Владимирский государственный университет

Л. А. АРТЮШИНА   Е. А. ТРОИЦКАЯ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

MATLAB ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Л. А. АРТЮШИНА   Е. А. ТРОИЦКАЯ

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
MATLAB ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-практическое пособие

Электронное издание

Владимир 2019

ISBN 978-5-9984-0991-2

УДК 004
ББК 32.81

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры математики и информатики
Московского университета имени С. Ю. Витте
О. В. Крисько

Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой информационных систем и программной инженерии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
И. Е. Жигалов

Артюшина, Л. А. Информационные технологии. MATLAB для решения типовых задач высшей математики [Электронный ресурс] : учеб.-практ. пособие / Л. А. Артюшина, Е. А. Троицкая ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 133 с. – ISBN 978-5-9984-0991-2. – Электрон. дан. (3,48 Мб). – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: Intel от 1,3 ГГц ; Windows XP/7/8/10 ; Adobe Reader ; дисковод CD-ROM. – Загл. с титул. экрана.

Рассмотрена технология решения математических задач в среде MATLAB. Представлены примеры и иллюстрации, поясняющие теорию. Содержит более 200 упражнений, позволяющих проверить знания по всем изучаемым темам.

Предназначено для студентов вузов 1-го курса очной формы обучения направления подготовки 38.03.02 – Менеджмент для проведения практических и лабораторных работ в рамках дисциплин информационного блока, а также при изучении курсов, связанных с математическими расчетами.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 8. Ил. 57. Библиогр.: 10 назв.

ISBN 978-5-9984-0991-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Информационные технологии являются довольно мощным пластом современной культуры, определяющим развитие общества на основе формирования интеллектуального потенциала человека. Информационные технологии проникли практически во все области человеческой деятельности. Это объясняется тем, что с помощью них можно автоматизировать процессы создания моделей изучаемых явлений, обработать полученные данные.

Информационные технологии для специалистов в области экономики, менеджмента, психологии и юриспруденции являются, прежде всего, мощным инструментарием при проведении необходимых расчетов и исследований, а также фундаментом, на котором строится современное здание высшего профессионального образования.

Учебно-практическое пособие состоит из пятнадцати глав. Половина из них содержит следующие разделы курса математики: метод координат на плоскости и его простейшие приложения, прямая на плоскости, функции и пределы, производная и дифференциал, приложения производной, неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, функции нескольких переменных. Вторая половина показывает технологию решения математических задач с помощью системы Matlab.

В каждой главе приводятся краткие теоретические сведения, подробно рассмотрены примеры, даны задачи для самостоятельного решения и контрольные вопросы.

Глава 1
ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1.1. Понятие и классификация инструментальных средств

Инструментальные средства (ИС) – программные системы, используемые для решения задач информационного характера в различных сферах человеческой деятельности.

Если за основу **классификации** принять назначение ИС, то все инструментальные средства можно разделить на две категории: общие и специальные.

ИС общего назначения предназначены для решения наиболее общих задач информационного характера. Например, подготовка простых текстовых документов и графических изображений, создание отчетов.

ИС специального назначения необходимы там, где возникают задачи менее общего характера, например, проведение математических расчетов, статистическая обработка информации.

В настоящее время в обучении, практической и научной деятельности наиболее широко используются два инструментальных средства решения математических задач – MATHCAD и MATLAB.

Система MATLAB – специализированный математический пакет, ориентированный в большей степени на матричные операции. MATHCAD – пакет, не только для математических, но и инженерных вычислений, с мощной символьной математикой. В данном учебном пособии описана технология решения математических задач с помощью системы MATLAB.

1.2. Введение в практический курс MATLAB

1.2.1. Общие сведения о работе с системой MATLAB

В системе MATLAB предусмотрено 5 окон, обеспечивающих диалог пользователя с системой: Command Window, Workspace, Current Directory, Command History, Launch Pad.

Command Window – окно команд (см. рис.1). Доступно пользователю сразу же после запуска программы.

Рис. 1. Внешний вид окна Command Window

Позволяет вводить математические выражения с использованием встроенного редактора текстов, получать результаты вычислений, выводит сообщения системы. Знак >> указывает местоположение курсора. Для выполнения Текст программы необходимо ее набрать и нажать клавишу Enter. Рисунок 2 иллюстрирует процесс выполнения Текст программы 6+34.

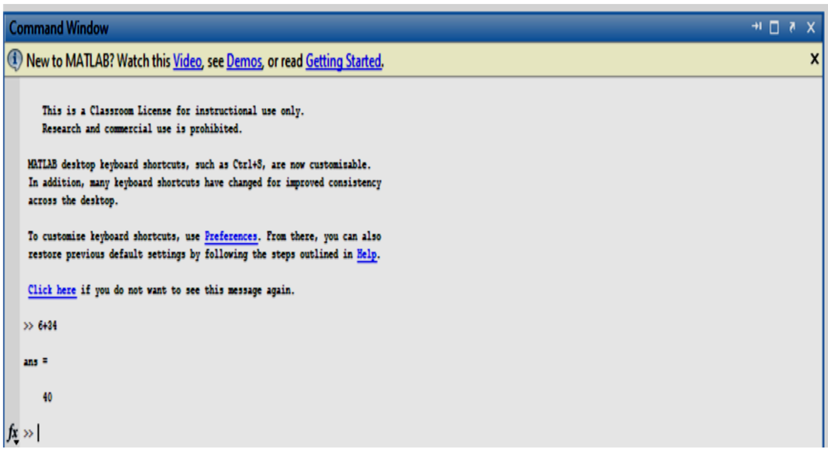


Рис. 2. Результат вычисления математического выражения

ВАЖНО: для редактирования ранее введенных команд в системе MATLAB необходимо воспользоваться клавишами ↓ ↑, позволяющими пролистать стек команд.

Окно Workspace – рабочая область, предоставляет список всех переменных рабочей среды (рис.3).

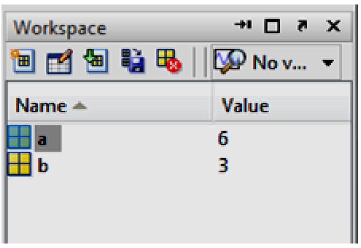


Рис. 3. Внешний вид окна
Workspace

Значения этих переменных можно сохранить, последовательно выбрав Текст программы меню: File – Save Workspace As. В появившемся диалоговом окне *Save to*…(рис.4) следует указать каталог и имя файла. По умолчанию файл сохранится в подкаталоге work основного каталога MatLab. Для восстановления значений переменных достаточно открыть сохраненный файл при помощи пункта *Open* меню *File* и использовать во вновь вводимых командах.

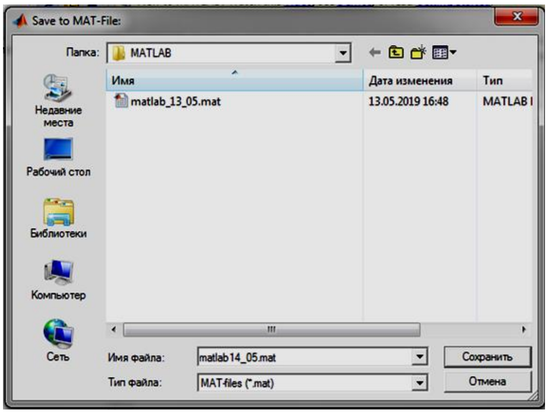


Рис. 4. Диалоговое окно сохранения
значений переменных

Сохранение и восстановление переменных рабочей среды можно выполнить также из командной строки с помощью команд *save* и *load*. Например: >> *save matlab_13_05.*

Окно Current Directory – текущий каталог (рис.5), позволяет пользователю работать не только с математическими выражениями, но и с файлами.

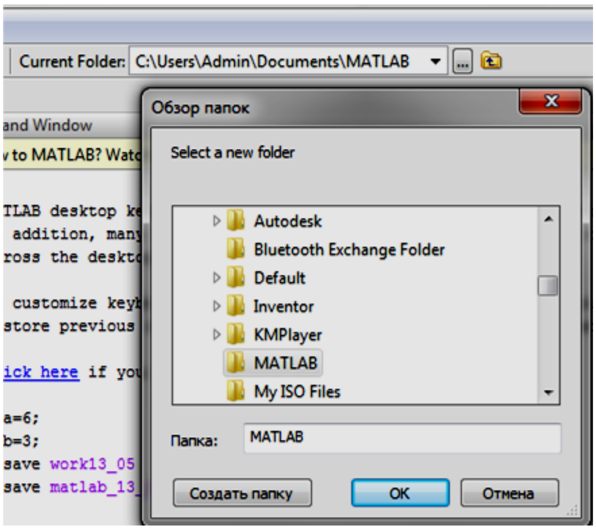


Рис. 5. Внешний вид окна Current Directory

Окно Command History – история команд. Все Текст программы, набираемые в командной строке, выводятся в виде списка в Command History. Нужную команду всегда можно найти и, дважды щелкнув по ней левой кнопкой мыши, переместить в командную строку.

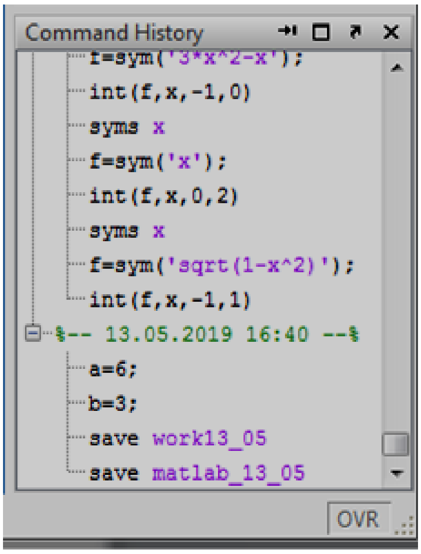


Рис. 6. Внешний вид окна
Command History

Окно Launch Pad – панель запуска (рис.7). Содержит дерево файловой системы, где отображены программные продукты, входящие в систему Matlab и установленные на вашем компьютере. С помощью этого окна можно запустить любой из них.

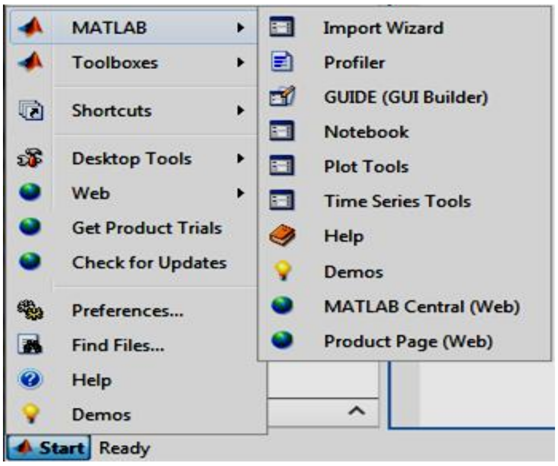


Рис. 7. Внешний вид окна Launch Pad

1.2.2. Главное меню системы MATLAB

Верхняя строка экрана содержит все Текст программы главное меню (рис.8): File, Edit, Debug, Desktop, Window, Help. Все они имеют стандартные названия и соответствующее подменю. В данном разделе рассмотрим некоторые Текст программы подменю вкладки File, которые будут использованы нами в дальнейшем в математических вычислениях (рис.9).

Рис. 8. Внешний вид главного меню

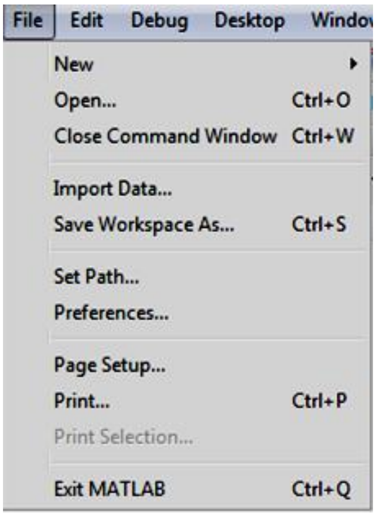


Рис. 9. Внешний вид
подменю Текст программы File

File:
- New – позволяет создать объекты различных типов;
- Open – открытие существующего объекта;
- Close Command Widow – закрытие текущего окна;
- Import Data – импортирует различного рода данные в среду MATLAB.

1.2.3. Общие сведения о языке MATLAB

Решение математических задач в MATLAB основано на выражениях.

Выражение – это заданное правило (формула) для вычисления некоторого значения. В системе MATLAB для построения выражений используются числа, переменные, константы и операции.

Числа могут быть: положительные и отрицательные, целые и дробные, действительные и комплексные.

По умолчанию MATLAB выводит числовые результаты в нормализованной форме с четырьмя цифрами после десятичной точки и одной до нее. Например:

```
x=-2:0.1:-1;
>> x
x =
  Columns 1 through 11

 -2.0000   -1.9000   -1.8000   -1.7000
 -1.6000   -1.5000   -1.4000   -1.3000   -1.2000   -1.1000   -1.0000
```

Представление (внешний вид, формат) числа можно изменять. О том, как это сделать можно подробно прочитать в [1].

Переменная – это именованный объект, который в процессе следующие операции:
- встроенные функции, например, solve ();
- функция решения уравнений, subs () – табулирование функции, plus () – сложение массивов и т.д.;
- логические: и (and, &), или (or, |), не (not, ~) , или не (xor, -);
- арифметические: сохранение знака (+), изменение знака (-), сложение (+), вычитание (-), умножение (*), деление (/);
- отношения: равно (= =), не равно (~=), меньше (<), больше (>), меньше или равно (<=), больше или равно (>=).

1.2.4. Сообщения об ошибках и их обработка

В MATLAB используются два вида ошибок: предупреждение и сообщение о ней. Первый вид сопровождается выводом предупреждающего сообщения, при этом процесс вычислений не прерывается. Во втором случае происходит остановка вычислений, затем выводится сообщение об ошибке. Оба вида ошибок должны устраняться.

Одним из способов устранения является предусмотрение ситуации появления ошибки и ее обработка. Например, при вычислении значения функции f=sin(x)/x при x=0, возникает ошибка типа «деление на ноль»:

```
>> x=-1:0.5:1;
>> f=sin(x)./x
f =
   0.8415    0.9589       NaN    0.9589    0.8415
```

где NaN – неопределенность вида 0/0.

Обработать эту ситуацию можно, например, использовать 1 вместо вычисления значения функции при x=0.

1.2.5. Основные математические функции MATLAB

MATLAB содержит все распространенные математические функции (табл. 1).

Таблица 1. Основные математические функции MatLab

sqrt(x)	вычисление квадратного корня
exp(x)	возведение в степень числа e
pow2(x)	возведение в степень числа 2
log(x)	вычисление натурального логарифма
log10(x)	вычисление десятичного логарифма
log2(x)	вычисление логарифма по основанию 2
sin(x)	синус угла x, заданного в радианах
cos(x)	косинус угла x, заданного в радианах
tan(x)	тангенс угла x, заданного в радианах
cot(x)	котангенс угла x, заданного в радианах
asin(x)	арксинус
acos(x)	арккосинус

atan(x)	арктангенс
pi	число пи
round(x)	округление до ближайшего целого
fix(x)	усечение дробной части числа
floor(x)	округление до меньшего целого
ceil(x)	округление до большего целого
mod(x)	остаток от деления с учётом знака
sign(x)	знак числа
factor(x)	разложение числа на простые множители
isprime(x)	истинно, если число простое
rand	генерация псевдослучайного числа с равномерным законом распределения
randn	генерация псевдослучайного числа с нормальным законом распределения
abs(x)	вычисление модуля числа

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры записи функции fminbnd () в случае вычисления:
    a. локального минимума;
    b. локального максимума;
    c. глобальных экстремумов

какой-либо функции.

2. Приведите примеры записи функции fminsearch () в случае поиска минимума функции двух переменных x4+y4-2x2+4xy-2y2+1 с точность 1*10-5. Координаты начальной точки поиска (1;-1).

Контрольные задания

1. Исследуйте функции задания 1 главы 10, используя систему MATLAB.
2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:

- Текст задания, постановка задачи;
- Скриншоты текста программ и построенных плоскостей;
- Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

Глава 2
ВЕКТОРЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Основные действия над векторами

Определение

Существуют скалярные величины: температура, масса, объем и т.д. К векторным (направленным) величинам относятся, например, скорость, ускорение, сила.

Вектором называется такая величина, которая характеризуется направлением в пространстве и числом, измеряющим ее в некоторых единицах измерения.

Пусть даны две точки $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Символом $\overrightarrow{AB}$ обозначают вектор, модуль которого $|\overrightarrow{AB}|$ равен длине отрезка AB, а направление вектора совпадает с направлением от A до B.

Два вектора называются равными, если:

a. их длины (модули) равны $|\vec{a}| = |\vec{b}|$;

b. оба вектора имеют одинаковое направление в пространстве;

c. вектор, длина которого равна 1, называется единичным, или ортом.

Суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ называется вектор $\overrightarrow{AC}$ (рис. 10).

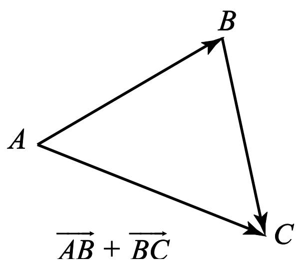
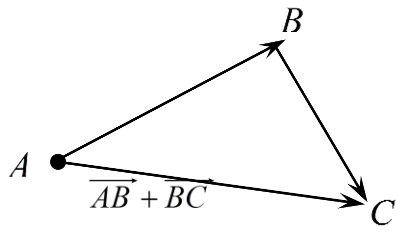


Рис. 10. Сумма двух векторов

Начало второго слагаемого вектора находится в конце первого.

В механике сумму двух векторов определяют как диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 11).



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$$

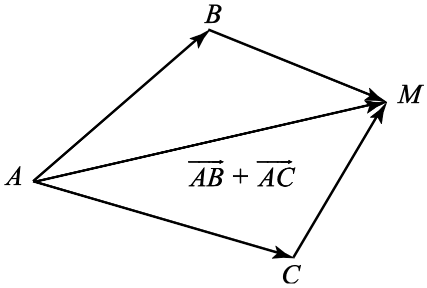


Рис. 11. Правило параллелограмма

Сложение векторов подчиняется законам сложения чисел:

a. переместительному: $a + b = b + a$; (1)

b. сочетательному: $(a+b)+c = a+(b+c)$ (2)

Можно находить сумму любого числа векторов, исходя из этих законов (рис. 12).

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{m}$$

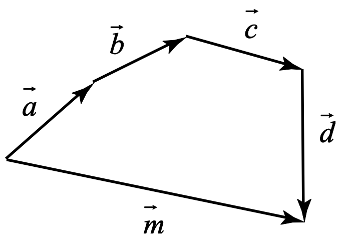


Рис. 12. Сложение векторов

Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ двух векторов называется сумма вектора $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, противоположным вектору $\vec{b}$ (рис. 13).

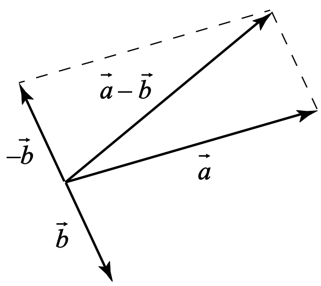


Рис. 13. Разность двух векторов

2.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}\right). \qquad (3)$$

Если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то их скалярное произведение равно 0. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, так как $\cos 90^\circ=0$.

Рассмотрим векторы в пространстве декартовой системы координат (рис. 14). Выберем на осях координат единичные векторы $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты. Тогда каждый вектор определяется в этой системе через их проекции на оси *OX*, *OY*, *OZ*.

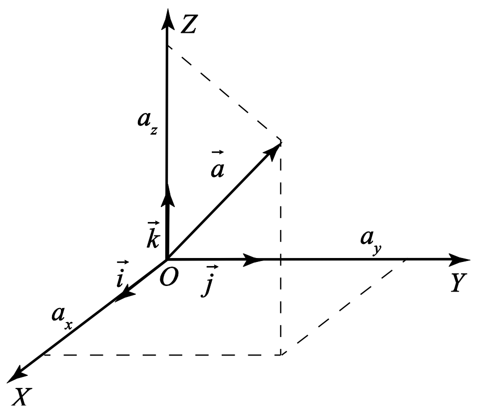


Рис. 14. Векторы в декартовой системе координат

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},$$

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (4)$$

Длина вектора определяется по формуле:

$$d=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},\ если\rightarrow\vec{a}=\overrightarrow{a_x i}+\overrightarrow{a_y j}+\overrightarrow{a_z k}, \qquad (5)$$

$$a_x=x_b-x_a,\quad a_y=y_b-y_a,\quad a_z=z_b-z_a.$$

Можно показать, что скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их одноимённых координат.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot a_z,$$

если $\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$.

Пример 1.1. Найти скалярное произведение векторов.

Решение.

$$\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=-3\vec{i}+4\vec{k},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-3)+(-3)\cdot 0+1\cdot 4=-2.$$

Пример 1.2. Между точками $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ получили два вектора $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$. Найти их проекции и вычислить скалярное произведение $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Решение.

$$AB = \{6, 4, 6\}, \quad AC = \{-3, 3, 10\},$$

$$\vec{A}(-1, 3, 0), \ \vec{B}(5, 7, 6), \ \vec{C}(-4, 6, 10).$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 6(-3) + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 10 = -18 + 12 + 60.$$

Если векторы заданы своими координатами, то угол между векторами можно определить по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \qquad (6)$$

Пример 1.3. Определить угол ΔABC при вершине A, если $A(2, -1, 3)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(0, 0, 5)$ (рис. 15).

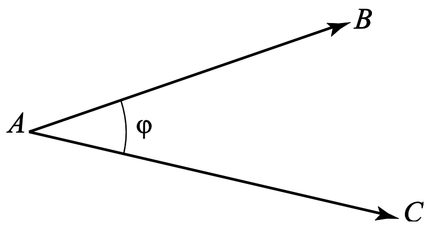


Рис. 15. Чертеж к примеру 1.3

Решение.

Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Для этого из координат конца вектора вычтем координаты начала.

$$\overrightarrow{AC} = \{0 - 2;\ 0 - (-1);\ 5 - 3\} = \{-2;\ 1;\ 2\}; \quad \overrightarrow{AB} = \{-1;\ 2;\ -2\};$$

$$\cos\varphi = \cos(\angle BAC) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB| \cdot |AC|} =$$

$$= \frac{(-1)\cdot(-2) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2 + 2 - 4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{0}{3 \cdot 3} = 0.$$

$\cos\varphi = 0,$ следовательно $\angle\varphi = 90° = \dfrac{\pi}{2}$.

Замечание:

Если векторы параллельны, то их проекции пропорциональны:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

2.3. Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 16) называется такой вектор $\vec{c}$, который:

1. Перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Направлен в ту сторону, из которой кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит в направлении против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора с.

3. Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах.

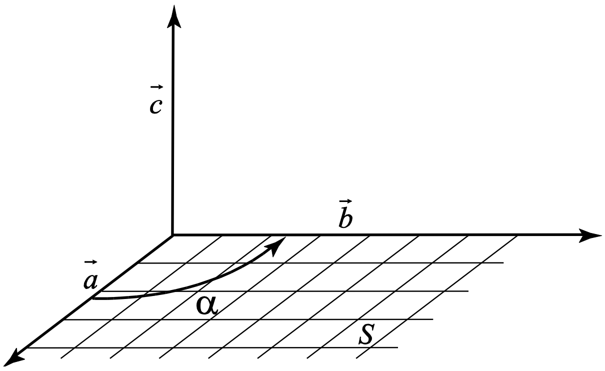


Рис. 16. Векторное произведение

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$$

Свойства векторного произведения

1. При перестановке местами сомножителей векторное произведение меняет знак, а модули их равны. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c},$ то $\vec{b} \cdot \vec{a} = -\vec{c}$.

2. Скалярный множитель α можно вынести за знак векторного произведения.

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ или } \vec{a} \cdot \alpha \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством, т.е. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ векторное произведение векторов, заданных своими проекциями.

Пусть даны вектор $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и вектор $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$ можно доказать, что векторное произведение вычисляется определителем 3-го порядка.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y)-\vec{j}\,(a_x\cdot b_z-a_z\cdot b_x)+\vec{k}\,(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x).$$

Так как модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, то векторное произведение применяют для вычисления площадей.

Задача 1.4 Вычислить площадь ΔABC с вершинами в точках $A(1,2,3)$; $B(3,4,5)$; $C(2,4,7)$.

Решение.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет проекции:

$$a_x=3-1;\ b_y=4-2;\ b_z=5-3;\qquad \overrightarrow{AB}=\{2;\ 2;\ 2\}.$$

Вектор $\overrightarrow{AC}$ имеет проекции:

$$b_x=2-1;\ b_y=4-2;\ b_z=7-3;\qquad \overrightarrow{AC}=\{1;2;4\}.$$

$$S\Delta=\frac{1}{2}S_{парал}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left\|(2\cdot 4-4)\vec{i}-\vec{j}(8-2)+\vec{k}(2\cdot 2-2\cdot 1)\right\|.$$

Площадь $\triangle$ равна $1/2$ площади параллелограмма, а ⇨ $1/2$ модуля векторного произведения $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{16+36+4}=\sqrt{56}=2\sqrt{14},\quad S\Delta=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{14}=\sqrt{14}.$$

Найти площадь S грани $A_1A_2A_3$ (грань пирамиды).

Решим аналогичную задачу:

1. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3$.

Координаты точек:

$$A_1(2;0;-2),\ A_2(6;2;-6),\ A_3(-2;4;-4).$$

Составим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\{6-2;2-0;-6-(-2)\}=\{4;2;-4\},$$

$$\overrightarrow{A_1A_3}=\{-2-2;4-0;-4-(-2)\}=\{-4;4;-2\}.$$

Найдем векторное произведение:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & -4\\ -4 & 4 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,(-4-(-16))-\vec{j}(-8-16)+\vec{k}(16-(-8)).$$

$$S\Delta=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12^2+24^2+24^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{144+576+576}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1296}=\frac{1}{2}\cdot 36=18.$$

$$S\Delta A_1A_2A_3=18\text{ ед}^2.$$

2.4. Векторно-скалярное произведение векторов

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх векторов называется число, абсолютная величина которого выражает объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на рёбрах. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ – обозначение смешанного произведения векторов.

Эти три вектора некомпланарны, т.е не лежат в одной плоскости. Поэтому, если $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=0$, то это необходимое и достаточное условие компланарности векторов.

Смешанное произведение векторов, заданных в координатах.

Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ заданы в координатах, т.е $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$, то смешанное произведение векторов вычисляется через определитель третьего порядка

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Пример 1.5.

Найти $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, если $\vec{a}=\{3,4,2\},\vec{b}=\{3,5,-1\},\vec{c}=\{2,3,5\}$.

Решение.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & 4 & 2\\ 3 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$$

$$=3(25-(-3))-4(15-(-2))+2(9-10)=$$

$$=328-4\cdot 17+2(-1)=84-68-2=14.$$

Задача 1.6. Найти объём V пирамиды, данной координатами вершин пирамиды $A_1(0,\ 1,\ 2)$, $A_2(4,\ 3,\ -2)$, $A_3(-4,\ 5,\ 0)$.

Решение.

Можно доказать, что объём пирамиды равен $\frac{1}{6}$ модуля векторно-скалярного произведения, составленного из трёх векторов-рёбер, выходящих из одной вершины.

Составим векторы $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{4, 2, -4\},\ \overrightarrow{A_1A_3} = \{-4, 4, -2\},\ \overrightarrow{A_1A_4} = \{2, 6, 2\}.$$

Найдём $V_{\text{пирамиды}}$:

$$(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3})\overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(4 \cdot 2 - (-2) \cdot 6) - 2((-4) \cdot 2 - (-2) \cdot 2) - 4(4 \cdot 6 - 4 \cdot 2) =$$

$$= 4 \cdot 20 - 2 \cdot (-4) - 4(24 - 8) = 80 + 8 - 64 = 24 \text{ куб. ед.}$$

$$V_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда}} =$$

$$= \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_3})\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4 \text{ куб. ед.}$$

Задача 1.7. Доказать компланарность векторов, проходящих через точки $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$, $D(5, 0, -6)$.

Решение.

Векторы компланарны, если они лежат в одной плоскости (рис. 17). Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах равен 0, т.е. смешанное произведение равно 0.

Составим векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

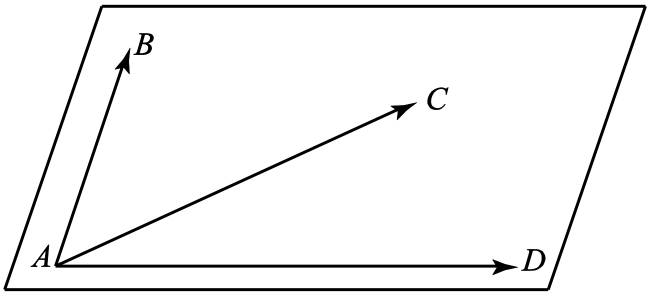


Рис. 17. Чертеж к задаче 1.7

$$\overrightarrow{AB} = \{1-2, 2-(-1), 1-(-2)\} = \{-1, 3, 3\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{2-2, 3-(-1), 0-(-2)\} = \{0, 4, 2\},$$

$$\overrightarrow{AD} = \{5-2, 0-(-1), -6-(-2)\} = \{3, 1, -4\}.$$

Смешанное произведение векторов.

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 3\\ 0 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$ =(–1)(–16 – 2) – 3(0 – 12)=18+18 – 36 = 0.

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Как определяются координаты вектора и его длина?
3. Что такое орт?
4. Приведите примеры коллинеарных векторов.
5. Что такое скалярное произведение векторов?
6. Чем определяется векторное произведение векторов?
7. Что определяет векторно-скалярное произведение векторов?
8. Какие вектора называются компланарными?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условие компланарности векторов.

Контрольные задания

1. Даны векторы $\vec{a}_1=(-2;\ 4)$ и $\vec{a}_2=(3;\ 1)$. Найти $\vec{a}_1+\vec{a}_2$; $\vec{a}_1-\vec{a}_2$; $3\vec{a}_1$; $-5\vec{a}_2$.

2. Даны точки A(3; –1), B(0; –5) и C(–2; 1). Найти $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; $\vec{m}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-0,5\overrightarrow{CA}$.

3.* Даны точки A(4; 0), B(–1; 3) и C(5; 7). Найти $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; $\vec{m}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$.

4. Найти длины векторов $\vec{a}=(5;\ 2\sqrt{6})$, $\vec{b}=(-5;\ 7)$, $\vec{c}=(-6;\ 8)$, $\vec{d}(7;\ -7)$.

5. Даны точки A(3; 5); B(–3; 3); C(5; –8). Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}$.

6.** Дан треугольник с вершинами A(7; 7), B(4; 3), C(3; 4). Найти его периметр.

7. Найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;\ -3;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 6;\ -1)$.

8. Найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ 3;\ 2)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ -1)$.

9. Дан вектор $\vec{a}=(3;\ 2;\ 7)$. Найти $5\vec{a}$; $-3\vec{a}$.

10. Вектор задан точками $A(-3;\ 5;\ 0)$ и $B(2;\ 3;\ -1)$. Найти: $3\overrightarrow{AB}, -0,5\overrightarrow{AB}$.

11.* Векторы заданы точками A(–3; 5; 0), B(–1; 4; 2), C(0; –3; 5), D(6; –7; 8). Найти: $\overline{AB}+\overline{BC}$; $\overline{AC}-\overline{DC}$; $2\overline{AB}$; $-3\overline{CD}$; $-3\overline{CD}$; $0,5\overline{BD}$; $3\overline{AB}+2\overline{BC}-4\overline{AD}$.

12.* Вычислить длины векторов $\vec{a}=\left(5;\ -3;\ \sqrt{2}\right)$; $\vec{b}=(-2;\ 3;\ 1)$; $\vec{c}=(0;\ 12;\ 5)$; $\vec{d}=(-5;\ 7;\ 2)$.

13. Вычислить длину вектора, заданного координатами своих начала и конца вектора:

a. *A*(5; 3; –1), *B*(4; 5; 1); *b*. *C*(3; –2; –5), *D*(7; 6; –1).

14.** Найти периметр треугольника с вершинами:
A(3; –2; 8), *B*(–1; 3; –3), *C*(5; 1; –7).

15. Заданы векторы, такие что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=7$, а угол между ними равен $30°$. Найти $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})$.

16.* Заданы векторы, такие что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, а угол между ними равен $60°$. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot 2\vec{a}$.

17. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами на плоскости:

a. $\vec{a}$ = (5; 7), $\vec{b}$ = (4; 3);	*c*. $\vec{a}$ = (–3; 5), $\vec{b}$ = (16; 1);	*e*. $\vec{a}$ = (5; –7), $\vec{b}$ = (7; 5);
b. $\vec{a}$ = (2; 0), $\vec{b}$ = (–3; –7);	*d*. $\vec{a}$ = (–3; 1), $\vec{b}$ = (1; –3);	*f*. $\vec{a}$ = (2; 0), $\vec{b}$ = (0; –3).

18. Найти угол между векторами, если:

a. $\vec{a}$ =(4; 0) и $\vec{b}$ =(2; –2); *c*. $\vec{a}$ = (–2; 3) и $\vec{b}$ = (9; 12);

b. $\vec{a}$ =(5; –3) и $\vec{b}$ =(3; 5); *d*. $\vec{a}$ = (–2; 3) и $\vec{b}$ = (4; –1).

19. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если *A*(1; 6), *B*(1; 0), *C*(–2; 3).

20.* Найти углы треугольника с вершинами *A*(6; 7), *B*(3; 3), *C*(1; –5).

21. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в пространстве:

a. $\vec{a}$ = (1; –3; 6), $\vec{b}$ = (–2; 4; 0); *d*. $\vec{a}$ = (2; 6; 5), $\vec{b}$ = (5; –4; –2);

b. $\vec{a}$ = (0; –3; 5), $\vec{b}$ = (1; –1; –4); *e*. $\vec{a}$ = (5; –5; 8), $\vec{b}$ = (–4; 5; 2);

c. $\vec{a}$ = (2; –5; 3), $\vec{b}$ = (–1; 7; –2); *f*. $\vec{a}$ = (–3; 3; –2), $\vec{b}$ = (6; 1; –6).

22. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если *A*(–1; 2; 5), *B*(1; –4; 3), *C*(2; 5; 3).

23.* Даны точки *A*(1; 0; –2), *B*(4; 3; 7), *C*(2; –3; 5), *D*(–1; 6; 0). Найти угол между векторами:

а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

24.* Найти углы треугольника с вершинами в точках *A*(2; –2; 0), *B*(7; –3; 1), *C*(1; –1; 5).

25.** Определить при каком значении m векторы $\vec{a}$(m; –3; 2) и $\vec{b}$(1; 2; –m) взаимно перпендикулярны.

Глава 3
ВЫПОЛНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ДЕЙСТВИЙ НАД ВЕКТОРАМИ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB

Действия над векторами в MATLAB выполняются согласно соответствующим математическим законам. Координаты вектора вводятся аналогично элементам массива, т.е. заключаются в квадратные скобки и разделяются пробелом. Рассмотрим основные действия над векторами в MATLAB.

Пример 1. Вычислите сумму векторов $\vec{a}(1;4)$ и $\vec{b}(-6;5)$.

В соответствии с определением операции сложения двух векторов их сумму можно записать в виде: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{c}$– результирующий вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. То есть $\vec{c}\,(1-6;4+5), \vec{c}(-5;9)$.

Текст программы:

```
>> a = [1 4];
>> b = [-6 5];
>> c=a+b
c2 =
   -5     9
```

Пример 2. Найдите координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$. Если $\vec{a}\{1;-2\}, \vec{b}\{0;3\}, \vec{c}\{-2;3\}$. Координаты векторов $2\vec{a}$ и $1/3\vec{b}$ можно найти по правилу вычисления координаты произведения вектора на число, результирующего вектора $\vec{p}$ – в соответствии с определениями операций сложения и вычитания векторов.

Текст программы:

```
>> a=[1 -2];
>> b=[0 3];
>> c=[-2 3];
>> p=2*a-1/3*b+c
p =
0       -2
```

Пример 3. Найти длину вектора, если известны его координаты $\vec{a}\{1;-4;3\}$.

Воспользуемся формулой вычисления длины вектора в пространстве (): $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

Текст программы:

```
>> a=[1 -4 3];
>> a=sqrt(1^2+(-4)^2+3^2)
```

Пример 4. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если известны координаты его начала и конца A=(2;1), B=(−1;3).

В начале найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}\{b_x - a_x; b_y - a_y\} = \{-1-2; 3-1\} = \{-3; 2\}$. Затем воспользуемся формулой вычисления длины вектора (): $\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{a_x^2 + b_x^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6056$.

Текст программы:

```
>> A=[2 1];

>> B=[-1 3];

>> AB=[B-A];

>> AB= sqrt (AB(1)^2+AB(2)^2)
```

где AB(1) и AB(2), координаты вектора, обратиться к которым, можно, как к элементам массива AB.

Пример 5. Заданы векторы, такие что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними равен 60^0. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Согласно формуле скалярного произведения векторов (3): $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot cos60^0 = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$. Так как величина угла в MATLAB задается в радианах, необходимо использовать формулу перевода градусов в радианы $\alpha = \frac{\pi \cdot y^0}{180}$.

Текст программы:

```
>> a=2;
>> b=3;
>> P=2*3*cos((pi*60)/180)
```

Пример 6. Найти угол между векторами, если $\vec{a}(2;4)$и $\vec{b}(3;1)$.

Находим косинус угла между векторами по формуле (6):

$$cos\varphi = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{2\cdot3+4\cdot1}{\sqrt{2^2+4^2\cdot\sqrt{3^2+1^2}}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Искомый угол φ равен:

$$\varphi = \arccos(cos\varphi) = \arccos\left(cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^0.$$

Текст программы:

```
>> a=[2 4];
>> b=[3 1];
```

% вычисление $(\vec{a}, \vec{b})$

```
>> c=times (a,b);
>> c=sum(c);
```

% вычисление $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

```
>> a=a.^2;
>> b=b.^2;
>> s1=sqrt (plus (a(1), a(2)));
>> s2=sqrt (plus (b(1), b(2)));
>> cos_fi=c/ (s1*s2);
>> fi=acosd (cos_fi)
fi =
  45.0000
```

Пример 7. Вычислить площадь треугольника, заданного координатами своих вершин A(5,7), B(2,3), C(1,-4).

Обозначим координаты вершин следующим образом: A(a1,a2), B(b1,b2), C(c1,c2).

Выразим длины векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ через координаты соответствующих точек:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2}$$

$$\overline{|BC|} = \sqrt{(c1 - b1)^2 + (c2 - b2)^2}$$

$$\overline{|AC|} = \sqrt{(c1 - a1)^2 + (c2 - a2)^2}$$

Площадь треугольника вычислим, используя формулу Герона: $S = \sqrt{p \cdot (p - AB) \cdot (p - BC) \cdot (p - AC)}, p = \frac{(AB+BC+AC)}{2}$.

Текст программы:

% задаем координаты векторов

```
>> A=[6 7];
>> B=[3 3];
>> C=[1 -5];
>> AB=sqrt((B(1)-A(1))^2+(B(2)-A(2))^2);
>> BC=sqrt((C(1)-B(1))^2+(C(2)-B(2))^2);
>> AC=sqrt((C(1)-A(1))^2+(C(2)-A(2))^2);
>> p=(AB+BC+AC)/2;
>> S=sqrt(p*(p-AB)*(p-BC)*(p-AC))
S =
   8.0000
```

Контрольные вопросы

1. Как вводятся координаты вектора в системе MATLAB? Приведите примеры.
2. Перечислите арифметические операторы и функции системы MATLAB, выполняющие поэлементное: сложение, вычитание, умножение и деление массивов, возведение массива в степень. Приведите примеры их использования.

Контрольные задания

1. Напишите программы к контрольным заданиям главы 2.
2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:
    1) Текст задания, постановка задачи;
    2) Скриншоты выполнения команд в системе MATLAB;
    3) Письменное решение задачи без использования системы MATLAB.

Глава 4
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

4.1. Уравнение прямой на плоскости. Различные виды уравнений

Угол между прямыми.

На координатной плоскости *XOY* положение прямой определяется углом α, где α – угол наклона прямой к оси *OX* и отрезком “b”, который они отсекают на оси *OY*.

Чтобы написать уравнение этой прямой, возьмём на ней произвольную точку $M(x,y)$ и найдём соотношение между её координатами (см. рис. 2.1). Из треугольника *BMC* имеем: $\frac{MC}{BC} = \mathrm{tg}\alpha$ или в координатной форме: $\frac{y-b}{x} = \mathrm{tg}\alpha$; $\mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой, обозначается k. Отсюда $\frac{y-b}{x} = k$ или $y - b = kx$ => $y = kx + b$ – получили уравнение прямой с угловым коэффициентом.

1. Уравнение прямой через данную точку (см. рис. 18)

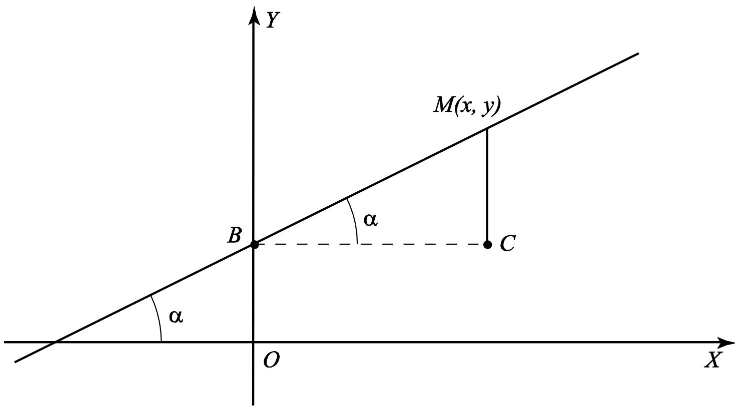


Рис. 18. Внешний вид уравнения прямой через данную точку

Возьмем на прямой точки $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$. Составим треугольник ΔMM_1C. Из него получим:

$$\frac{CM}{M_1C} = \mathrm{tg}\alpha = k \quad (1).$$

$CM = y - y_1$, $M_1C = x - x_1$ подставим (1) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = k$ или

$y - y_1 = k(x - x_1)$ – уравнение через точку M_1 (см. рис. 19).

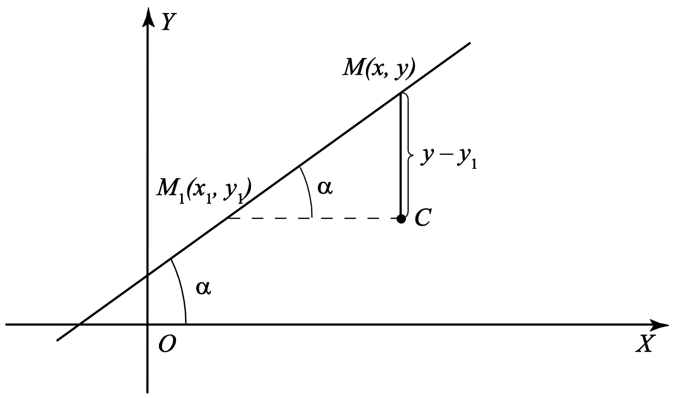


Рис. 19. Уравнение прямой через т. M_1

2. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки M_1 и M_2 можно вывести аналогично из подобия треугольников ΔMM_1D и ΔM_1M_2C

$\frac{DNM}{CM_2} = \frac{M_1D}{M_1C}$ или $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ (см. рис. 20).

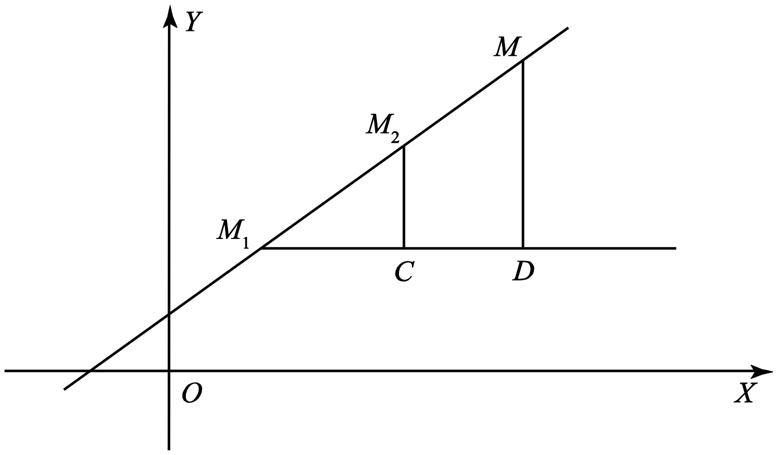


Рис. 20. Уравнение прямой, проходящей через две точки

3. Общий вид уравнения прямой.

Замечаем, что все полученные уравнения обладают тем свойством, что во все уравнения координаты текущей (произвольной) точки $M(x, y)$ входят линейно, т.е. в I степени. Все эти уравнения являются частным случаем уравнения вида: $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – произвольные постоянные числа. Построим прямую по её общему уравнению.

Задача 2.1. Построить прямую по её общему уравнению $3x - 4y + 12=0$.

Решение.

В декартовой системе координат найдём две точки, через которые проходит эта прямая.

Положим $x = 0$, $-4 + 12 = 0 \Rightarrow y = 3$, точка $M_1(0, 3)$.

Теперь $y = 0$, $3x + 12 = 0 \Rightarrow x = -4$, точка $M_2(-4, 0)$.

Если $A = 0$, $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ – прямая, параллельная оси OX.

Если $B = 0$, $Ax + C = 0$, $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси OY.

Если $C = 0$, $Ax + By = 0$, $y = -\frac{A}{B}$ – уравнение прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 21).

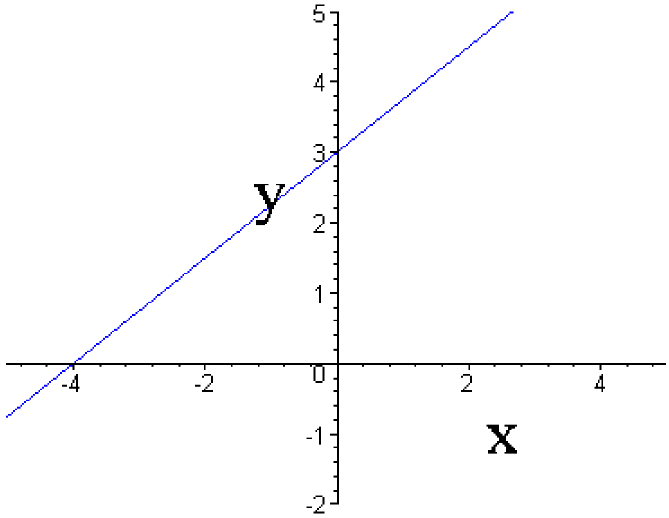


Рис. 21. Уравнение прямой, проходящей через начало координат

4.2. Угол между прямыми

Пусть на плоскости XOY даны две непараллельные прямые. Эти прямые пересекаясь, образуют 2 угла в точке M. Определим угол φ между I и II прямыми, если даны их уравнения с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. По чертежу видим, что α_2 – внешний угол. Угол α равен сумме двух внутренних углов этого треугольника не смежных с ним (см. рис. 22).

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi \Rightarrow \text{отсюда } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 .$$

Найдём tg этих выражений:

$$\text{tg}\varphi=\text{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\text{tg}\alpha_2-\text{tg}\alpha_1}{1+\text{tg}\alpha_1\times\text{tg}\alpha_2},\ \text{tg}\alpha_1=k_1,\ \text{tg}\alpha_2=k_2.$$

Получим формулу: $\text{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

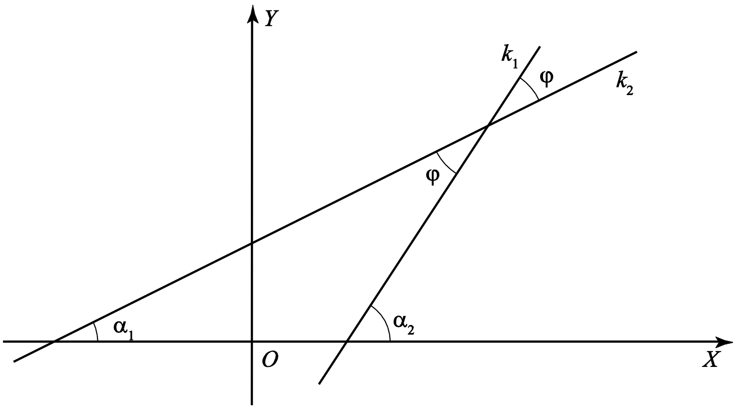


Рис. 22. Угол между прямыми

Задача 2.2. Найти угол между прямыми $2x+3y-1=0$ и $x-3y+5=0$.

Решение.

Приведём уравнение к уравнению с угловыми коэффициентами

$$3y=1-2x\Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3},\ k_2=-\frac{2}{3},$$

$$-3y=-5-x\Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3},\ k_1=\frac{1}{3}.$$

$$\text{tg}\varphi=\frac{-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}=-\frac{9}{7},\quad \varphi=-\text{arctg}\frac{9}{7}=-52°,7\approx180-52°,7.$$

Замечание. Определим условие перпендикулярности и параллельности прямых из формулы $\text{tg}\varphi=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. Если прямые перпендикулярны, то $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, а $\text{tg}\dfrac{\pi}{2}$ не существует. Дробь не существует, когда знаменатель её равен 0, т.е. $1+k_1k_2=0$ или $k_1k_2=-1$, $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$ – условие перпендикулярности. Если прямые параллельны, то $\varphi=0$, *а* $\text{tg}0=0$, следовательно дробь должна быть равна 0, а это возможно если $k_2-k_1=0$, т.е. $k_2=k_1$

Задача 2.3. Дана прямая $3x-4y+4=0$.

Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,-1)$

a. перпендикулярной к данной;

b. параллельной ей.

Решение.

Приведём уравнение к уравнению с угловым коэффициентом

$$-4y = -3x - 4,\ y = \frac{3}{4}x + 1,\ k = \frac{3}{4}.$$

Из условия параллельности $k_1 = \frac{3}{4}$. Тогда используя уравнение прямой через данную точку $y - y_1 = k\,(x - x_1)$

b. $y + 1 = \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow 4y + 4 = 3x - 6 \Rightarrow 3x - 4y - 10 = 0.$

a. Если $k = \frac{3}{4}$, по условию перпендикулярности

$$y + 1 = \frac{-4}{3}(x-2);\ 3y + 3 = -4x + 8;\ \ 4x + 3y - 5 = 0.$$

Задача 2.4. Даны 3 точки $A(3; -13)$, $B(21; -1)$, $C(10; -4)$. Проверить, что эти 3 точки не лежат на одной прямой, т.е. образуют треугольник.

Решение.

Найдем уравнения всех сторон треугольника по формулам уравнения прямых через 2 точки.

Уравнение AB: $A(3; -13)$, $B(21; -1)$

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A};\ \ \frac{x-3}{21-3} = \frac{y+13}{-1-13};$$

$$\frac{x-3}{18} = \frac{y+13}{12};\ \ \frac{x-3}{3} = \frac{y+13}{2};$$

$$2x - 6 = 3y + 39 \Rightarrow 2x - 3y - 45 = 0.$$

Уравнение BC: $B(21; -1)$, $C(10; -4)$

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B};\ \ \frac{x-21}{10-321} = \frac{y+1}{-4+1};\ \ \frac{x-21}{-11} = \frac{y+1}{-3};$$

$$3x - 11y - 74 = 0.$$

Уравнение AC: $C(10; -4)$, $A(3; -13)$

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A};\ \ \frac{x-3}{10-3} = \frac{y+13}{-4+13};\ \ \frac{x-3}{7} = \frac{y+13}{9};$$

$$9x - 27 = 7y + 91;\ \ 9x - 7y - 118 = 0.$$

Строим эти точки в системе координат. По уравнению линий, видим, что угловые коэффициенты их различны и точка A не принадлежит прямой BC. $A(3; -13)$ уравнение BC: $3x - 11y - 74 = 0$. $3 \cdot 3 - 11 \cdot (-13) - 74 \neq 0$, следовательно, прямые образуют треугольник.

Найдем $\angle C$ между AC и BC

AC: $9x - 7y - 118 = 0$, $\quad k_{AC} = \frac{9}{7}$.

BC: $3x - 11y - 74 = 0$, $\quad k_{BC} = \dfrac{3}{11}$.

Пусть $k_1 = \frac{9}{7}$, $k_2 = \frac{3}{11}$, $\operatorname{tg}\angle ACB = \dfrac{\frac{9}{7} - \frac{3}{11}}{1 + \frac{9}{7}\cdot\frac{3}{11}} = \dfrac{78}{50} \approx 1{,}56$,

$$\angle ACB \approx 57{,}3^\circ.$$

Задача 2.5. Вычислить периметр треугольника.

Решение.

Найдем расстояние между точками A и B, B и C, C и A.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(21-3)^2 + (-1-(-13))^2} =$$

$$= \sqrt{18^2 + 12^2} = \sqrt{324 - 144} = \sqrt{468}.$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(21-10)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{121+9} = \sqrt{129}.$$

$$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-10)^2 + (-13+4)^2} =$$

$$= \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}.$$

$$P = \sqrt{468} + \sqrt{129} + \sqrt{130} \approx 21{,}6 + 11{,}4 + 11{,}4 \approx 44{,}4.$$

4.3. Расстояние от точки до прямой. Вывод нормального уравнения прямой

Предположим, что в общем уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ выполняется условие $A^2 + B^2 = 1$. Геометрически это означает (см. рис. 23).

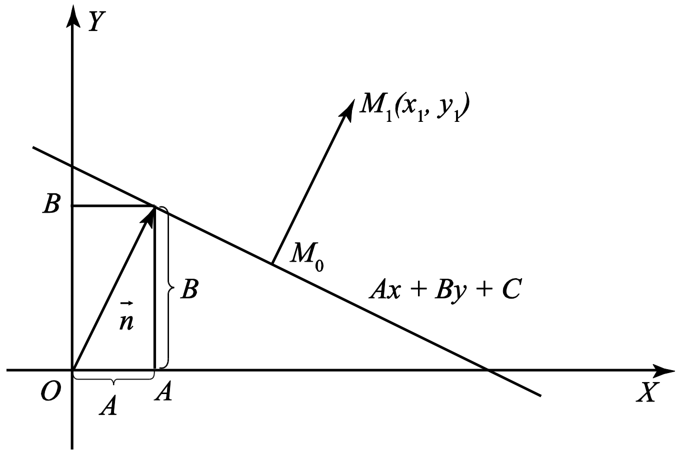


Рис. 23. Геометрическая иллюстрация условия

Если провести из начала координат на прямую вектор, то его длина равна 1 (см. рис. 23). Вектор $\vec{n}$ – нормальный (перпендикулярный) единичный вектор прямой, где A и B – проекции этого вектора на оси OX и OY. В этом случае уравнение называем нормальным и записывается так: $A_0x + B_0y + C_0=0$. Любое другое уравнение прямой (общее) приведем к нормальному виду, если разделим его левую часть на $|\vec{n}| = \sqrt{A^2+B^2}$, тогда $N = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ является нормирующим множителем. Иногда это уравнение записывается так:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0 \text{ или } x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi + p = 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} < 1 = \cos\varphi$$

(φ – угол наклона нормального вектора к оси OX)

$$\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi, \quad p = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ – длина вектора } \vec{n}$$

Найдем расстояние от т. $M_1(x_1, y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$. Приведем уравнение прямой к нормальному виду. Для этого умножим на $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – нормирующий множитель. Получим $A_0x + B_0y + C_0 = 0$, подставим т. $M(x_1, y_1)$ в это уравнение.

Тогда $A_0x + B_0y + C_0 = d.$ $\left(A_0^2 + B_0^2\right) = d,$ т.к. $A_0^2 + B_0^2 = 1$ для вектора $\vec{n}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ – вектор расстояния от т. M_1 до прямой. Длина вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |d|$, т.к. $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{n}\cdot d$ (рис. 23).

Следовательно, $|d| = |A_0x + B_0y + C_0|$ – расстояние от т. M до прямой $Ax + By + C = 0$ или $|d| = \left|\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Задача 2.6. Найти расстояние от т. $M(-1; 2)$ до прямой $5x + 12y + 8 = 0$.

Решение.

Приведем уравнение прямой к нормальному виду, умножив его на нормирующий множитель $M = \frac{1}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{1}{13}$

$$\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + \frac{8}{13} = 0.$$

Подставим $x = -1$, $y = 2$ в уравнение

$$d = \left|\frac{5}{13}(-1) - \frac{12}{13}(2) + \frac{8}{13}\right| = \frac{21}{13}.$$

Задача 2.7. Составить уравнение биссектрисы угла для двух прямых $3x - 4y + 12 = 0$ и $12x + 5y - 7 = 0$ (см. рис. 24).

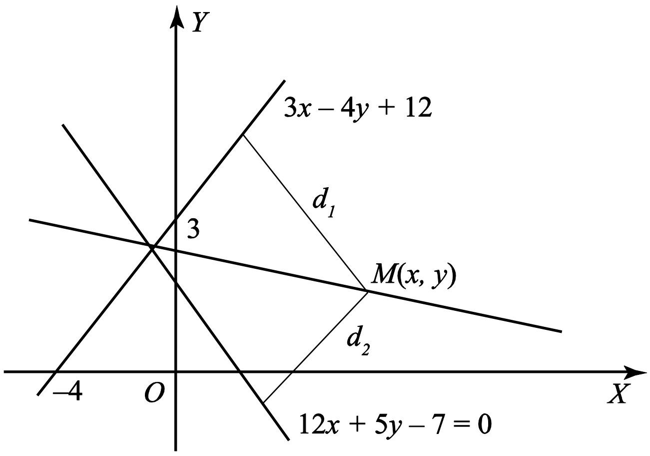


Рис. 24. Чертеж к задаче 2.7

Решение.

Выберем на биссектрисе произвольную т. $M\left(x_0, y_0\right)$. Найдем расстояние d_1 и d_2 до прямых

$$d_1 = \left|\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right|, \quad d_2 = \left|\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{12^2 + (5)^2}}\right|.$$

Свойство точек, лежащих на биссектрисе – равноудаленность от прямых – используем для получения уравнения биссектрисы $d_1 = d_2$.

$\left|\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{12^2 + (5)^2}}\right|$, получим $\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{\sqrt{25}} = \pm\frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{\sqrt{144 + 25}}$, отсюда

$$\frac{3x_0 - 4y_0 + 12}{5} = \frac{12x_0 + 5y_0 - 7}{13} \Rightarrow 39x_0 - 52y_0 + 156 = 60x_0 + 25y_0 - 35.$$

$21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$ – искомое уравнение биссектрисы I и $99x_0 - 27y_0 - 121 = 0$ – уравнение II биссектрисы. По чертежу можно определить искомую прямую.

$21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$, если $x_0 = 0$, то $y_0 = \frac{191}{77} \approx 2{,}5$

если $y_0 = 0$, то $x_0 = \frac{191}{21} \approx 9$ – координаты точек, пересечения с осями совпадают с найденными. Следовательно, искомая биссектриса имеет уравнение: $21x_0 + 77y_0 - 191 = 0$ – биссектриса угла.

Контрольные вопросы

1. Чем определяется угловой коэффициент прямой?
2. Каким образом определяется расстояние от точки до плоскости?
3. Как определить угол между двумя плоскостями?

4. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.
5. Приведите вывод канонического уравнения прямой.
6. Что такое направляющий вектор прямой?

Контрольные задания

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B(5; 3) и имеющий нормальный вектор $\vec{n}$= (5; 0).

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C(–3; 3) и имеющий нормальный вектор $\vec{n}$= (–3; 2).

3.** Составить уравнение высоты *BD* в треугольнике с вершинами *A*(7; 0), *B*(3; 6), *C*(–1; 1).

4.* Составить уравнения диагоналей ромба, заданного точками *A*(2; 2), *B*(3; 5), *C*(4; 2), *D*(3; –1).

5. Составить уравнения сторон квадрата, заданного точками *A*(1; 1), *B*(4; 2), *C*(5; –1), *D*(2; –2).

6.** Треугольник задан точками *A*(5; 2), *B*(–1; –4), *C*(–5; –3). Составить уравнение прямой, проходящей через точку *B* параллельно *AC*.

7. Составить уравнения прямых, заданных двумя точками:

a. *A*(1; 3), *B*(4; 1);	*d.* *P*(0; 0), *Q*(–3; 5);
b. *C*(–1; 5), *D*(3; –7);	*e.* *A*(3; –5), *B*(3; 7);
c. *M*(–3; 0), *N*(0; 5);	*f.* *C*(7; –1), *D*(–1;–1)

8.* Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A*(–1; 2), *B*(5; 3), *C*(4, –2).

9.* Составить уравнения диагоналей квадрата *ABCD*, заданного точками *A*(1; 1), *B*(4; 2), *C*(5; –1), *D*(2; –2).

10. Указать, какая пара уравнений соответствует параллельным прямым:

a. $2x - 3y + 5 = 0,$ $6x - 9y + 1 = 0;$	*d.* $3x + 2y + 3 = 0$ $3x - 2y - 1 = 0$
b. $5x - y + 4 = 0,$ $10x - 2y + 1 = 0;$	*e.* $6x + 10y + 1=0$ $3x + 5y = 0;$
c. $6x - 3y - 1 = 0,$ $2x - 5y + 5 = 0;$	*f.* $6x - 3y + 7 = 0$ $2x + y + 1 = 0.$

11. Указать, какая пара уравнений соответствует перпендикулярным прямым:

a $2x + 3y - 7 = 0,$ $3x - 2y = 0;$

b $5x - 2y + 1 = 0,$ $4x + 10y - 1 = 0;$

c $6x - 4y + 7 = 0,$ $8x - 12y - 1 = 0.$

12.** Составить уравнение высоты *AD* треугольника, заданного точками *A*(–5; 3), *B*(3; 7), *C*(4; –1).

Глава 5
СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB

5.1. Технология составления различных видов уравнений прямой

В качестве образца рассмотрим составление двух видов уравнения прямой: по координатам точки и нормального вектора и по координатам двух точек, принадлежащих прямой.

Для вывода на экран уравнения прямой воспользуемся функция fprintf (). С ее помощью в окне приложения можно вывести как строку простого текста, так и значения переменных различных типов. Общая форма записи функции:
fprintf (‘форматная строка’[, перем1], [перемен2] […]);

Здесь в круглых скобках указаны обязательные параметры, а в прямоугольных скобках – параметры, которые указываются по необходимости.

Таблица 1. Список основных спецификаторов для функции fprintf ()

Спецификатор	Описание
%d	целочисленные значения
%f	вещественные значения
%s	строковые данные
%c	символьные данные
%u	беззнаковые целые значения

Таблица 2. Параметры спецификаторов формата

Символ	Описание	Пример
Знак "минус" (-)	Выравнивание преобразованных аргументов по левому краю	%-5.2d
Знак "плюс" (+)	Всегда печатать знак числа (+ или –)	%+5.2d
Ноль (0)	Заполнение нулями вместо пробелов	%05.2d
Цифры	Определяет минимальное число знаков, которые будут напечатаны	%6f
Цифры (после точки)	Число после точки определяет количество символов, печатаемых справа от десятичной точки	%6.2f

Функция fprintf () также дает возможности управления выводом с помощью эскейп-последовательностей, начинающихся с символа ESC (обратный слэш «\»). В примере использован управляющий символ перевода строки. Другие символы управления выводом приведены в таблице 3.

Таблица 3. Некоторые символы управления выводом

Управляющий символ	Название	Описание
\n	lf (line feed)	перевод строки
\b	bs (backspase)	возврат на шаг (забой)
\t	ht (horizontal tab)	Горизонтальная табуляция
\r	cr (carriage return)	Возврат каретки

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1; 2) и имеющий нормальный вектор $\vec{n}$= (3; -1). Координаты точки A заданы как вектор. Коэффициент C рассчитан по формуле общего уравнения прямой Ax + By + C = 0.

Текст программы:

```
>> A=[1 2];
>>n=[3 -1];
>> C=n(1)*A(1)-n(2)*A(2);
>> fprintf ('%+d *x  %+d *y   %+d = 0\n', n(1), n(2), C)
 >>3*x-1*y+5=0
```

Пример 2. Составить уравнение прямой, заданной двумя точками A(1,2) и B(3,4). В написании программы использована формула () уравнения прямой.

Текст программы:

```
>> A=[1 2];
>> B=[3 4];
>> k=(B(2)-A(2))/(B(1)-A(1));
>> C=-k*A(1)+A(2);
>> fprintf ('%+dx  %+dy  %+d=0\a', k, -(A(2)-A(1)), C)
```

5.2. Построение графиков элементарных функций

В MATLAB имеется три функции построения двумерных графиков: *plot()* , *fplot( )* и *ezplot( )*. Виды функции plot ():

plot(x, y)
plot(x, y, s)
plot(x_l, y_l, s_1, x_2, y_2, s_2, ..., x_n, y_n, s_n)
x — аргумент функции, задаваемой в виде вектора; y — функция, представленная в аналитическом виде или в виде вектора или матрицы; s — вектор стилей графика; константа, определяющая цвет линий графика, тип точек и тип линии; x_1, x_2,..., x_n — аргументы n функций, изображаемых на одном графике; y_1, y_2, ..., y_n — функции, изображаемые на одном графике.

Рассмотрим более подробно функции двухмерной графики и приведем примеры.

Функция plot(x, y). Функция позволяет строить график при задании функции y = f(x) в аналитическом виде, в виде вектора или матрицы. Ниже приведен рисунок (рис.25) и пример команд построения графика функции y = x + 3 для x в диапазоне [0; 1] с постоянным шагом h = 0.2.

```
>>x = 0: 0.2 :1;
>>y = x + 3;
>>plot(x,y)
```

Функция plot (x,y,s) аналогична функции plot (x, y) и отличается лишь наличием вектора констант s, определяющего цвет линий графика, тип точек и линий функции. Стили графиков приведены в таблице 5.

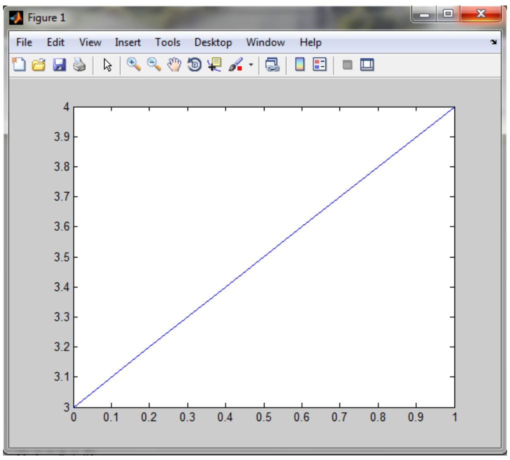


Рис. 25. График функции, выполненный без использования стилей

Таблица 4. Стили графиков

Тип точки		Цвет линии		Тип линии	
.	точка	Y	желтый	-	сплошная
O	окружность	M	фиолето-вый	:	двойной пунктир
x	крест	C	голубой	-.	Штрих-пунктир
+	плюс	R	Красный	--	штриховая
*	звездочка	G	зеленый		
S	квадрат	B	синий		
D	ромб	W	белый		
^,v,>,<	Треуголь-ник вверх (вниз, влево, вправо)	K	черный		
P	пятиуголь-ник				
H	шести-угольник				

При задании стиля символ s представляется в виде вектора, элементами которого являются: тип точки, цвет линии и тип линии, разделенные запятыми и выделенные одиночными кавычками. Например: plot (x, y, ' ['R', '*' ,'-.']); Это график красного цвета (R), точки графика в виде звездочек (*), линии штрихпунктирные (-.). На рис.26 показан график функции y = 3+x, выполненный в этом стиле. Соответствующие команды представлены ниже.

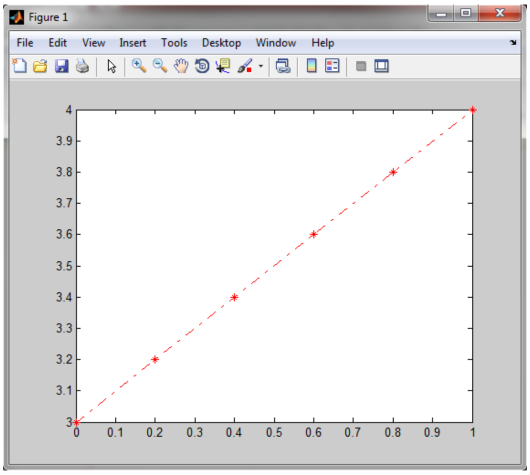


Рис. 26. График функции, выполненный с использованием стилей

```
>> x = 0: 0.2 :1;
>> y = x + 3;
>> plot(x,y,['R','*','-.'])
```

Функция plot(x_l, y_l, s_1, x_2, y_2, s_2, …, x_n, y_n, s_n) позволяет строить большое число математических функций на одном графике.

Обозначения имеют следующий смысл:

x_i – i-ый массив аргументов, заданный в виде вектора;

y_i - i-ый массив значений функции, для заданного массива аргументов (может задаваться и в аналитическом виде);

si – стиль графика для i-ой функции. Если стиль не задан, система MATLAB задает его автоматически.

В качестве примера построим график функции y=x+3, заданный массивом значений:

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0

Команды будут иметь вид:

```
>>x= [0 0.2 0.4 0.6 0.8 1];
>>y= [3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0];
>> plot (x, y, ‘.-’)
```

При необходимости можно задать заголовок, надписи осей и координатную сетку, записав последовательно, команды: title (‘текст заголовка’), xlabel (‘надпись оси OX’), ylabel (‘надпись оси OY’), grid on. Соответствующие надписи будут последовательно появляться на рисунке графика функции. Полный текст программы приведен ниже:

>> syms x y;
>> x = 0: 0.2 :1;
>> y = x + 3;
>> plot(x,y,['R','*','-.'])

//команды вводятся последовательно при открытом окне графика функции

>> title ('Function');
>> xlabel ('X');
>> ylabel ('Y');
>> grid on;

На рис.27 показан график функции, при построении которого использованы указанные выше команды.

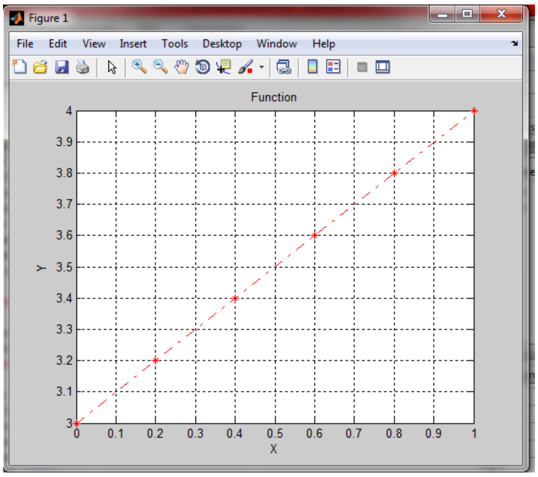


Рис. 27. График функции с заголовком, подписями осей и координатной сеткой

Пример команд и внешний вид окна программы при построении графиков двух функций y(x) и z(x) приведены ниже и на рис.28.

>> syms x y z;
>> x=[1 2 3 4 5];
>> y=exp(-x);
>> z=cos(x);
>> plot (x, y, x, z)

Функция ezplot () применяется для рисования графиков неявно заданных функции двух переменных и параметрически заданных функций.

Виды функции ezplot ():

– ezplot(f, xmin, xmax) рисует график на заданном интервале.
– Ezplot (f) Рисует график на интервале, заданном по умолчанию ($[-2\pi, 2\pi]$).

Название осей, заголовок графика определяется автоматически. Однако, они могут быть изменены обычным способом (см. команды xlabel, title).

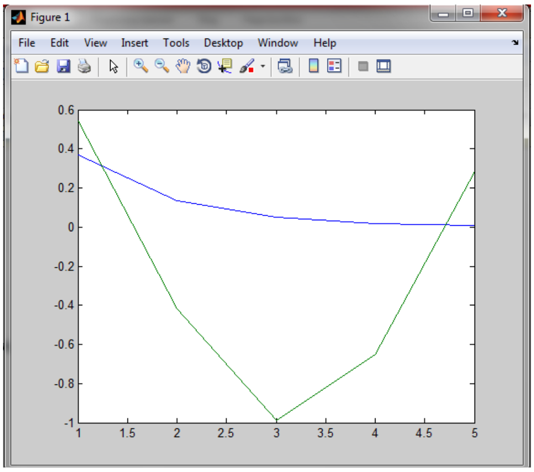


Рис. 28. Графики двух функций

Текст программы построения графика функции $y=x^2$ на интервале, заданном по умолчанию, и внешний вид окна программы (рис.29) представлен ниже:

>>syms x;

>> ezplot('x^2');

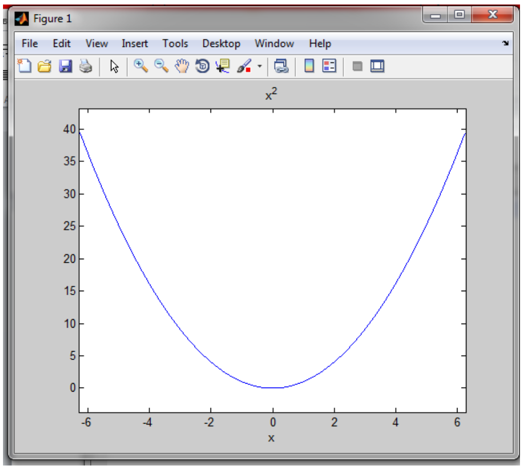


Рис. 29. График функции $y=x^2$, функция ezplot()

График кубического многочлена A(s) = s 3 + 4s 2 − 7s − 10 на интервале [−1, 3] с подписями осей и внешний вид окна программы представлены ниже (рис.30):

```
>> syms s;
>> A = s^3 + 4*s^2 - 7*s - 10;
>> ylabel('A(s)');
>> xlabel('x');
>> ezplot(A, -1, 3);
```

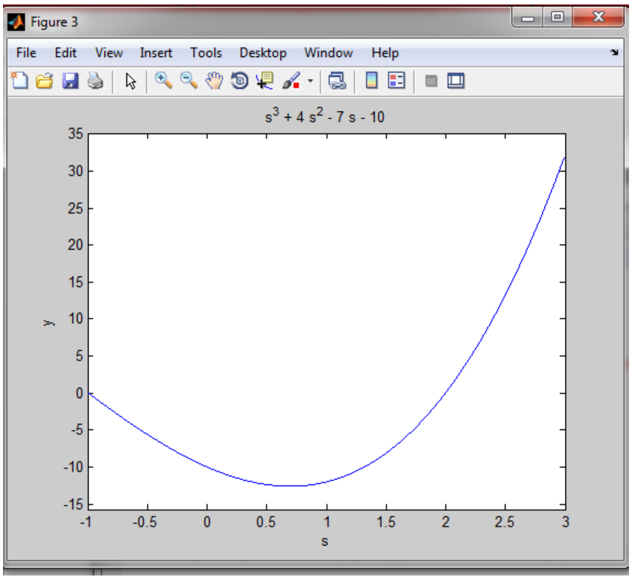


Рис. 30. График кубического многочлена
с подписями осей, функция ezplot()

ВАЖНО: Описанные выше функции задают разные способы построения графика. MATLAB позволяет совмещать графики функций, построенных разными способами, с помощью команды **hold,** реализующей переключение от одного режима к другому:

- Команда **hold on** включает режим сохранения текущего графика, так что последующие команды приведут к добавлению новых графиков в графическом окне.
- Команда **hold** off выключает режим сохранения графика.

Функция fplot( ) является модификацией функции plot является функция fplot, которая строит график функции y=f(x)без предварительного вычисления векторов (x1,x2,…) и (y1,y2,...). Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента:

fplot (@name_fun, [limits])
fplot (' name_fun', [limits])

В первом случае первым аргументом является указатель на функцию с именем name_fun, во втором случае - строка с именем обрабатываемой функции. Аргумент limits может быть представлен либо двухкомпонентным вектором [xmin xmax], либо четырехкомпонентным вектором[xmin xmax ymin ymax]. Укороченный вариант задает пределы изменения аргумента x, расширенный - дополнительно представляет пределы изменения функции. Например:

fplot(@sin, [0 2*pi])
fplot('sin', [0 2*pi])

По сравнению с plot функция fplot берет на себя вычисление таблицы значения функции, проявляя при этом некоторый интеллект - в местах резкого изменения функции значения аргумента x выбираются с более мелким шагом. Функция fplot гарантирует, что относительное уклонение воспроизводимой функции отличается от ее идеального графика не более чем на 0,2%. Если вам нужен более точный или более грубый график, то после двух обязательных аргументов в функции fplot можно задать желаемую относительную погрешность - число, меньшее 1: fplot(@sin, [0 2*pi], 0.05)

В этом случае гарантировано построение графика, отличающегося от идеальной кривой не более чем на 5%. По умолчанию точность равна $2 \cdot 10^{-3}$, и она определяет, на сколько точек делить интервал, чтобы погрешность от линейной интерполяции не превосходила этой заданной точности.

Еще один дополнительный параметр — целое натуральное число n требует, чтобы функция fplot использовала при построении не менее чем n+1точку. Относительная погрешность и количество точек могут задаваться в любом порядке:

fplot(@sin, [0 2*pi], 0.05, 20)
fpiot(@sin, [0 2*pi], 20, 0.05)

Наконец, как и в функции plot, среди дополнительных параметров могут находиться строки, управляющие цветом и маркировкой графика. Последовательность задания всех дополнительных параметров – произвольная. Результат выполнения следующего оператора приведен на рис. 31. >>fplot(@sin, [0 2*pi], 0.05, 's--')

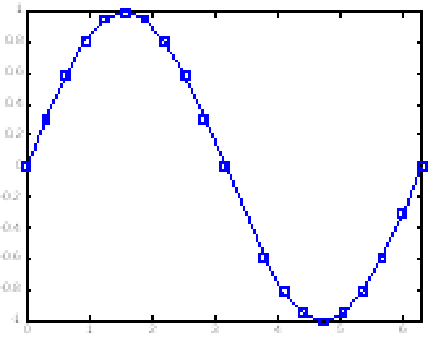


Рис. 31. Синусоида, построенная с помощью функции **fplot**

Функция fplot умеет возвращать значения компонентов векторов x и y, если к ней обратиться следующим образом:
[x y] = fplot(@sin, [0 2*pi]); В этом случае кривая не рисуется, а соответствующие координаты заносятся в массивы x и y соответственно. Функция f, указываемая в качестве первого аргумента fplot, кроме независимой переменной x может содержать дополнительные параметры, например, y = f(x, a1, a2). Тогда эти параметры указываются среди дополнительных аргументов после задания относительной погрешности и минимального числа точек:
fplot('nanie_fun’, [xl x2], 0.05, 20, al, a2)
Рассмотрим Пример, результат которого отображен на рис. 32.

```
>> subplot (1, 2,1);
>>fplot('[tan(x),sin(x),cos(x)]',2*pi*[-l 1 -1 1]);
>> subplot (2, 2,2);
>>fplot('sin(l / x)', [0.01 0.1);
```

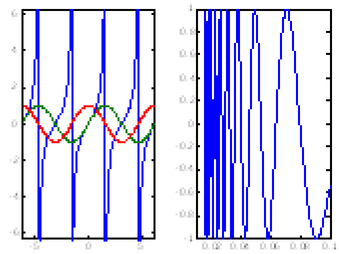


Рис. 32. Примеры работы функции **fplot**

Функция fplot() предоставляет альтернативную возможность изображения функций по сравнению с вычислением вектора с последующим изображением этой кривой с помощью функции plot(). Эта функция бывает особенно полезной, когда кривая имеет несколько разных скоростей изменения и заранее не ясно, в скольких и каких точках необходимо вычислять и выводить кривую. Этой функции необходимо передавать строку, описывающую требуемую функцию в виде f(x).Строка, описывающая f(x), может содержать любые допустимые в MatLab операции и/или функции. Функция f(x)должна возвращать вектор той же размерности или матрицу, каждый столбец которой имеет столько же элементов.

Например, для того чтобы нарисовать кривую y =sin(x)·cos(2x) в диапазоне от 0 до 5π, необходимо вызвать функцию fplot (’sin(x) .*cos (2x)’, [0.5*pi]’).

Контрольные вопросы

1. Назовите основные спецификаторы для функции fprintf (). Приведите примеры их использования.
2. Назовите основные параметры спецификаторов формата. Приведите примеры их использования.
3. Перечислите основные символы управления выводом. Приведите примеры их использования.
4. Назовите основные функции построения графиков и их отличия.
5. Напишите текст программы построения графиков функций y = -3x + 2 для x в диапазоне [-3; 1] с постоянным шагом h = 0.5 и функции y=cos 2x с помощью функций plot () и ezplot (). Цвет линии – синий, тип – сплошная.

Контрольные задания

1. Напишите программы к контрольным заданиям главы 2. В заданиях 1, 2, 7 постройте графики функций.
2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:
    1) Текст задания, постановка задачи;
    2) Скриншоты текста программ и графиков функций;
    3) Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

Глава 6
ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

6.1. Уравнение плоскости в пространстве

Рассмотрим в пространстве декартовой системы координат плоскость, проходящую через произвольную точку $M(x, y, z)$ и перпендикулярную некоторому вектору $\vec{N}\{A,B,C\}$ (см. рис. 33).

Возьмем на плоскости произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и построим вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Полученный вектор $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$ (по свойству: прямая $\perp$ к плоскости, перпендикулярна любой прямой в этой плоскости). Условие перпендикулярности векторов – их скалярное произведение = 0, $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{N} = 0$, вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$ – (из координат конца вычесть координаты начала).

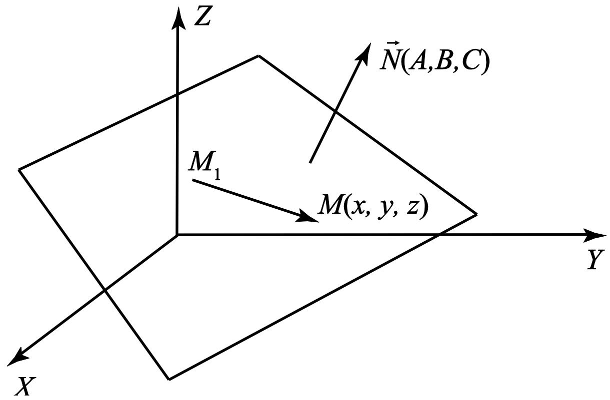


Рис. 33. Внешний вид плоскости, проходящей через точку и вектор

Отсюда: $\overrightarrow{M_1M} \cdot \vec{N} = (x - x_1)A + (y - y_1)B + (z - z_1)C = 0$ (4)

– условие I или $Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0$, т.к. $-Ax_1 - By_1 - Cz_1$ – постоянное число, обозначим его D. $Ax + By + Cz + D = 0$ – получим общее уравнение плоскости, где A, B, C – проекции нормального вектора плоскости $\vec{N}\{A,B,C\}$.

Задача 3.1. Записать уравнение плоскости, проходящей через т. $M_1(2,-1,3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{N}\{1,2,-4\}$.

Решение.

$1(x - 2) + 2(y + 1) - 4(z - 3) = 0 \Rightarrow x + 2y - 4z + 12 = 0$, уравнение искомой плоскости.

Задача 3.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через $M(2,1,-2)$ параллельно плоскости π: $-3x-4y-12z+12=0$.

Решение.

Т.к. плоскости параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{N_1}\{-3, -4, -12\}$ – вектор первой плоскости π коллинеарен $\vec{N_2}$ для искомой плоскости. Возьмем вектор $\overrightarrow{N_2}=\overrightarrow{N_1}$, т.е. $\overrightarrow{N_2}=\{-3, -4, -12\}$, т.к. коэффициент соответственных координат может равен 1.

Тогда уравнение плоскости запишется:

$$-3(x-2)-4(y-1)-12(z+2)=0$$

$$-3x-4y-12z+6+4-24=0 \text{ или}$$

$$-3x-4y-12z-14=0.$$

6.2. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Пусть плоскость проходит через 3 данные точки, не лежащие на одной прямой: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Любая произвольная точка $M(x, y, z)$ образует с данными векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ – лежащие в одной плоскости – т.е. векторы компланарны (см. рис. 34).

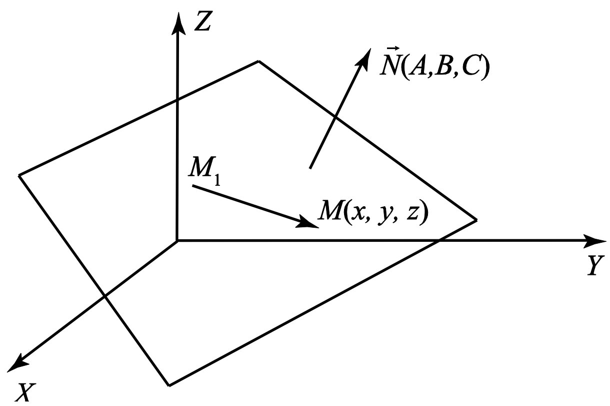


Рис. 34. Плоскость, проходящая через 3 точки

Условие их компланарности будет векторным уравнением плоскости:

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=0$$

Запишем это уравнение в координатной форме, используя условие компланарности векторов, заданных в проекциях.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Задача 3.3. Записать уравнение плоскости грани $\bar{\eta}$ пирамиды, проходящей через т. A_1, A_2, A_3,если A_1(2, 0,–2), A_2(6, 2, –6), A_3(–2, 4, –4).

Решение.

Образуем векторы, лежащие в плоскости π. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$. Тогда получаем уравнение через определитель III порядка:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+2 \\ 6-2 & 2-0 & -6+2 \\ -2-2 & 4-0 & -4+2 \end{vmatrix}=0$$

Раскроем определитель

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-2)(-4-16)-y(-8-16)+(z+2)(16+8)=0$$

$$(x-2)(-20)-y(-24)+(z+2)(24)=0 \text{ (сокращаем на –4)}$$

$$5(x-2)-6y-6(z+2)=0$$

$$5x-6y-6z-10-12=0$$

$$5x-6y-6z-22=0 \text{ – уравнение плоскости } \pi.$$

6.3. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Аналогично тому, как выводится нормальное уравнение прямой из общего уравнения, так же получается и нормальное уравнение плоскости.

По аналогии запишем: $Ax+By+Cz+D=0$ – общее уравнение плоскости, тогда нормирующий множитель: $N = \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z +$$
$$+ \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

или $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + p = 0$ – нормальное уравнение плоскости.

Углы α, β, γ – углы образованные нормальными векторами с осями координат.

Расстояние от точки до плоскости рассчитывается по формуле:

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

Задача 3.4. Дана плоскость $x+4y+8z+26=0$ и точка (1, 0, 0). Найти расстояние от точки до плоскости.

Решение.

$$d=\left|\frac{x_0+4y_0+8z_0+26}{\sqrt{1^2+4^2+8^2}}\right|=\left|\frac{1+4*0+8*0+26}{\sqrt{1+4^2+8^2}}\right|=\frac{27}{\sqrt{81}}=\frac{27}{9}.$$

6.4. Угол между плоскостями

Если даны две плоскости уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad \text{(I)}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \qquad \text{(II)}$$

то их нормальные векторы

$$\overrightarrow{N_1}=\{A_1,B_1,C_1\} \text{ и } \overrightarrow{N_2}=\{A_2,B_2,C_2\}.$$

Задача 3.5. Определение угла между плоскостями сводится к нахождению угла между векторами (см. рис. 35).

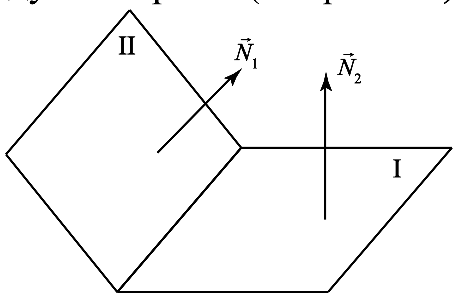


Рис. 35. Угол между плоскостями

Решение. Перенесем $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$ в любую точку пространства и определим φ по скалярному произведению двух векторов

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{N_1}\overrightarrow{N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1}\right|\left|\overrightarrow{N_2}\right|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей $\cos\varphi=0$ или $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$, параллельности $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ – const.

6.5. Прямая в пространстве

1. Каноническое уравнение прямой (см. рис. 36.).

Пусть прямая проходит через т. M_1 параллельно данному вектору $\vec{s}\{m, n, p\}$.

Напишем уравнение этой прямой. Для этого возьмем на ней произвольную т. М(x, y, z). Составим вектор $\overrightarrow{M_1M}$

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}.$$

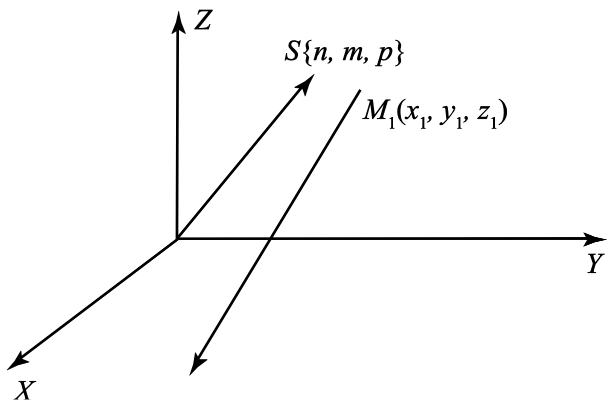


Рис. 36. Каноническое уравнение прямой

Этот вектор будет коллинеарен вектору $\vec{s}$. По условию коллинеарности векторов можно записать

$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}$ – это уравнение называется каноническим уравнением прямой в пространстве.

Вектор $\vec{s}\{m, n, p\}$ называется направляющим вектором этой прямой. Если $\vec{s}$ – единичный вектор, т.е. $|\vec{s}|=1$, то $m = \cos\alpha$; $n = \cos\beta$; $p = \cos\gamma$, где α, β, γ – углы образуемые вектором $\vec{s}$ с осями Ox; Oy; Oz.

2. Параметрическое уравнение прямой.

Положим в канонических уравнениях отношения равными t – параметру

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} = t,$$

тогда получим:

$$\frac{x - x_1}{m} = t, \ \frac{y - y_1}{n} = t, \ \frac{z - z_1}{p} = t \text{ или}$$

$$\left.\begin{aligned} x - x_1 = mt \Rightarrow x = x_1 + mt \\ y - y_1 = nt \Rightarrow y = y_1 + nt \\ z - z_1 = pt \Rightarrow z = z_1 + pt \end{aligned}\right\} \text{ – получим параметрическое уравнение прямой}$$

Здесь x_1, y_1, z_1 – координаты точки M_1, а m, n, p – проекции направляющего вектора $\vec{s}$.

Задача 3.6. Составить каноническое и параметрическое уравнение прямой, проходящей через т. $M(1, 2, 3)$ и параллельно вектору $\vec{s}\{2, -7, 10\}$.

Решение.

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{10}$$ – каноническое уравнение.

$$\frac{x+1}{2}=t \Rightarrow x+1=2t \Rightarrow x=-1+2t$$

$$\frac{y-2}{-7}=t \Rightarrow y-2=-7t \Rightarrow y=2-7t$$

$$\frac{z-3}{10}=t \Rightarrow z=3+10t$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=2-7t \\ z=3+10t \end{array}\right\}$$ – параметрическое уравнение прямой.

3. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки.

Пусть прямая проходит через 2 точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2.z_2)$.

Составим вектор $\vec{s}$, лежащий на прямой

$\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$ – это направляющий вектор прямой. Тогда можно записать уравнение прямой через 2 точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Задача 3.7. Составить уравнение ребра A_1A_4 пирамиды с вершинами $A_1(2,0,-2)$, $A_2(6,2,-6)$, $A_3(-2,4,-4)$, $A_4(-2,-10,-8)$.

Решение.

Используем уравнение прямой, проходящей через 2 точки A_1 и A_4

$$A_1(2,0,-2),\ A_4(-2,-10,-8)$$

$$\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y-0}{-10-0}=\frac{z+2}{-8+2} \Rightarrow \frac{x-2}{-4}=\frac{y}{-10}=\frac{z+2}{-6}.$$

Здесь $\{-4, -10, -6\}$ – координаты направляющего вектора прямой – ребра пирамиды $\overrightarrow{A_1A_4}$.

Контрольные вопросы

1. Чем определяется угловой коэффициент прямой?
2. Каким образом определяется расстояние от точки до плоскости?
3. Как определить угол между двумя плоскостями?
4. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

5. Приведите вывод канонического уравнения прямой.
6. Что такое направляющий вектор прямой?

Контрольные задания

1. Задача. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки: $A_1 = (0, 0, 1)$; $B = (1, 0, 0)$; $C_1 = (1, 1, 1)$;

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку М(-1;2;-3) и два неколлинеарных вектора $\vec{a}(4; 3; 2), \vec{b}(-5; 7; 1)$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки А(1;2;3), В(-3;-2;-1) и начало координат.

4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(4;-2;3), перпендикулярно вектору $\vec{n}(-1; 4; 0)$.

5. Постройте плоскость, проходящую через точку М(2;8;-5), параллельно плоскости, заданной уравненим 3x+y-4z-11.

6. Найдите расстояние от точки N(10;20;-30) до плоскости 8x+6z+15=0.

7. Найдите расстояние между плоскостями, заданными уравнениями: 3x+y-4z-11=0 и 3x+y-4z-34=0.

8. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями: 5y-z-3=0 и 4x+z=0.

Глава 7
СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB

7.1. Основные функции трехмерной графики

В системе MATLAB предусмотрено несколько команд и функций для построения трехмерных графиков. Значения элементов числового массива рассматриваются как z-координаты точек над плоскостью, определяемой координатами x и y. Возможно несколько способов соединения этих точек.

Первый - это соединение точек в сечении (функция plot3), второй - построение сетчатых поверхностей (функции mesh () и surf ()). Отличие двух последних функций состоит в возможностях управления цветом границ и ячеек.

Рассмотрим более подробно особенности каждого способа.

plot3(X,Y,Z)– в качестве аргументов принимает матрицы с координатами точек по осям Ox, Oy и Oz. Рассмотрим работу данной функции на примере отображения графика функции $z(x,y) = \exp(-x^2 - y^2$ при x = -1, -0,9,…,1; y = -2, -1,9,…2.

Зададим интервал значений для координат (x, y) точек графика в виде матриц:

```
>>% координаты точек по оси Ox
>>x=-1:0.1:1;
>>% координаты точек по оси Oy
y=-2:0.1:2;
```

Вычислим координаты с помощью специальной функции: [X,Y]=meshgrid(x,y); - матрицы координат точек по осям Ox и Oy

В результате, матрицы X и Y будут содержать следующие первые восемь значений по строкам и столбцам:

Матрица X:

-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3
-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3

Матрица Y:
-2 -2 -2 -2 -2 -2 -2 -2
-1,9 -1,9 -1,9 -1,9 -1,9 -1,9 -1,9 -1,9
-1,8 -1,8 -1,8 -1,8 -1,8 -1,8 -1,8 -1,8
-1,7 -1,7 -1,7 -1,7 -1,7 -1,7 -1,7 -1,7
-1,6 -1,6 -1,6 -1,6 -1,6 -1,6 -1,6 -1,6
-1,5 -1,5 -1,5 -1,5 -1,5 -1,5 -1,5 -1,5
-1,4 -1,4 -1,4 -1,4 -1,4 -1,4 -1,4 -1,4
-1,3 -1,3 -1,3 -1,3 -1,3 -1,3 -1,3 -1,3

По матрицам X, У вычисляются значения матрицы Z по формуле: Z=exp(-X.^2-Y.^2);

С помощью фунции plot3(X,Y,Z); результат отображается на экране (рис. 37).

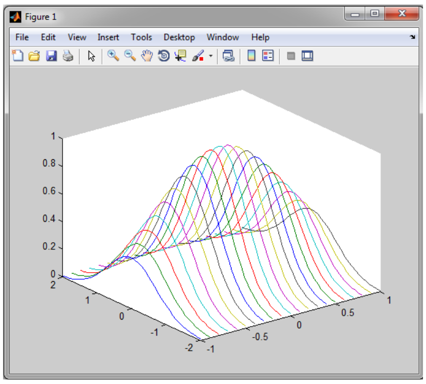


Рис. 37. Пример отображения графика с помощью функции plot3()

Полный текст программы:

```
>> x = -1: 0.1 :1;
>> y = -2: 0.1: 2;
>> [x, y] = meshgrid (x, y);
>> Z = exp (-X.^2 - Y.^2);
>> plot3 (x, y, z);
```

Из приведенного рисунка видно, что функция plot3() отображает график в виде набора линий, каждая из которых соответствует сечению графика функции вдоль оси Oy.

surf () – функция визуализации непрерывной поверхности в трехмерных осях. В этом случае график функции Z=exp(-X.^2-Y.^2) будет выглядеть иначе, так, как на рис. 38.

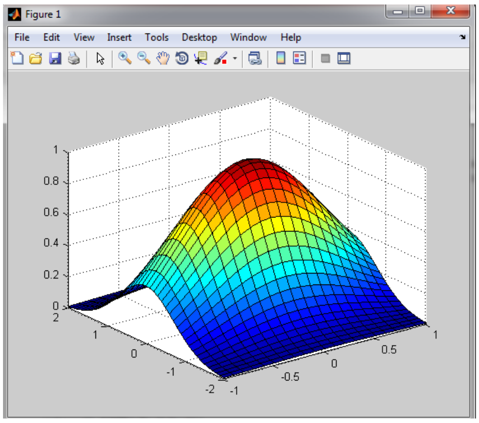


Рис. 38. Пример отображения графика с помощью функции surf ()

Полный текст программы представлен ниже:

```
>> x = -1: 0.1 :1;
>> y = -2:0.1:2;
>> [x, y] = meshgrid (x, y);
>> z = exp (-x.^2-y.^2);
>> surf (x, y, z);
```

Функция mesh (X,Y,Z); отображает график функции в виде сетки. В отличие от функции surf() окрашиваются только границы ячеек (см. рис. 39).

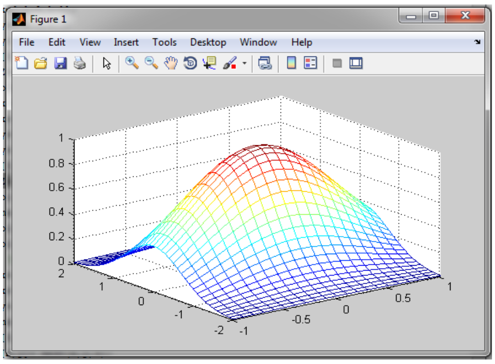


Рис. 39. Результат работы функции mesh ()

Текст программы:

```
>> x = -1: 0.1 :1;
>> y = -2: 0.1 :2;
>> [x, y] = meshgrid (x, y);
>> z=exp (-x.^2 – y.^2);
>> mesh (x, y, z);
```

Для оформления трехмерных графиков можно использовать описанные ранее функции: text(), xlabel(0, ylabel (), zlabel(), title (), grid [on/off].

7.2. Составление уравнения и построение плоскости в пространстве

Рассмотрим составление уравнения и построение плоскости, заданной тремя точками.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, пересекающей ось Ox в точке (-2,0,0), ось Oy в точке (0,3,0) и ось Oz в точке (0,0,2).

В этом случае уравнение примет вид: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$.

Зададим пределы по осям Ox и Oy соответственно, например: x=[-5:0.5:5]; y=[4:0.5:4]; Вычислим координаты точек по осям Ox и Oy: [x,y]=meshgrid(x,y);. Выразим Z: $z=1+\frac{x}{2}-\frac{y}{3}$.

Построим плоскость при помощи одной из описанных выше функций plot3(), surf() или mesh() (см. рис. 40).

Полный текст программы:

```
>> x=[-5: 0.5 :5];
>> y=[-5: 0.5 :5];
>> a=-2;
>> b=3;
>> c=2;
>> [x, y]=meshgrid(x,y);
>> z=c*(1-(x./a)-(y./b));
>> xlabel ('x');
>> ylabel ('y');
>> zlabel ('z');
>> plot3 (x,y,z);
```

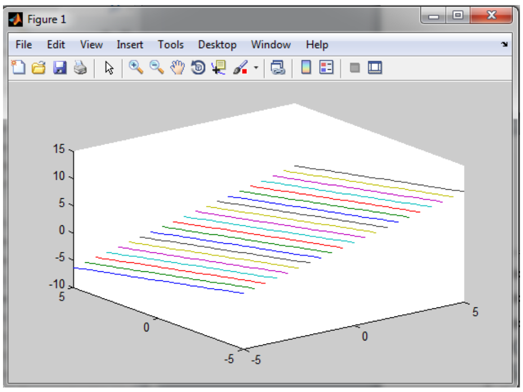


Рис. 40. Построение плоскости, заданной тремя точками

Контрольные вопросы

1. Назовите основные способы построения плоскостей в среде MATLAB. Чем каждый способ отличается от других?
2. Приведите примеры построения плоскости с использованием каждого способа.
3. Назовите основные функции оформления трехмерных графиков. Приведите примеры их использования.

Контрольные задания

1. Напишите программы к контрольным заданиям главы 7. Постройте соответствующие плоскости.

2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:

1) Текст задания, постановка задачи;

2) Скриншоты текста программ и построенных плоскостей;

3) Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

Глава 8
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

8.1. Предел последовательности. Предел функции

1. Числовой последовательностью называется функция $x_n = f(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, определённая на множестве натуральных чисел. Каждое значение x_n называется элементом последовательности, а число n – его номером.

Обозначают: $\{x_n\}$ или (x_n).

2. Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого $E > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n > \mathrm{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (*)$$

Обозначают: $\lim x_n = a;\ \ x_n \to a$ при $n \to \infty$.

3. Неравенство (*) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a.$

4. Последовательности, имеющие предел, называются сходящимися; если нет предела – расходящимися.

5. Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной:

$\lim c = c\ \ (c - const).$

6. Бесконечно малой последовательностью называется $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Для двух бесконечно малых последовательностей $\{\alpha\}$ и $\{\beta_n\}$– сумма, разность и произведение тоже является бесконечно малыми последовательностями.

1. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех n > N выполняется неравенство: $|x_n| > \varepsilon$, при этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

2. Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $S > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Обозначение предела $f(x)$ в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b;\ \ f(x)\to b \text{ при } x\to a\,.$$

Если $f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)$ имеют конечный предел при $x\to a$, то

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\pm f_2(x)+f_3(x)\right)=\lim_{x\to a} f_1(x_1)\pm\lim_{x\to a} f_2(x)+\lim_{x\to a} f_3(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x)\cdot\lim_{x\to a} f_3(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x\to a}\left(cf_1(x)\right)=c\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)},\ \ \lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f_1(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f_1(x)}\,.$$

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, одновременно обращающиеся в ноль, при $x=a$ $f(a)=0$ и $\varphi(a)=0$.

Отношение $\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}$ теряет смысл при $x=a$. Тогда говорят, что функция $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке a имеет неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Предел указанного отношения может существовать. Задача отыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ называется раскрытием неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Если при $x\to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к ∞, то говорят, что в точке a функция $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ имеет неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Данная задача раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ называется отыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Задача 4.1. В каких границах меняется x, если $|x-1|<3$?

Решение.

Неравенство $|x-1|<3 \sim -3<x-1<3$,

откуда $1-3<x<3+1$; таким образом, $-2<x<4$.

Задача 4.2. Показать, что последовательность

$X_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\ldots)$ принимает значение: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{n},\ \ldots$

Решение.

Пусть ε= 0,001. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000 \Rightarrow N = 1000$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ Покажем, что начиная с которого значения n, выполняется неравенство (*). В данном случае $Y_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$.

Неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполнятся, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве числа N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это означает, что X_n имеет пределом нуль, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Задача 4.3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+4x+5\right)$.

Решение.

На основании свойств пределов получим

$$\lim_{x\to 2}\left(3x^2+4x+5\right) = 3\lim_{x\to 2}\left(x^2\right) + 4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 =$$
$$= 3\left(\lim_{x\to 2}\right)^2 + 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 3\cdot 2^5 + 4\cdot 2 + 5 = 25.$$

Замечание. Предел многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx_n$ при $x \to a$, достаточно вычислить $P_n(a)$, т.е. его значение при $x \to a$.

Задача 4.4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1}$.

Решение.

На основании свойств пределов исходим:

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+6)}{\lim\limits_{x\to 4}(3x+1)} = \frac{5\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 6}{3\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 1} = \frac{5\cdot 4+6}{3\cdot 4+1} = \frac{26}{13} = 2.$$

Задача 4.5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Решение.

Числитель и знаменатель данной функции при $x = 3$ образуется в нуль (неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Преобразуем данное выражение, разложив числитель на множители и сократив на $x - 3 \neq 0$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Задача 4.6. Найти предел $\lim_{x\to 1}\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-6}{x^3-1}$.

Решение.

При $x = 1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Разложим на множители

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$2x^4+x^3+x^2+2x-6=(x-1)(2x^3+3x^2+4x+6)$ – путем деления на $x-1$ сокращается числитель и знаменатель на $(x-1)\neq 0$ и переходя к пределу получаем

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-6}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+4x+6}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{2\cdot1^3+3\cdot1^2+4\cdot1+6}{1^2+1+1}=\frac{15}{3}=5.$$

Замечание.

Чтобы раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно и в числителе и в знаменателе выделить приблизительный множитель (т.е. множитель равный нулю при предельном значении X), сократить на него выражение и затем перейти к пределу.

Задача 4.7. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

Решение.

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются (неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$). Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив числитель и знаменатель на старшую степень x, т.е. на x^2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}{3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(6+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2.$$

Здесь $\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^2}=0$, $a=const$.

Задача 4.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^3+8x^2-9}$.

Решение.

Разделим числитель и знаменатель на x^3, т. е. на старшую степень y, и перейти к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^3+8x^2-9}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{2+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{8}{x}-\frac{9}{x^3}\right)}=\frac{0+0+0}{2+0-0}=0.$$

Замечание.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно и в числителе и в знаменателе выделить критический множитель (т.е. множитель равный нулю при предельном значении x), сократить на него выражение и затем перейти к пределу.

Задача 4.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

Решение.

Заметим, что при $x = 3$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}$. Избавимся от иррациональности, умножив числитель и знаменатель на ($\sqrt{x+1}-2$) и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Замечание.

Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель и знаменатель содержат иррациональность необходимо предварительно избавиться от иррациональности.

8.2. Число е, $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

Числом е называется предел

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=$ е или $\lim\limits_{\beta\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=$е (1)

е – число иррациональное, е ≈ 2,71828…Число *е* бывает полезно при раскрытии неопределенности вида 1^{∞}.

Если угол α выражен в радианах, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ (2)

Задача 4.10. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n$.

Решение.

При $n\to\infty$ $(1+\frac{3}{n})\to 1$ получаем неопределенность вида 1^{∞}. По формуле (1) положим $\frac{3}{n}=\alpha$, тогда $n=\frac{3}{\alpha}$.

Если $n\to\infty$, то $\alpha\to 0$. На основании свойства пределов $[\lim\limits_{x\to a}(f(x))^n=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^n]$ и (1) получаем

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n})^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^3=[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^3=\mathrm{e}^3.$$

Задача 4.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x}{x+2})^x$.

Решение.

Имеет место неопределенность 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^x=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\alpha\frac{2}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2}(\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}})^{-2}=\mathrm{e}^{-2},$$

т.к. $\alpha\to 0$, то $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2}=1$.

Задача 4.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение.

Способ 1. При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Чтобы раскрыть эту неопределенность, положим $3x=\alpha$, тогда $x=\alpha/3$; если $x\to 0$, то $\alpha\to 0$. Подставив в условие данные равенства и используя формулу (2), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/3}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\sin\alpha}{\alpha}=3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=3\cdot 1=3.$$

Способ 2. Умножим числитель и знаменатель на 3, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Задача 4.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sin 2/x)^2}{x^2}$.

Решение.

Здесь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия применим формулу (1).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/2\sin(x/2)}{1/2x}\lim_{x\to 0}\frac{1/2\sin(x/2)}{1/2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Задача 4.14. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

Решение.

При данном x числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и воспользуемся (1).

Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}+2)(\sqrt{x+4}-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)=$$
$$=1*(2+2)=4.$$

Задача 4.15. Используя второй замечательный предел найти:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3-5+5}{n+5}\right)^{n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+5}\right)^{n+4}$$

Сделаем замену переменной

$$-\frac{2}{n+5}=\frac{1}{x},\quad -2x=n+5.$$
$$n=-2x-5.$$

Если $n \to \infty$ то $x \to -\infty$, тогда:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x-5+4}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1}\cdot[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}]^2=$$

$$=1\cdot e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

Задача 4.16.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+2n+3+2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right]^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}\cdot\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}(1-2n)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-4)(1-2n)}{4n^2+2n+3}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-4-4n^2+8n}{4n^2+2n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2+10n-4}{4n^2+2n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4+\frac{10}{n}-\frac{4}{n^2}}{4+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется пределом числовой последовательности?
3. Какая последовательность называется сходящейся (расходящейся)?
4. Что такое бесконечно малая и бесконечно большая последовательность?
5. Что называется пределом функции?
6. Каким образом раскрывается неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$?
7. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Контрольные задания

1. В каких границах меняется x, если

a. $|x| < 2$ *c.* $|x - 2| < 5$

b. $|x + 1| < 2$ *d.* $|x + 3| < 7$

2. Найти пределы:

a. $\lim\limits_{x\to3}(x^2-7x+4)$;

b. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$;

c. ** $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$;

k. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

l. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$;

m. * $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$;

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$;

e. $^*\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$;

f. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$;

g. $^*\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$;

h. $^*\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} \dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$;

i. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;

j. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2}$;

n. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$;

o. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$;

p. $^{**}\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$;

q. $^{**}\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$;

r. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$;

s. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$.

Глава 9
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ MATLAB

9.1. Табулирование функции с помощью системы MATLAB

В системе MATLAB табулирование функции можно осуществить двумя способами: с помощью встроенных математических функций и без их использования.

Если мы не используем встроенные математические функции, технология табулирования функции *f(x)* выглядит следующим образом: образование вектора x; ввод функции табулирования *y =f(x).*

В случае использования встроенных функций:

1) Определение группы символьных переменных с помощью функции syms.
2) Образование вектора xl.
3) Ввод функции табулирования *y =f(x).*

Функция subs () имеет вид: *subs (f, x, x1),*

где f – функция, заданная аналитически; x – аргумент функции f; x1 – вектор значений аргумента x, при которых определяется значение функции f.

Переменная xl может представляться в виде вектора или, при постоянном шаге, в виде: $x_н$: Δx : $x_к$, где $x_н$ – начальное значение xl, Δx – шаг, $x_к$ – конечное значение xl.

Ниже приведены примеры программ табулирования функции y = x + 3 для x в диапазоне [0; 1] с постоянным шагом h = 0.2.

Текст программы без использования функции subs ():

```
>> x1=0: 0.2 :1;

>> y=x+3;
>> subs(y, x, x1)
ans =

3.0000    3.2000    3.4000    3.6000    3.8000    4.0000
```

Текст программы с использованием функции subs ():

```
>> syms x x1 y;
>> x1=0: 0.2 :1;
```

```
>> y=x+3;
>> subs(y, x, x1)
ans =

3.0000    3.2000    3.4000    3.6000    3.8000    4.0000
```

9.2. Вычисление предела функции с помощью системы MATLAB

В MATLAB пределы вычисляются с помощью функции *limit ()*, имеющей синтаксис: *limit (f, x, x_0)* где: f – функция, предел которой вычисляется; x — аргумент функции f; x_0 – предельное значение x. Наиболее часто предел вычисляют при x= 0 или при $x=\infty$. Символ ∞ кодируется в MATLAB словом *inf*. Для вычисления односторонних пределов используются слова *«right»* и *«left»*.

Пример 1 программы вычисления предела функции $y=\frac{\sin x}{x}, x \to 0$:

```
>> syms x;
>> limit (sin (x)/x, x, 0)
 ans =
 1
```

Пример 2 программы вычисления предела функции

$$y = \frac{x^4 + x^2 - 3}{3x^4 - \log(x)}, x \to +\infty:$$

```
>> syms x;
>> limit ((x^4 + x^2 - 3)/(3*x^4 - log(x)), x, Inf)
 ans =
 1/3
```

Пример программы вычисления одностороннего (левого) предела функции $y=\frac{|x|}{x}, x \to 0$:

```
>> syms x;
>> limit (abs (x)/x,x,0,'left')
ans =
 -1
```

Контрольные вопросы

1. Что называется табулированием функции?
2. Назовите способы табулирования функции в MATLAB. Приведите примеры их использования.
3. Назовите основную функцию вычисления пределов в MATLAB. Приведите примеры ее использования.

Контрольные задания

1. Дана функция f(x). С помощью системы MATLAB выполните табулирование функции. Определите, к какому значению стремится значение функции f(x) при $x \to a$:

1. $f(x) = x^3, a = 1$
2. $f(x) = x^{-2}, a = \frac{1}{2}$
3. $f(x) = \sin x, a = \pi$
4. $f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{2}$
5. $f(x) = \frac{1}{x+2}, a = -2$
6. $f(x) = \frac{-3}{(x-1)^4}, a = 1$
7. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}, a = 2$
8. $f(x) = \frac{1}{2^x - 1}, a = 0$

2. Вычислите пределы простых функций из задания 2 главы 8, используя систему MATLAB.

3. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:

1) Текст задания, постановка задачи;
2) Скриншоты текста программ и построенных плоскостей;
3) Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

Глава 10
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

10.1. Область определения, частные и полные приращения, непрерывность функции нескольких переменных

Переменная U называется функцией от переменных (x, y, z … t),если в каждой системе значений x, y, z … t области их изменения соответствует определенное значение U. $U = f(x, y, z \dots t)$ – символическое обозначение.

Для функции 2^x переменных $Z= f(x, y)$ – это совокупность точек плоскости o, x, y; для трех переменных – совокупность точек пространства.

Задача 5.1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

Решение.

Функция определена в тех и только в тех точках плоскости XOY, координаты которой удовлетворяют условию $XY >$ О. Все эти точки лежат внутри 1 и 3 координатных. углов (открытая область) – т. (0,0) и на осях не входят.

Задача 5.2. Найти область определения функции

$$z = \frac{x^2 y}{2x+y}.$$

Решение.

Здесь – вся область плоскости XOY, за исключением прямой $2x + y = 0$, т.е. там, где знаменатель обращается в ноль.

Задача 5.3. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Решение.

Область определения $1 - x^2 - y^2 \ge 0$ круг с центром в начале координат и радиусом r =1, включая границу. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью XOY (рис. 41).

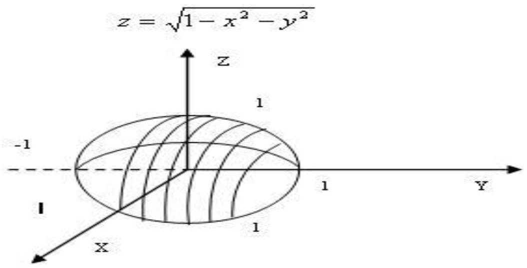


Рис. 41. Полусфера

10.2. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Определение. Функцию $U(x, y, z \ldots t)$ можно дифференцировать по каждому из её аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными. $\frac{\partial u}{\partial x}$; U_x' U_y' U_z'– обозначение.

Задача 5.4. Найти частные производные от функции:

1. $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 5y\,;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 10yx - 3y^2\,;$$

2. $u = \frac{x}{y} + \frac{Y}{Z} - \frac{z}{x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}\,;\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}\,;\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}\,;$$

3. $z = \sqrt[x]{e^y} \Rightarrow z = e^{\frac{y}{x}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}.$$

Задача 5.5. Вычислить значение частных производных в указанной точке

$$Z = \ln(x^2 - y^2)\,;\ x = 2;\ y = -1.$$

Решение.

Находим частные производные

$$Z_x' = \frac{1}{x^2 - y^2}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2 - y^2};\ \ Z_y' = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2 - y^2};$$

$$Z_x'(2;-1) = \frac{2\cdot 2}{2^2 - (-1)^2} = \frac{4}{3};\ Z_y' \pm (2;-1) = \frac{-2(-1)}{2^2 - (-1)^2} = \frac{2}{3}.$$

Задача 5.6. Проверить, что функция $Z = x\cdot\ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению: $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$.

Решение.

Тождественно преобразуем данную функцию и найдем частные производные по x и y.

1. $Z = x(\ln y - \ln x)$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -\ln x - \ln y - 1 = \ln\frac{y}{x} - 1;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{1}{y} = \frac{x}{y};$$

2. Подставляем найденное значение Z'_x и Z'_y в данное выражение

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = Z;$$

$$x\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) + y \cdot \frac{x}{y} = x \cdot \ln\frac{y}{x} - x + x = x \cdot \ln\frac{y}{x} = Z,$$

т.е. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$.

Определение. Частным дифференциалом функции $u = f(x, y, z, \dots t)$ по x называется главная часть частного приращения $\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z, \dots t) - f(x, y, z, \dots t)$. Обозначение $d_x u,\ d_y u, \dots d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx;\ \ d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy;\ \ d_t u = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt.$$

Полный дифференциал du функции u равен сумме всех ее частных дифференциалов.

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \dots\ d_t u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \dots \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dt.$$

Задача 5.7. Найти полные дифференциалы функций:

1. $Z = 3x^2 y^5$.
2. $u = 2x^{y2}$.

Решение 1.

1. Находим частные производные $Z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 15x^2 y^4$.

2.Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы.

$$d_x z = 6xy^5 dx;\ d_y z = 15x^2 y^4 dy.$$

Полный дифференциал найдем как сумму её частных дифференциалов

$$d_z = d_x z + d_y z = bxy^5 dx + 15x^2 y^4 dy.$$

Решение 2.

$$u'_x = 2 - yzx^{yz-1};\ u'_y = 2zx^{yz}\ln x;\ u'_z = 2yx^{yz}\ln x;$$

$$d_x u = 2yzx^{yz-1}dx\text{;}\quad d_y = 2zx^{yz}\ln x dy\text{;}$$

$$d_z u = 2yx^{yz}\ln x dz\text{;}$$

$$du = 2x^{yx}\left(\frac{yz}{x}dx + z\ln dy + y\ln x dz\right).$$

Задача 5.8. Вычислить значение полного дифференциала функции.

$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, при $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$, $dy = –0{,}05$.

Решение.

Находим частные производные.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}\left|\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}\right.\text{;}\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y^2+x^2};$$

$$dxZ = \frac{dZ}{dx}dx = \frac{y}{x^2+y^2}dx\ ;\quad dyZ = \frac{dZ}{dy}\ dy = -\frac{x}{x^2+y^2}dy\ ;$$

$$dZ = \frac{y}{x^2+y^2}dx\ - \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Подставим значения переменных *x*, *y*, *dy*, *dx*; получим, что полный дифференциал

$$dZ = \frac{3\cdot 0{,}01 - 1(-0{,}05)}{1^2+3^2} = \frac{0{,}03+0{,}05}{1+9} = \frac{0{,}08}{10} = 0{,}008.$$

Задача 5.9. Вычислить приближенно $1{,}08^{3{,}96}$.

Решение.

Замещаем приращение функции ее полным дифференциалом.

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + ... + f'_t(M_0)dt.$$

Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x,y) = x^y$ в точке M_1 (1,08; 3,96) и что вспомогательная точка будет M_0 (1; 4), получим:

$$f(M_0) = 1'' = 1;\quad f'_x(M_0) = y\cdot x^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 4\cdot 1^{4-1} = 4;$$

$$f'_y(M_0) = x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 0,$$ так как $\ln 1 = 0$;

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0.08\text{;}\qquad dy = 3{,}98 - 4 = -0{,}04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}08^{3{,}96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy =$$

$$= 1 + 4 * 0{,}08 + 0 * (-0{,}04) \approx 1{,}32.$$

10.3. Дифференцирование сложных функций

Определение

Функция *Z* называется сложной функцией от независимых переменных *x, y,…, t*, если задана она через промежуточные аргументы $u, v, .., w$.

$$z = f(u, v, .., w);\ u = f(x, y, .., t);$$

$$v = \gamma(x, y, .., t);\ w = \tau(x, y, .., t).$$

Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \ldots$$

Если все аргументы $u, v, .., w$ зависят от одной независимой переменной *x*, то *z* – сложная функция от *x*. Тогда производная сложной функции называется полной и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Задача 5.10. $y = u^2 \cdot e^v$, $u = \ln x$, $v = \cos x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2ue^v \cos x + u^2 e^v (-\ln x).$$

Далее.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\ln x \cdot e^{\cos x} \cdot \cos x + \ln^2 x \cdot \cos x \cdot e^{\cos x}(-\ln x) =$$

$$= 2\ln x \cdot e^{\cos x} \cdot \cos x - \ln^3 x \cdot \cos x \cdot e^{\cos x}.$$

Задача 5.11. $z = u^v$, $u = \ln(x - y)$, $v = e^{\frac{x}{y}}$.

Здесь *z* от *u* и *v*, а сами *u* и *v* зависят от *x* и *y*. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} \cdot \frac{1}{x-y} + u^v \ln u \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1} \cdot \frac{1}{y-x} - u^v \ln u \cdot e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}.$$

10.4. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ первого порядка обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них можно дифференцировать по каждому аргументу.

Обозначения: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u''_{xy}$ – смешанная частная производная.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}$$

Аналогично определяются производные III, IV… порядков.

Задача 5.12. Найти частные производные второго порядка $z=x^3-2x^2y+3y^2$.

Решение.

$$z'_x=3x^2-2y\cdot 2x=3x^2-4xy;\quad z'_y=-2x^2+6y;$$

$$z''_{xx}=6x-4y;\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-4x;\quad z''_{yy}=6.$$

Задача 5.13. Проверить что $z''_{xy}=z''_{yx}$, если $z=\cos(ax-by)$.

Решение.

$z''_x=-a\sin(ax-by)$; z'_x теперь по y

$$z''_{xy}=ab\cos(ax-by).$$

Дифференцируем в другом порядке:

Сначала z по y

$z'_y=b\sin(ax-by)$, затем z'_y по x

$\left(z'_y\right)'_x=z''_{yx}=ba\cos(ax-by)=ab\cos(ax-by).$

Сравнивая результаты, видим $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Задача 5.14. $z=\ln\left(x^2+y^2+1\right)$, проверить, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Решение.

$$z'_x=\frac{2x}{x^2+y^2+1};\quad z''_{xy}=-\frac{2\cdot 2yx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}.$$

$$z'_y=\frac{2y}{x^2+y^2+1};\quad z''_{yx}=-\frac{2\cdot 2yx}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}=-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2+1\right)^2}.$$

10.5. Экстремумы функций многих переменных

Функция многих переменных может иметь минимум и максимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функций.

Необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$ находим критические точки.

Достаточные условия:

$\Delta = AC - B^2$, где $A=\frac{\partial^2 z}{dx^2}(M)$; $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M)$ и $B=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M)$.

Если, $\Delta > 0$, то M – точка экстремума.

При A < 0 (или C < 0) – точка максимума.

При A > 0(C > 0) – точка минимум.а

Если $\Delta < 0$ – нет экстремума.

Если $\Delta = 0$ – требуется дополнительные условия для нахождения экстремума.

Задача 5.15. Найти экстремум $Z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Решение.

$$Z'_x = 3x^2 - 6y \qquad Z'_x = 0 \qquad \left\{ \left(\frac{3x^2-6y=0}{24y^2-6x=0} \right) \right. .$$
$$Z'_y = 24y^2 - 6x \qquad Z'_y = 0$$

Решая систему получаем $M_1(0, 0)$ и $M_2(1, 1/2)$ обе точки критические, так как Z определена на всей OXY.

Исследуем критические точки

$$Z''_{xx} = A = 6x, \quad Z''_{yy} = B = -6, \quad Z''_{yy} = 48y.$$

Для $M_1(0, 0) = A = 0, B = -6, C=0, \quad \Delta(M_1)=AC - B^2 < 0$.

$M_2(1, \frac{1}{2}) = A = 6, B = -6, C = 24, \quad \Delta(M_2) > 0$.

$Z_{min} = Z(M_2) = 4$.

10.6. Применение производной к исследованию функций

План исследования:

1. Область определения функции, область значения, четность-нечетность, интервалы знаки постоянства, точки пересечения с осями координат.

2. Точки разрыва функции.

3. Интервалы возрастания, убывания, экстремумы.

4. Интервалы вогнутости, выпуклости, точки перегиба.

5. Асимптоты графика функции.

6. Построение графика.

Задача 5.16. Исследовать функцию, начертить её график

$$y=\frac{x^3}{x^2-3}.$$

1. a. функция определена всюду, кроме $x=\pm\sqrt{3}.$

b. область значения $y\in(-\infty;+\infty).$

c. $y(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2+3}=-\frac{x^3}{x^2-3}=-y(x)$ – четная => график функции симметричен относительно начала координат.

d. точки пересечения с осями. Если $x = 0$, $y = 0$ т. $M(0; 0)$.

e. интервалы знакопостоянства

x	$(-\infty;-\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};0)$	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};+\infty)$
y	– ниже оси x	+ выше оси y	– ниже оси x	+ выше оси x

2. Точки разрыва.

В точках $x=\pm\sqrt{3}$ функция неопределенна => в точках может быть разрыв.

Условие непрерывности: функция определена в x_0.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, где x_0 – точки на оси Ox.

Вычисляем пределы слева и справа при стремлении к x_0.

В нашем случае $\left\{\frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3-0})^2-3}=\frac{3\sqrt{3}}{0}\right\}$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{x^2-3}=-\infty,$$

слева

$$\lim f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{x^2-3}=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-0}=\frac{3\sqrt{3}}{0}=+\infty.$$

Слева и справа пределы бесконечные – это говорит о том, что здесь разрыв II рода.

Замечание. Разрыв I рода, когда и/или слева, справа пределы конечные, но неравные. Например (рис. 42).

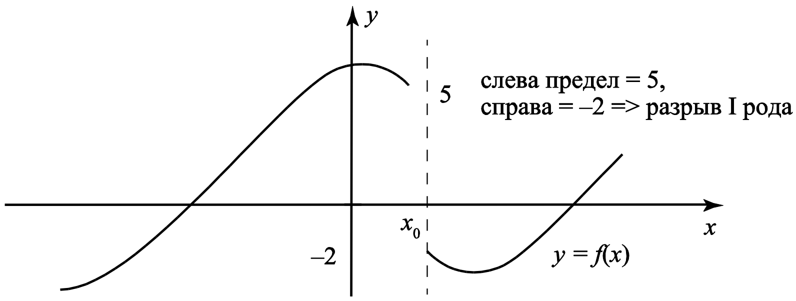


Рис. 42. Разрывы I рода

Разрыв II рода будет в нашем случае и при $x=-\sqrt{3}.$ Схематично (рис. 43).

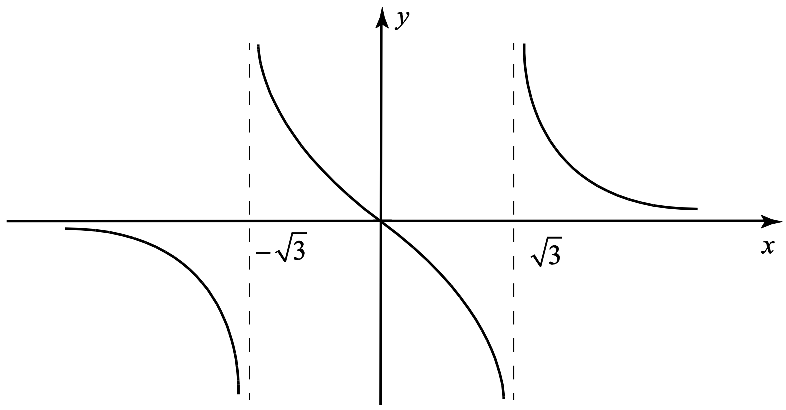


Рис. 43. Разрыв II рода

3. Интервалы возрастания и убывания. Точки экстремума

$y'=0,\quad y'=\dfrac{x^4-9\cdot x^2}{(x^2-3)^2};\quad x_1=0,\quad x^2-9=0,\quad x_{1,2}=\pm 3.$

x	$-\infty; 3)$	-3	$(-3;-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};3)$	3	$3; +\infty)$
y'	+ ↗	max	– ↘	т. разр.	– ↘	Нет	– ↘	т. разр.	– ↘	min	+ ↗

$y(-3)=-\dfrac{9}{2};\quad y(3)=\dfrac{9}{2}.$

4. Интервалы выпуклости, вогнутости, т. перегиба.

$y''=\dfrac{6\cdot x^3+54\cdot x}{(x^2-3)^3};\quad y''=0$ – max условие точки перегиба.

$\begin{matrix} 6x^3+54x=0 & x_1=0 \\ x^3+9x=0 & x^2+9\neq 0 \end{matrix}$, т. $x=0$ – точка, подозреваемая на перегиб.

Интервалы выпуклости, вогнутости $y''=\dfrac{x(6x^2+54)}{(x^2-3)^3}.$

$(-\infty;-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3};0)$	0	$(0;\sqrt{3})$	$(\sqrt{3};+\infty)$
– $\cap$	+ $\cup$	т. пере- гиб.	– $\cap$	+ $\cup$

В интервале $x\in(-\infty;-\sqrt{3})\cup(0;\sqrt{3})$, функция имеет выпуклый характер.

При $x\in(-\sqrt{3};0)\cup(\sqrt{3};+\infty)$ – вогнута.

Точка перегиба $x=0$, т. к. здесь меняется знак

y'' с + на –, точки $x=\pm\sqrt{3}$ – точки разрыва графика функции.

5. Найти асимптоты графика

a. вертикальные асимптоты (рис. 44)

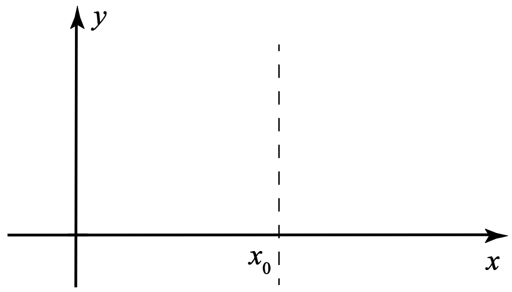


Рис. 44. Вертикальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, то $x=x_0$ вертикальная асимптота.

b. Наклонная асимптота ищется по формуле

$y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x},\ \ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big).$

Если пределы существуют и конечны, то функция имеет наклонную асимптоту. В нашем примере

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x^2-3)x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x^2}}=1;\ k=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^3-3x}{x^2-3}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x^2}}=0;\ b=0.$$

Уравнение асимптоты $y=x.$

Вертикальные асимптоты бывают в точках разрыва

$\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} f(x)=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}} f(x)=\pm\infty\Rightarrow$ в точке $=\pm\sqrt{3}$ – вертикальная асимптота.

6. Строим график (рис. 45).

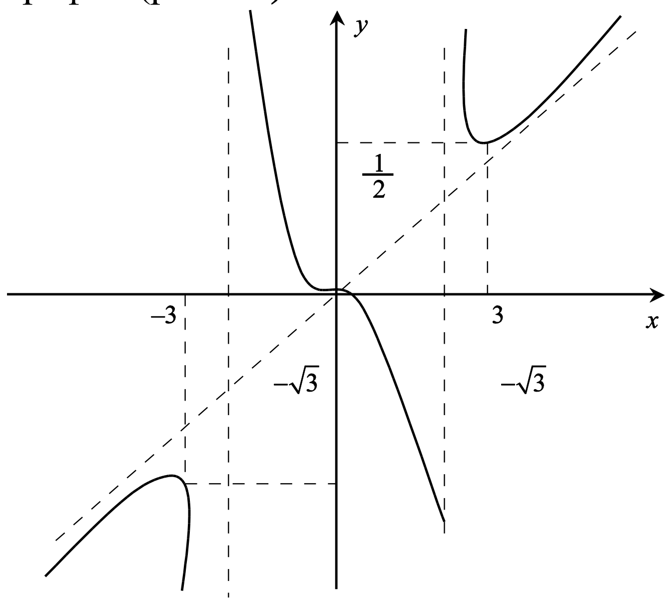


Рис. 45. График функции с асимптотами

Контрольные вопросы

1. Что называется частным дифференциалом функции?
2. Что такое полный дифференциал функции нескольких переменных?
3. Чему равна частная производная функции нескольких аргументов?
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
5. Приведите план исследования функции.

Контрольные задания

1. Найти производные следующих функций:

a. $y = 3x^{-2}$;
b. $y = 4x^{-3}$;
c. $y = 2x^{\frac{1}{4}}$;
d. $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;
e. $y = 5\sqrt[5]{x^2}$;
f. $y = \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$;
g. $y = \frac{2\sqrt{x}}{x^2}$;
h. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$;
i. $y = \frac{x^5}{\sqrt{x}}$;
j. * $y = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$;
k. * $y = \frac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$.

2. Найти производные следующих функций:

a. $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$;
b. $y = (x^2 + 1)(x^3 - x)$;
c. $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$;
d. * $y = (x^3 - x + 1)(2x^3 + 1)$;
e. $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$;
f. $y = (x + 2)(2x^3 - x)$.

3. Найти производные следующих функций:

a. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

b. $y=\dfrac{3-x}{x^2}$;

c. $y=\dfrac{1+x^2}{3x}$;

d. $y=\dfrac{x^2-x+2}{x^2}$;

e. $y=\dfrac{1-x^5}{1+x^5}$;

f. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

g. $y=\dfrac{2+x^3}{2x}$;

h. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

4. Найти производные следующих сложных функций:

a. $y=(9-x^2)^4$;

b. $y=(x^4-x-1)^4$;

c. $y=\sqrt{x^3+1}$;

d. * $y=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$;

e. $y=x^3-\dfrac{1}{x^2}+x\sqrt[3]{x}$;

f. $y=x^3+2^{3x}$;

g. ** $y=3^{\sin x}-2^{2x}+x^2$;

h. ** $y=2^{7\cos^2 5x}$;

i. $y=4^{\sin 9x}$;

j. $y=e^{x^2}$.

5. Найдите производные следующих сложных функций:

a. $y=\sin 5x$;	h. $y=\log_5 x$;
b. $y=\sin^2 3x$;	i. $y=\log_3 4x$;
c. $y=2\cos^3 5x$;	j. $y=\log_{0,5} x^5$;
d. $y=\ln^2 \cos 2x$;	k. $y=\log_3(x^2+3x-1)$;
e. $y=\ln \sin^3 5x$;	l. * $y=\log_5 \cos 7x$;
f. $y=\ln\sqrt{2x-1}$;	m. * $y=\log_7 \sin\sqrt{1+x}$;
g. $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;	n. $y=x^3\sin x$;
	o. $y=\sin(x^2-3x+5)$;

6. Исследовать функции и построить их графики:

1) $y=x^2+2x-3$;

2) $y=x^3-12x+4$;

3) $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2$;

4) $y=8-2x-x^2$;

5) $y=2x^3-6x$;

6) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2$;

7) $y=4x^2-x^4-3$;

8) $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+2$;

9) $y=2\sin 2x$

*10)*10) $y=\dfrac{1}{9}x(x-4)^3$;

*11)*** $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$;

*12)** $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Глава 11
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СРЕДСТВАМИ MATLAB

Технология вычисления производных n-го порядка в MATLAB

В MATLAB производная находится с помощью встроенной функции diff (f ,x ,n), которая подходит как для дифференцирования символьных выражений, так и для нахождения производной функции, данной в числовой форме (например, в виде М-файла), f –дифференцируемая функция; x – аргумент функции (переменная дифференцирования); n –порядок производной (по умолчанию n=1). Технология вычисления производной:

1) определение символьных переменных с помощью функции syms;
2) ввод функции дифференцирования f;
3) ввод функции diff (f, x, n) с конкретными значениями x и n.

Рассмотрим действие этой функции на нескольких примерах.

Пример 1. Найдите первую производную функции $y = x \cdot cos\ x$.
Текст программы:

```
>> syms x n;
>> y=x*cos(x);
>> diff(y,x)
 ans =
 cos(x) - x*sin(x)
```

В случае вычисления производной n-порядка необходимо явно задать значение n. Текст программы вычислений производной второго порядка от функции $y = x \cdot cos\ x$ представлен ниже:

```
>> syms x n;
>> y=x * cos (x);
>> diff (y, x, 2)
 ans =
- 2*sin(x) - x*cos(x)
```

С помощью функции diff () можно также вычислять частные от функций, содержащих несколько переменных.

Пример 2. Найдите частные производные от функции $z = x^3 + 5xy^2 - y^3$ из задачи 5.4:

```
>> syms x y;
```

```
>> z=x^3 + 5*x*y^2 - y^3;
>> diff (z, y)
ans =
 10*x*y - 3*y^2
```

ВАЖНО: Если переменная дифференцирования x в выражении diff () отсутствует, а функция имеет вид diff (f), то программа не выдает ошибки. Она осуществляет дифференцирование по переменной функции f в порядке, обратном алфавиту. Например, если функция f содержит переменные a, b, c, то дифференцирование будет выполнено по переменной c. Если при этом в составе аргументов содержится переменная x, то она имеет абсолютный приоритет, независимо от ее положения в алфавите переменных.

Пример 3.

```
>>syms a b c x w;
>>diff (a+b^2)
ans =2*b
>>diff (a+c*b^3)
ans =b^3
>>diff (a*w+c*b^3)
ans =a
>>diff (x*a*w+b^3)
ans=a*w
```

Функция f может быть вектором или матрицей. В этом случае результатом дифференцирования будет тоже вектор или матрица, элементами которой будут производные от исходных функций, образующих вектор или матрицу. Например, для функции, представляющей из себя вектор:

```
>>syms x y;
>> y=[x^2, 3*x, x^3];
>>diff (y, x)
ans =[ 2*x, 3, 3*x^2]
```

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры записи функции дифференцирования в случае вычисления: а) производной первого порядка; б) n-ого порядка.

2. Расставьте порядок дифференцирования в примерах:
   a. $2xy^2 + 2^{3x-5y} \cdot ln2 + 2cos\frac{x}{y}$;
   b. $x^2yz^2 + 3yz - 4x^2z$;
   c. $y^2x^2 + 2^{3x-5y} - \left(cos\frac{x}{y}\right)^2$.

Контрольные задания

1. Вычислите производные функций из заданий 2-5 главы 10, используя систему MATLAB.
2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:
   1) Текст задания, постановка задачи;
   2) Скриншоты текста программ и построенных плоскостей;
   3) Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

ГЛАВА 12
ТЕХНОЛОГИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ И ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ MATLAB

12.1. Поиск экстремума функции одной переменной

Классическим способом определения экстремума функции y=f(x) является определение корня ее производной. В системе MATLAB этот метод может быть реализован с помощью функций diff(f, x) и solve ('fun' ,x). Первая определит производную, а вторая значение x ,при котором находится экстремум функции f(x). Покажем технологию определения максимума функции системой MATLAB по этому методу на примере.

Пусть функция имеет вид: $y=xe^{-x}$. Требуется определить координаты ее максимума.

Решение задачи:

1. Определение области x1<x<x2 нахождения максимума функции.

Представим функцию в виде графика (рис.46):

```
>> x=0:0.1:3;
>> y=x.*exp(-x);
>> plot (x,y);
```

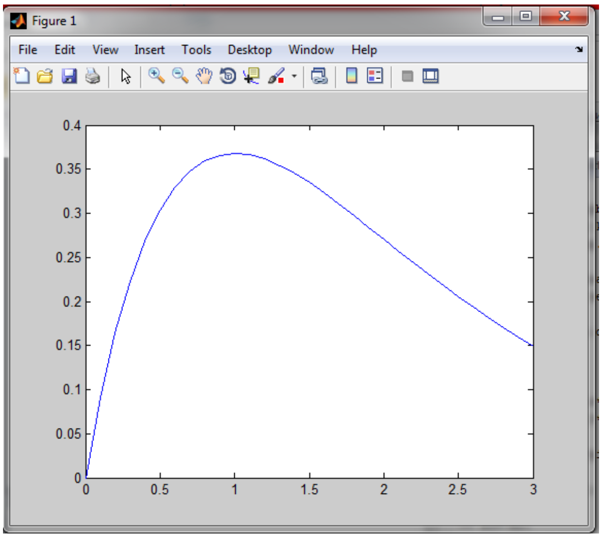


Рис.46. График функции $y=xe^{-x}$

Из графика видно, что областью изоляции максимума функции может быть 0.5<x<1.5.

2. Вычисление производной функции:

```
>>syms x, y, z ;
>>z=diff(y,x)
z= exp(-x)-xex p(-x)
```

3. Определение корня производной:

```
>>solve ('exp(-x )-x*exp(-x )=0', x)
ans= 1
```

4. Определение значения функции:

```
>>x=1;
>>y=x .*exp(-x )
y= 0.3679
```

Второй способ - поиск локального минимума с помощью функции [x y]= fminbnd (‘name’, a, b), где:

- x – значение аргумента, в которой достигается минимум функции;
- y – значение функции в точке с координатой x.
- name – функция, записанная в символьном виде;
- a, b - границы интервала, на котором осуществляется поиск минимума.

Например:

```
>> [x y]=fminbnd ('(x.^3/(x.^2-3))', -4, 4)
x =
   1.7320
y =
 -4.4594e+004
```

Функцию fminbnd () можно использовать и для вычисления локального максимума. Для этого достаточно взять функцию name с противоположным знаком. Например:

```
>> [x y]=fminbnd ('-(x.^3/(x.^2-3))', -4, 4)
x =
  -1.7320
y =
 -4.4594e+004
```

В случае поиска глобальных экстремумов в начале строят график функции, затем по графику выделяют унимодальные интервалы (т.е.

интервалы, содержащие один экстремум) и на каждом таком интервале находят локальный экстремум.

12.2. Поиск экстремума функции нескольких переменных

Вычисление экстремума функции многих переменных $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ осуществляет функция fminsearch (), которая находит минимум скалярной функции нескольких переменных, стартуя с некоторой начальной точки.

Варианты синтаксиса:

– x = fminsearch (fun,x0) – начинает с точки x0 и находит локальный минимум от x для описанной в fun функции. x0 может быть скаляром, вектором или матрицей;

– x = fminsearch (fun,x0,options) – минимизирует с параметрами оптимизации, определенными в структурной опции;

– x = fminsearch (fun, x0, options, P1, P2,...) – передает зависимые от задачи параметры P1, P2 и т.д. непосредственно в функцию fun. Используется опция = [] как структурный ноль, если опции не определены;

– [x, fval] = fminsearch (...) – возвращает в fval значение целевой функции fun как решение от x;

– [x, fval, exitflag] = fminsearch (...) – возвращает значение exitflag, которое содержит выходные условия fminsearch;

– [x, fval, exitflag, output] = fminsearch (...) – возвращает структурный выход с информацией об оптимизации.

Таблица 6 содержит общее описание передаваемых в fminsearch аргументов. Данный раздел включает детали функционирования для fun и опций

Таблица 6. Входные аргументы функции fminsearch

fun Подлежащая минимизации функция.	fun есть некая функция, которая принимает вектор x и возвращает скаляр f, как целевую функцию от x. Функция fun может быть определена, как описатель функции *x = fminsearch(@myfun,x0,A,b)* где myfun есть некая функция MATLAB, такая что *function f = myfun(x)* *f* = ... % Расчет значения функции от x fun также может быть внутренним объектом *x = fminsearch (inline('norm(x)^2'),* x_0*, A, b);*
options	Опции обеспечивают детали функционирования параметров опций.

Таблица 7 содержит общее описание возвращаемых fminsearch аргументов. В этом разделе приводятся общие специфические детали для величин exitflag и output.

Таблица 7. Выходные аргументы

exitflag	Описывает выходные условия: • > 0 Данная функция сходится к решению по x. • =0 Максимальное число оценки функции или итерации было превышено • < 0 Функция не сходится к некому решению.
output	Структура с информацией об оптимизации. Поля структуры: • iterations Число выполненных итераций • funcCount Число оценок функции • algorithm Используемый алгоритм

В таблице 8 указаны параметры оптимизационных опций, используемых в fminsearch. Можно использовать optimset для того, чтобы установить или изменить значения данных полей в структуре параметров опций.

Таблица 8. Параметры оптимизационных опций

Display	Уровень отображения. 'off' отображение не производится, 'iter' отображение проводится на каждой итерации, 'final' отображение только конечной информации, 'notify' (принимается по умолчанию) отображение только в случае, если функция не сходится
MaxFunEvals	Максимально число допустимых расчетов функции.
MaxIter	Максимально число допустимых итераций.
TolFun	Конечное допустимое отклонение по значению функции
TolX	Конечное допустимое отклонение по значению x.

Пример: Найти минимум функции $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

```
>> [z, f] = fminsearch (@(x) sqrt(x(1)^2+x(2)^2), [2,2])
z =
  1.0e-004 *

   -0.4133   -0.1015
f =
  4.2559e-005
```

```
>> [x y] = meshgrid (-2: 0.2: 2, -2: 0.2: 2);
>> z=sqrt (x.^2+y.^2);
>> surf (x, y, z);
```

Результат работы программы представлен на рисунке 47.

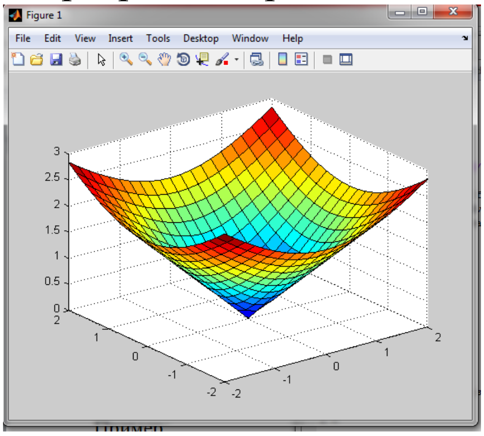


Рис.47. Результат работы программы

Исследуем согласно плану, представленному в п.10.6, функцию из задачи (5.6) $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$. и начертим её график с использованием функции ezplot (), которая, в отличии от plot () может осуществлять графический вывод функции, записанной символьным выражением.

Так как в системе MATLAB нет специальных встроенных функций вычисления областей определения и значения, выполним эти расчеты, приравняв знаменатель к 0 и решив соответствующее уравнение. Для этого воспользуемся специальной функцией solve (), решающей уравнения в символьном виде:

```
>> znam=x^2-3;
>> definition = solve (znam)
definition =
 3^(1/2)
-3^(1/2)
```

Следовательно, функция определена всюду, кроме $x = \pm\sqrt{3}$. $x_1 = -\sqrt{3} \approx -1{,}7321$ и $x_{21} = \sqrt{3} \approx 1{,}7321$. Следовательно, $D(f) = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3} + \infty)$. Область значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

Функция нечётна, т.к. y=(-x)^3/((-x)^3-3)=-x^3/(x^3 + 3), т.е. y(x)= -y(x).

Точки пересечения с осями координат найдем, решив с помощью MATLAB уравнение $\frac{x^3}{x^2-3} = 0$:

```
>> syms x;
>> y=x^3/(x^2-3);
>> s=solve (y);
>> disp (s);
 0
```

Точки разрыва функции найдем, вычислив левый (для $x \to \sqrt{3} - 0$) и правый $x \to \sqrt{3} + 0$) пределы:

```
>>l=limit (y, x, -sqrt(3), 'left')
l=-Inf
>> r=limit (y, x, sqrt(3), 'right')
r=Inf
```

Результаты вычислений говорят о том, что здесь разрыв II рода.

Построим график функции с помощью функции ezplot (): >> ezplot (y). Результат работы функции представлен на рис. 48.

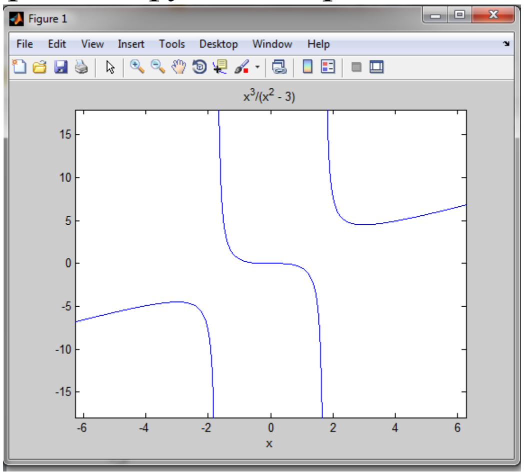


Рис. 48. Вывод графика функции командой ezplot (y)

Найдем точки экстремума функции двумя разными способами.

1 способ (вычислим производную функции и приравняем ее к нулю):

```
>> k=diff (y, x)
k =
 (3*x^2)/(x^2 - 3) - (2*x^4)/(x^2 - 3)^2
>> s1=solve (k)
s1 =
   0
  3
 -3
```

Как видно из графика функции, точка x=0 не является точкой экстремума.

2 способ (с использованием функции fminsearch). По графику выделим унимодальные интервалы: [-4; -2] и [2; 4]. Вычислим точки экстремума на этих интервалах:

```
>> fun=inline ('x^3/(x^2-3)');
x=-3
>> x=fminsearch(fun,-4);
>> x=fminsearch(fun,3);
x=3
```

Вертикальные асимптоты бывают в точках разрыва, которые нам уже известны. Найдем горизонтальные и наклонные асимптоты графика:

```
>> syms x;
>> y=x^3/(x^2-3);
>>%горизонтальные асимптоты
>> limit (y, Inf)
 ans =
 Inf
>>%наклонная асимптота
>> limit (y/x,Inf)
 ans =
 1
>> limit(y-x,Inf)
 ans =
0
```

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид: y=x, вертикальной - $y = \sqrt{3}$ и $y = -\sqrt{3}$, горизонтальных асимптот нет. Определим точку перегиба. Для этого с помощью системы MATLAB вычислим производную второго порядка от исходной функции и решим соответствующее уравнение:

```
>>  syms x;
>> y=x^3/(x^2-3);
>> y=diff(y,2);
>> s=solve(y)
s =   0
```

Построим график функции и асимптот (рис. 49):

```
>> syms x;
>> y=x^3/(x^2-3);
>> ezplot(y,-4*pi:4*pi);
>> ezplot(y,-3*pi:3*pi);
>> hold on;
>> x1=-2*pi:0.5:2*pi;
>> y1=x1;
>> plot(x1,y1,'R');
>> x2=(-3)^1/2;
>> x3=-x2;
>> y1=-3*pi:0.5:3*pi;
>> plot(x2,y1,'R',x3,y1,'R');
>> hold off;
>>grid on;
```

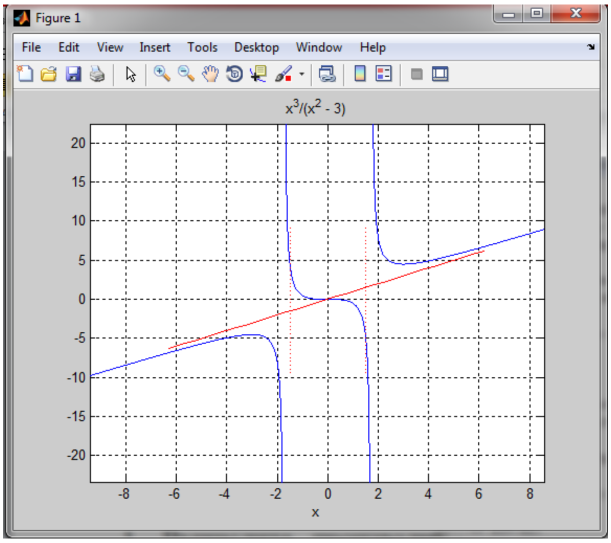


Рис. 49. График функции с асимптотами

Полный текст программы (1 способ):

```
>> syms x;
>> znam=x^2-3;
>>% область определения
>> definition = solve (znam)
definition =
  3^(1/2)
 -3^(1/2)
```

```
>>%точки пересечения с осями координат
>> y=x^3/(x^2-3);
>> s=solve (y);
>> disp(s);
 0
 0
 0
 >> l=limit (y, x, -sqrt(3), 'left')
 l =
 -Inf

>> r=limit (y, x, sqrt(3), 'right')
 r =
 Inf
 >> k=diff (y, x)
k =
 (3*x^2)/(x^2 - 3) - (2*x^4)/(x^2 - 3)^2
>> s1=solve (k)
s1 =
   0
  3
 -3
>> ezplot(y,-3*pi:3*pi);
>> hold on;
>> y=diff (y, 2);
>> s=solve (y)
s =
    0
>>%наклонная асимптота
>> limit(y/x,Inf)
 ans =
 1
>> limit(y-x,Inf)
 ans =
0
%вертикальные асимптоты
>> znam = x^2-3;
```

```
>> v_as = solve (znam)
v_as =
  3^(1/2)
 -3^(1/2)
>>% строим наклонную асимптоту
>> x1=-2*pi:0.5:2*pi;
>> y1=x1;
>> plot(x1,y1,'R');
>>% строим вертикальные асимптоты
>> x2=(-3)^1/2;
>> x3=-x2;
>> y1=-3*pi:0.5:3*pi;
>> plot(x2,y1,'R',x3,y1,'R');
>> hold off;
>>grid on;
```

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры записи функции fminbnd () в случае вычисления:
    1) локального минимума;
    2) локального максимума;
    3) глобальных экстремумов

   какой-либо функции.
2. Приведите примеры записи функции fminsearch () в случае поиска минимума функции двух переменных $x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+1$ с точность 1*10-5. Координаты начальной точки поиска (1;-1).

Контрольные задания

1. Исследуйте функции задания 1 главы 10, используя систему MATLAB.

2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:

– Текст задания, постановка задачи;

– Скриншоты текста программ и построенных плоскостей;

– Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

Глава 13
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

13.1. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

Описание функции $F(x)$ по известному дифференциалу $d(F(x)) = f(x)dx$, т.е. действие обратное дифференцированию называется интегрированием, а исконная функция $F(x)$ называется первообразной функцией от $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ меняет бесчисленное множество различных первообразных, которое отличается постоянным слагаемым; если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, то $F(x)+c$, где c – произвольная постоянная, также первообразная от $f(x)$, так как $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$.

Неопределенный интеграл – это совокупность всех первообразных от функции $f(x)$ и обозначается $\int$, $\int f(x)dx = F(x)+c$, если $d[f(x)=c] = f(x)dx.$

Свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

3) $\int f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$ – интеграл от суммы равен сумме интегралов.

Основные формулы интегрирования

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq -1$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u|+c$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+c$
4. $\int e^u du = e^u + c$
5. $\int \sin u du = -\cos u + c$
6. $\int \cos u du = \sin u + c$
7. $\int \frac{du}{u^\alpha + a^\alpha} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+c$
8. $\int \frac{du}{u^\alpha - a^\alpha} = \frac{1}{2a}\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c$
9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \arcsin\frac{u}{a}+c$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+a}\right|+c$

Примеры.

1. $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+c$ по (1).

2. $\int 3^x dx=\dfrac{3^x}{\ln 3}+c$ по (3).

3. $\int\dfrac{dt}{t^2+3}=\int\dfrac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{\sqrt{3}}+c$ по (7).

4. $\int\dfrac{du}{\sqrt{\varphi^2-5}}=\ln\left|\varphi+\sqrt{\varphi^2-5}\right|+c$ по (10).

5. $\int\dfrac{2xdx}{x^2+7}=\int\dfrac{(x^2+7)'}{x^2+7}=\int\dfrac{d(x^2+7)}{x^2+7}$ представляет (2), где $u=x^2+7.$ По этой формуле $\int\dfrac{d(x^2+7)}{x^2+7}=\ln\left|x^2+7\right|+c.$

6. $\int 5\sin 5tdt=\int\sin 5td(5t)$ – представляет формулу (5) при $u=5t$. Поэтому $\int\sin 5td(5t)=-\cos 5t+c.$

7. $\int e^{\ln\varphi}\cos\varphi d\varphi=\int e^{\ln\varphi}d(\ln\varphi),$ т.к. $\cos\varphi d\varphi=d(\ln\varphi)$ по (4) формуле, где $u=\sin\varphi$ получим $\int e^{\ln\varphi}d(\sin\varphi)=e^{\ln\varphi}+c.$

Можно проверить правильность вычисления дифференцированием.

Например.

1. $\int\dfrac{dx}{x^3}=\int x^{-3}dx=\dfrac{x^{-2}}{-2}+c=c-\dfrac{1}{2x^2}$ по (1)-й формуле

$u=x$, $n=-3.$

Проверка.

$d\left(c-\dfrac{1}{2x^2}\right)=-\dfrac{1}{2}\left(x^{-2}\right)'dx=-\dfrac{1}{2}(-2)x^{-3}dx=\dfrac{dx}{x^3}$ – получим ….

2. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-x^2}}=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}+c$ по (9), где $u=x$, $a^2=2$.

Проверка.

$$d(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+c)=(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}})'dx=\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dx}{\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}}=\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$$

3. $\int 15^t dt=\dfrac{15^t}{\ln 15}+e$, по формуле (3).

Проверка.

$d(\frac{15^t}{\ln 15}+c)=\frac{1}{\ln 15}15^t\ln 15dt=15^t dt$ по формуле (8).

Проверка.

$$d(\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+c)=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\ln(x-\sqrt{3})-\ln(x+\sqrt{3}))'dx=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}})dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}(\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-3})dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2\sqrt{3}}{x^2-3}dx=\frac{dx}{2x^2-6}.$$

13.2. Интегрирование разложением подынтегральных функций на слагаемые

1. $\int\left(1+e^x\right)^2dx$ – возведем в квадрат и образуем сумму

$$\int\left(1+2e^x+e^{2x}\right)dx=\int dx+2\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+e.$$

2. $\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx$ – розложим дробь на две слагаемые дроби

$$=\int\frac{2x}{x^2-5}dx+3\int\frac{dx}{x^2-5};$$

$2xdx=d(x^2-5),\ u=x^2-5$

по формуле (2) имеем $\int\frac{du}{u}=\int\frac{d(x^2-5)}{x^2-5}+3\int\frac{dx}{x^2-5}=$

$$=\ln\left|x^2-5\right|+3\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c.$$

3. $\int(2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x})dx=\int 2x^{\frac{1}{5}}dx-\int 2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}dx=2\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}-\frac{2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1+c}=$

$$=\frac{2}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+c=\frac{10}{6}\sqrt[5]{x^6}-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^4}+c.$$

4. $\int\frac{x^2-2}{x+2}dx=\int\frac{x^2-4+2}{x+2}dx=\int\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}dx+2\int\frac{dx}{x+2}=$

$$=\int(x+2)dx+2\int\frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{2}(x+2)^2+\ln(x+2)+c.$$

5. $\int(1+e^x)dx$ – возведем в квадрат и образуем сумму

$$=\int(1+2e^x+e^{2x})dx=\int dx+2\int e^x dx+\frac{1}{2}\int e^{2x}d2x=$$

$$=x+2e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+c.$$

6. $\int\frac{2x+3}{x^2-5}dx$ – разложим дробь на две дроби

$$=\int \frac{2x}{x^2-5}dx+3\int \frac{dx}{x^2-5};$$

$2xdx + d(x^2–5)$, $u = x^2 – 5$ по формуле (2) имеем

$$\int \frac{du}{u}=\int \frac{d(x^2-5)}{x^2-5}+3\int \frac{dx}{x^2-5}=\ln\left|x^2-5\right|+3\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+c.$$

7. $\int (2\sqrt[5]{x}-\sqrt[3]{2x})dx=\int 2x^{\frac{1}{5}}dx-2\int 2x^{\frac{1}{3}}dx=$

$$=2\frac{x^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}-2^{\frac{1}{3}}\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+c=\frac{2}{\frac{6}{5}}x^{\frac{6}{5}}-\frac{2^{\frac{1}{3}}}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}}+c=\frac{10}{6}\sqrt[5]{x^6}-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{x^4}+c.$$

8. $\int \frac{x^2-2}{x+2}dx=\int \frac{x^2-4+2}{x+2}dx=\int \frac{(x-2)(x+2)}{x+2}dx+2\int \frac{dx}{x+2}=$

$$=\int (x+2)dx+2\int \frac{d(x+2)}{x+2}=\frac{1}{2}(x+2)^2+2\ln(x+2)+c.$$

13.3. Интегрирование посредством замены переменной

Для нахождения интеграла $\int f(x)dx$ можно заменить переменную x переменной t, связанной формулой $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ и получим $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=\int F(t)dx$ – полученный интеграл преобразуем к переменной x

Примеры.

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}\Bigg|$ замена $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$, $t = \sqrt{x}$;

$=\int \frac{2tdt}{1+t}=2\int \frac{tdt}{1+t}$ – получим неправильную дробь. Выделим целую часть, добавив в числитель 1 и вычтем 1.

$=2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt$ разбиваем на два слагаемых

$$2\int \frac{t+1}{t+1}dt-2\int \frac{dt}{1+t}=2\int dt-2\int \frac{dt}{1+t}=2t-2\ln\left|1+t\right|+c=$$

$$=2\sqrt{x}-2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+c.$$

2. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}=\Bigg|\, 1+2\cos x=t;\ -2\sin xdx=dt\ \sin xdx=\frac{dt}{-2};$

$$=\int \frac{dt}{-2\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dx=-\frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+c=-\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=$$

$$=-\sqrt{t}+c=-\sqrt{1+2\cos x}+c.$$

3. $\int \frac{2xdx}{x^4+3}=\Bigg|\, x^2=t;\ 2xdt=dt;$

$$=\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}+c=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{\sqrt{3}}+c.$$

13.4. Интегрирование по частям

Из формулы дифференциала произведения $d(U'V) = UdV + VdU$ интегрированием обеих частей равенства получается формула интегрирования по частям: $\int UdV = UV - \int VdU$.

В этой формуле отыскание интеграла $\int UdV$ сводится к решению другого интеграла $\int VdU$.

За dV всегда выбирается такое выражение, содержащее dx, из которого интегрированием можно найти V; за U принимается формула, которая при дифференцировании упрощается (например $\arcsin x$, $\ln x$, x^3).

Примеры.

1. $\int x\cos x dx = \Big|\, U = x;\ dv = \cos x dx;\ du = dx;$

$V = \int \cos x dx = \sin x \,\Big| = x\cdot\sin x - \int \sin x dx = x\cdot\sin x + \cos x + c.$

2. $\int\frac{\ln x}{x^3}dx = \Big|\, \ln x = U; dU = \frac{dx}{x}; V = \int\frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx =$

$\frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -\frac{1}{2x^2}; dV = \frac{dx}{x^3}\,\Big| = -\frac{\ln x}{x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} =$

$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + c = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c.$

3. $\int x\operatorname{arctg}x dx = \Big|\, V = \frac{x^2}{2};\ xdx = dV;\ U = \operatorname{arctg}x;\ dU = \frac{dx}{1+x^2}\,\Big|$

$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2} =$ интеграл вычислим отдельно. Выделим целую часть дроби, прибавив в числителе 1 и вычтя 1.

$= \int\frac{x^2dx}{1+x} = \int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int\frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int\frac{dx}{1+x^2} =$

$= x - \operatorname{arctg}x;$ окончательно получаем: $\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + c.$

4. $\int \arcsin x dx = \Big|\, U = \arcsin x;\ dU = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dV = dx;\ V = x\,\Big|$

$= x\cdot\arcsin x - \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\cdot\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) + c =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

5. $\int x^2 e^{3x} dx = \left| U = x^2;\ e^{3x}dx = dV;\ dU = 2xdx;\ V = \int e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3} \right|$

$= x^2 \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} 2xdx$ – к последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям

$$-\frac{2}{3}\int e^{3x} xdx = \left| x = U; dU = dx; e^{3x}dx = dV; V = \frac{1}{3}e^{3x} \right| =$$

$$= -\frac{2}{3}\left(x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}dx \right) = -\frac{2}{3}x\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3}e^{3x} + c =$$

$$= -\frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c.$$

Ответ. $\int x^2 e^{3x}dx = x^2\frac{e^{3x}}{3} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c.$

6. $\int \frac{x}{\cos^2} dx = \left| x = U; \frac{dx}{\cos^2 x} = dV; dU = dx; V = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x \right|$

$$= x\mathrm{tg}x - \int tgxdx = xtgx - \int \frac{\sin xdx}{\cos x} = xtgx + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} =$$

$$= xtgx + \ln(\cos x) + c.$$

7. $\int (x^2+1)e^{-2x}dx = \left| x^2+1 = U; dU = 2xdx;\ e^{-2x}dx = dv; \right.$

$$\left. V = \int e^{-2x}dx = \frac{e^{-2x}}{-2} \right| = (x^2+1)\frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}2xdx =$$

$= -\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} + \int e^{-2x}xdx$ – к последнему интегралу применим формулу интегрирования по частям: $x = U;\ dU = dx;$
$dV = e^{-2x}dx;\ V = \frac{e^{-2x}}{-2};$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}x - \frac{1}{2}(x^2+1)e^{-2x} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}dx = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-2x} -$$

$$-\frac{1}{2}e^{-2x}x + \frac{1}{2}\frac{e^{-2x}}{-2} + c = -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}x - \frac{1}{4}e^{-2x} + c.$$

13.5. Интегрирование рациональных функций

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$ где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Интегралы от функций $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$ например $\int \frac{(a_1x^2+a_2x^3)dx}{b_1x^5+b_2x^3+bx}$ можно найти путём разложения на слагаемые, которые приводят всегда к формулам интегрирования.

Например, таким:

1. $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a|$;

2. $\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m}dx = \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c$, $m \neq 1$;

3) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$.

Если степень числителя выше степени знаменателя или равна ей, то дробь называют неправильной и всегда нужно выделить целую часть, т.е. представить дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Например:

$\int \frac{x^5+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx$, степень числителя равна 5, а знаменателя 4. Дробь неправильная. Выделим целую часть, для этого поделим углом числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{l|l} x^5+6x^2+1 & x^4+3x^2 \\ \hline x^5+3x^3 & \end{array}$$

В частном получим x-целая часть, в остатке $-3x^3+6x^2+1$–числитель неправильной дроби.

$$\int \frac{x^5+6x+1}{x^4+3x^2}dx = \int xdx + \int \frac{-3x^3+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx.$$

Для вычисления правильной дроби используем основную теорему алгебры;$\Rightarrow$правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами

$\frac{-3x^3+6x^2+1}{x^4+3x^2} = \frac{-3x^2+6x^2+1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$ – разложим на простейшие. Найдем A, B, C, D – неопределенные коэффициенты.

$\frac{-3x^3+6x^2+1}{x^2(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)+Bx(x^2+3)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+3)}$ – привели к общему знаменателю.

Уравняем коэффициенты при одинаковых степенях левой и правой части

$$-3x^3+6x^2+1=Ax^2+3A+Bx^3+3Bx+Cx^3+Dx$$

x^3	$-3=B+C$	$A=\dfrac{1}{3}$
x^2	$6=A+D$	$6=\dfrac{1}{3}+D\Rightarrow D=\dfrac{17}{3}$
x^1	$0=3B$	$B=0$
x^0	$1=3A$	$C=-3$

Подставим найденные значения *A*, *B*, *C*, *D* в разложение и вычислим интегралы.

$$\int\frac{x^5+6x^2+1}{x^4+3x^2}dx=\int xdx+\int\frac{dx}{3x^2}+\int\frac{0dx}{x}+\int\frac{-3x+\frac{17}{3}}{x^2+3}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{x^{-1}}{-1}-$$

$$-3\int\frac{xdx}{x^2+3}+\frac{17}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3x}-\frac{3}{2}\int\frac{2xdx}{x^2+3}+\frac{17}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3x}-\frac{3}{2}\ln\left|x^2+3\right|+\frac{17}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+c.$$

Примеры.

1. $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$

$$\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}=\frac{3x^2+8}{x(x^2+4x+4)}=\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2},$$

разлагаем на простейшие

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx+Cx(x+2)$$

$$3x^2+8=Ax^2+4Ax+4A+Bx+Cx^2+2Cx$$

x^2	$3=A+C$	$A=2$
x^1	$0=4A+B+2C$	$C=1$
x^0	$8=4A$	$0=4\cdot 2+B+2\Rightarrow B=-10$

$$\int\frac{(3x^2+8)dx}{x^3+4x^2+4x}=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{-10dx}{(x+2)^2}+\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=2\ln|x|-10\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+\ln|x+2|+c=2\ln|x|+\frac{10}{x+2}+\ln|x+2|+c.$$

2. $\int\frac{(x^4+1)dx}{x^4-2x^3+x^2}$

$\dfrac{x^4+1}{x^4-2x^3+x^2}$ – выделим целую часть

1-я целая часть, $\dfrac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}$– остаток разложения на простейшие

$$\frac{2x^3-x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{2x^3-x^2+1}{x^2(x^2-2x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}$$

$$2x^3-x^2+1=A(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx^2+Dx(x-1)$$
$$2x^3-x^2+1=Ax^2-2Ax-A+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2+Dx^2-Dx$$

$$\begin{array}{c|l|l}
x^3 & 2=B & A=1, B=2 \\
x^2 & -1=A-2B+C+D & -1 = 1 - 4 + C + D,\ C : \\
x^1 & 0=-2A+B-D & 2 \\
x^0 & 1=A & 0 = -2 + 2 - D,\ D = 0
\end{array}$$

$$\int\frac{(x^4+1)dx}{x^4-2x^3+x^2}=\int 1dx+\int\frac{A}{x^2}dx+\int\frac{B}{x}dx+\int\frac{C}{(x-1)^2}dx+\int\frac{Ddx}{x-1}=$$
$$=x+\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{2}{(x-1)^2}dx=x-\frac{1}{x}+2\ln|x|-\frac{2}{x-1}+c.$$

3. $\displaystyle\int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx=\int\frac{x^4+1-1+1}{x^4-1}dx=\int\frac{x^4-1}{x^4-1}dx+2\int\frac{dx}{x^4-1}dx=$

$$=\int dx+2\int\frac{dx}{x^4-1}.$$

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)$$
$$1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+Cx^3+Dx^2-Cx-D$$
$$1=Ax^3+Ax^2+Ax+A+Bx^3-Bx^2+Bx-B+Cx^3+Dx^2-Cx-D$$

$$\begin{array}{c|l|l}
x^3 & 0=A+B+C & \begin{cases}0=2A+2B\\ 1=2A-2B\end{cases} \\
x^2 & 0=A-B+D & 4A=1, A=\dfrac{1}{4}, 0=A+B, B=-A=-\dfrac{1}{4}, C=0 \\
x^1 & 0=A+B-C & \\
x^0 & 1=A-B-D & D=-\dfrac{1}{2}
\end{array}$$

$$\int\frac{x^4+1}{x^4-1}dx=x+2\int\frac{\frac{1}{4}dx}{x-1}+2\int\frac{-\frac{1}{4}dx}{x+1}+2\int\frac{-\frac{1}{2}dx}{x^2+1}=x+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\operatorname{arctg}x+c.$$

Дополнительные примеры:

1. $\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$ $2\ln|x-2|-\ln|x-3+c|$

2. $\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$ $3\ln|x-1|-\ln|x+2|+c$

3. $\int\frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$ $\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C$

13.6. Интегрирование тригонометрических функций

Чаще всего встречаются интегралы следующих функций

I. $\int\sin^k xdx$, $\int\cos^k xdx,$ где k – чётное число.

II. $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx,$ где n и m – нечётное число.

III. $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ где R рациональная функция от sin$x$ и cos$x$.

Решение I типа.

Интеграл от чётной степени $\sin x$ или $\cos x$ можно найти путём понижения степени по формулам:

$$\sin^2 t=\frac{1}{2}(1-\cos 2t),\quad \cos^2 t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Пример.

$$\int\sin^2 3xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 6x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 6xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\frac{\sin 6x}{6}+c=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+c.$$

Решение II типа.

Интеграл от нечётной степени sin x или cos x .Отделим от нечётной степени один множитель, например: $\sin^5 x=\sin^4 x\cdot\sin x$ и заменим cos x на t тогда

$\sin^4 x=(1-\cos^2 x)^2$, а $\sin xdx=-d(\cos x)$.

Делаем замену $\cos x=t$, тогда $\sin xdx=-dt$

$$\int\sin^5 xdx=\int\sin^4 x\cdot\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin xdx=$$

$$\int(1-t^2)^2(-dt)=-\int(1-t^2)^2dt=-\int(1-2t^2+t^4)dt=$$

$$=-t+\frac{2t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+c=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c.$$

Решение III типа.

$\int R(\sin x,\cos x)dx.$

Пример (метод универсальной тригонометрической постановки):

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x}.$$

$tg\frac{x}{2}=z$, тогда $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};dx=\frac{2dz}{1+z^2};\sin x=\frac{2z}{1+z^2};$

$$\int\frac{dx}{5+4\cos x}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{5+5z^2+4-4z^2}=\int\frac{2dz}{9+z^2}=$$

$$=2\int\frac{dz}{9+z^2}=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{z}{3}+c=\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\frac{tg\frac{x}{2}}{3})+c.$$

Примеры на различные типы.

1. $\int\cos^4 xdx=\int(\frac{1+\cos 2x}{2})^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$

$$=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2})dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{8}\int dx+$$

$$+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4}+c=$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c.$$

2. $\int\cos^5 xdx=\int\cos^4 x\cdot\cos xdx=\int(1-\sin^2 x)^2\cdot\cos xdx=$

$$=\int(1-2\sin^2 x+\sin^4 x)\cos xdx=[\sin x=z;dz=\cos xdx]=$$

$$=\int(1-2z^2+z^4)dz=\int dz-2\int z^2dz+\int z^4dz=z-\frac{2}{3}z^3+\frac{z^5}{5}+c=$$

$$=\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c.$$

3. $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\left(\sin x\cdot\cos x\right)^2dx=$

$$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\sin^2 2x}{4}dx=\frac{1}{8}(\int\sin^2 2xdx-\int\sin^2 x\cdot\cos 2xdx).$$

a. первый интеграл

$$\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 4xdx=$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{4\cdot 2}+c=\frac{x}{2}-\frac{\sin 4x}{8}+c.$$

b. второй интеграл берём как от нечётной степени $\cos 2x$

$\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=[\sin 2x=z,$ тогда $\cos 2xdx=\frac{1}{2}dz,$т.к.

$$(\sin 2x)'dx=dz;\ \cos 2x\cdot 2dx=dz;\ \cos 2xdx=\frac{dz}{2}\Big]=$$

$$=\int\frac{z^2}{2}dz=\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+c=\frac{z^3}{6}+c.$$

Окончательно: $\int\sin^4 x\cdot\cos^2 xdx=\frac{1}{8}(x-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\sin^3 2x}{6})+c=$

$$=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}+c.$$

4. $\int\frac{\cos x}{1-\cos x}dx=[$ применяя универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z;\ \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};\ dx=\frac{2dz}{1+z^2}\Big]=$

$$=\int\frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}-2\frac{dz}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{(1-z^2)2dz}{((1+z^2)+(1-z^2))(1+z^2)}=$$

$$=2\int\frac{(1-z^2)dz}{(1+z^2+(-z^2))(1+z^2)}=2\int\frac{(1-z^2)dz}{2(1+z^2)}=-\int\frac{z^2+1-2}{1+z^2}dz,$$

(выделим целую часть от неправильной дроби)

$$=-\int dz+2\int\frac{dz}{1+z^2}=-z+2\operatorname{arctg}z+c=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2})+c-$$

$$-\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2\frac{x}{2}+c=x-tg\frac{x}{2}+c.$$

5. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left[tg\frac{x}{2}=z;\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2};dx=\frac{2dz}{1+z^2}\right]=$

$$=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+5\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{3(1+z^2)+5(1-z^2)}=\int\frac{2dz}{8-2z^2}=\int\frac{dz}{4-z^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+c.$$

6. $\int\frac{dx}{(1+\cos x)^2}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{(1+z^2)(\frac{1+z^2+1-z^2}{1+z^2})^2}=\int\frac{(1+z^2)}{2}dz=$

$$=\frac{1}{2}\int dz+\frac{1}{2}\int z^2dz=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\frac{z^3}{3}+c=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+c.$$

7. $\int\frac{dx}{\sin x}=\left[tg\frac{x}{2}=z;\sin x=\frac{2z}{1+z^2};dx=\frac{2dz}{1+z^2}\right]=$

$$=\int\frac{2dz}{(1+z^2)\frac{2z}{1+z^2}}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+c=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+c.$$

8. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{2dz}{(1+z^2)(\frac{2z}{1+z^2})^3}=\frac{1}{4}\int\frac{(1+z^2)dz}{z^3}=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(1+2z^2+z^4)dz}{z^3}=\frac{1}{4}\int\frac{dz}{z^3}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}+\frac{1}{4}\int zdz=\frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{(-2)}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{4}\frac{z^2}{2}+c=-\frac{1}{8z^2}+\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{8}z^2+c=-\frac{1}{8\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+c=-\frac{1}{8}\mathrm{ctg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+c.$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции. Докажите, что любые две первообразные одной и той же функции отличаются на постоянное слагаемое.
2. Что называется неопределённым интегралом? Каков его геометрический смысл и основные свойства?
3. Каковы основные методы интегрирования функций? Приведите примеры использования каждого метода.

Контрольные задания

1. Вычислить неопределенные интегралы и проверить результаты дифференцированием:

a. $\int x^6dx$;

b. $\int \frac{3dx}{x^5}$;

c. $\int \sqrt{x}dx$;

d. $\int (5x^3-2x^2-8)dx$;

e. $\int (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x})dx$;

f. $\int (2x-1)^3dx$;

g. $\int (2x-1)^3dx$;

h. $\int \frac{(3x+1)^2}{x}dx$;

i. $\int e^{3x}dx$;

j. $\int \frac{x^3}{x^4+2}$;

k. $\int (e^x+5x)dx$;

l. $\int \frac{x^2+x+5}{2x}dx$;

m. $^*\int \frac{2xdx}{1+x^2}$;

n. $\int (2x-4^x)dx$;

o. $\int e^{-4x}dx$;

p. $\int (2x-4^x)dx$;

q. $\int \left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x\right)dx$.

2. Вычислить неопределенные интегралы и проверить результаты дифференцированием:

a. $\int 5\cos xdx$;

b. $\int (7x^2+3\cos x-\sqrt[3]{x})dx$;

c. $\int (\sin x+\cos x+e^x)dx$;

d. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$;

e. $\int 4\cos 3xdx$;

l. $^{**}\int \frac{\cos 2x+3}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

m. $^*\int \frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$;

n. $^*\int \sin x\cos xdx$;

o. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$;

f. $\int \sin(-4x)dx$;

g. $\int \cos\,(5-2x)dx$;

h. ** $\int x\sin x^2 dx$;

i. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x}$;

j. * $\int \frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$;

k. $\int \mathrm{tg}^2 x dx$;

p. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

q. * $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3-3x^2}dx$;

r. ** $\int \frac{1+x^2+3\cos^2 x}{(1+x^2)\cos^2 x}$;

s. ** $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5+2)}$.

3. Найти неопределенные интегралы

a. $\int (7-2x)^3 dx$;

b. $\int (5x-1)^3 dx$;

c. $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$;

d. $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$;

e. $\int \sqrt{x+1}dx$;

f. * $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx$;

g. $\int \sqrt[4]{5x+6}dx$;

h. $\int \sqrt{1+x^3}x^2 dx$;

i. * $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

j. $\int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{5x}dx$;

k. * $\int \sin^2 x\cos x dx$;

l. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$;

m. ** $\int x^3 4\sin 3x^4 dx$;

n. ** $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

o. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$;

p. ** $\int \frac{(\arcsin x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Глава 14
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

14.1. Формула Ньютона – Лейбница

Определённым интегралом называется предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{i=m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, при условии, что число промежуточных точек неограниченно возрастает, а длина частных сегментов (отрезков) $[x_{k-1}; x_k]$ стремится к 0.

Обозначается $\lim \sum_{i=1}^{i=m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)dx$.

Вычислять определённый интеграл нужно с помощью неопределённого интегрирования. Если $F(x)$ есть любая первообразная функции $f(x)$ т.е. $F'(x) = f(x)$, то интеграл $\int_a^b f(x) = F(a) - F(b)$ (1) – формула Ньютона-Лейбница.

Определённый интеграл равен разности значений неопределённого интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры.

1. $\int_2^3 3x^2dx = 3\int_2^3 x^2dx = 3\left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 = (3)^3 - (2)^3 = 19.$

2. $\int_0^4 (1+\ell^{\frac{x}{4}})dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 \ell^{\frac{x}{4}}dx = x|_0^4 + \left.\frac{\ell^{\frac{x}{4}}}{\frac{1}{4}}\right|_0^4 = 4 + 4\ell^1 - 4\ell^0 =$

$4 + 4\ell - 4 = 4\ell.$

В данных примерах применялись свойства неопределённого интеграла:

1. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов;
2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

В определенном интеграле также применяется интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Примеры.

$$\int_0^{\frac{\hbar}{2}}(x+3)\sin x dx=\begin{bmatrix} u=x+3; dv=\sin x \\ du=dx; v=\int\sin x dx=-\cos x\end{bmatrix}=-(x+3)\cos x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}}+$$

$$+\int_0^{\frac{\hbar}{2}}\cos x dx=-(x+3)\cos x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\hbar}{2}}=-(\frac{\hbar}{2}+3)\cos\frac{\hbar}{2}+(0+3)\cos 0+$$

$$+\sin\frac{\hbar}{2}-\sin 0=3\cdot 1+1=4.$$

$$\int_0^1 xe^x dx=\begin{vmatrix} x=u; du=dx \\ e^x dx=dv; v=e^x\end{vmatrix}=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=xe^x\Big|_0^1=$$

$$=(1\cdot e^1-0)-e^1+e^0=e-e+1=1.$$

14.2. Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении многих интегралов полезно заменить переменную интегрирования.

Если $\int_b^a f(x)dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ в другой интеграл, с новой переменной t, то заданные пределы интегрирования $x_1=a$, $x_2=b$ заменяем новыми пределами $t_1=\alpha$, $t_2=\beta$, которые определим из исходной подстановки

$$\int_b^a f(x)dx=\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi' dt.$$

Примеры.

1. Универсальная подстановка.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\begin{vmatrix} tgx=z; \\ \cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}; \\ dx=\dfrac{2dz}{1+z^2}; \\ x=0; z=0 \\ x=\dfrac{\pi}{2}; z=1\end{vmatrix}=2\int_0^1\left(\frac{dz}{z^2+3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

2. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{замена} \\ x=2\sin t;\ \sin t=\frac{1}{2};\ t_1=\frac{\pi}{6}; \\ dx=2\cos t;\ \sin t=\frac{\sqrt{3}}{2};\ t_2=\frac{\pi}{3} \end{array} \right| =$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8\sin^3 t+1)\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t\cdot\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(8\sin^3 t+1)\cdot 2\cos t dt}{4\sin^2 t\cdot 2\cos t} =$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin t dt + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\sin^2 t} t = 2(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{4}\operatorname{ctg} t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$=-2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}) = \frac{7}{2\sqrt{3}} - 1.$$

14.3. Геометрические приложения

а. Площадь плоской фигуры (рис. 50)

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

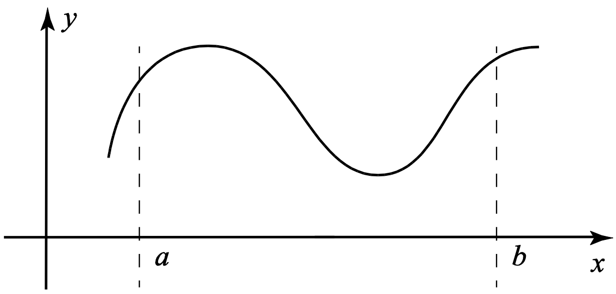


Рис. 50. Площадь фигуры в декартовой системе координат

Задачи.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y = x^2 + 1$, прямой $x = 4$ и осями координат.

Решение: $S = \int (x^2+1)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + x\Big|_0^4 = \frac{4^3}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$

Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$.

Решение.

Определяем точки пересечения парабол: $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}.$

$4 - x^2 = x^2 - 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$x_1 = -1$; $x_2 = 2$;

$y_1 = 3$; $y_2 = 0$.

Видим, что искомую площадь S можно найти как алгебраическую сумму площади трапеции:

$$S = S_{A'ACB} + S_{ODB} - S_{A'AO}.$$

Отдельно найдем каждую площадь:

$$S_{A'ACB} = \int_{-1}^{2}(4-x^2)\mathrm{dx} = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9;$$

$$S_{ODB} = \int_{0}^{2}(x^2-2x)\mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{8}{3} - 4 = \frac{4}{3};$$

$$S_{A'AO} = \int_{-1}^{0}(x^2-2x)\mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{4}{3};$$

$$S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$$

b. Длина дуги плоской кривой

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то формула длины дуги:

$$\mathrm{L} = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1+(y')}dx.$$

1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками $A(2; -1)$ и $B(5; -8)$.

Разрешим уравнение относительно y и найдем y'

$y = t(x-1)^{3/2}$ $y' = t(\frac{3}{2})(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

$$\mathrm{L} = \int_{x_a}^{x_b}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}((x-1)^{\frac{1}{2}})^2}\,dx = \int_2^5 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \sqrt{9x-5}\,dx = \frac{1}{18}\int_2^5 (9x-5)^{\frac{1}{2}}d(9x-5) = (9x-5)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_2^5 \approx 7,63.$$

2. Найти длину дуги кривой $y = \mathrm{e}^x$ между точками $A(0; 1)$ и $B(1; \mathrm{e})$ (рис. 51).

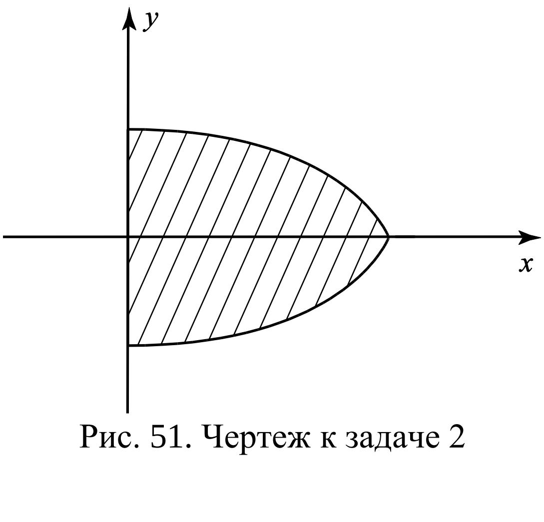


Рис. 51. Чертеж к задаче 2

$$\mathrm{L}=\int_0^1\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+e^{2x}}dx=\left|\begin{array}{l}\text{замена}\\ 1+e^{2x}=t^2\\ e^{2x}=t^2-1\\ 2e^{2x}dx=2tdt\\ dx=\dfrac{tdt}{e^{2x}}=\dfrac{tdt}{t^2-1}\\ x=0;t=\sqrt{2};\\ x=1;\ t=\sqrt{1+e^2}\\ y_1=-2\end{array}\right|=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\sqrt{t^2}\cdot\frac{tdt}{t^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}dt+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}\frac{dt}{t^2-1}=t\left|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}++\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^2}-1}{\sqrt{1+e^2}+1}\right|=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)^2}{1+e^2-1}-\frac{1}{2}\ln\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1}=$$

$$=\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+1+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)-\ln(\sqrt{2}-1).$$

14.4. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ вычисляется по формуле:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}dx \quad \text{или} \quad l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx. \qquad (1)$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически: $x=\varphi_1(t)$, $y=\phi_2(t)$, $t_1\le t\le t_2$, определяется формулой:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt \quad \text{или} \quad l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\varphi_1'^2(t)+\varphi_2'^2(t)}dt. \qquad (2)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах: $r=r(\varphi)$, где $\alpha\le\varphi\le\beta$, то

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}dr. \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x$ между точками, для которых $x_1=\dfrac{\pi}{3}$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Искомую длину вычисляем по формуле (1).

Так как $y = \ln \sin x$, $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (\frac{\cos x}{\sin x})^2}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + ctg^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{\cos^2 t - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,5493$$

Пример 2. Найти длину дуги линии $x = 4(\cos t + t \sin t)$, $y = 4(\sin t - t \cos t)$ $(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2})$.

Решение.

Применяя формулу (2), полагаем в ней $t_1 = 0$, $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Так как $x_t' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t$,

$y_t' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t$,

$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} = 4t$,

то $l = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi^2}{2} \approx 4,9348$

Пример 3. Найти длину всей линии, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

Решение.

1. Используем формулу (3). Для этого возведём в квадрат функцию $r = 2(1 + \cos \varphi)$. Получаем: $r^2 = 4(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi)$. Тогда $r' = -2\sin \varphi$; $r'^2 = 4\sin^2 \varphi$.

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{4(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) + 4\sin^2 \varphi} =$$

$$= 2\sqrt{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 2\sqrt{2 + 2\cos \phi} = 4\cos \frac{\varphi}{2}.$$

2. Находим длину дуги кривой для данной функции:

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos \frac{\phi}{2} d\phi = 2 \cdot 4 \sin \frac{\phi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \ 8 \sin \frac{\phi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 16.$$

14.5. Объём тела вращения

I. Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции *AabB* (рис. 52), где *AB* – дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx \quad \left[V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx\right] \qquad (4)$$

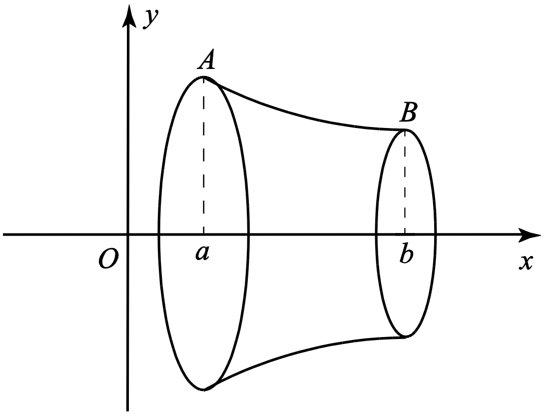


Рис. 52. Тело вращения

II. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Оу криволинейной трапеции *CcdD* (рис. 53), где *CD* дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется формулой

$$V_y = \pi\int_a^b x^2dy \qquad (5)$$

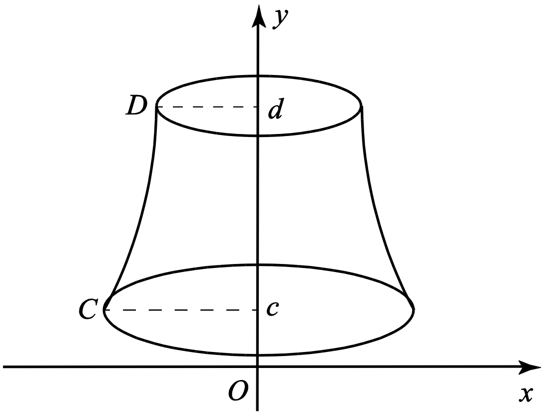


Рис. 53. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Оу

Пример 1. вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = x^6$, прямой $x = 2$ и осью *Oy*.

Решение.

В соответствии с условием задачи находим пределы интегрирования $a = 0$, $b = 2$. По формуле 4 получаем

$$V_x = \pi\int_0^2 6xdx = 3\pi x^2\Big|_0^2 = 12\pi \approx 37,6992.$$

Пример 2. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y = 4$ и осью Oy (рис. 54).

Решение. Пределы интегрирования $c = 0$, $d = 4$.

По формуле 5 находим

$$V_y = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 4y dy = 2\pi\, y^2 \Big|_0^4 = 32\pi \approx 100{,}5312.$$

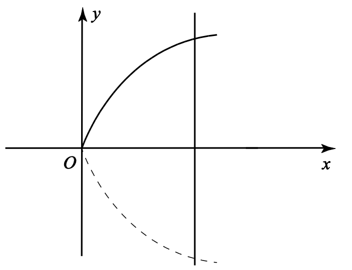


Рис. 54. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой

Пример 3. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью Ox (рис. 55).

Решение.

Из уравнения кривой $xy = 6$ находим: $x = \frac{6}{y}$; $x^2 = \frac{36}{y^2}$.

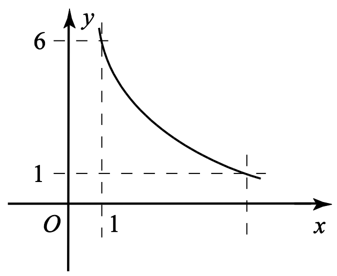


Рис. 55. Объем тела вращения, ограниченного параболой и вершинами

Так как $c = 1$; $d^6 = 6$ по формуле 5 получаем

$$V_y = \pi \int_1^6 \frac{36}{y^2} dy = 36\pi \int_1^6 \frac{1}{y^2} dy = -\frac{36}{y}\Big|_1^6 = -36\pi(\frac{1}{6} - 1) = 30\pi.$$

Пример 4. Найти объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной фигуры, ограниченной параболой $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми x = $\pm a$.

Решение.

Применим формулу 4. Выражение для y^2, входящее в эту формулу, определяется из уравнения гиперболы $\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x^2}{a^2}$;

$y^2=b^2+\frac{x^2b^2}{a^2}=b^2(1+\frac{x^2}{a^2})$.

Искомый объём

$$V_y=\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_{-a}^a b^2(1+\frac{x^2}{a^2})dx=\pi b^2\int_{-a}^a dx+\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^a x^2dx=\pi b^2x\Big|_{-a}^a+$$

$$+\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^a=\pi\mathrm{b}^2(a-(a))+\frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3-(-a^3))=2\pi ba+\frac{\pi b^2}{3a^2}2a^3==\frac{6\pi b^2a+2\pi b^2a^3}{3a^2}=\frac{8\pi b^2a^2}{3}.$$

Пример 5. Вычислить объём тела, полученного вращением эллипса $b^2x^2+a^3y^3=a^3\,b^2$ вокруг оси Ox (рис. 56).

Решение.

Из условия эллипса находим выражение для y^2

$$y^2=b^2-\frac{x^2b^2}{a^2}.$$

По формуле 5 получаем

$$V_x=\pi\int_{-a}^a(b^2-\frac{x^2b^2}{a^2})dx=\pi b^2\int_{-a}^a dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^a x^2dx=\pi\mathrm{b}^2x\Big|_{-a}^a-$$

x

$$-\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^a=\pi\mathrm{b}^2(a-(a))-+\frac{\pi b^2}{3a^2}(a^3-(-a^3))=$$

$$=2\pi\mathrm{b}^2a-\frac{2\pi b^2a}{3}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

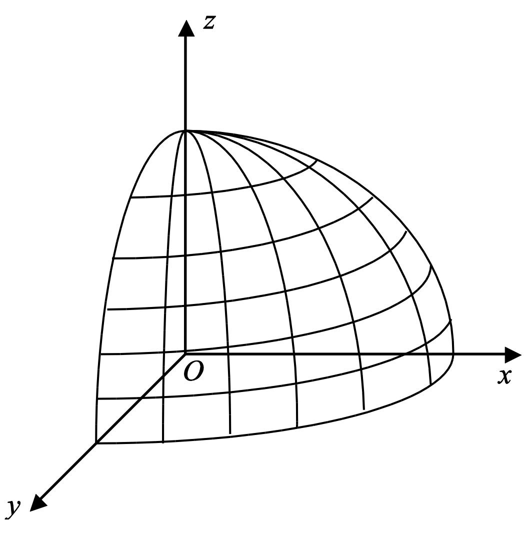


Рис. 56. Объём тела, полученного вращением эллипса

При a = b = R получаем V=$\frac{4}{3}\pi R^3$.

Пример 6. Найти объём тела, полученного вращением одной арки циклоиды x = $a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси *Ox*.

Решение.

Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды, когда *t* меняется от 0 до 2π, *x* при этом меняется от 0 до $2\pi a$ (рис.7.8).

Т.к. $x = a(t - \sin t)$, то $dx = a(t - \sin t)'_t dt = a(1 - \cos t)dt$.

Следовательно

$$V_x = \pi \int_a^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 a(1-\cos t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3(\frac{1+\cos 2t}{2}) - (1-\sin^2 t)\cos t \right] dt =$$

$$\pi a^3 (\int_0^{2\pi} \frac{5}{2} t dt - 4\int_0^{2\pi} \cos t dt + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t d(2t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t d(\sin t) =$$

$$= \pi a^3 (\frac{5}{2} t \Big|_0^{2\pi} - 4\sin t \Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{4}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi}) = \pi a^3 \frac{5}{2} 2\pi = 5a^3\pi^2.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется определенным интегралом? Каков его геометрический смысл?
2. Какие задачи приводят к понятию определённого интеграла?
3. Перечислите свойства определённого интеграла.
4. Как вычисляется площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат с помощью определённого интеграла?
5. Напишите формулу для вычисления объёмов тел, образованных вращением плоской фигуры вокруг оси Ox.

Контрольные задания

1. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1. $2y^2 = x^3$, $x = 4$ [32π];
2. $y^2 = 2px$, $x = p$ [πp^3];
3. $y = \sin x$, $y = 0$ (1 полуволна) [$\pi^2/2$].

2. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной линиями

1. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$ [π];
2. $x2 + y4 = y^2$ [πp³];
3. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ [19, 2π].

3. Вычислить определенные интегралы, используя определение и их свойства:

a. $\int_3^5 dx$;

b. $\int_0^1 xdx$;

c. $\int_0^2 3x^2dx$;

d. $\int_{-1}^1 (2x+1)dx$;

e. $\int_0^{2\pi} \cos xdx$;

f. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

g. $\int_{-1}^2 x^3dx$;

h. $\int_0^1 (x^4-3x^2+2x+7)dx$;

i. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x^2}{4}-2\sin x+13\right)dx$

j. ;

k. $\int_1^3 8x^3dx$;

l. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx$;

m. $\int_{-1}^1 (2x+3x^2+4x^3)dx$;

n. $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx$;

o. $\int_0^9 (3\sqrt{x}-x)dx$;

p. $\int_0^1 e^{2x}dx$;

q. ** $\int_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

r. * $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

s. * $\int_0^2 \frac{2x}{1+x^4}dx$.

4. Вычислить определенные интегралы, используя определение, их свойства и метод подстановки:

a. $\int_1^2 (2x+1)^3dx$;

b. $\int_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$;

c. $\int_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}dx$;

d. $\int_0^2 5\sqrt[3]{(x-2)^2}dx$;

i. * $\int_0^4 6x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$;

j. * $\int_1^e \frac{3\ln^2 xdx}{x}$

k. * $\int_{-1}^2 \frac{6x^2dx}{(x^3-5)^2}$;

l. ** $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

e. * $\int_{1}^{1}(4x^3+1)^5 x^2 dx$

f. * $\int_{0}^{3} 6x^3(3x^4-1)^2 dx$;

g. * $\int_{0}^{1}\frac{x^3 dx}{5x^4+1}$;

h. $\int_{0}^{1}(e^x-1)^2 e^x dx$;

m. $\int_{2\pi}^{0}\sin^3 x\cos xdx$;

n. ** $\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sin xdx}{3-\cos x}$;

o. * $\int_{0}^{\pi/6} e^{\sin x}\cos xdx$.

Глава 15
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ СРЕДСТВАМИ MATLAB

Система MATLAB может производить вычисление определенных и неопределенных интегралов различными методами: символьные вычисления, методы трапеций, прямоугольника, Симсона. Рассмотрим некоторые из них.

15.1. Символьные вычисления

Символьные вычисления интегралов в MATLAB осуществляется при помощи функции int (), имеющей следующие виды синтаксиса:

– int(fun) – Вычисляется неопределенный интеграл от функции S по ее символьной переменной, определенной в syms;

– int (fun, var) – Вычисляется неопределенный интеграл от функции S по ее символьной переменной var, определенной в syms;

– int(S,a,b) - Вычисляется определенный интеграл от a до b функции S по ее символьной переменной, определенной в syms. a и b могут быть переменными символьного или вещественного типа;

– int(S,v,a,b)– Вычисляется определенный интеграл от a до b функции S по ее символьной переменной v, определенной в syms. a и b могут быть переменными символьного или вещественного типа.

Пример программы вычисления неопределенного интеграла $\int (e^x - x)dx$:

```
>>syms x
>>f=sym ('exp (x) -x');
>>int (f, x)
ans =
exp (x)-1/2*x^2
```

Если определенный интеграл имеет точное значение, его можно вычислить по формуле Ньютона-Лейбница с помощью функции int (), имеющей следующий синтаксис: int (fun, var, a, b), где fun –подынтегральная функция, a var – переменная интегрирования, a, b – пределы интегрирования.

Пример вычисления определенного интеграла $\int_{-1}^{0}(3x^2 - x)dx$:

```
>> syms x
>> f=sym('3*x^2-x');
>> int(f,x,-1,0)
ans =
3/2
```

15.2. Реализация методов численного интегрирования в MATLAB

Вычисление интегралов методом трапеций осуществляется с помощью функции trapz ().

Синтаксис:

```
I = trapz(x, y)
I = trapz(y)
```

Описание:

Функция I = trapz(x, y) вычисляет интеграл от функции y по переменной x, используя метод трапеций. Аргументы x и y могут быть одномерными массивами одинакового размера, либо массив Y может быть двумерным, но тогда должно выполняться условие size(Y, 1) = length(x). В последнем случае вычисляется интеграл для каждого столбца.

Функция I = trapz(y) вычисляет интеграл, предполагая, что шаг интегрирования постоянен и равен единице; в случае, когда шаг h отличен от единице, но постоянен, достаточно вычисленный интеграл умножить на h.

Пример: Вычислим интеграл $I = \int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$. Его точное значение равно двум.

```
>> x=0:0.1:3;
>> y=x.*exp(-x);
>> plot (x,y);
>> x = 0:pi/100:pi;
>> y = sin(x);
>> I = trapz(x, y)
I =
   1.9998
```

Вычислительный алгоритм метода Симпсона с автоматическим выбором шага реализован функцией quad () двух видов.

Синтаксис:

- [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b)
- [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b, tol)
- [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b, tol, trace)
- [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b)
- [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b, tol)
- [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b, tol, trace)

Описание:

Квадратура - это численный метод вычисления площади под графиком функции, то есть вычисление определенного интеграла вида $I = \int_a^b f(x)dx$.

Функции quad и quad8 используют разные квадратурные формулы.

Функции [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b) и [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b) вычисляют интеграл от заданной функции; последняя может быть как встроенной функцией, так и М-файлом. Переменная cnt содержит информацию о том, сколько раз в процессе интегрирования вычислялась подынтегральная функция.

Функции [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b, tol) и [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b, tol) вычисляют интеграл с заданной относительной погрешностью tol. По умолчанию tol = 1e-3.

Функции [I, cnt] = quad('<имя функции>', a, b, tol, trace) и [I, cnt] = quad8('<имя функции>', a, b, tol, trace), когда аргумент trace не равен нулю, строят график, показывающий ход вычисления интеграла.

В качестве примера вычислим интеграл $I = \int_0^\pi \sin(x)\,dx$. Его точное значение равно двум.

```
>> [I, cnt] = quad('sin', 0, pi)

   I =

      2.0000

   cnt =

      33
```

```
>> [I, cnt] = quad('sin', 0, pi, 1e-4, 1)
    9     0.0000000000    8.53193733e-001     0.3424195349
   11     0.8531937329    1.43520519e+000     1.3151544267
   13     0.8531937329    7.17602594e-001     0.6575803480
   15     1.5707963268    7.17602594e-001     0.6575803480
   17     2.2883989207    8.53193733e-001     0.3424195349

I =

   2.0000

cnt =

   17
```

Как следует из анализа полученных данных, при увеличении точности вычисления на порядок почти вдвое увеличивается трудоемкость расчетов. График с результатами промежуточных расчетов показан на рисунке 57.

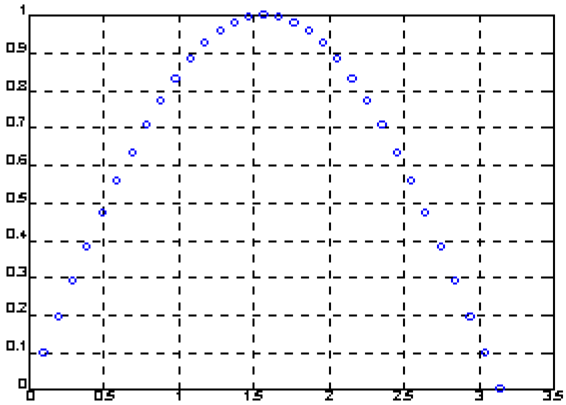


Рис. 57. Результаты промежуточных вычислений методом Симпсона

ВАЖНО: Функция quad использует квадратурные формулы Ньютона - Котеса 2-го порядка (правило Симпсона), а функция quad8 - формулы 8-го порядка [1-2]. При наличии в подынтегральной функции особенностей типа $I = \int_0^1 \sqrt{x}dx$ предпочтительнее использовать процедуру quad8.

Функции quad и quad8 не позволяют интегрировать функции с особенностями типа $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{dx}$. В этом случае рекомендуется выделить такие члены и проинтегрировать их аналитически, а к остатку применить процедуры quad и quad8.

Контрольные вопросы

1. Опишите кратко суть основных методов вычисления интегралов, реализованных в системе MATLAB.
2. Вычислите аналитически интеграл одним из описанных вами методов $\int_{0.4}^{0.5} \frac{1}{1+\sin(x)+x} dx$. Обоснуйте свой выбор.
3. С помощью MATLAB вычислите интеграл выбранным вами методом $\int_{0.4}^{0.5} \frac{1}{1+\sin(x)+x} dx$.

Контрольные задания

1. Вычислите определенные интегралы в заданиях 3 и 4 главы 14 с помощью системы MATLAB.
2. Оформите отчет и представьте его преподавателю. Содержание отчета:

– Текст задания, постановка задачи;
– Скриншоты текста программ.
– Письменное решение задач без использования системы MATLAB.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате изучения материалов учебно-практического пособия будущие специалисты будут способны использовать основные приемы обработки и представления экспериментальных данных; осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий; учитывать современные тенденции развития информационных технологий в своей профессиональной деятельности; использовать навыки работы с компьютером, владеть методами информационных технологий, соблюдать основные требования информационной безопасности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Половко А.М., Бутусов П.Н. MATLAB для студентов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.
2. Дьяконов В.П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
3. Дьяконов В. П. VisSim+Mathcad+MATLAB. Визуальное математическое моделирование. - М.: СОЛОН-Пресс, 2008. - 384 с.: ил. - (Серия "Полное руководство пользователя"). - Режим доступа: http:// www.studentlibrary.ru/ book/ ISBN9785940744245.html
4. Потемкин В.Г. Справочник по MATLAB // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://matlab.exponenta.ru/ml/book2/index.php
5. Поиск экстремумов функции // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://matlab.exponenta.ru/optimiz/book_4/1/fminbnd.php
6. Поиск минимума функции нескольких переменных // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://matlab.exponenta.ru/optimiz/ book_4/1/fminsearch.php
7. Создание или редактирование структур параметров опций оптимизации // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://matlab.exponenta.ru /optimiz/book_4/7/optimset.php
8. График в линейном масштабе // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://old.exponenta.ru/SOFT/MATLAB/potemkin/book2/chapter10/plot.asp.
9. Интегрирование методом трапеций // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://old.exponenta.ru/SOFT/MATLAB/potemkin/book2/ chapter8/trapz.asp.
10. Вычисление интегралов методом квадратур - // Технологии разработки и отладки сложных технических систем // VI Всероссийская конференция - http://old.exponenta.ru/soft/Matlab/potemkin/book2/chapter8/quad.asp

Учебное электронное издание

АРТЮШИНА Лариса Андреевна
ТРОИЦКАЯ Елена Анатольевна

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
MATLAB ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Системные требования: Intel от 1,3 ГГц; Windows XP/7/8/10; Adobe Reader; дисковод CD-ROM.

Тираж 31 экз.
Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Изд-во ВлГУ
rio.vlgu@yandex.ru

Институт информационных технологий и радиоэлектроники
кафедра информатики и защиты информации
troickiyv@mail.ru