Владимирский государственный университет

Н. Ю. КУРАНОВА   Р. Н. ТИХОМИРОВ

ТЕОРИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2020

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. Ю. КУРАНОВА Р. Н. ТИХОМИРОВ

ТЕОРИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2020

ISBN 978-5-9984-1248-6

УДК 512.5
ББК 22.144

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры общей и теоретической физики
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
А. А. Мокрова

Кандидат физико-математических наук, доцент
зав. кафедрой информационных технологий Владимирского филиала
Российской академии народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации
И. В.Сидорова

Куранова, Н. Ю. Теория многочленов от одной переменной [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Н. Ю. Куранова, Р. Н. Тихомиров ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 87 с. – ISBN 978-5-9984-1248-6. – Электрон. дан. (2,11 Мб). – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод DVD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Излагаются начальные сведения и понятия о многочленах. Подробно представлен теоретический материал, позволяющий самостоятельно освоить предложенные темы студентам. Упражнения и задачи могут быть использованы как задания контрольных работ. Составлено в соответствии с учебной программой по дисциплине «Алгебра и теория чисел».

Предназначено для студентов 1 – 2 курсов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование. Некоторые темы будут интересны учащимся старших классов средней школы.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 8 назв.

УДК 512.5
ББК 22.144

ISBN 978-5-9984-1248-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Пособие посвящено одному из классических разделов алгебры – теории многочленов от одной переменной. С многочленами связан целый ряд важных преобразований в математике. Изучение полиномиальных уравнений и их решений являлось основой развития классической алгебры на протяжении нескольких столетий. Техническая простота вычислений, связанных с многочленами, по сравнению с более сложными классами функций способствовала развитию методов разложения в ряды и полиномиальной интерполяции в математическом анализе.

В пособии изложены основные факты теории многочленов от одной переменной, приведены их доказательства. Рассмотрены разнообразные задачи, связанные с многочленами, и их решения, а также предлагается большой набор упражнений для самостоятельного решения.

Изложение имеет целостный, замкнутый характер и может быть использовано всеми желающими для знакомства с многочленами как в плане теории, так и плане вычислительных приложений. Приведенные теория, примеры и задачи позволяют успешно овладеть фундаментальными знаниями в этой области. В результате усвоения изложенного материала студент должен приобрести следующие компетенции:

знать

- формулировки определений основных понятий и теорем;
- основные операции с многочленами;

уметь

- доказывать основные теоремы о многочленах;
- решать задачи, связанные с многочленами;
- находить корни многочлена;
- производить разложение многочлена на множители;

владеть

- вычислительными алгоритмами;
- приложением теории многочленов к решению вычислительных задач.

Глава 1. ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Основные определения и простейшие свойства

Многоченом, или полиномом, называется выражение вида

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_i \in P$ (Р-числовое поле), а x – символ, назывемый *независимой переменной,* величины a_i называются *коэффициентами* многочлена, а выражения a_ix^{n-i} – *членами или мономами* многочлена $f(x)$, при этом $n - i$ – *степенью* монома.

Если $a_0 \neq 0$, то n называется *степенью* многочлена и обозначается $deg\, f$, а a_0x^n – его *старшим членом*. Коэффициент a_n называется *свободным членом*.

Многочлен $f(x) = 0$ называется *нулевым*; его степень не определена. Многочлены *1*-, *2*-, *3*-й степеней называются линейными, квадратными и кубическими соответственно. Многочлены нулевой степени вместе с нулевым многочленом называют *константами*.

Многочлен, старший коэффициент которого равен единице, называется *нормированным.*

Два многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_0$ и $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \cdots + b_{n-1}x + b_0$ *равны*, если $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Множество всех многочленов с коэффициентами из множества А обозначим А[x]. Множество всех многочленов их Р[x] можно *складывать и умножать*. При этом снова получается многочлен из Р[x].

Сложение и умножение многочленов происходит по обычным правилам сложения и умножения алгебраических выражений. Для определения суммы многочленов *f(x)* и *g(x)* предположим, что $m = n$ (чтобы это предположение выполнялось припишем, если необходимо, к многочленам *f(x)* и *g(x)* нужное количество членов с нулевыми коэффициентами). Тогда *суммой* многочленов *f(x)* и *g(x)* называется многочлен.

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n)$$

<u>Пример</u>.

$f(x) = 3x^4 - 7x^2 + x - 3;\ g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$. Найти $f(x) + g(x)$

$$f(x) + g(x) = 3x^4 + 2x^3 + (-7+5)x^2 + (1+3)x + (-3+(-2)) =$$
$$= \underline{3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 5}.$$

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $f(x)g(x) = a_0b_0x^{n+m} + (a_0b_1 + a_1b_0)x^{n+m-1} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x + a_nb_m$, т.е. $f(x)g(x) = c_0x^{n+m} + c_1x^{n+m-1} + \dots + c_{n+m-1}x + c_{n+m}$, где $c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j$, $\deg(f(x)g(x)) = degf(x) + degg(x)$.

Пример. $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = 3x - 1$. Найти $f(x)\cdot g(x)$.

$f(x)\cdot g(x) = (2x^2 - x + 1)(3x - 1) =$

$= 2x^2\cdot 3x + (-x)\cdot 3x + 1\cdot 3x + 2x^2\cdot(-1) + (-x)\cdot(-1) + 1\cdot(-1) =$

$= 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + x - 1 = \underline{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}$.

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ − коммутативность сложения;
2. $f(x)g(x) = g(x)f(x)$ − коммутативность умножения;
3. $f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = (f(x) + g(x)) + h(x)$ −ассоциативность сложения;
4. $f(x)\big(g(x)h(x)\big) = (f(x)g(x))h(x)$ − ассоциативность умножения;
5. $f(x)\big(g(x) + h(x)\big) = f(x)g(x) + f(x)h(x)$ − дистрибутивность.

Докажем, например, ассоциативность умножения многочленов. Если помимо многочленов

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \text{ и } g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$$

дан еще многочлен $h(x) = c_0x^t + c_1x^{t-1} + \ldots + c_t$, $c_t \neq 0$, то коэффициентом при $x^{n+m+t-i}$, $i = \overline{0, n+m+t}$ в произведении $\big[f(x)g(x)\big]h(x)$ будет служить элемент $\sum\limits_{j+m=i}\left(\sum\limits_{k+i=j} a_kb_i\right)c_m = \sum\limits_{k+l+m=i} a_kb_lc_m$, а в произведении $f(x)\big[g(x)h(x)\big]$ - равное ему число $\sum\limits_{k+j=i} a_k\left(\sum\limits_{l+m=j} b_lc_m\right) = \sum\limits_{k+l+m=i} a_kb_lc_m$.

Легко видеть, что в $P[x]$ константа 0 (и только она) является нейтральным элементом относительно сложения, т.е. для любого $f(x) \in P[x]$ справедливо $f(x) + 0 = f(x)$. Для многочлена $f(x) \in P[x]$ противоположным называется такой многочлен $h(x)$, что $h(x) + f(x) = 0$. Нетрудно заметить, что таким многочленом будет $-f(x) = (-a_0)x^n + (-a_1)x^{n-1} + (-a_2)x^{n-2} + \dots + (-a_{n-1})x + (-a_n)$ и только он.

Операция вычитания выводится как операция, обратная к сложению, а именно разностью или многочленом, полученным в результате вычитания многочленов $f(x)$ и $g(x)$, называется такой многочлен $h(x) = g(x) - f(x)$, что $f(x) + h(x) = g(x)$.

В $P[x]$ константа 1 (и только она) является нейтральным элементом относительно умножения, т.е. для любого $f(x) \in P[x]$ справедливо $f(x) \cdot 1 = f(x)$. Для многочлена $f(x) \in P[x]$ обратным называется такой многочлен $h(x)$, что $h(x) \cdot f(x) = 1$. Обратный многочлен, если он существует, обозначается $\frac{1}{f(x)}$. Из утверждения вытекает, что $deg\frac{1}{f(x)} = degf(x)$, откуда получаем, что обратный многочлен существует тогда и только тогда, когда $degf(x) = 0$, т.е. $f(x)$ - нулевая константа. Операция деления вводится как операция, обратная операции умножения, а именно частным или многочленом, полученным в результате деления нацело $g(x)$ на $f(x)$, называется такой многочлен $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, что $f(x)h(x) = g(x)$.

Из определения суммы многочленов получаем, что либо $f(x) + g(x) = 0$, либо $\deg\bigl(f(x) + g(x)\bigr) \leq \max\{deg\, f(x), degg(x)\}$. Из определения произведения многочленов получаем, что если $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$, то $\deg\bigl(f(x)g(x)\bigr) = degf(x) + degg(x)$. Отсюда получаем, что в $P[x]$ нет делителей нуля, т.е. из равенства $f(x)g(x) = 0$, следует, что $f(x) = 0$ или $g(x) = 0$.

Лемма о сокращении. *Если* $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ *и* $h(x) \neq 0$, *то* $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Из равенства $f(x)h(x) = g(x)h(x)$ получаем, что $(f(x) - g(x))h(x) = 0$. Так как в $P[x]$ нет делителей нуля, то $f(x) - g(x) = 0$. ■

Пример. Найти многочлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, если

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3.$$

Решение. Для нахождения многочлена требуется определить его коэффициенты a_0, a_1, a_2. Из условия задачи для коэффициентов имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ a_0 + 2\,a_1 + 4\,a_2 = 2, \\ a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 = 3. \end{cases}$$

Решаем СЛАУ методом Гаусса. Для этого совершаем ряд последовательных исключений.

1) Из первого уравнения $a_0 = 1 - a_1 - a_2$ подставляем во второе:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ \quad a_1 + 3\,a_2 = 1, \\ a_0 + 3\,a_1 + 9\,a_2 = 3. \end{cases}$$

2) Из второго уравнения $a_1 = 1 - 3a_2$ подставляя в третье:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 1, \\ \quad a_1 + 3\,a_2 = 1, \\ \qquad 2\,a_2 = 0. \end{cases}$$

Двигаемся «обратным ходом» (находимся в поле действительных чисел):

3) из третьего уравнения находим $a_2 = 0$;

4) из второго уравнения находим $a_1 = 1$;

5) из первого уравнения находим $a_0 = 0$.

Составляем многочлен $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = x$. Проверка очевидна. Искомый многочлен имеет вид $f(x) = x$.

Упражнения

1. Найти сумму, разность и произведение многочленов.

a) $f(x) = 4x^5 + 3x^3 + 2x + 8$ *и* $g(x) = x^4 - 10x + 1$ из кольца Z[x];

b) $f(x) = 12x^4 + 2x^3 - \bar{3}x - 1$ *и* $g(x) = x^5 - 6x^4 + 2$ из кольца Z[x];

c) $f(x) = (l-2i)x^3 + 2ix^2 - 4i+1$ *и* $g(x) = 5ix^2 + 2x-i$ из кольца C[x].

2. Определить степень суммы и произведения многочленов

a) $f(x) = 3x^7 + 2x^3 + x^3 + 5 \quad g(x) = x^8 - 2x + 7$ в кольце Z[x];

b) $f(x) = 10x^{15} + x^5 - x^3 + \bar{1} \quad g(x) = 5x^2 - x + 3$ в кольце Z[x];

c) $f(x) = 3ix^7 + (2 - 6i)\,x^2 + 8 \quad g(x) = 7ix^3 + 2ix + 1$ в кольце C[x].

3. Найти числа a и b из тождеств:

a) $x^4 - 3x + 2 = (x-1)\left(x^3 + bx^2 + ax - 2\right)$;

b) $3x^5 - x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 27 = \left(x^2 + 3\right)\left(3x^3 - x^2 + ax + b\right)$;

c) $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + ax + b\right) = x^4 + x^3 - x - 1.$

1.2. Деление многочлена с остатком

Теорема. *Для любого многочлена $f(x) \in P[x]$ и любого ненулевого многочлена $g(x) \in P[x]$ существуют и единственны многочлены $q(x)$и $r(x) \in P[x]$, такие, что $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, где $r(x) = 0$ или $degr(x) < degg(x)$. Многочлен $q(x)$ называется частным, а $r(x)$ – остатком от деления $f(x)$ на $g(x)$.*

<u>*Доказательство.*</u> *Существование.* Если $f(x) = 0$ или $n < m$, где $n = degf(x), m = degg(x)$, то положим $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. В противном случае положим

$$f_1(x) = f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g(x),$$

где a_0, b_0 – коэффициенты при старших членах многочленов $f(x), g(x)$ соответственно;

$$f_2(x) = f_1(x) - \frac{a_{01}}{b_0} x^{n_1-m} g(x),$$

где $n_1 = degf_1(x)$, а a_{01} – коэффициент при старшем члене многочлена $f_1(x)$;

$$f_3(x) = f_2(x) - \frac{a_{02}}{b_0} x^{n_2-m} g(x),$$

где $n_2 = degf_2(x)$, а a_{02} – коэффициент при старшем члене многочлена $f_2(x)$ и т.д.

Вычисления будем продолжать до тех пор, пока не будет получен многочлен $f_s(x) = f_{s-1}(x) - \frac{a_{0s-1}}{b_0} x^{n_{s-1}-m} g(x)$, такой что, $f_s(x) = 0$ или $n_s = degf_s(x) < m$. Суммируя все полученные выше равенства, получаем

$$f_s(x) = f(x) - \frac{1}{b_0}(a_0 x^{n-m} + a_{01} x^{n_1-m} + \cdots + a_{0s-1} x^{n_{s-1}-m}) g(x).$$

Пусть $r(x) = f_s(x), q(x) = \frac{1}{b_0}(a_0 x^{n-m} + a_{01} x^{n_1-m} + a_{0s-1} x^{n_{s-1}-m})$. Легко видеть, что $r(x)$и $q(x)$ удовлетворяют требуемым свойствам.

Единственность. Предположим, что нашлись многочлены $r(x), r_1(x), q(x), q_1(x)$ такие, что

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x),$$

причем $degr(x) < degg(x)$, $degr_1(x) < degg(x)$. Получаем, что $\big(q(x) - q_1(x)\big)g(x) = r_1(x) - r(x)$.

Если $q(x) \neq q_1(x)$, то $deg(\big(q(x) - q_1(x)\big)g(x) \geq degg(x)$, что невозможно, так как $\deg\big(r_1(x) - r(x)\big) < degg(x)$.

Если же $q(x) = q_1(x)$, то и $r_1(x) = r(x)$. ■

Алгоритм деления многочлена на многочлен аналогичен алгоритму деления числа на число столбиком или уголком. Опишем шаги алгоритма.

1. Записать делимое в строчку, включая все степени переменной (те, которые отсутствуют, записать с коэффициентом 0).
2. Записать в «уголке» делимое, включая все степени переменной.
3. Чтобы найти первое слагаемое (одночлен) в неполном частном, нужно старший одночлен делимого разделить на старший одночлен делителя.
4. Полученное первое слагаемое частного умножить на весь делитель и результат записать под делимым, причем одинаковые степени переменной записать друг под другом.
5. Из делимого вычесть полученное произведение.
6. К полученному остатку применить алгоритм, начиная с пункта 1).
7. Алгоритм завершен, когда полученная разность будет иметь степень меньше степени делителя. Это – остаток.

<u>Пример</u>. Разделить многочлен x^4+2x^3+x-1 на x^2+2.

1. Записываем делимое и делитель

$$x^4+2x^3+0\cdot x^2+x-1 \;\left|\,\underline{x^2+2}\right.$$

2. Находим старший одночлен частного, разделив x^4 на x^2. Умножаем его на делитель и вычитаем из делимого.

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4+2x^3+0\cdot x^2+x-1 \\ \underline{x^4+\qquad\; +2\cdot x^2\qquad\;} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+2} \\ \;x^2 \end{array} \\ 2x^3-2x^2+x-1 & \end{array}$$

3. Повторяем процедуру

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^4+2x^3+0\cdot x^2+x-1 \\ \underline{x^4+\qquad\; +2\cdot x^2\qquad\;} \end{array} & \begin{array}{l} \underline{x^2+2} \\ \underline{x^2+2x-2} \end{array} \\ 2x^3-2x^2+x-1 & \\ -\;\underline{2x^3+0\cdot x^2+4x} & \\ -2x^2-3x-1 & \\ -\;\underline{-2x^2+0\cdot x-4} & \\ -3x+3 & \end{array}$$

Степень $-3x+3$ меньше степени делителя. Значит, это – остаток. Результат деления запишется так:

$$x^4+2x^3+x-1=\left(x^2+2\right)\left(x^2+2x-2\right)-3x+3$$

Пример.

Разделить с остатком x^4+2x^3-2x+1 на $2x^2+x+1$

$$x^4+2x^3-2x+1 \quad 2x^2+\big| x+1$$

$$x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2 \qquad \frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$$

$$\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x$$

$$-\frac{5}{4}x^2-\frac{11}{4}x+1$$

$$\frac{5}{4}x^2-\frac{5}{8}x-\frac{5}{8}$$

$$-\frac{17}{8}x+\frac{13}{8}$$

Итак, получены частное $q(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}$ и остаток $r(x)=-\frac{17}{8}x+\frac{13}{8}$.

Пример. Найти, при каких значениях a и b многочлен f(x) делится на многочлен *g(x),* где *f(x)=2x^4 + 3x^3 – 2x^2 + ax +b, g(x) = 2x^2 - 3x +2*

*Решение***.** Делим *f(x)* на *g(x)*

$$\begin{array}{l|l} \_\,2x^4+3x^3-2x^2+ax+b & 2x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} \underline{2x^4-3x^3+2x^2} & x^2+3x+\frac{5}{2} \end{array}$$

$$\_\,6x^3-4x^2+ax+b$$

$$\underline{6x^3-9x^2+6x}$$

$$\_\,5x^2+(a-b)x+b$$

$$\underline{5x^2-\frac{15}{2}x+5}$$

$$(a+\frac{3}{2})x+(b-5)=r(x)$$

Приравниваем остаток к нулю, получим: (a + $\frac{3}{2}$)x + (b - 5) = 0 <=>

$$\begin{cases} a + \frac{3}{2} = 0 \\ b - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 5 \end{cases}$$

Ответ: a = -3/2, b = 5

Упражнения

1. Найдите делитель, если известны делимое $f(x)$, неполное частное $q(x)$ и остаток $r(x)$:

a) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1, q(x) = x^2 + 3x + 1, r(x) = 63x + 25$;

b) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 1, q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 24, r(x) = 63x + 25$;

c) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 + 1, q(x) = x^2 + (3 - i)x - (4 + 3i)$,

$r(x) = -3(3 - 2i)x + 393 + 2i)$.

1.3. Рациональные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно и $Q_m(x) \neq 0$.

Если для рациональной дроби выполняется $n \geq m$, то дробь называется *неправильной*, если $n < m$ – дробь называется *правильной*.

Среди рациональных дробей выделяют *4 типа простейших дробей:*

I. $\frac{A}{x - x_0}$; $A, x_0 \in \mathbf{R}$;

II. $\frac{A}{(x - x_0)^k}$; $k \geq 2$, $k \in \mathbf{N}$, $A, x_0 \in \mathbf{R}$;

III. $\frac{Ax + B}{x^2 + x + q}$; $A, B, p, q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D < 0$;

IV. $\frac{Ax + B}{(x^2 + x + q)^r}$; $r \geq 2$, $r \in \mathbf{N}$, $A, B, p, q \in \mathbf{R}$ и у квадратного трехчлена $D < 0$.

Алгоритм разложения дроби на простейшие дроби:

1. Если $n \geq m,$ необходимо выделить целую часть делением многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

где $M(x)$ – многочлен-частное (целая часть); $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь.

2. Разложить $Q_m(x)$ на множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^k (x-b)^s \ldots (x^2 + px + q)^r, \text{ где } k, s, \ldots, r \in \mathbf{N}.$$

3. Если разложение знаменателя имеет такой вид, то дробь $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_s}{(x-b)^s} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{C_r x + D_r}{(x^2 + px + q)^r},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k; B_1, B_2, \ldots, B_s; C_1, \ldots, C_r; D_1, D_r$ – неопределенные коэффициенты, которые необходимо найти.

4. Для нахождения коэффициентов привести правую часть равенства к общему знаменателю, который будет равен знаменателю исходной дроби, т. е. $Q_m(x)$.

5. Приравнять числители дробей.

6. Вычислить значения неопределенных коэффициентов A_1; A_2; и т. д. Для вычисления данных коэффициентов используют следующие методы:

а) ***метод неопределенных коэффициентов***: многочлены в левой и правой части равенства записать в стандартном виде и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях числителя;

б) *метод частных значений*: придать произвольные значения переменной x (удобнее использовать значения $x = a$; $x = b$ и т.д.) и получить равенства для исходных коэффициентов;

в) комбинирование методов а) и б).

7. Подставить полученные числовые значения коэффициентов в равенство, что и будет искомым разложением.

Рассмотрим $Q_n(x)=C_n(x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q)^{\beta_1}...(x^2+p_Sx+q_S)^{\beta_S}$, где $\sum_{m=1}^{k}\alpha_m+2\sum_{j=1}^{S}\beta_j=n$, $Q_n(x)$ – многочлен n – степени от x, C_n – константа.

<u>Теорема</u> *(о разложении правильной рациональной дроби)*

Если $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m<n$ и коэффициенты этих многочленов действительные числа, а $Q_n(x)$ представляется в виде (1), то

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_1^{(\alpha_1-1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+...+\frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)}+...+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+...+\frac{A_k^{(1)}}{x-a_k}+$$

$$+\frac{B_1^{(\beta_1)}x+D_1^{(\beta_1)}}{(x^2+px+q_1)^{\beta_1}}+...+\frac{B_1^{(1)}x+D_1^{(1)}}{x^2+px+q_1}+...+\frac{B_S^{(\beta_S)}x+D_S^{(\beta_S)}}{(x^2+p_Sx+q_S)^{\beta_S}}+...+\frac{B_S^{(1)}x+D_S^{(1)}}{x^2+p_Sx+q_S})$$

Все коэффициенты разложения являются действительными числами и определяются однозначно.

<u>Пример</u>.Представить рациональную дробь $\frac{x^2}{x^4-16}$ в виде простейших дробей над полем вещественных чисел.

Решение.

$$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{0\cdot x^3+1\cdot x^2+0\cdot x+0}{x^4-16}=\frac{x^2}{(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{x^2}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=$$

$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$

$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+4Ax+8A+Bx^3-2Bx^2+4Bx-8B+Cx^3+Dx^2-4Cx-4D}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}=$$

$$=\frac{(A+B+C)x^3+(2A-2B+D)x^2+(4A+4B-4C)x+(8A-8B-4D)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\begin{cases}A+B+C=0,\\2A-2B+D=1,\\4A+4B-4C=0,\\8A-8B-4D=0.\end{cases}$$

Решая систему получим: $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=0$, $D=\frac{1}{2}$. Имеем разложение $\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{1}{8}\cdot\frac{A}{x-2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{B}{x+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4}$.

Разлагаем знаменатель дроби $\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}$ на множители:

$$\frac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\frac{x^2+9x+1}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}.$$

Записываем общий вид разложения

$$\frac{x^2+9x+1}{(x^2+2)\cdot(x^2+4)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)}=\frac{(Ax+B)\cdot\left(x^2+4\right)+(Cx+D)\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+2\right)\cdot\left(x^2+4\right)}$$

$$x^2+9x+1=(A+C)\cdot x^3+(B+D)\cdot x^2+(4A+2B)\cdot x+(4B+2D).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях и решаем систему:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+c=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x & 4A+2C=9, \\ x^0 & 4B+2D=1, \end{array} \quad \begin{cases} A=-C, \\ B=1-D, \\ 4(1-D)+2D=1, \\ 4(-C)+2C=9, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\dfrac{9}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}, \\ D=\dfrac{3}{2}, \\ C=-\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Получаем $\dfrac{x^2+9x+1}{x^4+6x^2+8}=\dfrac{\frac{9}{2}-\frac{1}{2}}{x^2+2}+\dfrac{-\frac{9}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+4}=\dfrac{9x-1}{2\cdot\left(x^2+2\right)}-\dfrac{9x-3}{2\cdot\left(x^2+4\right)}.$

Знаменатель дроби уже разложен на множители. Записываем общий вид разложения на сумму простейших дробей:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+(B_1x+C_1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+(B_2x+C_2)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)};$$

$$3-x=A\cdot\left(x^2+x+1\right)^2+(B_1x+C_1)\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+(B_2x+C_2)\cdot(x-1).$$

При $x=1$ получаем $2=3A;\ A=\dfrac{2}{3}.$

$$3-x=(A+B_1)\cdot x^4+(2A+C_1)\cdot x^3+(3A+B_2)\cdot x^2+$$
$$+(2A-B_1+C_2-B_2)\cdot x+(A-C_1-C_2).$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{c|l} x^4 & A+B_1=0, \\ x^3 & 2A+C_1=0, \\ x^2 & 3A+B_2=0, \\ x^1 & 2A-B_1+C_2-B_2=1, \\ x^0 & A-C_1-C_2=3. \end{array}\right\}$$

При $A=\frac{2}{3}$ система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}+B_1=0, \\ 2\cdot\frac{2}{3}+C_1=0, \\ 3\cdot\frac{2}{3}+B_2=0, \\ 2\cdot\frac{2}{3}-B_1+C_2-B_2=1, \\ \frac{2}{3}-C_1-C_2=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3}, \\ B_1=-\frac{2}{3}, \\ C_1=-\frac{4}{3}, \\ B_2=-2,- \\ C_2=-3.- \end{cases}$$

Поэтому получаем:

$$\frac{3-x}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}=\frac{2}{3\cdot(x-1)}-\frac{2x+4}{3\cdot(x^2+x+1)}-\frac{2x+3}{(x_2+x+1)^2}.$$

<u>Пример</u>. Разложить в сумму простейших над полем действительных чисел рациональную дробь

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Знаменатель данной дроби разложен в произведение неприводимых многочленов над полем R $x+1$ и x^2+1.

Решим задачу методом неопределенных коэффициентов, основываясь на том, что знаменателями простейших дробей могут быть многочлены

$$x+1, \quad (x+1)^2, \quad (x^2+1) \quad \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Здесь A,B,C,D- неизвестные коэффициенты числителей элементарных дробей. Приведя правую часть последнего равенства к общему знаменателю и приравняв числители обеих частей, будем иметь:

$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)(x+1)^2.$$

Значение неизвестных коэффициентов можно найти из системы линейных уравнений, которую получим, дав неизвестному x четыре значения.

Например, положив последовательно $x=-1;\ 0;\ 1;\ -2$ будем иметь

$$1=2B, 1=A+B+D, 1=4A+2B+4C+4D, 1=-5A+5B-2C+D.$$

Откуда

$$B=\frac{1}{2},\ C=-\frac{1}{2},\ D=0,\ A=\frac{1}{2}, \text{ т.е}$$

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{x}{2(x^2+1)}.$$

Упражнения

Выделить целую и дробную часть рациональной функции:

1. $\dfrac{x^6+3x^2-4}{x^4-1}$;

2. $\dfrac{2x^4-x-1}{x^3-x^2-6x}$;

3. $\dfrac{x^5+5x^3-3}{x^4+1}$;

4. $\dfrac{x^4+2x-2}{x^3-1}$;

5. $\dfrac{x^4+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}$;

6. $\dfrac{x^3+4x-3}{x^2-3x-2}$;

7. $\dfrac{x^7+3x^3}{x^3+6x^2+11x+6}$;

8. $\dfrac{x^5-x^2+1}{x^4-x^3-x^2-x-2}$;

9. $\dfrac{x^5-7x^2+1}{x^2-x}$;

10. $\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+6}$;

11. $\dfrac{x^3+4x^2-x}{2x^2+2x+1}$;

12. $\dfrac{x^7-6x^2-x+1}{x^3+6x^2+6}$;

13. $\dfrac{x^5+3x^2+3}{x^3+x+4}$;

14. $\dfrac{x^7-2x^3+3x+5}{x^3-3x^2+6x+4}$;

15. $\dfrac{x^4+3x^3-1}{x^3+6x^2-x+2}$;

16. $\dfrac{x^5-x^3+2x-1}{6x^2-5}$;

17. $\dfrac{x^5-x^2+8}{x^3-1}$;

18. $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+x+4}$;

19. $\dfrac{x^5+3x^4+3x}{x^2+5x+6}$;

20. $\dfrac{x^5+x^2-2x+1}{x^4-2x^2-2x-3}$;

21. $\dfrac{x^3+4x^2-2x+6}{4x^2+x}$ **;**

22. $\dfrac{x^5-2x^4+3}{x^4-2x^2+4x-6}$ **;**

23. $\dfrac{x^5-6x^2+x-2}{x^3+5x+2}$ **;**

24. $\dfrac{x^6+3x^4-4x-2}{x^2+4x-6}$ **;**

25. $\dfrac{x^4+5x^2-x}{x^3+3x^2}$ **;**

26. $\dfrac{x^7+2x^4}{x^5+5x+8}$ **;**

27. $\dfrac{x^5-4x^3+x^2}{x^3-x^2}$ **;**

28. $\dfrac{x^5-6x+1}{x^2+x}$ **;**

I уровень

1.1. Запишите общий вид разложения дроби на сумму простейших:

1) $\dfrac{2x}{(x+1)\cdot(x-2)}$; 2) $\dfrac{x^2-3}{(x-4)^2\cdot(x+3)}$;

3) $\dfrac{x^3+x-2}{(x-4)^2\cdot(x^2-4)}$; 4) $\dfrac{2x+1}{x^3-1}$.

1.2. Разложите на сумму простейших дробей первого типа:

1) $\dfrac{x^2-4x-2}{(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$; 2) $\dfrac{x+3}{(x-4)\cdot(5-x)}$; 3) $\dfrac{4-x}{x\cdot(3x^2-27)}$.

1.3. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{x-1}{(x+1)\cdot(x^2+x+1)}$; 2) $\dfrac{x^2+5}{(x+1)^2\cdot(x-2)}$; 3) $\dfrac{2x+3}{(x-3)^2\cdot(x+1)^2}$.

1.4. Вычислите:

1) $\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\ldots+\dfrac{1}{98\cdot100}$;

2) $\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\dfrac{1}{11\cdot14}+\ldots+\dfrac{1}{23\cdot26}$.

1.5. Найдите коэффициенты A, B, C, D из равенства

$$\frac{7-6x^4}{2x^2+8}=A+Bx^2+\frac{Cx+D}{2x^2+8}.$$

II уровень

2.1. Запишите общий вид разложения дроби на сумму простейших:

1) $\dfrac{x^2-x+1}{\left(x^2+x+5\right)^2\cdot(x-1)^3}$; 2) $\dfrac{2x^2-5}{x^4-6x^3-2x^2-30x-35}$;

3) $\dfrac{2x+1}{\left(x^4+64\right)^2}$; 4) $\dfrac{x^2+2x}{x^4+x^2+1}$.

2.2. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{4}{\left(x^3-8\right)\cdot(x+1)}$; 2) $\dfrac{1+x}{\left(x^4-16\right)\cdot\left(x^2+1\right)}$;

3) $\dfrac{x^2-3}{x^6+x^3+8}$; 4) $\dfrac{x^2-x-1}{\left(x^2+3\right)\cdot\left(x^4+5x^2+6\right)}$.

2.3. Разложите на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{x^5-x+3}{\left(x^2+2x+7\right)\cdot(x+2)^2}$; 2) $\dfrac{x^6}{\left(x^2+5\right)\cdot\left(x^2+2\right)^2}$;

3) $\dfrac{1-x^5}{(x+3)\cdot\left(x^3-x^2+12x-252\right)}$. 4) $\dfrac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}$.

III уровень

3.1. Запишите общий вид разложения на сумму простейших дробей:

1) $\dfrac{3x^2-4}{x^8+x^4+1}$; 2) $\dfrac{x^4-4}{x^8+8}\cdot\dfrac{x^4+2x^2+4}{x^4-2x^3+4x^2-4x+4}$.

3.2. Вычислите:

$$\frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{1}{7\cdot 10\cdot 13}+\frac{1}{10\cdot 13\cdot 16}+\frac{1}{13\cdot 16\cdot 19}.$$

3.3. Упростите:

$$\frac{1}{x(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+12)}+$$

$$+\frac{1}{(x+12)(x+16)}+\frac{1}{(x+16)(x+20)}.$$

1.4. Делимость многочленов. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ многочлены из F[x], причем $g(x)\neq 0$. Многочлен $f(x)$ *делится* $g(x)$, если для некоторого $q(x)\in F[x]$ имеем $f(x)=q(x)g(x)$, т.е. остаток при делении $f(x)$ и $g(x)$ равен нулю.

Свойства:

1) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$.

2) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $h(x) \vdots g(x)$, то $(f(x) + h(x)) \vdots g(x)$.

3) *Если* $f(x) \vdots g(x)$ и $f(x)h(x) \vdots g(x)$ для любого $h(x)$.

4) Любой многочлен делится на произвольную ненулевую константу.

5) Если $f(x) \vdots g(x)$ и $f(x) \vdots cg(x)$ *для ненулевой константы c.*

6) Для того, чтобы многочлен $f(x)$ *делился на многочлен* $g(x)$ *той же степени, необходимо и достаточно, чтобы* $f(x) = cg(x)$ *для некоторой константы c.*

7) Для того, чтобы $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, *необходимо и достаточно, чтоб* $f(x) = cg(x)$ *для некоторой константы c.*

Многочлен $d(x)$ называется *общим делителем* $f(x)$ и $g(x)$, если $d(x) \vdots f(x)$ и $d(x) \vdots g(x)$. Общий делитель $d(x)$ называется *наибольшим* (НОД), если он делится на любой другой общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема. *Для любых* $f(x), g(x) \in F[x]$, *одновременно не равных нулю, их наибольший общий делитель определен однозначно с точностью до множителя c, где c – произвольная ненулевая константа.*

Доказательство. Докажем, что если НОД существует, то он определен с точностью до множителя *c*. Если $d(x), d_1(x)$ – наибольшие общие делители многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $d_1 \vdots d(x)$ и $d(x) \vdots d_1(x)$, поэтому по свойству 7 имеем $d(x) = cd_1(x)$ для некоторой константы *c*.

Для доказательства существования НОДа приведем *алгоритм Евклида* нахлждения НОД. Если $f(x) \neq 0$, а $g(x) = 0$, то, очевидно, в качестве наибольшего общего делителя можно взять $f(x)$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $g(x) \neq 0$.

Разделим $f(x)$ на $g(x)$, в частном получим $q_1(x)$, в остатке - $r_1(x)$. Если $r_1(x) \neq 0$, то разделим $g(x)$ на $r_1(x)$, в частном получим $q_2(x)$, в остатке - $r_2(x)$ и т.д. вычисления продолжаются до тех пор, пока на некотором шаге s вычисленный в результате очередного деления остаток $r_{s+1}(x)$ не будет нулевым. Докажем, что $r_s(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Имеем

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x), \qquad (1)$$

$$g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x), \qquad (2)$$

$$r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x), \qquad (3)$$

…

$$r_{s-3}(x) = q_{s-1}(x)r_{s-2}(x) + r_{s-1}(x), (s\text{-}1)$$

$$r_{s-2}(x) = q_s(x)r_{s-1}(x) + r_s(x), \qquad (s)$$

$$r_{s-1}(x) = q_{s+1}(x)r_s(x). \qquad (s+1)$$

Из последнего равенства следует, что $r_{s-1}(x) \vdots r_s(x)$. Поэтому в правой части предпоследнего равенства первое слагаемое делится на $r_s(x)$. Так как второе слагаемое, очевидно, так же делится на $r_s(x)$, то и вся правая часть делится на $r_s(x)$, а потому на $r_s(x)$ делится и левая часть этого равенства, т.е. $r_{s-2}(x)$.

Рассматривая эти равенства снизу веерх, приходим к выводу, что на $r_s(x)$ делятся все правые и левые части всех равенств, т.е. $f(x) \vdots r_s(x)$ и $g(x) \vdots r_s(x)$, т.е. $r_s(x)$ – общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Покажем, что любой общий делитель $d(x)$ многочленов $f(x)$ и $g(x)$ является делителем многочлена $r_s(x)$. Так как $f(x) \vdots d(x)$ и $g(x) \vdots d(x)$, то получаем, что $r_1(x) \vdots d(x)$. Далее, так как $g(x) \vdots d(x)$ и $r_1(x) \vdots d(x)$, то и $r_2(x) \vdots d(x)$. Рассматривая далее эти равенства сверху вниз, приходим к выводу, что $r_s(x) \vdots d(x)$. ■

<u>Теорема.</u> *Пусть $f(x)$, $g(x)$, $d(x)$ – ненулевые многочлены из F[x] и $d(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Тогда найдутся такие $u(x)$ и $v(x)$ из F[x], что*

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x),$$

Причем $\deg u(x) < \deg g(x)$, а $\deg v(x) < \deg f(x)$. Многочлены $u(x)$ и $v(x)$ называются <u>коэффициентами Безу</u>.

<u>Пример.</u> Найти НОД и коэффициенты Безу многочленов

$$f(x) = x^4 - 3,\ g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$$

При делении $f(x)$ на $g(x)$ получаем частное и остаток

$$q_1(x) = x - 2, r_1(x) = 3x^2 + x - 1.$$

При делении $g(x)$ на $r_1(x)$ получаем

$$q_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{9}, r_2(x) = \frac{7}{9}x + \frac{14}{9}.$$

При делении $r_1(x)$ на $\frac{9}{7}\, r_2(x) = x + 2$ получаем

$$q_3(x) = 3x - 5, r_3(x) = 9.$$

Остаток от деления $r_2(x)$ на $r_3(x)$ равен нулю, следовательно, $c\, r_3(x)$, где c – произвольная нкнулевая константа, является наибольшим делителем $f(x)$ и $g(x)$. НОД равен 1 с точностью до ненулевой константы.

Пример. В кольце R[x] многочленов с действительными коэффициентами найдем наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$, $g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$.

Делим $f(x)$ на $g(x)$:

$$\begin{array}{rl}
-\;x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3 & \big|\; 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\
\underline{x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x} & \;\;\frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \\
-\;-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - 3x - 3 & \\
\underline{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{3}} & \\
-\frac{5}{9}x^2 - \frac{25}{9}x - \frac{10}{3} &
\end{array}$$

Для удобства умножим полученный остаток на $\frac{9}{5}$. При этом последующие остатки также умножатся на некоторые числа, отличные от нуля, что несущественно при нахождении наибольшего общего делителя, так как он находится с точностью до константы.

Выполним второе деление:

$$\begin{array}{rl}
-\;3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & \big|\; x^2 + 5x + 6 \\
\underline{3x^3 + 15x^2 + 18x} & \;\;3x - 5 \\
-\;-5x^2 - 16x - 3 & \\
\underline{-5x^2 - 25x - 30} & \\
9x + 27 &
\end{array}$$

Полученный остаток разделим на 9 и выполним третье деление:

$$\begin{array}{r|l} -\;x^2+5x+6 & x+3 \\ \underline{x^2+3x} & x+2 \\ -\;2x+6 & \\ \underline{2x+6} & \\ 0 & \end{array}$$

Поскольку остаток равен нулю, то НОД = $x+3$.

Линейное представление наибольшего общего делителя многочленов можно находить двумя способами: с помощью алгоритма Евклида или методом неопределенных коэффициентов. Алгоритм Евклида дает также способ нахождения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ из теоремы о линейном представлении НОД(f,g). Заметим, что

$$r_0 = u_0 f + v_0 g, u_0 = 1, v_0 = -q_0;$$

$$r_1 = u_1 f + v_1 g, u_1 = -q_1, v_1 = q_0 q_1 + 1;$$

$$r_2 = r_0 - r_1 q_2 = (u_0 f + v_0 g) - (u_1 f + v_1 g) q_2 = f(u_0 - u_1 q_2) + g(v_0 - v_1 q_2), \text{т.е.}$$

$$r_2 = fu_2 + gv_2, \quad u_2 = -u_1 q_2 + u_0,\; v_2 = -v_1 q_2 + v_0;$$

$$r_3 = fu_3 + gv_3, u_3 = -u_2 q_3 + u_1, v_3 = -v_2 q_3 + v_1.$$

Продолжая, индуктивно получим для $k > 2$

$$r_k = fu_k + gv_k, u_k = -u_{k-1} q_k + u_{k-2}, v_k = -v_{k-1} q_k + v_{k-2}.$$

И, наконец, для $d = r_n$

$$d = fu_n + gv_n, u_n = -u_{n-1} q_n + u_{n-2}, v_n = -v_{n-1} q_n + v_{n-2}.$$

Пример. $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, g = x^4 - 1.$

Решение: Последовательным делением получаем по алгоритму Евклида:

$$q_0 = x + 1, r_0 = x^3 + x^2 + 2x + 2;$$

$$q_1 = x - 1, r_1 = -x^2 + 1;$$

$$q_2 = -x - 1, r_2 = 3x + 3;$$

$$q_3 = -\frac{1}{3}(x - 1), r_3 = 0.$$

Следовательно, $d = r_2$, или с точностью до числового множителя $d = x+1$. Воспользуемся рекуррентными формулами $u_k = -q_k u_{k-1} + u_{k-2}, v_k = -q_k v_{k-1} + v_{k-2}$, начиная с k = -2.

k	$-q_k$	u_k	v_k
-2		1	0
-1		0	1
0	$-(x+1)$	1	$-(x+1)$
1	$-(x-1)$	$-(x-1)$	x^2
2	$x+1$	$-x^2+2$	x^3+x^2-x-1

Таким образом, $d = \left(-x^2+2\right)f + \left(x^3+x^2-x-1\right)g$.

<u>Пример.</u> Найдем линейное выражение наибольшего общего делителя $d(x)$многочленов $f(x)$ и $g(x)$из предыдущего примера.

Результаты делений с остатком, выполненных при решении примера, показывают, что

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)g(x) - \frac{5}{9}(x^2+5x+6), \ g(x) = (3x-5)(x^2+5x+6) + 9(x+3).$$

Отсюда находим:

$$x^2+5x+6 = -\frac{9}{5}f(x) + \frac{1}{5}(3x-1)g(x),$$

$$x+3 = \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{9}(3x-5)(x^2+5x+6) =$$

$$= \frac{1}{5}(3x-5)f(x) + \frac{1}{9}g(x) - \frac{1}{45}(3x-5)(3x-1)g(x) = \frac{1}{5}(3x-5)f - \frac{1}{5}(x^2-2x)g(x).$$

Таким образом, $u(x) = \frac{1}{5}(3x-5)$, $v(x) = -\frac{1}{5}(x^2-2x)$.

На практике линейное выражение многочлена h удобнее искать не с помощью алгоритма Евклида, а ***методом неопределенных коэффициентов***. Запишем искомые многочлены u и v в общем виде с неопределенными (неизвестными) коэффициентами. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве $h = uf + vg$, получим систему уравнений для коэффициентов многочленов u и v. Легко видеть, что эти уравнения будут линейными.

Для применения этого метода необходимо заранее знать оценки степеней многочленов u и v (иначе мы не будем знать, в каком общем виде их записать).

Пример. Найдем линейное выражение многочлена $h = x - 2$ через многочлены $f = x^2 + 2$, $g = x^3 + x - 1$.

Эти многочлены имеют различные корни (корни первого многочлена равны $\pm\sqrt{2}i$, эти корни не являются корнями второго многочлена, в чем можно убедиться непосредственной проверкой) и, следовательно, по теореме Безу имеют различные разложения на линейные множители вида $ax + b$. Поэтому они взаимно просты. Тогда искомое линейное выражение существует, причем многочлены u и v можно искать в виде $u = ax^2 + a_1x + a_2$, $v = b_0x + b_1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в равенстве $(a_0x^2 + a_1x + a_2)(x^2 + 2) + (b_0x + b_1)\cdot$ $(x^2 + x - 1) = x - 2$, получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} a_0 & & & +b_0 & & = & 0 \\ & a_1 & & & +b_1 & = & 0 \\ 2a_0 & & +a_2 & +b_0 & & = & 0 \\ & 2a_1 & & -b_0 & +b_1 & = & 1 \\ & & 2a_2 & & -b_1 & = & -2 \end{cases}.$$

Отсюда находим: $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $b_0 = -1$, $b_1 = 0$, т.е. $u = x^2 - 1$, $v = -x$.

Иногда при составлении линейных уравнений для коэффициентов многочленов u, v удобнее не приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, а придавать x различные значения, решая затем полученную систему уравнений. Gридавая x значения 0, $\pm 1, \pm 2$, получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} & & 2a_2 & & -b_1 & = & -2 \\ 3a_0 & +3a_1 & +3a_2 & +b_0 & +b_1 & = & -1 \\ 3a_0 & -3a_1 & +3a_2 & +3b_0 & -3b_1 & = & -3 \\ 24a_0 & +12a_1 & +6a_2 & +18b_0 & +9b_1 & = & 0 \\ 24a_0 & -12a_1 & +6a_2 & +22b_0 & -11b_1 & = & -4 \end{cases}.$$

Пример. Найти линейное представление НОД$(f, g) = x + 1$ для многочленов $f = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ и $g = x^4 - 1$.

Решение: Будем искать из условия $fu + gv = d$ функции u и v в следующем виде:

$u = ax^2 + bx + c, v = ex^3 + kx^2 + lx + m.$

$\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)\left(ax^2 + bx + c\right) + \left(x^4 - 1\right)\left(ex^3 + kx^2 + lx + m\right) = x + 1.$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получим систему

$$
\begin{array}{ll}
\text{при } x^7 & a+e=0, \\
\text{при } x^6 & a+b+k=0, \\
\text{при } x^5 & a+b+c+l=0, \\
\text{при } x^4 & a+b+c+m=0, \\
\text{при } x^3 & a+b+c-e=0, \\
\text{при } x^2 & a+b+c-k=0, \\
\text{при } x & b+c-l=1, \\
x=0 & c-m=1
\end{array}
\right\}
$$

Решение системы:

$$a=-\frac{1}{3},\quad b=0,\quad c=\frac{2}{3},$$

$$e=\frac{1}{3},\quad k=\frac{1}{3},\quad l=-\frac{1}{3},\quad m=-\frac{1}{3}.$$

Ответ: $u(x)=\frac{1}{3}\left(-x^2+2\right), v(x)=\frac{1}{3}\left(x^3+x^2-x-1\right).$

Упражнения

1. Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$.

   a) $f(x)=x^4+2x^3+x^2-5x+1,\ g(x)=x^2+x+1;$

   b) $f(x)=3x^4-2x^2+4,\ g(x)=x^2+2x-1.$

2. Найдите НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из кольца R[x] и его линейное представление:

   a) $f(x)=x^4+4x^3-7x+2$, $g(x)=x^3+3x^2-4$;

   b) $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^5-1$;

   c) $f(x)=3x^5+6x^4+3x^3-x^2-2x-1$, $g(x)=x^4-2x^2+1$;

   d) $f(x)=x^6-x^4+3x^3-2x+2$, $g(x)=x^3+2$;

   e) $f(x)=3x^6-4x^4+2x^2-1$, $g(x)=3x^5+5x^3-4x-4$;

   f) $f(x)=2x^6-3x^4-x^2-4x-2$, $g(x)=-2x^6+3x^4-2x^3-3x^2-4x-4$;

   g) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

   h) $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$; $g(x)=x^4+2x^3+x+2$;

   i) $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$, $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;

   j) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

1.5. Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным многочленов $f_1, f_2,..., f_m \in R[x]$ над полем R называется многочлен h, обладающий следующими свойствами:

1) h делится на каждый из многочленов $f_1, f_2,..., f_m$, т.е. является их общим кратным;

2) h делит любое общее кратное многочленов $f_1, f_2,..., f_m$.

<u>Теорема</u>. *Наименьшее общее кратное многочленов $f_1, f_2,..., f_m$ существует. Оно равно пересечению главных идеалов, порождаемых этими многочленами. Наименьшее общее кратное единственно (с точностью до ассоциированности).*

<u>Доказательство</u>. Пересечение главных идеалов является идеалом, а так как R - поле, то оно является главным идеалом, т.е. идеал $I = \bigcap_{i=1}^{m}(f_i)$ - главный идеал. Образующий многочлен h ($I = (h)$) этого идеала будет наименьшим общим кратным. В самом деле, он принадлежит этому идеалу и потому является общим кратным многочленов $f_1, f_2,..., f_m$. С другой стороны, всякое общее кратное, будучи элементом этого идеала, делится на него. Это доказывает существование наименьшего общего кратного.

Пусть h_1 и h_2 - два наименьших общих кратных многочленов $f_1, f_2,..., f_m$. Из свойства 2) следует, что $h_1 \vdots h_2$ и точно также $h_2 \vdots h_1$. Это означает, что h_1 и h_2 ассоциированы.

За исключением тривиального случая, когда один из многочленов $f_1, f_2,..., f_m$ равен нулю, идеал $I = \bigcap_{i=1}^{m}(f_i)$ не является нулевым, так как содержит, например, многочлен $f_1 f_2 ... f_m$. Поэтому, если исключить упомянутый случай, можно утверждать, что среди наименьших общих кратных многочленов $f_1, f_2,..., f_m$ имеется ровно один нормированный (т.е. старший коэффициент которого равен единице) многочлен. Будем обозначать его через $[f_1, f_2,..., f_m]$. (Иногда используется обозначение $\text{нмж}\{f_1, f_2,..., f_m\}$.)

<u>Теорема</u>. *Для двух многочленов f и g наименьшее общее кратное* $[f, g]$ *связано с наибольшим общим делителем* (f, g) *соотношением*

$$[f,g](f,g) = cfg \quad (c \in R, c \neq 0).$$

Доказательство. Для доказательства формулы положим $d=(f,g)$, $h=[f,g]$, $f=f_1d$, $g=g_1d$ и рассмотрим многочлен $h'=\frac{fg}{d}=f_1g=fg_1$. Многочлен h' является общим кратным многочленов f, g и, следовательно, делится на h. Теперь рассмотрим многочлен $d'=\frac{fg}{h}$. Равенства $f=\frac{h}{g}d'$, $g=\frac{h}{f}d'$ показывают, что d' - общий делитель многочленов f, g; следовательно, d' делит d, т.е. $d=qd'$, где q - некоторый многочлен.

Отсюда получаем: $h'=\frac{fg}{d}=\frac{fg}{qd'}=\frac{h}{q}$, т.е. $h=qh'$. Значит, h делится на h'. Таким образом, h и h' ассоциированы, т.е. $h=ch'$, где $c\in R$, $c\neq 0$. Тогда получаем, что $hd=cfg$, что и требовалось доказать.

Из формулы вытекает

Следствие. *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых многочленов равно их произведению.*

Упражнения

Найдите НОК многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из кольца R[x]:

1. $f(x)=x^4+4x^3-7x+2$, $g(x)=x^3+3x^2-4$;
2. $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+2x-2$, $g(x)=x^5-1$;
3. $f(x)=3x^5+6x^4+3x^3-x^2-2x-1$, $g(x)=x^4-2x^2+1$;
4. $f(x)=x^6-x^4+3x^3-2x+2$, $g(x)=x^3+2$;
5. $f(x)=3x^6-4x^4+2x^2-1$, $g(x)=3x^5+5x^3-4x-4$;
6. $f(x)=2x^6-3x^4-x^2-4x-2$, $g(x)=-2x^6+3x^4-2x^3-3x^2-4x-4$;
7. $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;
8. $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$; $g(x)=x^4+2x^3+x+2$;
9. $f(x)=3x^5+5x^4-16x^3-6x^2-5x-6$, $g(x)=3x^4-4x^3-x^2-x-2$;

10. $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

11. $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $g(x)=x^2-x+1$;

12. $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$;

13. $f(x)=x^4-2x^3-4x^2+6x+1$, $g(x)=x^3-5x-3$.

1.6. Дифференцирование многочленов. Отделение кратных множителей

Понятие многочлен введено алгебраически. Введем алгебраически, т.е. не прибегая к понятиям функции и предела, дифференцирование многочленов.

Пусть имеется многочлен $f=a_0+a_1x+...+a_nx^n$. *Производным многочленом* от многочлена *f* называется многочлен

$$f'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}.$$

Если $f=0$ или $c, c\in K$, то $f'=0$.
Свойства дифференцирования нетрудно получить, пользуясь только этим определением:
$(\lambda f)'=\lambda f', \lambda\in K$;
$(f+g)'=f'+g'$;
$(fg)'=f'g+g'f$;
$\left(f^k\right)'=kf^{k-1}f'$.

Будем полагать, что $f''=\left(f'\right)', f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$ и называть f'' вторым, $f^{(k)}$, соответственно, *k*-тым производным многочленом от *f*, или производным многочленом *k*-го порядка, $k\geq 1$. Иногда принимают $f^{(0)}=f$ (производный многочлен порядка 0).

Отделим кратные множители у многочлена *f(x)*. Многочлен *f(x)* запишем в виде $f(x)=aF_1F_2^2...F_s^s$, где F_1 – произведение всех множителей в каноническом представлении *f(x)*кратности 1, F_2 – кратности 2, ..., F_s – кратности *s*. Тогда
$f'=aF_1'F_2^2...F_s^s+aF_1\cdot 2F_2F_2'F_3^3...F_s^s+...+aF_1F_2^2...sF_s^{s-1}F_s'=aF_2F_3^2...F_s^{s-1}H$, где
$H=F_1'F_2F_3...F_s+2F_1F_2'F_3...F_s+...+sF_1F_2...F_{s-1}F_s', (H,F_i)=1, i=1,...,s$, т.е. в нормализованном виде

$$d_1=\left(f,f'\right)=F_2F_3^2...F_s^{s-1}.$$

Аналогично получим

$$d_2=\left(d_1,d_1'\right)=F_3F_4^2\dots F_s^{s-2},$$
$$d_3=\left(d_2,d_2'\right)=F_4\dots F_s^{s-3},$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$d_{s-1}=\left(d_{s-2},d_{s-2}'\right)=F_s,$$
$$d_s=\left(d_{s-1},d_{s-1}'\right)=1.$$

Следовательно,

$$e_1=\frac{f}{d_1}=F_1F_2\dots F_s,$$
$$e_2=\frac{d_1}{d_2}=F_2F_3\dots F_s,$$
$$e_3=\frac{d_2}{d_3}=F_3F_4\dots F_s,$$
$$\dots\quad\dots\quad\dots$$
$$e_s=\frac{d_{s-1}}{d_s}=F_s.$$

Отсюда $\frac{e_1}{e_2}=F_1,\frac{e_2}{e_3}=F_2,\dots,\frac{e_{s-1}}{e_s}=F_{s-1},e_s=F_s.$

Таким образом, *алгоритм отделения кратных множителей* многочлена $f\,(x)$заключается в следующем:

1) Найти $f',d_1=\left(f,f'\right).$
2) Найти $d_1',d_2=\left(d_1,d_1'\right),\dots$
3) Процесс вычисления d_i прекращается при получении $d_s=1.$
4) Вычислить $\frac{f}{d_1}=e_1.$
5) Вычислить $\frac{d_1}{d_2}=e_2,\dots,\frac{d_{s-1}}{d_s}=e_s.$
6) Вычислить $F_1=\frac{e_1}{e_2},F_2=\frac{e_2}{e_3},\dots,F_{s-1}=\frac{e_{s-1}}{e_s},F_s=e_s.$

Упражнения

Отделить кратные множители:

1) $x^4-6x^2-8x+24;$
2) $x^5-x^3-4x^2-3x-2;$
3) $x^6+6x^5+3x^4+12x^3+3x^2+6x+1;$
4) $x^8+2x^6-2x^2-1=0.$

Глава 2. МНОГОЧЛЕНЫ НАД ЧИСЛОВЫМИ КОЛЬЦАМИ И ПОЛЯМИ

2.1. Схема Горнера. Корни многочлена. Теорема Безу

В кольце многочленов деление в обычном смысле слова, как правило, невозможно. Например, в кольце $\mathbf{R}[x]$ многочлен x^2 нельзя разделить на $x + 1$, т.е. не существует такого многочлена $g(x)$, что $x^2 = g(x)(x + 1)$ (если бы такой многочлен существовал, то при $x = -1$ мы получили бы невозможное равенство $1 = g(-1)\cdot 0$).

Если для полиномов $f(x)$ и $g(x)$ из $K[x]$ существует такой полином $h(x) \in K[x]$, что $f(x) = g(x)h(x)$, то говорят, что полином $f(x)$ *делится* на полином $g(x)$.

Прежде всего установим, что всегда осуществимо так называемое *деление с остатком*: $f(x) = (x-c)h(x) + r$ при $r \in K$. Здесь полином $h(x)$ называется *неполным частным*, а r - *остатком*.

Теорема. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \in K[x]$ *и* $c \in K$. *Найдутся полином* $h(x) \in K[x]$ *и элемент* $r \in K$ *такие, что* $f(x) = (x-c)h(x) + r$. *При этом* $r = f(c)$.

Доказательство. Естественно искать $h(x)$ в форме $b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}$. Сравнение коэффициентов многочлена в левой части равенства $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = = (x-c)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-1}) + r$ с коэффициентами многочлена, полученного после раскрытия скобок и приведения подобных, в правой части этого равенства приводит к цепочке равенств

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0,\\
&a_1 = b_1 - cb_0,\\
&a_2 = b_2 - cb_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2},\\
&a_n = r - cb_{n-1},
\end{aligned}$$

откуда последовательно определяют коэффициенты $h(x)$ и остаток r:

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0,\\
&b_1 = a_1 + cb_0,\\
&b_2 = a_2 + cb_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&b_{n-1} = a_{n-1} + cb_{n-2},\\
&r = a_n + cb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Равенство $r = f(c)$ непосредственно следует из равенства $f(x) = (x - c)h(x) + r$ после подстановки в последнее вместо x элемент c. ■

Получен удобный способ вычисления коэффициентов $h(x)$ и остатка r. Этот способ носит название ***схемы Горнера***. Вычисления располагают в виде таблицы:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	c

Элементы нижней строки вычисляются последовательно по формулам выше: $b_0 = a_0$, а каждый последующий элемент равен сумме элемента, находящегося над ним, и предыдущего элемента нижней строки, умноженного на x_0.

Рассмотрим алгоритм деления многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ на двучлен $(x-a)$.

3. Нарисовать таблицу с двумя строками и числом столбцов, равным степени делимого, увеличенной на единицу.
4. В первую строку таблицы вписать коэффициенты делимого, записанного в канонической форме, включая и нулевые коэффициенты для отсутствующих степеней x.
5. Перед началом второй строки вписать число a. В первую клетку второй строки вписать то число, которое стоит в первой клетке первой строки (старший коэффициент делимого будет и старшим коэффициентом делителя).
6. Каждая следующая клетка второй строки заполняется по правилу: предыдущее число второй строки умножается на число ***a*,** к результату прибавляется число из первой строки, стоящее в клетке с предыдущим номером.
7. В результате в клетках второй строки (кроме последней) получаем коэффициенты неполного частного, а в последней – остаток от деления. Если остаток получился 0, то исходный многочлен делится на двучлен $(x-a)$ без остатка.

<u>Пример</u>. Разделить по схеме Горнера многочлен $x^3 - 3x + 2$ на $x - 2$. В этом случае a=2. Выпишем по шагам результаты выполнения алгоритма.

Шаг первый.

	1	0	-3	2
2	1			

*Шаг второй 2*1+0=2* 2

1	0	-3	2
1	2		

*Шаг третий 2*3+(-3)=1* 2

1	0	-3	2
1	2	1	

Шаг четвертый 2*1+2=4 2

1	0	-3	2
1	2	1	4

Таким образом, результат деления запишем так

$$x^3-3x+2=(x-2)(x^2+2x+1)+4.$$

Замечание. Если необходимо выполнить деление на двучлен $g(x)=ax+b,$ то его преобразовывают к виду $g(x)=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)$, тогда

$$f(x)=(ax+b)h(x)+r=a\left(x+\frac{b}{a}\right)h(x)+r.$$

Отсюда видно, что, разделив по схеме Горнера $f(x)$ на $\left(x-\left(-\dfrac{b}{a}\right)\right)$, мы найдем $a\cdot h(x)$. Тогда искомое частное $h(x)$ получится делением найденного на *a*. Остаток остается таким же.

Элемент *c* кольца *K* называется ***корнем*** полинома *f*(*x*), если $f(c)=0$.

Теорема Безу. *Многочлен f(x) делится на линейный многочлен* $x-c$ *в кольце K[x] тогда и только тогда, когда c - его корень.*

Доказательство. Пусть *f*(*x*) делится на $x-c$, т.е. $f(x)=(x-c)h(x)$. Тогда $f(c)=0$.

Пусть $f(c)=0$. Тогда в равенстве $f(x)=(x-c)h(x)+r$ будет $r=f(c)=0$, т.е. $f(x)=(x-c)h(x)$. ■

Теорема. *Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.*

Доказательство. Докажем это утверждение с помощью индукции по степени многочлена. Многочлен нулевой степени вообще не имеет корней, так что для него утверждение теоремы справедливо.

Предположим теперь, что утверждение теоремы справедливо для всех многочленов степени $n-1$, и докажем его для любого многочлена *f*(*x*) степени *n*. Предположим, рассуждая от противного, что $x_1, x_2, ..., x_m$ - корни многочлена *f*(*x*), причем $m>n$. По теореме Безу, *f*(*x*) делится на

$x-x_1$, т.е. $f(x)=(x-x_1)g(x)$, где $g(x)$ - некоторый многочлен степени $n-1$. Элементы x_2, ..., x_m кольца K являются корнями многочлена $g(x)$. В самом деле, при $i=2,...,m$ имеем: $f(x_i)=(x_i-x_1)g(x_i)$. Так как $x_i-x_1\neq 0$, а кольцо K не имеет делителей нуля, то $g(x_i)=0$.

Таким образом, многочлен $g(x)$ имеет не менее чем $m-1$ корней, что противоречит предположению индукции, поскольку $\deg g(x) = n-1 < m-1$. ■

<u>Следствие</u>. *Многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ точках.*

Иначе говоря, существует не более одного многочлена степени не выше n, принимающего в данных (различных) точках $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ данные значения $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $f(x)$, $g(x)$ - два многочлена степени не выше n, принимающие одинаковые значения в точках $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$. Рассмотрим многочлен $h(x)=f(x)-g(x)$. Степень этого многочлена также не выше, чем n. Так как $f(x_i)=g(x_i)$, то $h(x_i)=0$ при $i=1, 2, ..., n+1$, т.е. $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ - корни многочлена $h(x)$. Согласно предудущей теореме $h(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$.

<u>Теорема 4</u>. *Если кольцо K бесконечно, то равенство функций, определяемых двумя многочленами из кольца $K[x]$, влечет за собой равенство самих многочленов.*

<u>Доказательство</u>. Пусть многочлены $f(x), g(x)\in K[x]$ определяют одинаковые функции. Это означает, что $f(x_0)=g(x_0)$ для любого $x_0\in K$. Обозначим через n наивысшую из степеней многочленов $f(x)$, $g(x)$. Так как кольцо K бесконечно, то в нем найдутся $n+1$ различных элементов $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$.

Согласно нашему предположению, многочлены $f(x)$ и $g(x)$ принимают одинаковые значения в каждой из точек $x_1, x_2, ..., x_{n+1}$ (как и вообще в любой точке). Следствие из предыдущей теоремы позволяет сделать отсюда вывод, что $f(x)=g(x)$.

Для конечного кольца K утверждение теоремы неверно. Однако при некоторых дополнительных предположениях и в этом случае оказывается возможным из равенства функций, определяемых двумя многочленами, сделать вывод о равенстве самих многочленов.

Пусть, например, $K=\boldsymbol{Z}_p$ - кольцо вычетов по простому модулю p. Два многочлена $f(x), g(x)\in\boldsymbol{Z}_p[x]$ будем называть *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же функцию на $\boldsymbol{Z}_p$. Так как в кольце $\boldsymbol{Z}_p$ имеется p элементов, то из следствия теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение:

Теорема. *Если многочлены* $f(x),\ g(x)\in\boldsymbol{Z}_p[x]$, *имеющие степень не выше чем* $p-1$, *эквивалентны, то они равны*.

Пример. Разделить по схеме Горнера многочлен

$$f(x)=x^5-2x^3+3x^2-5x+11 \text{ на } x-\frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -2 & 3 & -5 & 11 \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{31}{8} & -\frac{111}{10} & \frac{463}{32} \end{array}$$

Таким образом, $q(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+\frac{31}{8}x-\frac{111}{16}$, $r=\frac{463}{32}$.

Из сказанного выше вытекает, что число $\frac{1}{2}$ не является корнем многочлена $f(x)$. Более того, $f(-\frac{1}{2})=\frac{463}{32}$.

Пример. Вычислить $f(c)$, если $f=x^4-8x^3+24x^2-50x+90, c=2.$

Решение:

	1	-8	24	-50	90
2	1	-6	12	-26	**38**

$f(2)$ =38.

Схема Горнера позволяет многочлен $f(x)$, записанный по убыванию степени x, разложить по степеням бинома $x-c$, а также определить кратность корня.

Упражнения

1. Пользуясь схемой Горнера, разделите с остатком многочлен $f(x)\in\mathbf{R}[x]$ на $x-x_0$ и вычислите $f(x_0)$:

а) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+16,\ x_0=4$;

б) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+1,\ x_0=-1$;

в) $f(x)=x^4-2x^3+4x^2-6x+\ +8\ \ x_0=1$;

г) $f(x)=2x^5-5x^3+8x,\ x_0=-3$;

д) $f(x)=x^4+2x^2+20x+7,\ x_0=-3$;

е) $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+8x-3,\ x_0=4$.

2. Пользуясь схемой Горнера, найдите значение многочлена $f(x)\in\boldsymbol{C}[x]$ в точке x_0:

а) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i$, $x_0=-i$;

б) $f(x)=x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0=-2-i$;

в) $f(x)=4x^3+x^2$, $x_0=-1-i$;

г) $f(x)=x^3-x^2-x$, $x_0=1-2i$;

д) $f(x)=x^6+(2-i)x^4+(i-1)x^3+(1+i)x^2-(1+i)x+3-i$, $x_0=i$;

е) $f(x)=x^3+x^2-7$, $x_0=-4-4i$;

ж) $f(x)=3x^5-x^4+2x^3-x-1$, $x_0=-1+i$; з) $f(x)=2x^5-2x^3+x$, $x_0=1+2i$.

3. Пользуясь схемой Горнера, составьте таблицу всех значений многочлена $f(x)\in\mathbf{Z}_p[x]$:

а) $f(x)=x^4-2x^3+x^2+2$, $p=5$;

б) $f(x)=3x^5+x^3-2x+1$, $p=7$.

4. Используя схему Горнера, выполните деление с остатком

а) $2x^5-3x^3+6x^2-7x-2$ на $x+2$;

б) $5x^4+3x^3-4x^2+6x-1$ на $x+3$.

5. Разделить многочлен *f(x)* на многочлен x-x_0 по схеме Горнера

a) $f(x)=(2+i)x^5+x^4-(4-i)x^2+2x-6$, $x_0=-2$;

b) $f(x)=ix^5-(2+3i)x^4+(3i-2)x^2-\left(i-1\right)x+3$, $x_0=1$;

c) $f(x)=(i+1)x^5+(4-i)x^3-(1-6i)x-1$, $x_0=-3$;

d) $f(x)=(2-i)x^5+(6-i)x^2+4i$, $x_0=2$;

e) $f(x)=2ix^5+(6-4i)x^3+(i-4)x^2+7x-3i$, $x_0=4$;

f) $f(x)=(i+3)x^5+3ix^3-(5-2i)x^2+(2-i)x-2$, $x_0=-1$;

g) $f(x)=(2+i)x^5+x^4-(4-i)x^2+2x-6$, $x_0=-2$;

h) $f(x)=3x^5+(i+3)x^4+(4-i)x-3$, $x_0=1$;

i) $f(x)=(i-1)x^5+(i-2)x^4-3ix^3+(4+i)x-3+i$, $x_0=-4$;

j) $f(x)=3ix^5-(2-3i)x^4+(3-i)x^2+2ix+2$, $x_0=2$;

k) $f(x)=(2-i)x^5+8ix^3-(2+3i)x^2+(i-1)x-5i$, $x_0=-3$;

l) $f(x)=(i+3)x^5-4x^4+(i-4)x^2+(6-i)x+5i$, $x_0=3$;

m) $f(x)=(i-1)x^5+(4-5i)x^3+2ix-7i$, $x_0=-2$

n) $f(x)=(2+3i)x^5+8ix^2+(4+i)x+1$, $x_0=1$;

o) $f(x)=ix^5+(i-1)x^3-(2+3i)x^2-1$, $x_0=4$;

p) $f(x)=(1+i)x^5+(5-2i)x^2-5ix+3i$, $x_0=2$;

q) $f(x)=2ix^5-(2i-1)x^4+(4+3i)x-7i$, $x_0=-4$;

r) $f(x)=3x^5+2x^4-(i+7)x+4+2i$, $x_0=-1$;

s) $f(x)=7x^5-3ix^3+(2i+1)x-4i$, $x_0=-3$;

t) $f(x)=(2+i)x^5-4x^4+(i-5)x^2+7-i$, $x_0=2$;

u) $f(x)=ix^5-3ix^3-8x+i-1$, $x_0=-1$;

v) $f(x)=3x^5+(3-i)x^2+3x-4$, $x_0=-3$;

w) $f(x)=(i-1)x^5+8x^3+(5i-3)x+5i+1$, $x_0=4$;

x) $f(x)=2ix^5+(i-3)x^4+(3+2i)x^2-3x+3i$, $x_0=1$;

y) $f(x)=(1+i)x^5-4x^4+(2+i)x^2+5$, $x_0=3$;

z) $f(x)=(2i-2)x^5-3ix^4+(3i+2)x^2+5-2i$, $x_0=-1$;

8. Разложить многочлен на множители, применяя схему Горнера, если известен один его корень:

$a)\ x^3-3x^2-7x+12,\quad x_1=4;\ b)\ x^4+4x^3-2x^2-24x+24,\quad x_1=-2.$

9. Выяснить, делится ли нацело многочлен

a) $x^{2012}+4x^{2011}+2x^{50}-x^{49}$ на $x+1$;

b) $x^6+2x^4-22x^3-2x+14$ на $x-7$.

10. Найти значения параметров a и b, при которых выполняется тождественное равенство

$$a)\ x^5 + x^3 - 2 = (x-1)\left(x^4 - ax^3 + 2x^2 + 2x + b\right);$$

$$b)\ x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x - 8 = (x+2)^2\left(x^3 + ax^2 + 3x + b\right).$$

11. Найдите все пары значений a и b, при которых многочлен $f(x)$ делится нацело на многочлен $g(x)$.

$$a)\ f(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b; \quad g(x) = x^2 - 4;$$

$$b)\ f(x) = 3x^4 + 5x^3 + ax^2 + bx + 10; \quad g(x) = x^2 + x - 2.$$

2.2. Неприводимые многочлены. Основная теорема алгебры

Как и во всяком кольце главных идеалов, в кольце $P[x]$ многочленов над полем P каждый необратимый элемент может быть разложен на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до перестановки множителей и замены их ассоциированными элементами.

Напомним, что ненулевой элемент области целостности называется простым, если он необратим и не может быть разложен в произведение двух необратимых элементов. Простые элементы кольца $P[x]$ по традиции называются *неприводимыми многочленами*. Поскольку необратимые элементы кольца $P[x]$, отличные от нуля, - это многочлены положительной степени, то неприводимый многочлен - это такой многочлен положительной степени, который не может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени.

Многочлен, который может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени, называется *приводимым*. Можно также сказать, что неприводимый многочлен - это такой многочлен положительной степени, который не может быть разложен в произведение двух многочленов меньшей степени.

Неприводимость многочлена зависит от поля, над которым он рассматривается . Так, многочлен $x^2 - 2$ приводим над полем C и над полем R $f(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$, но неприводим над полем рациональных чисел Q.

Многочлен выше 1-й степени, неприводимый над полем P, не может иметь корней в поле P. Обратное неверно, т.е., из того, что многочлен не имеет корней в поле P, не следует, вообще говоря, что он неприводим над полем P. Например, $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)$ не имеет рациональных корней, но является приводимым над Q.

Теорема. *Всякий многочлен* $f \in P[x]$, *не являющийся элементом поля P, может быть разложен в произведение неприводимых многочленов*:

$$f = p_1 p_2 \cdots p_m$$

причем если $f = q_1 q_2 \ldots q_l$ *- другое такое разложение, то* $l = m$ *и при подходящей нумерации множителей имеют место равенства* $q_i = c_i p_i$, $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, *где* $c_i \in P$, $c_i \neq 0$.

Если вынести за скобки старшие коэффициенты всех неприводимых множителей какого-либо разложения многочлена $f \in P[x]$, то многочлен *f* представится в виде:

$$f = a p_1 p_2 \cdots p_m \quad (a \in P,\ a \neq 0),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_m$ - нормированные неприводимые многочлены. Такое представление многочлена *f* будем называть его *нормированным разложением на неприводимые множители*.

Очевидно, что множитель *a* в формуле совпадает со старшим коэффициентом многочлена *f* и что нормированное разложение на неприводимые множители единственно с точностью до перестановки множителей.

Пусть *p* - какой-нибудь неприводимый делитель многочлена $f \in P[x]$. Может случиться, что *f* делится не только на *p*, но и на p^2 или даже на более высокую степень *p*. Наибольшее из таких чисел *k*, что *f* делится на p^k, называется *кратностью неприводимого делителя p* многочлена *f*. Иными словами, кратность равна *k*, если *f* делится на p^k, но не делится на p^{k+1}. Если *p* - неприводимый многочлен, не являющийся делителем многочлена *f*, то удобно считать, что *p* - неприводимый делитель кратности 0.

Заметим, что *любой многочлен первой степени неприводим*, так как произведение двух многочленов положительной степени всегда имеет степень ≥ 2. Следовательно, разложение на линейные множители является частным случаем разложения на неприводимые множители.

Из теоремы Безу следует, что *кратность корня* x_0 *многочлена* $f \in P[x]$ *есть не что иное, как кратность неприводимого делителя* $x - x_0$ *этого многочлена*.

Теорема. *Кратность неприводимого делителя p многочлена f равна числу множителей, ассоциированных с p, в любом разложении многочлена f на неприводимые множители*.

Неприводимые многочлены играют роль, аналогичную роли простых чисел в арифметики. Естественно поставить вопрос: какие же существуют неприводимые многочлены? Ответ на этот вопрос зависит от поля *P*, однако некоторые общие соображения все же можно высказать. Прежде всего, как ранее было замечено, любой многочлен первой степени неприводим. По теореме Безу многочлен, имеющий корень x_0, делится на $x - x_0$. Степень частного при этом, очевидно, будет на единицу меньше степени самого многочлена.

Поэтому *всякий многочлен степени* ≥ 2, *имеющий корень в поле P, приводим*. Если рассмотреть приводимые многочлены 2 и 3 степени, то они разлагаются в произведение двух сомножителей, один из которых должен быть первой степени и, значит, этот многочлен имеет корень. Таким образом, *многочлен степени* 2 *или* 3 *неприводим тогда и только тогда, когда он не имеет корней* (*в поле P*).

Основная теорема алгебры. *Любой многочлен* $f(x) \in C[x]$ *степени не меньше 1 имеет по крайней мере один комплексный корень*.

Из основной теоремы алгебры следует приводимость любого многочлена степени ≥ 2 над полем комплексных чисел $\boldsymbol{C}$.

Теорема. *В кольце* $\boldsymbol{R}[x]$ *многочленов с действительными коэффициентами неприводимы только многочлены первой степени и многочлены второй степени, не имеющие действительных корней*.

Доказательство. Пусть многочлен с действительными коэффициентами $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ имеет комплексный корень α, т.е. $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$. Мы знаем из свойств комплексных чисел, что последнее равенство не нарушится, если в нем все числа заменить на сопряженные. Однако все коэффициенты a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n, а также число 0, стоящее справа, будучи действительными, останутся при этой замене без изменения, и мы приходим к равенству $a_0\overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n = 0$, т.е. $f(\overline{\alpha}) = 0$. Таким образом, *если комплексное* (*но не действительное*) *число* α *служит корнем многочлена f*(*x*) *с действительными коэффициентами, то корнем для f*(*x*) *будет и сопряженное число* $\overline{\alpha}$.

Многочлен $f(x)$ будет делится, следовательно, на квадратный трехчлен $\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\ +\alpha\overline{\alpha}$, коэффициенты, как мы знаем из свойств комплексных чисел, действительны. Теперь докажем, что корни α и $\overline{\alpha}$ имеют в многочлене $f(x)$ одну и ту же кратность.

Пусть, в самом деле, эти корни имеют соответственно кратности k и l и пусть, например, $k>l$. Тогда $f(x)$ делится на l-ю степень многочлена $\varphi(x)$, $f(x)=\varphi^l(x)q(x)$. Многочлен $q(x)$, как частное двух многочленов с действительными коэффициентами, также имеет действительные коэффициенты, но, в противоречие с доказанным выше, он имеет число α своим $(k-l)$-кратным корнем, тогда как число $\overline{\alpha}$ не является для него корнем. Отсюда следует, что $k=l$.

Таким образом, *комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены*. Отсюда и из единственности разложения многочлена на множители вытекает справедливость доказываемой теоремы. Для кольца $\boldsymbol{Q}[x]$ ситуация совершенно иная: в этом кольце существуют неприводимые многочлены любой степени. Если поле P конечно, то для любого n существует лишь конечное число многочленов степени не выше n с коэффициентами из P, и поэтому неприводимые многочлены не выше любой заданной степени могут быть найдены путем перебора, аналогично тому, как находятся простые числа, не превосходящие заданного числа.

Так же, как доказывается бесконечность множества простых чисел, может быть доказана бесконечность множества нормированных неприводимых многочленов над любым полем P. Предположим, что таких многочленов имеется конечное число, и пусть $p_1,p_2,\ldots,p_n$ - все эти многочлены.

Рассмотрим многочлен $f=p_1p_2\ldots p_n+1$. Всякий многочлен положительной степени должен делиться на какой-нибудь неприводимый многочлен, однако f не делится ни на один из многочленов $p_1,p_2,\ldots,p_n$. Полученное противоречие показывает, что сделанное допущение о конечности множества неприводимых многочленов неверно.

<u>Теорема</u>. *Пусть* $f(x)\in P[x]$ *- многочлен над полем P и пусть p - неприводимый множитель кратности* $m\geq 1$ *многочлена* $f(x)$. *Тогда p является множителем кратности* $m-1$ *производной* $f'(x)$.

<u>Доказательство</u>. Так как p есть m-кратный множитель многочлена f, значит, $f=p^m g,\ g\in P[x],\ g\nmid p$. Используя свойства производной, находим $f'=mp^{m-1}p'g+p^m g'=p^{m-1}(mp'g+pg')$.

Так как $\deg mp' < \deg p$, то $mp' \not\vdots\, p$. Также g и p взаимно просты, $g \not\vdots\, p$, поэтому $(mp')g \not\vdots\, p$. Значит $(mp'g + pg') \not\vdots\, p$.

Заключаем, что p является множителем кратности $m-1$ производной $f'(x)$.

<u>Следствие 1</u>. *Многочлен* $f(x) \in P[x]$ *имеет кратные неприводимые множители тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель многочленов f и* f' *имеет положительную степень.*

<u>Следствие 2</u>. *Пусть* $f(x) \in P[x]$. *Элемент с является кратным корнем многочлена f тогда и только тогда, когда* $f(c) = f'(c) = 0$.

<u>Следствие 3</u>. *Пусть* $f(x) \in P[x]$. *Элемент с является т-кратным корнем многочлена f тогда и только тогда, когда*

$$f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0, f^{(m)}(c) \neq 0.$$

<u>Доказательство</u>. Элемент *с* тогда и только тогда будет *т*-кратным корнем многочлена *f* (т.е. $(x-c)$ - *т*-кратный множитель многочлена *f(x)*, когда $(x-c)$ делит $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$ и $f^{(m)} \not\vdots\, (x-c)$. В силу теоремы Безу условия равносильны.

<u>Пример</u>. Определим кратность корня 1 многочлена $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$. Для этого построим таблицу

	1	**-1**	**-1**	**2**	**-1**	**-1**	**1**
1	1	0	-1	1	0	-1	0
	1	1	0	1	1	0	
	1	2	2	3	4		

из которой следует, что кратность корня 1 равна 2.

<u>Пример</u>. Найти корни многочлена $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 20x - 7$ кратности выше первой и определить эту кратность.

Поскольку корни кратности больше 1 являются и корнями производной, то найдем: $f'(x) = 4(x^3 + 3x^2 - 9x + 5)$. Нетрудно заметить, что число 1 является корнем многочлена $f'(x)$. Проверим является ли 1 корнем многочлена $f(x)$ и если да, то какой кратности. Для этого делим на $x-1$ многочлен $f(x)$, потом частное и т.д.

	1	**4**	**-18**	**20**	**-7**
1	1	5	-13	7	**0**
1	1	6	-7	**0**	
1	1	7	**0**		
1	1	**8**			

Итак, $f(x) = (x-1)^3(x+7)$, т.е. число 1 есть корень многочлена $f(x)$ кратности 3.

<u>Пример</u>. Разложить на неприводимые множители многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ 1) над полем C; 2) над полем R.

<u>Решение.</u> Задача сводится к отысканию корней этого многочлена. Корни этого многочлена равны $x_1 = -5,\ x_2 = 1 - i\sqrt{3},\ x_3 = 1 + i\sqrt{3}$. А тогда $f(x) = (x+5)\left(x - 1 + i\sqrt{3}\right)\left(x - 1 - i\sqrt{3}\right)$ и есть разложение $f(x)$ на неприводимые множители над полем C $f(x) = (x+5)\left(x^2 - 2x + 4\right)$ — разложение $f(x)$ на неприводимые множители над полем R.

<u>Пример</u>. Разложить на неприводимые множители над полем R многочлен $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5$.

<u>Решение.</u> Корни $f(x)$ равны

$$x_1 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2},\quad x_2 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2},\quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Поэтому $f(x) = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^3 - 3x + 5\right)$ является разложением над R. Здесь $x^2 - 3x + 5 = \left(x - \dfrac{3+i\sqrt{11}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-i\sqrt{11}}{2}\right)$.

Упражнения

1) Определить кратность корня x_0 многочлена $f(x)$:
   - а) $f = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8, x_0 = 2;$
   - б) $f = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16, x_0 = -2;$
   - в) $f = 3x^5 + 2x^4 + x^3 - 10x - 8, x_0 = -1;$
   - г) $f = x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 36x^2 - 27x - 54, x_0 = -3.$
2) При каком значении a многочлен $x^5 - ax^2 - ax + 1$ имеет корень -1 кратности не ниже второй?

2.3. Интерполяционный многочлен

Рассмотрим таблицу чисел

x_0	x_1	...	x_n
y_0	y_1	...	y_n

Многочлен $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям $f(x_j) = y_j$ $(j = 0, 1,...,n)$ назовем *интерполяционным многочленом*, относящимся к интерполяционной таблице.

Теорема. *Для любой таблицы интерполяции интерполяционный многочлен существует и единственен.*
Доказательство.
Существование. Легко видеть, что многочлен

$$f(x) = \frac{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\ldots\cdot(x - x_{j-1})\cdot(x - x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x_j - x_1)\cdot(x_j - x_2)\ldots\cdot(x_j - x_{j-1})\cdot(x_j - x_{j+1})\cdot\ldots\cdot(x_j - x_n)}$$

называемый *интерполяционным многочленом в форме Лагранжа*, является интерполяционным для таблицы.
Единственность. Пусть $f(x)$, $g(x)$ — два интерполционных многочлена, соответствующих одной таблице интерполяции. Рассмотрим многочлен $h(x) = f(x) - g(x)$. Имеем $h(x_j) = 0$ ($j = 0, 1,\ldots,n$). Таким образом, многочлен $h(x)$ степени, не превосходящей n, имеет не менее $n + 1$ корней. Получаем, что $h(x) = 0$, т.е. $f(x) = g(x)$.
Пример. Построим интерполяционный многочлен по таблице

x_j	1	2	3
y_j	−6	−6	−4

По формуле имеем

$$f(x) = -6\cdot\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} - 6\cdot\frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} - 4\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = x^2 - 3x - 4.$$

Следствие. *Пусть F — некоторое подполе поля* **C**. *Для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ из $F[x]$* $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall c \in F \quad f(c) = g(c)$.

Рассмотрим еще один способ нахождения интерполяционного многочлена – *метод Ньютона*. Интерполяционный многочлен для таблицы ищется в виде

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Последовательно полагая $x = x_j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$), находим $c_0, c_1, \ldots c_n$.
Пример. Методом Ньютона построим интерполяционный многочлен по таблице интерполяции из примера выше. Ищем многочлен в виде

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1).$$

Полагая $x = x_0$, получаем $-6 = c_0$.
Полагая $x = x_1$, получаем $-6 = -6 + c_1(2 - 1)$, откуда $c_1 = 0$.
Полагая $x = x_2$, получаем $-4 = -6 + 0\cdot(2 - 1) + c_2(3 - 1)(3 - 2)$, откуда $c_2 = 1$. Итак, $f(x) = -6 + (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x - 4$.
Для эффективного вычисления коэффициентов интерполяционного многочлена $f(x)$ в форме Ньютона введем так называемые разделенные разности.

Пусть $f(x)$ — интерполяционный многочлен, построенный по таблице, а $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — некоторые числа из F. *Разделенной разностью первого порядка* называется величина

$$f(z_0, z_1) = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{z_0 - z_1}$$

разделенной разностью второго порядка называется

$$f(z_0, z_1, z_2) = \frac{f(z_0, z_1) - f(z_1, z_2)}{z_0 - z_2}$$

и т.д. Вообще, *разделенная разность k-го порядка* определяется через разделенную разность $(k-1)$-го порядка следующим образом:

$$f(z_0, z_1, \dots\dots, z_k) = \frac{f(z_0, z_1) - \cdots - f(z_{k-1}, z_k)}{z_0 - z_k}$$

Заметим, что так как $f(x_0) = y_0$, т.е. x_0 является корнем многочлена $f(x) - y_0$, то $f(x, x_0)$ представляет собой многочлен и степень этого многочлена на 1 меньше степени $f(x)$.

Аналогично, $f(x, x_0, x_1)$ также является многочленом и степень его на 1 меньше степени $f(x, x_0)$ и т.д. Наконец, $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$. Из определения разделенных разностей получаем

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x, x_1)$,

$f(x, x_0) = f(x_0, x_1) + (x - x_1)f(x, x_0, x_1)$, $f(x, x_0, x_1) = f(x_0, x_1, x_2) + (x - x_2)f(x, x_0, x_1, x_2)$ и т.д., откуда $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots\dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

В силу единственности представления многочлена $f(x)$, получаем, что коэффициенты c_j суть разделенные разности, а именно:

$$c_j = f(x_0, x_1, \dots, x_j) \qquad (j = 0, 1, \dots, n).$$

Вычислять разделенные разности удобно в таблице

<u>Пример</u>. Построим интерполяционный многочлен $f(x)$ по таблице

x_j	−2	−1	0	1	2
y_j	3	8	17	24	47

Составим таблицу разделенных разностей:

-2	**3**				
		5			
-1	**8**		2		
		9		-1	
0	**17**		-1		1
		7		3	
1	**24**		8		
		23			
2	**47**				

Таким образом,

$f(x)=(x + 2)(x + 1)x(x - 1)-(x + 2)(x + 1)x +2(x + 2)(x + 1) + 5(x + 2) + 3.$

Упражнения

Построить интерполяционный многочлен для таблиц

x_j	-3	-1	4	1	5
y_j	3	6	17	34	21

x_j	-6	-7	3	1	2
y_j	5	2	17	15	41

x_j	4	-1	0	1	2
y_j	3	5	19	14	27

2.4. Целые и рациональные корни многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна

Хотя уравнения высоких степеней в общем случае неразрешимы в радикалах, да и формулы Кардано и Феррари для уравнений третьей и четвертой степеней в школе не проходят, в учебниках по алгебре, на вступительных экзаменах в институты иногда встречаются задачи, где требуется решить уравнения выше второй степени. Обычно их специально подбирают так, чтобы корни уравнений можно было найти с помощью некоторых элементарных приемов.

В основе одного из таких приемов лежит теорема о рациональных корнях многочлена:

<u>Теорема.</u> *Если несократимая дробь p/q является корнем многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами, то ее числитель p является делителем свободного члена a_0, а знаменатель q - делителем старшего коэффициента a_n.*

Для доказательства достаточно подставить в уравнение $P(x) = 0$ $x = p/q$ и умножить уравнение на q^n. Получим $a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$

Все слагаемые в левой части, кроме последнего, делятся на p, поэтому и $a_0 q^n$ делится на p, а поскольку q и p - взаимно простые числа, p является делителем a_0. Доказательство для q аналогично.

С помощью этой теоремы можно найти все рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами испытанием конечного числа "кандидатов".

Пример. Для многочлена $f(x)=6x^5+5x^4-6x^3-6x^2-5x+6$ найти рациональные корни.

Данный многочлен имеет целые коэффициенты. Имеем $a_n=6,\ a_0=6$. Так как необходимо $a_n \vdots q$, $a_0 \vdots p$, то 6⋮q и 6⋮p. Значит, q=1,2,3,6 и $p=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

Поэтому $\frac{p}{q}\in\left\{\frac{\pm1}{1};\frac{\pm2}{1};\frac{\pm3}{1};\frac{\pm6}{1};\frac{\pm1}{2};\frac{\pm2}{2};\frac{\pm3}{2};\frac{\pm6}{2};\frac{\pm1}{3};\frac{\pm2}{3};\frac{\pm3}{3};\frac{\pm6}{3};\frac{\pm1}{6};\frac{\pm2}{6};\frac{\pm3}{6};\frac{\pm6}{6}\right\}$.

В этом множестве есть сократимые, т.е. не взаимно простые дроби. При решении их нужно исключить.

Решение оформляем в виде таблицы, в клеточках которой, соответствующих дроби $\frac{p}{q}$, ставим 0, если дробь является корнем $f(x)$, и – в противном случае. В нашей заготовке сразу исключим из рассмотрения сократимые дроби.

$\frac{p}{q}$	-1	1	-2	2	-3	3	-6	6
1								
2			-	-			-	-
3					-	-	-	-
6			-	-	-	-	-	-

Теперь только дроби, соответствующие незаполненным клеточкам в таблице и только они, могут быть рациональными корнями многочлена $f(x)$. Вычисляем $f(1), f(-1)$ по схеме Горнера.

	6	5	-6	-6	-5	6
1	6	11	5	-1	-6	0
-1	6	-1	-5	-1	-4	10

Значит, *f(1)=0, f(-1)=10.* 1 – корень *f(x),* -1 не является корнем. Поэтому можно проверять лишь выполнение условия *f(-1)* ⋮(*p*+*q*) или 10⋮*(p+q).*

Заметим, что дробь $\frac{1}{6}$ не является корнем $f(x)$, так как для неё $p=1,\ q=6,\ p+q=7$ и 10 не делится на 7.

Аналогично исключаем дроби: $\frac{2}{1}=2;\ \frac{3}{1}=3;\ \frac{6}{1}=6;\ \frac{1}{2};\frac{1}{6}$.

Далее находим *f(2)*:

	6	5	-6	-6	-5	6
2	6	17	28	50	95	196

Итак, $f(2)=196$ и, используя свойство $f(2):(p-2q)$, исключаем дополнительно дроби: $\frac{-6}{1}=-6;\ \frac{-1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{-2}{3};\ \frac{-1}{6};\ \frac{1}{6}$.

Оставшиеся дроби $\frac{-2}{1}=-2;\ \frac{-3}{1}=-3;\ \frac{-3}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{-1}{3};\ \frac{2}{3}$ проверяем по схеме Горнера.

	6	5	-6	-6	-5	6
-2	6	-7	8	-22	-39	$\neq 0$
-3	6	-13	33	-105	310	$\neq 0$
$-\frac{3}{2}$	6	-4	0	-6	4	0
$\frac{3}{2}$	6	14	15	$\frac{33}{2}$		$\neq 0$
$-\frac{1}{3}$	6	3	-7			$\neq 0$
$\frac{2}{3}$	6	9	0	-6	-9	0

Итак, рациональными корнями данного многочлена *f(x)* являются числа 1;- $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$.

Вопрос о приводимости многочлена над полем рациональных чисел сводится к вопросу о разложении на множители меньшей степени многочлена с целыми коэффициентами. В этом направлении имеется следующее достаточное условие неприводимости:

<u>Критерий Эйзенштейна</u>.

Если для многочлена q с целыми коэффициентами q = $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ удается найти такое простое число p, что

1. НОД(p , a_n) = 1
2. $\forall(i=0,\ldots n-1): p|a_i$
3. p^2 не делит a_0,

то этот многочлен неприводим.

<u>Пример</u>. Многочлен $2x^4-6x^3+15x^2+21$ неприводим над полем **Q**. Достаточно взять p = 3 и применить критерий Эйзенштейна.

Для всякого n>0 многочлен $x^n - 2$ неприводим над **Q**. Достаточно взять p=2 в предыдущей теореме. Отсюда вытекает, что *над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любой степени*

__**Пример**__. Если $f(x) = 5x^6 - 8x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 2x^2 - 14$, то $f(x)$ неприводим по критерию Эйзенштейна $(p = 2)$. Неприводимыми над Q являются также многочлены $g(x) = x^h + 3\,(p = 3), \forall h \in N$. Отсюда видно, что для всякого натурального h существует многочлен степени h неприводимый над Q, в отличие от полей C и R.

__**Пример.**__ Найти рациональные корни многочлена $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$ Старший коэффициент равен 1, "кандидатами" будут делители числа –2. Их всего четыре: 1, -1, 2 и –2. Проверка показывает, что корнем является только одно из этих чисел: $x_0 = -2$.

Если один корень найден, можно понизить степень уравнения. Согласно теореме Безу, остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - c$ равен $P(c)$, т. е. $P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + P(c)$.

Из теоремы непосредственно следует, что если c - корень многочлена $P(x)$, то многочлен делится на $x - c$, т. е. $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, где $Q(x)$ - многочлен степени, на 1 меньшей, чем $P(x)$.

Продолжая наш пример, вынесем из многочлена $P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$

множитель $x - x_0 = x + 2$. Чтобы найти частное $Q(x)$, можно выполнить деление "уголком":

Но есть и более простой способ. Он станет понятен из примера:

$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x^3 + 2x^2) + (x^2 + 2x) - (x + 2) = (x + 2) \cdot (x^2 + x - 1)$. Теперь остается решить квадратное уравнение $x^2 + x - 1 = 0$. Его корни: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

__**Пример.**__ Найти рациональные корни многочлена $4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1$.

__Решение.__ Здесь $a_n = 4$, $a_0 = -1$. Поэтому рациональные корни уравнения следует искать среди чисел: ± 1; ± 0,5; ± 0,25 (делители 4 есть ±1; ±2; ±4, делители (– 1) есть ± 1). Если x = +1, то 4 + 8 + 1 – 3 – 1 ≠ 0; если x = – 0,5, то 4 / 16 – 8 / 8 + 1 / 4 + 3 / 2 – 1 = 0, т.е. x = – 0,5 корень уравнения. Делим $(4x^4 + 8x^3 + x^2 - 3x - 1)$ на $(x + 0,5)$:

Данное уравнение можно представить в виде: $(x + 0,5)(4x^3 + 6x^2 - 2x - 2) = 0$.

Отсюда $x_1 = -0,5$ (решение, найденное подбором) и $4x^3 + 6x^2 - 2x - 2 = 0$, т.е. $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$. Аналогично находим корень этого уравнения: $x = -0,5$. Снова делим.

Имеем: $(x + 0,5)(2x^2 + 2x - 2) = 0$. Отсюда $x_2 = -0,5$ и $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Ответ: $x_1 = x_2 = -0,5$; $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Замечание: зная, что $x = -0,5$, можно не заниматься делением, а просто выделить за скобки множитель $(x + 0,5)$. Из $2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ следует:

$2x^3 + 3x^2 - x - 1 = 2x^3 + x^2 +2x^2 + x - 2x - 1 = 2x^2(x + 0,5) + 2x(x + 0,5) - 2(x+0,5) = = (x +2)(2x^2 + 2x - 2) = 0$.

$x_1 = -0,5$; $x_{3,4} = (-1 \pm \sqrt{5}) / 2$.

Упражнения

1. Разложить на неприводимые множители над кольцами Q, R, C многочлены:

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 7x + 2$;
b) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 2$;
c) $f(x) = 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 - x^2 - 2x - 1$;
d) $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x + 2$;
e) $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 2x^2 - 1$;
f) $f(x) = 2x^6 - 3x^4 - x^2 - 4x - 2$;
g) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$;
h) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$;
i) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35$;
j) $f(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4$;
k) $f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$;
l) $f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9$.

3. Разложить на линейные множители в C и неприводимые (линейные и квадратичные) множители в R. Сделать проверку.

a) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 28x$; $g(x) = x^3 + x^2 + 15x - 17$;
b) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 21x$; $g(x) = x^3 - x^2 + 15x + 17$;
c) $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$; $g(x) = x^3 - 3x^2 + 19x - 17$;

d) $f(x)=x^4-x^3-3x^2-3x-18$; $g(x)=x^3+3x^2+19x+17$;

e) $f(x)=x^5+3x^3-28x$; $g(x)=x^3+3x^2+12x+10$;

f) $f(x)=x^5+7x^3-18x$; $g(x)=x^3+x^2+8x-10$;

g) $f(x)=x^4+3x^3+4x^2+6x+4$; $g(x)=x^3-x^2+8x+10$;

h) $f(x)=x^4+x^3-2x^2+4x-24$; $g(x)=x^3-3x^2+12x-10$;

i) $f(x)=x^4+x^3+x^2+3x-6$; $g(x)=x^3+4x^2+6x+4$;

j) $f(x)=x^5+x^3-42x$; $g(x)=x^3-2x-4$;

k) $f(x)=x^5+3x^3-18x$; $g(x)=x^3-2x+4$;

l) $f(x)=x^5-5x^3-24x$; $g(x)=x^3-4x^2+6x-4$;

m) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-12x+8$; $g(x)=x^3+5x^2+11x+15$;

n) $f(x)=x^5-2x^3-63x$; $g(x)=x^3-x^2-x-15$;

o) $f(x)=x^5-4x^3-32x$; $g(x)=x^3+x^2-x+15$;

p) $f(x)=x^5+4x^3-12x$; $g(x)=x^3-5x^2+11x-15$;

q) 17. $f(x)=x^4+4x^2-5$; $g(x)=x^3-x^2+3x+5$;

r) $f(x)=x^5+6x^3-16x$; $g(x)=x^3-3x^2+7x-5$;

s) $f(x)=x^5-6x^3-27x$; $g(x)=x^3+3x^2+7x+5$;

t) $f(x)=x^5+2x^3-8x$; $g(x)=x^3+x^2+3x-5$;

u) $f(x)=x^4-2x^3-2x^2-2x-3$; $g(x)=x^3+5x^2+8x+6$;

v) $f(x)=x^5-3x^3-40x$; $g(x)=x^3-x^2-4x-6$;

w) $f(x)=x^5-x^3-30x$; $g(x)=x^3+x^2-4x+6$;

x) $f(x)=x^5-8x^3-9x$; $g(x)=x^3-5x^2+8x-6$;

y) $f(x)=x^4+2x^3-2x^2+4x-6$; $g(x)=x^3+4x^2+9x+10$;

z) $f(x)=x^5-3x^3-28x$; $g(x)=x^3+x-10$;

4. Найдите рациональные корни многочлена

a) $4x^4 + 8x^3 - 19x^2 - 23x + 30$;

b) $4x^4 + 8x^3 - 23x^2 - 25x + 42$;

c) $4x^4 - 8x^3 - 23x^2 + 67x - 42$;

d) $6x^4 - 9x^3 - 21x^2 + 36x - 12$;

e) $6x^4 - 3x^3 - 39x^2 + 48x - 12$;

f) $x^4 - 21x^3 - 11x^2 + 44x - 20$;

g) $9x^4 - 30x^3 - 8x^2 + 61x - 30$;

h) $9x^4 + 24x^3 - 26x^2 - 41x + 30$;

i) $9x^4 + 30x^3 - 12x^2 - 53x + 30$;

j) $9x^4 + 30x^3 - 3x^2 - 32x + 12$

2.5. Формула Тейлора. Разложение многочлена по степеням двучлена

В курсе математического анализа доказывается, что производная многочлена есть снова многочлен, причем если

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \text{ то } f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

В этом случае *производная многочлена степени* $n \geq 1$ *является многочленом степени* $n-1$. Может даже случиться, что производная многочлена положительной степени будет нулевым многочленом. Например, пусть $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbf{Z}_3[x]$. Тогда $f'(x) = 6x^5 + 3x^2 = 0$.

Производная от производной многочлена $f(x)$ называется его второй производной и обозначается через $f''(x)$. Производная от второй производной называется третьей производной и т.д. Для n-й производной используется обозначение $f^{(n)}(x)$. Так как при каждом дифференцировании степень многочлена понижается, то $(n+1)$-я производная любого многочлена степени n равна нулю.

Схема Горнера удобна при разложении данного многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ по степеням двучлена $x - c$. Пусть

$$f = (x-c)q_1 + r_0,$$
$$q_1 = (x-c)q_2 + r_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q_{n-2} = (x-c)q_{n-1} + r_{n-2},$$
$$q_{n-1} = (x-c)a_0 + r_{n-1},$$

где $q_k \in K[x]$ и $r_k \in K$. Если последнее выражение для q_{n-1} подставить в предыдущее равенство, а затем то, что при этом получится, подставить вместо q_{n-2} и т.д., то придем к равенству

$$f = r_0 + r_1(x-c) + r_2(x-c)^2 + \ldots + r_{n-1}(x-c)^{n-1} + a_0(x-c)^n.$$

Это есть разложение данного полинома f по степеням (x - c). Пусть K - поле P. Дифференцируя обе части равенства и полагая $x = c$, получим $f(c) = r_0$, $f'(c) = r_1$, $f''(c) = 2!r_2$, ..., $f^{(n)}(c) = n!a_0$. Поэтому равенство можно записать в виде

$$f = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

если только f - полином над полем нулевой характеристики. Это и есть ***формула Тейлора*** для полиномов. Все вычисления удобно расположить в одну таблицу:

	a_0	a_1	...	a_{n-1}	a_n
c	b_0	b_1	...	b_{n-1}	$r_0 = f(c)$
	c_0	c_1	...	$r_1 = f'(c)$	
	d_0	d_1	...	$r_2 = f''(c)$	
	...	...	...	...	
	a_0	$r_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}$			

Пример. Разложим полином $x^6 - 5x^5 + 3x^3 - 1$ по степеням $x - 1$. Для этого построим таблицу

	1	-5	0	3	0	0	-1
1	1	-4	-4	-1	-1	-1	$-2 = r_0$
	1	-3	-7	-8	-9	$-10 = r_1$	
	1	-2	-9	-17	$-26 = r_2$		
	1	-1	-10	$-27 = r_3$			
	1	0	$-10 = r_4$				
	1	$1 = r_5$					

Отсюда

$$x^6 - 5x^5 + 3x^3 - 1 = -2 - 10(x-1) - 26(x-1)^2 - 27(x-1)^3 - 10(x-1)^4 +$$
$$+(x-1)^5 + (x-1)^6.$$

Пример. Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$ по степеням двучлена $x-1$.

Речь идет о представлении данного многочлена в виде

$$f(x) = c_5(x-1)^5 + c_4(x-1)^4 + ... + c_1(x-1) + c_0.$$

Известно, что $c_i = \dfrac{f^{(i)}(1)}{i!}, \quad i = 1,...,5,\ c_0 = f(1),$ но коэффициенты $c_0, c_1,...$ удобно находить, вычисляя последовательно остатки от деления $f(x)$ на $x-1$, полученного частного на $x-1$, нового частного на $x-1$ и т.д.

	1	0	-3	1	-2	1
1	1	1	-2	-1	-3	-2
1	1	2	0	-1	-4	
1	1	3	3	2		
1	1	4	7			
1	1	5				
1	1					

Таким образом,

$$f(x) = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 2(x-1)^2 - 4(x-1) - 2.$$

Заметим, что

$$-2 = f(1),\ -4 = \frac{f'(1)}{1!},\ 2 = \frac{f''(1)}{2!},\ 7 = \frac{f'''(1)}{3!},\ 5 = \frac{f^{IV}(1)}{4!},\ 1 = \frac{f^{V}(1)}{5!},$$

откуда легко найти значение $f(x)$ и всех его производных при $x=1$

Отметим, что с помощью схемы Горнера можно решать такие типы задач:

1. Найти $q(x)$ и r при делении $f(x)$ на $(x-a)$;
2. Вычислить значение многочлена $f(x)$ при $x = a$;
3. Выяснить, будет ли $x = a$ корнем многочлена $f(x)$, $a \in F$;
4. Определить кратность корня;
5. Разложить многочлен по степеням $(x-a)$.
6. Вычислить значение $f(x)$ и всех его производных при $x = a$.

Пример. Пусть $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$ и $a = 5$. Составим схему Горнера:

	1	-15	76	-140	75	-125
5	1	-10	26	-10	25	$0 = c_0$
5	1	-5	1	-5	$0 = c_1$	
5	1	0	1	$0 = c_2$		
5	1	5	$26 = c_3$			
5	1	$10 = c_4$				
5	$1 = c_5$					

1. Вычислим неполное частное $q(x)$ и остаток r при делении $f(x)$ на $(x - 5)$.

Во второй строке таблицы видим, что коэффициенты частного $q(x)$ равны: 1, – 10, 26, – 10, 25, поэтому $q(x) = 1x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 25$, а остаток r равен 0.

2. Вычислим значение многочлена $f(x)$ при $x = 5$. Воспользуемся теоремой Безу: $f(5) = r = 0$.

3. Выясним, будет ли $x = 5$ корнем многочлена $f(x)$. По определению a – корень $f(x)$, если $f(a) = 0$. Так как $f(5) = r = 0$, то 5 – корень $f(x)$.

4. Из второй, третьей и четвертой строк таблицы мы видим, что $f(x)$ делится на $(x - 5)^3$, но $f(x)$ не делится на $(x - 5)^4$. Следовательно, число корень 5 имеет кратность 3.

5. Разложим многочлен $f(x)$ по степеням $(x - 5)$, коэффициенты разложения c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 получаются в последних клетках второй, третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой строки схемы Горнера:

$f(x) = c_0 + c_1(x - 5) + c_2(x - 5)^2 + c_3(x - 5)^3 + c_4(x - 5)^4 + c_5(x - 5)^5$

или

$f(x) = 26(x - 5)^3 + 10(x - 5)^4 + (x - 5)^5$.

6. Вычислим значение многочлена $f(x)$ и всех его производных при $x = 5$.

$c_0 = f(5) = 0$, $c_1 = f'(5) = 0$, $c_2 = \dfrac{f''(5)}{2!} = 0 \to f''(5) = 0$,

$c_3 = \dfrac{f'''(5)}{3!} = 26 \to f'''(5) = 26 \cdot 3! = 156$, $c_4 = \dfrac{f^{\text{IV}}(5)}{4!} = 10 \to f^{\text{IV}}(5) = 10 \cdot 4! = 240$,

$c_5 = \dfrac{f^{\text{V}}(5)}{5!} = 1 \to f^{\text{V}}(5) = 1 \cdot 5! = 120$.

Упражнения

1. Разложить многочлен *f(x)* по степеням $(x-c)$:

a) $f(x)=x^4-x^3-x+1$, $c=2$;

b) $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+5x+2$, $c=-2$;

c) $f(x)=x^4-5x^3+9x^2-8x+4$, $c=1$;

d) $f(x)=x^4+3x^3+2x^2+4x+8$, $c=-1$;

e) $f(x)=x^4-8x^3+23x^2-30x+18$, $c=2$;

f) $f(x)=x^4+4x^3+27$, $c=-2$;

g) $f(x)=x^4-7x^3+9x^2+8x+16$, $c=3$;

h) $f(x)=x^4+9x^3+26x^2+32x+32$, $c=-3$;

i) $f(x)=x^4-4x^3+8x^2-8x+3$, $c=2$;

j) $f(x)=x^4-x^2+2x+2$, $c=1$;

k) $f(x)=x^4-5x^3+10x^2-12x+8$, $c=1$;

l) $f(x)=x^4+3x^3+x^2+4$, $c=-1$;

m) $f(x)=x^4-5x^3+5x^2-3x+18$, $c=2$;

n) $f(x)=x^4+7x^3+16x^2+15x+9$, $c=-2$.

2.6. Формулы Виета

Рассмотрим задачу нахождения коэффициентов многочлена по его корням. Пусть

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Раскрывая скобки в правой части и собирая коэффициенты при каждой степени, получаем ***формулы Виета:***

$$a_1=-(c_1+c_2+\cdots+c_n),$$
$$a_2=c_1c_2+c_1c_3+\cdots+c_{n-1}c_n,$$

$$a_3 = -(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \cdots + c_{n-2}c_{n-1}c_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(c_1c_2 \ldots c_{n-1} + c_{1\ldots}c_{n-2}c_n + \cdots + c_2c_3 \ldots c_n),$$
$$a_n = (-1)^n c_1c_2 \ldots c_n.$$

Пример. Найти многочлен $f(x)$ минимальной степени со старшим коэффициентом 1, у которого 1, 2 –простые корни, а 3 – корень кратности 2. Заметим что таким многочленом является

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2.$$

По формулам Виета получаем

$$a_1 = -(1+2+3+3) = -9,$$
$$a_2 = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 = 29,$$
$$a_3 = -(1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 3) = -39,$$
$$a_4 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 18.$$

Следовательно $f(x) = x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18.$

Упражнения

1. Найти многочлен наименьшей степени, имеющий:

a) простые корни 1 и -1, двукратный корень 1+i;

b) простой корень –i, двукратный 2;

c) тройной корень 1, простые корни 2,3, 1+i;

d) двойной корень i, простой корень -1-i.

2. Определить a, b, c так, чтобы они были корнями многочлена $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

3. Сумма двух корней уравнения $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + \alpha$ равна 1. Найти α.

4. Определить α так, чтобы один из корней многочлена $f(x) = x^3 - 7x + \alpha$ равнялся удвоенному другому.

5. Найти сумму квадратов и произведение всех комплексных корней многочленов $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 1, g(x) = x^4 - x^2 - x - 1.$

6. Найти зависимость между p, q и r, при которой корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ образуют геометрическую прогрессию

2.7. Многочлены с действительными коэффициентами

<u>Свойство.</u> Пусть $f(x) \in \boldsymbol{R}[x]$. Если с ∈ С *– корень многочлена $f(x)$, то* $\bar{c}$ *так же является корнем этого многочлена и имеет ту же кратность.*

<u>Доказательство.</u> Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$. Так как $f(c) = 0$, то

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n = 0,$$

откуда

$$\overline{a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n} = \bar{0},$$

поэтому

$$\bar{a}_0\bar{c}^n + \bar{a}_1\bar{c}^{n-1} + \dots + \bar{a}_{n-1}\bar{c} + \bar{a}_n = 0.$$

Но $a_j \in \boldsymbol{R}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$**,** следовательно $\bar{a}_j = a_j$, поэтому

$$a_0\bar{c}^n + a_1\bar{c}^{n-1} + \dots + a_{n-1}\bar{c} + a_n = 0,$$

т.е. $f(\bar{c}) = 0$.

<u>Следствие</u>. Произвольный многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень.

<u>Пример.</u> Зная, что многочлен $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5$ имеет корень -2+i, найти его остальные корни.

<u>Решение.</u> Так как $f(x)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то наряду с корнем -2+i он имеет корень -2-i. Следовательно, многочлен делится на двучлены $x + 2 - i$ и $x + 2 + i$. Применяя схему Горнера деления многочлена на двучлен, получаем

$$f(x) = (x + 2 - i\,)\,(x + 2 + i\,)(x^2 - x + 1).$$

В результате получаем остальные корни многочлена : $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

<u>Пример</u>. Найти многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющий своими корня и числа 1, i, 2+3i.

<u>Решение.</u> Из свойства выше известно, что корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами попарно сопряжены. Следовательно, корнями искомого многочлена $f(x)$ должны быть также числа -i, 2-3i. С помощью формул Виета или собирая произведение соответствующих множителей, находим

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 17x - 13$$

<u>Пример</u>. Построить многочлен наименьшей степени с комплексными коэффициентами по данным корням: 1 — корень кратности 3; $1-2i, 4, 5$ — корни кратности 2; -7 — простой корень.

Решение. $f(x)=(x-1)^3(x-4)^2(x-5)^2(x-1+2i)^2(x+7)$.

Пример. Построить многочлен наименьшей степени с действительными коэффициентами по данным корням: 2 — корень кратности 2; $i, 1+i$ — простые корни.

Решение.

$$f(x)=(x-2)^2\left[(x-i)(x+i)\right]\left[(x-1-i)(x-1+i)\right]=(x-2)^2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+2\right).$$

Упражнения

1. Найти многочлен с действительными коэффициентами наименьшей степени, имеющий:

   a) простые корни 1 и -1, двукратный корень 1+*i*;

   b) простой корень –*i*, двукратный 2;

   c) тройной корень 1, простые корни 2,3, 1+*i*;

   d) двойной корень *i*, простой корень -1-*i*.

2. Отделить вещественные корни уравнений:

   а) $x^3-12x+5=0$;

   б) $x^3-27x+17=0$.

2.8. Уравнения третьей и четвертой степени

Кубические уравнения

Если квадратные уравнения умели решать еще математики Вавилонии и Древней Индии, то кубические, т.е. уравнения вида

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\text{, где } a\neq 0\text{,}$$

оказались "крепким орешком". В конце XV в. профессор математики в университетах Рима и Милана Лука Пачоли в своем знаменитом учебнике "Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности" задачу о нахождении общего метода для решения кубических уравнений ставил в один ряд с задачей о квадратуре круга. И все же усилиями итальянских алгебраистов такой метод вскоре был найден.

Если кубическое уравнение общего вида $ax^3+bx^2+cx+d=0$, где $a\neq 0$, разделить на a, то коэффициент при x^3 станет равен 1. Поэтому в дальнейшем будем исходить из уравнения

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$

Так же как в основе решения квадратного уравнения лежит формула квадрата суммы, решение кубического уравнения опирается на формулу куба суммы:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Чтобы не путаться в коэффициентах, заменим здесь a на x и перегруппируем слагаемые:

$$(x+b)^3=x^3+3bx^2+3xb^2+b^3.$$

Мы видим, что надлежащим выбором b, а именно взяв $b=P/3$, можно добиться того, что правая часть этой формулы будет отличаться от левой части уравнения только коэффициентом при x и свободным членом. Сложим уравнения и приведем подобные:

$$(x+b)^3+(Q-3b^2)x+R-b^3=0.$$

Если здесь сделать замену $y=x+b$, получим кубическое уравнение относительно y без члена с y^2: $y^3+py+q=0$.

Итак, мы показали, что в кубическом уравнении с помощью подходящей подстановки можно избавиться от члена, содержащего квадрат неизвестного. Поэтому теперь будем решать уравнение вида

$$x^3+px+q=0.$$

Формула Кардано

Давайте еще раз обратимся к формуле куба суммы, но запишем ее иначе:

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Сравните эту запись с уравнением и попробуйте установить связь между ними. Даже с подсказкой это непросто. Надо отдать должное математикам эпохи Возрождения, решившим кубическое уравнение, не владея буквенной символикой. Подставим в нашу формулу $x=a+b$:

$$x^3=a^3+b^3+3abx, \text{ или } x^3-3abx-(a^3+b^3)=0.$$

Теперь уже ясно: для того, чтобы найти корень уравнения, достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} a^3+b^3=-q, \\ 3ab=-p, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a^3+b^3=-q, \\ a^3b^3=-\left(\dfrac{p}{3}\right)^3, \end{cases}$$

и взять в качестве x сумму a и b. Заменой $u = a^3$, $v = b^3$ эта система приводится к совсем простому виду:

$$\begin{cases} u + v = -q, \\ uv = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3. \end{cases}$$

Дальше можно действовать по-разному, но все "дороги" приведут к одному и тому же квадратному уравнению. Например, согласно теореме Виета, сумма корней приведенного квадратного уравнения равна коэффициенту при x со знаком минус, а произведение – свободному члену. Отсюда следует, что u и v - корни уравнения

$$t^2 + qt - (p/3)^3 = 0.$$

Выпишем эти корни: $t_{1,2} = -\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{q}{3}\right)^3}$.

Переменные a и b равны кубическим корням из t_1 и t_2, а искомое решение кубического уравнения (13) – сумма этих корней:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Эта формула известная как *формула Кардано*.

Пример. Найти корни многочлена $x^3 + 3x^2 - 6x + 20$.

Решение. Разложим многочлен $x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ по степеням $x+1$. Полагая $x + 1 = y$, получим уравнение $y^3 - 9y + 28 = 0$. Его корни находятся по формуле $y = \alpha + \beta$, где $\alpha = \sqrt[3]{-14 + \sqrt{196 - 27}}$, $\beta = \sqrt[3]{-14 - \sqrt{196 - 27}}$ или $\alpha = \sqrt[3]{-1}$, $\beta = \sqrt[3]{-27}$. Значениями корня $\alpha = \sqrt[3]{-1}$ являются числа $\alpha_1 = -1,\quad \alpha_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Соответствующие им значения второго корня

$$\beta_1 = -\frac{-9}{3\alpha_1} = -3,\quad \beta_2 = -\frac{-9}{3\alpha_2} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i,\quad \beta_3 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

Отсюда $y_1 = \alpha_1 + \beta_1 = -4,\quad y_2 = \alpha_2 + \beta_2 = 2 - i\sqrt{3},\quad y_3 = \alpha_3 + \beta_3 = 2 + i\sqrt{3}$. Корни многочлена $x_1 = -5$, $x_2 = 1 - i\sqrt{3},\quad x = 1 + i\sqrt{3}$.

Тригонометрическое решение

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

подстановкой $x = y - a/3$ приводится к "неполному" виду $y^3 + py + q = 0$,

$$p = -\frac{a^2}{3} + b,\ q = 2\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{ab}{3} + c.$$

Корни y_1, y_2, y_3 "неполного" кубичного уравнения равны

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3}, \text{ где}$$

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \qquad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Пусть "неполное" кубичное уравнение действительно.

a) Если $Q < 0$ ("неприводимый" случай), то $p < 0$ и

$$y_1 = 2\sqrt{-p/3}\cos\frac{\alpha}{3},$$

$$y_{2,3} = -2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right), \text{ где } \cos\alpha = -\frac{q}{2\sqrt{-(p/3)^3}}.$$

b) Если $Q \ge 0$, $p > 0$, то

$$y_1 = -2\sqrt{p/3}\, ctg\, 2\alpha, \; y_{2,3} = \sqrt{p/3}\left(ctg\, 2\alpha \pm i\sqrt{3}\operatorname{cosec} 2\alpha\right), \text{ где}$$

$$tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}} \quad \left(|\alpha| \le \frac{\pi}{4}\right), \qquad tg\,\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \left(|\beta| \le \frac{\pi}{2}\right).$$

c) Если $Q \ge 0$, $p < 0$, то

$$y_1 = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cosec} 2\alpha, \; y_{2,3} = \sqrt{-\frac{p}{3}}\left(\operatorname{cosec} 2\alpha \pm i\sqrt{3}\, ctg\, 2\alpha\right), \text{ где}$$

$$tg\,\alpha = \sqrt[3]{tg\frac{\beta}{2}} \quad \left(|\alpha| \le \frac{\pi}{4}\right), \quad \sin\beta = \frac{2}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} \quad \left(|\beta| \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Во всех случаях берется действительное значение кубичного корня.

Уравнения четвертой степени

Метод решения уравнений четвертой степени нашел в XVI в. Лудовико Феррари, ученик Джероламо Кардано. Он так и называется – метод *Феррари*.

Как и при решении кубического и квадратного уравнений, в уравнении четвертой степени

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

можно избавиться от члена px^3 подстановкой $x = y - p/4$. Поэтому будем считать, что коэффициент при кубе неизвестного равен нулю:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Идея Феррари состояла в том, чтобы представить уравнение в виде $A^2 = B^2$, где левая часть – квадрат выражения $A = x^2 + s$, а правая часть – квадрат линейного уравнения B от x, коэффициенты которого зависят от s. После этого останется решить два квадратных уравнения: $A = B$ и $A = -B$. Конечно, такое представление возможно только при специальном выборе параметра s. Удобно взять s в виде $a/2 + t$, тогда уравнение перепишется так:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2=2tx^2-bx+\left(t^2+at-c+\frac{a^2}{4}\right).$$

Правая часть этого уравнения – квадратный трехчлен от x. Полным квадратом он будет тогда, когда его дискриминант равен нулю, т.е.

$$D=b^2-4\cdot 2t\cdot\left(t^2+at-c+\frac{a^2}{4}\right)=0\text{, или } b^2=2t\left(4t^2+4at+a^2-4c\right).$$

Это уравнение называется *резольвентным* (т.е. "разрешающим"). Относительно t оно кубическое, и формула Кардано позволяет найти какой-нибудь его корень t_0. При $t=t_0$ правая часть уравнения принимает вид

$$2t_0\left(x-\frac{b}{4t_0}\right)^2,$$

а само уравнение сводится к двум квадратным:

$$x^2+\frac{a}{2}+t_0=\pm\sqrt{2t_0}\left(x-\frac{b}{4t_0}\right).$$

Их корни и дают все решения исходного уравнения.

<u>Пример.</u> Решим уравнение $x^4-10x^2-8x+5=0$.

Здесь удобнее будет воспользоваться не готовыми формулами, а самой идеей решения. Перепишем уравнение в виде

$$x^4=10x^2+8x-5$$

и добавим к обеим частям выражение $2sx^2+s^2$, чтобы в левой части образовался полный квадрат:

$$\left(x^2+s\right)^2=(10+2s)\cdot x^2+8x+s^2-5.$$

Теперь приравняем к нулю дискриминант правой части уравнения:

$$16-(10+2s)\cdot\left(s^2-5\right)=0,$$

или, после упрощения,

$$s^3+5s^2-5s-33=0.$$

Один из корней полученного уравнения можно угадать, перебрав делители свободного члена: $s_0=-3$. После подстановки этого значения получим уравнение

$$\left(x^2-3\right)^2=4x^2+8x+4=4\cdot(x+1)^2,$$

откуда $x^2-3=\pm 2\cdot(x+1)$. Корни образовавшихся квадратных уравнений - $x_{1,2}=1\pm\sqrt{6}$ и $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$. Разумеется, в общем случае могут получиться и комплексные корни.

<u>Пример.</u> Найти корни многочлена $x^4-4x^3+7x^2-2x-5$.

<u>Решение.</u> Составим уравнение

$x^4-4x^3+7x^2-2x-5=0$

Представим левую часть в виде

$$\left(x^2-2x+\frac{\lambda}{2}\right)^2-\left[(\lambda-3)x^2+(2-2\lambda)x+\left(\frac{\lambda^2}{4}+5\right)\right]$$

Подберем λ так, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в квадратных скобках был равен нулю:

$$(2-2\lambda)^2-4(\lambda-3)\left(\frac{\lambda^2}{4}+5\right)=0$$

или

$$-\lambda^3+7\lambda^2-28\lambda+64=0.$$

Можно заметить, что 4 — один из корней этого уравнения. Тогда подставим $\lambda=4$ в (8) и уравнение (7) примет вид:

$$\left(x^2-2x+2\right)^2-(x-3)^2=0$$

или

$$\left(x^2-3x+5\right)\left(x^2-x-1\right)=0.$$

Отсюда, решая уравнения $x^2-3x+5=0$ и $x^2-x-1=0$, получим корни нашего многочлена

$$x_1\frac{3-i\sqrt{11}}{2};\quad x_2=\frac{3+i\sqrt{11}}{2};\quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2};\quad x_4=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Решение Декарта-Эйлера

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

подстановкой $x=y-a/4$ приводится к "неполному" виду

$$y^4+py^2+qy+r=0.$$

Корни y_1, y_2, y_3, y_4 "неполного" уравнения четвертой степени равны одному из выражений

$$\pm\sqrt{z_1}\pm\sqrt{z_2}\pm\sqrt{z_3},$$

в которых сочетания знаков выбираются так, чтобы удовлетворялось условие

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3}=-\frac{q}{8},$$

причем z_1, z_2 и z_3 - корни кубичного уравнения

$$z^3+\frac{p}{2}z^2+\frac{p^2-4r}{16}z-\frac{q^2}{64}=0.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Если у многочлена с целыми коэффициентами рациональных корней не оказалось, можно попробовать разложить его на множители меньшей степени с целыми коэффициентами.

<u>Пример</u>. Решить уравнение $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$.

Представим левую часть в виде произведения двух квадратных трехчленов с неизвестными (неопределенными) коэффициентами:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)\cdot(x^2 + px + q).$$

Раскроем скобки в правой части и приведем подобные:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = x^4 + (a + p)\cdot x^3 + (b + ap + q)\cdot x^2 + (aq + bp)\cdot x + bq$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + p = 0, \\ b + ap + q = -2, \\ aq + bp = -8, \\ bq = -3. \end{cases}$$

Попытка решить эту систему в общем виде вернула бы нас назад, к решению исходного уравнения. Но целые корни, если они существуют, нетрудно найти и подбором. Не ограничивая общности, можно считать, что $b \geq q$, тогда последнее уравнение показывает, что надо рассмотреть лишь два варианта: $b = 3$, $q = -1$ и $b = 1$ $q = -3$. Подставляя эти пары значений в остальные уравнения, убеждаемся, что первая из них дает искомое разложение:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + 2x + 3)\cdot(x^2 - 2x - 1).$$

Этот способ решения называется*методом неопределенных коэффициентов*.

Упражнения

1. Решить уравнения:

   a) $x^3+6x^2-12x+32=0$
   b) $x^3+9x^2-18x+44=0$
   c) $x^3-3x^2-6x+36=0$
   d) $x^3-12x^2+24x-40=0$
   e) $x^3-6ix+4(1-i)=0$
   f) $x^3+(3-3i\sqrt{3})x-9=0$

2. Решить уравнения:

   a) $x^4+3x^3+4x^2+x-3=0$

b) $x^4+3x^3+2x^2+x-1=0$

c) $x^4+x^3-4x^2-x+1=0$

d) $x^4-6x^3+15x^2-18x+10=0$

2.9. Границы для комплексных и вещественных корней многочленов

<u>Теорема</u>. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \boldsymbol{C}[x]$,

$a_0 \neq 0, A = \max\limits_{j=1,2,\dots,n} |a_j|$ *и* $f(\alpha) = 0, \alpha \in \boldsymbol{C}$, *тогда*

$$|\alpha| < \frac{A}{|a_0|} + 1.$$

Доказательсвто. Покажем, что если

$$|\alpha| \geq \frac{A}{|a_0|} + 1,$$

то α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Действительно,

$$f(\alpha) \geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - |a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n|$$
$$\geq |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot |\alpha^{n-1} + \cdots + 1|$$
$$= |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \frac{|\alpha|^n - 1}{|\alpha| - 1} > |a_0| \cdot |\alpha|^n - A \cdot \frac{|\alpha|^n}{A} \cdot |a_0| = 0$$

Итак, $f(\alpha) > 0$, т.е. α не является корнем. ■

<u>Теорема</u>. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \boldsymbol{R}[x]$, $a_0 > 0$, k- *минимальное, такое, что* $a_k < 0$, $B = \max\limits_{a_j<0} |a_j|$.

Тогда для любого положительного вещественного корня α *справедливо неравенство*

$$\alpha \leq \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1.$$

Доказательство. Пусть $\alpha > \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}} + 1$, откуда $(x-1)^k > \frac{B}{a_0}$.

Покажем тогда, что α не может быть корнем многочлена $f(x)$. Имеем

$$f(\alpha) \geq a_0\alpha^n - B(\alpha^{n-k} + \alpha^{n-k-1} + \dots + \alpha + 1)$$
$$= a_0\alpha^n - B \cdot \frac{\alpha^{n-k+1} - 1}{\alpha - 1} > a_0\alpha^n - B \cdot \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1}$$
$$= \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1}(a_0\alpha^{k-1}(\alpha - 1) - B) > \frac{\alpha^{n-k+1}}{\alpha - 1}(a_0(\alpha - 1)^k - B)$$
$$> 0.$$

Итак, $f(\alpha) > 0$, т.е. α не является корнем. ■

<u>*Замечание 1*</u>*. Если $a_j \geq 0$ ($j = 0,1,2,\dots,n$), то положительных корней у многочлена нет.*

<u>*Замечание 2*</u>*.Для нахождения нижней оценки отрицательных корней многочлена $f(x)$ достаточно применить теорему к многочлену*

$$f(-x) = a_0(-1)^n x^n + a_1(-1)^{n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_{n.}$$

Для нахождения нижней оценки положительных корней достаточно применить теорему к многочлену

$$x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Для нахождения верхней оценки отрицательных корней достаточно применить теорему к многочлену

$$x^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_0 - a_1 x + \dots + a_{n-1}(-1)^{n-1}x^{n-1} + a_n(-1)^n x^n.$$

<u>**Пример.**</u> Найти границы действительных корней многочлена

$$f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 - 5x - 3.$$

<u>Решение.</u> Найти границы действительных корней многочлена – значит найти такие числа M_1 и M_2, что для любого действительного корня αмногочлена $f(x)$ выполняется условие

$$M_1 < \alpha < M_2.$$

M_1 называется нижней границей (НГ), а M_2 верхней границей (ВГ) действительных корней многочлена $f(x)$.

<u>*Первый способ.*</u>

$$\text{ВГ} = 1 + \frac{A}{|a_0|},\ \text{НГ} = -\left(1 + \frac{A}{|a_0|}\right),$$

где А- наибольшая из абсолютных величин коэффициентов, а a_0 – старший коэффициент многочлена $f(x)$. В результате для данного многочлена получаем А=10, $a_0 = 1$.

ВГ=11, НГ=-11,

т.е. действительные корни заключены на интервале (-11;11).

<u>*Второй способ*</u>.

$ВГ = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, где k – индекс первого отрицательного коэффициента многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, В – наибольшая из абсолютных величин его отрицательных коэффициентов (при условии, что $a_0 > 0$).

В задании k=4, B=5, $a_0 = 1$. Значит $ВГ = 1 + \sqrt[4]{\frac{5}{1}} < 3$.

Для нахождения НГ этим способом достаточно в $f(x)$ вместо x подставить *(-x)* и воспользоваться следующим правилом: нижняя граница действительных корней многочлена $f(x)$ равна верхней границе действительных корне многочлена $f(-x)$, взятой с противоположным знаком.

$$f(-x) = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 5x - 3.$$

Так как здесь $a_0 < 0$, то умножим $f(-x)$ на (-1). Очевидно, что от этого корни многочлена $f(-x)$ не изменяться и, следовательно, не изменятся границы корней.

$$-f(-x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 5x + 3.$$

В результате получаем: k=1, B=5, $a_0 = 1$. Значит $ВГ = 1 + \sqrt[1]{\frac{5}{1}} = 6$.

А потому для данного многочлена $f(x)$ НГ=-6. Корни многочлена $f(x)$ заключены в интервале (-6;3).

Сравнивая рассмотренные способы, можно сказать, что второй способ несколько сложнее первого. Однако он зачастую позволяет значительно сузить границы корней, найденные первым способом. На практике же важно иметь более узкие границы корней.

<u>Пример</u>. Найти границы действительных корней многочлена $f(x)$, если:

a) $f(x) = 2x^6 - x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4$;

b) $f(x) = 2x^6 - 8x^3 + 15x^2 + 16x - 7$.

Решение.

а) Применим формулу

$$ВГ = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}},$$

Подставляя значения k=1, B=5, $a_0 = 2$, получим: ВГ=1+2,5=3,5. Для нахождения НГ делаем подстановку —x вместо x:

$$f(-x) = 2x^6 + x^5 + 7x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4.$$

Замечаем, что все коэффициенты многочлена положительны. В этом случае формула не применима, ибо не существует индекса первого отрицательного коэффициента. Однако в этом случае в применении какой-либо формулы нет никакой необходимости, ибо ясно, что многочлен, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней и, следовательно, ВГ=0. Отсюда следует, что для многочлена $f(x)$ НГ=0. Итак, действительные корни многочлена $f(x)$заключены в промежутке (0; 3,5).

b) Применяя формулу $\text{ВГ} = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, получим:

$$\text{ВГ} = 1 + \sqrt[3]{\frac{8}{2}} < 3.$$

Далее, $f(x) = 2x^6 + 8x^3 + 15x^2 - 16x - 7$. Здесь снова, как и в случае а), можно обойтись без формулы. Глядя на коэффициенты многочлена, легко заметить, что $f(x) > 0$ при $x \geq 1$. Следовательно, ВГ = 1 для $f(-x)$и действительные корни многочлена $f(x)$ находятся в интервале (-1;3).

Упражнения

Найти границы действительных корней многочлена двумя способами

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3;$

b) $f(x) = x^5 + 7x^3 - 3;$

c) $f(x) = 5x^4 - 10x^3 - 8x^2 + 21x + 20;$

d) $f(x) = 3x^6 + 5x^3 - 7x^2 - 15x + 20;$

e) $f(x) = x^7 - 1084x^5 - 445x^3 + 900x^2 801;$

f) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 10x - 14;$

g) $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - 7x + 12;$

h) $f(x) = x^8 + 12x^3 - x + 3;$

2.10. Результант и дискриминант многочленов

Алгоритм Евклида позволяет найти наибольший общий делитель любых двух *конкретных* многочленов и, в частности, выяснить, являются ли они взаимно простыми. Однако он не дает в явном виде условия, которому должны удовлетворять коэффициенты двух многочленов для того, чтобы эти многочлены были (или, наоборот, не были) взаимно просты.

Пусть $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ - два многочлена с коэффициентами из поля R, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, так что $\deg f = n$, $\deg g = m$.

Из следствия к теореме следует, что многочлены f и g не являются взаимно простыми тогда и только тогда их наименьшее общее кратное имеет степень, меньшую, чем их произведение. Наименьшее общее кратное h многочленов f и g представляется в виде $h = fu$ и одновременно в виде $h = gv$, где u и v - некоторые многочлены. Имеем: $\deg h = \deg f + \deg u = \deg g + \deg v$. Так как $\deg fg = \deg f + \deg g$, то из условия $\deg h < \deg fg$, следует, что $\deg u < \deg g = m$, $\deg v < \deg f = n$. Таким образом, *если многочлены f и g не взаимно просты, то существуют такие многочлены u и v, что*

$$fu = gv,\ \deg u < m,\ \deg v < n.$$

Обратно, если существуют многочлены u и v, удовлетворяющие условиям , то многочлен $fu = gv$, являющийся общим кратным многочленов f и g, имеет степень, меньшую, чем степень произведения fg. Степень наименьшего общего кратного в этом случае тем более меньше степени fg, и, значит, многочлены f и g не являются взаимно простыми.

Итак, вопрос о взаимной простоте многочленов f и g сводится к вопросу о существовании многочленов u и v, удовлетворяющих условиям. Выясним, когда такие многочлены существуют. Запишем их в общем виде: $u = u_1x^{m-1} + u_2x^{m-2} + \ldots + u_m$, $v = v_1x^{n-1} + v_2x^{n-2} + \ldots + v_n$. Предположим для определенности, что $m \leq n$. Каждое из произведений fu, gv представляет собой многочлен степени не выше $n + m - 1$. Коэффициенты многочлена fu, записанные в столбец, имеют вид

$$
\begin{array}{llll}
a_0u_1, & & & \\
a_1u_1 & +a_0u_2, & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{m-1}u_1 & +a_{m-2}u_2+\ldots & +a_1u_{m-1} & +a_0u_m, \\
a_mu_1 & +a_{m-1}u_2+\ldots & +a_2u_{m-1} & +a_1u_m, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_nu_1 & +a_{n-1}u_2+\ldots & +a_{n-m+2}u_{m-1} & +a_{n-m+1}u_m, \\
 & a_nu_2+\ldots & +a_{n-m+3}u_{m-1} & +a_{n-m+2}u_m, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & a_nu_{m-1} & +a_{n-1}u_m, \\
 & & & a_nu_m.
\end{array}
$$

Коэффициенты многочлена gv имеют вид

$$
\begin{array}{lllll}
b_0v_1, & & & & \\
b_1v_1 & +b_0v_2, & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
b_mv_1 & +b_{m-1}v_2+\ldots & & +b_0v_{m+1}, & \\
 & b_mv_2+\ldots & & & +b_0v_{m+2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & b_mv_{n-m}+\ldots & & +b_0v_n, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & & b_mv_{n-1} & +b_{m+1}v_n, \\
 & & & & b_mv_n.
\end{array}
$$

Приравнивая коэффициенты многочленов fu и gv при одинаковых степенях x, получаем систему однородных линейных уравнений относительно неизвестных $u_1, u_2, \ldots, u_m, v_1, v_2, \ldots, v_n$. Число уравнений этой системы равно $n+m$, т.е. числу неизвестных. Если перенести все члены с $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в левую часть, то получится следующая матрица коэффициентов при неизвестных:

$$
\begin{pmatrix}
a_0 & & \ldots & & b_0 & & & & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\
a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_0 & -b_{m-1} & -b_{m-2} & \ldots & -b_0 & & & \\
a_m & a_{m-1} & \ldots & a_1 & -b_m & -b_{m-1} & \ldots & -b_1 & -b_0 & & \\
a_{m+1} & a_m & \ldots & a_2 & & -b_m & \ldots & -b_2 & -b_1 & -b_0 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
a_n & a_{n-1} & \ldots & a_{n-m+1} & & & & -b_m & \ldots & \ldots & -b_0 \\
 & a_n & \ldots & a_{n-m+2} & & & & & -b_m & \ldots & -b_1 \\
 & & a_n & a_{n-1} & & & & & & -b_m & -b_{m-1} \\
 & & & a_n & & & & & & & -b_m
\end{pmatrix}
$$

Рассматриваемая система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель этой матрицы равен нулю. При его вычислении можно для удобства умножить на -1 последние n столбцов и транспонировать матрицу. Полученный определитель

$$
R(f,g)=\left|\begin{array}{cccccc}
a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\
 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\
b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\
 & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\}\ m\ \text{строк}\\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}b\\b\\b\\b\end{array}}\right\}\ n\ \text{строк}
\end{array}
$$

называется результантом многочленов f и g.

Итак, доказана следующая теорема.

<u>Теорема</u>. *Многочлены $f,g\in R[x]$ не являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда их результант $R(f,g)$ равен нулю.*

<u>Замечание</u>. Если не предполагать, что коэффициенты a_0, b_0 отличны от нуля, то обращение в нуль определителя (26) остается *необходимым* условием того, чтобы многочлены f и g не были взаимно просты. В самом деле, если f и g не взаимно просты, то существуют такие ненулевые многочлены u и v, что $fu=gv$, $\deg u<\deg g$, $\deg v<\deg f$.

Поскольку мы не предполагаем, что $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$, нельзя утверждать, что $\deg f=n$ и $\deg g=m$, но, во всяком случае, $\deg f\leq n$, $\deg g\leq m$. Поэтому многочлены u и v тем более удовлетворяют условиям, а из существования таких многочленов так же, как и выше, следует, что определитель равен нулю.

<u>Пример</u>. Вычислим результант многочленов $f = 2x^4 - 5x^2 - x - 1$, $g = x^3 - 3x^2 + 1$ (с действительными коэффициентами) и выясним, являются ли они взаимно простыми.

Искомый результант имеет вид

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычисляя этот определитель, находим, что $R(f,g) = 543 \neq 0$; следовательно, многочлены f и g взаимно просты.

<u>Пример</u>. Вычислить, при каких значениях λ многочлены $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + \lambda x - 1$ и $g(x) = x^2 + \lambda$ имеют общие корни.

Решение.

Вычисляем результант:

$$R\big(f(x), g(x)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - 1\right)^2.$$

$f(x)$ и $g(x)$ имеют общие корни лишь в случае, когда $R\big(f(x), g(x)\big) = 0$, то есть при $\lambda = \pm 1$. При $\lambda = 1$ общими корнями являются i и $-i$, а при $\lambda = -1$: 1 и -1.

Дискриминантом многочлена $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, a_0 \neq 0$, имеющего корнями числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, называется произведение

$$D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{1 \le j < i \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Дискриминант тогда и только тогда равен нулю, когда среди корней многочлена имеются равные, то есть когда многочлен имеет хотя бы один кратный корень. Дискриминант связан с результантом многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x)$ равенством

$$R\big(f, f'\big) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_0 \cdot D(f),$$

позволяющей выразить дискриминант через его коэффициенты.

<u>Пример</u>.

Найти дискриминант многочлена $f(x) = x^3 - 3x + 7$.

Решение.

$f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$(-1)^3 \cdot 1 \cdot D(f) = R(f, f') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 1215.$$

$D(f) = -1215$, $f(x)$ кратных корней не имеет.

Упражнения

При каком значении a многочлены имеют общий корень:

1. $x^3 + ax + 3$ и $x^2 + ax + 3$.
2. $x^3 + x^2 + ax - 4$ и $x^2 + x - a$.
3. $x^3 + (2a-1)x + 4$ и $x^2 - ax - 3$.
4. $2x^3 + ax + 1$ и $x^2 + ax + 2$.
5. $x^3 + ax^2 + 8$ и $x^2 + ax + 8$.
6. $x^2 + ax + 1$ и $x^2 - ax + 1$.
7. $x^2 + ax + 1$ и $x^2 + x + a$.
8. $x^3 + ax^2 - 9$ и $x^2 + ax - 3$.
9. $x^3 + ax - 1$ и $x^2 + (a+1)x - 2$.
10. $x^4 + ax^2 + 1$ и $x^3 + ax + 1$.
11. $a^2(x+1) + 2$ и $ax^2 + x - a - 1$.
12. $ax^2 - 2ax - 1$ и $a^2x + a$.
13. $x^2 - 3x + a^2 - a$ и $-x^2 + (7-6a)x + a^2 + 11a - 12$.
14. $4x^2 + (13-7a)x + a^2 - 2a - 3$ и $9x^2 + (28-14a)x + a^2 - 4a - 5$.

2.11. Распределение корней многочлена на действительной оси

Системой Штурма многочлена $f(x)$ называется конечная последовательность многочленов $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_s(x)$ такая, что

1. многочлены $f_j(x)$, $f_{j+1}(x)$ не имеют общих вещественных корней ($j = 0,1,...,s-1$);
2. если $f_0(\alpha) = 0$, то функция $f_0(x)f_1(x)$ возрастает в окрестности α, меняя знак с − на +;
3. если $f_j(\alpha) = 0$, то $f_{j-1}(\alpha)f_{j+1}(\alpha) < 0$ ($j = 1,2,...,s-1$);
4. $f_s(x)$ не имеет вещественных корней.

Пусть $f_0(x)=f(x)$, $f_1(x)=f'(x)$ и $f_j(x)$ — взятый с противоположным знаком остаток при делении $f_{j-2}(x)$ на $f_{j-1}(x)$ ($j = 2,3,...,s$). Вычисления заканчиваются, когда при делении $f_{s-1}(x)$ на $f_s(x)$ в остатке не будет получен нулевой многочлен (так как степени многочленов $f_j(x)$ убывают, то процесс завершится). Итак,

$$f(x) = q_1(x)\, f'(x) - f_2(x), \qquad (\delta_1)$$
$$f'(x) = q_2(x) f_2(x) - f_3(x), \qquad (\delta_2)$$

$$f_{j-1}(x) = q_j(x) f_j(x) - f_{j+1}(x), \qquad (\delta_j)$$

$$fs-2(x) = qs-1(x)fs-1(x) - fs(x), \qquad (\delta s-1)$$
$$f_{s-1}(x) = q_s(x) f_s(x). \qquad (\delta_s)$$

Таким образом, многочлены $f_j(x)$ лишь множителями отличаются от многочленов, получаемых в алгоритме Евклида, следовательно, $f_s(x)$ есть НОД $f(x)$ и $f^0(x)$ и, в частности, по теореме $f_s(x)$ — константа тогда и только тогда, когда $f(x)$ не имеет кратных корней.

Теорема. *Для произвольного многочлена* $f(x) \in \mathbf{R}[x]$, *не имеющего кратных корней, система Штурма существует. В частности, системой Штурма многочлена* $f(x)$ *является последовательность* $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = f'(x)$, $f_2(x),..., f_s(x)$, *построенная согласно* (δ_0)–(δ_s).

Доказательство. Для системы, построенной согласно (δ_1) – (δ_s), докажем выполнение свойств 1) –4) в определении системы Штурма.

1. Если $f_j(\alpha) = f_{j+1}(\alpha) = 0$, то согласно (γ_j) $f_{j-1}(\alpha) = 0$. Из рассмотрения (γ_{j-1}) получаем $f_{j-2}(\alpha) = 0$ и т.д. Из рассмотрения (γ_2) и (γ_1) получаем $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$, что не возможно, так как $f(x)$ не имеет кратных корней.
2. Если $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) > 0$, то $f(x)$ возрастает в окрестности α, следовательно, $f(x)\, f'(x)$ возрастает. Если $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) < 0$, то $f(x)$ убывает в окрестности α, и следовательно, $f(x)\, f'(x)$ возрастает.
3. Пусть $f_j(\alpha) = 0$. Подставляя α в левую и правую части равенства (δ_j), получаем $f_{j-1}(\alpha) = -f_{j+1}(\alpha)$, поэтому $f_{j-1}(\alpha) = -f_{j+1}(\alpha) <0$.
4. Как уже отмечалось, $f_s(x)$ есть НОД многочленов $f(x)$ и $f_0(x)$. Так как $f(x)$ не имеет кратных корней, то по теореме 3.63 $f_s(x)$ — ненулевая константа, следовательно, $f_s(x)$ корней не имеет. ■

Замечание. При построении системы Штурма по формулам (δ_0) –(δ_s) многочлены $f_j(x)$ ($j = 0,1,...,s$) можно умножать на произвольные положительные константы. Легко видеть, что доказательство теоремы распространяется и на такую систему.

Если в конечной последовательности вещественных чисел $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ имеется k переходов от одного знака к другому (нулевые числа пропускаем), то говорят, что последовательность содержит *k перемен знака*.

<u>Теорема</u> (Штурма)**.** *Пусть многочлен $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ не содержит кратных корней и $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, где $a < b$, $a,b \in \mathbf{R}$. Тогда число действительных корней многочлена $f(x)$, принадлежащих отрезку $[a,b]$, равно $W(a) - W(b)$, где через $W(\alpha)$ обозначено число перемен знака в последовательности значений многочленов системы Штурма $f_0(\alpha)$, $f_1(\alpha),\ldots, f_s(\alpha)$.*

Доказательство. Пусть x движется от a к b. Проследим, как при этом меняется $W(x)$. Очевидно, $W(x)$ не меняется, когда x проходит через интервал, на котором нет корней ни одного из многочленов системы Штурма. Покажем, во-первых, что $W(x)$ уменьшается на 1, т.е. теряется одна перемена знака, если x проходит через корень многочлена $f(x)$. Во-вторых, покажем, что $W(x)$ не меняется, когда x проходит через корень одного из многочленов $f_j(x)$ ($j = 1,2,\ldots,s$). Это докажет, что число корней на отрезке $[a,b]$ равно $W(a) - W(b)$.

Пусть x проходит через корень α многочлена $f(x)$. Согласно свойству 2) в определении системы Штурма $f(x)f_1(x)$ в окрестности α возрастает и, следовательно, при прохождении x через α меняет знак с $-$ на $+$. Это означает, что если в окрестности α многочлен $f(x)$ возрастает, то $f_1(x) > 0$:

	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f(x)$	$-$	$+$
$f_1(x)$	$+$	$+$
$f_2(x)$	$*$	$*$
…	…	…
$f_s(x)$	$*$	$*$

Таким образом, в приведенной таблице число перемен знака в столбце, соответствующем $x < \alpha$, на 1 больше, чем в столбце, соответствующем $x > \alpha$, т.е. теряется одна перемена знака. Если же в окрестности α многочлен $f(x)$ убывает, то $f_1(x) < 0$:

	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f(x)$	$+$	$-$
$f_1(x)$	$-$	$-$
$f_2(x)$	$*$	$*$
…	…	…
$f_s(x)$	$*$	$*$

Аналогично приходим к выводу, что теряется одна перемена знака.

Пусть теперь x проходит через корень α одного из многочленов f_j (x) (j = 1,2,...,s). Согласно свойству 3) в определении системы Штурма $f_{j-1}(x)f_{j+1}(x) < 0$. Это возможно в следующих 4 случаях (два из них соответствуют возрастающей в окрестности α функции $f_j(x)$, а два — убывающей):

В каждом случае число перемен знака в столбце, соответствующем $x < \alpha$, совпадает с числом перемен знака в столбце, соответствующем $x > \alpha$. Итак, если x проходит через корень многочлена $f_j(x)$ (j = 1,2,...,s), то $W(x)$ не изменяется. ■

Локализовать вещественные корни многочлена $f(x)$ — значит найти интервалы на вещественной оси, на каждом из которых содержится ровно один корень и других вещественных корней нет. После того, как корни локализованы, для их уточнения используют различные численные методы (деления пополам, секущих, касательных Ньютона и др.).

Пример. С помощью теоремы Штурма локализуем вещественные корни многочлена $f(x) = x^5 - 4x - 2$. Получаем следующую верхнюю оценку на положительные корни: $\alpha < 2$. Применяя тот же способ к многочлену $-f(-x) = x^5 - 4x + 2$, получаем нижнюю оценку на величину отрицательных корней: $\alpha > -2$. Итак, все вещественные корни многочлена $f(x)$ лежат на интервале $(-2, 2)$.

Построим систему Штурма.

$$f_0(x) = f(x), f_1(x) = f'(x) = 5x^4 - 4.$$

При делении $f_0(x)$ на $f_1(x)$ получаем в остатке $r_2(x) = -(16/5)x - 2$. Меняем знак у $r_2(x)$ и домножаем на 5/2, получаем $f_2(x) = 8x + 5$.

	I.		I I.		III.		IV.	
	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$	$x < \alpha$	$x > \alpha$
$f_{j-1}(x)$	−	−	+	+	−	−	+	+
$f_j(x)$	−	+	−	+	+	−	+	−
$f_{j+1}(x)$	+	+	−	−	+	+	−	−

При делении $f_1(x)$ на $f_2(x)$ получаем в остатке $r_3(x) = -13259/4096$, поэтому $f_3(x) = 1$.

Полученный многочлен $f_3(x)$ является наибольшим общим делителем $f(x)$ и $f'(x)$. Таким образом, $f(x)$ и $f'(x)$ взаимно просты, поэтому $f(x)$ кратных корней не имеет.

Вычислим значения многочленов системы Штурма на концах интервала $(-2, 2)$. Число перемен знаков составит $W(-2) = 3$, $W(2) = 0$ (см.

таблицу ниже). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет $W(-2) - W(2) = 3$ вещественных корня. Вычислим значения многочленов системы Штурма в середине интервала $(-2, 2)$. Число перемен знака в точке 0 составит $W(0) = 1$. Следовательно, имеется $W(0) - W(2) = 1$ положительный корень и $W(-2) - W(0) = 2$ отрицательных корня. Для локализации отрицательных корней вычислим значения многочленов системы Штурма в точке -1. Приходим к выводу, что корни локализованы на интервалах $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, 2)$.

Знаки значений многочленов системы Штурма в рассматриваемых точках сведены в таблицу.

	-2	-1	0	2
$f_0(x) = f(x) = x^5 - 4x - 2$	$-$	+	$-$	+
$f_1(x) = f'(x) = 5x^4 - 4$	+	+	$-$	+
$f_2(x) = 8x + 5$	$-$	$-$	+	+
$f_3(x) = 1$	+	+	+	+
$W(x)$	3	2	1	0

Теорема была сформулирована и доказана для случая многочлена $f(x)$ без кратных корней. Если $f(x)$ имеет кратные корни, то НОД многочленов $f(x)$ и $f'(x)$ имеет положительную степень, поэтому $f_s(x)$ в системе, построенной согласно (γ_1)–(γ_s), может не удовлетворять свойству 4) в определении системы Штурма. Тем не менее, справедлив результат, обобщающий теорему. на случай многочлена с корнями произвольной кратности.

Теорема. *Пусть $f(x)$ — многочлен из $\mathbf{R}[x]$, такой, что $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$, где $a < b$, $a, b \in \mathbf{R}$. Пусть также $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — система, построенная согласно (γ_1)–(γ_s). Тогда число действительных корней (без учета их кратности) многочлена $f(x)$, принадлежащих отрезку $[a, b]$, равно $W(a) - W(b)$, где через $W(\alpha)$ обозначено число перемен знака в последовательности $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$.*

Доказательство. Многочлен $f_s(x)$ является наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $f_s(x)$. Из (γ_1)–(γ_s) получаем, что каждый из многочленов $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_s(x)$ делится на $f_s(x)$. Пусть $g_j(x) = f_j(x)/f_s(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, s)$. Легко видеть, что система $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_s(x)$ является системой Штурма для многочлена $g(x) = f(x)/f_s(x)$, все корни которого по следствию совпадают с корнями многочлена $f(x)$, но имеют кратность 1. Поэтому число корней (без учета кратности) многочлена $f(x)$ совпадает с разностью в числе перемен знака в последовательностях значений $g_0(a), g_1(a), \ldots, g_s(a)$ и $g_0(b), g_1(b), \ldots, g_s(b)$. Но при заданном α последовательность $f_0(\alpha), f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$ получается из последовательности $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \ldots, g_s(\alpha)$ умножением на константу $f_s(\alpha)$. Так как $f_s(a) \neq 0$, $f_s(b) \neq 0$ (иначе было бы $f_s(b) = 0$ или $f_s(b) = 0$), то число перемен знака в этих последовательностях одно и то же. ■

Правило знаков Декарта. *Число положительных корней ненулевого многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbf{R}[x]$ с учетом их кратностей равно или на четное число меньше числа перемен знака в последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$. В частности, если число перемен знака равно 0 или 1, то $f(x)$ соответственно либо не имеет положительных корней, либо имеет ровно один положительный корень.*

2.12. Алгебраическое расширение полей. Освобождение от иррациональности в знаменателе

Пусть $f(x) \in F[x]$ — неприводимый над полем F многочлен и α — некоторый его корень, не принадлежащий F. Минимальное по включению поле, включающее F и содержащее α назовем алгебраическим расширением поля F и обозначим $F(\alpha)$. Будем также говорить, что $F(\alpha)$ получено в результате присоединения к F элемента α.

Пусть в F[x] нашелся многочлен $f(x)$, для которого $f(\alpha) = 0$. Мы можем считать, что $f(x)$ неприводим над F, так как в противном случае $f(x)$ можно заменить на тот неприводимый множитель в его разложении, для которого α является корнем.

Теорема. Все элементы поля $F(\alpha)$, где α — иррациональный корень неприводимого над F многочлена f(x) степени n, имеют вид

$$\beta = \gamma_0 + \gamma_1\alpha + \gamma_2\alpha^2 + \ldots + \gamma_{n-1}\alpha^{n-1}$$

для произвольных $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in F$. По любому $\beta \in F(\alpha)$ величины $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ определяются единственным образом.

Иными словами, для любого $\beta \in F(\alpha)$ найдется единственный $g(x) \in F[x]$, либо равный 0, либо степени меньшей n, такой, что $\beta = g(\alpha)$. Для любого $g(x) \in F[x]$ величина $f(\alpha)$ принадлежит $F(\alpha)$.

Доказательство. Так как $F \subseteq F(\alpha)$ и $\alpha \in F(\alpha)$, то в силу замкнутости поля $F(\alpha)$ относительно операций сложения, вычитания и умножения каждое число такого вида принадлежит $F(\alpha)$.

Прежде чем показывать, что других чисел в $F(\alpha)$ нет, докажем что многочлен $g(x)$, такой, что $\beta = g(\alpha)$ и $\deg g(x) < n$ или $g(x) = 0$, по величине $\beta \in F(\alpha)$ определяется единственным образом. Пусть $g(\alpha) = g_e(\alpha)$, где $g_e(x) \in$ F[x] и deg $g_e(x) <$ n или $g_e(x) = 0$. Тогда α является корнем многочлена $h(x) = g(x) - g_e(x)$. Так как α является также корнем многочлена *f(x)*, то *f(x) и h(x)* имеют нетривиальный делитель в **C**[x] и в F[x]. Но $\deg h(x) < \deg f(x)$ или $h(x) = 0$.

Первое невозможно, так как *f(x)* неприводим над F, следовательно, $h(x) = 0$, т.е. $g(x) = g_e(x)$.

Покажем, что других элементов, кроме таких чисел в F(α) нет. Для этого проверим замкнутость множества всех таких чисел относительно операций сложения, вычитания и умножения и замкнутость множества ненулевых чисел такого вида относительно деления. Замкнутость относительно сложения и вычитания очевидна. Для доказательства замкнутости относительно умножения рассмотрим произведение $g(\alpha)\, g_e(\alpha)$

Разделив $h(x) = g(x)g_e(x)$ на *f(x)* получим в остатке многочлен *r(x)*, такой, что $\deg r(x) <$ n или $r(x) = 0$. Легко видеть, что $h(\alpha) = r(\alpha)$. Замкнутость относительно умножения доказана.

Для доказательства замкнутости множества ненулевых элементов относительно деления достаточно показать, что для любого ненулевого $g(x) \in$ F[x], степени меньше n, величина $1/g(\alpha)$ может быть представлена в виде представления, освобожденного от иррациональности в знаменателе. Так как *f(x)* неприводим над **Q**, то *f(x)* и *g(x)* взаимно просты и, следовательно, существуют коэффициенты Безу $u(x) \in$ F[x] и $v(x) \in$ F[x], такие, что $u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$ и degv(x) < deg f(x) = n. Подставляя в последнее равенство вместо x иррациональность α, получаем $v(\alpha)g(\alpha) = 1$, откуда $1/g(\alpha) = v(\alpha)$. Число $v(\alpha)$ имеет нужный вид

Определение. Элемент α называется *алгебраическим над полем* P, если α является корнем какого-нибудь ненулевого многочлена с коэффициентами из поля P. Если при этом $\alpha \notin P$, то α - *алгебраический иррациональный над полем* P.

Примеры

1) Любой элемент α из поля P является алгебраическим над P, т.к. является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x - \alpha \in P[x]$.

2) Элемент $\alpha = \sqrt{5}$ является алгебраическим над полем Q, т.к. α является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x^2 - 5$.

3) Найдём ненулевой многочлен $f(x)$, корнем которого является элемент $\alpha = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Найдём равенство, в котором линейная комбинация целых неотрицательных степеней α равна 0.

Имеем $\alpha = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{3} = 1-\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 = (1-\alpha)^2 \Rightarrow 5-2\sqrt{6} = 1-2\alpha+\alpha^2 \Rightarrow (4+2\alpha-\alpha^2)^2 = (2\sqrt{6})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha^2 + 16\alpha - 8 = 0$. Таким образом, α является корнем ненулевого многочлена $f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$. Тем самым, дополнительно доказано, что элемент $\alpha = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является алгебраическим над полем Q.

Пусть α - алгебраический иррациональный элемент над полем P; $f, h \in P[x]$ и $f(\alpha), h(\alpha) \neq 0$. Требуется элемент $\frac{f(\alpha)}{h(\alpha)}$ представить в виде линейной комбинации неотрицательных степеней α с коэффициентами из поля P, т.е. исключить элемент α из знаменателя дроби. Достаточно научиться решать данную задачу для выражения $\frac{1}{h(\alpha)}$.

Ищем многочлен $g(x) \in P[x]$ такой, что $(g(x), h(x)) = 1$. и $g(\alpha) = 0$. Достаточно найти произвольный многочлен $g_1(x)$ такой, что $g_1(\alpha) = 0$. Тогда можно взять многочлен $g(x) = \frac{g_1(x)}{(g_1(x), h(x))}$.

Поскольку $(g, h) = 1$, то существуют многочлены $u, v \in P[x]$: $h \cdot u + g \cdot v = 1$. Но $g(\alpha) = 0$. Тогда из равенства $h(\alpha) \cdot u(\alpha) + g(\alpha) \cdot v(\alpha) = 1$ получаем $\frac{1}{h(\alpha)} = v(\alpha)$, что и требуется.

<u>**Пример**</u>. Освободиться от алгебраической над полем Q иррациональности в выражении $\frac{63}{\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}-1}$.

В данном примере можно взять $\alpha = \sqrt[4]{2}$. Или $\alpha = \sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}-1$. Но мы возьмём $\alpha = \sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}$. Тогда $h(\alpha) = \alpha - 1$ и $h(x) = x - 1$. Ищем многочлен из $P[x]$, корнем которого является α:
$\alpha - \sqrt{2} = 2\sqrt[4]{2} \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\cdot\alpha + 2 = 4\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 + 2 = 2\sqrt{2}\cdot(2+\alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha^4 + 4\alpha^2 + 4 = 8\cdot(4+4\alpha+\alpha^2) \Rightarrow \alpha^4 - 4\alpha^2 - 32\alpha - 28 = 0$. Возьмём многочлен $g(x) = x^4 - 4x^2 - 32x - 28$. Так как $g(1) \neq 0$, то $(g, h) = 1$. Найдём нужные многочлены $u, v \in Q[x]$. Для этого делим $g(x)$ на $h(x)$ (можно по схеме Горнера):

	1	0	-4	-32	-28
1	1	1	-3	-35	-63

Значит, $g(x)=h(x)\cdot(x^3+x^2-3x-35)-63$. Тогда $g(\alpha)=0=h(\alpha)\cdot(\alpha^3+\alpha^2-3\alpha-35)-63$ или $\frac{63}{h(\alpha)}=\alpha^3+\alpha^2-3\alpha-35$. Поэтому

$$\frac{63}{\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}-1}=(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})^3+(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})^2-3(\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2})-35.$$

Продолжая вычисления дальше, получим:

$$\frac{63}{\sqrt{2}+2\sqrt[2]{2}-1}=2\sqrt{2}+12\sqrt[4]{2}+24+8\sqrt[4]{8}+2+4\sqrt[4]{8}+4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-6\sqrt[4]{2}-35=$$
$$=3\sqrt{2}+6\sqrt[4]{2}+12\sqrt[4]{8}-9.$$

<u>Пример</u>. Освободиться от алгебраической иррациональности в знаменателе дроби $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$.

Поиски минимального многочлена для знаменателя приводят к громоздким выкладкам. Будем искать множитель, рационализующий знаменатель, с помощью метода неприводимых коэффициентов. Так как $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\in Q(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ и базис $Q(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ над Q состоит из чисел $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$, то этот множитель будем искать в виде $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$, где a, b, c, d ϵQ. Из условия $(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})$ $(a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6})=f$, где f – некоторое (отличное от нуля) рациональное число, получаем систему

$$\begin{cases} a+2b+3c+3d=0; \\ a+2b+2c+2d=0; \\ a+b+c+2d=0; \\ 2a+2b+3c+6d=f. \end{cases}$$

Найдем какое – нибудь рациональное решение первых трех уравнений системы и, подставив в четвертое, определим f. При d=1 будем иметь c=-1, b=1, a=-2 и f=1. Поэтому $\frac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}=-2+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}$

<u>Пример.</u> Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2}$, где $\alpha^3-3\alpha+3=0$.

Решение. Число α есть корень многочлена $\varphi(x)=x^3-3x+3$. В знаменателе дроби стоит значение $f(\alpha)$, где $f(x)=x^2-x+2$. Найдем НОД(φ, f) и его линейное представление, как в примере 2.1. Получим

НОД(φ, f) $=35=(4x+3)\varphi-(4x^2+7x-13)f$.

(нет необходимости делать НОД(φ, f) = 1). Подставив значение $x = \alpha$ и воспользовавшись тем, что $\varphi(\alpha) = 0$, получим $35 = -(4\alpha^2 + 7\alpha - 13)f(\alpha)$. Значит, чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе, достаточно умножить его на $4\alpha^2 + 7\alpha - 13$. На это же выражение умножаем числитель и получаем

$$\frac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2}=\frac{(\alpha+2)(4\alpha^2+7\alpha-13)}{(\alpha^2-\alpha+2)(4\alpha^2+7\alpha-13)}=\frac{4\alpha^3+15\alpha^2-5\alpha-26}{-35}.$$

В числителе степень α следует понизить, сделав ее меньше, чем у φ. Для этого разделим с остатком $h(x) = 4x^3 + 15x^2 - 5x - 26$ на $\varphi(x)$. Получим $h(x) = 4\varphi(x) + 15x^2 + 7x - 38$, откуда $h(\alpha) = 15\alpha^2 + 7\alpha - 38$. Окончательно получаем

$$\frac{\alpha+2}{\alpha^2-\alpha+2}=\frac{15\alpha^2+7\alpha-38}{-35}.$$

Упражнения

1. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{2\alpha-3}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

б) $\frac{\alpha+3}{2\alpha^2-\alpha+3}$, где $\alpha^3 + 4\alpha + 2 = 0$;

в) $\frac{\sqrt[3]{3}+3}{2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+2}$.

2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

a) $\frac{\alpha+2}{\alpha^2-2\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

b) $\frac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$;

c) $\frac{\alpha-2}{\alpha^2-\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

d) $\frac{\alpha-2}{\alpha^2-2\alpha-2}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

e) $\frac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha+2}$, где $\alpha^3 + 2\alpha - 2 = 0$;

f) $\frac{\alpha-1}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 3\alpha + 3 = 0$;

g) $\frac{\alpha+1}{\alpha^2-3\alpha+1}$, где $\alpha^3 - 4\alpha + 2 = 0$;

h) $\frac{\alpha+3}{\alpha^2-\alpha+3}$, где $\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2 = 0$;

i) $\frac{\alpha+2}{\alpha^2-3\alpha-1}$, где $\alpha^3 + 2\alpha + 2 = 0$;

j) $\frac{\alpha+4}{\alpha^2-2\alpha+2}$, где $\alpha^3 - 6\alpha + 3 = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известный математик-вычислитель Р.В. Хемминг пишет: «Поскольку с многочленами легко обращаться, большая часть классического численного анализа основывается на приближении многочленами». Техническая простота вычислений, связанных с многочленами, по сравнению с более сложными классами функций, а также тот факт, что множество многочленов плотно в пространстве непрерывных функций, способствовали развитию методов разложения в ряды и полиномиальной интерполяции в математическом анализе.

Изучение теории многочленов играет важную роль при подготовке специалистов-математиков. Все темы пособия заслуживают полного и глубокого изучения.

Безусловно, настоящее издание не сможет заменить учебники по алгебре по полноте представленного материала. Однако студентам математических специальностей оно будет интересно тем, что в одном пособии изложен как теоретический материал, так и решение примеров и задач. Обучающиеся могут использовать этот материал в других научных областях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие для студентов-заочников II курса физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Н. А. Казачек [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. – 2-е изд. – М. : Просвещение, 1984. – 192 с.

2. Винберг, Э. Б. Алгебра многочленов : учеб. пособие для студентов-заочников 3 – 4 курсов физико-математических фак. пед. ин-тов / Э. Б. Винберг. – М. : Просвещение, 1980. – 175 с.

3. Ленг, С. Алгебра / С. Ленг. – М. : Мир, 1968. – 564 с.

4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел : учеб. пособие для педагогических институтв. - М.: Высш. шк., 1979. – 559 с.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - М. : Наука, 1971. – 432 с.

6. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре : учеб. пособие для вузов. - М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 416 с.

7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре. – М. : Наука, 1968. – 304 с.

8. Шнеперман Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – Минск : Высш. шк., 1982. – 223 с.

Учебное электронное издание

КУРАНОВА Наталья Юрьевна
ТИХОМИРОВ Роман Николаевич

ТЕОРИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод DVD-ROM.

Тираж 25 экз.

Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Педагогические институт, кафедра МОиИТ
natali_math@mail.ru