5),(9,3),(9,5)\}$;

$\bar{R}(X,Y) = (X \times Y)\backslash R(X,Y) =$ $\{(2,3),(2,5),(2,9),(2,11),(7,9),(7,11),(9,9),(9,11)\}$.

3. Понятие бинарного отношения

Определение. Бинарное соответствие $R = (X, Y, R(X,Y))$, для которого $X = Y$, называют *бинарным отношением*.

Из определения следует, что область определения бинарного отношения равна области прибытия и равна множеству X. График бинарного отношения – подмножество декартова квадрата множества X: $R(X,X) \subset X^2$.

Бинарное отношение устанавливает связь между элементами одного множества.

Определяют бинарные отношения с помощью двуместного предиката $R(x,y)$, указывая при этом, из какого множества выбираются x и y.

Если элементы a и b связаны отношением R, то форма записи сохраняется aRb, только элементы a и b теперь выбираются из одного множества X. Элемент a для b является *прообразом*, а элемент b для a является *образом*.

Полным прообразом элемента b называется множество таких элементов x, для которых выполнено условие xRb. Обозначают полный прообраз элемента b как $R^{-1}(b)$.

Полным образом элемента a называется множество таких элементов y, для которых выполнено условие aRy. Обозначают полный образ элемента a как $R(a)$.

Множество элементов $x \in X$, для которых находятся образы, называют *областью определения* отношения R и обозначают D_R.

Множество элементов $y \in Y$, для которых находятся прообразы, называют *областью значений* отношения R и обозначают E_R.

Понятно, что теперь $D_R \subset X$ и $E_R \subset X$.

Бинарные отношения, как и соответствия, задают с помощью графика, графа, таблицы или формулы.

Графиком отношения R фактически является область истинности предиката $R(x,y)$, определяющего это отношение.

Чтобы задать бинарное отношение с помощью *графа*, нужно:

– изобразить элементы множества X точками (без указания границ множества),

– стрелками соединить те элементы, которые находятся в заданном отношении.

При задании бинарного отношения с помощью *таблицы* элементы множества X записывают и по горизонтали, и по вертикали, а штриховкой закрывают те «клеточки», которые определяются парой связанных данным отношением элементов.

Для бинарного отношения R определяют отношение R^{-1}, обратное данному, и отношение $\bar{R}$, противоположное данному. При этом нужно заметить, что области определения этих отношений, как и области их значений являются подмножествами множества X, а области отправления и области прибытия равны множеству X. В остальном определения сохранены (см. параграф 2 настоящей главы), как сохранены правила выписывания графиков R^{-1} и $\bar{R}$, а также правила построения графов отношений R^{-1} и $\bar{R}$ (для R^{-1} изменяется направление стрелок, а для $\bar{R}$ изображают те стрелки, которые отсутствуют на графе R).

Рассмотрим примеры задач и их решений

Задача 1.

Для отношения R, определяемого предикатом $R(x, y)$: «Число x делится на число y», где $x, y \in X$, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

– найти область определения, область значений, график отношения, полные образы и полные прообразы элементов множеств X, находящихся в отношении R, а также построить граф и таблицу, задающие данное отношение R;

– определить отношения R^{-1} и $\bar{R}$, найти их графики, а также построить графы этих отношений.

Решение.

Начнём решение этой задачи с определения графика отношения R.

1. $R(X, X) =$ $\{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (1, 1), (2, 1), (2, 2),$ $(3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), (5, 1), (5, 5)\}$.

Действительно, $(a, b) \in R(X, X)$, если aRb. Это значит, предикат $R(x, y)$ должен обратиться в истинное высказывание при $x = a$ и $y = b$. $(0, 1) \in R(X, X)$, так как «0 делится на 1» – истинное высказывание.

2. Находим область определения R: $D_R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; видим, что $D_R = X$.

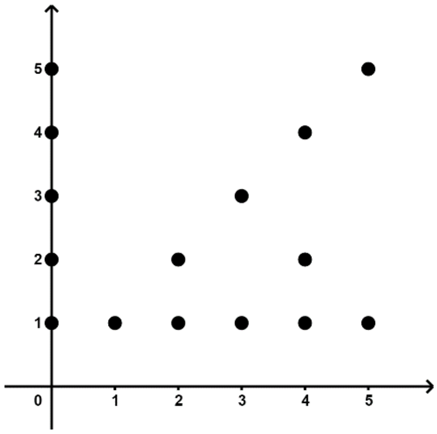
3. Находим область значений R: $E_R = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; видим, что $E_R \subset X$.

4. Используя график, находим полные образы и полные прообразы элементов:

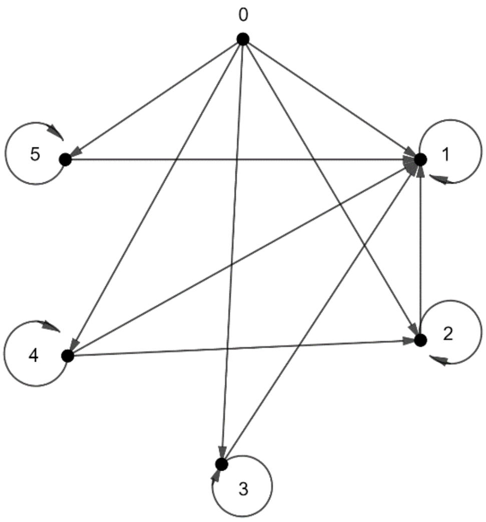
$R(0) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R(1) = \{1\}$, $R(2) = \{1, 2\}$, $R(3) = \{1, 3\}$, $R(4) = \{1, 2, 4\}$, $R(5) = \{1, 5\}$.

$R^{-1}(0) = \emptyset$, $R^{-1}(1) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{-1}(2) = \{0, 2, 4\}$, $R^{-1}(3) = \{0, 3\}$, $R^{-1}(4) = \{0, 4\}$, $R^{-1}(5) = \{0, 5\}$.

5. Множество X – числовое, поэтому график отношения R можно изобразить в координатной плоскости:



6. Зададим теперь отношение R с помощью графа и таблицы.



Y / X	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

7. Зададим отношение R^{-1}, обратное данному. По определению R^{-1}: $(xRy) \Rightarrow (yR^{-1}x)$. Значит, R^{-1} будет определяться с помощью предиката $R^{-1}(y,x)$: «Число y – делитель числа x». (В самом деле, ведь если число x делится на число y, то число y является делителем числа x).

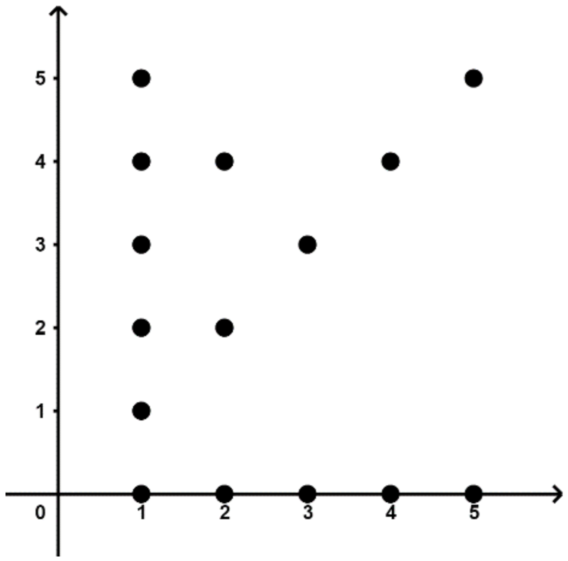
Поэтому график отношения R^{-1} запишется в виде:

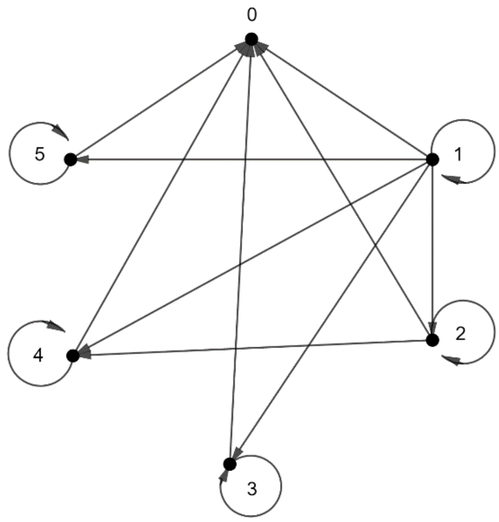
$$R^{-1}(Y,X) = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0),(1,1),(1,2),(2,2),\\ (1,3),(3,3),(1,4),(2,4),(4,4),(1,5),(5,5)\}.$$

Теперь находим $D_{R^{-1}} = \{1,2,3,4,5\}$, $(= E_R)$,

$E_{R^{-1}} = \{0,1,2,3,4,5\}$, $(= D_R)$.

8. Изобразим в координатной плоскости график R^{-1}:





Предлагаем самостоятельно построить изображения графиков R^{-1} и R в одной координатной плоскости и убедиться в том, что они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

9. Построим граф отношения R^{-1} (см. граф на рисунке).

10. Зададим отношение $\bar{R}$, противоположное данному.

По определению $\bar{R}$: $(\overline{xRy}) \Rightarrow (x\bar{R}y)$.

Значит, $\bar{R}$ будет определяться с помощью предиката $\bar{R}(x,y)$: «Число x не делится на число y». (В самом деле, если неверно, что число x делится на число y, то число x не делится на число y).

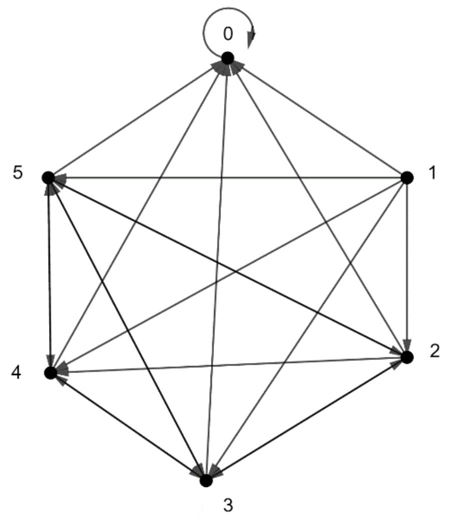
Поэтому график соответствия $\bar{R}$ запишется в виде:

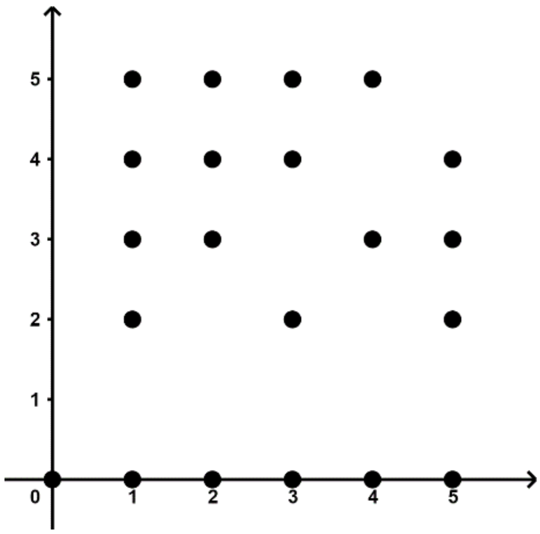
$$\bar{R}(X,Y) = \{(0,0),(1,0),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,0),(2,3),(2,4),(2,5),$$

$$(3{,}0),(3,2),(3{,}4),(3,5),(4,0),(4,3),(4,5),(5,0),(5,2),(5,3),(5,4),$$

а значит, $D_{\bar{R}} = E_{\bar{R}} = X$.

11. Изобразим в координатной плоскости график $\bar{R}$:



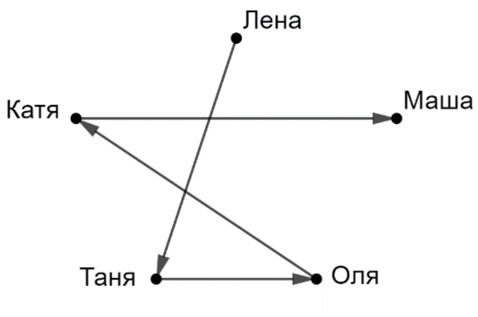


Предлагаем самостоятельно построить изображения графиков $\bar{R}$ и R в одной координатной плоскости и убедиться в том, что в объединении они дают изображение декартова квадрата множества X.

12. Построим граф отношения $\bar{R}$. Он изображён на рисунке.

<u>Задача 2.</u> Известно, что Таня старше Оли, но младше Лены, а Катя младше Оли, но старше Маши. Кто из девочек старше всех, а кто – младше всех? Кто из девочек старше: Лена или Катя? Маша или Таня?

<u>Решение.</u> По условию задачи выделяется множество Х={Лена, Маша, Таня, Катя, Оля}, для элементов которого задано отношение «Девочка x старше девочки y». Построим граф этого отношения, используя условие задачи.



Теперь отвечаем на вопросы задачи:

1. Старше всех – Лена, младше всех – Маша.
2. Так как Лена старше всех, то она старше Кати.
3. Так как Маша младше всех, то она младше Тани.

4. Свойства бинарных отношений

Связи между элементами одного множества, устанавливаемые путём задания бинарного отношения, могут обладать целым рядом особенностей. Эти особенности определяются *свойствами* бинарных отношений. Определим некоторые из них и приведём примеры отношений, обладающих указанными свойствами

<u>Определение.</u> Бинарное отношение R обладает свойством *рефлексивности* тогда и только тогда, когда <u>каждый</u> элемент множества находится в заданном отношении с самим собой: xRx.

Примеры рефлексивных отношений:

– отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как любое натуральное число делится само на себя);

– отношение параллельности на множестве прямых плоскости (так как любая прямая по определению параллельна самой себе);

– отношение "быть ровесниками" в множестве людей (так как любой человек считается ровесником самому себе)

и множество других.

Особенностью *графика* отношения, обладающего свойством рефлексивности, является наличие пар с одинаковыми компонентами.

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством рефлексивности, является наличие петель – стрелок, которые начинаются и заканчиваются на одном элементе – около <u>каждого</u> элемента множества.

<u>Определение.</u> Бинарное отношение R обладает свойством *антирефлексивности* тогда и только тогда, когда <u>ни один</u> элемент множества не находится в заданном отношении с самим собой: $\overline{xRx}$.

Примеры антирефлексивных отношений:

– отношение больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как ни одно число не может быть больше самого себя);

– отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости (так как ни одна прямая не может быть перпендикулярна самой себе)

и множество других.

Особенностью *графика* отношения, обладающего свойством антирефлексивности, является отсутствие пар с одинаковыми компонентами.

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством антирефлексивности, является отсутствие петель (стрелок, которые начинаются и заканчиваются на одном элементе) около <u>каждого</u> элемента множества.

<u>Определение.</u> Бинарное отношение R обладает свойством *симметричности* тогда и только тогда, когда <u>для любых</u> элементов множества из условия, что элемент x находится в отношении R с элементом y следует, что и элемент y находится в этом же отношении R с элементом x: $(xRy) \Rightarrow (yRx)$.

Примеры симметричных отношений:

– отношение равенства на множестве всех множеств U (действительно, для любых множеств: если множество A равно множеству B, то и множество B равно множеству A: $(A = B) \Rightarrow (B = A)$);

– отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости;

– отношение касания на множестве окружностей;

– отношение равносильности на множестве предикатов;

– отношение "быть похожими" на множестве людей

и множество других.

Особенностью *графика* отношения, обладающего свойством симметричности, является обязательное присутствие вместе с парой (x, y) пары (y, x).

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством симметричности, является то, что все его стрелки – двойные (при наличии стрелки от x к y обязательно присутствует стрелка от y к x), которые начинаются и заканчиваются на одном элементе – около каждого элемента множества.

<u>Определение.</u> Бинарное отношение R обладает свойством *асимметричности* тогда и только тогда, когда для любых элементов множества из условия, что элемент x находится в отношении R с элементом y следует, что элемент y никогда не может находится в <u>этом же</u> отношении R с элементом x: $(xRy) \Rightarrow (\overline{yRx})$.

Примеры асимметричных отношений:

– отношение больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как для любых натуральных чисел, если x больше y, то число y не может быть больше x);

– отношение «быть выше» на множестве деревьев леса;

– отношение «быть старше» на множестве людей
и множество других.

Особенностью *графика* отношения, обладающего свойством асимметричности, является то, что пары вида (x, y) и (y, x) одновременно присутствовать в графике не могут.

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством асимметричности, является то, что все его стрелки не могут являться двойными.

Определение. Бинарное отношение R обладает свойством *антисимметричности* тогда и только тогда, когда для любых элементов множества элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом x только в случае равенства элементов: $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y)$.

Примеры антисимметричных отношений:

– отношение не больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как для любых натуральных чисел, если x не больше y и y не больше x одновременно, то числа x и y будут равны);

– отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

– отношение логического следования на множестве предикатов
и множество других.

Определение. Бинарное отношение R обладает свойством *связанности* тогда и только тогда, когда для любых элементов множества в случае неравенства элементов x и y обязательно выполняется одно из условий: элемент x находится в отношении R с элементом y или элемент y находится в отношении R с элементом x: $(x \neq y) \Rightarrow (xRy \vee yRx)$.

Примеры связанных отношений:

– отношение больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как для любых натуральных чисел, если они не равны, то либо первое число больше второго, либо второе больше первого);

– отношение «быть старше» на множестве людей
и другие.

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством связанности, является то, что все элементы множества попарно соединены стрелками.

Определение. Бинарное отношение R обладает свойством *транзитивности* тогда и только тогда, когда для любых элементов множества: если элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, то элемент x находится в этом же отношении R с элементом z: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow (xRz)$

Примеры транзитивных отношений:

– отношение больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (так как для любых натуральных чисел, если x больше y и y больше z одновременно, то число x больше числа z);

– отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

– отношение "иметь одинаковый цвет" на множестве детских игрушек.

– отношение логического следования на множестве предикатов и множество других.

Особенностью *графика* отношения, обладающего свойством транзитивности, является то, что вместе с парами вида (x, y) и (y, x) одновременно присутствует в графике пара вида (x, z).

Особенностью *графа* отношения, обладающего свойством транзитивности, является то, что вместе со стрелками от x к y и от y к z на графе обязательно будет стрелка от x к z.

Определение. Бинарное отношение R обладает свойством *антитранзитивности* тогда и только тогда, когда для любых элементов множества: если элемент x находится в отношении R с элементом y и элемент y находится в отношении R с элементом z, то элемент x с элементом z никогда не могут находиться в этом же отношении R: $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow (\overline{xRz})$

Примеры антитранзитивных отношений:

– отношение перпендикулярности на множестве прямых плоскости (так как для любых прямых, если x перпендикулярна y и y перпендикулярна z одновременно, то прямая x никогда не будет перпендикулярна прямой z;

– отношение "больше в 2 раза" на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

– отношение "быть отцом" на множестве людей и множество других.

Определение. Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называют отношением *эквивалентности*.

Примерами отношений эквивалентности являются:

– отношение параллельности на множестве прямых плоскости;

– отношение подобия на множестве геометрических фигур плоскости;

– отношение равенства фигур на множестве геометрических фигур плоскости;

– отношение равносильности на множестве уравнений;

– отношение «иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число m» на множестве целых чисел[2];

M отношение «быть одного роста» на множестве людей;

– отношение «жить в одном доме» на множестве людей
и множество других.

Теорема. Всякое отношение эквивалентности в непустом множестве M порождает разбиение этого множества на классы эквивалентности такое, что:

– всякие два элемента одного класса находятся в отношении R;

– всякие два элемента различных классов не находятся в отношении R.

Напомним, что множество M считается разбитым на классы $K_1, K_2, \dots, K_n$, если выполнены условия:

1. $K_i \neq \emptyset$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$ (каждый класс не пуст);
2. $K_i \cap K_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$ при $i, j = 1, 2, \dots, n$ (различные классы не пересекаются);
3. $K_1 \cup \dots \cup K_n = M$ (объединение всех классов даёт множество M).

В случае отношения параллельности множество прямых плоскости разбивается на классы параллельных прямых, при этом в одном классе окажутся все параллельные между собой прямые.

---

[2] в математике отношение «иметь одинаковые остатки при делении на фиксированное натуральное число m» называют отношением «сравнимости по модулю m» и обозначают $a = b \ (\mathrm{mod}\ m)$

В случае отношения равенства фигур всё множество фигур плоскости разбивается на классы, при этом в один класс попадут все равные между собой фигуры.

В случае отношения «быть ровесниками» всё множество жителей города разбивается на классы, при этом в один класс попадут люди, являющиеся ровесниками.

В случае отношения «сравнимости по модулю 5» всё множество целых чисел разбивается на пять классов: в первый класс попадают числа, остаток от деления на 5 которых равен 1 (например, числа –11, 1, 6, 147), во второй класс попадают числа, остаток от деления на 5 которых равен 2 (например, числа –7, 2, 7, 32, 57), в третий класс попадают числа, остаток от деления на 5 которых равен 3 (например, числа –33, –3, 3, 8, 28), в четвёртый класс попадают числа, остаток от деления на 5 которых равен 4 (например, числа –14, 4, 9, 19, 74), в пятый класс попадают числа, остаток от деления на 5 которых равен 0, то есть все целые числа, кратные пяти (например, 0, $\pm 5,\ \pm 20,\ \pm 45$),

Отношения эквивалентности играют огромную роль в математике. Они позволяют изучать класс эквивалентности на основе изучения одного представителя, потому что элементы в классе считаются неразличимыми с точки зрения заданного отношения. Разбиение множества на классы с помощью отношения эквивалентности используется и для введения новых понятий (таких, как натуральное число, положительное рациональное число).

Определение. Бинарное отношение, обладающее свойствами антирефлексивности, асимметричности и транзитивности, называется отношением *строгого порядка*.

Примерами отношений строгого порядка являются:

– отношение больше на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

– отношение длиннее на множестве отрезков

и другие.

Определение. Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется отношением *нестрогого порядка*.

Примерами отношений нестрогого порядка являются:

– отношение делимости на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$;

– отношение логического следования на множестве предикатов

и многие другие.

Определение. Множество, для элементов которого задано отношение порядка (строгого или нестрогого), называется *упорядоченным*.

Если для элементов множества задано связанное отношение порядка, то множество называется *линейно упорядоченным*.

Можно сказать, что если множество линейно упорядочено, то для любых его двух элементов x и y обязательно выполнено одно из условий: либо $x = y$, либо xRy, либо yRx.

Приведём примеры задач и их решений

Задача 1. Перечислить свойства отношения R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x, y \in X$, если

а) $R(x, y)$: «Число x – делитель числа y», $X = \mathbb{N}$;

б) $R(x, y)$: «Студент x учится на одном курсе со студентом y», X – множество студентов кафедры начального образования;

в) $R(x, y)$: «x – сестра y», X – множество детей одной семьи: $X = \{\text{Оля, Коля, Маша, Игорь, Наташа}\}$.

Решение.

а) Отношение R:

– рефлексивно, так как каждое натуральное число является делителем самого себя;

– антисимметрично, так как если число x является делителем числа y и одновременно число y является делителем числа x, то это возможно только в случае равенства чисел x и y;

– транзитивно, так как если число x является делителем числа y и число y является делителем числа z, то число x – делитель числа z.

Таким образом, отношение R является *отношением нестрогого порядка*. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ будет упорядоченным по этому отношению, но не линейно упорядоченным (потому что отсутствует свойство связанности для R).

б) Отношение R:

– рефлексивно, так как *каждый* студент учится на одном курсе с самим собой;

– симметрично, так как если студент x учится на одном курсе со студентом y, то и студент y учится на одном курсе со студентом x;

– транзитивно, так как если студент x учится на одном курсе со студентом y и студент y учится на одном курсе со студентом z одновременно, то студент x учится на одном курсе со студентом z.

Таким образом, отношение R является *отношением эквивалентности*. Множество студентов кафедры начального образования разбивается на классы эквивалентности. В один класс попадут студенты, учащиеся на одном курсе (множество студентов 1 курса как первый класс эквивалентности, множество студентов 2 курса как второй класс эквивалентности и т.д.). Эти классы не являются пустыми, попарно не пересекаются и в объединении дают всё множество студентов кафедры начального образования.

в) Отношение R:

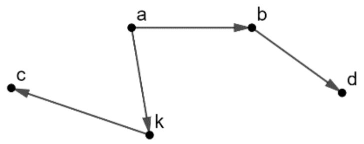
– не является рефлексивным, так как каждый элемент множества не находится в заданном отношении с самим собой (Оля является сестрой самой себе, а Коля – нет);

– не является антирефлексивным, так как некоторые элементы множества всё-таки находится в заданном отношении с самим собой;

– не является симметричным, так как для всех пар элементов определение не выполняется, например, если Оля – сестра Коли, то Коля сестрой Оли не является;

– транзитивно, потому что, если Оля – сестра Маши, Маша – сестра Наташи, то Оля – сестра Наташи.

Таким образом, отношение R является транзитивным, а по свойствам рефлексивности и симметричности – не характеризуется.

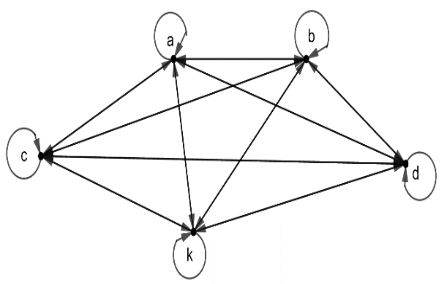


Задача 2. Достроить граф отношения R, если известно, что R:

а) является отношением эквивалентности;

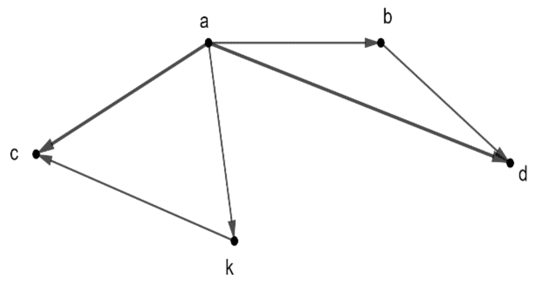
б) является отношением строгого порядка.

Решение.



а) Используя определение, установим, что отношение эквивалентности – это отношение, обладающее свойством рефлексивности, симметричности и транзитивности. Особенности графов таких отношений перечислены выше. Согласно этому граф принимает вид, как указано на рисунке.

б) Используя определение, установим, что отношение строгого порядка – это антирефлексивное, асимметричное и транзитивное отношение. Особенности графов таких отношений перечислены выше. Согласно этому граф принимает вид, указанный рядом на рисунке.



5. Виды соответствий и отображений

Окружающий нас мир составляют множества, которые содержат объекты и предметы. Связи между элементами множеств разнообразны и многообразны. Среди множества этих связей-соответствий наиболее часто в математической теории используют следующие: *функциональные соответствия, отображения и взаимно однозначные соответствия*. Для наглядности будем показывать различные виды на графах соответствий.

Определение. Соответствие называется *функциональным* тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in X$ существует не более одного образа $y \in Y$, находящегося с x в заданном соответствии.

На рис.1 изображен граф соответствия R, которое не является функциональным, поскольку элемент c имеет более одного образа: $R(c) = k,\ R(c) = l, k \neq l$.

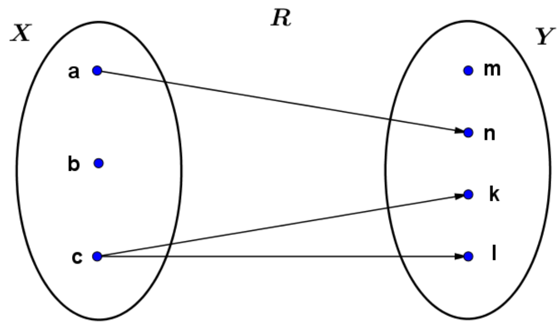


Рис. 1

R не является функциональным соответствием

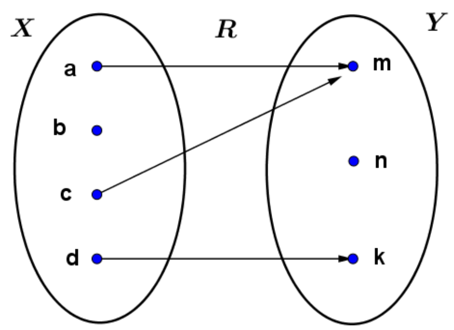


Рис. 2

R – функциональное соответствие

На графе (рис. 2) от элементов множества X отходит не более одной стрелки, что удовлетворяет определению функциональности, значит, R является функциональным соответствием.

Определение. Функциональное соответствие R, у которого область определения D_R совпадает с областью отправления X называют *отображением множества* X *во множество* Y.

Краткая запись $R: X \overset{\text{во}}{\rightarrow} Y$ означает, что соответствие R является отображением множества X во множество Y.

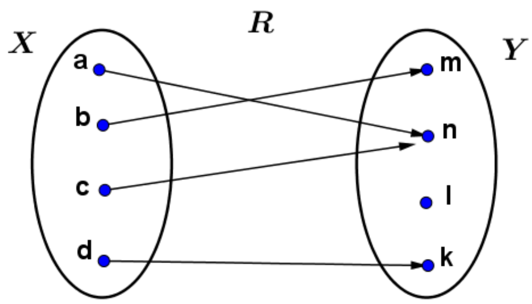


Рис. 3
$R: X \overset{\text{во}}{\rightarrow} Y$

На рис. 3 представлен граф отображения множества X во множество Y. Действительно, соответствие R функционально (от каждого элемента $x \in X$ отходит не более одной стрелки), и все элементы $x \in X$ задействованы: $D_R = X$. Следовательно, $R: X \overset{\text{во}}{\rightarrow} Y$.

Определение. Отображение R множества X во множество Y называют *инъективным* (рис. 4), если для различных элементов $x \in X$ образы их в заданном соответствии различны $(\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow R(x_1) \neq R(x_2))$.

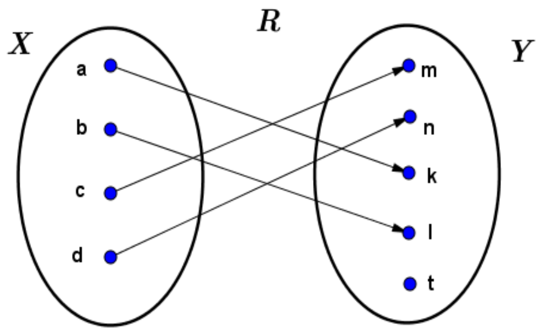


Рис. 4
R – инъективное соответствие

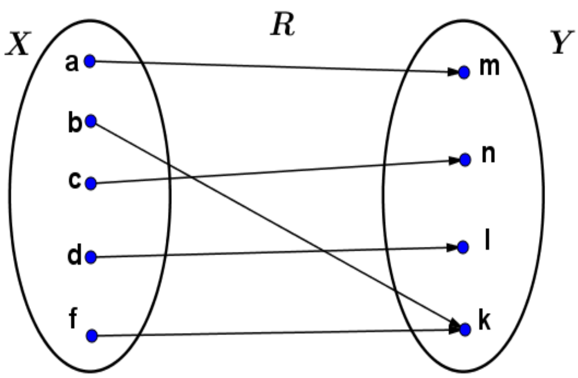


Рис. 5
R не является инъективным

На рис. 5 изображен граф соответствия R, которое не будет инъективным, потому что у элементов b и f множества X один и тот же образ $k \in Y$: $R(b) = R(f) = k$.

Определение. Функциональное соответствие R, у которого область определения D_R совпадает с областью отправления X, а область значений E_R совпадает с областью прибытия Y называют *отображением множества* X *на множество* Y или *сюръекцией* $R: X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y \Leftrightarrow (D_R = X \wedge E_R = Y)$.

Краткую запись $R: X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y$ читают так: «отображение R множества X на множество Y».

Соответствие $R,$ показанное на рис. 6 не является отображением множества на множество $X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y$, так как область значений E_R не совпадает с областью прибытия Y, $E_R \neq Y$.

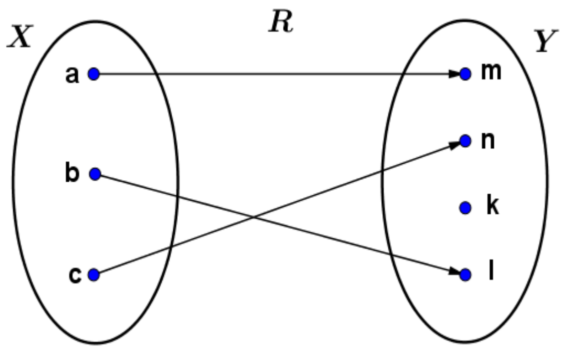


Рис. 6

R не является сюръекцией,
т.к. $E_R \neq Y$

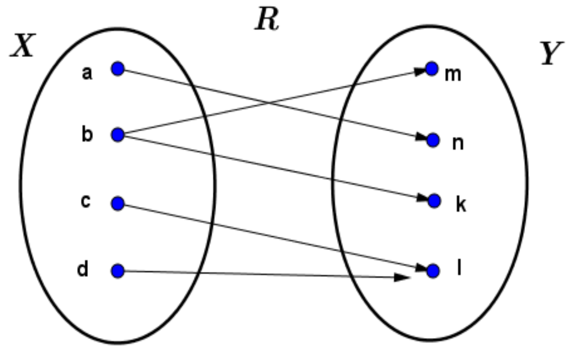


Рис. 7

R не является сюръекцией,
т.к. не является функциональным

На графе (рис. 7) также показано соответствие $R,$ не являющееся отображением множества на множество $X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y$, потому что оно не функциональное: элемент b имеет более чем один образ, $R(b) = m \neq k = R(b)$.

Определение. Соответствие R является *взаимно однозначным* (или *биективным*) тогда и только тогда, когда R – сюръективное и инъективное отображение

$$R: X \overset{\text{в.о.с.}}{\longleftrightarrow} Y \Leftrightarrow (X \overset{\text{на}}{\rightarrow} Y \wedge (\forall x_1, x_2)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow R(x_1) \neq R(x_2))).$$

Для краткости записи слов «взаимно однозначное соответствие» (в.о.с.) принято использовать обозначение $X \overset{\text{в.о.с.}}{\longleftrightarrow} Y$, где стрелка направлена в обе стороны.

На рис. 8 показано взаимно однозначное соответствие $R: X \overset{\text{в.о.с.}}{\longleftrightarrow} Y$.

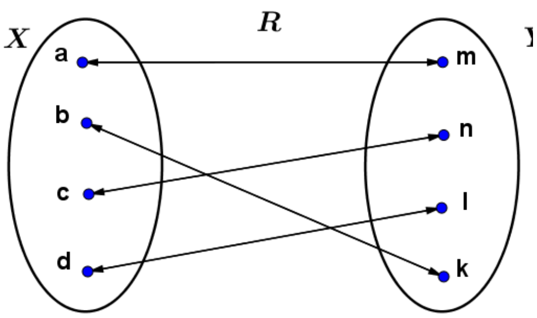


Рис. 8
$R: X \overset{\text{в.о.с.}}{\longleftrightarrow} Y$

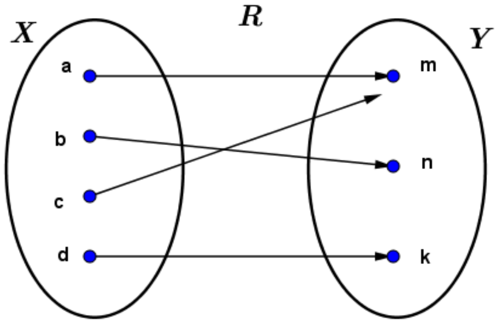


Рис. 9
R не является взаимно однозначным

На рис. 9 представлен граф соответствия, которое не является взаимно однозначным, поскольку нарушено определение инъективности отображения $R(a) = R(c) = m$.

Если между элементами множеств установлено взаимно однозначное соответствие, то для каждого элемента x одного множества найдется элемент y в другом множестве, и наоборот, каждому элементу y второго множества будет соответствовать единственный элемент x первого множества.

Определение. Если существует (хотя бы одно) биективное отображение между множествами X и Y, то говорят, что множество X *эквивалентно* множеству Y и обозначают $X \sim Y$.

На рис. 10 представлена схема рассуждения для определения вида соответствия.

Отношение «Множество X эквивалентно множеству Y» на множестве всех множеств является отношением эквивалентности. В самом деле, оно:

– рефлексивно (каждое множество эквивалентно самому себе, потому что каждому элементу множества можно поставить в соответствие тот же самый элемент, и такое соответствие будет взаимно однозначным);

– симметрично (если $X \sim Y$, то $Y \sim X$);

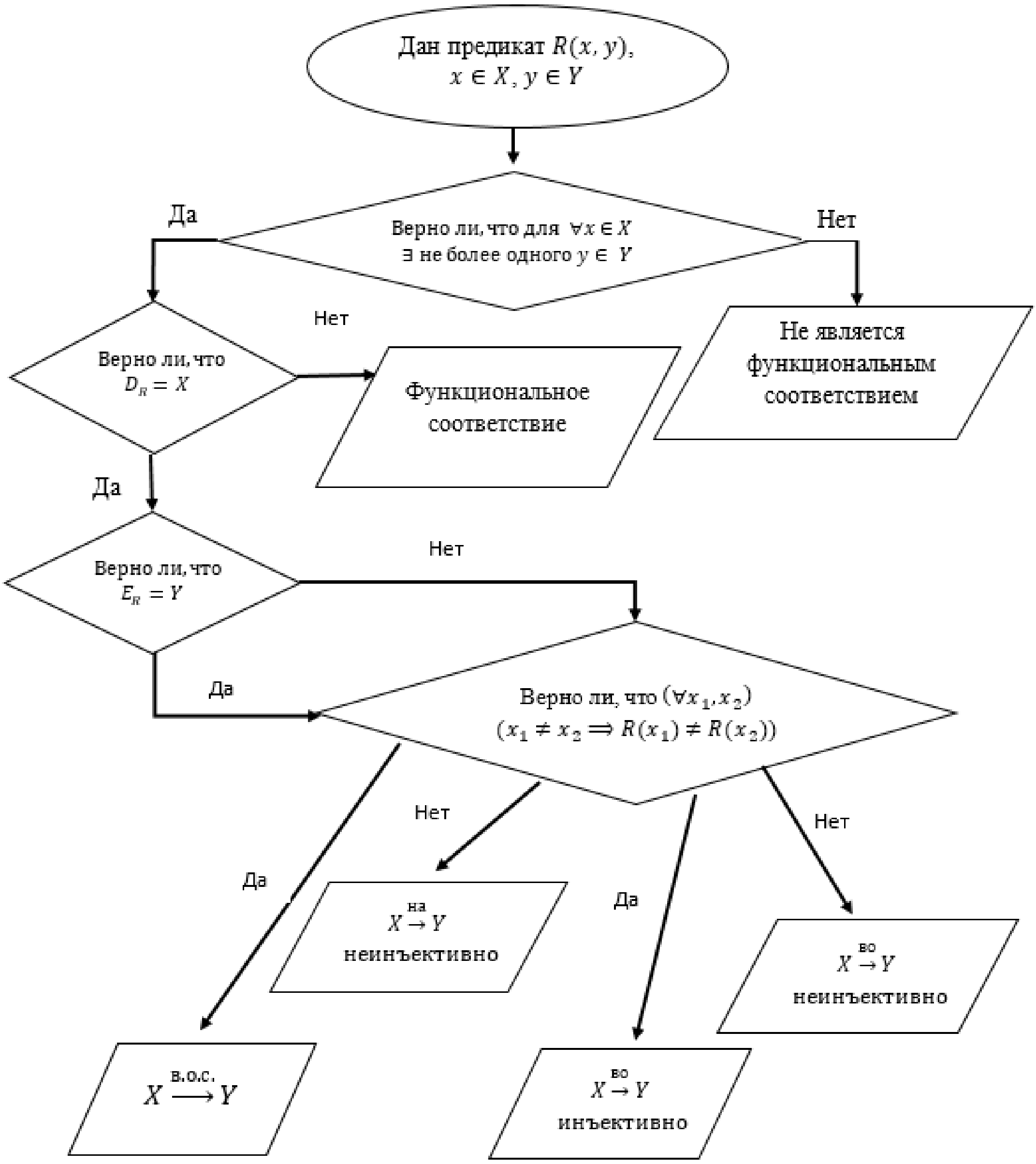
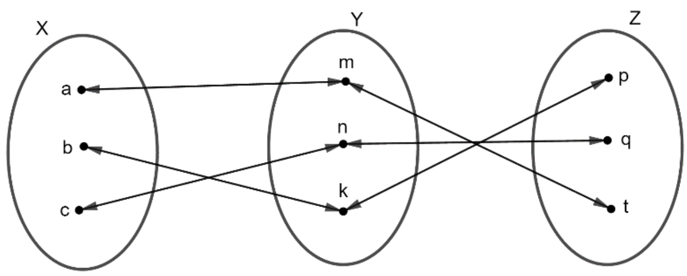


Рис. 10
Схема рассуждения для определения вида соответствия

– транзитивно (если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то если $X \sim Z$):



Видим, что у элемента $a \in X$ – единственный образ $t \in Z$, у элемента $b \in X$ – единственный образ $p \in Z$, у элемета $c \in X$ – единственный образ $q \in Z$ и наоборот. Значит, между элементами множеств X и Z установлено взаимно однозначное соответствие $X \sim Z$.

Вследствие этого универсальное множество разбивается на классы, и в один класс попадают все эквивалентные между собой множества.

Определение. Эквивалентные между собой множества называют *равномощными*.

Значит, множества из одного класса эквивалентности будут равномощными между собой.

Понятие «мощность множества» было введено Г. Кантором, оно является своего рода обобщением понятия «число элементов множества».

Для конечных множеств понятие мощности множества совпадает с уже известным нам понятием численности множества (см. параграф 5 Главы I).

Определение. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называется *счётным*.

Определение. Множество, у которого существует собственное подмножество, эквивалентное самому множеству, называют *бесконечным*.

Приведём примеры задач и их решений

Задача 1. «Выяснить, является ли соответствие R, определяемое предикатом $R(x,y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, отображением. В случае, когда R является отображением, определить его тип.

А) $R(x,y)$: «Точка x является центром окружности y», X – множество точек плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

Б) $R(x,y)$: «В многоугольник x вписана окружностьy», X – множество многоугольников плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

В) $R(x,y)$: «В треугольник x вписана окружность y», X – множество треугольников плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

Г) $R(x,y)$: «Точка x имеет ортогональной проекцией точку y», X – множество точек полуокружности, Y – множество точек диаметра этой полуокружности».

Решение.

а) Отображение любого типа является прежде всего функциональным соответствием. Поэтому проверим соответствие R на функциональность.

По определению, точка x должна быть центром не более одной окружности y. Это утверждение не будет истинным, поскольку на плоскости существуют окружности с общим центром. Значит, данное соответствие не является функциональным, а поэтому не может быть и отображением.

б) Проверим соответствие R на функциональность.

В многоугольник x можно вписать не более одной окружности y. Это утверждение будет истинным, поскольку если в многоугольник можно вписать окружность, то она будет единственной. Другими словами, в многоугольник нельзя вписать две различные окружности. Значит, R – функциональное соответствие.

Проверим, будет ли соответствие R отображением множества во множество. В этом случае, по определению $D_R = X$. Чтобы область определения соответствия R совпала с множеством X нужно, чтобы в X не было элементов, свободных от заданного соответствия. В данном случае это означает, что на плоскости не должно существовать многоугольников, в которые нельзя было бы вписать окружность. Поскольку на плоскости такие многоугольники присутствуют (например, невыпуклые), то R не является отображением $D_R \neq X$.

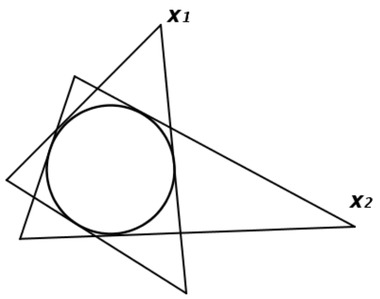
в) Проверим соответствие R на функциональность.

В треугольник x можно вписать не более одной окружности y. Это утверждение будет истинным, поскольку в треугольник нельзя вписать две различные окружности. Значит, R – функциональное соответствие.

Проверим, будет ли соответствие R отображением множества во множество. В этом случае, по определению $D_R = X$. Чтобы область определения соответствия R совпала с множеством X нужно, чтобы в X не было элементов, свободных от заданного соответствия, т.е. на плоскости не должно существовать треугольников, в которые нельзя было бы вписать окружность. Это действительно так. В любой треугольник можно вписать окружность. Значит, $D_R = X$ и R является отображением множества во множество $R: X \xrightarrow{\text{во}} Y$.

Проверим, будет ли соответствие R инъективным отображением.

По определению инъективности различным элементам из множества X должны соответствовать различные образы из множества Y: для различных треугольников x_1 и x_2 окружности, вписанные в них, должны быть различны.



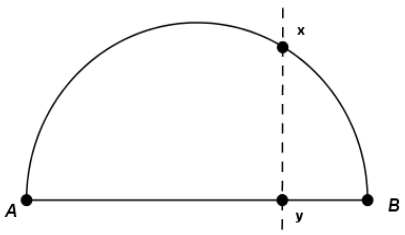
Это утверждение ложно. Значит, R не является инъективным отображением.

Проверим, будет ли соответствие R отображением множества на множество. По определению $X \overset{\text{на}}{\to} Y$ должно иметь место равенство множеств $E_R = Y$. Для совпадения области значений соответствия R с областью прибытия Y нужно, чтобы в множестве Y не было элементов, свободных от заданного соответствия. Это означает, что на плоскости не должно существовать ни одной окружности, которую нельзя было бы считать вписанной в треугольник. Это действительно так.

Значит, $E_R = Y$ и R является отображением множества на множество: $R: X \overset{\text{на}}{\to} Y$. Или, что тоже самое, R является сюръективным отображением.

Поскольку R не является инъективным отображением, то и взаимно однозначным оно быть не может. Данное в задаче соответствие является сюръективным отображением.

г) X – множество точек полуокружности AB, Y – множество точек диаметра полуокружности AB. Соответствие R задается ортогональным проектированием: xRy тогда и только тогда, когда точки x $(x \in X)$ и y $(y \in Y)$ принадлежат одному перпендикуляру к диаметру, как показано на рисунке.



Это соответствие является:

– функциональным (действительно, у точки x не может быть более одной ортогональной проекции).

– отображением $R: X \overset{\text{во}}{\to} Y$, так как $D_R = X$ (в самом деле, точке A ставится в соответствие точка A, точке B – точка B, любой другой точке x полуокружности – ее ортогональная проекция на диаметре).

– инъективным (у различных точек полуокружности различные ортогональные проекции).

– отображением $R: X \xrightarrow{\text{на}} Y$, т.к. $E_R = Y$ (в самом деле, на диаметре AB нет ни одной точки, которая не являлась бы образом какой-либо точки полуокружности).

Значит, данное соответствие является взаимно однозначным $R: X \xleftrightarrow{\text{в.о.с.}} Y$. Поэтому множество точек полуокружности эквивалентно множеству точек диаметра, на который она опирается, $X \sim Y$.

Задача 2. Доказать, что множество чётных натуральных чисел бесконечно.

Решение. Для доказательства воспользуемся определением бесконечного множества (см. определение в этом параграфе выше).

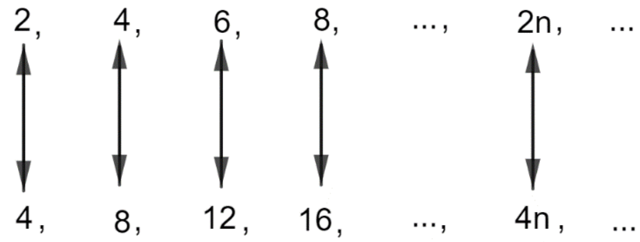
Ряд чётных натуральных чисел можно записать в виде:

A: 2, 4, 6, 8, …, $2n$, …

Выберем теперь в множестве A собственное подмножество B, например, множество натуральных чисел, кратных 4:

B: 4, 8, 12, 16, …, $4n$, …

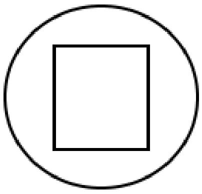
Установим взаимно однозначное соответствие между A и B:



Соответствие, при котором любому чётному натуральному числу (из множества A) ставится в соответствие число, в 2 раза большее (из множества B), а любому натуральному числу, кратному 4 (из множества B) – число, в 2 раза меньшее (из множества A), будет взаимно однозначным.

Таким образом, в множестве A выделено собственное подмножество B, эквивалентное всему множеству. По определению, A – бесконечное множество.

Задача 3. Доказать, что множество точек сторон квадрата и множество точек окружности (см. рисунок) эквивалентны.

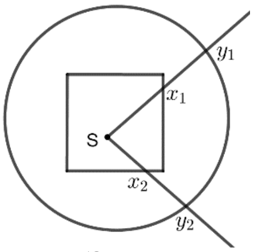


<u>Решение.</u> Для доказательства эквивалентности этих множеств нужно задать соответствие между их элементами так, чтобы оно было взаимно однозначным:

– каждой точке на стороне квадрата соответствовала бы единственная точка окружности;

– каждой точке окружности соответствовала бы единственная точка на стороне квадрата.

Таким соответствием может стать проектирование из любой точки S (выбранной внутри квадрата).



Для соответствия R имеют место:

– функциональность;

– $D_R = X$ (а значит, $R: X \overset{\text{во}}{\to} Y$);

– инъективность;

– $E_R = Y$ (а значит, $R: X \overset{\text{на}}{\to} Y$).

Здесь X – множество точек сторон квадрата, Y – множество точек окружности. Можно сделать вывод, что соответствие R является <u>взаимно</u> <u>однозначным</u>. Поэтому множество точек сторон квадрата и множество точек окружности <u>эквивалентны</u> (а следовательно, и равномощны).

6. Задания рейтинг-контроля по теме «Бинарные соответствия и отношения»

Вариант I

№ 1. Для нижеследующих соответствий сформулируйте противоположные, обратные и противоположные обратным: а) «точка a лежит на прямой b»; б) «число a является корнем уравнения b»; в) «прямая a пересекает окружность b»; г) «прямая a пересекает прямую b»; д) «число a больше числа b»; е) «элемент a принадлежит множеству b»; ж) «прямая a перпендикулярна прямой b»; з) «число a является делителем числа b»; и) «$|a| = b$»; к) «$a \leq b$»; л) «человек a выше человека b»; м) «слово a согласовано со словом b в роде, числе и падеже»; н) «город a находится в стране b»; о) «длина отрезка a равна числу b»; п) «река a впадает в море b»;

№ 2. Какие из следующих математических символов являются знаками отношений или соответствий, а какие знаками действий: а) $>$; б) $\neq$; в) $<$; г) $+$; д) $\leq$; е) $-$; ж) $\parallel$; з) $\perp$; и) $\cdot$; к) $\subset$; л) $\cap$; м) $\approx$; н) ⁝; о) $\cup$; п) $\in$; р) ; с) $\sim$; т) :? Для символов, являющихся знаками отношений, укажите множества, в которых обычно рассматриваются эти отношения (например, $\parallel$ – отношение параллельности на множестве прямых, или отношение параллельности на множестве плоскостей, или соответствие параллельности между прямыми и плоскостями).

№ 3. Дано множество $A = \{4, 2, 6, 3, 5, -3, -8, -6, 0\}$. Укажите подмножества декартова произведения $A \times A$, соответствующие отношениям: а) «a меньше b»; б) «a делится на b»; в) «число a противоположно числу b»; г) «число a вдвое больше числа b»; д) «число a на 2 меньше числа b».

№ 4. Постройте график отношения $y > 3x - 2$ заданного на множестве X, если: а) $X = \mathbb{R}$; б) $X = \mathbb{Z}$.

№ 5. Выясните, какими свойствами обладают следующие отношения, назовите среди них отношения эквивалентности: а) «a конгруэнтно b» (в множестве треугольников); б) «a концентрично b» (в множестве окружностей плоскости); в) «a равно b» (в множестве рациональных чисел); г) «a меньше или равно b» (в множестве целых чисел); д) «a не больше, чем b» (в множестве целых чисел); е) «a кратно b» (в множестве натуральных чисел); ж) «A является подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); з) «A является собственным подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); и) «A является дополнением B до прямоугольника» (в множестве геометрических фигур); к) «a следует за b» (в множестве натуральных чисел).

№ 6. На множестве $X = \{a, b, c, p\}$ задано отношение M. Является ли оно отношением порядка, если:

а) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p), (b, c), (p, b)\}$,

б) $M = \{(a, a), (b, b), (c, c), (p, p), (a, b), (b, c), (a, c)\}$,

в) $M = \{(a, b), (a, c), (a, p)\}$.

№ 7. На множестве $A = \{3, 4, 8, 5\}$ задано некоторое отношение эквивалентности R, график которого имеет вид: $R = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5), (5, 8), (8, 5), (8, 8)\}$. Постройте граф отношения R.

№ 8. Докажите, что множество натуральных чисел равномощно множеству: а) чётных натуральных чисел; б) целых отрицательных чисел; в) кубов натуральных чисел; г) натуральных чисел, кратных 8.

№ 9. Даны два множества: $A = \{17, 315, 26, 10, 125, 7\}$, $B = \{2, 3\}$. Изобразите эти множества при помощи диаграмм Эйлера-Венна и постройте графы двух соответствий, одно из которых являлось бы отображением множества A во множество B, а другое – отображением множества A на множество B. Могут ли эти отображения оказаться инъективными?

№ 10. Соответствие R задано предикатом $R(x, y)$: «У учащегося x – отец y», где $x \in X$, X – множество учеников класса, $y \in Y$, Y – множество родителей учеников этого класса. Определите, является ли соответствие R отображением. В случае, когда R является отображением, укажите его тип.

Вариант II

№ 1. Найдите область определения и множество значений для соответствия $a \leq b$, если a и b – натуральные числа и $2 \leq a < 10$, $4 \leq b < 12$.

№ 2. Множество $T = \{(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0)\}$ представляет собой соответствие между элементами множеств $X = \{1, 2, 3, 4\}$ и $Y = \{0, 1\}$. Задайте соответствие T^{-1}, обратное соответствию T, и постройте в одной координатной плоскости графики соответствий T и T^{-1}. Симметричны ли они относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов?

№ 3. Найдите множество значений функции $y = 4 - x^2$, если областью её определения является множество X: а) $X = \mathbb{R}$; б) $X = (-\infty, 0)$; в) $X = [-2, 2]$.

№ 4. Элементы множеств X и Y находятся в соответствии $y = x - 3$. Постройте график данного соответствия, если: а) $X = Y = \mathbb{R}$; б) $X = [-2, 2]$, $Y = \mathbb{R}$; в) $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \mathbb{Z}$.

№ 5. Выясните, какими свойствами обладают следующие отношения, назовите среди них отношения строгого и нестрогого порядка: а) «a конгруэнтно b» (в множестве треугольников); б) «a концентрично b» (в множестве окружностей плоскости); в) «a равно b» (в множестве рациональных чисел); г) «a меньше или равно b» (в множестве целых чисел); д) «a не больше, чем b» (в множестве целых чисел); е) «a кратно b» (в множестве натуральных чисел); ж) «A является подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); з) «A является собственным подмножеством B» (в множестве геометрических фигур); и) «A является дополнением B до прямоугольника» (в множестве геометрических фигур); к) «a следует за b» (в множестве натуральных чисел).

№ 6. В множестве K окружностей на плоскости задано отношение «окружность a лежит внутри окружности b». Какими свойствами обладает это отношение? Задаёт ли оно порядок на множестве K? Является ли этот порядок линейным?

№ 7. Какие из следующих отношений в X являются отношениями эквивалентности? Для отношений эквивалентности найдите классы эквивалентности: а) $X = \mathbb{Z}$, $(x - y) \vdots 3$; б) $X = \mathbb{N}$, $(x - y) \vdots 3$; в) $X = \mathbb{N}_0$, $(x - y) \vdots 3$ или $(y - x) \vdots 3$; г) $X = \mathbb{R}$, $x - y = 2$; д) $X = \mathbb{N}$, $(x + y) \vdots 3$; е) $X = \mathbb{Z}$, $x^2 = y^2$.

№ 8. Докажите, что множество натуральных чисел равномощно множеству: а) нечётных натуральных чисел; б) целых неотрицательных чисел; в) квадратов натуральных чисел; г) натуральных чисел, кратных 3.

№ 9. Даны два множества: $A = \{17, 315, 26, 10, 125, 7\}$, $B = \{2, 3\}$. Изобразите эти множества при помощи диаграмм Эйлера-Венна и постройте графы двух соответствий, одно из которых являлось бы функциональным, а другое – сюръективным отображением. Можно ли для данных множеств задать инъективное соответствие?

№ 10. Соответствие R задано предикатом $R(x, y)$: «Учащийся x увлекается спортом вида y», где $x \in X$, X – множество учеников спортивной школы, $y \in Y$, Y – множество видов спорта в данной спортивной школе. Определите, является ли соответствие R отображением. В случае, когда R является отображением, укажите его тип.

Глава IV. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ И СТРУКТУРЫ

1. Алгебраические операции и их свойства

С числами, множествами, высказываниями и предикатами можно выполнять определенные операции. Например, сложение, вычитание, умножение, деление – это операции над числами; объединение, пересечение, вычитание, декартово умножение – это операции над множествами; отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация – это операции над высказываниями и предикатами. Результатом действия операции с числами всегда будет новое число, с множествами – новое множество, с высказываниями или предикатами – новое высказывание или предикат соответственно. Естественно, возникает вопрос: можно ли обобщить понятие операции (и её результата) и рассматривать его независимо от природы элементов логики и алгебры?

Определение. *Алгебраической операцией* $*$ называется отображение декартова квадрата некоторого множества в это же самое множество $\varphi: X^2 \to X$.

Другими словами, результат действия алгебраической операции $*$ попадает в исходное множество: $(\forall a \in X \wedge \ \forall b \in X) \implies (a * b \in X)$ (Здесь запись $\forall a \in X \wedge \ \forall b \in X$ тождественна записи $(a, b) \in X^2$). Если на множестве X задана алгебраическая операция $*$, то говорят, что множество X *замкнуто* относительно операции $*$. *Замкнутость* множества X относительно операции $*$ равносильна тому, что $a * b$ является *алгебраической операцией* в X.

Пример. На множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ алгебраическими являются операции сложения $+$ и умножения $\cdot$. Действительно, для любой пары натуральных чисел, их сумма и произведение натуральны:

$$+ \qquad (a, b) \to a + b \qquad\qquad \cdot \qquad (a, b) \to a \cdot b$$
$$\forall\, a, b \in \mathbb{N} \ \ a + b \in \mathbb{N} \qquad\qquad \forall\, a, b \in \mathbb{N} \ \ a \cdot b \in \mathbb{N}$$
$$(2,3) \to 2 + 3 = 5 \in \mathbb{N} \qquad\qquad (2,3) \to 2 \cdot 3 = 6 \in \mathbb{N}$$
$$(3,2) \to 3 + 2 = 5 \in \mathbb{N} \qquad\qquad (3,2) \to 3 \cdot 2 = 6 \in \mathbb{N}$$

Вычитание на множестве $\mathbb{N}$ не является алгебраической операцией, т.к. разность натуральных чисел не всегда определятся как число натуральное. Например, паре $(3,2) \in \mathbb{N}^2$соответствует разность $3 - 2 = 1,\ 1 \in \mathbb{N}$; а разность, соответствующая паре $(2,3) \in \mathbb{N}^2$ не есть натуральное число $2 - 3 = -1, -1 \notin \mathbb{N}$.

Определение. *Частичной алгебраической операцией* называется та операция, результат действия которой определяется только при дополнительных условиях.

Вычитание и деление на множестве $\mathbb{N}$ – это частичные алгебраические операции: дополнительным условием существования для разности будет отношение больше $a > b$, для частного – наличие отношения делимости $a \vdots b$.

$\forall\, a, b \in \mathbb{N} \rightarrow a{:}\, b \in \mathbb{N}-?$ Выполнено ли требование: «для любых чисел a, b?»

Поставим паре натуральных чисел в соответствие их частное: $(a, b) \rightarrow a{:}\, b$.

Рассмотрим пару $(8, 4) \in \mathbb{N}^2$, $(8,4) \rightarrow 8{:}\, 4 = 2$, полученный результат $2 \in \mathbb{N}$.

Теперь возьмем пару $(9, 4) \in \mathbb{N}^2$, $(9,4) \rightarrow 9{:}\, 4 = \frac{9}{4}, \frac{9}{4} \notin \mathbb{N}$. Вывод: не для всех натуральных чисел a, b результат операции деления будет числом натуральным, поэтому деление на множестве $\mathbb{N}$ – частичная алгебраическая операция.

Рассуждая аналогичным образом, заключаем, что на основных числовых множествах алгебраическими являются следующие операции:

$\mathbb{N}$	$\subset$	$\mathbb{Z}$	$\subset$	$\mathbb{Q}$	$\subset$	$\mathbb{R}$
$+, \cdot$		$+, \cdot, -$		$+, \cdot, -, :$		$+, \cdot, -, :, \sqrt{}$

Легко проверить, что:

для любых двух множеств A и B все операции над ними в универсальном множестве будут алгебраическими	для любых двух высказываний A и B все логические операции над ними будут алгебраическими
$A \cup B, A \cap B, A \backslash B, A \times B, \overline{A}$	$A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B, \overline{A}$

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *коммутативной*, если для любых $a, b \in X$ выполняется равенство $a * b = b * a$.

Определение. Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется *ассоциативной*, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Определение. Алгебраическая операция $\circ$ на множестве X называется *дистрибутивной слева* относительно операции $*$, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство: $a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

Определение. Алгебраическая операция $\circ$ на множестве X называется *дистрибутивной справа* относительно операции $*$, если для любых $a, b, c \in X$ выполняется равенство: $(a * b) \circ c = (a \circ c) * (b \circ c)$.

Определение. Операция $\circ$ на множестве X называется *дистрибутивной*, если $\circ$ дистрибутивна слева и справа относительно операции $*$.

Приведём примеры задач и их решений

Задача 1. Определите, для каких пар $\langle *, B \rangle$ истинно высказывание «умножение $*$ является алгебраической операцией в множестве B целых чисел вида $3k + 1$».

Решение. Пусть $p = 3k + 1 \in B$, $q = 3m + 1 \in B$. Рассмотрим их произведение: $p \cdot q = (3k + 1) \cdot (3m + 1) = 9k \cdot m + 3m + 3k + 1 = 3 \cdot (3km + m + k) + 1$. Обозначим выражение в круглых скобках через t, получим: $p \cdot q = 3t + 1 \in B$.

Видим, что произведение чисел $p \cdot q$ является элементом исходного множества B. Следовательно, операция умножения является алгебраической операцией в множестве целых чисел вида $3k + 1$, а множество чисел вида $3k + 1$ является замкнутым относительно операции умножения.

Задача 2. Является ли алгебраическая операция, задаваемая формулой $\langle x, y \rangle \to 3x \cdot y + 1$, в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ коммутативной?

Решение. Для проверки коммутативности операции надо проверить справедливость равенства $a * b = b * a$:

$a * b = 3a \cdot b + 1, \quad b * a = 3b \cdot a + 1.$

Так как $3a \cdot b + 1 = 3b \cdot a + 1$, то $a * b = b * a$. Значит, операция, задаваемая формулой $\langle x, y \rangle \to 3x \cdot y + 1$, в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ коммутативна.

Задача 3. Проверить, является ли операция, задаваемая формулой $\langle x, y\rangle \to x^2 - y^2$, в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ ассоциативной.

Решение. Для доказательства свойства ассоциативности надо проверить справедливость равенства $a * (b * c) = (a * b) * c$ для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим левую часть равенства. Имеем:

$$(b * c) = b^2 - c^2 \Longrightarrow a * (b * c) = a * (b^2 - c^2) = a^2 - (b^2 - c^2)^2.$$

Для правой части получаем:

$$a * b = a^2 - b^2 \Longrightarrow (a * b) * c = (a^2 - b^2) * c = (a^2 - b^2)^2 - c^2.$$

В некоторых случаях, например, при $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$ или $a = 1 \wedge c = 1 \wedge b = 0$, левая часть равенства равна правой части. Однако, определение требует выполнения равенства для всех целых a, b, c.

Значит, при $\forall a, b, c$: $a^2 - (b^2 - c^2)^2 \neq (a^2 - b^2)^2 - c^2$. Поэтому равенство $a * (b * c) = (a * b) * c$ не всегда является справедливым. Следовательно, операция $x^2 - y^2$ в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ ассоциативной не является.

Задача 4. Является ли умножение в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ дистрибутивным относительно операции вычитания?

Решение. Умножение является дистрибутивной операцией относительно вычитания, потому что для любых $a, b, c \in \mathbb{Z}$ выполняются равенства:

$a \cdot (b - c) = ab - ac,$

$(b - c) \cdot a = ba - ca.$

2. Основные алгебраические структуры

Определение. *Алгебраической структурой* называется непустое множество, на котором определены операции, обладающие определенными свойствами.

Основными алгебраическими структурами являются *группа, кольцо, поле*.

Определение. Множество G с введенной на нем алгебраической операцией $*$ называется *группой* $(G,*)$, если выполнены три условия:

1) операция $*$ должна быть ассоциативной: $a*(b*c)=(a*b)*c$;

2) для любого элемента $x \in G$ должен существовать *нейтральный* элемент e такой, что $x*e=e*x=x$;

3) для любого элемента $x \in G$ должен существовать ему *симметричный* элемент x' такой, что $x'*x=x*x'=e$.

Пример. Проверим, является ли группой множество натуральных чисел по сложению $(\mathbb{N},+)$, по умножению $(\mathbb{N},\cdot)$:

1) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \quad a+(b+c)=(a+b)+c$ выполняется, $\Longrightarrow$ $+$ ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a+e=e+a=a$, значит, $e=0$, но $0 \notin \mathbb{N}$, т.е. $e \notin \mathbb{N}$, нейтрального элемента для сложения в множестве натуральных чисел не существует, $\Longrightarrow$ условие 2) не выполняется;

Вывод: множество $\mathbb{N}$ группу по сложению не образует.

1) $\forall a,b,c \in \mathbb{N} \quad a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, $\Longrightarrow$ умножение ассоциативно;

2) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a\cdot e=e\cdot a=a$, значит, $e=1, 1 \in \mathbb{N}$ – выполняется;

3) $\forall a \in \mathbb{N} \quad a'\cdot a=e$, т.е. $a'\cdot a=1$, получается $a'=\frac{1}{a}$. В случае $a \neq 1$ имеем $a' \notin \mathbb{N}$. Значит, условие 3) не выполняется для всех натуральных a.

Вывод: множество $\mathbb{N}$ группу по умножению не образует.

Пример. Проверим, является ли группой множество целых чисел по сложению $(\mathbb{Z},+)$, по умножению $(\mathbb{Z},\cdot)$. Действительно, $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ имеем:

$+$	$\cdot$
$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
$a+e=e+a=a, \quad e=0, \quad e \in \mathbb{Z}$	$a\cdot e=e\cdot a=a, \quad e=1, \quad 1 \in \mathbb{Z}$
$A \cup A'=E\ ,\ A \cup A'=\emptyset$	$a'\cdot a=e, a'\cdot a=1,\ a'=\frac{1}{a},\ a' \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}$ образует группу по сложению	$\mathbb{Z}$ не образует группы по умножению

Пример. Проверим, является ли группой универсальное множество U по объединению $(U,\cup)$, по пересечению $(U,\cap)$. Действительно, $\forall A, B, C \in U$ имеем:

$\cup$ – алгебраическая операция	$\cap$ – алгебраическая операция
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup E = E \cup A = A,\ E = \emptyset,\ \emptyset \in U$	$A \cap E = E \cap A = A,\ \ E = A,\ A \in U$
$A \cup A' = E\ , A \cup A' = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$, но $A\forall$	$A \cap A' = E\ , A \cap A' = A, \Rightarrow A \neq \emptyset$
U по $\cup$ не образует группу	$(U,\cap)$ – группа

Определение. Множество K с двумя алгебраическими операциями $*,\ \circ$ называется *кольцом* $(K,*,\circ)$, если выполнены следующие условия:

1) $(K,*)$ – группа.
2) Операция $\circ$ является дистрибутивной относительно операции $*$.

Примером кольца является множество целых чисел $(\mathbb{Z}, +,\cdot)$. Предлагается читателю убедиться в этом самостоятельно.

Определение. Множество P с введенными операциями $*,\ \circ$ является *полем* $(P,*,\circ)$, если выполнены следующие условия:

1) $(P,*,\circ)$ – кольцо.
2) Разрешимо уравнение вида $a \circ x = b$.

Примером поля служит $(\mathbb{Q}, +,\cdot)$. В самом деле,

1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ образует группу по сложению $(\mathbb{Q}, +)$;
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ имеет место дистрибутивность умножения относительно сложения: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) +\ (a \cdot c)$, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$;

Из 1.–2. следует, что $(\mathbb{Q}, +,\cdot)$ является кольцом.

3. $a \cdot x = b, x = \frac{b}{a}, \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$, т.е. $x \in \mathbb{Q}$ и, значит, уравнение в множестве $\mathbb{Q}$ разрешимо. Что и требовалось доказать.

3. Задания рейтинг-контроля по теме «Алгебраические операции и структуры»

Вариант I

№ 1. Докажите, что соответствие $\langle x,\ y\rangle \to 3x + 2y$ является алгебраической операцией в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

№ 2. Объясните, какие свойства действий использованы при вычислении $3847 + (2456 - 1827) = (3847 - 1827) + 2456 = 2020 + 2456$; $73 \cdot 35 = (70 + 3) \cdot 35 = 70 \cdot 35 + 3 \cdot 35$.

№ 3. Применяя дистрибутивный закон умножения относительно сложения и вычитания, найдите значение выражения: а) $3 \cdot (20 + 1)$, б) $(70 - 4) \cdot 5$, в) $6 \cdot 19$.

№ 4. Дано множество $B = \{0, 1\}$ с такой операцией сложения: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$. Докажите, что B – группа.

№ 5. Определите, является кольцом или полем множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где a и b – целые, $a, b\ \in \mathbb{Z}$.

Вариант II

№ 1. Докажите, что соответствие $\langle x,\ y\rangle \to 2x + 3y$ является алгебраической операцией в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел.

№ 2. Объясните, какие свойства действий использованы при вычислении: $299 + 1594 = (300 - 1) + (1600 - 6) = (300 + 1600) - (1 + 6) = 1900 - 7$; $25 \cdot 651 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 651 = 651 \cdot 100$.

№ 3. Применяя дистрибутивный закон умножения относительно сложения и вычитания, найдите значение выражения: а) $5 \cdot (30 + 4)$, б) $(60 - 2) \cdot 5$, в) $34 \cdot 3$.

№ 4. Дано множество $B = \{0, 1, 2\}$ с такой операцией сложения: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 0 + 2 = 2, 2 + 0 = 2, 1 + 1 = 2, 1 + 2 = 0$, $2 + 1 = 0$, $2 + 2 = 1$. Докажите, что B – группа.

№ 5. Определите, является кольцом или полем множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b – целые, $a, b\ \in \mathbb{Z}$,

Глава V. КОМБИНАТОРИКА

1. Понятие о комбинаторной задаче

Учитель – человек творческий, кладезь идей и генератор оригинальных решений. Богатый практический опыт в умении анализировать, рассуждать, находить закономерности, устанавливать связи, классифицировать, делать выводы приобретается благодаря постоянным упражнениям в решении задач. Эта тренировка – регулярная мозговая атака – пополняет копилку практических навыков видения всевозможных вариантов решений привычной жизненной ситуации. С задачами, в которых приходится выбирать те или иные объекты, располагать их в определенном порядке, люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшее расположение охотников, воинов во время битвы, инструментов для выполнения работы[3].

Задачи на определение числа возможных соединений элементов с определенными свойствами, которые можно составить из элементов заданного множества, называются *комбинаторными*. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется *комбинаторикой*.

Теперь комбинаторные задачи приходится решать представителям различных специальностей. Начальнику фирмы при распределении нескольких видов работ, агроному при размещении посевов сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью образовательного учреждения при составлении расписания уроков, ученому-химику при рассмотрении различных типов связи атомов в молекулах и другим.

---

[3] Первые упоминания о вопросах, близких к комбинаторным, встречаются в китайских рукописях, относящихся к 12-13 вв. до н.э.

Значительный толчок в развитии комбинаторики дали азартные игры, существовавшие еще в глубокой древности, но получившие особое распространение в средние века. Например, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Н. Тарталья (ок. 1499-1557). Теоретические исследования вопросов комбинаторики предприняли французские ученые Б. Паскаль (1623-62) и П. Ферма (1601-61). Дальнейшее развитие связано с именами Я. Бернулли (1654-1705), Г. Лейбница (1646-1716) и Л. Эйлера (1707-83).

Понимание проблем комбинаторики, умение подсчитывать число различных возможностей, связанных с упорядочением множеств и выделением из них подмножеств, является весьма важным для правильного восприятия статических закономерностей, проявляющихся в природе и технике, для восприятия законов природы, носящих вероятностный характер.

В настоящее время комбинаторика является одним из важных разделов математической науки. Её методы широко используются для решения практических и теоретических задач. В начальном обучении математике роль комбинаторных заданий постоянно возрастает, поскольку в них заложены большие возможности не только для развития мышления учащихся, но и для подготовки учащихся к решению проблем, возникающих в повседневной жизни.

Действительно, иногда встречаемся с такими ситуациями, где нужно:

1) выбрать двух дежурных из 25 студентов;

2) выбрать председателя и секретаря собрания из 25 присутствующих;

3) угадать, как будут распределены золотая, серебряная и бронзовая медали в розыгрыше по футболу, если участвуют 16 команд;

4) угадать, как будут расположены эти 16 команд в итоговой таблице чемпионата;

5) выстроить в ряд 5 человек;

6) вычеркнуть 6 выигрышных номеров из 49 в карточке лотереи;

7) записать четырехзначные числа, используя две цифры 1 и 0.

Становится интересно, сколько же существует способов осуществить действие в ситуациях 1-7. Имеем семь комбинаторных задач.

Что объединяет все эти задачи?

1. В каждой задаче дано конечное множество.

2. Из элементов данного множества составляют (выбирают) некоторые соединения, элементы которых обладают указанными в задаче свойствами.

3. Вопрос, на который нужно ответить (сколько существует таких соединений или сколькими способами можно осуществить указанные действия?).

2. Способы решения комбинаторных задач

Комбинаторные задачи в начальном курсе математики решаются, как правило, методом перебора. Для облегчения этого процесса часто используются таблицы и графы. Именно поэтому будущему учителю начальных классов необходимы определённые умения и навыки решения комбинаторных задач. На первых порах бакалавр начального образования должен, решая несложные комбинаторные задачи, уметь грамотно осуществлять перебор всех возможных вариантов. Будущему учителю надо знать общие правила комбинаторики (в частности, правила суммы и произведения), иметь представление о видах комбинаторных соединений и уметь подсчитывать их число по формулам.

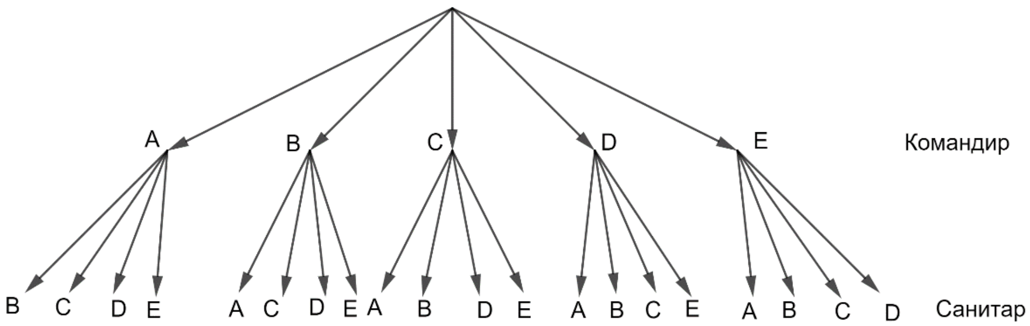
Графический способ

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать командира и санитара из пяти учеников?

Решение. Пусть M – множество учеников, обозначим его элементы A, B, C, D, E.

На первом шаге будем выбирать командира. Имеется 5 возможностей: A, B, C, D, E. На втором шаге будем выбирать санитара. Имеется 4 возможности, так как выбранный командир не может быть санитаром.

Все представленные возможности удобно изобразить графически.



На схеме каждому варианту выбора командира и санитара соответствует путь, идущий по стрелке из верхней строчки в нижнюю. Например, путь BD означает, что ученик B – командир, а ученик D – санитар. Число всех путей равно числу букв в нижней строчке и равно числу всех возможных вариантов выбора командира и санитара.

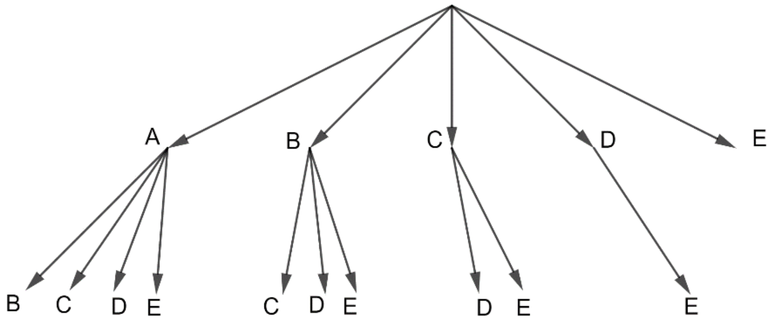
Ответ: существует 20 способов выбора командира и санитара из 5 учеников.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из пяти учеников?

Решение. Пусть M – множество учеников, $M = \{A, B, C, D, E\}$.

На первом шаге выбираем одного дежурного. Всего 5 возможностей: A, B, C, D, E. На втором шаге выбираем другого дежерного. В зависимости от выбора первого дежурного будут различные возможности выбора другого дежурного.

Все имеющиеся возможности изобразим графически (рис. 2):



На схеме каждому варианту выбора двух дежурных соответствует путь, идущий по стрелке из верхней строчки к нижней. Число всех таких путей равно 10.

Ответ: существует 10 способов выбора двух дежурных из пяти учеников.

Замечание 1. На схеме видно, что каждый ученик дежурит с любым другим учеником только один раз.

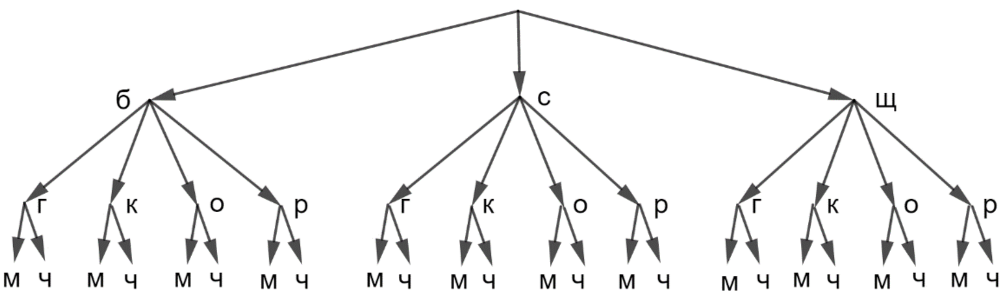
Замечание 2. На схеме от E нет стрелок, так как ученик E уже дежурил с учениками A, B, C, D.

Задача 3. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд, если в перечне первых блюд – борщ, суп, щи, в перечне вторых блюд – гуляш, котлеты, оладьи и рыба, в перечне третьих блюд – морс, чай?

Решение. M_1 – множество первых блюд, $M_1 = \{\text{б}, \text{с}, \text{щ}\}$, M_2– множество вторых блюд, $M_2 = \{\text{г}, \text{к}, \text{о}, \text{р}\}$, M_3 множество третьих блюд, $M_3 = \{\text{м}, \text{ч}\}$.

На первом шаге выбираем первое блюдо, имеется 3 возможности: б, с, щ. Независимо от принятого на первом шаге решения, есть 4 возможности выбора второго блюда: г, к, о, р. На третьем шаге – две возможности выбора третьего блюда: м или ч, независимо от выбора двух первых блюд.

Все возможные варианты изображены на схеме (рис. 3).



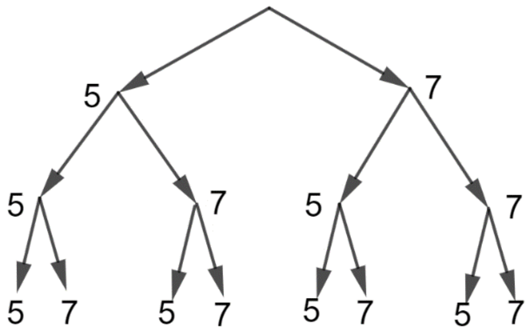
Каждому варианту обеда соответствует путь, идущий от верхней строчки к нижней. Например, путь с → к → м соответствует обеду «суп – котлета – морс».

Ответ: всего существует 24 варианта обеда.

Задача 4. Сколько трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 5 и 7?

Решение. Пусть M – множество цифр $M = \{5, 7\}$. На первом шаге записываем цифру сотен, имеется 2 возможности: 5 или 7.

На втором шаге записываем цифру десятков, также две возможности 5 или 7, так как цифры в записи числа могут повторяться. На третьем шаге записываем цифру единиц. Имеется 2 возможности: 5 или 7.



На схеме видно, что можно записать 8 трехзначных чисел с помощью цифр 5 или 7.

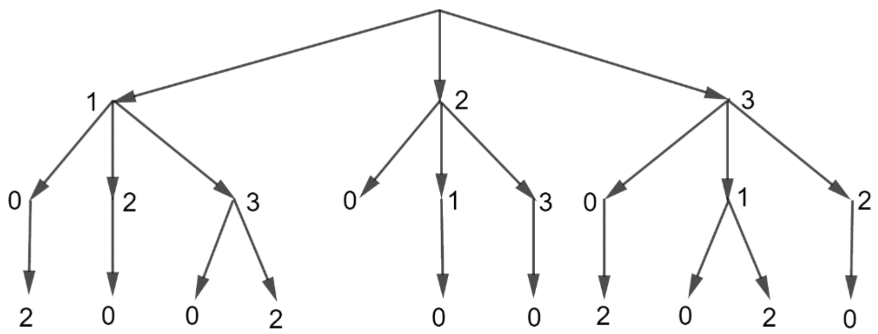
Ответ: из двух цифр 5 и 7 можно составить 8 трехзначных чисел.

Задача 5. Сколько трехзначных четных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 2, 3, причем все цифры в числе различные.

Решение. Пусть M – множество цифр, $m(M) = 4$.

На первом шаге записываем цифру сотен. Имеем 3 возможности: 1, 2 или 3. Цифра нуль не может быть в разряде сотен трехзначного числа. На втором шаге записываем цифру десятков. Здесь может быть любая из трех цифр, кроме записанной в разряде сотен. На третьем шаге записываем цифру единиц. Это может быть 0 или 2 (согласно условию – числа четные), причем только в тех случаях, где эти цифры не записаны в разряде сотен или десятков.

Графическое изображение даёт наглядную возможность составления таких соединений.



Ответ: всего можно записать 10 четных трехзначных чисел: 102, 120, 130, 132, 210, 230, 302, 310, 312, 320.

Итак, графический способ решения комбинаторных задач позволяет:

1) наглядно представить процесс составления соединений;

2) осознать возможности составления соединений;

3) подсчитать число возможных соединений.

Этот способ решения комбинаторных задач доступен детям начальных классов.

Однако, этот способ решения целесообразно применять при небольшом числе элементов в множестве и в составляемом соединении.

Общие правила решения комбинаторных задач
Правило суммы

Задача 1. В коробке 6 синих карандашей и 12 красных. Сколько всего карандашей в коробке?

Решение. Пусть A – множество синих карандашей, $m(A) = 6$, B – множество красных карандашей, $m(B) = 12$). $A \cup B$ – множество всех карандашей в коробке, причем $A \cap B = \emptyset$. Известно, что $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, если $A \cap B = \emptyset$, тогда $m(A \cup B) = 6 + 12 = 18$.

Изменим вопрос к задаче: сколькими способами можно выбрать из коробки один карандаш? Получим комбинаторную задачу. Число способов выбора одного карандаша равно числу всех карандашей в коробке, т.е. 18. Но 18 – это сумма 6 и 12, где 6 – число способов выбора синего карандаша, а 12 – число способов выбора красного карандаша.

Известную теорему о числе элементов объединения двух непересекающихся множеств в комбинаторике можно сформулировать следующим образом:

Правило суммы. Если объект a можно выбрать n способами, а объект b можно выбрать k способами, то выбор объекта a или b можно сделать $n + k$ способами.

Задача 2. Сколькими способами можно выбрать гласную или согласную букву из слова "учебник"?

Решение. Пусть A – множество гласных, а B – множество согласных в слове "учебник". Число способов выбора гласной буквы равно 3, число способов выбора согласной буквы – 4. Выбрать букву гласную или согласную можно по правилу суммы семью способами.

Правило произведения

Рассмотрим задачу. Даны два множества $A = \{а, о, у\}$ и $B = \{б, г\}$. Сколько закрытых слогов можно записать из элементов множеств A и B?

Решение. Выпишем все закрытые слоги: аб, аг, об, ог, уб, уг. Получим 6 слогов.

Все закрытые слоги можно рассматривать как элементы декартова произведения множеств A и B. Известно, что $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$, отсюда $m(A \times B) = 3 \cdot 2 = 6$.

Изменим вопрос к задаче. Сколькими способами можно записать закрытый слог из элементов множеств A и B?

Получим комбинаторную задачу. Число способов записи закрытого слога равно числу элементов декартова произведения множеств A и B, т.е. 6. Используя равенство $m(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$, имеем $6 = 3 \cdot 2$, где 3 – число способов выбора первой компоненты пары, $m(A) = 3$; 2 – число способов выбора второй компоненты пары, $m(B) = 2$.

Вывод. Число способов записи закрытого слога равно произведению числа способов выбора первой и второй компоненты пары.

Решение этой задачи было основано на использовании теоремы о числе элементов декартова произведения двух множеств.

В комбинаторике эта теорема формулируется как

Правило произведения. Если первую компоненту пары можно выбрать n способами, а вторую компоненту можно выбрать k способами, то число всевозможных пар равно произведению чисел n и k: $n \cdot k$.

Заметим здесь, что правило произведения можно применить для любого конечного числа множеств.

3. Виды комбинаторных соединений

При знакомстве с комбинаторикой бакалавры изучают три группы соединений. В каждой группе будут соединения *без повторений* (когда все элементы набора различны) и соединения *с повторениями* (если в наборе встречаются одинаковые элементы). Поэтому изучают шесть видов задач. Определим особенности каждого вида[4] и алгоритм работы над решением комбинаторных задач.

Решение комбинаторной проблемы зависит от *порядка* и *состава* элементов в искомых соединениях. Поэтому анализ каждой задачи начнем с вопроса: важен ли порядок следования элементов? Если порядок следования элементов важен, то это кортеж (упорядоченная последовательность элементов), если порядок не важен, то это подмножество элементов. Второй вопрос – все ли элементы данного множества входят в искомое соединение? Ответим на него в процессе решения задач.

Размещения без повторений: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$.

Имеется n различных предметов. Сколько из них можно составить k- соединений? Два соединения различны, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Задача 1. Даны цифры 1, 2, 3. Составить всевозможные двузначные числа так, чтобы цифры числа были различны.

Решение. Пусть M – множество цифр, $M = \{1, 2, 3\}$. Какие составлять соединения: кортежи или подмножества?

[4] В занимательной форме доступным языком комбинаторика представлена в книгах Н. Я. Виленкина и его последователей.

Соединения определенной длины, в которых порядок важен. Это кортежи длины 2. Числа двузначные, поменяв местами цифры в числе получится другое число, например, числа 12 и 21 различны. Все ли элементы входят в соединение? В множестве M 3 элемента, а длина кортежа 2 (для трёх претендентов предоставлено только два места), т.е. не все.

Значит, искомые соединения – это размещения без повторений из 3 по 2:

$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Ответ: из цифр 1, 2, 3 можно составить 6 двузначных чисел.

Размещения с повторениями: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Даны предметы n различных видов. Из них составляют всевозможные соединения по k предметов в каждом. В соединения могут входить и предметы одного вида. Два соединения различны, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. Надо найти общее число таких соединений.

Задача 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 7 и 8?

Решение. Какие соединения требуются: кортежи или подмножества? В задаче речь идет про соединения определенной длины, в которых важен порядок следования цифр. Это кортежи длины 4. Надо составить четырехзначные числа, при этом, если в числе поменять местами разные цифры, то получится другое число. Например, числа 7778 и 7877 различны (два вида претендентов будут занимать четыре предоставленных места).

Значит, искомые соединения – это размещения с повторениями из 2 по 4:

$$\overline{A_2^4} = 2^4 = 16.$$

Ответ: из цифр 7 и 8 можно составить 16 четырехзначных чисел.

Действительно, выпишем эти числа: 7888, 8788, 8878, 8887, 7788, 8877, 7878, 7887, 8787, 8778, 7778, 7877, 7787, 8777, 7777, 8888. Всего 16 чисел.

Перестановки без повторений: $P_n = n!$.

n-перестановки – это размещения без повторений из n элементов, в которые входят все элементы.

n-перестановки – это всевозможные n-соединения, каждое из которых содержит все эти элементы по одному разу и которые отличаются друг от друга лишь порядком.

<u>Задача 3.</u> Даны цифры 1, 2, 3. Составить всевозможные трёхзначные числа так, чтобы цифры в числе не повторялись.

<u>Решение.</u> Надо составить соединения определенной длины, в которых порядок важен. Это кортежи длины 3, так как в задаче говорится про трехзначные числа. Если в трехзначном числе поменять цифры местами, то получится другое число. Например, числа 213 и 231 различны.

Значит, искомые соединения – это размещения без повторений из 3 по 3 или перестановки из 3 элементов (количество предоставленных мест – 3, претендентов на места – 3, $\Longrightarrow$ все места будут заняты $\Longrightarrow$ это перестановки).

$$P_3 = A_3^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

<u>Ответ:</u> из цифр 1, 2, 3 можно составить 6 трехзначных чисел.

Перестановки с повторениями: $\bar{P}_{n=n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$.

Имеются предметы k различных типов. Сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, …, n_k элементов k-того типа? Если бы все элементы были различны, то число перестановок равнялось бы $n!$. Множество всех $n!$ перестановок распадается на части, состоящие из $n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!$ одинаковых перестановок каждая.

<u>Задача 4.</u> Сколько разных соединений можно составить из букв слова «мама»?

<u>Решение.</u> Искомые последовательности – это кортежи длины 4, среди элементов множества есть одинаковые, меняя местами одинаковые элементы, нового соединения не получится. Порядок следования элементов важен, состав не меняется (две буквы **а**, две буквы **м**). Всего из букв слова «мама» можно образовать шесть различных четырехбуквенных последовательностей: *мама, амам, амма, маам, аамм, ммаа*. Эти соединения – перестановки из четырех элементов с повторениями.

$$\bar{P}_{4=2+2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 2\cdot 3 = 6.$$

Ответ: из букв слова «мама» можно составить 6 соединений.

Сочетания без повторений: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

k-сочетания из n элементов – всевозможные k-соединения, составленные из этих элементов и отличающиеся друг от друга составом, но не порядком элементов.

Задача 5. Сколькими способами можно выбрать 3 различные краски из имеющихся пяти?

Решение. Неважно в каком порядке набираются краски в тройку, важны цвета красок в соединении. Один такой набор отличается от другого, например, цветом одной краски.

Искомые соединения – сочетания с повторениями из 5 элементов по 3.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 5\cdot 2 = 10.$$

Ответ: из пяти разных красок можно составить 10 наборов по 3 краски в каждом.

Сочетания с повторениями: $\bar{C}_n^k = \frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = C_{n+k-1}^k$.

Имеются предметы n различных типов. Сколько k-соединений можно сделать из них, если не принимать во внимание порядок элементов в комбинации? Различные соединения должны отличаться хотя бы одним предметом.

Задача 6. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Пусть M – множество сортов пирожных, $M = \{\text{н}, \text{э}, \text{п}, \text{с}\}$. Нужно купить 7 пирожных. Число пирожных больше числа сортов пирожных, значит, в наборе будут одинаковые сорта пирожных. Например, н, н, н, э, п, п, с означает, что купили 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 слоеное пирожное; или **н**, н, н, н, н, с, с означает, что купили 5 наполеонов и 2 слоеных пирожных.

Порядок, в котором пирожные укладываются в коробку неважен. Это будут сочетания с повторениями из 4 различных элементов по 7.

Найдем число таких сочетаний.

$$\bar{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120.$$

Можно было продолжить рассуждение. Зашифруем каждую покупку с помощью единиц и нулей. Например, покупку, обозначенную н, н, н, э, п, п, с, зашифруем так: 1110101101, где единицы обозначают купленные пирожные, а нули отделяют один сорт пирожного от другого. Набор пирожных н, н, н, н, н, с, с зашифруем так 1111100011, где единицы обозначают купленные пирожные, два нуля обозначают отсутствие в покупке двух сортов пирожных.

Получим, что разным покупкам соответствует разные комбинации из 7 единиц и трех нулей. Справедливо и обратное: каждой комбинации из 7 единиц и трех нулей соответствует некоторая покупка. Например, комбинации 0110111110 соответствует покупка: 2 эклера и 5 песочных пирожных.

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей.

$$\bar{P}_{10=7+3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 3\cdot 10 = 120.$$

Ответ: из 4 сортов пирожных можно образовать 120 наборов по 7 пирожных в каждом.

Итак, если в задаче дано конечное множество, элементы которого обладают некоторыми свойствами, и из этих элементов составляют соединения, отвечая на вопрос: «Сколько таких соединений можно составить?» или «Сколькими способами можно осуществить указанные действия», то перед вами комбинаторная задача. При составлении различных комбинаторных соединений обратите внимание на порядок расположения элементов. Если порядок следования элементов не важен, то это сочетания; если порядок важен, то это размещения (не все элементы входят в соединение) или перестановки (все элементы входят в соединение).

По образцу решений задач 1 – 6 можно выполнить следующие ниже задания, после каждого из которых в скобках указан комментарий и/или ответ.

1. В первом классе 8 предметов и 4 урока в день. Сколькими способами может быть составлено расписание на один день? (Кортежи длины 4, состав важен. $A_8^4 = 1680$.)

2. На тренировке занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером разных стартовых пятерок? (Пятиэлементные подмножества, состав важен. $C_{12}^5 = 792$.)

3. Мама купила 2 апельсина, 3 груши и 4 яблока. Девять дней подряд она ежедневно предлагает сыну по одному фрукту. Сколькими способами мать может выдать сыну фрукты? ($\bar{P}_{2+3+4}^9 = 1260$.)

4. В магазине имеются фломастеры 7 разных цветов. Сколькими способами можно образовать набор из: (убрала пробел) 5 фломастеров; (убрала пробел) 10 фломастеров? ($\bar{C}_7^5 = 462$; $\bar{C}_7^{10} = 8008$.)

5. Сколькими способами можно разнести 6 писем разным адресатам, если их будут разносить 3 почтальона? (Число способов разбить 6 различных предметов на 3 группы равно $\bar{A}_3^6 = 3^6 = 729$.)

6. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3? (Всевозможные пятизначные числа будут содержать и те, которые начинаются с нуля, поэтому из общего количества кортежей длины 5 надо вычесть количество кортежей длины 4 – первое место занято нулем. Осталось занять 4 места: $\bar{A}_4^5 - \bar{A}_4^4 = 4^5 - 4^4 = 768$.)

7. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 5 и 6? ($\bar{A}_2^1 + \bar{A}_2^2 + \bar{A}_2^3 + \bar{A}_2^4 + \bar{A}_2^5 + \bar{A}_2^6 = 126$.)

8. Сколько различных перестановок цифр может быть сделано в числе 123589, чтобы каждый раз получалось четное число? (Цифра единиц занята двойкой, остальные пять можно переставить P_5 способами; аналогично, если цифра единиц восьмерка, то будет P_5 чисел. Итого перестановок $P_5 + P_5 = 240$.)

9. Имеется 5 кружков: 3 белых и 2 черных. Сколько различных узоров можно составить из этих кружков, располагая их в ряд? ($\bar{P}_{3+2}^5 = 10$.)

10. Сколькими способами можно указать на шахматной доске: два квадрата; два белых квадрата; белый и черный квадраты; белый и черный квадраты, не лежащие на одной вертикали или одной горизонтали? ($C_{64}^2 = 2016$; $C_{32}^2 = 496$; $C_{32}^1 \cdot C_{32}^1 = 1024$; $C_{32}^1 \cdot C_{24}^1 = 768$.)

4. Схема рассуждения при решении комбинаторной задачи

Комбинаторика изучает некоторые операции над конечными множествами. Эти операции приводят к понятиям перестановок, размещений и сочетаний. Комбинаторика решает также и задачи, связанные с этими операциями. Основными задачами являются следующие:

1. Определение видов соединений;
2. Подсчёт числа соединений.

Для установления вида соединений можно руководствоваться правилами, определяющими понятие того или иного из этих видов. Таких правил несколько. Одно из них приведено ниже.

Обращают внимание на **порядок расположения элементов**

Если **порядок важен**, то это **размещения или перестановки**

Если **порядок не важен**, то это **сочетания**

Размещения, если **не все элементы** входят в соединение

Перестановки, если **все элементы** входят в соединение

5. Задания рейтинг контроля по теме «Комбинаторика»

Вариант I

1. Сколько четырёхзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?
2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 6, 7, используя каждую из них не более двух раз?
3. Сколько всевозможных чисел можно составить из цифр числа 76535, используя при этом все цифры по одному разу?
4. Сколько чисел, кратных 5, можно составить из цифр числа 60452, используя каждую из них не более одного раза?
5. Сколько различных светящихся колец можно сделать, расположив по окружности 10 разноцветных лампочек (кольца считаются одинаковыми при одинаковом порядке следования цветов)?
6. На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом первый и второй тома не стояли рядом?
7. Четыре стрелка должны поразить 8 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут распределить мишени между собой?
8. Из группы в 12 человек ежедневно в течение 6 дней выбирают двух дежурных. Определить количество различных списков дежурных, если каждый человек дежурит один раз.
9. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?
10. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы 1 и 2 находились бы в соседних аудиториях?
11. В турнире участвуют 16 шахматистов. Определить количество различных расписаний первого тура (расписания считаются различными, если отличаются участниками хотя бы одной партии; цвет фигур и номер доски не учитываются).
12. Шесть ящиков различных материалов доставляются на пять этажей стройки. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на пятый этаж будет доставлен какой-либо один материал?

13. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить работу?

14. В поезд метро на начальной остановке вошли 100 пассажиров. Сколькими способами могут выйти все пассажиры на последующих 16 остановках поезда?

15. Сколько трёхзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Вариант II

1. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырёх чтецов, трёх пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

2. Двадцать восемь костей домино распределены между четырьмя игроками. Сколько возможно различных вариантов распределений?

3. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?

4. Восемь авторов должны написать книгу из шестнадцати глав. Сколькими способами возможно распределение материала между авторами, если два человека напишут по три главы, четыре – по две, два – по одной главе книги?

5. В шахматном турнире участвуют 8 шахматистов третьего разряда, 6 – второго и два перворазрядника. Определить количество таких вариантов состава первого тура, чтобы шахматисты одной категории встречались между собой (цвет фигур не учитывается).

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

7. Семь яблок и три апельсина надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в них было одинаковым. Сколькими способами это можно сделать?

8. Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

9. Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырёх цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 30 букв и 10 цифр?

10. Садовник должен в течение трёх дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

11. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трёх членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

12. Из 10 теннисисток и 6 теннисистов составляют четыре смешанные пары. Сколькими способами это можно сделать?

13. Три автомашины 1, 2, 3 должны доставить товар в шесть магазинов. Сколькими способами можно использовать машины, если грузоподъёмность каждой из них позволяет взять товар сразу для всех магазинов и если две машины в один и тот же магазин не направляются? Сколько вариантов маршрута возможно, если решено использовать только машину 1?

14. Четверо юношей и две девушки выбирают спортивную секцию. В секции хоккея и бокса принимают только юношей, в секцию художественной гимнастики – только девушек, а в лыжную и конькобежную секции – и юношей, и девушек. Сколькими способами могут распределиться между секциями эти шесть человек?

15. Из лаборатории, в которой работает 20 человек, 5 сотрудников должны уехать в командировку. Сколько может быть различных составов этой группы, если начальник лаборатории, его заместитель и главный инженер одновременно уезжать не должны?

Глава VI. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи по теме «Множества и операции над ними»

В задачах №№1 – 10 построить диаграммы Эйлера-Венна для данных множеств. Ответ обосновать.

№ 1. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество прямоугольных треугольников плоскости, B – множество трапеций плоскости, C – множество многоугольников, имеющих хотя бы один прямой угол.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x < 300\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x < 100\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 5\}$.

№ 2. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество равнобедренных треугольников плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество правильных многоугольников плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 20\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 5\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x > 40\}$.

№ 3. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество трапеций плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество прямоугольников плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 20\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 5\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 2\}$.

№ 4. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество четырёхугольников плоскости, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали, B – множество ромбов плоскости, C – множество трапеций плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 3\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x < 100\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x > 200\}$.

№ 5. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один угол 60°, B – множество прямоугольных треугольников плоскости, C – множество равносторонних треугольников плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x > 200\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x < 300\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ и $x \vdots 8\}$.

№ 6. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество параллелограммов плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество прямоугольников плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 4\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 6\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$.

№ 7. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество прямоугольников плоскости, B – множество трапеций плоскости, C – множество многоугольников, имеющих хотя бы один прямой угол.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 8\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 4\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 12\}$.

№ 8. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество прямоугольников плоскости, B – множество четырёхугольников плоскости, имеющих взаимно перпендикулярные диагонали, C – множество параллелограммов плоскости.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 100\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 10\}$, C – множество трёхзначных натуральных чисел.

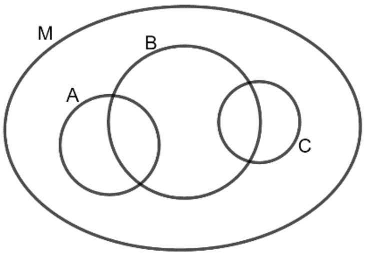
№ 9. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество параллелограммов плоскости, B – множество прямоугольников плоскости, C – множество множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один угол 45°.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 200\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 5\}$, C – множество двузначных натуральных чисел.

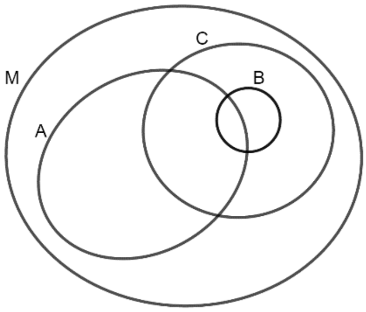
№ 10. а) M – множество геометрических фигур плоскости, A – множество треугольников плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество многоугольников, имеющих хотя бы один прямой угол.

б) $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, A – множество трёхзначных натуральных чисел, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x \vdots 2\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ и } x < 1000\}$.

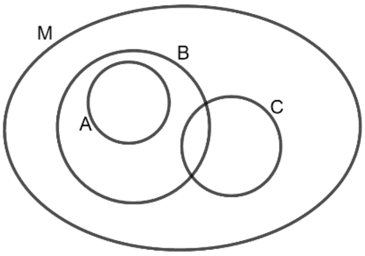
В задачах №№11 – 20 нужно привести пример конкретных множеств, для которых данная диаграмма Эйлера-Венна будет верной. Ответ пояснить.



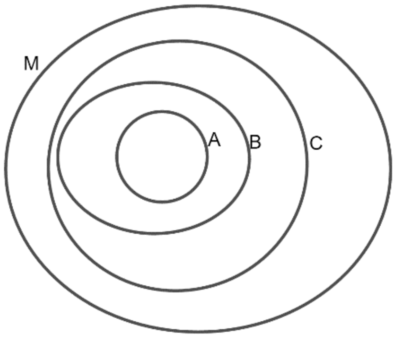
№ 11.



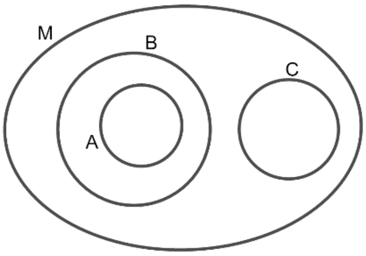
№ 12.



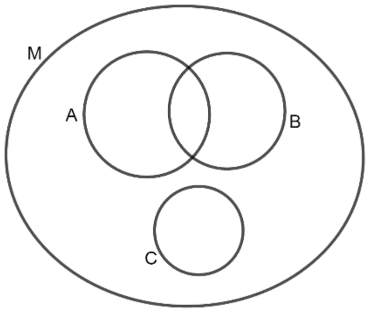
№ 13.



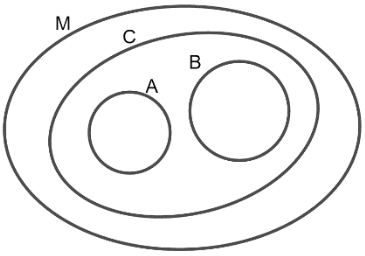
№ 14.



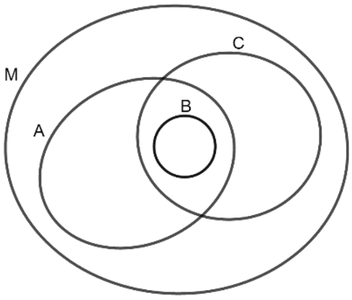
№ 15.



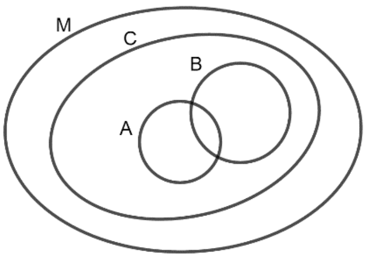
№ 16.



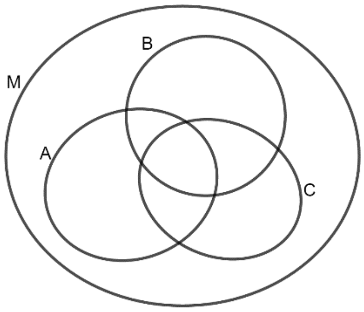
№ 17.



№ 18.



№ 19.



№ 20.

В задачах №№21 – 30 на диаграммах Эйлера-Венна отметить штриховкой множество X. Ответ пояснить. При построении диаграммы считать, что $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

№ 21. а) $X = (A \cup C) \backslash (C \cap (A \backslash B))$, б) $Y = \overline{(B \backslash A) \cup (B \backslash C)}$, в) $K = (A \backslash (B \cup C)) \cup (B \cap C)$.

№ 22. а) $X = (A \cup B) \backslash ((C \backslash B) \cup (C \backslash A))$, б) $Y = \overline{((A \cap B) \backslash C) \cup (C \backslash A)}$, в) $K = \overline{(B \cup C) \backslash A \cup (B \cap C)}$.

№ 23. а) $X = (B \backslash (A \cap C)) \cap (A \cup C)$, б) $Y = \overline{(A \cap B) \cup (B \cap C)}$, в) $K = ((A \backslash B) \backslash C) \cup (C \backslash (A \cap B))$.

№ 24. а) $X = B \backslash ((A \backslash C) \cup (C \backslash A))$, б) $Y = \overline{(A \cup B) \cap (B \cup C)}$, в) $K = C \backslash (B \cap C) \cap ((B \backslash A) \cup (A \backslash B)$.

№ 25. а) $X = ((A \cup C) \backslash (B \backslash C)) \cap (A \cup B))$, б) $Y = \overline{(A \cup C) \cap (B \cup C)}$, в) $K = ((C \backslash B) \cup (C \backslash A)) \cap (A \cup B)$.

№ 26. а) $X = (B \cup A) \backslash (A \cap (B \backslash C))$, б) $Y = \overline{(C \backslash B) \cup (C \backslash A)}$, в) $K = (B \backslash (C \cup A)) \cup (C \cap A)$.

№ 27. а) $X = (B \cup C) \backslash ((A \backslash C) \cup (A \backslash B))$, б) $Y = \overline{(B \cap C \backslash A) \cup (A \backslash B)}$, в) $K = (C \cup A) \backslash B \cup (C \cap A)$.

№ 28. а) $X = (C \backslash (B \cap A)) \cap (B \cup A)$, б) $Y = \overline{(B \backslash C) \cup (C \cap A)}$, в) $K = (B \backslash C \backslash A) \cup (A \backslash (B \cap C))$.

№ 29. а) $X = C \backslash ((B \backslash A) \cup (A \backslash B))$, б) $Y = \overline{(A \cup C) \backslash (B \cap C)}$, в) $K = A \backslash (C \cap A) \cap ((C \backslash B) \cup (B \backslash C)$.

№ 30. а) $X = ((B \cup A) \backslash (C \backslash A)) \cap (B \cup C))$, б) $Y = \overline{(B \cup C) \backslash (C \cup A)}$, в) $K = ((A \backslash C) \cup (A \backslash B)) \cap (B \cup C)$.

В задачах №№ 31 – 40 на диаграмме Эйлера-Венна отметить штриховкой множество X и сформулировать характеристическое свойство его элементов. Ответ обосновать.

№ 31. а) $X = (B \backslash \bar{C}) \cup (A \backslash B)$, если $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 3\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 5\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = (B \backslash \bar{A}) \cup (C \backslash B)$, если A – множество треугольников плоскости, B – множество правильных многоугольников плоскости, C – множество четырёхугольников плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 32. а) $X = \bar{C} \cap (A \backslash B)$, если $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 3\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \vdots 4\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = \bar{A} \cap (B \cup C)$, если A – множество квадратов плоскости, B – множество трапеций плоскости, C – множество ромбов плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 33. а) $X = \bar{A} \cap (B \setminus C)$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 300\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 100\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x < 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = \bar{B} \cap (A \setminus C)$, если A – множество параллелограммов плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество прямоугольников плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 34. а) $X = (\bar{C} \setminus A) \cap (B \cup C)$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 7\}$, B – множество двузначных натуральных чисел, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = \overline{A \cup B} \cap C$, если A – множество треугольников плоскости, B – множество квадратов плоскости, C – множество многоугольников плоскости, имеющих хотя бы один прямой угол. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 35. а) $X = (A \setminus \bar{B}) \cup C$, если $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x < 100\}$, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 5\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x > 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = (\bar{A} \setminus B) \cap C$, если A – множество трапеций плоскости, B – множество правильных многоугольников плоскости, C – множество треугольников плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 36. а) $X = \bar{B} \cap (C \setminus A)$, если A – множество двузначных натуральных чисел, $B = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 3\}$, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x < 200\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = (C \setminus B) \cap \bar{A}$, если A – множество прямоугольников плоскости, B – множество четырёхугольников плоскости с равными диагоналями, C – множество трапеций плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 37. а) $X = (C \cap \bar{B}) \setminus A$, если A – множество двузначных натуральных чисел, B – множество трёхзначных натуральных чисел, $C = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x < 5000\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = (C\setminus\bar{A}) \cap \bar{B}$, если A – множество трапеций плоскости, B – множество ромбов плоскости, C – множество четырёхугольников плоскости с взаимно перпендикулярными диагоналями. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 38. а) $X = (\bar{A}\setminus B) \cap C$, если A – множество двузначных натуральных чисел, $B = \{x|\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 2\}$, C – множество трёхзначных натуральных чисел. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = \bar{B} \cap (A \cap C)$, если A – множество четырёхугольников плоскости с равными диагоналями, B – множество ромбов плоскости, C – множество параллелограммов плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 39. а) $X = C \cup (\bar{B}\setminus A)$, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{N},\ x \vdots 100\}$, B – множество двузначных натуральных чисел, $C = \{x|\ x \in \mathbb{N},\ x < 1000\}$. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = A\setminus ((B\setminus C) \cup (C\setminus B)$, если A – множество четырёхугольников плоскости, B – множество четырёхугольников плоскости с равными диагоналями, C – множество четырёхугольников плоскости с взаимно перпендикулярными диагоналями. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

№ 40. а) $X = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C$, если $A = \{x|\ x \in \mathbb{N},\ x > 1000\}$, B – множество трёхзначных натуральных чисел, C – множество натуральных чисел, в десятичной записи которых присутствует цифра 5. (В рамках условия задачи универсальным считать множество натуральных чисел).

б) $X = (A\setminus C) \cap B$, если A – множество четырёхугольников плоскости с равными диагоналями, B – множество параллелограммов плоскости, C – множество ромбов плоскости. (В рамках условия задачи универсальным считать множество геометрических фигур плоскости.)

В задачах №№ 41 – 50 нужно отметить на числовой прямой множество X и сформулировать характеристическое свойство его элементов. Ответ пояснить.

№ 41. а) $X = (B\setminus A) \cap C$, б) $X = (A \cup C)\setminus B$, в) $X = B\setminus(A\setminus C)$, если $A = (3, 5)$, $B = [-8, 10)$, $C = [1, +\infty)$.

№ 42. а) $X = C\setminus(A \cap B)$, б) $X = (A \cup B)\setminus C$, в) $X = (B \cap C)\setminus A$, если $A = [-5, 3]$, $B = (1, 12]$, $C = (-2,\ 8)$.

№ 43. а) $X = A\backslash(B \cap C)$, б) $X = (B\backslash A) \cup C$, в) $X = (B \cup C)\backslash A)$, если $A = [-3, 6]$, $B = (5, +\infty)$, $C = [2, 11)$.

№ 44. а) $X = B\backslash(A\backslash C)$, б) $X = (A \cap B)\backslash C$, в) $X = (A \cup B)\backslash(B\backslash C)$, если $A = (-\infty, 8)$, $B = (-7, +\infty)$, $C = [-2, 5]$.

№ 45. а) $X = B\ \backslash(C\backslash A)$, б) $X = (B \cap C) \cup A$, в) $X = (A \cup B)\backslash C$, если $A = (5, +\infty)$, $B = [-4, 9)$, $C = (2, +\infty)$.

№ 46. а) $X = A\backslash(B \cup C)$, б) $X = B\backslash(A \cap C)$, в) $X = (A\backslash B) \cap C$, если $A = (-3, 6)$, $B = [3, +\infty)$, $C = [1, 8]$.

№ 47. а) $X = A\backslash(B\backslash C)$, б) $X = B \cap (C\backslash A)$, в) $X = A\backslash(B \cup C)$, если $A = (-\infty, 1]$, $B = (-5, 2)$, $C = (-3, 3]$.

№ 48. а) $X = (C\backslash A) \cap (C\backslash B)$, б) $X = (A \cup B) \cap C$, в) $X = (A \cup C) \cap B$, если $A = [-2, 3)$, $B = [1, 7]$, $C = (5, 9)$.

№ 49. а) $X = C\backslash(B\backslash A)$, б) $X = (B \cup C) \cap A$, в) $X = (A \cup C)\backslash(B\backslash C)$, если $A = [-3, 4)$, $B = (2, 5]$, $C = (1, 8]$.

№ 50. а) $X = (A\backslash B) \cup C$, б) $X = (A\backslash C) \cap B$, в) $X = C\backslash(A \cup B)$, если $A = [-3, -\infty)$, $B = [4, +\infty)$, $C = (-5, 0)$.

В задачах №№51 – 60 нужно доказать, что данное равенство имеет место для любых произвольных множеств A, B, C.

№ 51. $(A\backslash B) \cup (A \cap C) = A \cap (\overline{B\backslash C})$.

№ 52. $B \cup (C\backslash A) = (B \cup C) \cap (\overline{A\backslash B})$.

№ 53. $A \cup (B\backslash C) = (A \cup B) \cap (\overline{C\backslash A})$.

№ 54. $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (\overline{C\backslash B})$.

№ 55. $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash A) \cap (\overline{C\backslash A})$.

№ 56. $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash B) \cap (\overline{A\backslash B})$.

№ 57. $A\backslash(B \cup C) = (A\backslash C) \cap (\overline{B\backslash C})$.

№ 58. $B\backslash(A \cup C) = (B\backslash C) \cap (\overline{A\backslash C})$.

№ 59. $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap (\overline{B\backslash C})$.

№ 60. $C\backslash(A \cup B) = (C\backslash A) \cap (\overline{B\backslash A})$.

В задачах №№ 61 – 70 нужно построить в координатной плоскости изображения декартовых произведений $X \times Y$, $Y \times X$. Для каждого случая выполнить отдельный чертёж.

№ 61. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, 3 \le x < 6\}$, $Y = \{y |\ y \in \mathbb{Z}, |y| < 5\}$;

б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{N}, 3 \le x < 6\}$, $Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| < 5\}$;

в) $X = \{x |\ x \in \mathbb{R}, 3 \le x < 6\}$, $Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, |y| < 5\}$.

№ 62. а) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 7\}$, $Y = \{y |\ y \in \mathbb{N}, y < 4\}$;

б) $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z}, -2 < x < 7\}$, $Y = \{y |\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$;

в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, -2 < x < 7\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$.
№ 63. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{Z}, -3 \le y < 4\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 4\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 4\}$.
№ 64. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{N}, y < 6\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| = 2\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 6\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |x| = 2\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 6\}$.
№ 65. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{Z}, -7 \le y < 1\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |x| = 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -7 \le y < 1\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |x| = 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -7 \le y < 1\}$.
№ 66. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{N}, y < 5\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 5\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |x| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 5\}$.
№ 67. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |x| = 4\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{Z}, -3 \le y < 2\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |x| = 4\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 2\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |x| = 4\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -3 \le y < 2\}$.
№ 68. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{Z}, |y| \le 2\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, |y| \le 2\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, x < 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, |y| \le 2\}$.
№ 69. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |y| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{Z}, -4 \le y < 2\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{N}, |y| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -4 \le y < 2\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |y| < 3\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, -4 \le y < 2\}$.
№ 70. а) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| \le 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{N}, y < 4\}$;
б) $X = \{x|\ x \in \mathbb{Z}, |x| \le 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$;
в) $X = \{x|\ x \in \mathbb{R}, |x| \le 5\}$, $Y = \{y|\ y \in \mathbb{R}, y < 4\}$.

Указания к решению:

В задачах 71 – 80 нужно:

1. определить, сколько свойств задано для элементов рассматриваемого множества;
2. выяснить, в каких отношениях находятся между собой подмножества, выделяемые этими свойствами;
3. изобразить с помощью кругов Эйлера диаграмму, соответствующую условию задачи;
4. определить, на сколько классов разбилось рассматриваемое множество, и сформулировать характеристические свойства элементов каждого класса;
5. составить краткую запись условия задачи;
6. привести обоснованное решение задачи.

№ 71. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что 45 из них – не треугольники, 35 – не квадраты, а 20 – не треугольники и не квадраты?

б) Из 100 чисел 50 делятся на 5, 75 чисел делятся на 3, 10 чисел не делятся ни на 5, ни на 3. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 15?

№ 72. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что 80 из них – ромбы, 50 – не являются квадратами, а 30 – являются ромбами, но не квадратами?

б) Из 120 чисел 70 делятся на 9, 80 являются чётными, а 15 нечётных не делятся на 9. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 18?

№ 73. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 75 неправильных треугольников, 60 непрямоугольных треугольников, а 35 неправильных треугольников не являются прямоугольными?

б) Из 120 чисел 55 делятся на 3, 50 чисел делятся на 4, 20 чисел не делятся ни на 3, ни на 4. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 12?

№ 74. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 70 равнобедренных треугольников, 85 неправильных треугольников, а 55 – неправильных равнобедренных треугольников?

б) Из 100 чисел 30 делятся на 5, 60 чисел делятся на 6, 20 чисел не делятся ни на 5, ни на 6. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 30?

№ 75. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если 75 из них не являются ромбами, 55 фигур не являются трапециями, а 30 фигур не являются ни ромбами, ни трапециями?

б) Из 180 чисел 100 делятся на 4, 70 чисел делятся на 7, 60 чисел не делятся ни на 4, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 28?

№ 76. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 75 параллелограммов, 60 фигур, не являющихся квадратами, и 35 параллелограммов, которые не являются квадратами?

б) Из 120 чисел 70 делятся на 4, 60 чисел делятся на 5, 20 чисел не делятся ни на 4, ни на 5. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 20?

№ 77. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что среди них 85 не являются остроугольными треугольниками, 75 не являются тупоугольными треугольниками, а 60 – не являются ни остроугольными, ни тупоугольными треугольниками?

б) Из 125 чисел 60 делятся на 5, 70 чисел делятся на 7, 10 чисел не делятся ни на 5, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 35?

№ 78. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если известно, что среди них 80 остроугольных треугольников, 45 неправильных треугольников и 25 неправильных остроугольных треугольников?

б) Из 120 чисел 50 делятся на 3, 70 чисел делятся на 8, 20 чисел не делятся ни на 3, ни на 8. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 24?

№ 79. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 40неправильных треугольников, 70 фигур не являются тупоугольными треугольниками, а 10 неправильных треугольников не содержат тупого угла?

б) Из 100 чисел 25 делятся на 7, 35 чисел делятся на 2, 50 чисел не делятся ни на 2, ни на 7. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 14?

№ 80. а) Сколько всего фигур лежит в коробке, если среди них 95параллелограммов, 90 фигур не являются ромбами, а 85 фигур являются ромбами, но не параллелограммами?

б) Из 100 чисел 40 делятся на 4, 50 чисел делятся на 9, 30 чисел не делятся ни на 4, ни на 9. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 36?

№ 81. а) Сколько всего учеников в классе, если 24 из них любят в свободное время играть в электронные игры, 23 ученика любят в свободное время смотреть фильмы, а 21 – в свободное время любят читать, при этом 2 ученика не любят ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в электронные игры, 10 учеников любят играть в электронные игры и читать, 10 – любят читать и смотреть фильмы, 15 учеников любят играть в электронные игры и смотреть фильмы, из которых 5 ещё и любят читать?

б) Известно, что из 30 ребят один в свободное время не любит ни читать, ни смотреть фильмы, ни играть в электронные игры, 4 ребят любят смотреть фильмы, но не любят ни играть, ни читать, 3 – любят читать, но не любят играть в электронные игры и смотреть фильмы.

Всего ребят, которые любят играть в электронные игры – 20, а ребят, которые любят смотреть фильмы, – 14, при этом 5 – любят играть и смотреть фильмы, но не любят читать. Сколько ребят любят играть в электронные игры и смотреть фильмы? Сколько ребят любят играть в электронные игры, но не любят смотреть фильмы? Сколько ребят любят читать и смотреть фильмы?

в) Сколько чисел в множестве M, если 35 из них делятся на 3, 35 чисел делятся на 5, 18 чисел делятся на 25, 10 чисел не делятся ни на 3, ни на 5, 8 чисел делятся на 75, 15 чисел делятся на 3, но не делятся на 5. Сколько в множестве M чисел, которые делятся на 15, но не делятся на 75? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 25 и не делятся на 3? Сколько чисел делятся на 25, но не делятся на 3?

№ 82. а) Сколько студентов приняли участие в студенческой конференции, если среди них 43 писали рефераты, из которых 12 выступили с докладами Всего, выступивших с докладами студентов 20, из которых 8 участвовали в выставке студенческих работ. Всего в выставке приняли участие 48 студентов, из которых 15 писали рефераты, при этом только 5 студентов и писали рефераты, и выступали с докладами, и участвовали в выставке.

б) Известно, что из 100 студентов 10 не принимали участие в работе студенческой конференции (т.е. не писали рефераты, не выступали с докладами и не участвовали в выставке студенческих работ), 8 студентов выступали с докладами, но не писали рефераты и не участвовали в выставке. Всего 57 студентов писали рефераты, из которых 12 не выступали с докладами и не участвовали в выставке. В выставке участвовали всего 55 студентов, из которых 10 писали рефераты и выступали с докладами. Сколько из писавших рефераты студентов участвовали в выставке? Сколько студентов участвовали в выставке, но не писали рефераты? Сколько студентов писали рефераты и выступали с докладами?

в) Сколько чисел в множестве M, если известно, что среди них 45 чисел делятся на 4, 35 чисел делятся на 5, 17 – делятся на 8, 20 чисел не делятся ни на 4, ни на 5, 20 чисел делятся на 20,а 10 чисел делятся на 8, но не делятся на 5. Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 40? Сколько чисел делятся на 20, но не делятся на 40? Сколько чисел делятся на 4, но не делятся на и не делятся на 5?

№ 83. а) Сколько абитуриентов посещают курсы дополнительной подготовки, если из них 65 человек ходят на занятия по математике, 55

– на занятия по русскому языку, 60 – на занятия по иностранным языкам. На занятия по математике и по русскому языку ходят 20 человек, на занятия по математике и иностранным языкам – 30 человек, на занятия по русскому и по иностранным языкам – 25 человек, и только 5 человек посещают все указанные занятия.

б) Из 125 абитуриентов 20 посещали дополнительные занятия по иностранному языку, но не посещали дополнительные занятия ни по математике, ни по русскому языку, 75 абитуриентов посещали дополнительные занятия по математике, из которых 30 посещали и занятия по иностранному языку, а 25 – не посещали занятий ни по русскому языку, ни по иностранному. 60 абитуриентов посещали дополнительные занятия по русскому языку, из которых 15 – ходили на занятия по иностранному языку, но не ходили на занятия по математике. Сколько абитуриентов посещали дополнительные занятия по математике, по русскому и по иностранному языкам одновременно? Сколько абитуриентов посещали занятия по математике и по русскому языку, но не посещали занятий по иностранному языку? Сколько абитуриентов посещали занятия по математике и по иностранному языку, но не посещали занятий по русскому языку?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 50 делятся на 7, 50 чисел делятся на 3, 15 чисел делятся на 14, 10 чисел не делятся ни на 7, ни на 3, 20 чисел делятся на 7, но не делятся ни на 14, ни на 3, а 10 чисел делятся на 14, но не делятся на 3. Сколько чисел в множестве M делятся на 21? Сколько чисел делятся на 21, но не делятся на 42? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся на 7?

№ 84. а) Сколько кондитерских изделий приобрели для праздничного чаепития, если среди 30 пирожных оказались 20 с клубничным джемом. Всего с клубничным джемом было 50 кондитерских изделий, из которых 15 имели форму рулетов. Всего в покупке было 60 кондитерских изделий в форме рулетов, из которых 15 являлись пирожными. Ещё были куплены 50 мясных пирожков-треугольничков, т.е. данные кондитерские изделия не были пирожными, не имели ни клубничной начинки, ни формы рулетов, а 10 кондитерских изделий назывались «Клубничные пирожные-рулетики».

б) Для праздничного чаепития купили 120 кондитерских изделий. В покупке были 30 пирожных, 45 кондитерских изделий с клубничным джемом, из них 25 ватрушек, 20 изделий в форме рулетов не имели клубнично-джемовой прослойки и не считались пирожными, назывались «Мясной рулет из лаваша», 10 пирожных-корзиночек с клубничным джемом, и ещё 40 мясных пирожков-треугольничков. Сколько кондитерских изделий «Клубничные пирожные-рулетики» было куплено всего? Сколько было рулетов с клубничным джемом , не являющихся пирожными? Сколько всего было куплено пирожных без клубничного джема?

в) Сколько чисел в множестве M, если 80 из них делятся на 3, 70 чисел делятся на 10, 30 чисел делятся на 100, 45 чисел делятся на 30, 10 чисел делятся на 100, но не делятся на 3, 15 чисел не делятся ни на 3, ни на 10. Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 300? Сколько чисел делятся на 30, но не делятся на 300? Сколько чисел делятся на 10, но не делятся ни на 100, ни на 3?

№ 85. а) Сколько человек ходили в поход, если 5 из них ставили палатки, 5 – собирали хворост для костра, их которых 2 – ставили палатки, 5 человек готовили пищу, из которых 2 ставили палатки, а 3 – собирали хворост для костра. 3 человека не ставили палатки, не собирали хворост и не готовили пищу, а 1 участник похода и ставил палатки, и собирал хворост, и готовил пищу.

б) Из 10 человек, ходивших в поход, 2 не ставили палатки, не собирали хворост для костра и не готовили пищу, 1 человек собирал хворост, но не ставил палатки и не готовил пищу, 4 человека ставили палатки, из которых 1 собирал хворост, но не готовил пищу, 5 человек готовили пищу, из которых 1 ставил палатки, но не собирал хворост для костра. Сколько человек ставили палатки, собирали хворост для костра и готовили пищу? Сколько человек ставили палатки, но не собирали хворост и не готовили пищу? Сколько человек готовили пищу, но не ставили палатки?

в) Сколько чисел в множестве M, если известно, что 60 чисел делятся на 45, 100 чисел делятся на 2, 100 чисел делятся на 15, 20 чисел не делятся ни на 2, ни на 15, 40 чисел делятся на 45, но не делятся на 2, а 50 чисел делятся на 2, но не делятся на 15. Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 30? Сколько чисел делятся на 90? Сколько чисел делятся на 15, но не делятся ни на 45, ни на 2?

№ 86. а) Сколько детей занимается в кружке рукоделия, если 15 детей любят вязать, 14 детей любят шить, из которых половина любит и вязать, 16 детей любят вышивать, из которых 10 детей любят шить, а 8 – вязать, а 5 детей любят и шить, и вязать, и вышивать?

б) Из 20 детей, занимающихся в кружке рукоделия, двое любят вышивать, но не любят шить и не любят вязать, трое детей любят шить, вязать и вышивать, а пятеро – любят шить и вышивать, но не любят вязать. Всего детей, которые любят вязать – 12, из них 5 детей любят и вышивать. Всего детей, которые любят шить – 14. Сколько всего детей в кружке любят вышивать? Сколько детей любят вязать, но не любят шить? Сколько детей любят шить, но не любят ни вязать, ни вышивать?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 70 чисел делятся на 10, 75 чисел делятся на 9, 100 чисел делятся на 5, 30 чисел делятся на 90, 25 чисел делятся на 9, но не делятся на 5, а 25 чисел не делятся ни на 5, ни на 9? Сколько среди этих чисел таких, которые делятся на 45? Сколько чисел делятся на 45, но не делятся на 90? Сколько чисел делятся на 5, но не делятся на 10 и не делятся на 9?

№ 87. а) Сколько человек занимаются в кружке цветоводов, если известно, что 10 из них выращивают сортовые розы, 15 человек выращивают сортовые гладиолусы, трое из которых выращивают ещё и розы, 8 человек выращивают хризантемы, из которых 3 человека выращивают ещё и розы, а 3 человека выращивают ещё и гладиолусы, только один человек выращивает и розы, и гладиолусы, и хризантемы, а 5 человек выращивают только орхидеи.

б) Из 30 членов общества цветоводов 12 человек выращивают сортовые розы, 12 человек выращивают сортовые гладиолусы, 5 человек выращивают хризантемы, но не выращивают ни розы, ни гладиолусы, 3 человека выращивают розы и гладиолусы, но не выращивают хризантемы, 4 человека выращивают гладиолусы и хризантемы, а 5 человек выращивают только орхидеи. Сколько человек выращивают розы, но не выращивают гладиолусы? Сколько человек выращивают гладиолусы, но не выращивают ни розы, ни хризантемы? Сколько человек выращивают и розы, и гладиолусы, и хризантемы?

в) Сколько чисел в множестве M, если 55 из них делятся на 6, 70 чисел делятся на 5, 110 чисел делятся на 3, 30 чисел делятся на 6, но не делятся на 5, 10 чисел делятся на 5, но не делятся на 3, а 30 чисел не делятся ни на 3, ни на 5? Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 30? Сколько чисел делятся на 15, но не делятся на 30? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся ни на 5, ни на 6?

№ 88. а) Сколько читателей в библиотеке, если известно, что 110 из них предпочитают читать детективы, 60 человек отдают предпочтение историческим романам, из которых 30 человек любят и детективы, 90 человек любят читать фантастику, из которых 30 человек любят и исторические романы, 50 человек любят читать детективы и фантастику, из которых 20 – любят ещё и исторические романы, а 30 читателей этой библиотеки детективами, фантастикой и историческими романами не интересуются?

б) Из 300 читателей библиотеки половина предпочитает читать детективы, 125 человек любят читать исторические романы, из которых 50 – любят читать и фантастику, 35 человек любят читать фантастику, но не любят ни исторические романы, ни детективы, 50 человек не любят ни детективы, ни фантастику, ни исторические романы, при этом 50 человек любят читать только детективы (фантастика и исторические романы их не интересуют). Сколько человек любят читать детективы и фантастику? Сколько всего человек любят читать фантастику? Сколько человек читают только исторические романы?

в) Сколько чисел в множестве M, если среди них 110 чисел делятся на 3, 140 чисел делятся на 8, 70 чисел делятся на 16, 30 чисел делятся на 3, но не делятся на 8, 30 чисел не делятся ни на 3, ни на 8? Сколько чисел в множестве M таких, которые делятся на 24? Сколько чисел делятся на 8, но не делятся ни на 3, ни на 16? Сколько чисел делятся на 24, но не делятся на 48?

№ 89 а) Сколько школьников приняли участие в акции «Театр – детям», если известно, что 1300 из них посетили спектакли в театре, 800 – слушали лекции об истории театра, 500 из которых посетили и спектакли, 1100 школьников присутствовали на творческих встречах с артистами, из которых 600 – посетили спектакли, а 400 – слушали лекции, и только 300 школьников приняли участие во всех мероприятиях: посетили спектакли, слушали лекции и присутствовали на встречах с артистами.

б) Из 2350 школьников, принявших участие в акции «Театр – детям», 1250 слушали лекции об истории театра, 1100 присутствовали на творческих встречах с артистами, 500 посетили и спектакли в театре, но не слушали лекции и не присутствовали на встречах с артистами, 200 школьников слушали лекции и были на встречах с артистами, но не посещали спектакли, а 650 школьников 500 посетили и спектакли и слушали лекции. Сколько школьников посетили встречи с артистами, но не слушали лекции? Сколько школьников посетили спектакли, слушали лекции и присутствовали на встречах с артистами? Сколько школьников слушали лекции, но не были на спектаклях и встречах с артистами?

в) Сколько чисел в множестве M, если 85 из них делятся на 11, 40 чисел делятся на 9, 90 – делятся на 3, 15 чисел делятся на 99, 50 чисел делятся на 11, но не делятся на 3, а 10 чисел не делятся ни на 3, ни на 11. Сколько чисел делятся на 33? Сколько чисел не делятся на 99? Сколько чисел делятся на 3, но не делятся ни на 9, ни на 11?

№ 90 а) Сколько дней велись наблюдения за погодой, если известно, что в это время 13 дней дул восточный ветер, 11 дней атмосферное давление было ниже нормы (*меньше 760 мм рт. ст.*), 12 дней стояла ясная погода, из которых 7 дней дул восточный ветер, а 6 дней давление было ниже нормы? 8 дней при восточном ветре давление было ниже нормы, из которых только 5 дней были ясными. Кроме того, в период наблюдений 10 дней дул южный ветер, давление было не ниже нормы и было пасмурно.

б) Из 28 дней, в течение которых велись наблюдения за погодой, выяснилось, что 12 дней дул восточный ветер, из которых 1 день был пасмурным с атмосферным давлением выше нормы, 13 дней стояла ясная погода, из которых 7 дней атмосферное давление было ниже нормы. 1 день при давлении ниже нормы был пасмурный день и не дул восточный ветер, 8 дней при давлении не ниже нормы и отсутствии восточного ветра было пасмурно, а 4 дня при восточном ветре и давлении ниже нормы стояла ясная погода. Сколько дней в наблюдаемый период давление было ниже нормы? Сколько дней при восточном ветре и давлении не ниже нормы стояла ясная погода? Сколько дней при отсутствии восточного ветра стояла ясная погода?

в) Сколько чисел в множествеM, если из них 40 делятся на 3, 50 чисел делятся на 11, 20 чисел делятся на 22, из которых 15 не делятся на 3, 25 чисел делятся на 3, но не делятся на 11, 25 чисел не делятся ни на 3, ни на 11. Сколько чисел делятся на 33? Сколько чисел делятся на 33, но не делятся на 66? Сколько чисел делятся на 11, но не делятся ни на 22, ни на 3?

Задачи по теме «Математические предложения и их структуры»

В задачах №№ 1 – 10 сформулировать высказывания заданной структуры и определить их значения истинности, если A: «7 – простое число», B: «7 – делитель 20», C: «7 меньше 10 на 2», D: «7 – чётное число».

№ 1. а) $(A \Leftrightarrow D) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$; б) $(\bar{A} \land B) \Leftrightarrow (\bar{C} \lor D)$; в) $\overline{B \Rightarrow (C \land \bar{D})}$.
№ 2. а) $(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\bar{A} \land \bar{D})$; б) $B \land \bar{C} \lor \bar{A})$; в) $\overline{(A \lor C) \Rightarrow \bar{D}}$.
№ 3. а) $(A \land \bar{B}) \Rightarrow (\bar{C} \lor D)$; б) $A \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow (C \lor D))$; в) $\overline{(A \land B \land C) \Rightarrow \bar{D}}$.
№ 4. а) $(B \lor \bar{C}) \land (\bar{A} \Rightarrow D)$; б) $(C \Rightarrow D) \land (A \Leftrightarrow B)$; в) $\overline{\bar{A} \Rightarrow (C \land D)}$.
№ 5. а) $(A \lor B \lor D) \Rightarrow (\bar{C} \land \bar{A})$; б) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \bar{D}$; в) $\overline{C \Rightarrow (A \land B \Rightarrow D)}$.
№ 6. а) $(B \Leftrightarrow A) \Rightarrow (C \Leftrightarrow D)$; б) $(\bar{B} \land C) \Rightarrow (\bar{D} \lor A)$; в) $\overline{C \Rightarrow (D \land \bar{A})}$.
№ 7. а) $(C \Rightarrow D) \Leftrightarrow (\bar{B} \land \bar{A})$; б) $(B \lor D) \Rightarrow \bar{A}$; в) $\overline{(D \land C) \Rightarrow (D \land \bar{A})}$.
№ 8. а) $(B \land \bar{C}) \Rightarrow (\bar{D} \lor A)$; б) $B \Leftrightarrow (\bar{C} \Rightarrow (D \land A))$; в) $\overline{(D \land B \land C) \Rightarrow \bar{A}}$
№ 9. а) $(C \lor \bar{D}) \land (\bar{B} \Rightarrow A)$; б) $(\bar{B} \Rightarrow (D \land A)$; в) $\overline{(D \Rightarrow A) \land (B \Leftrightarrow C)}$.
№ 10. а) $(C \Leftrightarrow B) \Rightarrow (D \Leftrightarrow A)$; б) $(\bar{C} \land D) \Leftrightarrow (\bar{A} \lor B)$; в) $\overline{\bar{B} \lor (C \land \bar{D})}$.

В задачах №№ 11 – 20 определить структуру высказывания и найти его значение истинности.
№ 11. Если 4 делится на 2 или на 3, то число 4 меньше 3 и простое.
№ 12. Число 17 является простым и двузначным тогда и только тогда, когда число 17 – чётное или нечётное.
№ 13. Если число 12 – чётное тогда и только тогда, когда делится на 2, то 12 делится на 3.
№ 14. $8 = 2^3$ и $8 > 10$ или если $8 = 2^3$, то $8 < 10$.
№ 15. Если число 33 делится на 3 и делится на 11, то $3 > 11$ или $3 < 11$.
№ 16. Число 25 делится на 5 или на 10 тогда и только тогда, когда оно является простым и двузначным.
№ 17. $16 < 20$ и если 16 делится на 4, то 4 – делитель 20.
№ 18. Если 10 делится на 5, то 10 – делитель 5 тогда и только тогда, когда 10 – простое число.
№ 19. Если неверно, что 5 – делитель 10 и 5 – делитель 20, то неверно, что $5 < 10$ или $10 > 20$.
№ 20. Неверно, что если 45 делится на 3 и 45 делится на 5, то 45 не делится на 15.

В задачах №№ 21 – 30 составить таблицу истинности высказывания заданной структуры и привести пример конкретных высказываний A, B и C так, чтобы высказывание этой структуры было истинным.
№ 21. $(\bar{A} \wedge B) \Leftrightarrow (C \vee A)$.
№ 22. $A \Rightarrow (B \vee (C \Leftrightarrow \bar{A}))$
№ 23. $((A \wedge \bar{B}) \vee C) \Rightarrow \bar{A}$.
№ 24. $((A \Leftrightarrow B) \vee C) \wedge \bar{A}$.
№ 25. $(C \Leftrightarrow A) \Rightarrow (\bar{B} \wedge \bar{A})$.
№ 26. $(A \vee C) \Rightarrow (\bar{B} \wedge C)$.
№ 27. $(A \wedge \bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{B} \vee A)$.
№ 28. $((A \wedge B) \Rightarrow \bar{A}) \vee C$.
№ 29. $(C \wedge (A \vee B)) \Rightarrow \bar{B}$.
№ 30. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee C)$.

В задачах №№ 31 – 40 проверить, является ли высказывание заданной структуры тавтологией. Ответ обосновать.
№ 31. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Leftrightarrow A$.
№ 32. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \bar{B}$
№ 33. $((B \Rightarrow A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow B$.
№ 34. $((B \Rightarrow A) \wedge B) \Rightarrow A$.
№ 35. $(B \Rightarrow A) \Rightarrow (\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$.
№ 36. $((A \Rightarrow B) \wedge \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}$.
№ 37. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$.
№ 38. $((B \Rightarrow A) \wedge \bar{A}) \Rightarrow \bar{B}$.
№ 39. $\overline{B \Rightarrow A} \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$.
№ 40. $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$.

В задачах №№ 41 – 50 с помощью таблиц истинности проверить будут ли равносильными высказывания заданной структуры. Ответ обосновать.

№ 41. $A \Leftrightarrow (B \wedge C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C)$.
№ 42. $A \Leftrightarrow (B \vee C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \vee (A \Leftrightarrow C)$.
№ 43. $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$ и $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$.
№ 44. $A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$ и $(A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$.
№ 45. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$.
№ 46. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow C$ и $(B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$.
№ 47. $(A \wedge B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C)$.
№ 48. $(A \wedge B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Leftrightarrow C) \vee (B \Leftrightarrow C)$.

№ 49. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$.

№ 50. $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C$ и $(A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$.

В задачах №№ 51 – 60 обосновать ответ на вопрос задачи с использованием таблиц истинности.

№ 51. Проверить, имеет ли место правый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно импликации.

№ 52. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно эквиваленции.

№ 53. Проверить, имеет ли место правый дистрибутивный закон конъюнкции относительно эквиваленции.

№ 54. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон конъюнкции относительно импликации.

№ 55. Проверить, имеет ли место правый дистрибутивный закон импликации относительно конъюнкции.

№ 56. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон импликации относительно конъюнкции.

№ 57. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон дизъюнкции относительно эквиваленции.

№ 58. Проверить, имеет ли место правый дистрибутивный закон импликации относительно дизъюнкции.

№ 59. Проверить, имеет ли место левый дистрибутивный закон эквиваленции относительно конъюнкции.

№ 60. Проверить, имеет ли место правый дистрибутивный закон эквиваленции относительно дизъюнкции.

В задачах №№ 61 – 70 на множестве $X = \{x |\ x \in \mathbb{Z},\ |x| \leq 5\}$ заданы предикаты $A(x)$ и $B(x)$.

1. Найти область истинности предикатов $A(x)$ и $B(x)$.
2. Определить предикаты $\overline{A(x)}$, $\overline{B(x)}$, $A(x) \wedge B(x)$, $A(x) \vee B(x)$, $A(x) \Rightarrow B(x)$, $B(x) \Rightarrow A(x)$, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$, а также предикаты $\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}$, $\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$, $\overline{A(x)} \Rightarrow \overline{B(x)}$, $\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$, $\overline{A(x)} \Leftrightarrow \overline{B(x)}$ и найти их области истинности.
3. Среди сформулированных предикатов выбрать равносильные.

№ 61. $A(x)$: «x – неотрицательное число», $B(x)$: «$|x| \leq 2$».

№ 62. $A(x)$: «x – чётное число», $B(x)$: «$2x - 1 > 0$».

№ 63. $A(x)$: «x – неотрицательное число», $B(x)$: «x делится на 3».

№ 64. $A(x)$: «$x^2 \geq 4$», $B(x)$: «$2 - 3x > -10$».

№ 65. $A(x)$: «$x^2 - 9 < 0$», $B(x)$: «$8 - 3x \geq 5$».
№ 66. $A(x)$: «$x^2 - 4 \geq 0$», $B(x)$: «x делится на 5».
№ 67. $A(x)$: «$5 - 2x \leq 4$», $B(x)$: ««$|x| > 3$».
№ 68. $A(x)$: «x делится на 2», $B(x)$: «$7 - 3x > 11$».
№ 69. $A(x)$: «x – натуральное число», $B(x)$: «$|x| < 2$».
№ 70. $A(x)$: «$1 - 2x < 3$», $B(x)$: «$x^2 - 16 \geq 0$».

В задачах №№ 71 – 80 данные предикаты обратить в высказывания с помощью кванторов, определить их значения истинности. Рассмотреть все возможные варианты. Сформулировать отрицание этих высказываний и указать их значения истинности. Ответы пояснить.

№ 71. $A(x)$: «x делится на 2» (X – множество натуральных чисел);

$A(x, y)$: «Прямая x параллельна прямой y» (X – множество прямых плоскости).

№ 72. $A(x)$: «Четырёхугольник x – трапеция» (X – множество четырёхугольников плоскости);

$A(x, y)$: «Число x больше числа y на 2» (X – множество действительных чисел).

№ 73. $A(x)$: «$x < 3$» (X – множество действительных чисел);

$A(x, y)$: «Прямая x перпендикулярна прямой y» (X – множество прямых плоскости).

№ 74. $A(x)$: «x – правильный многоугольник» (X – множество многоугольников плоскости);

$A(x, y)$: «Число x – делитель числа y» (X – множество натуральных чисел).

№ 75. $A(x)$: «$x > 10$» (X – множество действительных чисел);

$A(x, y)$: «Многоугольник x равен многоугольнику y» (X – множество многоугольников плоскости).

№ 76. $A(x)$: «Площадь треугольника x равна 10 кв.см.» (X – множество треугольников плоскости);

$A(x, y)$: «$x \geq y$» (X – множество натуральных чисел).

№ 77. $A(x)$: «x – двузначное число» (X – множество натуральных чисел);

$A(x, y)$: «Прямая x пересекает прямую y» (X – множество прямых плоскости).

№ 78. $A(x)$: «Многоугольник x имеет прямой угол» (X – множество многоугольников плоскости);

$A(x, y)$: «Разность чисел x и y является натуральным числом» (X – множество натуральных чисел).

№ 79. $A(x)$: «Сумма цифр в числе x делится на 11» (X – множество натуральных чисел);

$A(x, y)$: «Окружность x и окружность y имеют общий центр» (X – множество окружностей плоскости).

№ 80. $A(x)$: «Прямая x проходит через данную точку M плоскости» (X – множество прямых плоскости);

$A(x, y)$: «Число x делится на число y» (X – множество натуральных чисел).

В задачах №№ 81 – 90 установить, находятся ли данные предикаты $A(x)$ и $B(x)$ в отношении логического следования. Если эти предикаты находятся в отношении логического следования, то сформулировать предложение разными способами.

№ 81. $A(x)$: «В четырёхугольнике x углы равны», $B(x)$ «Четырёхугольник x – квадрат» (X – множество четырёхугольников плоскости).

№ 82. $A(x)$: «Число x делится на 5», $B(x)$ «Число x делится на 25» (X – множество натуральных чисел).

№ 83. $A(x)$: «Четырёхугольник x – параллелограмм», $B(x)$ «Четырёхугольник x – прямоугольник» (X – множество четырёхугольников плоскости).

№ 84. $A(x)$: «В четырёхугольнике x диагонали равны», $B(x)$ «Четырёхугольник x – прямоугольник» (X – множество четырёхугольников плоскости).

№ 85. $A(x)$: «Число x – делитель 20», $B(x)$ «Число x– делитель 4» (X – множество натуральных чисел).

№ 86. $A(x)$: «В четырёхугольнике x диагонали взаимно перпендикулярны, $B(x)$ «Четырёхугольник x – квадрат» (X – множество четырёхугольников плоскости).

№ 87. $A(x)$: «$x > 15$», $B(x)$ «$x - 5 > 20$» (X – множество натуральных чисел).

№ 88. $A(x)$: «Четырёхугольник x – ромб», $B(x)$ «Четырёхугольник x – квадрат» (X – множество четырёхугольников плоскости).

№ 89. $A(x)$: «$x = 5$», $B(x)$ «$x^2 = 25$». (X – множество действительных чисел).

№ 90. $A(x)$: «Четырехугольник x – ромб», $B(x)$ «Четырехугольник x – квадрат» (X – множество четырехугольников).

В задачах №№ 91 – 100 вместо многоточия вставить слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно» так, чтобы полученное предложение было истинным.

№ 91. а) Для того, чтобы число делилось на 10, …, чтобы оно делилось на 2;

б) Для того, чтобы треугольник был равносторонним, …, чтобы он имел ось симметрии;

в) Для того, чтобы элемент принадлежал объединению множеств A и B, …, чтобы он принадлежал множеству A;

г) Для того, чтобы эквиваленция высказываний A и B была истинной, …, чтобы эти высказывания были истинными.

№ 92. а) Для того, чтобы сумма двух чисел делилась на 3, …, чтобы первое слагаемое делилось на 3;

б) Для того, чтобы прямые были параллельны, …, чтобы они лежали в одной плоскости;

в) Для того, чтобы элемент не принадлежал объединению множеств A и B, …, чтобы он не принадлежал множеству A;

г) Для того, чтобы высказывание A было ложным, …, чтобы конъюнкция высказываний A и B была ложной.

№ 93. а) Для того, чтобы число делилось на 3, …, чтобы оно делилось на 6;

б) Для того, чтобы четырёхугольник был квадратом, …, чтобы вокруг него можно было описать окружность;

в) Для того, чтобы элемент принадлежал пересечению множеств A и B, …, чтобы он принадлежал множеству B;

г) Для того, чтобы импликация высказываний A и B была истинной, …, чтобы высказывание A было истинным.

№ 94. а) Для того, чтобы первый множитель делился на 5, …, чтобы произведение двух множителей делилось на 5;

б) Для того, чтобы прямые лежали в одной плоскости, …, чтобы они пересекались;

в) Для того, чтобы элемент не принадлежал пересечению множеств A и B, …, чтобы он не принадлежал множеству B;

г) Для того, чтобы высказывание B было истинным, …, чтобы импликация высказываний A и B была истинной.

№ 95. а) Для того, чтобы число делилось на 2, …, чтобы оно делилось на 8;

б) Для того, чтобы диагонали в четырёхугольнике были взаимно перпендикулярны, …, чтобы он был ромбом;

в) Для того, чтобы элемент принадлежал разности множеств A и B, …, чтобы он принадлежал множеству A;

г) Для того, чтобы конъюнкция высказываний A и B была истинной, …, чтобы высказывание A было истинным.

№ 96. а) Для того, чтобы число делилось на 9, …, чтобы сумма цифр в записи этого числа делилась на 3;

б) Для того, чтобы прямые в пространстве были параллельны, …, чтобы они не пересекались;

в) Для того, чтобы элемент принадлежал разности множеств A и B, …, чтобы он не принадлежал множеству B;

г) Для того, чтобы дизъюнкция высказываний A и B была ложной, …, чтобы высказывание B было ложным.

№ 97. а) Для того, чтобы число делилось на 3, …, чтобы сумма цифр в записи этого числа делилась на 9;

б) Для того, чтобы четырёхугольник был правильным, …, чтобы он был прямоугольником;

в) Для того, чтобы элемент не принадлежал множеству B, …, чтобы он не принадлежал объединению множеств A и B;

г) Для того, чтобы высказывание B было истинным, …, чтобы конъюнкция высказываний A и B была истинной.

№ 98. а) Для того, чтобы число было делителем 20, …, чтобы оно было делителем 10;

б) Для того, чтобы углы были вертикальными, …, чтобы они были равными;

в) Для того, чтобы элемент не принадлежал множеству A, …, чтобы он не принадлежал пересечению множеств A и B

г) Для того, чтобы высказывание A было ложным, …, чтобы дизъюнкция высказываний A и B была ложной.

№ 99. а) Для того, чтобы число делилось на 11, …, чтобы это число делилось на 121;

б) Для того, чтобы четырёхугольник был ромбом, …, чтобы он имел две оси симметрии;

в) Для того, чтобы элемент принадлежал множеству B, …, чтобы он не принадлежал разности множеств A и B;

г) Для того, чтобы высказывание A было ложным, …, чтобы конъюнкция высказываний A и B была ложной.

№ 100. а) Для того, чтобы запись числа оканчивалась 0, …, чтобы это число делилось на 2;

б) Для того, чтобы сумма углов была равна 180°, …, чтобы эти углы были смежными;

в) Для того, чтобы элемент не принадлежал множеству A, …, чтобы он принадлежал разности множеств A и B;

г) Для того, чтобы высказывание B было истинным, …, чтобы дизъюнкция высказываний A и B была истинной.

В задачах №№ 101–110 для данной теоремы сформулировать предложения: обратное, противоположное, обратное противоположному и определить, являются ли эти предложения теоремами. Ответы пояснить

№ 101. Если многоугольник правильный, то вокруг него можно описать окружность.

№ 102. Если разность двух натуральных чисел является натуральным числом, то уменьшаемое больше вычитаемого.

№ 103. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

№ 104. Вертикальные углы равны.

№ 105. Во всяком прямоугольнике диагонали равны.

№ 106. Если произведение двух множителей равно нулю, то хотя бы один из этих множителей равен нулю.

№ 107. Во всякий правильный многоугольник можно вписать единственную окружность.

№ 108. Любой параллелограмм имеет центр симметрии.

№ 109. Во всякой равнобедренной трапеции диагонали равны.

№ 110. Во всяком ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

В задачах №№ 111–120 определить схему рассуждения и проверить, будет ли оно правильным. Ответ обосновать.

№ 111. а) Все выпускники общеобразовательных школ сдают основной государственный экзамен по русскому языку. Екатерина в этом году сдаёт основной государственный экзамен по русскому языку. Значит, Екатерина в этом году – выпускница общеобразовательной школы.

б) Все числа, заканчивающиеся 0, делятся на 10. 151 не заканчивается 0. Следовательно, 151 не делится на 10.

в) Некоторые ромбы имеют равные стороны. Все ромбы являются параллелограммами. Следовательно, некоторые параллелограммы имеют равные стороны.

№112. а) Все числа, кратные 14, делятся на 7. 56 делится на 7. Следовательно, 56 делится на 14.

б) Все прямоугольники являются параллелограммами. $ABCD$ не является прямоугольником. Следовательно, $ABCD$ не является параллелограммом.

в) Некоторые числа, кратные 10, делятся на 6. Все числа, кратные 6, делятся на 3. Следовательно, некоторые числа, кратные 10, делятся на 3.

№113. а) Все участники утренника получили подарки. Борис не получил подарка. Следовательно, Борис не участвовал в утреннике.

б) Все предложения, являющиеся аксиомами, истинны. Следовательно, если предложение не является аксиомой, то оно не может быть истинным.

в) Все числа, большие 100, больше 10. Некоторые числа, большие 10, делятся на 3. Следовательно, некоторые числа, большие 100, не делятся на 3.

№ 114. а) Все фрукты богаты витаминами. Пища, богатая витаминами, полезна для здоровья. Следовательно, фрукты полезны для здоровья.

б) Все числа, кратные 9, делятся на 3. 27 делится на 3. Следовательно, 27 делится и на 9.

в) Некоторые четырехугольники являются трапециями. Некоторые трапеции имеют ось симметрии. Следовательно, некоторые четырехугольники имеют ось симметрии.

№ 115. а) Все равновеликие фигуры имеют одинаковую площадь. Фигуры F_1 и F_2 имеют одинаковую площадь. Следовательно, фигуры F_1 и F_2 равновелики.

б) Все числа, кратные 100, делятся на 10. Все числа, кратные 10, делятся на 5. Следовательно, все числа, кратные 100, делятся на 5.

в) Некоторые прямые плоскости параллельны. Некоторые прямые плоскости пересекаются. Следовательно, все пересекающиеся прямые плоскости не параллельны.

№116. а) Все водители машин сдавали экзамен по правилам дорожного движения. Иван Петрович является водителем машины. Следовательно, Иван Петрович сдавал экзамен по правилам дорожного движения.

б) Все равные фигуры имеют одинаковые площади. Следовательно, если фигуры не равны, то их площади не одинаковы.

в) Все числа, кратные 100, делятся на 10. Некоторые числа, кратные 10, делятся на 200. Следовательно, все числа, кратные 200, делятся на 100.

№117. а) Все квадраты являются прямоугольниками. Во всех прямоугольниках диагонали равны. Следовательно, во всех квадратах диагонали равны.

б) Все числа, кратные 9, делятся на 3. Следовательно, если число не делится на 9, то оно не делится на 3.

в) Некоторые месяцы года состоят из 30 дней. Март – один из месяцев года. Следовательно, в марте 30 дней.

№118. а) Если число делится на 15, то оно делятся на 5. 37 не делится на 15. Следовательно, 37 не делится и на 5.

б) Все квадраты являются ромбами. Все ромбы являются параллелограммами. Следовательно, если четырёхугольник не является параллелограммом, то он не является квадратом.

в) Все бабочки – насекомые. Некоторые насекомые летают. Следовательно, все бабочки летают.

№ 119 а) Все одушевленные существительные отвечают на вопрос «кто». «Сад» – неодушевленное существительное. Следовательно, «сад» не отвечает на вопрос «кто».

б) Если многоугольник правильный, то в него можно вписать окружность. $\boldsymbol{ABCDE}$ – правильный многоугольник. Следовательно, в $\boldsymbol{ABCDE}$ можно вписать окружность.

в) Все числа, меньшие 15, меньше 100. Некоторые числа меньшие 100, являются двузначными. Следовательно, некоторые числа, меньшие 15, являются двузначными.

№120. а) Если углы вертикальны, то они равны. Следовательно, если углы не равны, то они не могут быть вертикальными.

б) Все числа, меньшие 100, меньше 200. Число 99 меньше 200. Следовательно, 99 меньше 100.

в) Все ромбы являются параллелограммами. Все прямоугольники являются параллелограммами. Следовательно, некоторые ромбы являются прямоугольниками.

Задачи по теме «Бинарные соответствия и отношения»

В задачах №№ 1 – 10 для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$ найти область определения, область значений, график соответствия, полные образы и полные прообразы элементов множеств X и Y, а также построить граф и таблицу, задающие данное соответствие R.

№ 1. $R(x, y)$: «Число x делится на число y», $X = \{1, 10, 4, 5\}$, $Y = \{0, 2, 3, 5\}$.

№ 2. $R(x, y)$: «Число x больше числа y», $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{3, 5, 7, 9\}$.

№ 3. $R(x, y)$: «Число x меньше числа y», $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{3, 5, 7, 9\}$.

№ 4. $R(x, y)$: «Число x не больше числа y», $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 4, 5, 6\}$.

№ 5. $R(x, y)$: «Число x не меньше числа y», $X = \{9, 8, 7, 6\}$, $Y = \{4, 5, 7, 6\}$.

№ 6. $R(x, y)$: «Числа x и y имеют общие делители $\neq 1$», $X = \{2, 4, 6, 7\}$, $Y = \{9, 10, 11, 12\}$.

№ 7. $R(x, y)$: «Числа x и y не имеют общих делителей $\neq 1$», $X = \{2, 3, 6, 8\}$, $Y = \{3, 4, 7, 10\}$.

№ 8. $R(x, y)$: «Сумма чисел x и y больше 10», $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{7, 8, 9, 6\}$.

№ 9. $R(x, y)$: «Разность чисел x и y меньше 5», $X = \{7, 8, 9, 10\}$, $Y = \{2, 3, 4, 5\}$.

№ 10. $R(x, y)$: «Произведение чисел x и y больше 15», $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{3, 6, 7, 8\}$.

В задачах №№ 11 – 20 для соответствия R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$ задать соответствие R^{-1}, обратное данному и соответствие $\bar{R}$, противоположное данному, найти их области определения и области значений, а также графики. Построить изображения графиков соответствий R^{-1} и $\bar{R}$ в координатной плоскости. Построить графы соответствий R^{-1} и $\bar{R}$. Найти полные образы и полные прообразы элементов при соответствиях R^{-1} и $\bar{R}$.

№ 11. $R(x, y)$: «$x = y^2$», $X = \{1, 4, 5, 9, 16\}$, $Y = \{-2, -1, 1, 3, 4\}$.

№ 12. $R(x, y)$: «Число x меньше числа y», $X = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$, $Y = \{-4, -3, -2, 0, 1\}$.

№ 13. $R(x,y)$: «$\sqrt{x} = y$», $X = \{0,1,2,4,9\}$, $Y = \{-3,-1,0,1,2\}$.

№ 14. $R(x,y)$: «Число x в 3 раза больше числа y», $X = \{0,5,6,9,12\}$, $Y = \{0,2,3,4,5\}$.

№ 15. $R(x,y)$: «$x^2 = y$», $X = \{-2,-1,0,2,4\}$, $Y = \{0,1,2,3,4\}$.

№ 16. $R(x,y)$: «Число x – делитель числа y», $X = \{0,2,3,5,7\}$, $Y = \{0,4,6,11,15\}$.

№ 17. $R(x,y)$: «Число x на 2 меньше числа y», $X = \{0,3,5,6,7\}$, $Y = \{2,4,5,7,8\}$.

№ 18. $R(x,y)$: «$x = \sqrt{y}$», $X = \{-3,0,1,2,3\}$, $Y = \{-1,0,1,4,9\}$.

№ 19. $R(x,y)$: «Число x противоположно числу y», $X = \{-1,0,1,2,3\}$, $Y = \{-4,-3,-2,-1,0\}$.

№ 20. $R(x,y)$: «Число x делится на число y», $X = \{0,1,6,10,12\}$, $Y = \{0,2,3,4,5\}$.

В задачах №№ 21 – 30 для отношения R, определяемого предикатом $R(x,y)$, где $x, y \in X$,

– найти область определения, область значений, график отношения, полные образы и полные прообразы элементов множеств X, находящихся в отношении R, а также построить граф и таблицу, задающие данное отношение R;

– определить отношения R^{-1} и $\bar{R}$, найти их графики, а также построить графы этих отношений.

№ 21. $R(x,y)$: «Буква x образует открытый слог с буквой y», $X = \{\text{а},\text{о},\text{е},\text{м},\text{н},\text{к}\}$.

№ 22. $R(x,y)$: «Число x с числом y образуют правильную дробь вида $\frac{x}{y}$», $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. (Правильная дробь меньше 1.)

№ 23. $R(x,y)$: «Числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 3», $X = \{11,12,13,14,15,16\}$. (При делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2.)

№ 24. $R(x,y)$: «Числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 4», $X = \{4,5,6,7,8,9\}$. (При делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2, 3.)

№ 25. $R(x,y)$: «Сумма чисел x и y больше 7», $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

№ 26. $R(x,y)$: «Числа x и y имеют общие делители $\neq 1$», $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

№ 27. $R(x,y)$: «Числа x и y не имеют общих делителей $\neq 1$», $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

№ 28. $R(x, y)$: «Число x при счёте появляется позже числа y», $X = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

№ 29. $R(x, y)$: «Число x при счёте появляется не позже числа y», $X = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

№ 30. $R(x, y)$: «$x^3 = y$», $X = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 27\}$.

В задачах №№ 31 – 40 нужно определить бинарное отношение для элементов данного множества и использовать его граф при решении задачи.

№ 31. В соревнованиях по бегу Алексей выиграл у Володи, но проиграл Жене, Илья выиграл у Жени, но проиграл Николаю, а Сергей выиграл у Николая, но проиграл Григорию. Кто из мальчиков выступил на соревнованиях лучше всех. Кто выступил лучше: Сергей или Женя?

№ 32. Имеется семь сортов конфет. Известно, что конфеты "Красная шапочка" дороже "Алёнки", но дешевле конфет "Каракум", конфеты "Нива" дороже конфет "Ласточка", но дешевле "Алёнки", а "Грильяж" дороже конфет "Птичье молоко", но дешевле "Ласточки". Какие конфеты самые дорогие? Какие из конфет дешевле: "Красная шапочка" или "Нива"?

№ 33. Имеется семь чисел. Известно, что четвёртое из них больше второго, но меньше первого, третье больше пятого, но меньше второго, а шестое больше седьмого, но меньше пятого. Какое из этих чисел больше всех? Какое из чисел меньше: третье или шестое?

№ 34. Имеется семь фирм-производителей мобильных телефонов: Apple, Fly, Lenovo, Sony, Nokia, Samsung, Xiaomi. Известно, что некоторый телефон марки Sony можно приобрести дешевле, чем телефон марки Lenovo, но дороже, чем телефон марки Fly, некоторый телефон марки Nokia оказался дешевле телефона Samsung, но дороже телефона Lenovo, а телефон Xiaomi – дешевле некоторого телефона Apple, но дороже телефона Samsung. Телефон какого производителя оказался самым дорогим? Какой телефон самый дешёвый?

№ 35. Из семи бригад скорой помощи в течение месяца первая совершила больше всех выездов, четвёртая бригада выезжала на вызовы чаще, чем вторая, но реже, чем третья, седьмая бригада имеет выездов больше, чем пятая, но меньше, чем вторая, а пятая бригада выезжала на вызовы чаще шестой. Какая бригада совершила меньше всех выездов? Какая из бригад выезжала на вызовы чаще: седьмая или четвёртая?

№ 36. Из семи домов четвёртый находится ближе к центру города, чем третий, и дальше, чем второй, первый дом ближе к центру, чем пятый, но дальше, чем третий, а седьмой дом – ближе к центру города, чем шестой, но дальше, чем пятый. Какой из домов находится дальше всех от центра города? Какой из домов ближе к центру: третий или седьмой?

№ 37. Имеется семь кандидатов в Законодательное собрание по одному округу. Опрос общественного мнения показал, что рейтинг пятого кандидата выше, чем у четвёртого, но ниже, чем у третьего, рейтинг шестого кандидата ниже, чем у первого, но выше, чем у третьего, а у седьмого кандидата рейтинг выше, чем у первого, но ниже, чем у второго. У кого из кандидатов по данным опроса самый высокий рейтинг? Кто из кандидатов более популярен: третий или седьмой?

№ 38. При анализе заполненных анкет для устройства на работу оказалось, что у Тарасова шансов быть принятым больше, чем у Петрова, но меньше, чем у Захарова, у Сидорова шансов больше, чем у Николаева, но меньше, чем у Петрова, а у Иванова шансов быть принятым на работу больше, чем у Захарова, но меньше, чем у Миронова. У кого из претендентов больше всех шансов быть принятым на работу, а у кого меньше всех?

№ 39. Из семи работающих станков производительность первого выше, чем у второго, но ниже, чем у четвёртого, у шестого станка производительность выше, чем у третьего, но ниже, чем у седьмого, у пятого станка производительность ниже, чем у второго, а у третьего – выше, чем у четвёртого. Какой из этих станков самый высокопроизводительный? У какого станка производительность ниже: у пятого или четвёртого?

№ 40. Имеется семь различных автобусных маршрутов. Известно, что на втором маршруте остановок больше, чем на третьем, но меньше, чем на четвёртом, на седьмом маршруте остановок больше, чем на четвёртом, но меньше, чем на шестом, на третьем – остановок больше, чем на пятом, а на шестом – остановок меньше, чем на первом. На каком из маршрутов меньше всего остановок? На каком из маршрутов остановок больше: на первом или на пятом? На третьем или на седьмом?

В задачах №№ 41 – 50 перечислить свойства отношения R, определяемого предикатом $R(x, y)$, где $x, y \in X$, если

№ 41. а) $R(A, B)$: «Множество A – собственное подмножество множества B», X – универсальное множество U;

б) $R(x, y)$: «Студент x учится в одной группе со студентом y», X – множество студентов кафедры начального образования;

в) $R(x, y)$: «Окружность x касается окружности y», X – множество всех окружностей плоскости.

№ 42. а) $R(x, y)$: «Прямая x пересекает прямую y», X – множество всех прямых плоскости;

б) $R(x, y)$: «Животные x и y имеют одинаковую среду обитания», X – множество животных, населяющих планету;

в) $R(A, B)$: «Множество A – подмножество множества B», X – универсальное множество U.

№ 43. а) $R(x, y)$: «Человек x – друг человека y», X – множество людей;

б) $R(x, y)$: «Из предиката x следует предикат y», X – множество всех предикатов;

в) $R(x, y)$: «Окружность x имеет с окружностью y общий центр», X – множество всех окружностей плоскости.

№ 44. а) $R(A, B)$: «Множества A и B находятся в отношении пересечения» X – универсальное множество U;

б) $R(x, y)$: «Книги x и y относятся к одной области знания», X – множество всех книг научной библиотеки;

в) $R(x, y)$: «Треугольник x имеет большую площадь, чем треугольник y», X – множество треугольников плоскости.

№ 45. а) $R(x, y)$: «Числа x и y имеют одинаковые остатки при делении на 3», $X = \mathbb{N}$;

б) $R(x, y)$: «Дерево x ниже дерева y», X – множество деревьев в парке;

в) $R(x, y)$: «Человек x – отец человека y», X – множество людей.

№ 46. а) $R(x, y)$: «Отрезок x пересекает отрезок y», X – множество всех отрезков плоскости;

б) $R(x, y)$: «Предикаты x и y равносильны», X – множество всех предикатов;

в) $R(x, y)$: «Число x на 5 больше числа y», $X = \mathbb{N}$.

№ 47. а) $R(x, y)$: «Книга x издана не позднее книги y», X – множество книг библиотеки;

б) $R(x, y)$: «Города x и y находятся на одинаковом расстоянии от Москвы», X – множество городов России;

в) $R(x, y)$: «Число x на 5 больше числа y», $X = \mathbb{N}$.

№ 48. а) $R(x, y)$: «Число x в 3 раза меньше числа y», $X = \mathbb{N}$;

б) $R(x, y)$: «Птица x живёт дольше птицы y», X – множество птиц;

в). $R(A, B)$: «Множество A равно множеству B» X – универсальное множество U.

№ 49. а) $R(x, y)$: «Звезда x ярче звезды y», X – множество звёзд ночного неба;

б) $R(x, y)$: «Окружность x пересекает окружность y», X – множество всех окружностей плоскости;

в). $R(x, y)$: «Растения x и y принадлежат одному семейству», X – множество растений планеты.

№ 50. а) $R(x, y)$: «Производительность станка x ниже производительности станка y», X – множество станков завода;

б) $R(x, y)$: «Число x на 2 меньше числа y», $X = \mathbb{N}$;

в). $R(x, y)$: «Слова x и y начинаются с одной буквы», X – множество слов русского языка.

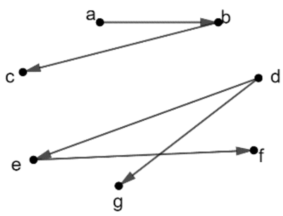
В задачах №№ 51 – 60 данный граф нужно дополнить с учётом того, что отношение R является:

а) отношением эквивалентности;

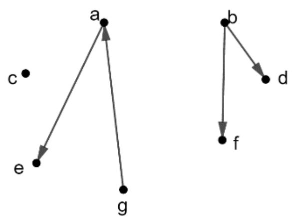
б) отношением строгого порядка;

в) отношением нестрогого порядка.

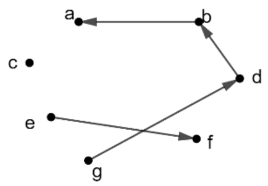
№ 51.



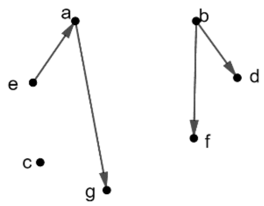
№ 52.



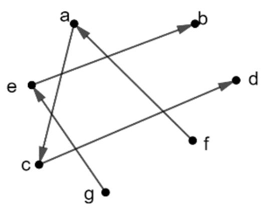
№ 53.



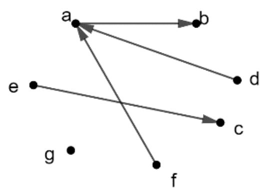
№ 54.



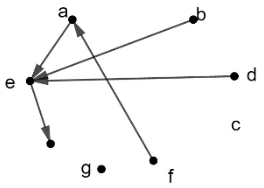
№ 55.



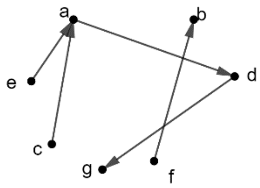
№ 56.



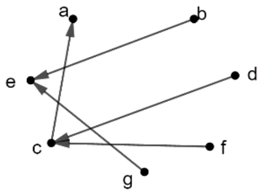
№ 57.



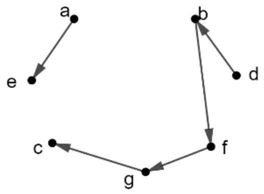
№ 58.



№ 59.



№ 60.



В задачах №№ 61 – 70 нужно выяснить, является ли соответствие R, определяемое предикатом $R(x, y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, отображением. В случае, когда R является отображением, определить его тип. Ответ обосновать

№ 61. а) $R(x, y)$: «Человек x учится в школе y», X – множество жителей города, Y – множество общеобразовательных школ города.

б) $R(x, y)$: «Сторона x лежит против вершины y», X – множество сторон треугольника, Y – множество вершин треугольника.

в) $R(x, y)$: «Прямая x пересекает окружность y», X – множество прямых плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

г) $R(x, y)$: «За партой x сидит ученик y», X – множество парт в классе, Y – множество учеников класса.

№ 62. а) $R(x, y)$: «В доме x находится магазин y», X – множество домов города, Y – множество магазинов города.

б) $R(x, y)$: «Прямоугольник x имеет площадь y», X – множество прямоугольников плоскости, Y – множество положительных действительных чисел».

в) $R(x, y)$: «Вокруг трапеции x описана окружность y», X – множество трапеций плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

г) $R(x, y)$: «Человек x имеет паспорт с номером y», X – множество российских граждан старше 14 лет, Y – множество всех номеров российских паспортов.

№ 63. а) $R(x, y)$: «В трапецию x вписана окружность y», X – множество трапеций плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

б) $R(x, y)$: «Из вершины x выходит биссектриса y», X – множество вершин треугольника, Y – множество биссектрис этого треугольника.

в) $R(x, y)$: «В кресле x сидит зритель y», X – множество кресел в театре, Y – множество зрителей.

г) $R(x, y)$: «Писатель x – автор книги y», X – множество писателей России, Y – множество книг библиотеки.

№ 64. а) $R(x, y)$: «В море x впадает река y», X – множество морей на Земле, Y – множество рек на Земле.

б) $R(x, y)$: «У государства x – флаг y», X – множество государств мира, Y – множество государственных флагов.

в) $R(x, y)$: «Треугольник x имеет площадь y», X – множество треугольников плоскости, Y – множество положительных действительных чисел.

г) $R(x, y)$: «Улица с названием x находится в городе y», X – множество всех возможных названий улиц, Y – множество городов России.

№ 65. а) $R(x, y)$: «Прямая x касается окружности y», X – множество прямых плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

б) $R(x, y)$: «Отрезок x имеет длину y», X – множество отрезков плоскости, Y – множество положительных действительных чисел.

в) $R(x, y)$: «Государство x имеет столицу y», X – множество государств мира, Y – множество столиц государств.

г) $R(x, y)$: «Книгу x написал автор y», X – множество книг библиотеки, Y – множество писателей России.

№ 66. а) $R(x, y)$: «Вокруг прямоугольника x описана окружность y», X – множество прямоугольников плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

б) $R(x, y)$: «На странице x начинается параграф y», X – множество страниц учебника, Y – множество параграфов учебника.

в) $R(x, y)$: «В школе x – директор y», X – множество школ города, Y – множество директоров школ.

г) $R(x, y)$: «На сторону x опущена высота y», X – множество сторон треугольника, Y – множество высот этого треугольника.

№ 67. а) $R(x, y)$: «Окружность x касается прямой y», X – множество окружностей плоскости, Y – множество прямых плоскости.

б) $R(x, y)$: «У человека x фамилия y», X – множество жителей города, Y – множество всевозможных фамилий.

в) $R(x, y)$: «Город x находится в государстве y», X – множество городов мира, Y – множество государств мира.

г) $R(x, y)$: «Буква x в алфавите стоит непосредственно перед буквой y», X – множество гласных букв русского алфавита, Y – множество согласных букв русского алфавита.

№ 68. а) $R(x, y)$: «Вокруг треугольника x описана окружность y», X – множество треугольников плоскости, Y – множество окружностей плоскости.

б) $R(x, y)$: «Книга x издана в год y», X – множество книг областной библиотеки, Y – множество лет периода 1920 – 2020.

в) $R(x, y)$: «В городе x находится в улица с названием y», X – множество городов России, Y – множество всех возможных названий улиц.

г) $R(x, y)$: «Директор x является руководителем предприятия y», X – множество директоров предприятий, Y – множество предприятий города.

№ 69. а) $R(x, y)$: «Окружность x пересекает прямую y», X – множество окружностей плоскости, Y – множество прямых плоскости.

б) $R(x, y)$: «Растение x относится к семейству y», X – множество растений, Y – множество семейств растений.

в) $R(x, y)$: «Ученик x имеет дневник y», X – множество учащихся класса, Y – множество дневников учащихся класса.

г) $R(x, y)$: «Буква x в алфавите стоит непосредственно за буквой y», X – множество гласных букв русского алфавита, Y – множество согласных букв русского алфавита.

№ 70. а) $R(x, y)$: «Параграф x начинается на странице y», X – множество параграфов учебника, Y – множество страниц учебника.

б) $R(x, y)$: «Автомобиль x имеет номер y», X – множество легковых автомобилей, Y – множество зарегистрированных номеров автомобилей.

в) $R(x, y)$: «Число x является периметром прямоугольника y», X – множество положительных действительных чисел, Y – множество прямоугольников плоскости.

г) $R(x, y)$: «В учебной группе x старостой является y», X – множество учебных групп кафедры начального образования, Y – множество старост учебных групп кафедры начального образования.

В задачах №№ 71 – 80 для доказательства использовать соответствующие определения.

№ 71. Доказать, что множество чётных натуральных чисел является счётным.

№ 72. Доказать, что множество сторон квадрата и множество времён года являются равномощными.

№ 73. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 10, является счётным.

№ 74. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 10, и множество натуральных чисел, кратных 10, являются равномощными.

№ 75. Доказать, что множество точек окружности, вписанной в треугольник, и множество точек окружности, описанной около этого треугольника, являются равномощными.

№ 76. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 5, счётно.

№ 77. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 5, является бесконечным.

№ 78. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 2, и множество натуральных чисел, кратных 5, являются равномощными.

№ 79. Доказать, что множество точек сторон выпуклого многоугольника, описанного вокруг окружности, и множество точек сторон выпуклого многоугольника, вписанного в эту окружность, являются равномощными.

№ 80. Доказать, что множество натуральных чисел, кратных 4, бесконечно.

Задачи по теме «Алгебраические операции и структуры»

В задачах №№ 1 – 10 определите, для каких пар $\langle *, B\rangle$ истинно высказывание «$*$ является алгебраической операцией на множестве B». Приведите обоснованное решение.

№ 1. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – вычитание, B – множество целых чисел.

№ 2. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $3n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – сложение, B – множество отрицательных целых чисел.

№ 3. а) $*$ – образование наибольшего общего делителя, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n$, $n \in \mathbb{N}$.

№ 4. а) $*$ – образование степени: $\langle m,\ n\rangle \to m^2$, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n+2$, $n \in \mathbb{N}$.

№ 5. а) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $3n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – умножение, B – множество рациональных чисел.

№ 6. а) $*$ – образование наименьшего общего кратного, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

№ 7. а) $*$ – сложение, B – множество натуральных чисел; б) $*$ – деление, B – множество отрицательных чисел.

№ 8. а) $*$ – деление, B – множество положительных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $5n+2$, $n \in \mathbb{N}$.

№ 9. а) $*$ – деление, B – множество всех действительных чисел; б) $*$ – сложение, B – множество целых чисел вида $4n$, $n \in \mathbb{N}$.

№ 10. а) $*$ – умножение, B – множество целых чисел вида $4n+1$, $n \in \mathbb{N}$; б) $*$ – вычитание, B – множество нечётных чисел.

В задачах №№ 11 – 20 определите, относительно каких алгебраических операций: сложения, вычитания, умножения и деления – замкнуты числовые множества. При решении воспользуйтесь определением замкнутости множества.

№ 11. а) $\{2n + 1\}$, n – целое; б) $\{1\}$.

№ 12. а) $\{3n + 1\}$, n – целое; б) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

№ 13. а) $\{6n + 5\}$, n – целое; б) $\{$натуральные числа$\}$.

№ 14. а) $\{3n + 2\}$, n – целое; б) $\{$нечётные целые числа$\}$.

№ 15. а) $\{6n + 1\}$, n – целое; б) $\{$чётные целые числа$\}$.

№ 16. а) $\{4n + 3\}$, n – целое; б) $\{$положительные рациональные числа$\}$.

№ 17. а) $\{4n + 1\}$, n – целое; б) $\{0\}$.

№ 18. а) $\{5n + 2\}$, n – целое; б) $\{-1, 0, 1\}$.

№ 19. а) $\{7n + 1\}$, n – целое; б) $\{0, 1, 2\}$.

№ 20. а) $\{5n + 1\}$, n – целое; б) $\{0, 1\}$.

В задачах №№ 21 – 30 установите, какие из алгебраических операций являются коммутативными а) в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$; б) в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Решение нужно обосновать.

№ 21. а) умножение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x + 2y$.

№ 22. а) $\langle x,\ y\rangle \to \text{НОК}(x, y)$; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to 2x - y$.

№ 23. а) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x + y$; б) вычитание.

№ 24. а) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x^2 - y^2$; б) сложение.

№ 25. а) умножение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x - y$.

№ 26. а) сложение; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x^3 + y^3$.

№ 27. а) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to |x+y|$; б) умножение.

№ 28. а) вычитание; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x^2 + y^2$.

№ 29. а) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to |x-y|$; б) умножение.

№ 30. а) $\langle x,\ y\rangle \to \text{НОД}(x, y)$; б) операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x^3 - y^3$.

В задачах №№ 31 – 40 докажите или опровергните, что данные алгебраические операции являются ассоциативными в указанных множествах.

№ 31. Операция вычитания множеств в универсальном множестве U.

№ 32. Операция вычитания в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

№ 33. Операция эквиваленции в множестве высказываний.

№ 34. Операция возведения в степень в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

№ 35. Операция импликации в множестве высказываний.

№ 36. Операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to 2x - y$, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

№ 37. Операция задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to |x-y|$ в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

№ 38. Операция пересечения множеств в универсальном множестве U.

№ 39. Операция умножения в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$.

№ 40. Операция, задаваемая формулой $\langle x,\ y\rangle \to x - 2y$, в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

В задачах №№ 41 – 50 установите, существует ли: а) нейтральный элемент для данной операции в указанном множестве; б) симметричный данному элемент относительно данной операции в указанном множестве. В случае положительного ответа найдите эти элементы.

№ 41. а) Для операции сложения в множестве отрицательных действительных чисел; б) множеству A относительно операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A: $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, в универсальном множестве U.

№ 42. а) Для операции объединения множеств в универсальном множестве U; б) -7 относительно сложения целых чисел.

№ 43. а) Для операции $\langle x,\ y\rangle \to x + y + xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; б) числу x относительно операции $\langle x,\ y\rangle \to x + y + xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

№ 44. а) Для операции вычитания в множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) множеству B относительно операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A: $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$, в универсальном множестве U.

№ 45. а) Для операции декартова умножения множеств, элементами которых являются целые числа (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) $\frac{3}{4}$ относительно умножения рациональных чисел.

№ 46. а) Для операции вычитания множеств в универсальном множестве U (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) $-\frac{7}{8}$ относительно умножения рациональных чисел.

№ 47. а) Для операции $\langle x,\ y\rangle \to x + y - xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$; б) числу x относительно операции $\langle x,\ y\rangle \to x + y - xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

№ 48. а) Для операции возведения в степень в множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$; б) множеству A относительно операции пересечения множеств A и B в универсальном множестве U.

№ 49. а) Для операции объединения разности множеств A и B с разностью множеств B и A $(A\setminus B) \cup (B\setminus A)$ в универсальном множестве U; б) числу у относительно операции $\langle x,\ y\rangle \to x + y + xy$ в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$

№ 50. а) Для операции деления в множестве положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (в рамках задачи речь идёт о нейтральном элементе справа); б) множеству B относительно операции объединения множеств A и B в универсальном множестве U.

В задачах №№ 51 – 60 проверьте, является ли операция $*$ дистрибутивной относительно операции $\circ$ в множестве M. Для операций на множестве множеств U ответ поясните с помощью диаграмм Эйлера-Венна. Для операций на числовых множествах или множестве высказываний проведите аналитические рассуждения, используя определение дистрибутивной операции.

№ 51. $*$ – деление, $\circ$ – сложение, M – множество положительных чисел.

№ 52. $*$ – вычитание, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество.

№ 53. $*$ – вычитание, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

№ 54. $*$ – объединение, $\circ$ – пересечение, $M = U$ – универсальное множество.

№ 55. $*$ – пересечение, $\circ$ – объединение , $M = U$ – универсальное множество.

№ 56. $*$ – сложение, $\circ$ – вычитание, $M = \mathbb{Z}$ – множество целых чисел.

№ 57. $*$ – деление, $\circ$ – умножение, M – множество положительных чисел.

№ 58. $*$ – конъюнкция, $\circ$ – импликация, M – множество высказываний.

№ 59. $*$ – дизъюнкция, $\circ$ – конъюнкция, M – множество высказываний.

№ 60. $*$ – возведение в степень, $\circ$ – умножение, $M = \mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. (Докажите, что операция $*$ дистрибутивна справа.)

В задачах №№ 61 – 70 задайте множество $\mathbb{Z}_k$ перечислением элементов, выполните следующее задание. Множество $\mathbb{Z}_k$ состоит из чисел $0, 1, 2, \dots, k-1$. Операции сложения и умножения определяются так: суммой чисел a и b называют остаток от деления $a + b$ на k, а произведением этих чисел – остаток от деления $a \cdot b$ на k. Докажите, что сложение и умножение являются алгебраическими операциями в $\mathbb{Z}_k$. Составьте таблицы сложения и умножения в $\mathbb{Z}_k$. Коммутативны ли эти операции в $\mathbb{Z}_k$? Какой элемент нейтрален относительно сложения, а какой относительно умножения? Найдите элемент, противоположный элементу $k-2$. Найдите элемент, обратный элементу $k-1$. Ассоциативны ли сложение и умножение в $\mathbb{Z}_k$? Проверьте, является ли $\mathbb{Z}_k$ полем или только кольцом.

№ 61. $k = 11$.
№ 62. $k = 5$.
№ 63. $k = 6$.
№ 64. $k = 7$.
№ 65. $k = 4$.
№ 66. $k = 12$.
№ 67. $k = 9$.
№ 68. $k = 3$.
№ 69. $k = 10$.
№ 70. $k = 8$.

Задачи по теме «Комбинаторика»

1. Сколькими способами можно составить список студентов группы, в которой 25 человек?
2. Сколькими способами можно раскрасить диаграмму из четырех столбцов четырехцветной шариковой ручкой так, чтобы каждый столбец был окрашен в определенный цвет?
3. Сколькими способами можно выбрать старосту, профорга и физорга из 25 студентов?
4. В классе 20 мальчиков и 12 девочек. Из них нужно назначить одного дежурного в столовую. Сколькими способами можно это сделать?
5. В кружке "Юный математик" занимаются 25 человек. Необходимо избрать старосту кружка, его заместителя, редактора стенгазеты и секретаря. Сколькими способами можно их избрать?
6. Сколько разных слов можно образовать при помощи букв слова "соединение"?
7. Сколько автомашин можно обеспечить трехзначными номерами?
8. Из 12 девушек и 15 юношей нужно выбрать 4 пары для танца. Сколькими способами можно осуществить выбор?
9. В гастрономе 3 вида коробок с конфетами. Сколькими способами можно купить набор из 5 коробок?
10. На книжной полке стоят 20 книг по алгебре, 12 книг по геометрии и 7 учебников русского языка. Сколькими способами можно выбрать одну книгу по математике?
11. Имеется 5 билетов "Русское лото", 6 билетов "Спортлото" и 10 билетов "Золотой ключ". Сколькими способами можно выбрать один билет "Русское лото" или "Золотой ключ"?
12. Сколько существует различных положений, в которых могут оказаться 4 переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?
13. Из цифр 1, 3, 5 составить различные трехзначные числа так, чтобы: а) в числе не было одинаковых цифр; б) в числе цифры могли повторяться.
14. Из цифр 2, 4, 6, 8 составить различные трехзначные числа так, чтобы цифры в числе не повторялись.
15. Сколько четных трехзначных чисел можно записать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в записи числа не повторяются)?

16. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 составить всевозможные четырехзначные числа, кратные пяти. Сколько таких чисел?

17. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 0, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в записи числа: а) не повторяются; б) повторяются?

18. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 8 и 9?

19. Сколько различных стартовых шестерок можно образовать из 10 волейболистов? Сколькими способами можно их расставить на площадке?

20. Сколько пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0 и 1?

21. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя вместо звездочки пропущенные цифры в записи числа: *2*5; 3*7*?

22. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400 можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 9, если цифры в записи числа: а) не должны повторяться; б) могут повторяться?

23. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 1869?

24. Найти сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2 и 3, не повторяя цифры в числе?

25. Найти сумму всех четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 5 и 7, не повторяя цифры в числе.

26. Сколько различных перестановок цифр может быть сделано в числе 123589, чтобы каждый раз получалось четное число?

27. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из чисел 7, 2, 11, 9, 5, 3?

28. Сколько различных дробей можно записать с помощью чисел 3, 5, 7, 1, 13, 16, используя каждый раз только два числа?

29. В магазине 5 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

30. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех разных имен?

31. Сколько хорд можно провести через 8 точек, лежащих на одной окружности?

32. Сколькими способами можно выбрать из слова "кортеж" 2 согласные и одну гласную?

33. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на белых полях шахматной доски?

34. Определить число всех диагоналей у пяти, восьми, двенадцати и пятнадцати угольника?

35. У одного студента есть 7 книг по математике, а у другого 9. Сколькими способами они могут обменять друг с другом по 2 книги?

36. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4 см, 5 см, 6 см и 7 см?

37. Сколькими способами могут разместиться 6 человек на одной скамейке?

38. В группе 25 студентов. Они обменялись друг с другом фотокарточками. Сколько всего было роздано фотокарточек?

39. Сколькими способами можно группу из 15 студентов разделить на две так, чтобы в одной было 4 человека, а в другой 11?

40. В поезде освободилось четырехместное купе. На билеты претендуют 7 человек. Сколько различных вариантов выдачи билетов, если: а) места занумерованы; б) места не занумерованы?

41. Из города A в город B ведут 5 дорог, а из города B в город C – 3 дороги. Сколько путей, проходящие через B, ведут из города A в город C?

42. В подразделении 40 солдат и 5 офицеров. Сколькими способами можно назначить караул, состоящий из трех солдат и одного офицера?

43. Сколькими способами можно рассадить трех человек, если есть 7 свободных мест?

44. В автобусном парке 38 машин. Сколькими способами диспетчер может назначить 36 машин для выхода в рейс?

45. Из десяти букв, a, b, c, d, e, f, g, h, i, k нужно выбрать 5 так, чтобы среди выбранных была буква d. Сколькими способами это можно сделать?

46. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего рода надо выбрать по одному слову. Сколькими способами это можно сделать?

47. Сколькими способами из колоды, содержащей 36 карт, можно выбрать по одной карте каждой масти?

48. Сколько сигналов можно передать с помощью четырех различных флажков, если каждый сигнал подается не менее чем двумя флажками?

49. Сколькими способами можно записать подряд 4 единицы и 6 нулей?

50. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4 можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если каждая цифра может в записи числа встречаться несколько раз?

51. Имеется 3 груши, 4 яблока и 2 персика. Сколько имеется комбинаций для выбора нескольких фруктов так, чтобы среди выбранных были и груши, и яблоки, и персики?

52. Для полета на Марс необходимо составить экипаж космического корабля: командир корабля и его помощник, 2 бортинженера и врач. К полету готовятся 15 летчиков, 20 инженеров, знающих устройство космического корабля, и 8 врачей. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

53. Для несения почетного караула из 10 человек приглашены офицеры пехотных войск, авиации, погранвойск, артиллерии, морского флота и ракетных войск. Сколькими способами можно выбрать состав почетного караула?

54. На студенческий вечер собрались юноши и девушки 8 факультетов. Для исполнения русской народной пляски приглашаются 10 студентов. Сколькими способами можно выбрать эту десятку? Сколькими способами можно сделать так, чтобы среди танцующих были студенты факультета начального образования?

55. Имеется неограниченное количество монет по 1, 10 и 50 копеек. Сколькими способами можно образовать набор из 20 монет?

56. Сколько различных "слов", состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно записать из букв слова "ученик"?

57. Из натуральных чисел от 1 до 24 выбирают 3 числа так, чтобы их сумма была четной. Сколькими способами это можно осуществить?

58. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются 2 ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы ни какие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

59. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "выборка" так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

60. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

61. Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных учебников между четырьмя студентами?

62. Из трех инженеров и девяти экономистов нужно составить комиссию из 7 человек. Сколькими способами это можно сделать, если в нее должен входить хотя бы один инженер?

63. Сколькими способами можно выбрать из 25 человек бригаду для работы, чтобы в нее входило не менее трех человек?

64. Среди перестановок цифр числа 1234567, сколько таких, которые: а) начинаются с 123; б) кончаются 123; в) начинаются с цифр 1, 2 или 3; г) начинаются с рядом стоящих цифр 1 и 2?

65. Имеется 12 различных конфет. Сколькими способами можно из них составить набор, если в наборе должно быть четное число конфет?

66. На плоскости расположены 10 точек так, что только три из них лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через эти точки?

67. По условию матча между шахматистами А и В победителем считается тот, кто первым выиграет у противника три партии (необязательно подряд), ничьи исключаются. Сколькими способами может сложиться матч?

68. При составлении кода Морзе каждая буква и цифра обозначается цепочкой, составленной из знаков «точка» и «тире». Сколько существует различных цепочек длины не более пяти?

69. Поезд состоит из двух багажных вагонов, четырех плацкартных и трех купейных. Сколькими способами можно сформировать состав, если багажные должны стоять вначале поезда, а купейные в конце?

70. Двадцать студентов делятся на три группы. В первую входят 3 человека, во вторую – 5, а в третью 12. Сколькими способами это можно сделать?

71. В фортепьянном кружке занимаются 10 человек, в кружке художественного слова – 15, в вокальном кружке – 12, в фотокружке – 20 человек. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех чтецов, трех пианистов, пяти певцов и одного фотографа?

72. Пять юношей и три девушки играют в шахматы. Сколькими способами они могут разбиться на две команды, если в каждой команде должно быть хотя бы по одной девушке?

73. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух мужчин. Сколькими способами это можно сделать?

74. Сколько различных звукосочетаний можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждое звукосочетание может содержать от трёх до десяти звуков?

75. В вазе стоят 10 красных и 5 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из вазы пять гвоздик одного цвета?

76. Номера трамвайных маршрутов иногда обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари восьми цветов?

77. Сколькими способами можно распределить 5 учеников по трём параллельным классам?

78. Сколькими способами можно распределить 5 одинаковых подарков между тремя детьми так, чтобы каждый ребёнок получил хотя бы один подарок?

79. Сколькими способами можно подарить 5 разных игрушек трём детям так, чтобы каждый ребёнок получил хотя бы одну игрушку?

80. «Ранним утром на рыбалку улыбающийся Игорь мчался босиком». Сколько различных осмысленных предложений можно составить, используя часть слов этого предложения, но не изменяя порядка их следования?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теоретические аспекты некоторых вопросов, базирующихся на множествах, рассмотрены в учебно-практическом пособии. Задания книги направлены на активную умственную деятельность будущего учителя начальной школы, приучение его к математической культуре и технике выполнения практических заданий.

Бакалавр начального образования, вооружённый теоретическими знаниями разделов математики, владеющий умениями решать задачи, уже является подготовленным к реализации своего богатого практического навыка в разрешении повседневных жизненных ситуаций. Более того, подобный специалист является находкой для современной школы и соответствует требованиям ФГОС ВО, ФГОС НОО, предъявляемым к учителям начальной школы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Стойлова Л.П. Математика: Учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М., 2013.
2. Стойлова Л.П. Теоретические основы начального курса математики. М.: Академия. 2015
3. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М., 1969.
4. Виленкин Н.Я. и др. Задачник-практикум по математике. – М.: «Просвещение», 1977. 208 с.
5. Лаврова Н.Н., Стойлова Л.П. Задачник-практикум по математике. – М.: «Просвещение», 1985. 184 с
6. А. А. Столяр. Логическое введение в математику. Минск. Изд. «Вышэйшая школа», 1971.

Дополнительная литература

1. Виленкин Н.Я., Виленкин А.Н., Виленкин П.А. Комбинаторика. М., 2019.
2. Цыганок И.И. Изучение теории множеств: Методические рекомендации. – Владимир: ВГПУ, 1996. – 56 с.
3. Степанов С.Е., Цыганок И.И. Изучение математических утверждений и их структуры: Методические рекомендации. – Владимир: ВГПУ, 1999. – 64 с.
4. С.Е. Степанов, И.И. Цыганок. Изучение бинарных соответствий: Методические рекомендации. -- Владимир: ВГПУ, 1996. -- 48с.
5. Тихомирова С.В. Бакалаврам начального образования об отображениях // Начальная школа. 2017. № 11. С. 14–20.
6. Тихомирова С.В. Правильные умозаключения в учебном курсе «Теоретические основы математической подготовки учителя начальных классов» (статья) Наука, общество, культура: проблемы и перспективы взаимодействия в современном мире; сборник статей Международной научно-практической конференции (10 мая 2019 г.) – Петрозаводск : МЦНП «Новая наука», 2019. – 87 с.: ил. — Коллектив авторов. ISBN 978-5-6041929-9-3 С.81–87
7. Тихомирова С.В. Основные алгебраические операции и структуры будущему учителю начальной школы (статья) Теоретические и практические аспекты развития научной мысли в современном мире: сборник статей Международной научно-практической конференции (4 июля 2019 г, г. Магнитогорск). В 2 ч. Ч. 1 / - Уфа: OMEGA SCIENCE, 2019. – 170 с. ISBN 978-5-907238-03-9. Ч 1 – ISBN 978-5-907238-05-3 С. 106–110

Учебное издание

ТИХОМИРОВА Светлана Викторовна

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ

Множества

Учебно-практическое пособие

Издаётся в авторской редакции

Подписано в печать 26.06.20.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 11,63. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.