Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2020

УДК 510.6
ББК 22.161.6
К78

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры специальной техники и информационных технологий
Владимирского юридического института
Федеральной службы исполнения наказаний
*А. В. Хорошева*

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры математического образования
и информационных технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
*С. Б. Наумова*

**Крашенинникова, О. В.**
К78 Дифференциальные уравнения: учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 104 с.
ISBN 978-5-9984-1121-2

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты по дифференциальным уравнениям.

Предназначено для студентов-бакалавров очной формы обучения технических специальностей, изучающих высшую математику в течение первых двух семестров.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 3. Библиогр.: 8 назв.

УДК 510.6
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-9984-1121-2 

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## *ПРЕДИСЛОВИЕ*

*Материал пособия соответствует программе второго семестра и включает раздел: обыкновенные дифференциальные уравнения.*

*Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемому разделу, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты, включающие 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей их защитой во время рейтинговой недели).*

*Обозначения и терминология, используемые в пособии являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что настоящее пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы по дифференциальным уравнениям, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с ним предполагает параллельное изучение дифференциальных уравнений по книгам, указанным в библиографическом списке.*

# 1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ. ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ. ОБЩЕЕ, ЧАСТНОЕ, ОСОБОЕ РЕШЕНИЯ. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

С точки зрения формально-математической решение дифференциального уравнения есть задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления состоит в том, чтобы по заданной функции найти ее производную. Простейшая обратная задача встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти ее первообразную. Если искомую первообразную обозначить через $y$, то указанная задача может быть записана в форме уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x)$ или $y' = f(x)$. Это простейшее дифференциальное уравнение, которое мы решать умеем: $y = \int f(x)dx + C$. Например, $y' = x$, тогда $y = \frac{x^2}{2} + c$.

*Определение.* **Дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее независимую переменную $x$, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение можно записать следующим образом:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0 \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \qquad (1)$$

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*. Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями изучаются также уравнения в частных производных. Дифференциальным уравнением в частных производных называется соотношение между неизвестной функцией $z$, зависящей от двух или более переменных $x, y, \ldots$, этими переменными $x, y, \ldots$, и частными производными от $z$: $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$ Например, $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$. Легко проверить, что этому уравнению удовлетворяет функция $z = x^2 y^2$ (и еще много других функций).

*Определение*. **Порядком** дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Например, уравнение $y' - 2xy = e^x$ есть уравнение первого порядка, а $y''' - 2y'' - y' = \sin x$ есть уравнение третьего порядка.

Если уравнение (1) может быть приведено к такому виду, в котором левая часть есть целая рациональная относительно входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется степенью уравнения. Например, $(y'')^3 - 2xy' = e^x$ есть уравнение второго порядка третьей степени.

Иногда уравнение (1) удается переписать в виде $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ – нормальная форма записи дифференциального уравнения.

*Определение*. **Решением** или **интегралом** дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция, имеющая производные до *n*-го порядка включительно, которая после подстановки в уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Интеграл дифференциального уравнения называется **общим**, если содержит столько независимых постоянных, каков порядок уравнения. Функции, получаемые из общего интеграла при различных численных значениях постоянных, называются **частными решениями**.

Отыскание частного решения дифференциального уравнения *n*-го порядка, удовлетворяющего *n* начальным условия вида $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{10}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}$ называется задачей Коши.

График решения дифференциального уравнения на плоскости $xOy$ называется интегральной кривой.

**Дифференциальные уравнения первого порядка**

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$, где $F$ – функция трех переменных, определенная в некоторой области $D$. Если это уравнение можно разрешить относительно $y'$, то его можно записать в виде $y' = f(x, y)$ или

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (2)$$

Наряду с ним рассматривают так называемое перевернутое уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$.

Для уравнения (2) справедлива следующая теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

**Теорема 1.1.** Если в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в некоторой области $D$ на плоскости $xOy$, содержащей некоторую точку $(x_0, y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что существует и притом единственная функция $y = \varphi(x)$, график которой проходит через точку $(x_0, y_0)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется начальным условием.

*Определение*. **Общим решением** дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении $C$;

2) какого бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$ можно найти такое значение $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

В процессе нахождения общего решения дифференциального уравнения нередко приходят к решению в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$. Это равенство называют **общим интегралом** дифференциального уравнения.

*Определение*. **Частным решением** называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения при конкретном значении $C = C_0$. Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом уравнения.

С геометрической точки зрения общий интеграл представляет собой семейство кривых на координатной плоскости, зависящее от одной произвольной постоянной *C*. Эти кривые называют интегральными кривыми. Частному интегралу соответствует одна кривая этого семейства, проходящая через заданную точку плоскости.

Уравнение (2) для каждой точки *M* с координатами $(x, y)$ определяет значение производной $\frac{dy}{dx} = y' = tg\alpha$, то есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Проведя в каждой точке $(x, y)$ из области задания функции $f(x, y)$ отрезок для определенности единичной длины с центром в этой точке, образующий с положительным направлением оси $Ox$ угол $\alpha$ такой, что $tg\alpha = f(x, y)$, получают так называемое **поле направлений**.

Следовательно, с геометрической точки зрения задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Если в точке $(x_0, y_0)$ правая часть равенства (2) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси $Oy$. В этом случае нужно использовать перевернутое уравнение.

Если в точке $(x_0, y_0)$ функция $f(x, y)$ обращается в неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, то говорят, что в этой точке поле не определено. Такую точку называют особой точкой дифференциального уравнения (2). Если при этом существует интегральная кривая $y = y(x)$ $(x = x(y))$, обладающая свойством $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ ( $x(y) \to x_0$ при $y \to y_0$ ), то говорят, что она примыкает к точке $(x_0, y_0)$. В этом случае само уравнение (2) не указывает наклона касательной в точке $(x_0, y_0)$ к интегральной кривой, примыкающей к этой точке. Это обстоятельство порождает особенности поведения интегральных кривых в окрестности особой точки, обусловленные аналитической структурой правой части уравнения (2).

Для дифференциального уравнения (2) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение $\frac{dy}{dx} = C = const$, называется **изоклиной** данного уравнения. При разных значениях $C$ получают разные изоклины. Уравнение изоклины $f(x,y)=C$. Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых.

*Пример 1*. Построить поле направлений дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

Решение. Изоклины данного уравнения определяются уравнением $-\frac{x}{y}=C$ или $y=-\frac{x}{C}$, то есть представляют собой пучок прямых, проходящих через начало координат. При $C=1$ получаем прямую $y=-x$, на которой строим маленькие отрезки, имеющие угловой коэффициент 1. При $C=-1$ получаем прямую $y=x$, на которой строим маленькие отрезки, имеющие угловой коэффициент $-1$ и так далее. Поле направлений изображено на рис. 1.

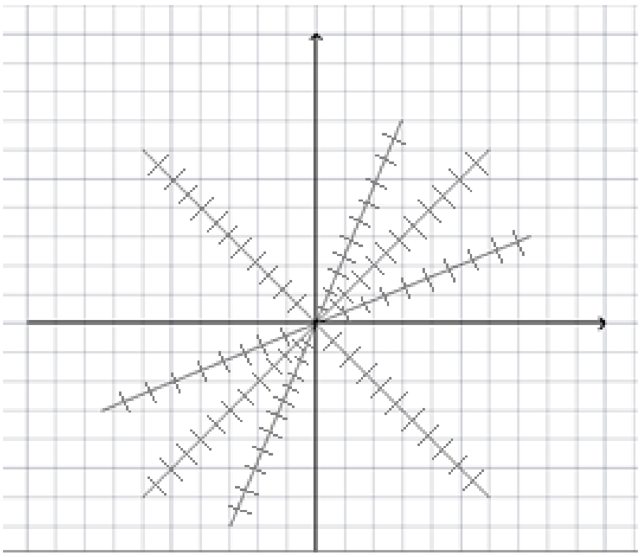

Рис. 1

*Определение*. Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется **особым решением**.

Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении $C$, включая $C=\pm\infty$. Если правая часть равенства (2) непрерывна и имеет частную производную по $y$, то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность. Эти кривые называются подозрительными на особое решение.

*Пример 2*. Найти особые решения дифференциального уравнения $y' = 2\sqrt{y}$.

*Решение.* Общим решением будут функции $y = (x + C)^2$. Особые решения ищем там, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$. В нашем примере $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, поэтому, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \to \infty$ когда $y \to 0$. Следовательно, особое решение $y = 0$ (рис. 2)

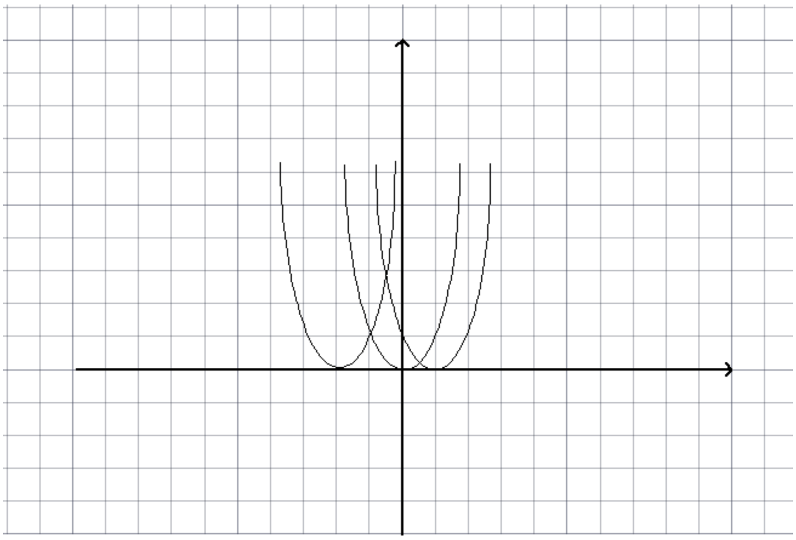

Рис. 2

Второй подход к нахождению особых решений состоит в следующем: если семейство интегральных кривых имеет огибающую, то есть такую кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках, то последняя всегда является особым решением дифференциального уравнения. Действительно, во-первых, огибающая является интегральной кривой, во-вторых, в каждой точке огибающей нарушается единственность решения задачи Коши (рис. 3)

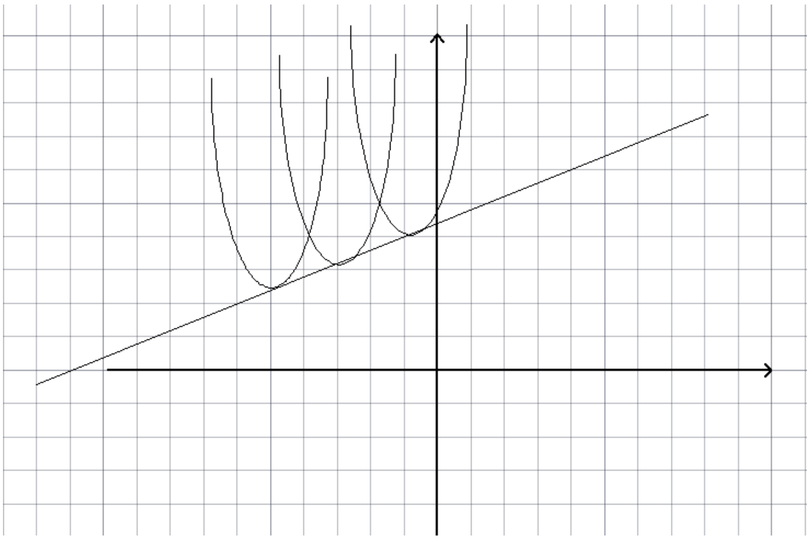

Рис. 3

## 2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

С помощью дифференциальных уравнений строятся математические модели, описывающие разные процессы.

*Пример 1.* Уравнение радиоактивного распада.

Пусть $m(t)$ – масса радиоактивного вещества в момент времени $t$. Известно, что скорость распада, то есть $\frac{dm}{dt}=m'(t)$ пропорциональна массе вещества, следовательно, $\frac{dm}{dt}=-k\cdot m(t)$, $k>0$. Легко проверить, что решением этого уравнения будет функция $m(t)=C\cdot e^{-kt}$. Чтобы выделить одно решение, нужно задать начальное условие, например, $m(0)=m_0$. Тогда $m_0=C$ и частное решение $m(t)=m_0\cdot e^{-kt}$.

Выясним, за какой промежуток времени количество вещества станет в два раза меньше: $\frac{m_0}{2}=m_0\cdot e^{-kt}$, $\frac{1}{2}=e^{-kt}$, $2=e^{kt}$, $\ln 2=kt$, $k=\frac{\ln 2}{t}=\frac{\ln 2}{T_0}$, где $T_0$ – период полураспада. Таким образом, частное решение имеет вид $m(t)=m_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_0}t}=m_0\cdot e^{\ln 2^{-\frac{t}{T_0}}}=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T_0}}$.

*Пример 2.* Уравнение роста.

Пусть на необитаемый остров, где достаточно пищи и нет хищников, доставили кроликов. Пусть $x(t)$ – количество кроликов в момент времени $t$. Тогда естественно предположить, что скорость размножения кроликов $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ пропорциональна их количеству, то есть $\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x(t)$. Получили дифференциальное уравнение, в котором $\alpha > 0$. Решение будет функция $x(t) = C \cdot e^{\alpha t}$.

*Пример 3.* Пусть с некоторой высоты сброшено тело массой $m$. Требуется установить, по какому закону изменяется скорость падения $v$ этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (с коэффициентом пропорциональности $k$).

По второму закону Ньютона $m\frac{dv}{dt} = mg - kv = F$, где $F$ – сила, действующая на тело в направлении движения. Она складывается из двух сил: силы тяжести $mg$ и силы сопротивления воздуха $-kv$ (берется с минусом, так как она направлена в сторону, противоположную направлению скорости).

Легко проверить, что решением будет функция $v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ при любом значении $C$. Чтобы найти искомую зависимость $v$ от $t$, нужно задать начальное условие: при сбрасывании тела ему была придана начальная скорость $v(0) = v_0$, которая, в частности, могла быть равной нулю. Тогда $v_0 = C + \frac{mg}{k}$, отсюда $C = v_0 - \frac{mg}{k}$. Следовательно, искомая зависимость

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \qquad (*)$$

Из этой формулы следует, что при достаточно больших значениях $t$ скорость $v$ мало зависит от $v_0$. Заметим, что если $k = 0$ (то есть сопротивление воздуха отсутствует или им можно пренебречь), то получается известный из физики результат: $v = v_0 + gt$. Она может быть получена из формулы (*) с помощью предельного перехода:

$$\lim_{k \to 0}\left(\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = v_0 + gt.$$

## 3. УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Определение*. Дифференциальное уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$ называют уравнением с **разделенными переменными**.

Общим интегралом такого уравнения будет $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$. Особых решений нет.

*Пример 1*. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $xdx + ydy = 0$.

Решение. Интегрируем $\int xdx + \int ydy = \int Cdx$, получаем $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}$ или $x^2 + y^2 = C$.

Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ есть уравнение с разделяющимися переменными. Преобразуем его следующим образом (полагая, что $g(y) \neq 0$) $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$. Если уравнение $g(y) = 0$ имеет действительные решения вида $y = b$, то прямые $y = b$ будут решениями, которые могут оказаться особыми. Других особых решений быть не может.

*Пример 2.* Решить дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Решение. Разделяем переменные и интегрируем $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$,

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$, $\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$, $y = \frac{C}{x}$ – общее решение.

Общий вид уравнения с разделяющимися переменными $f(x) \cdot g(y)dy = m(x) \cdot n(y)dx$. Разделяем переменные и интегрируем:

$\frac{g(y)dy}{n(y)}=\frac{m(x)dx}{f(x)}$, $\int\frac{g(y)dy}{n(y)}=\int\frac{m(x)dx}{f(x)}$. Если уравнения $f(x)=0$, $n(y)=0$ имеют действительные решения вида $x=a, y=b$, то $x=a\ (y\neq b)$ и $y=b\ (x\neq a)$ будут решениями уравнения. Только эти решения могут оказаться особыми.

Уравнение вида $y'=f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $ax+by=z(x)$.

*Пример 3*. Решить дифференциальное уравнение $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0$.

Решение. Разделяем переменные и интегрируем $\frac{x^2dx}{x^3-1}+\frac{(y-1)dy}{y+1}=0$, $\int\frac{x^2dx}{x^3-1}+\int\frac{(y-1)dy}{y+1}=\int 0dx$. Найдем каждый из интегралов в отдельности:

$$\int\frac{x^2dx}{x^3-1}=\begin{bmatrix}t=x^3-1\\ dt=3x^2dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{3t}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+C,$$

$$\int\frac{(y-1)dy}{y+1}=\int\frac{(y+1-2)dy}{y+1}=\int\left(1-\frac{2}{y+1}\right)dy=y-2\ln|y+1|+C.$$

Окончательно получаем общий интеграл:

$\frac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+y-2\ln|y+1|=C$. Особыми решениями будут $x=1$, $y=-1$.

*Пример 4*. Решить дифференциальное уравнение $y'=\sqrt{4x+2y-1}$.

Решение. Делаем замену: $z=4x+2y-1$, отсюда $y=\frac{1}{2}(z-4x+1)$, $y'=\frac{1}{2}z'-2$. С учетом сделанной замены уравнение перепишется в виде:

$\frac{1}{2}z'-2=\sqrt{z}$ или $z'=2(\sqrt{z}+2)$, $\frac{dz}{dx}=2(\sqrt{z}+2)$. Разделяем переменные и интегрируем: $\int\frac{dz}{\sqrt{z}+2}=2\int dx$. Найдем отдельно интеграл в левой части равенства:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}+2} = \begin{bmatrix} t=\sqrt{z} \\ z=t^2 \\ dz=2tdt \end{bmatrix} = \int \frac{2tdt}{t+2} = 2\int \frac{(t+2-2)dt}{t+2} = 2\int \left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt =$$

$$= 2\left(t-2\ln\left|t+2\right|\right)+C = 2\sqrt{z}-4\ln\left|\sqrt{z}+2\right|+C.$$

Окончательно получаем общий интеграл уравнения:

$$2\sqrt{4x+2y-1}-4\ln\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right| = 2x+2C,$$

$$\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right|-x=C.$$

*Пример 5*. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

Решение. Уравнение касательной в любой точке $(x, y)$ искомой кривой будет $Y-y=y'(X-x)$, где $(X,Y)$ – координаты любой точки на касательной. Полагая в этом уравнении $Y=0$, найдем абсциссу $X_0$ точки пересечения касательной с осью $Ox$: $X_0 = x-\frac{y}{y'}$. Согласно условию задачи $X_0 + x = 0$, то есть $0 = 2x-\frac{y}{y'}$. Решая это дифференциальное уравнение искомой кривой как уравнение с разделяющимися переменными, получим $\frac{2dy}{y}=\frac{dx}{x}$, $2\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$, $y^2 = Cx$.

## 4. ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*Определение*. Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией степени *k*, если $F(tx,ty)=t^kF(x,y)$.

Например, $x^2+y^2$ есть однородная функция степени 2. Однородную функцию степени $k$ можно записать $F(x,y)=F\left(x\cdot 1, x\cdot\frac{y}{x}\right)=x^kF\left(1,\frac{y}{x}\right)$.

*Определение*. Дифференциальное уравнение называется однородным уравнением первого порядка, если оно имеет вид

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \qquad (3)$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)-$ однородные функции одинаковой степени $k$. Тогда $P(x,y)=x^k P\left(1,\frac{y}{x}\right)$, $Q(x,y)=x^k Q\left(1,\frac{y}{x}\right)$ и уравнение (3) можно переписать в виде $P\left(1,\frac{y}{x}\right)dx+Q\left(1,\frac{y}{x}\right)dy=0$ или $\dfrac{P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}dx+dy=0$.

Обозначим $\dfrac{P\left(1,\frac{y}{x}\right)}{Q\left(1,\frac{y}{x}\right)}=R\left(\frac{y}{x}\right)$, тогда получим уравнение $R\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy=0$.

Будем искать решение этого уравнения в виде $y=z\cdot x$, где $z(x)-$функция, зависящая от $x$. Имеем $dy=zdx+xdz$, следовательно, приходим к уравнению $R(z)dx+zdx+xdz=0$, $(R(z)+z)dx=-xdz$, $\int\frac{dz}{R(z)+z}=-\int\frac{dx}{x}$. Таким образом, пришли к уравнению с разделяющимися переменными.

Поскольку однородное уравнение может быть приведено к виду $y'=R\left(\frac{y}{x}\right)$, то поле направлений не задано в начале координат, то есть начало координат является особой точкой. Изоклинами являются прямые $y=kx$, $x\neq 0$. Особыми могут быть прямые $x=0$ и $y=z_i x$, где $z_i-$особые решения уравнения с разделяющимися переменными.

*Пример 1*. Решить дифференциальное уравнение $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему: $y'=\frac{y}{x}\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)$. Сделаем замену $z=\frac{y}{x}$, $y=zx$, $y'=z'x+z$. Подставим в уравнение, получим: $z'x+z=z(1+\ln z)$, $z'x=z\ln z$, $\frac{dz}{dx}x=z\ln z$.

Разделяем переменные и интегрируем: $\int\frac{dz}{z\ln z}=\int\frac{dx}{x}$,

$\int \frac{d(\ln z)}{\ln z} = \ln|x| + \ln|C|$, $\ln|\ln z| = \ln|Cx|$, $\ln z = Cx$, $z = e^{Cx}$. Делаем обратную замену: $\frac{y}{x} = e^{Cx}$, $y = xe^{Cx}$.

К однородным уравнениям сводятся уравнения типа: $y' = R\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$.

Рассмотрим систему: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$.

Возможны случаи:

1. $\alpha = ka, \beta = kb, \ \gamma = kc$. Тогда получим уравнение $y' = R\left(\frac{1}{k}\right)$ или $y' = d$, $y = d \cdot x + C$.

2. $\alpha = ka, \beta = kb, \quad \gamma \neq kc$. Тогда получим уравнение $y' = R\left(\frac{ax+by+c}{k(ax+by)+\gamma}\right)$. Сделаем замену: $ax+by = z(x)$, тогда $a+by' = z'$. Отсюда $y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$. После замены получаем уравнение: $\frac{1}{b}z' - \frac{a}{b} = R\left(\frac{z+c}{kz+\gamma}\right)$, $z' = a + bR\left(\frac{z+c}{kz+\gamma}\right)$ – уравнение с разделяющимися переменными.

3. система имеет единственное решение $(x_0, y_0)$.

В этом случае делаем замену $x - x_0 = u, y - y_0 = v$. Тогда $dx = du$, $dy = dv$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$. Исходное уравнение переписывается в виде $\frac{dv}{du} = R\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right)$. Таким образом, получили однородное уравнение.

*Пример 2*. Решить дифференциальное уравнение $(5x-7y+1)dy + (x+y-1)dx = 0$.

Решение. Решим систему линейных уравнений $\begin{cases} 5x-7y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$.

Система имеет единственное решение $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}$. Делаем замену

$x = u + \frac{1}{2}, y = v + \frac{1}{2}$. С учетом этой замены уравнение перепишется в виде: $(5u - 7v)dv + (u + v)du = 0$. Делаем еще одну замену: $u = z \cdot v,\ du = zdv + vdz$. Тогда уравнение перепишется в виде: $(5zv - 7v)dv + (zv + v)(zdv + vdz) = 0$,

$$(5zv - 7v)dv + z^2vdv + vzdv + zv^2dz + v^2dz = 0,$$

$$(z^2 + 6z - 7)dv + (zv + v)dz = 0,$$

$$(z^2 + 6z - 7)dv = -(z + 1)vdz,$$

$$-\int \frac{dv}{v} = \int \frac{(z+1)dz}{z^2 + 6z - 7}.$$

Найдем интеграл в правой части последнего равенства. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{z+1}{z^2 + 6z - 7} = \frac{z+1}{(z+7)(z-1)} = \frac{A}{z+7} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1) + B(z+7)}{(z+7)(z-1)},$$

$$z + 1 = A(z-1) + B(z+7).$$

При $z = 1$ находим $2 = 8B$, $B = \frac{1}{4}$. При $z = -7$ находим $-6 = -8A$, $A = \frac{3}{4}$. Тогда $\int \frac{(z+1)dz}{z^2 + 6z - 7} = \frac{3}{4}\int \frac{dz}{z+7} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z-1} = \frac{3}{4}\ln|z+7| + \frac{1}{4}\ln|z-1| + C$.

Окончательно получаем:

$$\frac{1}{4}\ln|C| - \ln|v| = \frac{1}{4}\ln|z+7|^3|z-1|,$$

$$\ln\left|\frac{C}{v^4}\right| = \ln|z+7|^3|z-1|,$$

$$C = (z+7)^3(z-1)v^4,$$

$$C = \left(\frac{u}{v} + 7\right)^3\left(\frac{u}{v} - 1\right)v^4,$$

$$C = (u + 7v)^3(u - v),$$

$$C = \left(x - \frac{1}{2} + 7y - \frac{7}{2}\right)^3\left(x - \frac{1}{2} + y - \frac{1}{2}\right),$$

$$C = (x + 7y - 4)^3(x + y).$$

# 5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

*Определение*. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и ее производной, то есть уравнение вида: $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции.

Одним из методов решения этого уравнения является метод Бернулли. Искомая функция ищется в виде $y = U(x)V(x)$, тогда $y' = U'V + UV'$. Подставим в уравнение, получим $U'V + UV' + p(x)UV = q(x)$,

$U'V + U\left(V' + p(x)V\right) = q(x)$. Разобьем это уравнение на два уравнения с разделяющимися переменными: $V' + p(x)V = 0$ и $U'V = q(x)$.

Разделим переменные в первом уравнении и проинтегрируем: $\dfrac{dV}{dx} = -p(x)V$, $\int \dfrac{dV}{V} = -\int p(x)dx$, $\ln|V| = -\int p(x)dx$, $V = e^{-\int p(x)dx}$. При интегрировании этого уравнения константу $C$ не добавляют. Подставляем найденную функцию во второе уравнение, получаем: $U'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, $U' = q(x)e^{\int p(x)dx}$, $U = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$. И окончательно находим общее решение исходного уравнения: $y = UV = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)$.

*Пример 1*. Решить дифференциальное уравнение $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$.

Решение. Ищем решение в виде $y = UV$, $y' = U'V + UV'$. Подставляем в уравнение: $U'V + UV' - \dfrac{UV}{x} = x^2$, $U'V + U\left(V' - \dfrac{V}{x}\right) = x^2$. Разбиваем на два уравнения: $V' - \dfrac{V}{x} = 0$ и $U'V = x^2$. Разделим переменные в первом уравнении и проинтегрируем: $\dfrac{dV}{dx} = \dfrac{V}{x}$, $\int \dfrac{dV}{V} = \int \dfrac{dx}{x}$, $\ln|V| = \ln|x|$, $V = x$. Подставляем найденную функцию во второе уравнение, получаем: $U'x = x^2$, $U' = x$, $U = \int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C$. И окончательно получаем общее решение: $y = \dfrac{x^3}{2} + Cx$.

К линейным уравнениям приводятся уравнения видов:

1) $f'(y)\cdot\dfrac{dy}{dx} + p(x)f(y) = q(x)$

Положим здесь $f(y) = z(x)$, тогда $f'(y)\cdot y' = z'(x)$ и уравнение переписывается в виде: $z' + p(x)z = q(x)$.

2) $\dfrac{dy}{dx} + p(x) = q(x)\cdot e^{ny}$

В этом уравнении делают замену: $e^{-ny} = z(x)$, тогда $-ne^{-ny}y' = z'(x)$, $y' = -\dfrac{e^{ny}}{n}z'(x)$ и уравнение принимает вид $-\dfrac{e^{ny}}{n}z'(x) + p(x) = q(x)\cdot e^{ny}$, $-\dfrac{z'(x)}{n} + p(x)\cdot z = q(x)$.

*Определение*. Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)\cdot y^n$, $n \neq 1$. Было предложено Яковом Бернулли в 1695 году, а метод решения опубликовал Иван Бернулли в 1697 году.

Разделим обе части уравнения на $y^n$, получим $\dfrac{y'}{y^n} + \dfrac{p(x)}{y^{n-1}} = q(x)$.

Сделаем замену $\dfrac{1}{y^{n-1}} = z(x)$, $z'(x) = \left(y^{-(n-1)}\right)' = -(n-1)y^{-n}\cdot y'$. Отсюда $\dfrac{y'}{y^n} = -\dfrac{z'}{n-1}$. Тогда исходное уравнение переписывается в виде: $-\dfrac{z'}{n-1} + p(x)z = q(x)$ или $z' - (n-1)p(x)z = -(n-1)q(x)$. Получили линейное уравнение.

*Пример 2*. Решить дифференциальное уравнение $(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y$.

Решение. Считая, что $x \neq -1$, разделим обе части уравнения на $x+1$:

$y'+\dfrac{y}{x+1}=-y^2$. Затем разделим на $-y^2$: $-\dfrac{y'}{y^2}-\dfrac{1}{(x+1)y}=1$ и сделаем замену $z=\dfrac{1}{y}$, тогда $z'=-\dfrac{y'}{y^2}$ и уравнение переписывается в виде: $z'-\dfrac{z}{x+1}=1$. Далее ищем функцию $z$ в виде $z=UV$, $z'=U'V+UV'$. Подставляем в уравнение: $U'V+UV'-\dfrac{UV}{x+1}=1$, $U'V+U\left(V'-\dfrac{V}{x+1}\right)=1$. Разбиваем на два уравнения с разделяющимися переменными: $V'-\dfrac{V}{x+1}=0$ и $U'V=1$. Из первого уравнения находим $\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{V}{x+1}$, $\int\dfrac{dV}{V}=\int\dfrac{dx}{x+1}$, $\ln|V|=\ln|x+1|$, $V=x+1$. Подставляем во второе уравнение: $U'(x+1)=1$, $U'=\dfrac{1}{x+1}$, $U=\ln|x+1|+\ln|C|=\ln|C(x+1)|$, тогда $z=(x+1)\ln|C(x+1)|$, а $y=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{(x+1)\ln|C(x+1)|}$.

Замечание. Решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде $y=U(x)V(x)$, где $U(x)-$ какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $U'+p(x)U=0$.

## 6. УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

*Определение*. Уравнение

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{4}$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)-$непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{5}$$

причем $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области.

Докажем, что если левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции, то выполняется условие (5), и обратно, если выполнено условие (5), то левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть уравнение (4) имеет вид $dF(x,y)=0$ и, следовательно, его общий интеграл $F(x,y)=C$.

Предположим сначала, что левая часть уравнения (4) есть полный дифференциал некоторой функции $F(x,y)$, то есть

$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy$. Тогда

$$P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}. \tag{6}$$

Дифференцируя первое соотношение по $y$, а второе – по $x$, получим

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}.$$

Предполагая непрерывность вторых производных, будем иметь $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, то есть равенство (5) является необходимым условием для того, чтобы левая часть уравнения (4) была полным дифференциалом некоторой функции.

Покажем, что это условие является и достаточным, то есть при выполнении равенства (5) левая часть уравнения (4) является полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$.

Из соотношения $P(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}$ находим $F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$,

где $x_0$ – абсцисса любой точки из области существования решения. При интегрировании по $x$ считаем $y$ константой и поэтому произвольная постоянная может зависеть от $y$. Подберем функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось второе из соотношений (6). Для этого продифференцируем обе части последнего равенства по $y$ и результат приравняем к $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int\limits_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y).$$

Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то $\int\limits_{x_0}^{x}\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$, т.е. $Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=Q(x,y)$ или $Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y)$. Следовательно, $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$ или $\varphi(y)=\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dx+C_1$. Таким образом, функция $F(x,y)$ найдена: $F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_1$. Приравнивая это выражение произвольной константе $C$, получим общий интеграл уравнения (4): $\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy=C$.

*Пример 1*. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$.

Решение. Проверим, является ли это уравнение уравнением в полных дифференциалах. Здесь $P(x,y)=\dfrac{2x}{y^3}$, $Q(x,y)=\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$, тогда

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{y^4}\right)'_x=-\dfrac{6x}{y^4}$. Так как $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y)=\frac{2x}{y^3},\ F(x,y)=\int\frac{2x}{y^3}dx=\frac{x^2}{y^3}+\varphi(y).$$

Тогда $\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{3x^2}{y^4}+\varphi'(y)=Q(x,y)=\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{3x^2}{y^4}$. Отсюда $\varphi'(y)=\dfrac{1}{y^2}$, $\varphi(y)=\int\dfrac{1}{y^2}dy=-\dfrac{1}{y}+C_1$. Общий интеграл уравнения $\dfrac{x^2}{y^3}-\dfrac{1}{y}=C$.

Пусть левая часть уравнения (4) не является полным дифференциалом некоторой функции. Иногда удается подобрать такую функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения (4) становится полным дифференциалом. Такая функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель может привести к появлению лишних решений, обращающих этот множитель в нуль.

Для того чтобы найти интегрирующий множитель, поступим следующим образом: умножим обе части уравнения (4) на неизвестный пока интегрирующий множитель $\mu(x,y)$: $\mu\cdot P(x,y)dx+\mu\cdot Q(x,y)dy=0$. Для того чтобы последнее уравнение было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ или $\mu\dfrac{\partial P}{\partial y}+P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}+Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}$, $P\dfrac{\partial \mu}{\partial y}-Q\dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\mu\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$. Разделим обе части на $\mu(x,y)$: $P\dfrac{\partial \mu}{\mu\partial y}-Q\dfrac{\partial \mu}{\mu\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и перепишем в эквивалентном виде

$$P\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}-Q\frac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{7}$$

Это уравнение является уравнением в частных производных с неизвестной функцией $\mu(x,y)$. В общем случае интегрирование этого уравнения является задачей не более простой, чем интегрирование исходного уравнения. Только в некоторых случаях удается найти функцию $\mu(x,y)$.

Пусть, например, интегрирующий множитель является функцией только одного аргумента, тогда (7) можно без труда проинтегрировать. Пусть интегрирующий множитель зависит от $x$, $\mu=\mu(x)$, тогда $\dfrac{\partial(\ln\mu)}{\partial y}=0$ и уравнение (7) примет вид: $-Q\dfrac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial(\ln\mu)}{\partial x}=\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Отсюда, считая $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ непрерывной функцией только от $x$, получим $\ln\mu=\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx+\ln C$,

$\mu=Ce^{\int\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$.

Можно считать *C=1*, так как достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель. Если $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ является функцией только $x$, то интегрирующий множитель, зависящий от $x$, существует, в противном случае его нет. Аналогично, если выражение $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$ не зависит от $x$, а зависит от $y$, то легко находится интегрирующий множитель, зависящий от *y:* $\mu=Ce^{\int\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy}$.

*Пример 2.* Решить дифференциальное уравнение $\left(y+xy^2\right)dx-xdy=0$.

Решение. Здесь $P(x,y)=y+xy^2$, $Q(x,y)=-x$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=1+2xy$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-1$. Посмотрим, не допускает ли это уравнение интегрирующего множителя от $y$.

Найдем

$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\frac{-1-2xy-1}{y+xy^2}=\frac{-2(xy+1)}{y(xy+1)}=-\frac{2}{y}$, то есть интегрирующий множитель есть. Находим его:

$\mu=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2}$. Умножаем все члены уравнения на $\frac{1}{y^2}$:

$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$. Теперь $P(x,y)=\frac{1}{y}+x$, $Q(x,y)=-\frac{x}{y^2}$, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$, следовательно, мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

Находим $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) = \frac{1}{y} + x$, $F(x,y) = \int\left(\frac{1}{y} + x\right)dx = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \varphi'(y) = Q(x,y) = -\frac{x}{y^2}$. Отсюда $\varphi'(y) = 0$,

$\varphi(y) = \int 0dy = C_1$. Общий интеграл уравнения $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$.

## 7. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Эту теорему мы будем доказывать с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении. Напомним ряд основных определений.

Пусть $X$ – *метрическое пространство*, то есть множество, на котором задано отображение $(x, y) \to d(x, y) \in \boldsymbol{R}$, причем выполнены условия:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Например, множество $C_{[a,b]}$функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, в котором $d(x, y) = \max\limits_{[a,b]}\left|f(x) - g(x)\right|$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ метрического пространства называется *фундаментальной*, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall m-$натурального выполняется неравенство $d(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon$.

Определение. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность в нем сходится.

Определение. Пусть $A$ – отображение $X \to X$. Отображение $A$ называется сжимающим, если $\exists\ 0 < \Theta < 1$ такое, что $\forall x, y \in X \Rightarrow d(Ax, Ay) < \Theta d(x, y)$.

Теорема Банаха. Пусть $X$ – полное метрическое пространство и $A: X \to X$ сжимающее отображение. Тогда существует и притом единственное решение уравнения $AX = X$. Это решение можно найти следующим образом: взять $x_0 \in X$ и рассмотреть последовательность $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, … Тогда $x_n \to x$.

Теорема Пикара. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $D = \{x_0 - a \le x \le x_0 + a, y_0 - b \le y \le y_0 + b\}$. Предположим, что она удовлетворяет условию Липшица по $y$, то есть $\exists N$ такое, что $\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le N \left| y_1 - y_2 \right|$ при $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Тогда на интервале $(x_0 - H, x_0 + H)$ существует и притом единственное решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Здесь $H < \min\left( a, \dfrac{b}{M}, \dfrac{\Theta}{N} \right)$, $0 < \Theta < 1$, $M = \max\limits_{(x, y) \in D} \left| f(x, y) \right|$.

Доказательство. Докажем, что уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{8}$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{9}$$

Действительно, пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (9), тогда

$y(x_0) = y_0$ и $y' = \left( \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right)' = f(x, y(x))$ по свойству интеграла с переменным верхним пределом. Обратно, пусть $y = y(x)$ есть решение уравнения (8), тогда $\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^{x} y'(t)dt = y(x_0) - y(x)$. Отсюда

$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.

Таким образом, задача свелась к доказательству существования и единственности решения уравнения (9).

Рассмотрим отображение $A(y) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. Если $y(t)$ непрерывная функция и $f(x, y)$ непрерывная, то по свойству интеграла с переменным верхним пределом $A(y)$ будет непрерывной и дифференцируемой функцией. Рассмотрим пространство функций

$$X = \left\{ \begin{array}{l} f(x):\ f(x)\ \textit{непрерывны на}\ [x_0 - H, x_0 + H], \\ d(f(x), y_0) = \max\limits_{[x_0 - H,\, x_0 + H]} \left| f(x) - y_0 \right| \le b \end{array} \right\}.$$

Пространство $X$ – полное, так как является замкнутым подпространством полного пространства всех непрерывных функций на отрезке $[x_0 - H, x_0 + H]$. Наша задача подобрать $H$ таким образом, чтобы выполнялись условия теоремы Банаха. Отображение $A: X \to X$. Обозначим $M = \max\limits_{(x, y) \in D} |f(x, y)|$. Оценим

$$\left|A(y) - y_0\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt\right| \le \max\limits_{(x, y) \in D} |f(x, y)| \cdot \left|x - x_0\right| \le M \cdot H \le b,$$

если $H \le \dfrac{b}{M}$. Убедимся, что $A: X \to X$ сжимающее отображение.

$$\left|A(y_1) - A(y_2)\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt\right| \le$$

$$\le \max\limits_{(x, y) \in D} \left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \cdot \left|x - x_0\right| \le N \cdot H \cdot \max\limits_{[x_0 - H, x_0 + H]} \left|y_1(t) - y_2(t)\right| =$$

$$= N \cdot H \cdot d(y_1, y_2).$$

Чтобы отображение было сжимающим нужно, чтобы $N \cdot H \le \Theta < 1$, $H \le \dfrac{\Theta}{N} < 1$. Мы доказали, что $A: X \to X$ сжимающее отображение, поэтому уравнение $A(y) = y$ имеет единственное решение. Его можно найти следующим образом: $y_0$, $y_1 = A(y_0)$, $y_2 = A(y_1)$, …, $y_n \to y$. Теорема доказана.

*Замечание 1*. Условие Липшица можно заменить на более легко проверяемое условие. Докажем, что условие Липшица вытекает из существования и непрерывности $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Действительно, если $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна в прямоугольнике, то она и ограничена в нем $\left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$. Тогда по теореме Лагранжа $\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| = \left| f'_y(x,\xi) \right| \cdot \left| y_1 - y_2 \right| \le N \cdot \left| y_1 - y_2 \right|$.

*Замечание 2*. Существование решения уравнения (8) можно доказать лишь в предположении непрерывности функции $f(x,y)$ без условия Липшица, однако одной непрерывности функции $f(x,y)$ недостаточно для доказательства единственности решения.

Пример. Построить последовательные приближения к решению уравнения $y' = y$, $y(0) = 1$.

Решение. Это уравнение эквивалентно интегральному уравнению $y = 1 + \int\limits_0^x y(t)dt$. Сжимающее отображение имеет вид $A(y) = 1 + \int\limits_0^x y(t)dt$.

Тогда $y_1 = A(1) = 1 + \int\limits_0^x dt = 1 + x$, $y_2 = A(y_1) = 1 + \int\limits_0^x (1+t)dt = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$,

$$y_3 = A(y_2) = 1 + \int\limits_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

Следовательно, $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots = e^x$.

# 8. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots y_n) \\ y_2' = f_1(x, y_1, \dots y_n) \\ \dots \\ y_n' = f_1(x, y_1, \dots y_n) \end{cases} \tag{10}$$

с начальными условиями:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{11}$$

Действуя точно также, как для одного уравнения, можно доказать теорему существования и единственности решения системы (10).

**Теорема 8.1.** Пусть в области $D$, определяемой неравенствами: $x_0 - a \le x \le x_0 + a,\ y_{i0} - b_i \le y \le y_0 + b_i$, функции $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ непрерывны, а, следовательно, ограничены $\left| f_i(x, y_1, \dots, y_n) \right| \le M$ и удовлетворяют условию Липшица, то есть $\exists N$ такое, что $\left| f_i(x, y_1, \dots, y_n) - f_i(x, z_1, \dots, z_n) \right| \le N \sum\limits_{i=1}^{n} \left| y_i - z_i \right|$ при $\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Тогда на интервале $(x_0 - H, x_0 + H)$ существует и притом единственное решение $y_1(x), \dots, y_n(x)$ системы (10), удовлетворяющее начальным условиям (11), где $H < \min\left( a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}, \frac{1}{nN} \right)$.

Доказательство. Система (10) с начальными условиями (11) эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1\left(t, y_1, \ldots, y_n\right) dt \\ y_2 = y_{20} + \int\limits_{x_0}^{x} f_2\left(t, y_1, \ldots, y_n\right) dt \\ \ldots \\ y_n = y_{n0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n\left(t, y_1, \ldots, y_n\right) dt \end{cases} \qquad (12)$$

или в векторной форме $\vec{y} = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\left(t, \vec{y}(t)\right) dt$, где $\vec{y}_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0})$,

$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\, dt = \left( \int\limits_{x_0}^{x} f_1 dt,\ \ldots,\ \int\limits_{x_0}^{x} f_n\, dt \right)$.

Точкой пространства $X$ будет теперь система $n$ непрерывных функций $(y_1, \ldots, y_n)$, то есть $n$-мерная вектор-функция $\vec{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$. Расстояние в пространстве $X$ определяется равенством $d(y(x), z(x)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \max\left| y_i - z_i \right|$. При таком определении расстояния множество $X$ всех $n$-мерных вектор-функций $\vec{y}(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ будет полным метрическим пространством. Оператор $A$ определяется равенством: $A(\vec{y}) = \vec{y}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \vec{f}\left(t, \vec{y}(t)\right) dt$, то есть при действии оператора $A$ на точку $(y_1, \ldots, y_n)$ получим точку того же пространства $X$ с координатами, равными правым частям системы (12).

Точка $A(\vec{y}) \in X$, так как все ее координаты являются непрерывными функциями, не выходящими из $D$, если координаты вектор-функции $\vec{y}$ не выходили из $D$. Действительно, $\left|\int\limits_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1, \ldots, y_n\right) dt\right| \le M\left|x - x_0\right| = M \cdot H \le b_i$, и, следовательно, $\left|y_i - y_{i0}\right| \le b_i$.

Остается проверить, что $A(\vec{y})$ – сжимающее отображение.

$$d\left(A(\vec{y}), A(\vec{z})\right) = \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int\limits_{x_0}^{x}\left(f_i\left(t, y_1, \ldots, y_n\right) - f_i\left(t, z_1, \ldots, z_n\right)\right) dt\right| \le$$

$$\le N \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int\limits_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n}\left|y_i - z_i\right| dt\right| \le N \sum_{i=1}^{n} \max\left|y_i - z_i\right| \cdot \sum_{i=1}^{n} \max\left|\int\limits_{x_0}^{x} dt\right| = N \cdot n \cdot H \cdot d(\vec{y}, \vec{z})$$

Чтобы отображение было сжимающим, нужно, чтобы $N \cdot n \cdot H \le \Theta < 1$, то есть $H \le \dfrac{\Theta}{N \cdot n} < \dfrac{1}{N \cdot n}$. Следовательно, существует и притом единственное решение уравнения $A(\vec{y}) = \vec{y}$, которое можно найти путем последовательных приближений. Но условие $A(\vec{y}) = \vec{y}$ по определению отображения $A$ эквивалентно тождествам (12). Теорема доказана.

Пример. Построить два последовательных приближения к решению системы: $\begin{cases} y' = 2x + z, & y(1) = 1 \\ z' = y, & z(1) = 0. \end{cases}$

Решение. Система интегральных уравнений, эквивалентных данной системе с начальными условиями, имеет вид:

$$\begin{cases} y(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x} (2t + z(t)) dt, \\ z(x) = \int\limits_{1}^{x} y(t) dt. \end{cases}$$

Последовательные приближения находим по рекуррентным формулам:

$$y_{n+1}(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x} (2t + z_n(t)) dt, \quad z_{n+1}(x) = \int\limits_{1}^{x} y_n(t) dt, \text{ где } y_0 = 1, \ z_0 = 0.$$

Полагая в этих формулах $n = 0$, найдем

$$y_1(x)=1+\int_1^x 2t\,dt=1+x^2-1=x^2,\quad z_1(x)=\int_1^x dt=x-1.$$

Затем последовательно находим:

$$y_2(x)=1+\int_1^x (2t+t-1)dt=1+\left(\frac{3}{2}t^2-t\right)\Bigg|_1^x=1+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{3}{2}+1=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2},$$

$$z_2(x)=\int_1^x t^2dt=\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^x=\frac{t^3}{3}-\frac{1}{3}.$$

## 9. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ *n*-го ПОРЯДКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение $n$-го порядка имеет вид $F(x, y, y',\ldots, y^{(n)})=0$. Предположим, что это уравнение удалось разрешить относительно $y^{(n)}$, то есть

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}). \tag{13}$$

**Теорема 9.1.** Пусть в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0,y_0',\ldots,y_0{}^{(n-1)})$ функция $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ непрерывна по всем своим аргументам, начиная со второго (или имеет ограниченные частные производные первого порядка по всем аргументам, начиная со второго). Тогда существует и притом единственное решение уравнения (11), удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0',\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем, что уравнение (13) с начальными условиями (14) эквивалентно системе

$$\begin{cases} y'=y_1', \\ y_1'=y_2', \\ \ldots \\ y_{n-2}'=y_{n-1}', \\ y_{n-1}'=f(x,y,y_1,\ldots y_{n-1}) \end{cases} \tag{15}$$

с начальными условиями $y(x_0)=y_0,\quad y_1(x_0)=y_0',\dots,y_{n-1}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}$.

Докажем, что решение системы (15) является решением уравнения (13). Действительно,

$$y_2=y'',\quad y_3=y''',\dots,y_{n-1}=y^{(n-1)},\ y_n=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

Чтобы из уравнения (11) получить систему (13) нужно ввести новые переменные: $y'=y_1, y''=y_2,\ \dots,y^{(n-1)}=y_{n-1}$. Для системы (15) выполнены все условия теоремы существования и единственности: функции $f_1=y_1,\ f_2=y_2,\ \dots,f_n=f$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные $\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}=1,\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}=0,\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}=0,\dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}=0,\dots$

Отсюда и из теоремы существования и единственности для системы вытекает доказываемая теорема.

*Пример*. Построить два последовательных приближения к решению уравнения $y''+(y')^2-2y=0,\quad y(0)=1, y'(0)=0$.

Решение. Положим $y'=z$, тогда получим

$$\begin{cases} z'=2y-z^2, & y(0)=1 \\ y'=z, & z(0)=0. \end{cases}$$

Из рекуррентных формул $z_{n+1}(x)=\int\limits_0^x\left(2y_n(t)-z_n^2\right)dt$ и $y_{n+1}(x)=1+\int\limits_0^x z_n(t)dt$, где $y_0=1,\ z_0=0$, находим

$$z_1(x)=\int\limits_0^x 2dt=2x,\ y_1(x)=1+\int\limits_0^x 0\,dt=1,$$

$$z_2(x)=\int\limits_0^x\left(2-4t^2\right)dt=2x-\frac{4}{3}x^3,\quad y_2(x)=1+\int\limits_0^x 2t\,dt=1+x^2.$$

Рассмотрим уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка:

1. Уравнение $y^{(n)}=f(x)$ решается последовательным интегрированием. Умножаем обе части на $dx$ и интегрируем:

$\int y^{(n)}dx = \int f(x)\,dx$, получаем $y^{(n-1)} = f_1(x) + C_1$. Снова умножаем обе части последнего равенства на $dx$ и интегрируем: $\int y^{(n-1)}dx = \int\left(f_1(x) + C_1\right)dx$, $y^{(n-2)} = f_2(x) + C_1x + C_2$ и т.д. После $n$-кратного интегрирования получаем общее решение этого уравнения в виде явной функции от $x$ и $n$ произвольных постоянных: $y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n$.

*Пример*. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = 60x^2$.

Решение. $y'' = \int 60x^2dx = 20x^3 + C_1$,

$$y' = \int\left(20x^3 + C_1\right)dx = 5x^4 + C_1x + C_2,$$

$$y = \int\left(5x^4 + C_1x + C_2\right)dx = x^5 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

2. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, то есть в уравнении отсутствуют производные до $k$-го порядка включительно. Делаем замену: $y^{(k)} = z$, тогда $y^{(k+1)} = z'$, …, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$. Получим уравнение $(n-k)$-го порядка.

*Пример*. Найти общее решение дифференциального уравнения $y^{(5)} - \frac{1}{x}y^{(4)} = 0$.

Решение. Делаем замену: $y^{(4)} = z$, тогда $y^{(5)} = z'$. Получаем уравнение $z' - \frac{1}{x}z = 0$. Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, $\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x}$, $\ln|z| = \ln|x| + \ln\left|C_1\right|$, $z = C_1x$. Делаем обратную замену: $y^{(4)} = C_1x$ и последовательно интегрируем $y''' = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$,

$$y'' = C_1\frac{x^3}{6} + C_2x + C_3,$$

$$y' = C_1\frac{x^4}{24} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4,$$

$$y = C_1\frac{x^5}{120} + C_2\frac{x^3}{6} + C_3\frac{x^2}{2} + C_4x + C_5.$$

3. Уравнение вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, то есть в уравнении отсутствуют независимая переменная *x*. Делают замену: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$, $y''' = (p'(y))' \cdot p + \cdot p'(y) \cdot p'(y) \cdot y' =$
$= p''(y) \cdot y' \cdot p + (p'(y))^2 \cdot p = p''(y)p^2 + (p')^2 p$.

*Пример.* Найти решение задачи Коши: $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Делаем замену: $y' = p(y)$, тогда $y'' = p' \cdot p$, получаем уравнение $4y^3p'p = y^4 - 16$. Разделяем уравнение и интегрируем: $\int pdp = \int \frac{y^4 - 16}{4y^3}dy$, $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{4}\int ydy - 4\int y^{-3}dy$, $\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{8} + \frac{2}{y^2} + C_1$. Согласно начальным условиям, находим: $\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} + C_1$, отсюда $C_1 = -1$. Имеем $p^2 = \frac{y^2}{4} + \frac{4}{y^2} - 2$ или $p^2 = \left(\frac{y}{2} - \frac{2}{y}\right)^2$, $p = \frac{y}{2} - \frac{2}{y}$ (согласно начальным условиям). Делаем обратную замену: $y' = \frac{y^2 - 4}{2y}$. Вновь разделяем уравнение и интегрируем: $\frac{2y\,dy}{y^2 - 4} = dx$, $\int \frac{d(y^2 - 4)}{y^2 - 4} = \int dx$, $\ln\left|y^2 - 4\right| = \ln\left|C_2e^x\right|$, $y^2 - 4 = C_2e^x$. Согласно начальным условиям, находим $4 = C_2$. Тогда искомое решение: $y^2 = 4 + 4e^x$ или $y = 2\sqrt{1 + e^x}$.

# 10. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО. ФОРМУЛА ОСТРОГРАДСКОГО – ЛИУВИЛЛЯ

Определение. *Линейно-неоднородным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \tag{16}$$

Определение. *Линейно-однородным уравнением n-го порядка* называется уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=0. \tag{17}$$

Будем предполагать, что функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, …., $p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a,\ b]$ и, следовательно, ограничены на нем. Проверим, будут ли выполнены условия теоремы существования и единственности в этом случае. Перепишем уравнение в виде

$$y^{(n)}=f(x)-p_1(x)y^{(n-1)}-p_2(x)y^{(n-2)}-\ldots-p_n(x)y=F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}).$$

Функция $F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ будет непрерывной, так как непрерывны функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, …., $p_n(x)$, $f(x)$. Кроме того,

$\dfrac{\partial F}{\partial y}=-p_n(x)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}=-p_{n-1}(x)$, …, $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}=-p_1(x)$, то есть частные производные также непрерывны. Таким образом, условия теоремы существования и единственности выполнены. Из нее следует, что на отрезке $[x_0-H,x_0+H]$ существует и притом единственное решение уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям: $y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_{10},\ldots,y^{n-1}(x_0)=y_{(n-1)0}$.

Рассмотрим уравнение (17).

Положим $L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y$. $L(y)$ называют линейным дифференциальным оператором. Он обладает свойствами:

1. $L(ky)=kL(y)$
2. $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)$.

Таким образом, множество решений уравнения (17) является линейным пространством. Из свойств 1-2 следует, что линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами решений уравнения (17) является решением того же уравнения.

Рассмотрим множество функций на отрезке $[a, b]$. Будем говорить, что функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Если же это равенство справедливо лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, то функции называются линейно независимыми на $[a, b]$.

Пусть функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ имеют производные до $(n$-1)-го порядка включительно. Определитель

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вронского.

**Теорема 10.1.** Если ($n$-1) раз дифференцируемые функции $y_1(x)$, $y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a, b]$, то $W(x) = 0$.

Доказательство. Так как функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$. Найдем производные от левой и правой частей последнего равенства до ($n$-1)-го порядка включительно:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \ldots + \alpha_n y_n'(x) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Если функции линейно зависимы, то система линейных однородных уравнений с определителем $W(x)$ имеет ненулевое решение.

Тогда определитель этой системы равен нулю для всех $x \in [a,b]$. Теорема доказана.

**Теорема 10.2.** Если линейно независимые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (17), то $W(x) \neq 0 \ \forall x \in [a,b]$.

Доказательство. От противного. Пусть в некоторой точке $W(x_0) = 0$. Так как функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ являются решениями линейного однородного уравнения (17), то их линейная комбинация $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = \tilde{y}(x)$ также будет решением уравнения (17). Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Так как определитель этой системы $W(x_0) = 0$, то система линейных однородных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ будет иметь ненулевое решение. Мы получаем, что функция $\tilde{y}(x)$ будет решением уравнения (17), удовлетворяющим начальным условиям: $\tilde{y}(x_0) = 0, \ \tilde{y}'(x_0) = 0, \ldots, \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0$. Кроме того, у уравнения (17) есть еще одно решение, удовлетворяющее тем же начальным условиям: $y(x) \equiv 0$. Следовательно, из теоремы существования и единственности вытекает, что $\tilde{y}(x) \equiv 0$, то есть функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …., $y_n(x)$ линейно зависимы. Получили противоречие. Теорема доказана.

**Теорема 10.3.** Если линейно независимые функции $y_1(x)$, $y_2(x)$,…., $y_n(x)$ являются частными решениями линейного однородного уравнения (17), то общее решение уравнения (17) есть линейная комбинация частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$,…., $y_n(x)$.

Доказательство. Пусть $y(x) -$ есть общее решение уравнения (17). Мы доказали, что $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = \tilde{y}(x)$ также является решением уравнения (17). Рассмотрим систему линейных относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = y(x_0) \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = y'(x_0) \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x_0) \neq 0$ ни в одной точке, поэтому система имеет решение. Таким образом, мы нашли два решения $\tilde{y}(x)$ и $y(x)$, которые удовлетворяют одним и тем же начальным условиям. Значит по теореме существования и единственности эти решения тождественно равны. Теорема доказана.

*Следствие.* Линейное однородное уравнение $n$-го порядка (17) может иметь не более чем $n$ линейно независимых решений.

*Определение*. Совокупность $n$ линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения $n$-го порядка называется **фундаментальной системой решений.**

Докажем, что линейное однородное уравнение полностью определяется своей фундаментальной системой решений.

**Теорема 10.4.** Пусть два линейных однородных уравнения $n$-го порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)y = 0$ и $y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + q_n(x)y = 0$ имеют одну и ту же фундаментальную систему решений $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots,$ $y_n(x)$. Тогда $p_i(x) = q_i(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Эта фундаментальная система решений будет решениями уравнения $\big(p_1(x) - q_1(x)\big)y^{(n-1)} + \big(p_2(x) - q_2(x)\big)y^{(n-2)} + \ldots + \big(p_n(x) - q_n(x)\big)y = 0$.

Если $p_1(x) - q_1(x) \neq 0$, то это уравнение будет уравнением ($n$-1)-го порядка $y^{(n-1)} + \dfrac{p_2(x) - q_2(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y^{(n-2)} + \ldots + \dfrac{p_n(x) - q_n(x)}{p_1(x) - q_1(x)} y = 0$, имеющее $n$ линейно независимых решений. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следовательно, можно поставить вопрос о нахождении уравнения (17), имеющего заданную фундаментальную систему решений.

Пусть $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ фундаментальная система решений уравнения (17) . Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Убедимся, что $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$ являются решениями этого уравнения. Если вместо $y(x)$ подставить $y_1(x)$, то в определителе получим два одинаковых столбца, а такой определитель равен нулю. Тоже самое произойдет при подстановке вместо $y(x)$ функций $y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$.

Разложим по последнему столбцу:

$$W(x)y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)\cdot y = 0.$$

Полученное уравнение и является искомым линейным однородным уравнением, имеющим заданную фундаментальную систему решений $y_1(x),\ y_2(x),\ldots,\ y_n(x)$.

Разделив обе части на отличный от нуля коэффициент $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$ при старшей производной, приведем его к виду (17).

Отсюда, в частности, следует, что $p_1(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, \ldots y_n)}$.

Заметим, что определитель

$$\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{18}$$

равен производной от определителя Вронского $W(y_1, y_2, \ldots y_n)$. Действительно, по правилу дифференцирования определителя, производная $\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)} & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_{n-1}^{(n)} & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$ равна сумме по $i$ от 1 до $n$ определителей, отличающихся от определителя Вронского тем, что в них продифференцированы элементы $i$-ой строки, а остальные строки определителя Вронского оставлены без изменения. В этой сумме только последний определитель при $i=n$, совпадающий с определителем (18), может быть отличен от нуля. Остальные определители равны нулю, так как их $i$-ая и $i+1$-ая строки совпадают. Следовательно, $p_1(x) = -\frac{W'}{W}$. Отсюда, умножая обе части на $dx$ и интегрируя, получим $\ln|W| = -\int p_1(x)dx + \ln|C|$ или $W = Ce^{-\int p_1(t)dt}$, или

$$W = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \tag{19}$$

При $x = x_0$ получим $C = W(x_0)$, откуда

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}. \tag{20}$$

Формулы (19) и (20), впервые полученные М.В. Остроградским и независимо от него Лиувиллем, называются формулами Остроградского – Лиувилля.

Формула Остроградского – Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \qquad (21)$$

если известно его одно нетривиальное решение $y_1$.

Фундаментальная система решений состоит из двух линейно независимых решений $y_1$ и $y_2$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y \\ y_1' & y_2' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Или $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} y = 0.$

Определитель Вронского $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x) \neq 0$ ни в одной точке.

Тогда функции $y_1$и $y_2$будут решениями уравнения:

$$y'' - \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)} y' + \frac{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)} y = 0. \qquad (22)$$

Так как уравнения (21) и (22) имеют одинаковую фундаментальную систему решений, то $\dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W(x)} = -p_1(x)$. Убедимся, что $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = W'(x)$. Действительно,

$$W'(x) = \left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1'y_2' - y_1''y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Таким образом, мы доказали формулу $p_1(x) = -\dfrac{W'(x)}{W(x)}$.

Но $\dfrac{W'(x)}{W(x)} = \left(\ln|W(x)|\right)'$, поэтому $\left(\ln|W(x)|\right)' = -p_1(x)$. Отсюда $\ln|W| = -\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt + \ln|C|$, или $W = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Подставив вместо $x = x_0$, получим $C = W(x_0)$, откуда $W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. (23)

Используя формулу (23), можно, зная одно решение линейного однородного уравнения, найти второе решение. Пусть $y_1$ есть одно решение, тогда $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Имеем $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$.

Разделим обе части $y_1^2$, получим $\dfrac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \dfrac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$, или $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$. Отсюда $y_2 = y_1 \int \dfrac{C}{y_1^2} e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p_1(t)dt} dx + C_2 y_1$.

*Примеры*. 1) Исследовать, являются ли данные функции линейно зависимыми: а) $y_1 = x + 2$ и $y_2 = x - 2$.

Решение. По определению должны существовать числа $\alpha_1$ и $\alpha_2$ такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0$ или $\alpha_1 x + 2\alpha_1 + \alpha_2 x - 2\alpha_2 = 0$. Отсюда получаем систему: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$. Решением этой системы служат числа $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, следовательно, исходные функции линейно независимы.

б) $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$.

Решение. Имеем $\alpha_1\left(x^2-x+3\right)+\alpha_2\left(2x^2+x\right)+\alpha_3(2x-4)=0$. Это уравнение равносильно системе: $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=0\\ 3\alpha_1-4\alpha_3=0\end{cases}$. Решим ее методом Гаусса. Выпишем матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&2\\0&-6&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&2\end{pmatrix}.$$

Восстановим систему: $\begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ 3\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$. Отсюда находим $\alpha_1=-2\alpha_2$, $\alpha_3=-\dfrac{3}{2}\alpha_2$. Следовательно, данная система функций будет линейно зависима.

в) $y_1=\sin x$, $y_2=\cos x$, $y_3=\sin 2x$.

Решение. Составим определитель Вронского для этой системы функций:

$$\begin{vmatrix}\sin x&\cos x&\sin 2x\\ \cos x&-\sin x&2\cos 2x\\ -\sin x&-\cos x&-4\sin 2x\end{vmatrix}=\sin x(4\sin x\cdot\sin 2x+2\cos x\cdot\cos 2x)-$$

$$-\cos x(-4\cos x\cdot\sin 2x+2\sin x\cdot\cos 2x)+\sin 2x\left(-\cos^2 x-\sin^2 x\right)=$$

$$=\sin x(2\sin x\cdot\sin 2x+2\cos x)-\cos x(-2\cos x\cdot\sin 2x-2\sin x)-\sin 2x=$$

$$=2\sin^2 x\cdot\sin 2x+\sin 2x+2\cos^2 x\cdot\sin 2x+\sin 2x-\sin 2x=3\sin 2x\neq 0.$$

Таким образом, данные функции линейно независимы (если бы они были линейно, определитель Вронского был бы тождественно равен нулю для всех действительных $x$).

2) Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, имеющее данные частные решения: $y_1=1$ и $y_2=\cos x$.

Решение. Очевидно, что функции $y_1 = 1$ и $y_2 = \cos x$ линейно независимы, поэтому искомое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0,\ -\sin x \cdot y'' + \cos x \cdot y = 0,\ \sin x \cdot y'' - \cos x \cdot y = 0.$$

3) Найти второе частное решение уравнения $xy'' + 2y' + xy = 0$, если известно одно нетривиальное решение $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$.

Решение. По формуле Остроградского – Лиувилля имеем:
$y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int p_1(x)dx}$, где $p_1(x) = \dfrac{2}{x}$, $x \neq 0$. Тогда $y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-2\ln|x|}$, $y_1 y_2' - y_2 y_1' = \dfrac{C}{x^2}$. Отсюда, разделив обе части на $y_1^2$, получим $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{C}{y_1^2 x^2}$. Следовательно,

$$y_2 = y_1 \int \frac{C_1}{y_1^2 x^2} dx = \frac{C_1 \sin x}{x} \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = \frac{C_1 \sin x}{x}\left(-ctgx + C_2\right).$$

Общее решение $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = \alpha_1 \dfrac{\sin x}{x} - \alpha_2 C_1 \dfrac{\cos x}{x} +$
$+\alpha_2 C_1 C_2 \dfrac{\sin x}{x} = \tilde{C}_1 \dfrac{\sin x}{x} + \tilde{C}_2 \dfrac{\cos x}{x}$.

## 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим линейное однородное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0, \qquad (24)$$

где $p_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$.

Его частные решения могут быть найдены в виде $y = e^{\lambda x}$, где $\lambda = const$. Действительно, подставляя в (24) $y = e^{\lambda x}$, $y^{(p)} = \lambda^p e^{\lambda x}$,

$p=\overline{1,n}$, будем иметь $\lambda^n e^{\lambda x}+p_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\ldots+p_n e^{\lambda x}=0$. Сокращая на $e^{\lambda x}\neq 0$, получим так называемое *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+\ldots+p_n=0. \qquad (25)$$

Это уравнение $n$-ой степени определяет те значения $\lambda$, при которых $y=e^{\lambda x}$ является решением исходного уравнения (24) . Если все корни $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n$ характеристического уравнения различны, то, тем самым, найдено $n$ решений $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x},\ldots e^{\lambda_n x}$ уравнения (24). Следовательно, $y=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}+\ldots+C_n e^{\lambda_n x}$, где $C_i$ – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (24). Покажем, что они линейно независимы. Допустим противное, тогда $\alpha_1 e^{\lambda_1 x}+\alpha_2 e^{\lambda_2 x}+\ldots+\alpha_n e^{\lambda_n x}=0$, (*) где хотя бы одно их $\alpha_i\neq 0$, например, для определенности, $\alpha_n\neq 0$. Разделим тождество (*) на $e^{\lambda_1 x}$ и продифференцировав, получим $\alpha_2(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\ldots+\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)e^{(\lambda_n-\lambda_1)x}=0$ линейную зависимость между ($n$-1) показательными функциями вида $e^{px}$ с различными показателями. Деля полученное тождество на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}$ и дифференцируя, получим линейную зависимость между ($n$-2) показательными функциями с различными коэффициентами. Повторяя процесс $n$-1 раз, получим:

$\alpha_n(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n-\lambda_2)(\lambda_n-\lambda_3)\cdot\ldots\cdot(\lambda_n-\lambda_{n-1})e^{(\lambda_n-\lambda_{n-1})x}\equiv 0$, что невозможно, так как $\alpha_n\neq 0$ по предположению, а $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$. Следовательно, $y=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}+\ldots+C_n e^{\lambda_n x}$, где $C_i$ – произвольные постоянные, является общим решением уравнения (24).

*Пример*. Решить уравнение $y'''-y'=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^3-\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Следовательно, общее решение $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x}$.

Пусть среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Докажем, что если характеристическое уравнение имеет корень $\lambda_i$ кратности *k*, то решениями исходного уравнения будут функции $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots x^{k-1}e^{\lambda_n x}$. Пусть уравнение (25) имеет корень $\lambda_i = 0$ кратности *k*, тогда оно имеет вид: $\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-k}\lambda^k = 0$. Соответствующее линейное однородное уравнение $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-k} y^{(k)} = 0$ имеет, очевидно, частные решения $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Итак, кратному корню $\lambda_i = 0$ кратности *k* соответствует *k* линейно независимых решений: $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Если уравнение (25) имеет корень $\lambda_i \neq 0$ кратности *k*, то сделаем замену $y = e^{\lambda_i x} z$. Это преобразование сохраняет линейность и однородность уравнения, а также постоянство коэффициентов, т.к.

$$y^{(p)} = \left(e^{\lambda_i x} z\right)^{(p)} = e^{\lambda_i x}\left(z^{(p)} + p \cdot z^{(p-1)}\lambda_i + \frac{p(p-1)}{2!} z^{(p-2)}\lambda_i^2 + \ldots + z\lambda_i^p\right)$$

и после подстановки в уравнение (24) и сокращения на $e^{\lambda_i x}$ при $z, z', \ldots, z^{(n)}$ остаются лишь постоянные коэффициенты.

Итак, преобразованное уравнение будет линейным однородным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + b_2 z^{(n-2)} + \ldots + b_n z = 0. \tag{26}$$

Корни характеристического уравнения (25) отличаются от корней характеристического уравнения для преобразованного уравнения (26)

$$\mu^n + b_1\mu^{n-1} + b_2\mu^{n-2} + \ldots + b_n\mu = 0 \tag{27}$$

на слагаемое $\lambda_i$, так как между решениями $y = e^{\lambda x}$ уравнения (25) и $z = e^{\mu x}$ уравнения (26) должна быть зависимость $y = ze^{\lambda_i x}$ или $e^{\lambda x} = e^{\mu x} \cdot e^{\lambda_i x}$, откуда $\lambda = \mu + \lambda_i$. Следовательно, корню $\lambda = \lambda_i$ уравнения (26) соответствует корень $\mu_i = 0$ уравнения (27). При этом соответствии сохраняется и кратность корня, то есть корень $\mu_i = 0$ будет иметь кратность $k$.

Корню $\mu = 0$ кратности $k$ соответствуют частные решения $z = 1,\ z = x, \ldots, z = x^{k-1}$. Следовательно, в силу зависимости $y = ze^{\lambda_i x}$ корню $\lambda_i$ кратности $k$ будут соответствовать $k$ частных решений $y = e^{\lambda_i x},\ y = xe^{\lambda_i x},\ \ldots,\ y = x^{k-1}e^{\lambda_i x}$.

Остается показать, что решения $e^{\lambda_i x},\ xe^{\lambda_i x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_i x},\ i = \overline{1,m}$, где $m$- число различных корней $\lambda_i$ характеристического уравнения, линейно независимы. Пусть функции

$$
\begin{array}{l}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_1 x},\\
e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_2 x},\\
\ldots\\
e^{\lambda_m x},\ xe^{\lambda_m x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda_m x}
\end{array}
$$

линейно зависимы, тогда $P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_m(x)e^{\lambda_m x} \equiv 0$, где $P_i(x)$ – многочлены степени $k$.

Следовательно, общее решение уравнения (24) имеет вид $y = \sum\limits_{i=1}^{m}\left(C_{0i} + C_{1i}x + C_{2i}x^2 + \ldots + C_{(k-1)i}x^{k-1}\right)e^{\lambda_i x}$, где $C_{ij}$ – произвольные постоянные.

*Пример*. Решить уравнение $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^3 = 0$ имеет корень $\lambda = 1$ кратности 3. Следовательно, общее решение $y = \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right)e^x$.

Пусть среди корней характеристического уравнения есть комплексные числа. Так коэффициенты уравнения (24) предполагаются действительными, то комплексные корни могут быть только сопряженными: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Им соответствуют два решения $e^{(\alpha + i\beta)x}$, $e^{(\alpha - i\beta)x}$. Или по формуле Эйлера $e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ и

$e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Подберем линейную комбинацию так, чтобы получились действительные функции:

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Докажем их линейную независимость:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha}{2}\sin 2\beta x + \beta\cos^2\beta x - \frac{\alpha}{2}\sin 2\beta x + \beta\sin^2\beta x\right) = \beta e^{\alpha x} \neq 0.$$

Таким образом, паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ соответствует решение $e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$.

*Решение.* Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ имеет корни $\lambda = -2 \pm i$. Следовательно, общее решение $y = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности $k$. Соответствующие корню $\alpha + i\beta$ решения $e^{(\alpha+i\beta)x}$, $xe^{(\alpha+i\beta)x}$, $x^2e^{(\alpha+i\beta)x}$, …, $x^{(k-1)}e^{(\alpha+i\beta)x}$ можно преобразовать по формуле Эйлера $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + \sin\beta x)$ и, отделяя действительную и мнимую части, получим $2k$ действительных решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \qquad (28)$$

Взяв действительные и мнимые части решений, соответствующих сопряженному корню $\alpha - i\beta$, мне не получим новых линейно независимых решений. Таким образом, паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ кратности $k$ соответствуют $2k$ действительных решений (28).

*Пример*. Решить уравнение $y^{(4)}+2y''+y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$ имеет корни $\lambda=\pm i$ кратности 2. Следовательно, общее решение $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$.

## 12. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ С КВАЗИМНОГОЧЛЕНОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение $n$-го порядка с постоянными коэффициентами, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=f(x), \tag{29}$$

где $p_i\in\boldsymbol{R},\ i=\overline{1,n}$. Общее решение этого уравнения: $y_{о.н.}=y_{о.о.}+y_{ч.н.}$ есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то можно найти частные решения уравнений

$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=f_1(x)$ и

$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=f_2(x)$, тогда частное решение уравнения (29) будет равно сумме частных решений.

Рассмотрим несколько видов правой части уравнения (29).

1) Пусть правая часть уравнения (29) является многочленом степени $s$:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=a_0x^s+a_1x^{s-1}+\ldots+a_s, \tag{30}$$

где $a_i\in\boldsymbol{R},\ i=\overline{0,n}$.

Если $p_n\neq 0$ (то есть $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения), то частное решение уравнения (30) можно найти в виде

$y=b_0x^s+b_1x^{s-1}+\ldots+b_s$. Найдем производные:

$y'=sb_0x^{s-1}+b_1(s-1)x^{s-2}+\ldots+b_{s-1}$,

$y''=s(s-1)b_0x^{s-2}+b_1(s-1)(s-2)x^{s-3}+\ldots+2b_{s-2}$,

$\ldots$,

подставим в уравнение (30) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим систему линейных уравнений:

при $x^S$: $p_n b_0 = a_0 \Rightarrow b_0 = \dfrac{a_0}{p_n}$,

при $x^{S-1}$: $p_n b_1 + s p_{n-1} b_0 = a_1 \Rightarrow b_1 = \dfrac{a_1 - s p_{n-1} b_0}{p_n}$,

при $x^{S-2}$: $p_n b_2 + (s-1) p_{n-1} b_1 + s(s-1) p_{n-2} b_0 = a_2$,

из которой последовательно находим неизвестные постоянные $b_i$.

*Пример*. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$. Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = ax^2 + bx + c$, тогда $y'_{ч.н.} = 2ax + b$, $y''_{ч.н.} = 2a$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$2a - 12ax - 6b + 9ax^2 + 9bx + 9c = 2x^2 - x + 3$.

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

при $x^2$: $9a = 2$,

при $x$: $-12a + 9b = -1$,

при $x^0$: $2a - 6b + 9c = 3$.

Отсюда последовательно находим $a = \dfrac{2}{9}$, $b = \dfrac{5}{27}$, $c = \dfrac{11}{27}$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

2) Пусть $\lambda = 0$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения, то есть уравнение имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-k} y^{(n-k)} = a_0 x^S + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s. \quad (31)$$

Сделав замену $y^{(k)} = z$, придем к предыдущему случаю, следовательно, существует частное решение уравнения (31), для которого

$y^{(k)} = b_0 x^S + b_1 x^{s-1} + ... + b_s$, а, значит, $y$ является многочленом степени $s+k$, причем члены, начиная со степени $k-1$ и ниже, у этого многочлена будут иметь произвольные постоянные коэффициенты, которые могут быть выбраны равными нулю. Тогда частное решение уравнения (31) примет вид: $y = x^k \left( b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + ... + b_s \right)$.

*Пример*. Решить уравнение $y'' - y' = 2 - 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - \lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 0$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^x$. Так как $\lambda = 0$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = x(ax+b) = ax^2 + bx$, тогда $y'_{ч.н.} = 2ax + b$, $y''_{ч.н.} = 2a$. Подставим эти выражения в исходное уравнение: $2a - 2ax - b = 2 - 2x$. Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

при $x$: $-2a = -2$,

при $x^0$: $2a - b = 2$.

Отсюда последовательно находим $a = 1$, $b = 0$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = 2x^2$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = C_1 + C_2 e^x + 2x^2$.

3) Пусть правая часть уравнения (29) имеет вид:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = e^{px}\left( a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s \right). \quad (32)$$

Замена переменной $y = e^{px} \cdot z$ преобразует уравнение (32) к виду:

$$e^{px}\left( z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_n z \right) = e^{px}\left( a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s \right),$$

где

$q_i \in \boldsymbol{R}$, $i = \overline{1,n}$ или

$$z^{(n)} + q_1 z^{(n-1)} + q_2 z^{(n-2)} + \ldots + q_n z = a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + ... + a_s. \quad (33)$$

Частное решение уравнения (33), если $q_n \neq 0$ означает, что $\mu = 0$ не является корнем характеристического уравнения

$$\mu^n + q_1 \mu^{n-1} + q_2 \mu^{n-2} + \ldots + q_n = 0, \quad (34)$$

а, следовательно, $\lambda = p$ не является корнем характеристического уравнения

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots + p_n = 0, \qquad (35)$$

так как корни этих уравнений связаны зависимостью $\lambda = \mu + p$.

Если $\mu = 0$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения (34) , то $\lambda = p$ будет корнем кратности $k$ характеристического уравнения (35). Тогда частные решения уравнений (32) и (33) имеют вид $y = x^k e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$.

Таким образом, если правая часть уравнения (29) имеет вид $e^{px}\left(a_0 x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s\right)$, то, если $\lambda = p$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение нужно искать в виде: $y = e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$. Если же $\lambda = p$ является корнем кратности $k$ характеристического уравнения, то частное решение нужно искать в виде: $y = x^k e^{px}\left(b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \ldots + b_s\right)$. Этот случай называют особым или резонансным.

*Пример*. Решить уравнение $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 + C_2 e^{2x}$. Так как $\lambda = 1$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = e^x(ax^2 + bx + c)$, тогда $y'_{ч.н.} = e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)$, $y''_{ч.н.} = e^x(ax^2 + 2bx + c + 4ax + b)$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$e^x(ax^2 + bx + c + 4ax + 2b + 2a - 2ax^2 - 2bx - 2c - 4ax - 2b) = e^x(x^2 + x - 3).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

при $x^2$: $-2a = 1$,

при $x$: $-b = 1$,

при $x^0$: $2a - c = -3$.

Отсюда последовательно находим $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$, $c=2$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.}=e^{x}\left(-\frac{1}{2}x^{2}-x+2\right)$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.}=C_1+C_2e^{2x}+e^{x}\left(-\frac{1}{2}x^{2}-x+2\right)$.

4) Пусть правая часть уравнения (29) имеет вид:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_ny=e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right), \quad (36)$$

$P(x)$ и $Q(x)-$ некоторые многочлены, $s=\max(\deg P(x),\deg Q(x))$. Преобразуем правую часть по формулам Эйлера

$$e^{(\alpha+i\beta)x}R_s(x)+e^{(\alpha-i\beta)x}T_s(x), \quad (37)$$

где $R_s(x)$ и $T_s(x)-$многочлены степени $s$. Для каждого слагаемого правой части можно применить указанное выше правило, а именно, если $\alpha\pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно искать в таком же виде, как и правая часть уравнения (37). Если же $\alpha\pm i\beta$ является корнем характеристического уравнения, то частное решение приобретает еще множитель $x^k$.

Если опять вернуться к тригонометрическим функциям, то это правило можно сформулировать следующим образом: частное решение уравнения (37) ищется в виде $x^ke^{\alpha x}\left(P_s(x)\cos\beta x+Q_s(x)\sin\beta x\right)$, где $k-$кратность корня $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения, $P_s(x)$ и $Q_s(x)-$многочлены степени $s$ с неопределенными коэффициентами.

*Пример*. Решить уравнение $y''+y=-\sin 2x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+1=0$ имеет чисто мнимые комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.}=C_1\cos x+C_2\sin x$. Так как $\lambda=\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.}=A\cos 2x+B\sin 2x$, тогда $y'_{ч.н.}=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$, $y''_{ч.н.}=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = -\sin 2x$$
и приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$:

при $\cos 2x$: $-3A = -1,\ A = \dfrac{1}{3}$,

при $\sin 2x$: $-3B = 0$, $B = 0$. Следовательно, частное решение $y_{ч.н.} = \dfrac{1}{3}\cos 2x$, а общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

*Пример*. Решить уравнение $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = e^{-3x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Правая часть представляет собой сумму двух квазимногочленов $3xe^{-3x}$ и $-2e^{3x}\cos x$. Так как $\lambda = -3$ и $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде суммы двух частных решений $y_{ч.н.1} = (Ax + B)e^{-3x}$ и $y_{ч.н.2} = e^{3x}(C\cos x + D\sin x)$, тогда $y'_{ч.н.1} = (A - 3Ax - 3B)e^{-3x}$, $y''_{ч.н.1} = (-3A - 3A + 9Ax + 9B)e^{-3x}$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:
$$(-6A + 9Ax + 9B)e^{-3x} + 6(A - 3Ax - 3B)e^{-3x} + 10(Ax + B)e^{-3x} = 3xe^{-3x},$$
сокращаем на $e^{-3x}$ и приравниваем коэффициенты при $x$ и $x^0$:

при $x$: $A = 3$,

при $x^0$: $B = 0$. Следовательно, первое частное решение $y_{ч.н.1} = 3e^{-3x}$.

Аналогично находим
$$y'_{ч.н.2} = (-C\sin x + D\cos x + 3C\cos x + 3D\sin x)e^{3x},$$
$y''_{ч.н.2} = (8C\cos x + 8D\sin x - 6C\sin x + 6D\cos x)e^{3x}$. Подставим эти выражения в исходное уравнение:
$$(8C\cos x + 8D\sin x - 6C\sin x + 6D\cos x)e^{3x} +$$

$$+6(-C\sin x+D\cos x+3C\cos x+3D\sin x)e^{3x}+10e^{3x}(C\cos x+D\sin x)=$$

$=-2e^{3x}\cos x$. Сокращаем на $e^{3x}$ и приравняем коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$:

при $\cos x$: $36C+12D=-2$,

при $\sin x$: $36D-12C=0$.

Отсюда находим $D=-\dfrac{1}{60}, C=-\dfrac{1}{20}$. Следовательно, второе частное решение $y_{ч.н.2}=e^{3x}\left(-\dfrac{1}{20}\cos x-\dfrac{1}{60}\sin x\right)$. А общее решение неоднородного уравнения

$$y_{о.н.}=e^{-3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-3x}+e^{3x}\left(-\frac{1}{20}\cos x-\frac{1}{60}\sin x\right).$$

## 13. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. НАХОЖДЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x). \qquad (38)$$

Соответствующее однородное уравнение

$$L(y)=y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=0, \qquad (39)$$

функции $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_n(x), f(x)$ непрерывны на $(a,b)$.

*Свойство 1.*Если $y_1, y_2,\ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (39) и $\tilde{y}$ – частное решение уравнения (38), то $y(x)=\tilde{y}(x)+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ будет решение уравнения (38).

Доказательство. Действительно,
$L(y)=L(\tilde{y})+C_1L(y_1)+C_2L(y_2)+\ldots+C_nL(y_n)=0$. Свойство доказано.

*Свойство 2.* Если $\tilde{y}$ – частное решение уравнения (38), $y_1, y_2,\ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (39) и $y(x)$ – произвольное решение уравнения (38), то найдутся постоянные $C_1, C_2,\ldots, C_n$ такие, что $y(x)=\tilde{y}(x)+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$, то есть это и есть общее решение уравнения (38).

Доказательство. Если $\tilde{y}(x)$ и $y(x)$ – решения уравнения (38), то $y-\tilde{y}$ будет решением уравнения (39), так как $L(y-\tilde{y})=L(y)-L(\tilde{y})=f(x)-f(x)=0$. А любое решение однородного уравнения есть линейная комбинация его фундаментальной системы решений. Свойство доказано.

*Свойство 3.* (метод суперпозиции)

Если $\tilde{y}_1$ – решение уравнения $L(y)=f_1(x)$, а $\tilde{y}_2$ – решение уравнения $L(y)=f_2(x)$, то $\tilde{y}_1+\tilde{y}_2$ – решение уравнения $L(y)=f_1(x)+f_2(x)$.

**Метод вариации постоянной**

Рассмотрим уравнение (38). Пусть $y_1,y_2,\ldots,y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (39), тогда общее решение уравнения (39) будет иметь вид $y_{o.o}(x)=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$. Будем искать решение уравнения (38) в виде $y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+\ldots+C_n(x)y_n$. Тогда $y'(x)=C_1'(x)y_1+\ldots+C_n'(x)y_n+C_1(x)y_1'+\ldots+C_n(x)y_n'$. Накладываем условие $C_1'(x)y_1+\ldots+C_n'(x)y_n=0$. Далее находим

$$y''(x)=C_1'(x)y_1'+\ldots+C_n'(x)y_n'+C_1(x)y_1''+\ldots+C_n(x)y_n''.$$

Опять накладываем условие: $C_1'(x)y_1'+\ldots+C_n'(x)y_n'=0$. И так далее

$$y^{(n-1)}(x)=C_1'(x)y_1^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}+C_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n-1)}.$$

Накладываем условие: $C_1'(x)y_1^{(n-2)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0$,

$$y^{(n)}(x)=C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}+C_1(x)y_1^{(n)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n)}.$$

В последнем равенстве ничего не будем приравнивать к нулю и подставим выражения для всех производных в уравнение (38):

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}+C_1(x)y_1^{(n)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n)}+$$

$$p_1(x)\left(C_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n-1)}\right)+\ldots+p_n(x)\left(C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n\right)=$$

$$=C_1L(y_1)+\ldots+C_nL(y_n)+C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x).$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы – определитель Вронского $W(x) \neq 0$, следовательно, можно найти $C_1', \ldots C_n'$, а, затем и сами функции $C_1, \ldots C_n$.

*Пример*. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y_{о.н.} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Система метода вариации постоянных имеет вид:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, второе уравнение – на $\cos x$ и сложим, получим $C_2' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, отсюда

$$C_2 = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$= \ln|\sin x| + \tilde{C}_2$. Тогда $C_1' = -C_2' \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1$, $C_1 = -\int dx = -x + \tilde{C}_1$. Окончательно получаем

$$y_{о.н.} = \left(-x + C_1\right)\cos x + \left(\ln|\sin x| + C_2\right)\sin x.$$

# 14. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. *Общие понятия*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\ \dots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n), \end{cases} \qquad (40)$$

удовлетворяющую начальным условиям $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = \overline{1, n}$. Систему (40) можно записать в векторном виде $\frac{d\vec{x}}{dt} = F(\vec{x}, t)$, где $F(\vec{x}, t) -$ вектор-функция с координатами $(f_1, f_2, \dots f_n)$, а начальные условия в виде $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, где $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Решением системы (40) является *n*-мерная вектор-функция $\vec{x} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. Если правые части системы (40) не зависят явно от *t*, то в евклидовом пространстве с прямоугольными координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ решение $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ определяет закон движения по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра *t*, который мы будем считать временем. Производная $\frac{d\vec{x}}{dt}$ будет скоростью движения точки, а $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} -$ координатами скорости той же точки. При этой интерпретации система (40) называется динамической, пространство с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ фазовым, а кривая $\vec{x} = \vec{x}(t) -$фазовой траекторией.

Динамическая система (40) в заданный момент времени *t* определяет в пространстве $x_1, x_2, \dots, x_n$ векторное поле скоростей. Если вектор-функция $F(\vec{x}, t)$ явно зависит от *t*, то поле скоростей меняется с течением времени и фазовые траектории могут пересекаться. Если же вектор-функция $F(\vec{x}, t)$ не зависит явно от *t*, то поле скоростей будет стационарно и движение будет установившемся. В этом случае, если выполнены условия теоремы существования и единственности, то через каждую точку фазового пространства будет проходить лишь одна траектория.

2. *Интегрирование системы дифференциальных уравнений.*

Рассмотрим систему (40). Ее интегрирование проводят следующим образом: дифференцируют первое уравнение по $t$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{df_1}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{dt}$$

или $\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{df_1}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}f_i$

и, обозначив правую часть последнего равенства $F_2(t,x_1,\dots,x_n)$, получим $\frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,\dots,x_n)$. Дифференцируя полученное равенство по $t$ и поступая аналогично предыдущему, найдем $\frac{d^3x_1}{dt^3}=F_3(t,x_1,\dots,x_n)$.

Продифференцировав $n-1$, придем к уравнению $\frac{d^nx_1}{dt^n}=F_n(t,x_1,\dots,x_n)$.

Таким образом, получена система из $n$ уравнений:

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\dots x_n)\\ \frac{d^2x_1}{dt^2}=F_2(t,x_1,\dots,x_n)\\ \dots\\ \frac{d^nx_1}{dt^n}=F_n(t,x_1,\dots,x_n).\end{cases}\qquad(41)$$

Выражая из первых $n-1$ уравнений $x_2,\dots,x_n$ через $t,x_1,x_1',\dots,x_1^{(n-1)}$ и подставляя в последнее, получим уравнение $n$-го порядка относительно $x_1$:

$$\frac{d^nx_1}{dt^n}=Q(t,x_1,x_1'\dots,x_n^{(n-1)}).\qquad(42)$$

Решая это уравнение, находим $x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$. Дифференцируя это выражение $n-1$ раз, находим $x_1', x_1'' \ldots, x_1^{(n-1)}$ и подставляем в выражение для $x_2, \ldots, x_n$, находим $x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\ldots, x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n)$.

Замечание 1. Если система (40) линейна, то и уравнение (42) будет линейным.

Замечание 2. В приведенных рассуждениях мы предполагали, что из первых $n-1$ уравнений системы (41) можно выразить $x_2, \ldots, x_n$. Может случиться, что $x_2, \ldots, x_n$ исключаются из меньшего числа уравнений. Тогда для определения $x_1$ получается уравнение, порядок которого ниже $n$.

*Пример*. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z + x, & y(0) = 1 \\ \dfrac{dz}{dy} = -4y - 3z + 2x, & z(0) = 0 \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение $y'' = y' + z' + 1$. Подставим вместо $y'$ и $z'$ выражения из первого и второго уравнений системы, получим: $y'' = y + z + x - 4y - 3z + 2x + 1$, или $y'' = -3y - 2z + 3x + 1$. Выразим $z$ из первого уравнения системы: $z = y' - y - x$. Тогда $y'' = -3y - 2y' + 2y + 2x + 3x + 1$, $y'' + 2y' + y = 5x + 1$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda_{1,2} = -1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид: $y_{о.о.} = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$. Правая часть представляет собой линейную функцию. Так как $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, то частное решение уравнения можно найти в виде $y_{ч.н.} = Ax + B$, $y'_{ч.н.} = A$, $y''_{ч.н.} = 0$. Подставляем в уравнение: $2A + Ax + B = 5x + 1$ и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

при $x$: $A = 5$,

при $x^0$: $2A + B = 1$, $B = -9$.

Тогда общее решение неоднородного уравнения $y_{о.н.} = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + 5x - 9$. Найдем $y'_{о.н.} = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 5$, тогда $z = e^{-x}(C_2 - C_1 - C_2 x) + 5 - e^{-x}(C_1 + C_2 x) - 5x + 9 - x$ или $z = e^{-x}(C_2 - 2C_1 - C_2 x) - 6x + 14$. Подставим начальные условия: $1 = C_1 - 9$, $10 = C_1$ и $0 = C_2 - 2C_1 + 14$, $6 = C_2$. Тогда окончательно получим: $y = e^{-x}(10 + 6x) + 5x - 9$, $z = e^{-x}(-14 - 12x) - 6x + 14$.

3. *Системы линейных уравнений первого порядка.*

Система дифференциальных уравнений называется *линейной,* если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных. Система $n$ линейных уравнений первого порядка, записанная в нормальной форме, имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + f_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{43}$$

Ее можно записать в матричном виде $\dot{X} = A(t)X + F(t)$, вводя обозначения: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

Эта система называется однородной, если $F(t) \equiv 0$ и неоднородной в противном случае. Если все функции $a_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ в (43) непрерывны на $[a,b]$, то в малой окрестности точки $(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0})$, где $t_0 \in [a,b]$, выполнены условия теоремы существования и единственности и, следовательно, через каждую точку проходит единственная интегральная кривая системы (43). Действительно, в этом случае правые части системы (43) непрерывны и их частные производные по всем $x_j$ ограничены, так как они равны непрерывным на отрезке $[a,b]$ коэффициентам $a_{ij}(t)$.

**Теорема 14.1.** Решения однородной системы $n$ линейных уравнений первого порядка образуют $n$-мерное линейное пространство.

Базис этого пространства называется *фундаментальной системой решений*. Таким образом, если $X_1(t), \dots, X_n(t)$ фундаментальная система решений линейной однородной системы, то ее общее решение имеет вид $X(t)=c_1X_1(t)+\ldots+c_nX_n(t)$ или $X(t)=C\cdot\Phi(t)$, где $\Phi(t)=\left(X_1(t),\ldots,X_n(t)\right)$, а $C=\begin{pmatrix}c_1\\ \ldots\\ c_n\end{pmatrix}$ – постоянный вектор столбец. Матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\cdot X$. Определителем Вронского набора вектор-функций $X_1(t),\ldots,X_n(t)$ называется определитель матрицы $\Phi(t)=\left(X_1(t),\ldots,X_n(t)\right)$. Имеет место теорема Лиувилля: определитель Вронского $W(t)$ набора решений системы уравнений $\frac{dX}{dt}=A(t)\cdot X$ удовлетворяет уравнению $\frac{dW}{dt}=Tr\,A(t)\cdot W$ и, в частности, $W(t)=W(t_0)\cdot e^{\int_{t_0}^{t}TrA(\tau)d\tau}$, (формула Остроградского – Лиувилля)

где $Tr\,A(t)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ – след матрицы, сумма диагональных элементов.

Из формулы Остроградского – Лиувилля следует, что определитель Вронского набора решений либо не обращается в нуль, либо равен нулю тождественно. Эти два случая в точности означают линейную зависимость и независимость набора решений соответственно. Определитель Вронского фундаментальной системы решений не обращается в нуль. В этом случае матрица $\Phi(t)$ обратима. Верно и обратное, что столбцы матричного решения $\Phi(t)$ уравнения $\frac{d\Phi}{dt}=A(t)\cdot\Phi$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы, если определитель этого решения отличен от нуля хотя бы в одной точке (то есть матрица обратима хотя бы в одной точке).

**Теорема 14.2.** Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

Как и в случае линейного однородного уравнения, общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных в виде $X(t)=C(t)\cdot\Phi(t)$. Подстановка в систему (43) $X(t)=C(t)\cdot\Phi(t)$ и $\frac{dX}{dt}=\frac{d\Phi}{dt}C(t)+\frac{dC}{dt}\Phi(t)$, приводит к системе:

$$\dot{\Phi}(t)\cdot C(t)+\dot{C}(t)\cdot\Phi(t)=A(t)\cdot\Phi(t)\cdot C(t)+F(t)$$

или $\dot{C}(t)=\Phi^{-1}(t)\cdot F(t)$.

Последнюю систему называют системой метода вариации произвольных постоянных. Из последнего уравнения интегрированием находят вектор $C(t)$. Его подстановка в общее решение однородной системы дает общее решение неоднородной системы. В указанной процедуре есть один вопрос – как найти фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы. Рассмотрим этот вопрос для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n \\ \ldots \\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (44)$$

или $\frac{dX}{dt}=AX$, где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij}\in\boldsymbol{R}$, $t-$аргумент. Будем искать частное решение системы (44) в виде $x_1=b_1e^{\lambda t}$, $x_2=b_2e^{\lambda t}$, …, $x_n=b_ne^{\lambda t}$ или $X=Be^{\lambda t}$, где $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$, $\lambda-const$.

Подставим выражения для $x_1,\ldots,x_n$ и их производных в систему (44), получим $\lambda Be^{\lambda t}=ABe^{\lambda t}$. Сокращая на $e^{\lambda t}$ и перенося в одну часть, получим

$$(A-\lambda E)B=0. \qquad (45)$$

Это система однородных уравнений относительно $b_1,\dots,b_n$. Для того, чтобы этой системе удовлетворяла ненулевая матрица $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ необходимо и достаточно, чтобы $\det(A-\lambda E)=0$. Это уравнение называется характеристическим уравнением системы (44), его корни называются характеристического уравнения. Рассмотрим несколько случаев.

1. Характеристическое уравнение имеет $n$ различных действительных корней $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Для каждого корня $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ напишем систему (45) и определим коэффициенты $b_{1i},\dots,b_{ni}$. Можно показать, что один из них произвольный, его можно считать равным 1. Таким образом, получаем $n$ решений $X_1=B_1e^{\lambda_1 t}$, $X_2=B_2e^{\lambda_2 t}$, …, $X_n=B_ne^{\lambda_n t}$, где $B_i=\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$, $i=\overline{1,n}$.

Эти решения линейно независимы, следовательно, общее решение системы (44) имеет вид $X=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iB_ie^{\lambda_i t}$, или $x_j=\sum\limits_{i=1}^{n}c_ib_{ij}e^{\lambda_i t}$, $j=\overline{1,n}$, где $c_i$ – произвольные постоянные.

2. Среди корней характеристического уравнения есть комплексные сопряженные корни $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$. Им соответствуют решения $X_1=B_1e^{(\alpha+i\beta)t}$, $X_2=B_2e^{(\alpha-i\beta)t}$, которые могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями: $x_1=e^{\alpha t}(b_{11}\cos\beta t+b_{12}\sin\beta t)$, $x_2=e^{\alpha t}(b_{21}\cos\beta t+b_{22}\sin\beta t)$.

3. Среди корней характеристического уравнения есть корень $\lambda_s$ кратности $k\ge 2$. Тогда соответствующее вектор-решение имеет вид:

$$X_s=\left(E+(A-\lambda_sE)t+\frac{1}{2!}(A-\lambda_sE)^2t^2+\dots+\frac{1}{(k-1)!}(A-\lambda_sE)^{k-1}t^{k-1}\right)A_se^{\lambda_s t}$$

где $A_s$ – вектор, удовлетворяющий уравнению $(A-\lambda_sE)^k\cdot A_s=0$.

В этом случае произвольная линейная комбинация векторов вида $x_1 = b_1 e^{\lambda t}$, $x_2 = b_2 e^{\lambda t}$, …, $x_n = b_n e^{\lambda t}$ и $X_s$ составляет общее решение системы (44).

*Примеры.* Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

1) $$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде: $\dot{X} = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем корни характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) + 2 - \lambda - 1 - 2 + 2\lambda =$$

$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$, $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$, $\lambda^2(\lambda - 2) - (\lambda - 2) = 0$, $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 2) = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Тогда частные решения:

$x_1 = b_{11} e^{2t}$, $x_2 = b_{12} e^{t}$, $x_3 = b_{13} e^{-t}$,

$y_1 = b_{21} e^{2t}$, $y_2 = b_{22} e^{t}$, $y_3 = b_{23} e^{-t}$,

$z_1 = b_{31} e^{2t}$, $z_2 = b_{32} e^{t}$, $z_3 = b_{33} e^{-t}$.

При $\lambda_1 = 2$ получаем следующую матрицу

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} -b_{11} - b_{21} + b_{31} = 0 \\ -2b_{21} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{21} = 0$, $b_{11} = b_{31} = 1$.

Аналогично, при $\lambda_2 = 1$ получаем следующую матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_{12} - b_{32} = 0 \\ -b_{22} + b_{32} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{12} = b_{22} = b_{32} = 1$.

И при $\lambda_3 = -1$ получаем следующую матрицу $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_{13} + 2b_{23} - b_{33} = 0 \\ -5b_{23} + 3b_{33} = 0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_{33} = \frac{5}{3} b_{23}$, $b_{13} = -\frac{1}{3} b_{23}$.

Можно взять $b_{23} = 3$, тогда $b_{13} = -1$, $b_{33} = 5$. Следовательно, получаем

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} - C_3 e^{-t} \\ y = C_2 e^{t} + 3C_3 e^{-t} \\ z = C_1 e^{2t} + C_2 e^{t} + 5C_3 e^{-t} \end{cases} \quad \text{или } X = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{t} & -e^{-t} \\ 0 & e^{t} & 3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{t} & 5e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

2) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$.

Решение. Запишем систему в матричном виде: $\dot{X} = AX$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдем корни характеристического уравнения:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=(-2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda-4)-5+\lambda+6-$$

$-2(-3+6+3\lambda)=-\lambda^3+\lambda^2+5\lambda+3$, $\lambda^3-\lambda^2-5\lambda-3=0$. Подберем первый корень среди делителей свободного члена. Им будет $\lambda_1=-1$. Разделим по схеме Горнера, получим $(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3)=0$. Отсюда находим

$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3.$

При $\lambda_1=-1$ получаем следующую матрицу:

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Это соответствует одному уравнению: $a_1-a_2+2a_3=0$. Отсюда находим $a_1=a_2-2a_3$. Вектор-решение, соответствующее корню $\lambda_1=-1$ имеет вид:

$$X_1=\begin{pmatrix} a_2-2a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Аналогично, при $\lambda_2=3$ получаем следующую матрицу

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & -24 & 8 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеем следующую систему:

$\begin{cases} b_1-5b_2+2b_{33}=0 \\ 3b_2-b_{33}=0 \end{cases}$. Отсюда находим $b_3=3b_2$, $b_1=-b_2$. Можно взять $b_{23}=1$, тогда $b_1=-1$, $b_3=3$. Вектор-решение, соответствующее корню $\lambda_2=3$ имеет вид:

$$X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Окончательно получаем

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = \begin{pmatrix} C_1(a_2 - 2a_3) \\ C_1 a_2 \\ C_1 a_3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_2 \\ 3C_3 \end{pmatrix} e^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1(a_2 - 2a_3)e^{-t} - C_2 e^{3t} \\ C_1 a_2 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ C_1 a_3 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} \end{pmatrix},$$ или, положив $C_1 a_2 = \tilde{C}_1$, $C_1 a_3 = \tilde{C}_3$,

получим

$$\begin{cases} x = (\tilde{C}_1 - 2\tilde{C}_3)e^{-t} - C_2 e^{3t} \\ y = \tilde{C}_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} \\ z = \tilde{C}_3 e^{-t} + 3C_2 e^{3t} \end{cases}.$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений первого порядка:

$$\dot{X} = A(t)X. \tag{46}$$

Пусть $X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ \ldots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}$, $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ \ldots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}$, $\ldots, X_n(t) = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ \ldots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix}$ являются решениями системы (46).

**Теорема 14.3.** Линейная комбинация решений однородной системы $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$ также является решением этой системы.

*Определение.* Вектор-функции $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ называются линейно зависимыми на отрезке $[a,b]$, если существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не равные одновременно нулю такие, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(t) = 0$. Если же это тождество справедливо лишь при $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то векторы называются линейно независимыми.

*Определение.* Определитель $W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}$ называется определителем Вронского для системы вектор-функций $X_1(t)$, $\dots, X_n(t)$.

**Теорема 14.4.** Если функции $X_1(t)$, $\dots, X_n(t)$ линейно зависимы, то $W(t) \equiv 0$.

**Теорема 14.5.** Если функции $X_1(t)$, $\dots, X_n(t)$ являются решениями системы (46) и $W(t) = 0$ хотя бы в одной точке $t = t_0$, то эти вектор функции линейно зависимы.

Доказательство. Если $W(t_0) = 0$, то векторы $X_1(t_0)$, $\dots, X_n(t_0)$ линейно зависимы и, следовательно, найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ не равные одновременно нулю, для которых $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(t_0) = 0$. Составим вектор-функцию $X^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(t)$. По теореме 14.3. она удовлетворяет системе (46) и при $t = t_0$ обращается в нуль-вектор. Но по теореме существования и единственности есть только одно решение системы (46), которое при $t = t_0$ обращается в нуль. Это будет функция, тождественно равная нулю. Поэтому $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Следствие. Если определитель Вронского, составленный для решений системы (46) равен нулю в одной точке, то он тождественно равен нулю.

*Определение.* Система $n$ линейно независимых решений системы (46) называется ее фундаментальной системой решений.

**Теорема 14.6.** Фундаментальные системы решений существуют.

Доказательство. Возьмем $n^2$ таких чисел $b_{ij}$, что $\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, например, $b_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$. Составим теперь $n$ решений системы (46), которые удовлетворяют условиям $x_{ij}(t_0) = b_{ij}, \quad i, j = \overline{1,n}$, где $t_0 \in (a,b)$. Тогда определитель Вронского для этих решений не равен нулю при $t = t_0$, а поэтому по теореме 14.5. эти решения линейно независимы. Теорема доказана.

**Теорема 14.7.** Общее решение линейной однородной системы (46) есть линейная комбинация ее фундаментальной системы решений.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь решение $X(t)$ системы (46). Пусть при некотором значении $t = t_0$ эта вектор-функция принимает значение $X(t_0)$. Этот вектор можно разложить по векторам $X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)$, так как эта система векторов линейно независима. Получим $X(t_0) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t_0)$. Составим теперь вектор-функцию $X^*(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$. По теореме 14.3. она удовлетворяет системе (46) и при $t = t_0$ принимает такое же значение, как $X(t)$. Значит по теореме существования и единственности они совпадают, то есть $X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i(t)$. Теорема доказана.

**Теорема 14.8.** Определитель Вронского $W(t)$ набора решений системы (46) удовлетворяет уравнению $\dfrac{dW(t)}{dt} = TrA(t) \cdot W(t)$ и, в частности,

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^{t} TrA(\tau)d\tau}, \tag{47}$$

где $TrA(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ – след матрицы.

Доказательство. По правилу дифференцирования определителей имеем:

$$\frac{dW(t)}{dt}=\begin{vmatrix} \frac{dx_{11}}{dt} & \dots & \frac{dx_{1n}}{dt} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{dx_{n1}}{dt} & \dots & \frac{dx_{nn}}{dt} \end{vmatrix}.$$

В силу того, что $\frac{dx_{ij}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}$, подставляя в правую часть выражения для $\frac{dx_{ij}}{dt}$ и, пользуясь тем, что определитель не меняется, если к элементам строки прибавить величины, пропорциональные элементам других строк, получим

$$\frac{dW(t)}{dt}=\begin{vmatrix} a_{11}x_{11} & \dots & a_{11}x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nn}x_{n1} & \dots & a_{nn}x_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(t)W(t).$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение, получим формулу (47), которая называется формулой Остроградского – Лиувилля.

**Теорема 14.9.** Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма любого ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

Как и в случае линейного однородного уравнения, общее решение неоднородной системы может быть найдено методом вариации произвольных постоянных. Пусть $X_1(t),\ \dots, X_n(t)$ фундаментальная система решений однородной системы, тогда общее решение $X(t)=\sum_{i=1}^{n}c_iX_i(t)$. Будем искать общее решение неоднородной системы в виде $X(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)X_i(t)$. Тогда

$\dot{X}(t)=\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\dot{X}_i(t)$. Подставляем в уравнение (46), получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\dot{X}_i(t)=\sum_{i=1}^{n}A(t)c_i(t)X_i(t)+F(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i(t)\left(\dot{X}_i(t)-A(t)X_i(t)\right)=F(t).$$

Полагая $\dot{X}_i(t)-A(t)X_i(t)=0$, получим $\sum_{i=1}^{n}\dot{c}_i(t)X_i(t)=F(t)$ систему неоднородных уравнений относительно $\dot{c}_i(t)$. Определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, есть определитель Вронского для системы функций $X_1(t),\ \ldots, X_n(t)$, поэтому он отличен от нуля. Значит из этой системы единственным образом определяются $\dot{c}_i(t)$. Пусть $\dot{c}_i(t)=\psi(t)$. Отсюда интегрированием находим $c_i(t)$.

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t\\ \dot{y}=2x-y-2\cos t\end{cases}.$$

Решение. Соответствующая однородная система $\begin{cases}\dot{x}=4x-3y\\ \dot{y}=2x-y\end{cases}$.

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(-1-\lambda)+6=-4-3\lambda+\lambda^2+6=\lambda^2-3\lambda+2.$$

Корни $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$.

Тогда $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$,

$$x=\frac{1}{2}(\dot{y}+y)=\frac{1}{2}(C_1e^t+2C_2e^{2t}+C_1e^t+C_2e^{2t})=C_1e^t+\frac{3}{2}C_2e^{2t}.$$

Частное решение неоднородной системы ищем в виде:

$\begin{cases}x=A\sin t+B\cos t\\ y=C\sin t+D\cos t\end{cases}$. Тогда $\begin{cases}\dot{x}=A\cos t-B\sin t\\ \dot{y}=C\cos t-D\sin t\end{cases}$. Подставляем в исходную систему:

$$\begin{cases}A\cos t-B\sin t=4A\sin t+4B\cos t-3C\sin t-3D\cos t+\sin t\\ C\cos t-D\sin t=2A\sin t+2B\cos t-C\sin t-D\cos t-2\cos t\end{cases}.$$

Приравниваем коэффициенты при $\sin t$ и $\cos t$:

$\begin{cases}A=4B-3D\\ -B=4A-3C+1\\ C=2B-D-2\\ -D=2A-C\end{cases}$. Отсюда находим $A=-2,\ B=1,\ C=-2,\ D=2$.

Тогда общее решение системы

$$\begin{cases}x=C_1e^t+\frac{3}{2}C_2e^{2t}-2\sin t+\cos t\\ y=C_1e^t+C_2e^{2t}-2\sin t+2\cos t\end{cases}.$$

## ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

1. Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися коэффициентами. Найти решения, удовлетворяющие начальным условиям (в тех задачах, где указаны начальные условия).

1. $xydx+(x+1)dy=0$
2. $\sqrt{y^2+1}dx=xydy$
3. $x^2y^2y'+1=y$
4. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$, $y(0)=1$
5. $y'ctgx+y=2$, $y(0)=-1$
6. $xy'+y=y^2$, $y(1)=0{,}5$
7. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(2)=0$
8. $2x^2yy'+y^2=2$
9. $y'-xy^2=2xy$
10. $y'=e^{x+y}$
11. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
12. $xyy'=1-x^2$
13. $xy'+y=y^2$
14. $y'tgx-y=1$
15. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$
16. $(1+e^{2x})y^2dy=e^xdx$, $y(0)=0$
17. $x\sqrt{y^2+1}dx+y\sqrt{x^2+1}dy=0$
18. $y\ln^3 y+y'\sqrt{x+1}=0$, $y(-\dfrac{15}{16})=e$
19. $\left(\sqrt{xy}+\sqrt{x}\right)y'-y=0$
20. $y'+y=5$
21. $y'=\dfrac{y+1}{x+1}$
22. $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0$
23. $\left(e^x+1\right)e^yy'+\left(e^y+1\right)e^x=0$
24. $dy-y\cos^2 xdx=0$
25. $x+xy+y'(y+xy)=0$
26. $y'=3^{x-y}$
27. $x^2dy-y^2dx=0$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$
28. $1+y^2=xyy'$, $y(2)=1$
29. $(x^2-2)y'=2xy$, $y(2)=2$
30. $xy'=\dfrac{y}{\ln x}$, $y(e)=1$

2. Решить однородное дифференциальное уравнение

1. $(x+2y)dx-xdy=0$

2. $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$

3. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$

4. $(y+\sqrt{xy})dx=xdy$

5. $xy'-y=xtg\dfrac{y}{x}$

6. $xy'-y=(x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

7. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

8. $y'=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

9. $y^2+x^2=2xyy'$

10. $(3x^2-y^2)y'=2xy$

11. $(x+y)dx-xdy=0$

12. $(y^2+x^2+xy)dx-x^2dy=0$

13. $y'=4+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

14. $xy'=2\left(y-\sqrt{xy}\right)$

15. $xy+y^2=y'(2x^2+xy)$

16. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$

17. $y^2+x^2y'=xyy'$

18. $2xy=y'(x^2+y^2)$

19. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$

20. $xy'=y-xe^{\frac{y}{x}}$

21. $xy'=y\cos\ln\dfrac{y}{x}$

22. $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

23. $xy'=y+x\sin\dfrac{y}{x}$

24. $\sqrt{y}(2\sqrt{x}-\sqrt{y})dx+xdy=0$

25. $y(x^2+y^2)dx-x^3dy=0$

26. $x^2-3y^2+2xyy'=0$

27. $\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)arctg\dfrac{y}{x}=1$

28. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\dfrac{y}{x}$

29. $xy'\sin\dfrac{y}{x}+x=y\sin\dfrac{y}{x}$

30. $y^2+2x^2=xyy'$

3. Решить линейное дифференциальное уравнение

1. $xy' - 2y = 2x^4$

2. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

3. $y' - \dfrac{y}{x \ln x} = x \ln x$

4. $(1 + x^2)y' + 2xy = 3x^2$

5. $y' + \dfrac{x}{1 - x^2} y = 2$

6. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$

7. $y' + y \cos x = \dfrac{1}{2} \sin 2x$

8. $y' - \dfrac{y}{x + 2} = x^2 + 2x$

9. $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x$

10. $y' - \dfrac{2x - 5}{x^2} y = 5$

11. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$

12. $y' + 2xy = -2x^3$

13. $y' - y \cos x = -\sin 2x$

14. $y' - 4xy = -4x^3$

15. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}$

16. $xy' - y = x^2 \cos x$

17. $y' \cos x + y = 1 - \sin x$

18. $y' + 2y = 3e^x$

19. $xy' + y = 4x^3$

20. $x^2 y' + xy + 1 = 0$

21. $y' - yctgx = 2x \sin x$

22. $y' + ytg\, x = \cos^2 x$

23. $y' - \dfrac{y}{x + 1} = e^x (x + 1)$

24. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2$

25. $y' - \dfrac{y}{x} = -2 \dfrac{\ln x}{x}$

26. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$

27. $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = e^x (x + 1)^2$

28. $y' - \dfrac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3$

29. $y' - 3x^2 y = \dfrac{1}{3} x^2 \left(1 + x^3\right)$

30. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$

4. Найти решение задачи Коши

1. $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$, $y(0)=1$
2. $xy' + y = 2y^2 \ln x$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$
3. $2(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 2$
4. $y' + 4x^3 y = 4\left(x^3 + 1\right)e^{-4x}y^2$, $y(0) = 1$
5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$, $y(1) = 1$
6. $2(y' + xy) = (x+1)e^{-x}y^2$, $y(0) = 2$
7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 3$
8. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x)$, $y(0) = 1$
9. $y' + 4x^3 y = 4\left(1 - x^3\right)e^{4x}y^2$, $y(0) = -1$
10. $3y' + 2xy = 2xe^{-2x^2}y^{-2}$, $y(0) = -1$
11. $2xy' - 3y = -\left(5x^2 + 3\right)y^3$, $y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$, $y(1) = 1$
13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$
14. $3(xy' + y) = xy^2$, $y(1) = 3$
15. $y' - y = 2xy^2$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$
16. $2xy' - 3y = -\left(20x^2 + 12\right)y^3$, $y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$
17. $y' + 2xy = 2x^3y^3$, $y(0) = \sqrt{2}$
18. $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$
19. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(8 + 12\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 2$
20. $4y' + x^3 y = \left(8 + x^3\right)e^{-2x}y^2$, $y(0) = 1$
21. $8xy' - 12y = -\left(3 + 5x^2\right)y^3$, $y(1) = \sqrt{2}$
22. $2(y' + y) = xy^2$, $y(0) = 2$
23. $y' + xy = (x-1)e^{x}y^2$, $y(0) = 1$

24. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}$, $y(0) = 1$

25. $y' - y = xy^2$, $y(0) = 1$

26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$

27. $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$

28. $y' + 2ycthx = y^2 chx$, $y(1) = \frac{1}{sh1}$

29. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$, $y(0) = 2$

30. $y' - ytgx = -\frac{2}{3}y^4 \sin x$, $y(0) = 1$

5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

1. $\left(2x + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$.

2. $2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$.

3. $\left(2 - 9xy^2\right)xdx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0$.

4. $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$.

5. $\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$.

6. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$.

7. $\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 x dy = 0$. .

8. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.

9. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$.

10. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2 y\right)dy = 0$.

11. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy = 0$.

12. $e^{y}dx+\left(xe^{y}-2y\right)dy=0$.

13. $yx^{y-1}dx+x^{y}\ln x dy=0$.

14. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(-1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$.

15. $(x+\sin y)dx+(x\cos y+\sin y)dy=0$.

16. $\left(y+e^{x}\sin y\right)dx+\left(x+e^{x}\cos y\right)dy=0$.

17. $(xy+\sin y)dx+\left(0{,}5x^2+x\cos y\right)dy=0$.

18. $\left(x^2+y^2+y\right)dx+\left(2xy+x+e^{x}\right)dy=0$.

19. $\left(2xye^{x^2}+\ln y\right)dx+\left(e^{x^2}+\dfrac{x}{y}\right)dy=0$.

20. $(y+x\ln y)dx+\left(\dfrac{x^2}{2y}+x+1\right)dy=0$.

21. $\left(x^2+\sin y\right)dx+(1+x\cos y)dy=0$.

22. $ye^{x}dx+\left(e^{x}+y\right)dy=0$.

23. $\left(e^{x}\sin y+x\right)dx+\left(e^{x}\cos y+y\right)dy=0$.

24. $\left(\ln y-5y^2\sin 5x\right)dx+\left(\dfrac{x}{y}+2y\cos 5x\right)dy=0$.

25. $\left(3x^2y+\sin x\right)dx+\left(x^3-\cos y\right)dy=0$.

26. $\left(e^{x+y}+3x^2\right)dx+\left(e^{x+y}+4y^3\right)dy=0$.

27. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-y\right)dx-\left(e^{y}-x-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$ .

28. $\left(\sin y+y\sin x+\dfrac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\dfrac{1}{y}\right)dy=0$.

29. $\left(\cos(x+y^2)+\sin x\right)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$.

30. $\left(3x^3+6x^2y+3xy^2\right)dx+\left(2x^3+3x^2y\right)dy=0$.

6. Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку $M$:

1. $y'=y-x^2$, $M(1;2)$.
2. $yy'=2x$, $M(0;5)$.
3. $y'=2+y^2$, $M(1;2)$.
4. $y'=\dfrac{2x}{3y}$, $M(1;1)$.
5. $y'=(y-1)x$, $M\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.
6. $yy'+x=0$, $M(-2;-3)$.
7. $y'=3+y^2$, $M(1;2)$.
8. $xy'=2y$, $M(2;3)$.
9. $y'\left(2+x^2\right)=y$, $M(2;2)$.
10. $x^2-y^2+2xyy'=0$, $M(2;1)$.
11. $y'=y-x$, $M\left(\dfrac{9}{2};1\right)$.
12. $y'=x^2-y$, $M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.
13. $y'=yx$, $M(0;-1)$.
14. $y'=y-x^2$, $M(1;1)$.
15. $y'=\dfrac{x}{y}$, $M(1;1)$.
16. $y'=xy$, $M(0;1)$.
17. $yy'=-\dfrac{x}{2}$, $M(2;4)$.
18. $2(y+y')=x+3$, $M\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.
19. $y'=x+2y$, $M(3;0)$.
20. $xy'=2y$, $M(1;3)$.
21. $3yy'=x$, $M(-3;-2)$.
22. $y'=y-x^2$, $M(3;4)$.
23. $x^2-y^2+2xyy'=0$, $M(-2;1)$.
24. $y'=x^2-y$, $M\left(2;\dfrac{3}{2}\right)$.
25. $y'=y-x$, $M(2;1)$.
26. $yy'=-x$, $M(2;3)$.
27. $y'=y-x$, $M(4;2)$.
28. $3yy'=x$, $M(1;1)$.
29. $yy'+x=0$, $M(2;3)$.
30. $xy'=2y$, $M(1;-1)$.

7. Решить геометрическую задачу.

Чтобы решить приведенные ниже геометрические задачи, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y=y(x)$ (если задача решается в прямоугольных координатах) и выразить все упоминаемые в задаче величины через $x$, $y$ и $y'$. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y=y(x)$.

1. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс есть величина постоянная, равная $a^2$.

2. Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс есть величина постоянная, равная $b$.

3. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведенными из произвольной точки кривой, равен $a$.

4. Найти кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

5. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до встречи с этими осями, то площадь полученного треугольника делится кривой в отношении 1:2.

6. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют равные углы с полярным радиусом и полярной осью.

7. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

8. Найти кривые, у которых отрезок касательной, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

9. Найти кривую, проходящую через точку $(2;0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

10. Найти кривую, проходящую через точку $(2;16)$ и обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой в три раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей эту же точку с началом координат.

11. Найти кривую, проходящую через точку $(2;16)$ и обладающую тем свойством, что угловой коэффициент касательной в любой точке кривой равен ординате точки касания.

12. Найти кривую, проходящую через точку $(4;1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок любой касательной к кривой, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

13. Найти кривую, проходящую через точку $(4;1)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс делится пополам в точке пересечения с осью ординат.

14. Найти кривую, проходящую через точку $(1;1)$, для которой площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, равна 1.

15. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

16. Найти кривую, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

17. Найти кривую, проходящую через точку $(1;0)$, если известно, что треугольник, образованный осью ординат, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиус-вектором точки касания, равнобедренный; основанием его является отрезок касательной от точки касания до оси ординат.

18. Найти кривые, касательные к которым в любой точке отсекают от оси абсцисс отрезки, равные ординате точке касания.

19. Найти кривую, проходящую через точку $(1;1)$, у которой расстояние любой касательной от начала координат равно абсциссе точки касания.

20. Найти кривую, проходящую через точку $(1;2)$, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной к кривой, равен абсциссе точки касания.

21. Найти кривую, проходящую через точку $(3;0)$, если известно, что угловой коэффициент касательной равен $\dfrac{x+y}{x}$.

22. Найти кривую, проходящую через точку $(3;0)$, если известно, что отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен абсциссе точки касания.

23. Найти кривую, проходящую через точку $(0;0)$, если известно, что угловой коэффициент в любой ее точке равен сумме координат этой точки.

24. Найти кривую, проходящую через точку $(0;0)$, касательная к которой в произвольной ее точке отсекает на оси ординат отрезок, равный квадрату ординаты точки касания.

25. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная $3a^2$.

26. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная $a^2$.

27. *Подкасательной* кривой $y = f(x)$ в точке $M$ называется проекция на ось $Ox$ отрезка $AM$ касательной к этой кривой, где $A$ – точка пересечения касательной с осью. Найти кривые, у которых подкасательная имеет длину, равную 2.

28. Найти кривые, у которых сумма длин касательной (точнее, длины ее отрезка от точки касания до точки пересечения с осью абсцисс) и подкасательной в любой ее точке равна произведению координат точки касания.

29. Найти кривые, у которых подкасательная пропорциональна абсциссе точки касания (коэффициент пропорциональности равен $k$).

30. Найти кривую, проходящую через точку $(a;1)$ и имеющую подкасательную постоянной длины $a$.

8. Решить физическую задачу.

Чтобы решить физическую задачу нужно прежде всего решить, какую из величин взять за независимую переменную, а какую – за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция $y = y(x)$, когда независимая переменная $x$ получает приращение $\Delta x$, то есть выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на $\Delta x$ и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить значения постоянных, входящих в общее решение дифференциального уравнения. Иногда дифференциальное уравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом производной (если независимая переменная – время $t$, то $\dfrac{dy}{dt}$ есть скорость изменения величины $y = y(t)$).

В некоторых задачах при составлении уравнения следует использовать физические законы, сформулированные в тексте перед задачей (или перед группой задач).

1. В сосуд, содержащий 10 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

2. Сосуд объемом в 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает 0,1 л азота в секунду, которые непрерывно перемешивается, и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

3. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает в той же скоростью. Сколько соли в баке остается через час?

4. В воздухе комнаты объемом 200 м$^3$ содержится 0,15% углекислого газа ($CO_2$). Вентилятор подает в минуту 20 м$^3$ воздуха, содержащего 0,04% $CO_2$. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

5. В резервуаре находится 80 л раствора, содержащего 8 кг соли. Каждую минуту в него вливается 4 л воды и вытекает 4 л раствора, при этом концентрация соли поддерживается равномерной (путем перемешивания). Сколько соли останется в резервуаре через 40 минут?

6. Сосуд емкостью 100 л наполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. В одну минуту в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же емкости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах будет одинаково?

В задачах 7-11 принять, что скорость остывания (или нагревания) тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

7. Тело охладилось за 10 минут от $100^0$ до $60^0$. Температура окружающего воздуха поддерживается равной $20^0$. Когда тело остынет до $25^0$?

8. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре $20^0$, опущен алюминиевый предмет с массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой $75^0$. Через минуту вода нагрелась на $2^0$. Когда температура воды и предмета будут отличаться одна от другой на $1^0$? Потерями тепла на нагревание сосуда и прочими пренебречь.

9. Кусок металла с температурой $a$ помещен в печь, температура которой в течение часа равномерно повышается от $a$ до $b$ градусов. При разности температур печи и металла в $T$ градусов металл нагревается со скоростью $kT$ градусов в минуту. Найти температуру металла через час.

10. Металлическая болванка, нагретая до $420^0$, охлаждается в воздухе, температура которого $20^0$. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до $120^0$. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения.

11. В воде с температурой $20^0$ в течение 10 минут тело охлаждается от $100^0$ до $60^0$ градусов. За сколько времени тело охладится до $30^0$?

12. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/сек, скорость ее через 4 сек 1 м/сек. Когда скорость лодки уменьшится до 1см/сек? Какой путь может пройти лодка до остановки?

В задачах 13-16 использовать закон радиоактивного распада: количество радиоактивного вещества, распадающегося за единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющегося в рассматриваемый момент.

13. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

14. Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества радия?

15. Определить, через сколько лет от 1 кг радия останется 0,7 кг, если известно, что период полураспада радия (время, за которое масса радия уменьшается вдвое) равен 1590 лет.

16. В исследованном куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается

наполовину за $4{,}5 \cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (так как они распадаются намного быстрее урана).

17. Количество света, поглощаемое слоем воды малой толщины, пропорционально количеству падающего на него света и толщине слоя. Слой воды толщиной 35 см поглощает половину падающего на него света. Какую часть света поглотит слой толщиной в 2м?

Для составления дифференциального уравнения в задачах 17-19 за неизвестную функцию удобнее взять скорость. Ускорения свободного падения считать равным 10 м/сек$^2$.

18. Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта? Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/сек. Изменением плотности с высотой пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

19. Найти зависимость скорости падения тела в воздухе от времени, если сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости $v$ и площади наибольшего сечения тела, перпендикулярного к направлению движения, $F = kSv^2$.

20. Вычислить время падения мяча массой 0,4 кг с высоты 16,3 м без начальной скорости с учетом сопротивления воздуха. Найти скорость в конце падения.

В задачах 21-26 принять, что жидкость из сосуда вытекает со скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g = 10$ м/сек$^2$ – ускорение свободного падения, $h$ – высота уровня воды над отверстием.

21. За какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака с диаметром $2R$=1,8 м и высотой $H$=2,45м через отверстие в дне диаметром $2r$=6 см? Ось цилиндра вертикальна.

22. Решить предыдущую задачу в предположении, что ось цилиндра расположена горизонтально, а отверстие находится в самой нижней части цилиндра.

23. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 минут. За какое время вытечет все вода?

24. Воронка имеет форму конуса радиуса 6 см и высотой 10 см, обращенного вершиной вниз. За какое время вытечет вся вода из воронки через круглое отверстие диаметра 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

25. В прямоугольный бак размером 60см$\times$75 см и высотой 80 см поступает 1,8 л воды в секунду. В дне имеется отверстие площадью 2,5 см$^2$. За какое время наполнится бак?

26. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью 72 км/ч. Через сколько времени и на каком расстоянии он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,2 его веса.

27. Моторная лодка движется со скоростью 18 км/ч. Через 5 минут после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 км/ч. Найти расстояние, пройденное лодкой по инерции за 15 минут, если сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

28. Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200м/сек, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью 50 м/сек. Найти, сколько времени продолжалось движение пули через доску, если сопротивление доски движению пули пропорционально квадрату ее скорости.

29. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени. Количество бактерий за 4 часа утроилось. Найти зависимость количества бактерий от времени, если в начальный момент их было $a$.

30. Вращающийся в жидкости диск замедляет свое движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости вращения. Известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 18 об/сек, по истечении 45 сек вращается со скоростью 6 об/сек. С какой угловой скоростью будет вращаться диск по истечении 90 сек после начала замедления? В какой момент времени угловая скорость будет равна 1 об/сек?

9. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'''x\ln x = y''$.
2. $xy''' + y'' = 1$.
3. $2xy''' = y''$.
4. $xy''' + y'' = x + 1$.
5. $tgx \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$.
6. $x^2 y'' + xy' = 1$.
7. $ctg2x \cdot y''' + 2y'' = 0$.
8. $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$.
9. $tgx \cdot y''' = 2y''$.
10. $y'''cth2x = 2y''$.
11. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$.
12. $xy''' + 2y'' = 0$.
13. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x^2$.
14. $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$.
15. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$.
16. $xy''' + y'' + x = 0$.
17. $y'' - \dfrac{2}{x}y' = 2x^3$.
18. $(1 + x)y'' = y' - 1$.
19. $y'' + y'tgx - \sin 2x = 0$.
20. $xy'' - y' = x^2 e^x$.
21. $tgx \cdot y'' - y' - 1 = 0$.
22. $xy''\ln x = y'$.
23. $\left(1 + x^2\right)y'' + 2xy' = x^3$.
24. $xy'' + y' + x = 0$.
25. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y'$.
26. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
27. $\left(1 + x^2\right)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.
28. $(x - 1)y''' = y''$.
29. $y'' - \dfrac{y'}{x - 1} = x(x - 1)$.
30. $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$.

10. Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3 y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
4. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' = 32\cos y \cdot \sin^3 y$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'(1) = 4$.

6. $4y''y^3 = 16y^4 - 1,\ y(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

7. $y''y - (y')^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

8. $y'' = y'\ln y',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

9. $y'' + y'\sqrt{(y')^2 - 1} = 0,\ y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = -1.$

10. $3y'y'' = 2y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

11. $y'' = 2y^3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

12. $y''y - (y')^2 = y^3,\ y(0) = -\dfrac{1}{2},\ y'(0) = 0.$

13. $2y'' = 3y^2,\ y(-2) = 1,\ y'(-2) = -1.$

14. $y''y = (y')^2 - (y')^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1.$

15. $y^3y'' = -1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

16. $y^4 - y''y^3 = 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

17. $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

18. $2(y')^2 = y''(y-1),\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$

19. $y'' = 50y^3,\ y(3) = 1,\ y'(3) = 5.$

20. $y''y^3 + 25 = 0,\ y(2) = -5,\ y'(2) = -1.$

21. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3.$

22. $y'' = 8\cos y \cdot \sin^3 y,\ y(1) = \dfrac{\pi}{2},\ y'(1) = 2.$

23. $y''y^3 = 4(y^4 - 1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

24. $y'' = 32y^3,\ y(4) = 1,\ y'(4) = 4.$

25. $y''y^3 + 16 = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 2.$

26. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

27. $y'' = 18y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3.$

28. $y''y^3 = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}.$

29. $y''y^3 + 1 = 0,\ y(1) = -1,\ y'(1) = -1.$

30. $y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1.$

11. Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

1. а) $y''-5y'+6y=0$, б) $y''-12y'+36y=0$, в) $y''+6y'+10y=0$.
2. а) $y''+y'-2y=0$, б) $y''-8y'+16y=0$, в) $y''+2y'+10y=0$.
3. а) $y''+4y'+3y=0$, б) $4y''+4y'+y=0$, в) $y''+4y=0$.
4. а) $2y''-5y'+2y=0$, б) $y''-6y'+9y=0$, в) $y''-4y'+5y=0$.
5. а) $y''-10y'+9y=0$, б) $y''-10y'+25y=0$, в) $y''-4y'+8y=0$.
6. а) $2y''+y'-y=0$, б) $y''-4y'+4y=0$, в) $y''+6y'+13y=0$.
7. а) $y''-3y'+2y=0$, б) $y''-20y'+100y=0$, в) $4y''-8y'+5y=0$.
8. а) $y''-7y'+6y=0$, б) $y''+8y'+16y=0$, в) $y''-2y'+10y=0$.
9. а) $4y''+16y'+15y=0$, б) $9y''-6y'+y=0$, в) $y''+4y'+29y=0$.
10. а) $y''-5y'-6y=0$, б) $y''-2y'+y=0$, в) $y''+13y'+36y=0$.
11. а) $y'''-4y''+3y'=0$, б) $25y''+10y'+y=0$, в) $y''+6y'+25y=0$.
12. а) $y''-4y'+3y=0$, б) $y''+14y'+49y=0$, в) $y''-2y'+10y=0$.
13. а) $y''-4y'=0$, б) $y''+16y'+64y=0$, в) $y''+6y'+13y=0$.
14. а) $y'''-y''-2y'=0$, б) $16y''+24y'+9y=0$, в) $y''+2y'+25y=0$.
15. а) $y'''-6y''+8y'=0$, б) $4y''+12y'+9y=0$, в) $y''+2y'+5y=0$.
16. а) $y'''-3y''+2y'=0$, б) $9y''-30y'+25y=0$, в) $y''+4y'+5y=0$.
17. а) $y^{(4)}-5y''+4y=0$, б) $49y''+28y'+4y=0$, в) $y''-2y'+5y=0$.
18. а) $3y''-2y'-8y=0$, б) $9y''+12y'+4y=0$, в) $y''+16y=0$.
19. а) $2y''-y'-y=0$, б) $16y''-24y'+9y=0$, в) $y''+25y=0$.
20. а) $y''-5y'+6y=0$, б) $y''-14y'+49y=0$, в) $y''+2y'+2y=0$.
21. а) $y''-7y'+6y=0$, б) $49y''-14y'+y=0$, в) $y''-2y'+2y=0$.
22. а) $2y''+5y'=0$, б) $9y''+24y'+16y=0$, в) $y''+100y=0$.
23. а) $y''-7y'+10y=0$, б) $y''-12y'+36y=0$, в) $y''-4y'+29y=0$.
24. а) $y''-7y'+12y=0$, б) $y''-16y'+64y=0$, в) $y''-4y'+5y=0$.
25. а) $y''-11y'+30y=0$, б) $y''-18y'+81y=0$, в) $y''+64y=0$.
26. а) $y''-6y'-16y=0$, б) $y''-22y'+121y=0$, в) $y''+49y=0$.
27. а) $y''-3y'-18y=0$, б) $36y''-12y'+y=0$, в) $y''+81y=0$.
28. а) $y''+8y'-20y=0$, б) $81y''+18y'+y=0$, в) $y''+121y=0$.
29. а) $y''+y'-12y=0$, б) $100y''-20y'+y=0$, в) $y''+169y=0$.
30. а) $y''-2y'-15y=0$, б) $16y''+8y'+y=0$, в) $y''+196y=0$.

12. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
2. $y''' - y' = x^2 + x$
3. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^2$.
4. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1$.
5. $3y^{(4)} + y''' = 6x - 1$.
6. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
7. $7y''' - y'' = 12x$.
8. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
9. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
10. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
11. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
12. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
13. $y''' - y'' = 6x + 5$.
14. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.
15. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
16. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
17. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
18. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 2x(1-x)$.
19. $y^{(5)} - y^{(4)} = 2x + 3$.
20. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
21. $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
22. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
23. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.
24. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$.
25. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
26. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
27. $y^{(4)} + y''' = x$.
28. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$
29. $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.
30. $y^{(4)} + y''' = 12x + 6$.

13. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.
2. $y'' - 2y' + 15y = -8e^{-3x}$.
3. $y'' - 5y' + 6y = -5e^{2x}$.
4. $y'' - 9y' + 20y = -e^{4x}$.
5. $y'' + 6y' + 5y = 12e^{-x}$.
6. $y'' + 8y' + 15y = 4e^{-3x}$.
7. $y'' - y' - 12y = 14e^{4x}$.
8. $y'' + 2y' - 15y = -16e^{-5x}$.
9. $y'' - 10y' + 16y = -18e^{2x}$.
10. $y'' - 6y' + 8y = 2e^{4x}$.
11. $y'' - 11y' + 28y = 6e^{4x}$.
12. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.
13. $y'' - 5y' - 14y = -36e^{-2x}$.
14. $y'' - y' - 6y = -20e^{3x}$.
15. $y'' + 10y' + 24y = 6e^{-6x}$.
16. $y'' + 7y' + 10y = -12e^{-2x}$.
17. $y'' - 3y' - 10y = -21e^{5x}$.
18. $y'' - 4y' - 21y = -20e^{-3x}$.

19. $y''-11y'+24y=25e^{8x}$.

20. $y''+6y'+8y=-16e^{-2x}$.

21. $y''+7y'+10y=18e^{-2x}$.

22. $y''+4y'-12y=32e^{2x}$.

23. $y''+4y'-32y=24e^{4x}$.

24. $y''+7y'-8y=-18e^{-8x}$.

25. $y''+3y'-18y=-9e^{3x}$.

26. $y''-10y'+24y=-4e^{4x}$.

27. $y''-6y'-7y=-16e^{7x}$.

28. $y''+12y'+35y=2e^{-7x}$.

29. $y''-3y'-18y=36e^{-3x}$.

30. $y''-2y'+15y=24e^{5x}$.

14. Составить однородное дифференциальное уравнение, имеющее данные частные решения

1. $1,\ x,\ e^{2x}$.

2. $x,\ e^{x}$.

3. $x,\ x^2,\ e^{x}$.

4. $e^{x}, shx, chx$.

5. $e^{x}, \sin x, \cos x$.

6. $e^{2x}, e^{3x}, e^{4x}$.

7. $2, x+1,\ x^2$.

8. $e^{2x}, e^{-2x}, 1$.

9. $e^{2x}\sin 4x, e^{2x}\cos 4x$.

10. $e^{x}, xe^{x}, e^{2x}$.

11. $e^{-3x}, xe^{-3x}$.

12. $e^{x}\sin 4x, e^{x}\cos 4x$.

13. $sh2x, ch2x$.

14. $e^{-x}\sin x, e^{-x}\cos x$.

15. $e^{2x}\sin 5x, e^{2x}\cos 5x$.

16. $1,\ \cos x$.

17. $3x,\ x-2,\ e^{x}+1$.

18. $x^2-3x,\ 2x^2+9, 2x+3$.

19. $e^{x}\sin 2x, e^{x}\cos 2x$.

20. $shx, chx$.

21. $1,\ x,\ e^{x}, xe^{x}$.

22. $1, \sin x, \cos x$.

23. $e^{x}, \sin 2x, \cos 2x$.

24. $sh2x, ch2x$.

25. $3,\ x-1,\ e^{x}$.

26. $e^{x}, \sin 3x, \cos 3x$.

27. $e^{2x}, e^{4x}, 1$.

28. $e^{2x}, \sin x, \cos x$.

29. $\sin x, x\sin x, \cos x, x\cos x$.

30. $1, x, \sin x, \cos x$.

15. Решить уравнение методом вариации постоянных.

1. $4y'' + y = ctg\frac{x}{2}$.

2. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x(2+e^x)}$.

3. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$.

4. $y'' + y = 2ctg\,x$.

5. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$.

6. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$.

7. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

8. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1+e^{-2x}}$.

9. $\pi^2 y'' + y = \frac{1}{\cos\frac{x}{\pi}}$.

10. $y'' + y = 4ctg\,x$.

11. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}$.

12. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$.

13. $y'' + 4y = 4ctg\,2x$.

14. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}$.

15. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$.

16. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$.

17. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$.

18. $y'' - y' = \frac{e^x}{1+e^x}$.

19. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ .

20. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

21. $y'' + 4y = 8ctg\,2x$.

22. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}$.

23. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}$.

24. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}}$.

25. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}}$.

26. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$.

27. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}}$.

28. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}}$.

29. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$.

30. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

16. Найти частное решение однородной системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = x - y & y(0) = 1 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y & x(0) = 5 \\ \dot{y} = x - 2y & y(0) = 1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 2x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y & x(0) = 4 \\ \dot{y} = 3x + 4y & y(0) = 3 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 3x + y & y(0) = -1 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = 2x + 3y & y(0) = -1 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x + 3y & y(0) = -1 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -4x + 6y & y(0) = -1 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - y & y(0) = -1 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = 2x + 2y & y(0) = -1 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y & x(0) = -1 \\ \dot{y} = 2x - y & y(0) = 1 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 2x + y & y(0) = -1 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y & x(0) = 5 \\ \dot{y} = 3x + y & y(0) = 3 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 3x + 2y & y(0) = 1 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 3x - y & y(0) = 1 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = 2x - y & y(0) = 1 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -5x - 3y & y(0) = -1 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 2x + y & y(0) = 1 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x + y & y(0) = 1 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x + y & y(0) = 1 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 3x + 2y & y(0) = -3 \end{cases}$.

22. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = 3x - y & y(0) = 3 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 6x - 4y & y(0) = 6 \end{cases}$.

24. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = x - 2y & y(0) = -1 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y & x(0) = 2 \\ \dot{y} = 3x + 4y & y(0) = -1 \end{cases}$.

26. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -5x - 3y & y(0) = -5 \end{cases}$.

27. $\begin{cases} \dot{x} = x + y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = 4x + y & y(0) = -1 \end{cases}$.

28. $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = x + y & y(0) = -1 \end{cases}$.

29. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = 4x + 3y & y(0) = 4 \end{cases}$.

30. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y & x(0) = 3 \\ \dot{y} = 2x + 3y & y(0) = 0 \end{cases}$.

17. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений. Указать частное решение системы, удовлетворяющее начальному условию: $x(0)=0$, $y(0)=0$.

1. $\begin{cases} \dot{x}=2x+8y+8e^t \\ \dot{y}=-4x+10y+9e^t \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x}=2x-4y-10 \\ \dot{y}=2x+6y+20 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dot{x}=10x+2y-2e^t \\ \dot{y}=-2x+6y-5e^t \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dot{x}=6x-5y+4 \\ \dot{y}=4x+10y \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dot{x}=4x+4y-3e^t \\ \dot{y}=-2x+8y+2e^t \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dot{x}=6x-y-10 \\ \dot{y}=17x+4y-1 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dot{x}=2x-5y+1 \\ \dot{y}=2x-4y \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dot{x}=10x+8y-9e^t \\ \dot{y}=-5x-2y+5e^t \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dot{x}=2x+2y \\ \dot{y}=-2x+6y+8 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y-e^t \\ \dot{y}=-4x+6y+4e^t \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \dot{x}=10x-4y-9e^t \\ \dot{y}=2x+6y-2e^t \end{cases}$.

12. $\begin{cases} \dot{x}=8x+5y-13 \\ \dot{y}=-4x+4y \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dot{x}=4x-2y+3e^t \\ \dot{y}=5x+6y+5e^t \end{cases}$.

14. $\begin{cases} \dot{x}=2x-2y+6 \\ \dot{y}=2x+6y-18 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} \dot{x}=2x-4y+12 \\ \dot{y}=5x+6y-18 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dot{x}=10x+2y-9e^t \\ \dot{y}=-4x+6y+4e^t \end{cases}$.

17. $\begin{cases} \dot{x}=8x-4y \\ \dot{y}=5x+4y-13 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} \dot{x}=4x+5y-3 \\ \dot{y}=-2x+6y+10 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dot{x}=2x+5y+e^t \\ \dot{y}=-2x+4y-2e^t \end{cases}$.

20. $\begin{cases} \dot{x}=6x-2y+2e^t \\ \dot{y}=17x-4y+5e^t \end{cases}$.

21. $\begin{cases} \dot{x}=2x-4y-e^t \\ \dot{y}=8x+10y-8e^t \end{cases}$.

22. $\begin{cases} \dot{x}=2x+2y \\ \dot{y}=-4x+6y+10 \end{cases}$.

23. $\begin{cases} \dot{x}=10x-2y-8 \\ \dot{y}=2x+6y-8 \end{cases}$.

24. $\begin{cases} \dot{x}=6x+4y-5e^t \\ \dot{y}=-5x+10y+5e^t \end{cases}$.

25. $\begin{cases} \dot{x}=4x-2y+3e^t \\ \dot{y}=4x+8y+4e^t \end{cases}$.

26. $\begin{cases} \dot{x}=3x-2y-6 \\ \dot{y}=2x-y-4 \end{cases}$.

27. $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = -x \end{cases}$.

28. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + 1 - 3t \end{cases}$.

29. $\begin{cases} \dot{x} = -y + t \\ \dot{y} = 4x \end{cases}$.

30. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + 1 - 3t \\ \dot{y} = -x + y - t \end{cases}$.

18. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = -x - z \\ \dot{z} = -x - y \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = -3x + y - z \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - z \\ \dot{y} = -x + 3y - z \\ \dot{z} = x - 2y + 2z \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = 2y - z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = -x + 2z \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y + 4z \\ \dot{y} = 2x + y + 2z \\ \dot{z} = 2x + 3z \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 6z \\ \dot{y} = 2x + 5y + 2z \\ \dot{z} = z \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - z \\ \dot{y} = -x + 6y - z \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 6z \\ \dot{y} = 2x + 5y + 2z \\ \dot{z} = 4z \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = 3x + z \\ \dot{z} = 3x + y \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - 4z \\ \dot{y} = -2x + y - 2z \\ \dot{z} = 5x + 2y + 7z \end{cases}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = 4y - z \\ \dot{z} = -y + 4z \end{cases}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y \\ \dot{y} = x + 4y \\ \dot{z} = -x + y + 4z \end{cases}$.

15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y + 2z \\ \dot{y} = 3y \\ \dot{z} = 2y + z \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 6z \\ \dot{y} = 4x + 3y + 4z \\ \dot{z} = z \end{cases}$.

17. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - z \\ \dot{y} = -x + 4y - z \\ \dot{z} = z \end{cases}$.

18. $\begin{cases} \dot{x} = 15x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -x + 2y \\ \dot{z} = x - y + 5z \end{cases}.$

20. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - z \\ \dot{y} = -x + 6y - z \\ \dot{z} = 2z \end{cases}.$

21. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}.$

22. $\begin{cases} \dot{x} = 11x + y - z \\ \dot{y} = 4y - z \\ \dot{z} = -y + 4z \end{cases}.$

23. $\begin{cases} \dot{x} = 13x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 9y - 2z \\ \dot{z} = -2y + 9z \end{cases}.$

24. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 6y + 6z \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2z \\ \dot{z} = 2x + 2y + 3z \end{cases}.$

25. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = 3y - z \\ \dot{z} = -y + 3z \end{cases}.$

26. $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y - z \\ \dot{y} = -x + 6y - z \\ \dot{z} = 6z \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dot{x} = 9x + y - z \\ \dot{y} = 4y - z \\ \dot{z} = -y + 4z \end{cases}.$

28. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - z \\ \dot{y} = 5y - z \\ \dot{z} = -y + 5z \end{cases}.$

29. $\begin{cases} \dot{x} = 15x + 2y - 2z \\ \dot{y} = 7y - 4z \\ \dot{z} = -2y + 5z \end{cases}.$

30. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2y + 2z \\ \dot{y} = -6x + 3y + 2z \\ \dot{z} = 6x + 2y + 3z \end{cases}.$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО КУРСУ «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка; общее, частное, особое решения; интегральные кривые, поле направлений.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
5. Однородные уравнения и уравнения, приводимые к ним.
6. Линейные уравнения первого порядка.
7. Уравнение Бернулли, Риккати.
8. Уравнения в полных дифференциалах.
9. Интегрирующий множитель.
10. Понятие метрического пространства. Теорема Банаха о сжимающем отображении.
11. Доказательство теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
12. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений первого порядка.
13. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка.
14. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
15. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами.
16. Линейная зависимость функций и определитель Вронского.
17. Фундаментальная система решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
18. Формула Остроградского – Лиувилля для линейного дифференциального уравнения n-го порядка.
19. Линейные однородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение

однородного уравнения (случай действительных корней – различных и кратных).

20. Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка (случай комплексных корней – различных и кратных).

21. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка.

22. Нахождение общего решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка методом вариации произвольных постоянных.

23. Решение линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами с квазимногочленом в правой части.

24. Системы дифференциальных уравнений. Интегрирование системы дифференциальных уравнений.

25. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Линейная зависимость системы вектор-функций и определитель Вронского для системы вектор-функций.

26. Формула Остроградского – Лиувилля для однородной системы линейных уравнений первого порядка.

27. Нахождение фундаментальной системы решений для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Нахождение общего решения неоднородной системы методом вариации произвольных постоянных.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебно-практическое пособие отражает мой опыт работы со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит следующий раздел высшей математики, изучаемый во втором семестре: обыкновенные дифференциальные уравнения.

Опыт показал, что для студентов очной форы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в данном пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты первого курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в этом пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения – Издательство: "ЛКИ", 2013. – 312 с. – ISBN 978-5-382-01491-3, 978-5-382-01494-4.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – Издательство: "ЛКИ", 2016. – 512 с. – ISBN 978-5-382-01622-1.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Издательство: Едиториал УРСС, 2018. – 336 с. – ISBN 978-5-971-05729-1.
4. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 2000. – 100 с. – ISBN 5-93972-008-0.
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие. 3-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) – ISBN 5-8114-0574-X.
6. Берман Н. Г. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие для вузов. – 20-е изд. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 384 с.
7. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II : учеб. пособие для втузов. – 5-е изд., испр. – М. : Высш. шк., 1997. – 416 с. – ISBN 5-06-003071-7.
8. Сорокина А. Г., Беспалова А. Г., Беспалов М. С. Задания к типовым расчетам по математике. Неопределенный интеграл, определенный интеграл, дифференциальные уравнения. Владим. гос. ун-т, Владимир, 1997. – 72 с.

*Учебное издание*

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

*Издается в авторской редакции*

Подписано в печать 16.06.20.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,05. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.