Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. Л. КОШКИН   А. М. ГУБЕРНАТОРОВ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-практическое пособие

Владимир 2020

УДК 004(075.8)
ББК 32.81я73
К76

Рецензенты:
Кандидат экономических наук, доцент
зав. кафедрой экономики и финансов Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации (Владимирский филиал)
Д. В. Кузнецов

Генеральный директор ООО «Хрустальное небо»
В. Н. Козырев

К76 **Кошкин, В. Л.** Теория вероятностей и математическая статистика : учеб.-практ. пособие / В. Л. Кошкин, А. М. Губернаторов; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. – 136 с.
ISBN 978-5-9984-1117-5

Состоит из четырех взаимосвязанных разделов, включает ряд многовариантных задач по основным разделам теории вероятностей и математической статистики, рекомендации по решению, примеры с решениями по каждому разделу.

Предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению 38.03.05 «Бизнес-информатика», а также для студентов технико-экономического направления.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 19. Табл. 10. Библиогр.: 4 назв.

УДК 004(075.8)
ББК 32.81я73

ISBN 978-5-9984-1117-5

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика занимают центральное место в математических дисциплинах. Учебное пособие состоит из четырех взаимосвязанных разделов. Первый раздел посвящен аксиоматическим основам теории вероятностей, позволяющей исследователю строить математические модели и предсказывать благоприятный, а может быть, неблагоприятный исходы событий. Математическая статистика (второй раздел) – это инструмент в руках исследователя, позволяющий выявлять причинно-следственные связи в известных математических моделях и количественно их описывать. Теоретический материал курса поддержан большим количеством типовых и оригинальных задач. Третий и четвертый разделы пособия имеют практическую направленность и включают контрольные работы, решение которых позволяет закрепить изученный теоретический материал.

Глава 1. ВЕРОЯТНОСТЬ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

1.1. Элементы комбинаторики

Основные понятия комбинаторики

Комбинаторикой (комбинаторным анализом) называют раздел математики, в котором изучаются задачи выбора и расположения элементов из некоторого основного (обычно конечного) множества в соответствии с заданными правилами.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих двух важных правил, называемых правилами суммы и произведения.

Правило суммы. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами, а другой объект B – n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран из некоторой совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B может быть выбран n способами, то пара объектов A и B в указанном порядке может быть выбрана $m \cdot n$ способами.

Эти правила распространяются на случай трёх и большего числа объектов.

Кроме этих правил известны формулы, помогающие решать некоторые типовые задачи, встречающиеся довольно часто. Комбинациям, фигурирующим в этих задачах, присвоены особые названия – размещения, перестановки и сочетания.

Определение 1. *Размещениями* из n элементов по m ($m \le n$) элементов в каждом называются комбинации, содержащие по m различных элементов, выбранных из данных n элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком входящих в них элементов.

Число всех возможных размещений из n элементов по m обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле:

$$\mathrm{A}_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n\,!}{(n-m)!}.$$

Определение 2. *Перестановками* из n различных элементов называются комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов и отличающиеся только порядком расположения элементов.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по формуле:

$$\mathrm{P}_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n\,!$$

Нетрудно заметить, что перестановки из n элементов являются частным случаем размещений из n элементов по m, когда $m = n$, т.е. число элементов в комбинации совпадает с числом имеющихся элементов. Таким образом, справедлива формула:

$$P_n = A_n^n.$$

Определение 3. *Сочетаниями* из n элементов по m $(m \leq n)$ в каждом называются комбинации, содержащие по m различных элементов, выбранных из данных n элементов, которые отличаются составом входящих в них элементов. При этом порядок расположения элементов не играет роли.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n\,!}{m!(n-m)!}, \text{ т. е. } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}.$$

Свойства сочетаний:

$\mathrm{C}_n^0 = 1,$

$C_n^m = C_n^{n-m},$

$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1},$

$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \ldots + \mathrm{C}_n^n = 2^n.$

Определение 4. Размещениями с повторениями из n элементов по m элементов в каждом называются комбинации, содержащие по m возможно повторяющихся элементов, выбранных из данных n элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком входящих в них элементов.

Число всех возможных размещений с повторениями из n элементов по m обозначается символом $\overline{\mathrm{A}}_n^m$ и вычисляется по формуле:

$$\overline{\mathrm{A}}_n^m = n^m.$$

Задачи с решениями

Задача 1.1. На первом блюде лежат 8 апельсинов, на втором – 4 яблока. Сколькими способами можно выбрать один фрукт?

Решение. Один апельсин можно выбрать восемью способами, а одно яблоко – четырьмя. Один фрукт – это либо апельсин, либо яблоко. Воспользуемся правилом суммы: $m = 8$, $n = 4$; число способов выбора одного фрукта $m + n = 12$.

Ответ: 12.

Задача 1.2. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,9, если:

а) число записано разными цифрами?

б) цифры в записи числа могут повторяться?

Решение. а) Первую цифру в записи числа можно выбрать шестью способами (ноль не может быть первой цифрой), для выбора второй цифры, отличающейся от первой, существует 6 способов (ноль может быть второй цифрой), а для выбора третьей цифры остаётся 5 способов (две цифры из имеющихся семи поставлены на первое и второе места). Таким образом, согласно правилу произведения получаем 6·6·5 = 180 способов составления трёхзначного числа, записанного разными цифрами.

б) Если цифры в записи числа могут повторяться, то имеем 6 способов выбора первой цифры и по 7 способов выбора каждой из следующих цифр. Количество таких чисел 6·7·7 = 294.

Ответ: а) 180; б) 294.

Задача 1.3. Студенты изучают 6 различных дисциплин. Если ежедневно в расписание включается по 3 различных дисциплины, то сколькими способами могут быть распределены занятия в день?

Решение. Различные комбинации трёх дисциплин, выбранных из шести, составляют расписание на один день. При этом они различаются либо составом дисциплин, либо их порядком. Поэтому искомое число определяется формулой числа размещений: A_6^3 = 6·5·4 = 120.

Ответ: 120.

Задача 1.4. Сколько шестизначных чётных чисел можно составить из цифр 1,3,4,5,7,9, если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?

Решение. Чтобы число было чётным, последняя его цифра (число единиц) должна быть чётной. Из заданных цифр только одна чётная – это 4. Поэтому последней цифрой искомого числа может быть только 4. Остальные пять цифр могут стоять на первых пяти местах в любом порядке. Значит, задача сводится к нахождению числа перестановок из пяти элементов: P_5= 5!= 1·2·3·4·5 = 120.

Ответ: 120.

Задача 1.5. Сколько шестизначных чётных чисел можно составить из цифр 1,3,4,5, если цифры в записи числа могут повторяться?

Решение. Чтобы число было чётным, последняя его цифра (число единиц) должна быть чётной. Из заданных цифр только одна чётная – это 4. Поэтому последней цифрой искомого числа может быть только 4. Остальные пять цифр могут быть любыми из предложенных, причём могут повторяться. Значит, задача сводится к нахождению числа размещений с повторениями из четырёх элементов по пять в каждом: $\bar{A}_4^5$ = 4^5= 1024.

Ответ: 1024.

Задача 1.6. Сколькими способами можно выбрать 3 книги из 10 книг по математике, имеющихся в библиотеке?

Решение. Искомое число способов равно числу сочетаний из 10 элементов по 3 элемента в каждом, так как интересующие нас комбинации из трёх книг отличаются друг от друга только содержащимися в них книгами, а порядок расположения книг в этих комбинациях роли не играет. Следовательно, находим: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

Ответ: 120.

Задача 1.7. Сколько трёхзначных чётных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6, если цифры в записи числа могут повторяться?

Решение. При составлении трёхзначного числа из данных цифр в качестве первой цифры (числа сотен) можно взять любую цифру, кроме 0. Значит, есть шесть возможностей выбора первой цифры. В качестве второй цифры (числа десятков) можно выбрать любую из данных в условии цифр. Значит, есть семь возможностей выбора второй цифры. В качестве последней цифры (числа единиц) можно взять любую из цифр 0,2,4,6. Значит, есть четыре возможности выбора третьей цифры. Следовательно, согласно правилу произведения находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи: $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$.

*Ответ:*168.

Задача 1.8. Сколько различных чисел можно составить из цифр 4 и 5, если количество цифр в записи числа не более пяти и не менее трёх?

Решение. По условию задачи количество цифр в записи числа не более пяти и не менее трёх. Значит, их либо три, либо четыре, либо пять.

Если число, записанное четвёрками и пятёрками, содержит три цифры, то таких чисел будет: $\bar{\mathrm{A}}_2^3 = 2^3 = 8$.

Если число, записанное четвёрками и пятёрками, содержит четыре цифры, то таких чисел будет: $\overline{A}_2^4 = 2^4 = 16$.

Если число, записанное четвёрками и пятёрками, содержит пять цифр, то таких чисел будет: $\overline{A}_2^5 = 2^5 = 32$.

Следовательно, согласно правилу суммы, находим количество способов составления числа, удовлетворяющего условию задачи: $8+16+32 = 56$.

Ответ: 56.

1.2. Случайные события и их классификация. Алгебра событий. Вероятность события. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Случайные события

Определение 1. *Испытанием* (или *опытом*) называется осуществление некоторой совокупности определённых условий.

Определение 2. *Событием* называется любой результат испытания.

Определение 3. Событие называется *случайным* (обозначается прописными латинскими буквами: $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, A_3\ldots$), если в данном испытании оно может или произойти, или не произойти.

Определение 4. Событие называется *достоверным* (обозначается E), если в данном испытании оно обязательно произойдёт.

Определение 5. Событие называется *невозможным* (обозначается $\overline{E}$), если в данном испытании оно никогда не произойдёт.

Определение 6. События называются *несовместными* в данном испытании, если они не могут наступить одновременно. В противном случае события называются *совместными*.

Определение 7. Событие B называется *независимым* от события A, если наступление события A не влияет на наступление или ненаступление события B. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Определение 8. События называются *равновозможными*, если есть основание считать, что ни одно из них не является более возможным, чем остальные.

Определение 9. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате испытания обязательно наступает хотя бы одно из них.

Определение 10. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу равновозможных попарно несовместных событий*, если в данном испытании события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ являются равновозможными и любые два из них – несовместные. Такие события будут называться *элементарными событиями* (или *случаями, исходами*).

Определение 11. Элементарное событие $A_i(i = \overline{1;n})$ называется благоприятствующим событию A, если его наступление влечёт за собой наступление события A.

Определение 12. Событие, обозначаемое $\bar{A}$, называется *противоположным событием* по отношению к событию A, если наступление одного из них в результате данного испытания исключает наступление другого.

Алгебра событий

Определение 13. *Суммой* (или *объединением*) событий A и B называется такое событие, обозначаемое $A+B$, которое состоит в наступлении хотя бы одного из событий A или B.

Определение 14. *Произведением* (или *совмещением*) событий A и B называется такое событие, обозначаемое $A \cdot B$, которое состоит в одновременном наступлении и события A, и события B.

Замечание 1. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу попарно несовместных событий, то справедливы равенства:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = E,$$

$$A_i \cdot A_j = \bar{E} \ (i \neq j).$$

Замечание 2. Поскольку события A и $\bar{A}$ образуют полную группу и несовместны, для них справедливы равенства:

$$A + \bar{A} = E,$$

$$A \cdot \bar{A} = \bar{E}.$$

Вероятность события

Пусть для данного испытания события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий (являются элементарными событиями).

Определение 15. *Вероятностью случайного события A* в данном испытании называется число, обозначаемое $P(A)$ и вычисляемое по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1}$$

где n – число всех возможных элементарных событий рассматриваемого испытания; m – число благоприятствующих событию A.

Замечание 3. Ситуация, когда полную группу составляют равновозможные события, называется *классической*. Поэтому определение вероятности (1), опирающееся на такое условие, называется *классическим определением вероятности.*

Замечание 4. Нетрудно видеть, что в формуле (1) числа m, n связаны неравенствами:

$$0 \leq m \leq n.$$

Поэтому вероятность любого события A удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Причём, если $A = E$ – достоверное событие, то $m = n$ и $P(E) = 1$; если $A = \overline{E}$ – невозможное событие, то $m = 0$ и $P(\overline{E}) = 0$.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема 1 (теорема суммы несовместных событий). Вероятность наступления одного из двух несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1. Вероятность наступления одного из нескольких попарно несовместных событий (безразлично какого) равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Следствие 2. Вероятность события A равна единице минус вероятность его противоположного события $\bar{A}$*:*

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Теорема 2 (вероятность суммы совместных событий). Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Определение 1. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ называется вероятность события B при условии, что событие A уже наступило.

Теорема 3 (вероятность произведения двух независимых событий). Вероятность совместного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Следствие 3. Вероятность совместного наступления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема 4 (вероятность произведения двух зависимых событий). Вероятность совместного наступления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие 4. Вероятность совместного наступления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причём условная вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Задачи с решениями

Задача 2.1. Монета подбрасывается два раза.

а) Опишите полную группу возможных элементарных событий.

б) Если событие А – выпало не менее одного "орла", В – выпало не менее одной "решки", укажите, что собой представляют события:

$$\bar{A}, \bar{B}, A + B, A \cdot B?$$

Решение. В данной задаче испытанием является подбрасывание монеты дважды.

а) Обозначим события:

C_1 – при первом подбрасывании выпал "орёл", при втором – "решка",

C_2 – при первом подбрасывании выпала "решка", при втором – "орёл",

C_3 – оба раза выпал "орёл",

C_4 – оба раза выпала "решка".

Тогда перечисленные события C_1, C_2, C_3,C_4 образуют полную группу, так как при двух подбрасываниях монеты обязательно произойдёт одно из них. Значит, справедливо равенство:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E.$$

Кроме того, никакие два из указанных событий не могут наступить одновременно. Следовательно, имеет место равенство:

$$C_i \cdot C_j = \bar{E} \text{ при } i \neq j.$$

Таким образом, указанные события попарно несовместны. Причём наступление любого из событий C_1, C_2, C_3,C_4 не имеет преимущества перед остальными, а значит, эти события являются равновозможными.

Таким образом, события C_1, C_2, C_3,C_4 образуют полную группу равновозможных попарно несовместных событий. Следовательно, они являются в данном испытании полной группой элементарных событий.

б) Так как $\bar{A}$ – не выпало ни одного "орла", то $\bar{A} = C_4$ – оба раза выпала "решка". Аналогично, $\bar{B}$ – не выпало ни одной "решки", следовательно, $\bar{B} = C_3$ – оба раза выпал "орёл". А так как A означает, что выпадает не менее одного раза "орёл", то $A = C_1 + C_2 + C_3$. Аналогично заключаем:
$B = C_1 + C_2 + C_4$. Следовательно, по определению суммы и произведения событий получаем:

$$A + B = (C_1 + C_2 + C_3) + (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = E,$$

$$A \cdot B = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot (C_1 + C_2 + C_4) = C_1 + C_2.$$

Ответ: а) C_1, C_2, C_3, C_4; б) $\bar{A} = C_4$, $\bar{B} = C_3, A + B = E, A \cdot \text{В} = C_1 + C_2$..

Задача 2.2. В ящике находится 10 шаров: 3 белых и 7 чёрных. Из ящика наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что этот шар:

а) белый,

б) чёрный?

Решение. В данной задаче полную группу элементарных событий составляют 10 событий, так как выбор любого одного шара можно осуществить 10 способами. Из этих событий только 3 благоприятствуют выбору белого шара и 7 – выбору чёрного. Поэтому, если A – выбор белого шара, то $P(A) = \frac{3}{10} = 0{,}3$; если B – выбор чёрного шара, то $P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7$.

Ответ: а) 0,3; б) 0,7.

Задача 2.3. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад выбираются одна за другой три карточка и располагаются в ряд (в порядке появления) слева направо. Какова вероятность, что получится слово "ДВА"?

Решение. Выбор трёх карточек из имеющихся пяти можно осуществить A_5^3 способами, так как порядок карточек имеет значение в данной задаче. Вычисляем: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Значит, число всех возможных элементарных событий $n = 60$. Из этих событий только одно благоприятствует событию – получению слова "ДВА", следовательно, $m = 1$. Итак, $P = \frac{1}{60}$.

Ответ: $\frac{1}{60}$.

Задача 2.4. В ящике 10 шаров: 6 белых и 4 чёрных. Из ящика наугад вынимают два шара. Какова вероятность того, что

а) оба шара белые?

б) оба шара чёрные?

в) один шар белый, другой чёрный?

Решение. Число выбора двух шаров из десяти имеющихся определяется числом всевозможных сочетаний из 10 по 2: $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

Значит, полную группу элементарных событий рассматриваемого испытания (выбор двух шаров из десяти, находящихся в ящике) составляют 45 событий. Следовательно, $n = 45$.

а) Если из элементарных событий рассматривать только те, которые состоят в выборе двух белых шаров, то находим $m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$.

Следовательно, вероятность того, что оба шара будут белыми, вычисляется по формуле:

$$p_1 = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}.$$

б) Если рассматривать событие – выбор двух чёрных шаров, то число благоприятствующих ему элементарных событий равно:

$$m = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Значит, вероятность выбора двух чёрных шаров вычисляется по формуле:

$$p_2 = \frac{m}{n} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

в) Если рассматривать событие – выбор одного белого и одного чёрного шаров, то для него число благоприятствующих элементарных событий равно:

$$m = C_6^1 \cdot C_4^1 = 6 \cdot 4 = 24.$$

Значит, вероятность выбора одного белого и одного чёрного шаров вычисляется по формуле:

$$p_3 = \frac{m}{n} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

Ответ: а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{2}{15}$, в) $\frac{8}{15}$.

Задача 2.5. Стрелок стреляет по мишени, разделённой на четыре области. Вероятность попадания в первую область 0,4, во вторую – 0,3. Найдите вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадёт либо в первую область, либо во вторую.

Решение. Обозначим события:

A – стрелок попадает в первую область, *B* – стрелок попадает во вторую область. Эти события несовместны, так как они не могут наступить одновременно (попадание пули в одну область мишени исключает её попадание в другую область). Поэтому воспользуемся теоремой 1 (вероятность суммы несовместных событий), откуда находим:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,4 + 0,3 = 0,7.$$

Ответ: 0,7.

Задача 2.6. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру (валет, дама, король, туз) любой масти или карту трефовой масти?

Решение. Обозначим события:

A – извлечение из колоды карты – фигуры, *B* – извлечение из колоды карты трефовой масти.

Необходимо найти вероятность суммы этих событий. События *A* и *B* совместны, так как они могут наступить одновременно, если будет извлечена карта – фигура трефовой масти. Поэтому для подсчёта вероятности суммы этих событий используем теорему 2 (вероятность суммы совместных событий):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

В рассматриваемой задаче $P(A) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$, так как всего элементарных исходов 52, что равно числу карт в колоде, из них 16 благоприятствуют событию *A*, что равно числу карт – фигур в колоде. Аналогично вычисляем: $P(B) = \frac{13}{52}$ (в колоде 13 карт трефовой масти). $P(A \cdot B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (в колоде 4 карты – фигуры трефовой масти).

Итак, находим: $P(A+B) = \frac{4}{13} + \frac{13}{52} - \frac{1}{13} = \frac{25}{52}$.

Ответ: $\frac{25}{52}$.

Задача 2.7. Два орудия стреляют по одной цели. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,6, для второго вероятность попадания равна 0,5. Какова вероятность того, что в цель попадут оба орудия?

Решение. Обозначим события:

A – попадание в цель первого орудия, B – попадание в цель второго орудия.

Отметим, что A и B – события независимые, то есть наступление одного из них не влияет на наступление или ненаступление другого. Поэтому воспользуемся теоремой 3 (вероятность произведения независимых событий):

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Задача 2.8. Для Московской области среднее число дождливых дней в августе равно 15. Какова вероятность, что первые два дня августа не будут дождливыми?

Решение. Обозначим события:

A – 1 августа не будет дождя, B – 2 августа не будет дождя.

Необходимо рассмотреть событие $A \cdot B$ – 1 и 2 августа не будет дождя. В данной задаче $P(A) = \frac{16}{31}$, так как в августе 31 день, а не дождливых дней из них 31 – 15 = 16.

При вычислении $P(B)$ результат зависит от того, будет ли дождь 1-го августа. Следовательно, необходимо найти условную вероятность $P_A(B)$ – вероятность того, что 2-го августа не будет дождя в предположении, что 1 августа –день без дождя. Тогда получаем: $P_A(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$,

Так как в августе осталось 30 дней, начиная со 2 августа, из них не дождливых дней осталось 15 (ведь один не дождливый день пришёлся по предположению на 1 августа). Итак, по теореме 4 (вероятность произведения зависимых событий) получаем:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{16}{31} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{31}.$$

Ответ: $\frac{8}{31}$.

Задача 2.9. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Какова вероятность того, что среди трёх наугад взятых деталей окажется хотя бы одна стандартная?

Решение. События "среди взятых деталей окажется хотя бы одна стандартная" и "среди взятых деталей нет ни одной стандартной" – противоположные события, так как наступление одного из этих событий исключает наступление другого.

Обозначим:

A – среди трёх взятых деталей есть хотя бы одна стандартная, $\overline{A}$ – среди трёх взятых деталей нет ни одной стандартной.

По следствию 2 из теоремы 1 известно, что $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Найдём $P(\overline{A})$. Общее число элементарных событий в этой задаче – это число способов выбора трёх деталей из десяти, находящихся в ящике:

$$n = C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Число нестандартных деталей равно 10 – 6 = 4. Число элементарных исходов, благоприятствующих событию $\overline{A}$: $m = C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4$.

Тогда $P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$.

Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$.

Ответ: $\frac{29}{30}$.

1.3. Формула полной вероятности. Повторные испытания. Формула Бернулли

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии наступления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, которые образуют полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами. Пусть известны вероятности этих событий (гипотез) и условные вероятности события A при условии наступления каждого из них. Как найти вероятность события A? Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1 (формула полной вероятности). Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии наступления одного из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

Замечание 1. Следствием формулы полной вероятности является формула Байеса (по имени английского математика, который её вывел; опубликована в 1764 г.). Она позволяет переоценить вероятность гипотезы H_i, принятую до опыта, по результатам уже проведённого опыта, т.е. вычислить условную вероятность гипотезы H_i при условии наступления события *A*.

Теорема 2 (формула Байеса или теорема гипотез). Пусть попарно несовместные события $H_1, H_2, \dots H_n$ образуют полную группу. Тогда условная вероятность события $H_i (i = \overline{1, n})$ при условии, что событие *A* наступило, задаётся формулой:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot \mathrm{P}_{H_i}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot \mathrm{P}_{H_i}(A)}{\mathrm{P}(\mathrm{H}_1) \cdot P_{\mathrm{H}_1}(A) + \mathrm{P}(\mathrm{H}_2) \cdot P_{\mathrm{H}_2}(A) + \dots + \mathrm{P}(\mathrm{H}_n) \cdot P_{\mathrm{H}_n}(A)}.$$

Повторные испытания. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, причём вероятность наступления события *A* в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми относительно события *A*.

В разных независимых испытаниях событие *A* может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Мы будем рассматривать такие независимые испытания, в которых события *A* имеют одну и ту же вероятность.

Теорема 3 (формула Бернулли). Пусть в серии из n одинаковых независимых испытаний в каждом испытании может наступить либо событие *A* с вероятностью p, либо событие $\bar{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в этой серии испытаний событие *A* наступит ровно m раз ($m \leq n$), вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \text{ где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Формулы Лапласа

Эти формулы дают приближенное значение вероятности наступления события *A* определённое число раз в серии из n независимых испытаний, если число n достаточно велико. Пусть p ($0 < p < 1$) – вероятность события *A* в каждом испытании, $q = 1 - p$ – вероятность события $\bar{A}$.

Теорема 4 (локальная формула Лапласа). Вероятность $P_n(m)$ наступления события *A* ровно m раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближённо вычисляется по формуле Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Замечание 2. Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x)$= $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ (в прил. 2 табл. П 2.1), соответствующие положительным значениям аргумента x. Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция $\varphi(x)$ является чётной, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Замечание 3. Формула Лапласа тем точнее приближает формулу Бернулли, чем больше число n (более нескольких десятков) и $n{\cdot}p > 10$.

Теорема 5 (интегральная формула Лапласа). Вероятность $P_n(m_1, m_2)$ того, что событие A наступит от m_1 до m_2 раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближённо вычисляется по формуле Лапласа: $P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\,(\frac{m_2-\mathrm{np}}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{m_1-\mathrm{np}}{\sqrt{npq}})$,

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Замечание 4. Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\Phi(x)$ при $0 \le x \le 5$ (в прил. 2 табл. П 2.2). При $x < 0$ пользуются теми же таблицами, так как функция $\Phi(x)$ является нечётной, т.е. $\Phi(-x) = = -\Phi(x)$. Для $x > 5$ можно считать $\Phi(x) = 0{,}5$.

Формула Пуассона

Теорема 6 (формула Пуассона). Пусть p – вероятность наступления события A в каждом испытании. Тогда вероятность $P_n(m)$ наступления события A ровно m раз в серии из n одинаковых независимых испытаний приближённо вычисляется по формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!},$$

где $\lambda = np$.

Замечание 5. Формула Пуассона тем точнее, чем меньше p и больше число n (более нескольких сотен), причём $n \cdot p < 10$.

Задачи с решениями

Задача 3.1. В первой коробке находится 20 деталей, из них 18 стандартных, во второй коробке – 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята одна деталь и переложена в первую коробку. Какова вероятность того, что деталь, наудачу извлечённая после этого из первой коробки, окажется стандартной?

Решение. Обозначим события:

A – из первой коробки извлечена стандартная деталь.

H_1– из второй коробки в первую переложена стандартная деталь.

H_2 – из второй коробки в первую переложена нестандартная деталь.

Событие A может наступить при условии наступления одного из событий H_1, H_2. Эти события несовместны и образуют полную группу, т. е. являются гипотезами в формуле полной вероятности. Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная деталь, $P(H_1) = \frac{9}{10}$.

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандартная деталь $P(H_2)= \frac{1}{10}$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная деталь, $P_{H_1}(A) = \frac{19}{21}$.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная деталь, $P_{H_2}(A)= \frac{18}{21}$.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная деталь, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9.$$

Ответ: 0,9.

Задача 3.2. Два станка производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого станка в два раза больше производительности второго станка. Первый производит 60 % деталей высшего сорта, а второй – 84 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась высшего сорта. Какова вероятность того, что эта деталь произведена на первом станке?

Решение. Обозначим события:

A – деталь, взятая с конвейера, оказалась высшего сорта.

Это событие наступит с одним из двух событий (гипотез):

H_1 – эта деталь произведена на первом станке,

H_2 – эта деталь произведена на втором станке.

Поскольку производительность первого станка в два раза больше производительности второго станка, вероятности гипотез равны: $P(H_1)=\frac{2}{3}$, $P(H_2)=\frac{1}{3}$.

Условные вероятности события A даны: $P_{H_1}(A)$ = 0,6, $P_{H_2}(A)$ = 0,84.

По формуле полной вероятности находим:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68.$$

По формуле Байеса найдём условную вероятность того, что взятая наудачу деталь высшего сорта произведена на первом станке:

$$P_A(H_1)= \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17}.$$

Ответ: $\frac{10}{17}$.

Задача 3.3. В ящике 20 белых и 10 чёрных шаров. Поочерёдно извлекают 4 шара, причём каждый извлечённый шар возвращают в ящик перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что среди четырёх извлечённых шаров окажется два белых?

Решение. Вероятность извлечения белого шара одна и та же во всех четырёх испытаниях, так как каждый извлечённый шар возвращается в ящик: $p = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

Тогда вероятность извлечения чёрного шара во всех четырёх испытаниях равна $q = 1 - p = \frac{1}{3}$.

Используя формулу Бернулли, находим вероятность того, что из четырёх извлечённых шаров два шара будут белыми:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{27}.$$

Ответ: $\frac{8}{27}$.

Задача 3.4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена 75 раз?

Решение. По условию задачи n = 100, m = 75, p = 0,8, $q = 1 - p$ = 0,2.

Так как n – достаточно большое число, воспользуемся локальной формулой Лапласа:

$$P_n(m)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot \varphi(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}),$$

$$P_{100}\ (75) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\cdot \varphi(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0.8 \cdot 0{,}2}}) = \frac{1}{\sqrt{16}}\cdot \varphi(\frac{75-80}{\sqrt{16}}) = \frac{1}{4}\cdot \varphi(\frac{-5}{4}) = \frac{1}{4} \cdot\varphi(1{,}25).$$

В таблице значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ находим $\varphi(1{,}25) = 0{,}1826$.

Следовательно, P_{100} (75) $\approx \frac{1}{4}\cdot 0{,}1826 = 0{,}04565$.

Ответ: 0,04565.

Задача 3.5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена

а) не менее 75 раз и не более 90 раз?

б) не менее 75 раз?

в) не более 74 раз?

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\ (\frac{m_2-\mathrm{np}}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{m_1-\mathrm{np}}{\sqrt{npq}}),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ – функция Лапласа.

а) По условию задачи n = 100, p = 0,8, q = 0,2, m_1= 75, m_2= 90. Тогда, воспользовавшись таблицей значений функции $\Phi(x)$, получаем: P_{100} (75; 90) $\approx\Phi\ (\frac{90-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}) - \Phi(\frac{75-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2}}) = \Phi(\frac{10}{4}) - \Phi(\frac{-5}{4}) = \Phi(2{,}5)+ +\Phi(1{,}25) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

б) Требование того, чтобы событие наступило не менее 75 раз, означает следующее: число появлений события может быть равно либо 75, либо 76, …, либо 100.

Тогда следует принять m_1 = 75, m_2 =100. Воспользовавшись таблицей значений функции Лапласа *Ф(x),* получаем: P_{100} (75; 100) $\approx\Phi$ $(\frac{100-80}{4}) - -\Phi(\frac{75-80}{4}) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}5 + 0{,}3944 = 0{,}8944$.

в) Событие "мишень поражена не более 74 раз" и событие "мишень поражена не менее 75 раз" являются противоположными. Поэтому сумма их вероятностей равна 1. Следовательно, искомая вероятность $P_{100}(0;\,74) = 1 - P_{100}\,(75;\,100) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$.

Ответ: а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056.

Задача 3.6. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что один учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Какова вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг?

Решение. По условию задачи $n = 100000$, $p = 0{,}0001$.

События "из n книг ровно m книг сброшюрованы неправильно", где $m = 0,1,2, \ldots,100000$, являются независимыми. Так как число n велико, а вероятность p мала, вероятность $P_n(m)$ можно вычислить по формуле Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$, где $\lambda = np$.

В рассматриваемой задаче $\lambda = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Поэтому искомая вероятность $P_{100000}(5)$ определяется равенством:

$$P_{100000}\,(5) \approx \frac{e^{-10} \cdot 10^5}{5!} \approx\; 10^5 \cdot \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Ответ: 0,0375.

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

2.1. Дискретная случайная величина

Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины

Определение 1. *Случайной* называется величина, которая в результате испытания принимает только одно значение из возможного множества своих значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин.

Различают два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

Определение 2. Случайная величина X называется *дискретной* (прерывной), если множество ее значений конечное или бесконечное, но счетное.

Другими словами, возможные значения дискретной случайной величину можно перенумеровать.

Описать случайную величину можно с помощью ее закона распределения.

Определение 3. *Законом распределения дискретной случайной величины* называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, в первой строке которой указаны в порядке возрастания все возможные значения случайной величины, а во второй строке соответствующие вероятности этих значений, т.е.:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

где $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.

Такая таблица называется *рядом распределения дискретной случайной величины*.

Если множество возможных значений случайной величины бесконечно, то ряд $p_1+p_2+\ldots+p_n+\ldots$ сходится и его сумма равна 1.

Закон распределения дискретной случайной величины X можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят ломаную, соединяющую последовательно точки с координатами $(x_i;p_i)$, $i=1,2,\ldots n$. Полученную линию называют *многоугольником распределения* (рис. 2.1).

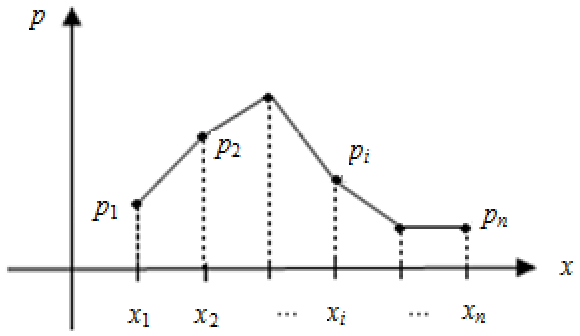


Рис. 2.1

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть также задан аналитически (в виде формулы):

$$P(X=x_i)=\varphi(x_i), i=1,2,3\ldots n.$$

Задачи с решениями

Задача 4.1. Вероятности того, что студент сдаст экзамены в сессию по математическому анализу и органической химии соответственно равны 0,7 и 0,8. Составить закон распределения случайной величины X – числа экзаменов, которые сдаст студент.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X в результате экзамена может принять одно из следующих значений: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$.

Найдем вероятности этих значений. Обозначим события:

A – студент сдаст экзамен по математическому анализу;

$\bar{A}$ – студент не сдаст экзамен по математическому анализу;

B – студент сдаст экзамен по органической химии;

$\bar{B}$ – студент не сдаст экзамен по органической химии.

По условию:

$P(A) = 0{,}7 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}3;$

$P(B) = 0{,}8 \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B).$

Тогда:

$P(x=0) = P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06.$

$P(x=1) = P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38$

$P(x=1) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$

Итак, закон распределения случайной величины X задается таблицей:

x	0	1	2
p	0,06	0,38	0,56

Контроль: 0,06+0,38+0,56=1.

Фунция распределения

Полное описание случайной величины дает также функция распределения.

Определение 4. *Функцией распределения дискретной случайной величины* X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x:

$$F(x) = \mathrm{P}(X < x)$$

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой прямой точкой, лежащей левее точки x.

Свойства функции распределения

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая функция на промежутке $(-\infty;+\infty)$;

3) $F(x)$ – непрерывна слева в точках $x = x_i$ $(i=1,2,\ldots n)$ и непрерывна во всех остальных точках;

4) $F(-\infty)=P\ (X<-\infty)=0$ как вероятность невозможного события $X<-\infty$, $F(+\infty)=P(X<+\infty)=1$ как вероятность достоверного события $X<+\infty$.

Если закон распределения дискретной случайной величины X задан в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
p	p_1	p_2	p_3	…	p_n

то функция распределения $F(x)$ определяется формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le x_1, \\ p_1 \text{ при } x_1 < x \le x_2, \\ p_1 + p_2 \text{ при } x_2 < x \le x_3 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ 1 \text{ при } x > x_n \end{cases}$$

Её график изображен на рис. 2.2:

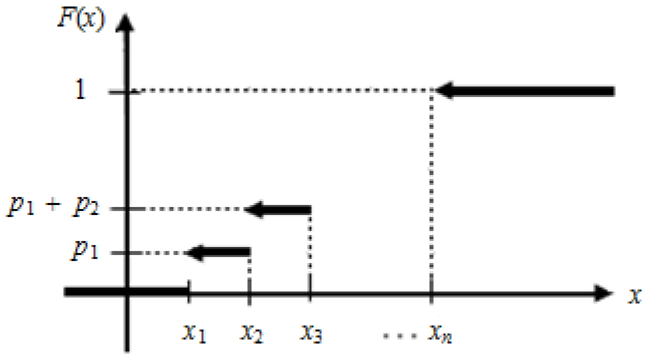


Рис. 2.2

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Определение 5. *Математическим ожиданием* $M(X)$ дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Свойства математического ожидания

1) $M(C)=C$, где С – постоянная величина;

2) $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$,

3) $M(X\pm Y)=M(X)\pm M(Y)$;

4) $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины;

5) $M(X\pm C)=M(X)\pm C$, где C – постоянная величина.

Для характеристики степени рассеяния возможных значений дискретной случайной величины вокруг ее математического ожидания служит дисперсия.

Определение 6. *Дисперсией* $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X)=M(X-M(X))^2$$

Свойства дисперсии

1) $D(C)=0$, где C – постоянная величина;

2) $D(X)>0$, где X – случайная величина;

3) $D(C \cdot X)=C^2 \cdot D(X)$, где C – постоянная величина;

4)$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, где X,Y – независимые случайные величины;

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться формулой:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}\, p_i = x_1^2\, p_1 + x_2^2\, p_2 + \ldots + x_n^2\, p_n$$

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния возможных значений случайной величины используют также величину $\sqrt{D(X)}$.

Определение 7. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Задача 4.2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x	–1	0	1	2	3
p	0,1	p_2	0,3	0,2	0,3

Найти p_2, функцию распределения $F(x)$ и построить её график, а также $M(X)$,$D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение: Так как сумма вероятностей возможных значений случайной величины X равна 1, то

$P_2=1-(0,1+0,3+0,2+0,3)=0,1$

Найдем функцию распределения $F(x)=P(X < x)$.

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Если $x \le -1$, то $F(x)=0$, так как на промежутке $(-\infty; x)$ нет ни одного значения данной случайной величины;

Если $-1< x \le 0$, то $F(x) = P(X = -1) = 0,1$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадает только одно значение $x_1 = -1$;

Если $0 < x \leq 1$, то $F(x) = P(X = -1) + P(X = 0) = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают два значения $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$;

Если $1 < x \leq 2$, то $F(x)=P(X = -1) + P(X = 0)+ P(X = 1)= 0{,}1+0{,}1+0{,}3=0{,}5$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают три значения $x_1=-1$, $x_2=0$ и $x_3=1$;

Если $2 < x \leq 3$, то $F(x) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = =0{,}1+0{,}1+0{,}3+0{,}2=0{,}7$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают четыре значения $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$;

Если $x > 3$, то $F(x)=P(X = -1)+P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3) = =0{,}1+0{,}1+0{,}3+0{,}2+0{,}3=1$, так как в промежуток $(-\infty; x)$ попадают пять значений $x_1= -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$ и $x_5 = 3$.

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq -1, \\ 0{,}1 \text{ при } - -1 < x \leq 0, \\ 0{,}2 \text{ при } 0 < x \leq 1, \\ 0{,}5 \text{ при } 1 < x \leq 2, \\ 0{,}7 \text{ при } 2 < x \leq 3, \\ 1 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Изобразим функцию $F(x)$ графически (рис. 2.3):

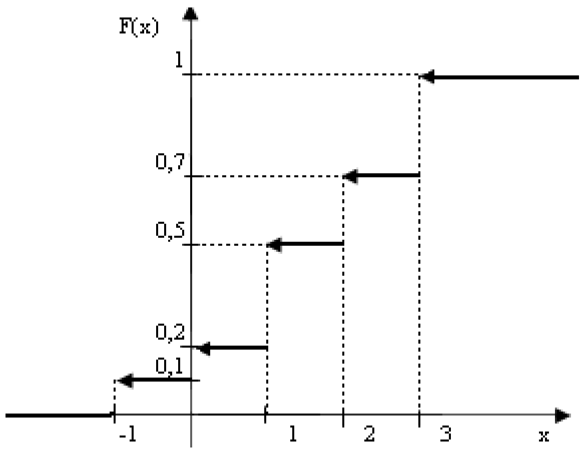


Рис. 2.3

Найдем числовые характеристики случайной величины:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}5$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k-\left(M(X^2)\right)=x_1^2p_1+x_2^2p_2\ldots+\ x_n^2p_n-\left(M(X^2)\right)$$

$$D(X)=(-1)^2\cdot 0{,}1+0^2\cdot 0{,}1+1^2\cdot 0{,}3+2^2\cdot 0{,}2+3^2\cdot 0{,}3-(1{,}5)^2=$$
$$=1{,}65$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1{,}65}\approx 1{,}2845.$$

Некоторые законы распределения дискретной случайной величины

Определение 8. *Биномиальным* называется закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений события A в n независимых повторных испытаниях, в каждом из которых события A может наступить с вероятностью p или не наступить с вероятностью q=1$-p$. Тогда $P(X=m)$ – вероятность появления события A ровно m раз в n испытаниях вычисляется по формуле Бернулли:

$$P(X=m)=C^m{}_n\, p^m q^{n-m}.$$

Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по *биномиальному закону*, находят, соответственно, по формулам:

$$M(X)=np,$$
$$D(X)=npq,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

Если число испытаний n очень велико, а вероятность появления события A в каждом испытании очень мала ($p\le 0{,}1$), то для вычисления $P(X=m)$ используют формулу Пуассона:

$$P(\mathrm{X}=m)=P_n(m)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^m}{m!},$$

где $\lambda=np$.

Тогда говорят, что случайная величина X распределена *по закону Пуассона.*

Так как вероятность p события A в каждом испытании мала, то *закон распределения Пуассона* называется законом редких явлений.

Задача 4.3. Составить закон распределения случайной величины X –числа выпадений пятерки при трех бросаниях игральной кости. Вычислить $M(X)$,$D(X)$, $\sigma(X)$ этой величины.

Решение: Испытание состоит в одном бросании игральной кости. Так как кость бросается 3 раза, то число испытаний n = 3.

Вероятность события A – "выпадение пятёрки" в каждом испытании одна и та же и равна 1/6, т.е. $P(A) = p = 1/6$, тогда $P(\bar{A})=1-p = q = 5/6$,
где $\bar{A}$ – "выпадения не пятёрки".

Случайная величина X может принимать значения: 0;1;2;3.

Вероятность каждого из возможных значений X найдём по формуле Бернулли:

$P(X=0)=P_3(0)=C^0_3p^0q^3=1\cdot(1/6)^0\cdot(5/6)^3=125/216$;

$P(X=1)=P_3(1)=C^1_3p^1q^2=3\cdot(1/6)^1\cdot(5/6)^2=75/216$;

$P(X=2)=P_3(2)=C^2_3p^2q =3\cdot(1/6)^2\cdot(5/6)^1=15/216$;

$P(X=3)=P_3(3)=C^3_3p^3q^0=1\cdot(1/6)^3\cdot(5/6)^0=1/216$.

Таким образом закон распределения случайной величины X имеет вид:

x	0	1	2	3
p	125/216	75/216	15/216	1/216

Контроль: 125/216+75/216+15/216+1/216=1.

Найдем числовые характеристики случайной величины X:

$M(X) = np = 3 \cdot (1/6) = 1/2$,

$D(X) = npq = 3 \cdot (1/6) \cdot (5/6) = 5/12$,

$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{5/12} = \sqrt{15}/6$.

Задача 4.4. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной равна 0,002. Найти вероятность того, что среди 1000 отобранных деталей окажется:

а) 5 бракованных;

б) хотя бы одна бракованная.

Решение: Число n = 1000 велико, вероятность изготовления бракованной детали p = 0,002 мала, и рассматриваемые события (деталь окажется бракованной) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона:

$$P_n(m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!}$$

Найдем $\lambda=np=1000\cdot0{,}002=2$.

а) Найдем вероятность того, что будет 5 бракованных деталей среди отобранных (m = 5):

$$\mathrm{P}_{1000}(5) = \frac{e^{-2}\cdot 2^5}{5!} = \frac{32 \cdot 0{,}13534}{120} = 0{,}0361.$$

б) Найдем вероятность того, что будет хотя бы одна бракованная деталь среди отобранных.

Событие A – "хотя бы одна из отобранных деталей бракованная" является противоположным событию $\bar{A}$ – "все отобранные детали не бракованные". Следовательно, $P(A)=1-P(\bar{A})$. Отсюда искомая вероятность равна: $P(A)=1-P_{1000}(0)=1-\frac{e^{-2}\cdot 2^{0}}{0!}=1-e^{-2}=1-0{,}13534\approx 0{,}865$

2.2. Непрерывная случайная величина

Понятие непрерывной случайной величины. Функция распределения непрерывной случайной величины

Определение 1. *Непрерывной* называют величину, все возможные значения которой полностью заполняют конечный или бесконечный промежуток числовой оси.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Непрерывную случайную величину можно задавать с помощью функции распределения.

Определение 2. Ф*ункцией распределения* непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения $x \in R$ вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x:

$$F(x)=P(X<x), \text{ где } x \in R.$$

Функцию распределения иногда называют интегральной функцией распределения.

Свойства функции распределения

1) $0\le F(x)\le 1$.

2) У непрерывной случайной величины функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

3) Вероятность попадания случайной величины X в один из промежутков $(a;b)$, $[a;b)$, $(a;b]$, $[a;b]$, равна разности значений функции $F(x)$ в точках a и b, т.е. $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

4) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение равна 0.

5) $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

Задание непрерывной случайной величины с помощью функции распределения не является единственным.

Функция плотности распределения вероятностей

Определение 3. *Функцией плотности распределения вероятностей* $f(x)$ (или плотностью распределения) непрерывной случайной величины X называется производная от ее функции распределения, т.е.:

$$f(x)=F'(x)$$

Плотность распределения вероятностей иногда называют дифференциальной функцией распределения или дифференциальным законом распределения.

График функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ называется *кривой распределения.*

Свойства функции плотности распределения вероятностей

1) $f(x) \geq 0$, при $x \in R$.

2) $F(x)= \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x$.

Геометрически функция распределения равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения, снизу осью Ox и лежащей левее точки x (рис. 2.4).

3) $P\ (a<X<b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

Геометрически полученная вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, снизу осью Ox, слева и справа прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 2.5).

4) $\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ – условие нормировки.

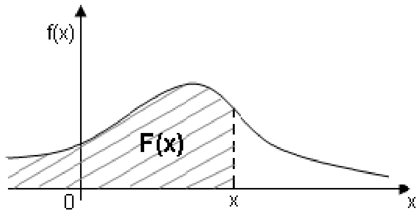


Рис. 2.4

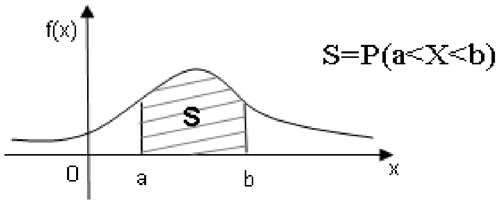


Рис. 2.5

Задачи с решениями

Задача 5.1. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 2, \\ c(x-2) \text{ при } 2 < x \le 6, \\ 0 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Найти: а) значение c; б) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; в) $P(3\le x <5)$

Решение:

а) Значение c найдем из условия нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{6} c(x-2)\mathrm{d}x + \int\limits_{6}^{+\infty} 0dx = c\int\limits_{2}^{6}(x-2)\mathrm{d}x = c\,(x^2/2-2x)\Big|_{2}^{6} =$$

$= c\,(36/2–12 – (4/2 – 4) = 8c$;

c =1/8.

б) Известно, что $F(x)= \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

Поэтому,

если $x \le 2$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

если $2 < x \le 6$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{x} \frac{1}{8}\cdot(x-2)dx =$

$= 1/8(x^2/2 - 2x)\Big|_{2}^{x} = 1/8(x^2/2–2x–(4/2–4))=1/8(x^2/2–2x+2)=1/16(x–2)^2$;

если $x > 6$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{6} 1/8(x-2)dx + \int_{6}^{x} 0dx=$

$$= 1/8\int_{2}^{6}(x-2)dx = 1/8(x^2/2-2x)\Big|_{2}^{6}=$$

$$= 1/8(36/2 - 12 - (4/2+4)) = 1/8\cdot 8 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 2, \\ (x-2)^2/16, \text{при } 2 < x \le 6, \\ 1, \text{при } x > 6. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 2.6.

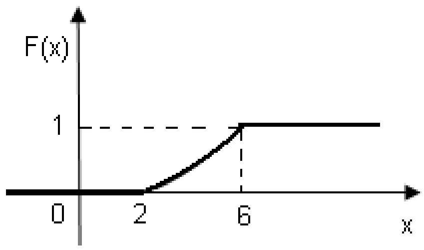


Рис. 2.6

в) $P(3 \le X < 5) = F(5) - F(3) = (5-2)^2/16 - (3-2)^2/16 = 9/16 - 1/16 =$
$=8/16=1/2$.

Задача 5.2. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ \dfrac{3 \cdot arctg\, x}{\pi} \text{ при } 0 < x \le \sqrt{3}, \\ 1 \text{ при } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Найти дифференциальную функцию распределения $f(x)$.

Решение: Так как $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{при } x \le 0 \\ \dfrac{3}{\pi \cdot (1+x^2)} \text{ при } 0 < x \le \sqrt{3}, \\ 0 \text{ при } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Понятия математического ожидания $M(X)$ и дисперсии $D(X)$, введенные ранее для дискретной случайной величины, можно распространить на непрерывные случайные величины.

•***Математическое ожидание*** $\boldsymbol{M(X)}$ непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx,$$

при условии, что этот интеграл сходится.

•***Дисперсия D*(*X*)** непрерывной случайной величины *X* определяется равенством:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x)dx \text{ или}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2.$$

•***Среднее квадратическое отклонение* σ(*X*)** непрерывной случайной величины определяется равенством:

$$\sigma\,(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии, рассмотренные ранее для дискретных случайных величин, справедливы и для непрерывных.

Задача 5.3. Случайная величина *X* задана дифференциальной функцией *f*(*x*):

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0, \\ x/3 \text{ при } 0 < x \le 2, \\ 1/3 \text{ при } 2 < x \le 3 \\ 0 \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, а также $P(1 < x < 5)$.

Решение:

$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_0^2 x \cdot x/3dx + \int_2^3 x/3dx +$
$+ \int_3^{+\infty} 0 \cdot x \cdot dx = 1/3\int_0^2 x^2dx + 1/3\int_2^3 xdx =$
$= x^3/9\,\Big|_0^2 + x^2/6\,\Big|_2^3 = 8/9 - 0 + 9/6 - 4/6 = 31/18,$

$D(X) = \int_{-\infty}^{x} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{3} \cdot dx + \int_2^3 \frac{x^2}{3}dx -$
$- \left(\frac{31}{18}\right)^2 = x^4/12\,\Big|_0^2 + x^3/9\,\Big|_2^3 - \left(\frac{31}{18}\right)^2 = \frac{16}{12} - 0 + \frac{27}{9} - \frac{8}{9} - \left(\frac{31}{18}\right)^2 = =$
$31/9 - \left(\frac{31}{18}\right)^2 = 31/9(1 - 31/36) = 155/324,$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{155/324} = \sqrt{155}/18.$

$$P(1< x < 5)=\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 \frac{xdx}{3} + \int_2^3 \frac{1dx}{3} + \int_3^5 0dx =$$
$$= x^2/6 \left|_1^2 + 1/3x \right|_2^3 = 4/6 - 1/6 + 1 - 2/3 = 5/6.$$

2.3. Некоторые законы распределения непрерывной случайной величины

Равномерный закон распределения

Определение 1. Непрерывная случайная величина *X* имеет равномерный закон распределения на некотором интервале $(a;b)$, которому принадлежат все возможные значения *X*, если плотность распределения вероятностей *f*(*x*) постоянная на этом интервале и равна 0 вне его, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \frac{1}{b-a} \text{ при } a < x \le b, \\ 0 \text{ при } x \ge b. \end{cases}$$

График функции *f*(*x*) изображен на рис. 2.7.

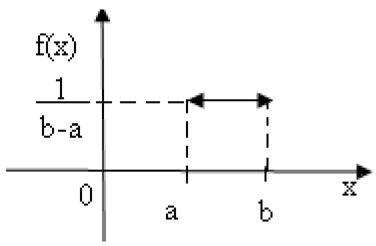


Рис. 2.7

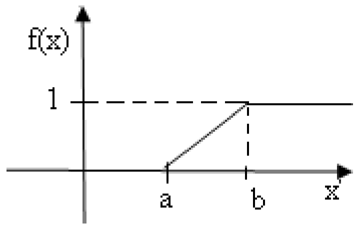


Рис. 2.8

Функция распределения случайной величины *X*, распределенной по равномерному закону, задается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ при } a < x \le b, \\ 1 \text{ при } x > b. \end{cases}$$

Ее график изображен на рис. 2.8.

Числовые характеристики случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(a;b)$, вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{a+b}{2},\ D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Задачи с решениями

Задача 6.1. Случайная величина *X* равномерно распределена на отрезке [3;7]. Найти:

а) плотность распределения вероятностей *f*(*x*) и построить ее график;

б) функцию распределения *F*(*x*) и построить ее график;

в) *M*(*X*), *D*(*X*), σ(*X*).

Решение: Воспользовавшись формулами, рассмотренными выше, при $a = 3$, $b = 7$, находим:

а) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 3, \\ \frac{1}{4} \text{ при } 3 \leq x \leq 7, \\ 0 \text{ при } x > 7. \end{cases}$

Построим ее график (рис. 2.9):

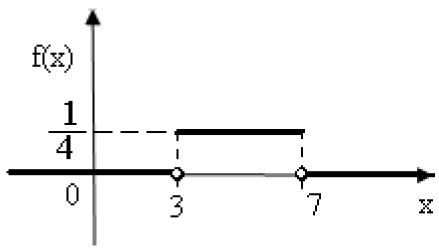


Рис. 2.9

б) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 3, \\ \frac{x-3}{4} \text{ при } 3 < x \leq 7, \\ 1 \text{ при } x > 7. \end{cases}$

Построим ее график (рис. 2.10):

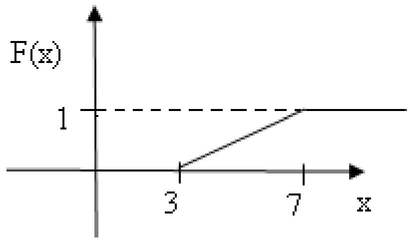


Рис. 2.10

в) $M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(7-3)^2}{12} = \frac{4}{3}, \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Определение 2. Непрерывная случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный) закон распределения* с параметром $\lambda > 0$, если функция плотности распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону, задается формулой:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$$

Кривая распределения $f(x)$ и график функции распределения $F(x)$ случайной величины X приведены на рис. 2.11 и рис. 2.12.

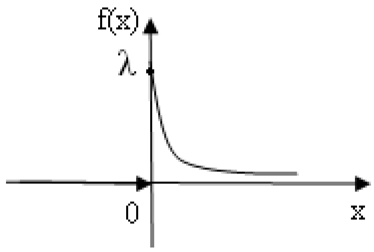


Рис. 2.11

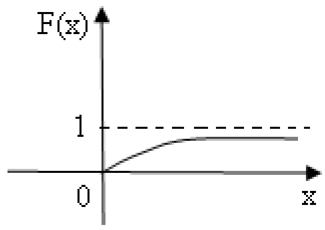


Рис. 2.12

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение показательного распределения соответственно равны:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},\ D(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения равны между собой.

Вероятность попадания X в интервал $(a;b)$ вычисляется по формуле:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, \text{ если } (a;b) \in [0; +\infty)$$

Задача 6.2. Среднее время безотказной работы прибора равно 100 ч. Полагая, что время безотказной работы прибора имеет показательный закон распределения, найти:

а) плотность распределения вероятностей;

б) функцию распределения;

в) вероятность того, что время безотказной работы прибора превысит 120 ч.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 100$, откуда $\lambda = 1/100 = 0{,}01$.

Следовательно,

а) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 0{,}01\mathrm{e}^{-0{,}01\mathrm{x}} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-0{,}01\mathrm{x}} \text{ при } x \geq 0. \end{cases}$

в) Искомую вероятность найдем, используя функцию распределения:

$$P(X > 120) = 1 - F(120) = 1 - (1 - e^{-1{,}2}) = e^{-1{,}2} \approx 0{,}3.$$

Нормальный закон распределения

Определение 3. Непрерывная случайная величина X имеет *нормальный закон распределения (закон Гаусса),* если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

где $m = M(X)$, $\sigma^2 = D(X)$, $\sigma > 0$.

Кривую нормального закона распределения называют *нормальной или гауссовой кривой* (рис. 2.13).

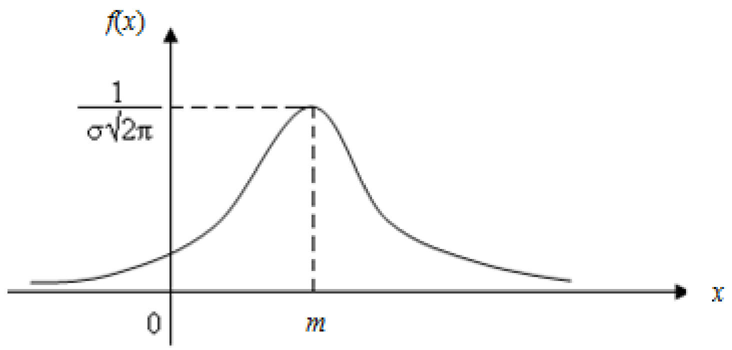


Рис. 2.13

Нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = m$, имеет максимум в точке $x = m$, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Функция распределения случайной величины X, распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ по формуле:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$ – функция Лапласа.

Замечание. Функция $\Phi(x)$ является нечетной ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$), кроме того, при $x > 5$ можно считать $\Phi(x) \approx 1/2$.

Таблица значений функции $\Phi(x)$ приведена в прил. (табл. П 2.2).

График функции распределения $F(x)$ изображен на рис. 2.14.

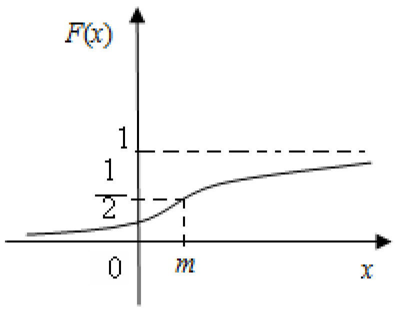


Рис. 2.14

Вероятность того, что случайная величина X примет значения, принадлежащие интервалу $(a;b)$ вычисляются по формуле:

$$P\ (a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше положительного числа δ вычисляется по формуле:

$$P(|X-m|< \delta) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности, при m=0 справедливо равенство:

$$P(|X|< \delta) = 2\cdot\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трех сигм

Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами m и σ, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале ($m-3\sigma$; $m + 3\sigma$), так как $P(|X - m|< 3\delta)$= 0,9973.

Задача 6.3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 32 и дисперсией 16. Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (28;38).

Решение: По условию $m = 32$, $\sigma^2 = 16$, следовательно, $\sigma = 4$, тогда а) $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-32)^2}{32}}$

б) Воспользуемся формулой:

$P\ (a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi(\frac{a-m}{\sigma})$.

Подставив a = 28, b = 38, m = 32, σ = 4, получим

$P\ (28<X<38)=\Phi\left(\frac{38-32}{4}\right)-\Phi(\frac{28-32}{4})\ =\Phi(1,5)+\Phi(1)$

По таблице значений функции Ф(x) находим Ф(1,5) = 0,4332, Ф(1) = 0,3413.

Итак, искомая вероятность:

P(28<X<38)= 0,4332+0,3413=0,7745.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

3.1. Статистическое распределение выборки

Задачи математической статистики

Математическая статистика разрабатывает методы планирования и анализы эксперимента.

К типичным задачам математической статистики относятся:

- задача определения закона распределения случайной величины по статистическим данным;
- задача нахождения неизвестных параметров распределения случайной величины;
- задача проверки правдоподобия выдвигаемых по статистическим данным гипотез о законе распределения случайной величины, о её параметрах.

Генеральная и выборочная совокупности

Определение 1. *Выборочной совокупностью* (или *выборкой*) называется совокупность случайно отобранных объектов.

Определение 2. Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка.

Определение 3. Объемом совокупности (генеральной или выборочной) называется число объектов этой совокупности.

Определение 4. Выборка называется представительной (или репрезентативной), если она осуществлена случайным образом, когда все объекты генеральной совокупности имели равные вероятности попасть в выборку.

Определение 5. Статистическим рядом, соответствующим полученной случайной выборке, называется набор значений (вариант) качественного или количественного признака объектов выборки, которые располагают в порядке возрастания.

Определение 6. Интервальным статистическим рядом, соответствующим полученной случайной выборке, называется упорядоченная последовательность интервалов $[a_i; a_{i+1})$, $i = 1,2,\ldots$ с указанием количества m_i значений x_i, попавших в них (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Интервальный статистический ряд

№	$[a_i; a_{i+1})$	m_i
1	$[a_1; a_2)$	m_1
2	$[a_2; a_3)$	m_2
…	… … …	…
k	$[a_k; a_{k+1}]$	m_k

Причем, если n – объем выборки, то $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$. Интервалы $[a_1; a_2)$, $[a_2; a_3)$, …, $[a_k; a_{k+1}]$ имеют не обязательно равные длины. Число k не должно быть большим, но и не малым. Обычно берут $7 \le k \le 20$.

Замечание 1. Иногда для упрощения исследования интервальный статистический ряд заменяют дискретным рядом, где в качестве значений исследуемого признака берут середины или одну из границ соответствующих интервалов.

Статистическое распределение выборки. Полигон и гистограмма

Определение 7. Статистической функцией распределения (или функцией распределения выборки) называется функция $\tilde{F}(x)$, задающая для каждого значения x статистического ряда относительную частоту события $X < x$,

$$\text{т.е. } \tilde{F}(x)= \frac{m_x}{n},$$

где n – объем выборки; m_x – число выборочных значений, меньших x.

Свойства функции $\tilde{F}(x)$

1. $0 \le \tilde{F}(x) \le 1$;
2. $\tilde{F}(x)$ – неубывающая функция;
3. $\tilde{F}(-\infty) = 0$, $\tilde{F}(+\infty)=1$.

Замечание 2. В дальнейшем интегральную функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности X будем называть *теоретической,* а функцию $\tilde{F}(x)$ – *эмпирической* функцией распределения. Отличие между ними состоит в том, что $F(x)$ – вероятность события $X < x$, а $\tilde{F}(x)$ – его суммарная относительная частота в n опытах. Однако функции $\tilde{F}(x)$ и $F(x)$ обладают одинаковыми свойствами.

Определение 8. *Полигоном* (или *многоугольником*) статистического распределения называется ломаная линия на плоскости *Oxy*, соединяющая точки $(x_i;\ m_i / n)$, $i = 1, \ldots k$, где n – объем выборки; x_i – значения статистического ряда; m_i – число значений x_i в этом ряде (рис. 3.1).

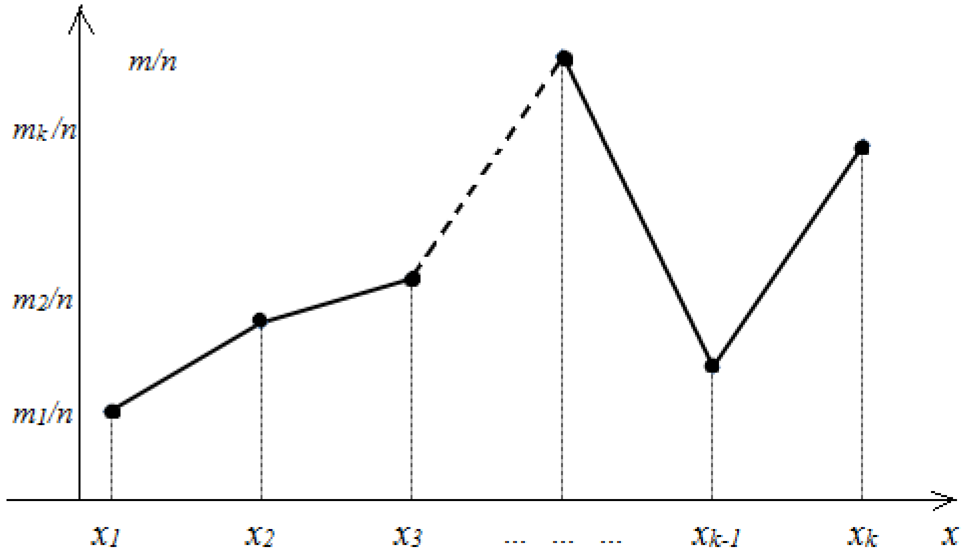


Рис. 3.1

Определение 9. *Гистограммой* интервального статистического ряда называется ступенчатая фигура, построенная по правилу: на плоскости *Oxy* на отрезках, изображающих интервалы статистического ряда, как на основаниях, строят прямоугольники с высотами, равными относительным частотам соответствующих интервалов (рис. 3.2).

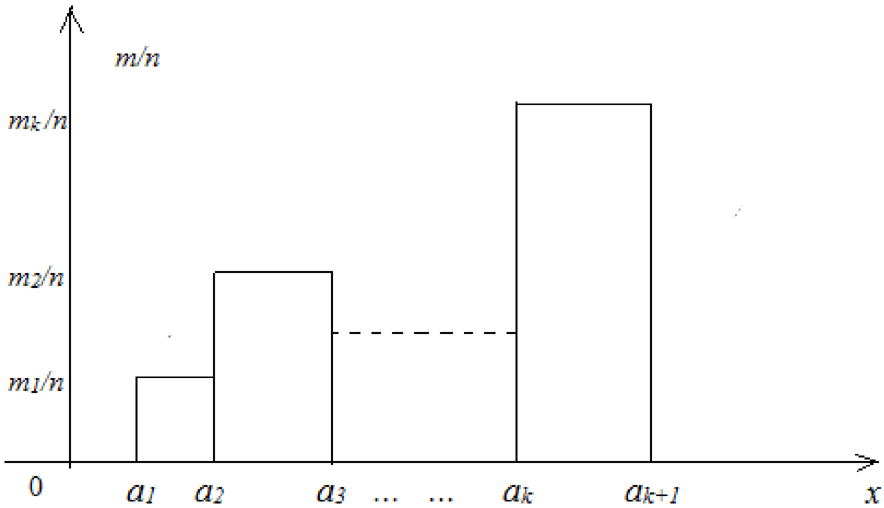


Рис. 3.2

Замечание 3. Полигон и гистограмма являются графическими приближениями дифференциальной функции распределения исследуемой случайной величины.

Задачи с решениями

Задача 7.1. В результате эксперимента получены следующие значения случайной величины X:

$$3;\ 6;\ 8;\ 11;\ 6;\ 10;\ 7;\ 9;\ 7;\ 3;\ 4;\ 8;$$
$$7;\ 9;\ 4;\ 9;\ 11;\ 7;\ 8;\ 4;\ 10;\ 5;\ 6;\ 7;\ 2.$$

Требуется: а) составить статистический ряд;

б) построить статистическое распределение;

в) изобразить полигон распределения.

Решение. а) Объем выборки $n = 25$.

Построим статистический ряд данной выборки: в первой строке таблицы укажем все различные значения, принимаемые случайной величиной X; во второй строке укажем, сколько раз она приняла эти значения (табл. 3.2).

Таблица 3.2

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
m_i	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

б) Найдем статистическое распределение случайной величины X, для чего в табл. 3.2 заменим вторую строку строкой, содержащей относительные частоты $\frac{m_i}{n}$ (табл. 3.3).

Таблица 3.3

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{m_i}{n}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

Контроль:

$$\frac{1}{25}+\frac{2}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{1}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{25}+\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=1.$$

в) На плоскости Oxy построим точки:

$$\left(2;\ \frac{1}{25}\right),\left(3;\ \frac{2}{25}\right),\left(4;\ \frac{3}{25}\right),\left(5;\ \frac{1}{25}\right),\left(6;\ \frac{3}{25}\right),\left(7;\ \frac{1}{5}\right),$$
$$\left(8;\ \frac{3}{25}\right),\left(9;\ \frac{3}{25}\right),\left(10;\ \frac{2}{25}\right),\left(11;\ \frac{2}{25}\right).$$

Соединим их (рис. 3.3). Полученная ломаная – полигон данного распределения.

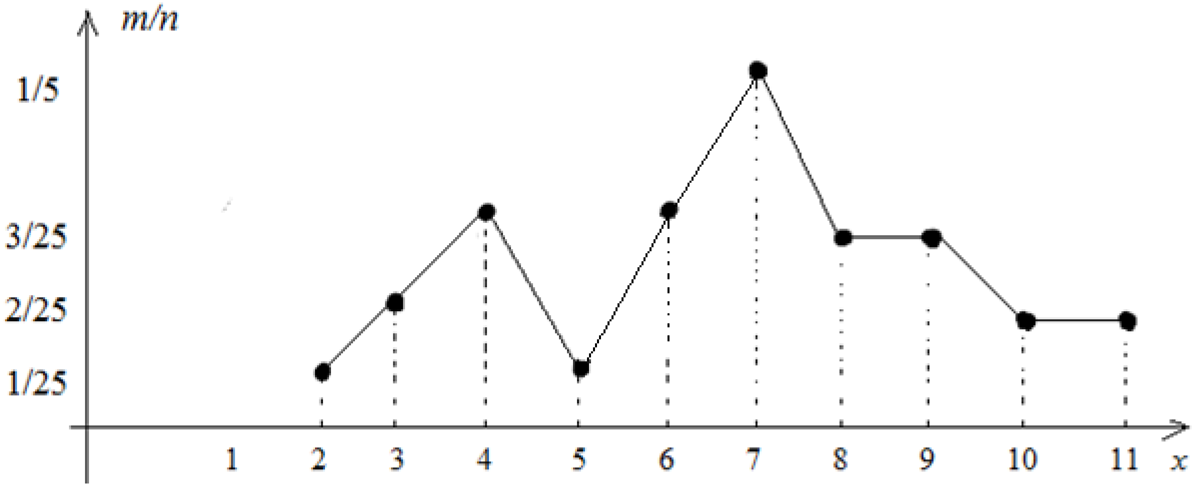


Рис. 3.3

Ответ: а) табл. 3.2, б) табл. 3.3, в) рис. 3.3.

Задача 7.2. В результате эксперимента получены следующие значения случайной величины X:

16; 17; 9; 13; 21; 11; 7; 7; 19; 5; 17; 5; 20;

18; 11; 4; 6; 22; 21; 15; 15; 23; 19; 25; 1.

Требуется: а) построить интервальный статистический ряд, разбив промежуток [0; 25] на 5 промежутков равной длины;

б) построить гистограмму относительных частот.

Решение. а) Объем выборки $n = 25$. По экспериментальным данным составим таблицу (табл. 3.4). В её первой строке укажем промежутки разбиения:

$$[0; 5), [5; 10), [10; 15), [15; 20) [20; 25].$$

Во второй строке укажем соответствующие числа m_i – сколько раз случайная величина X приняла значение из этого промежутка.

Таблица 3.4

$[a_i; a_{i+1})$	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]
m_i	2	6	3	8	6

Контроль: $2 + 6 + 3 + 8 + 6 = 25$.

По табл. 3.4 составим интервальный статистический ряд, где во второй строке указаны относительные частоты (табл. 3.5).

Таблица 3.5

$[a_i; a_{i+1})$	[0; 5)	[5; 10)	[10; 15)	[15; 20)	[20; 25]
$\frac{m_i}{n}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$

б) На оси *Ох* отложим промежутки:

[0; 5), [5; 10), [10; 15), [15; 20) [20; 25]

интервального статистического ряда, а на оси *Оу* – относительные частоты. Построив по этим данным прямоугольники с основаниями $[a_i; a_{i+1})$ и высотами $\frac{m_i}{n}$, получим ступенчатую фигуру – гистограмму (рис. 3.4).

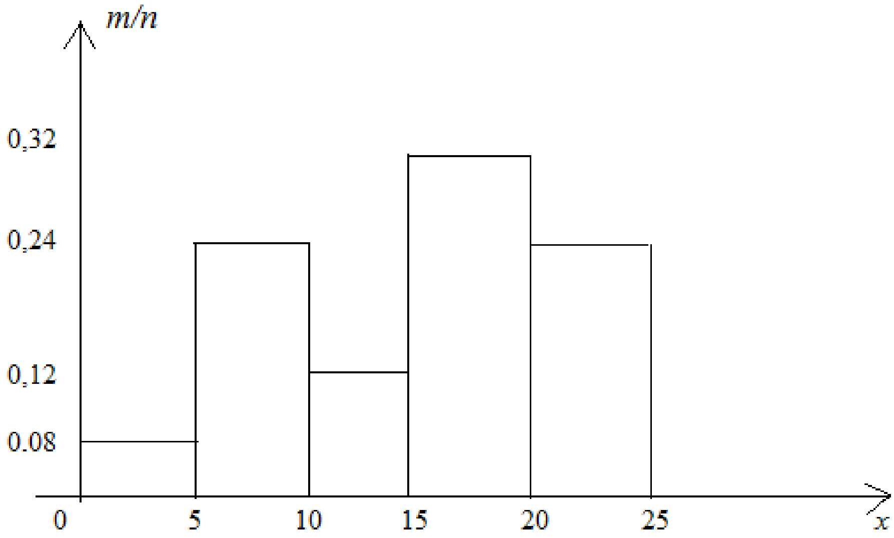


Рис. 3.4

Ответ: а) табл. 3.4; б) рис. 3.5.

Задача 7.3. Дан статистический ряд

x_i	15	16	17	18
$\frac{m_i}{n}$	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти статистическую функцию распределения и построить её график.

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\tilde{F}(x)=\frac{m_x}{n},$$

где n – объем выборки; m_x – число выборочных значений, меньших x, вычисляем:

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \leq 15, \\ 0{,}4 \text{ } при \text{ } 15 < x \leq 16, \\ 0{,}5 \text{ } при \text{ } 16 < x \leq 17, \\ 0{,}8 \text{ } при \text{ } 17 < x \leq 18, \\ 1 \text{ } при \text{ } x \geq 18. \end{cases} \qquad (1)$$

Построим график функции $\tilde{F}(x)$.

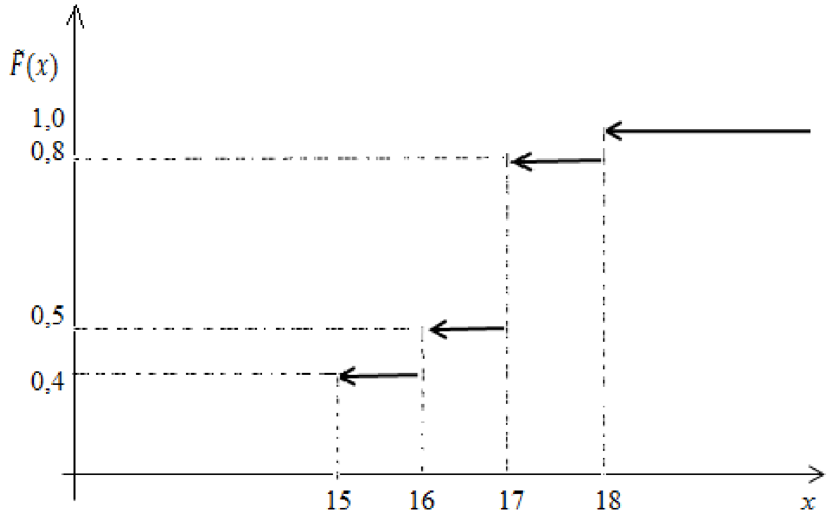


Рис. 3.5

Ответ: а) формула (1); б) рис. 3.5.

3.2. Статистические оценки параметров

Точечные статистические оценки параметров распределения

Пусть собранный и обработанный статистический материал представлен в виде статистического ряда.

Определение 1. Точечной статистической оценкой параметра a распределения случайной величины называется приближенное значение a^* этого параметра, вычисленного по статистическим данным.

Замечание 1. Любая точечная статистическая оценка некоторого параметра, вычисляемая на основе статистического ряда, должна удовлетворять трём требованиям:

- при увеличении числа испытаний она должна сходиться по вероятности к оцениваемому параметру (свойство *состоятельности*);

• математическое ожидание статистической оценки (как случайной величины при изменении числа испытаний) равно оцениваемому параметру (свойство *несмещенности*);

• при заданном объёме выборки статистическая оценка имеет наименьшую дисперсию (свойство *эффективности*).

Определение 2. *Статистической оценкой математического ожидания* называется среднее арифметическое статистических значений изучаемой случайной величины:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i m_i ,$$

где $m_1+m_2+\ldots+m_k = n$.

Замечание 2. Эта оценка математического ожидания обладает всеми свойствами оценок: состоятельности, несмещенности, эффективности.

Определение 3. Смещенной оценкой дисперсии $D(x)$ называется выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2$$

Замечание 3. Эта оценка является смещенной, так как

$$M(D_в) = \frac{n-1}{n} D(x).$$

Определение 4. Несмещенной оценкой дисперсии $D(x)$ называется исправленная выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} D_в = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2$$

Замечание 4. При расчёте s^2 можно воспользоваться более удобной формулой:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right)$$

Замечание 5. Выборочная дисперсия $D_в$ и исправленная выборочная дисперсия s^2 обладают свойством состоятельности. Оценка s^2 не обладает свойством эффективности, но обладает свойством несмещенности, поэтому ее чаще чем $D_в$ используют в качестве приближенного значения дисперсии $D(x)$.

Определение 5. *Оценкой среднего квадратического отклонения* $\sigma(x)$ называется квадратный корень из $D_в$ или s^2:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \text{ или } s = \sqrt{s^2}$$

Определение 6. Оценкой вероятности события A в n независимых испытаниях является относительная частота события A:

$$P^* = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события A в n испытаниях.

Замечание 6. Эта оценка вероятности события A в n независимых испытаниях обладает свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности.

Замечание 7. Если выборка состоит из вариант x_i громоздкого вида, то для упрощения расчета выборочных точечных оценок параметров следует перейти к *условным вариантам:*

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},$$

где h – шаг между равноотстоящими вариантами; c – так называемый «ложный» нуль. Для них произвести расчет точечных оценок параметров:

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i m_i, \quad D_в(u) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (u_i - \bar{u})^2, \quad s_u^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в(u).$$

Затем вычислить искомые точечные оценки:

$\bar{x} = \bar{u} \cdot h + c, \quad D_в(x) = h^2 \cdot D_в(u), \quad s_x^2 = h^2 \cdot s_u^2.$

В качестве числа c обычно выбирают варианту x_{i0}, которая расположена в середине статистического ряда или имеет наибольшую частоту.

Интервальные оценки параметров нормального распределения

Для выборок небольшого объема вопрос точности оценок решается с помощью интервальных оценок.

При этом по вычисленной точечной оценке a^* параметра a при заданной вероятности γ, называемой *доверительной вероятностью*, а также по некоторому числу ε, зависящему от γ и a^*, строят интервал для истинного параметра a :

$$a^* - \varepsilon < a < a^* + \varepsilon,$$

чтобы выполнялось равенство:

$$P\,(a^* - \varepsilon < a < a^* + \varepsilon) = \gamma.$$

Число ε называется *точностью* оценки a^*, границы интервала $a^* - \varepsilon$ и $a^* + \varepsilon$ называются *доверительными границами*, интервал

($a^*-\varepsilon$ и $a^*+\varepsilon$) – доверительным интервалом, вероятность γ – *доверительной вероятностью* или *надежностью* интервальной оценки.

Определение 7. *Интервальной оценкой математического ожидания* m нормального распределения *при известной* дисперсии σ^2 называется интервал

$$(\bar{x}-\varepsilon;\ \bar{x}+\varepsilon),\ \varepsilon = z_\gamma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяющий равенству:

$$P(\bar{x}-\varepsilon < m < \bar{x}+\varepsilon) = \gamma,$$

где γ – заданная доверительная вероятность; m – истинное математическое ожидание; $\bar{x}$ – точечная оценка математического ожидания; n – объем выборки; число z_γ находится из уравнения Ф (z_γ) = $\frac{\gamma}{2}$ с помощью табл. П 2.2 функции Лапласа Ф (x), см. приложение 2.

Следовательно, интервальная оценка математического ожидания находится по формуле:

$$\bar{x}-z_\gamma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x}+z_\gamma\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Определение 8. *Интервальной оценкой математического ожидания* m нормального распределения *при неизвестной* дисперсии называется интервал

$$(\bar{x}-\varepsilon;\ \bar{x}+\varepsilon),\ \varepsilon = t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}},$$

удовлетворяющий равенству:

$$P(\bar{x}-\varepsilon < m < \bar{x}+\varepsilon) = \gamma,$$

где γ – заданная доверительная вероятность; m – истинное математическое ожидание; $\bar{x}$ – точечная оценка математического ожидания; s^2 – точечная оценка дисперсии; n – объем выборки; число t_γ вычисляется из уравнения

$$\int_0^{t\gamma} S\,(t;n)dt = \frac{\gamma}{2},$$

с помощью табл. П 2.3 распределения Стьюдента (см. приложение 2). Следовательно, интервальная оценка математического ожидания с доверительной вероятностью γ вычисляется по формуле:

$$\bar{x}-t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x}+t_\gamma\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Определение 9. *Интервальной оценкой среднего квадратического отклонения* σ нормального распределения называется интервал

$$(s-\varepsilon;\ s+\varepsilon),\ \varepsilon = q_\gamma\cdot s,$$

удовлетворяющий равенству:

$$P(s-\varepsilon < \sigma < s+\varepsilon) = \gamma,$$

где γ – заданная доверительная вероятность; s^2 – исправленная выборочная дисперсия; n – объем выборки; число q_γ определяется из табл. П 2.4 (см. прил. 2).

Следовательно, интервальная оценка среднего квадратического отклонения находится по формулам:

$$s\,(1 - q_\gamma) < \sigma < s\,(1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma < 1,$$

$$0 < \sigma < s\,(1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma > 1.$$

Задачи с решениями

Задача 8.1. По данным эксперимента построен статистический ряд:

x_i	11	12	13	14
m_i	20	5	15	10

Найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины X.

Решение. 1) Число экспериментальных данных вычисляется по формуле:

$$n = \sum_{i=1}^{k} m_i = 20 + 5 + 15 + 10 = 50.$$

Значит, объем выборки $n = 50$.

2) Вычислим среднее арифметическое значение эксперимента:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i =$$

$$= \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot m_i = \frac{1}{50}(11\cdot20 + 12\cdot5 + 13\cdot15 + 14\cdot10) = \frac{615}{50} = 12{,}3.$$

Значит, найдена оценка математического ожидания $\bar{x} = 12{,}3$.

3) Вычислим исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i =$$

$$= \frac{1}{49}\left(20(11–12{,}3)^2 + 5(12–12{,}3)^2 + 15(13–12{,}3)^2 + 10(14–12{,}3)^2\right) = \frac{1}{49} \cdot$$
$$(1{,}69\cdot20+ +0{,}09\cdot5 + 0{,}49\cdot15 + 2{,}89\cdot10) = \frac{1}{49}\cdot70{,}5 = 1{,}44.$$

Значит, найдена оценка дисперсии: $s^2 = 1{,}44$.

1) Вычислим оценку среднего квадратического отклонения:

$$s = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2.$$

Ответ: $\bar{x} = 12{,}3$, $s^2 = 1{,}44$, $s = 1{,}2$.

Задача 8.2. По данным эксперимента построен статистический ряд:

x_i	5,2	7,2	9,2	11,2	13,2	15,2
m_i	7	12	25	10	5	1

Найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины X.

Решение. По формуле

$$u_i = \frac{x_i - 9{,}2}{2}$$

перейдем к условным вариантам:

u_i	– 2	– 1	0	1	2	3
m_i	7	12	25	10	5	1

Для них произведем расчет точечных оценок параметров:

$$\bar{u} = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{6} u_i m_i = -0{,}05,$$

$$D_в(u) = \frac{1}{60}\sum_{i=1}^{6} m_i(u_i + 0{,}05)^2 = 1{,}3143,$$

$$s_u^2 = \frac{60}{59}\cdot D_в(u) = 1{,}339.$$

Следовательно, вычисляем искомые точечные оценки:

$\bar{x} = 2\bar{u} + 9{,}2 = 9{,}1,$

$D_в(x) = 2^2 \cdot D_в(u) = 5{,}26,$

$s_x^2 = 2^2 \cdot s_u^2 = 5{,}36.$

Ответ: $\bar{x} = 9{,}1$, $D_в(x) = 5{,}26$, $s_x^2 = 5{,}36$.

Задача 8.3. По данным эксперимента построен интервальный статистический ряд:

$[a_i; a_{i+1})$	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
m_i	3	4	10	5	3

Найти оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Решение. 1) От интервального ряда перейдем к статистическому ряду, заменив интервалы их серединами $x_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$:

x_i	1	3	5	7	9
m_i	3	4	10	5	3

2) Объем выборки вычислим по формуле:

$N = \sum_{i=1}^{5} m_i$ = 3 + 4 + 10 + 5 + 3 = 25.

3) Вычислим среднее арифметическое значений эксперимента:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{1}{25}(1\cdot3 + 3\cdot4 + 5\cdot10 + 7\cdot5 + 9\cdot3) = \frac{1}{25}(3 + 12 + 50 + 35 + 27) =$

$= \frac{1}{25}\cdot 127 = 5{,}08.$

3) Вычислим исправленную выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i =$$

$= \frac{1}{24}((1–5{,}08)^2 \cdot 3 + (3–5{,}08)^2\cdot 4 + (5–5{,}08)^2\cdot 10 + (7–5{,}08)^2 \cdot 5 + (9–5{,}08)^2 \cdot 3)=$

$$= \frac{1}{24}\cdot 131{,}87 \approx 5{,}49.$$

Можно было воспользоваться следующей формулой:

$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i^2 - n\cdot\bar{x}^2\right) = \frac{1}{24}(1\cdot3 + 3^2\cdot4 + 5^2\cdot10 + 7^2\cdot5 + 9^2\cdot3 -$

$- 25\cdot(5{,}08)^2) = \frac{1}{24}(777 - 645{,}16) = \frac{1}{24}\cdot 131{,}84 \approx 5{,}49.$

5) Вычислим оценку среднего квадратического отклонения:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{5{,}49} \approx 2{,}34.$$

Ответ: $\bar{x}$ = 5,08, s^2 = 5,49, s = 2,34.

Задача 8.4. Найти доверительный интервал с надежностью 0,95 для оценки математического ожидания $M(X)$ нормально распределенной случайной величины X, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$, оценка математического ожидания $\bar{x}$ =10, объем выборки $n = 25$.

Решение. Доверительный интервал для истинного математического ожидания с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ при известной дисперсии σ находится по формуле:

$$\bar{x} - z_\gamma\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $m = M(X)$ – истинное математическое ожидание; $\bar{x}$ – оценка $M(X)$ по выборке; n – объем выборки; z_γ – находится по доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ из равенства:

$$\Phi(z_\gamma) = 0{,}475.$$

Из табл. П 2.2 приложения 2 находим: $z_\gamma = 1{,}96$. Следовательно, найден доверительный интервал для $M(X)$:

$10 - 1{,}96\,\frac{2}{\sqrt{25}} < m < 10 + 1{,}96\,\frac{2}{\sqrt{25}}$, т.е. $9{,}216 < m < 10{,}784$.

Ответ: (9,216; 10,784).

Задача 8.5. По данным эксперимента построен статистический ряд:

x_i	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
m_i	1	3	4	5	3	2	2

Найти доверительный интервал для математического ожидания $M(X)$ с надежностью 0,95.

Решение. Воспользуемся формулой для доверительного интервала математического ожидания при неизвестной дисперсии:

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < m < \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

где n – объем выборки; $\bar{x}$ оценка $M(X)$; s – оценка среднего квадратического отклонения; t_γ – находится по доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$ из табл. П 2.3 приложения 2.

По числам $\gamma = 0{,}95$ и $n = 20$ находим: $t_\gamma = 2{,}093$.

Теперь вычисляем оценки для $M(X)$ и $D(X)$:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{7} x_i \cdot m_i = \frac{1}{20}(-3-6-4+0+3+4+6) = \frac{1}{20}\cdot 0 = 0.$$

$$s^2 = \frac{1}{19}\left(\sum_{i=1}^{7} m_i \cdot x_i^2 - 20\cdot \bar{x}^2\right) = \frac{1}{19}(9\cdot 1 + 4\cdot 3 + 1\cdot 4 + 0 + 1\cdot 3 + 4\cdot 2 +$$

$$+ 9\cdot 2 - \frac{1}{20}\cdot 0^2) = \frac{1}{19}(9 + 12 + 4 + 3 + 8 + 18) = \frac{1}{19}\cdot 54 \approx 2{,}84.$$

Следовательно, $s \approx 1{,}685$. Поэтому искомый доверительный интервал математического ожидания задается формулой:

$$0 - 2{,}093\,\frac{1{,}685}{\sqrt{20}} < m < 0 + 2{,}093\,\frac{1{,}685}{\sqrt{20}} \Leftrightarrow -0{,}76 < m < 0{,}76.$$

Ответ: (– 0,76; 0,76).

Задача 8.6. По данным десяти независимых измерений найдена оценка квадратического отклонения $s = 0{,}5$. Найти доверительный интервал точности измерительного прибора с надежностью 99 %.

Решение. Задача сводится к нахождению доверительного интервала для истинного квадратического отклонения, так как точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения находим по формуле:

$$s\ (1 - q_\gamma) < \sigma < s\ (1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma < 1,$$
$$0 < \sigma < s\ (1 + q_\gamma), \text{ если } q_\gamma > 1,$$

где $s = 0{,}5$ – оценка среднего квадратического отклонения; q_γ – число, определяемое из табл. П 2.4 приложения 2 по заданной доверительной вероятности $\gamma = 0{,}99$ и заданному объему выборки $n = 10$.

Находим: $q_\gamma = 1{,}08 > 1$.

Тогда можно записать:

$0 < \sigma < 0{,}5\ (1 + 1{,}08) \Leftrightarrow 0 < \sigma < 1{,}04$.

Ответ: (0; 1,04).

3.3. Проверка статистических гипотез

Статистические гипотезы

Определение 1. *Статистической гипотезой* называется предположение о виде распределения, о параметрах известных распределений.

Определение 2. Выдвинутая гипотеза называется *нулевой* (или *основной*) и обозначается H_0.

Определение 3. Гипотеза, которая противоречит нулевой, называется *конкурирующей гипотезой* (или *альтернативной гипотезой*) и обозначается H_1.

Определение 4. Гипотеза называется *простой*, если она содержит только одно предположение.

Определение 5. Гипотеза называется *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа предположений.

Проверка гипотез

Определение 6. Сопоставление выдвинутой гипотезы с выборочными данными называется *проверкой гипотезы*.

Определение 7. Правосторонней *критической областью* для проверки нулевой гипотезы с уровнем значимости α называется совокупность значений критерия проверки Z, для которых выполняется равенство:

$$P\ (Z > Z_{крит}) = \alpha.$$

При этом число $Z_{крит}$ называется *границей* критической области.

Замечание 1. Различают право –, лево –, двустороннюю критические области.

Правосторонняя критическая область определяется неравенством:

$$Z > Z_{крит}.$$

Левосторонняя критическая область определяется неравенством:

$$Z < -Z_{крит}.$$

Двусторонняя критическая область определяется неравенствами:

$$Z < Z_{1\,крит} \text{ и } Z > Z_{2\,крит}.$$

Схема проверки гипотезы

а) Формирование нулевой гипотезы H_0, которая выдвигается на основе начального анализа выборочных данных, и конкурирующей гипотезы H_1;

б) Выбор некоторой вероятности α, называемой *уровнем значимости* нулевой гипотезы H_0;

в) Подбор по выборочным данным случайной величины Z, распределение которой называется *критерием для проверки нулевой гипотезы*;

г) Определение границы $Z_{крит}$ *критической области* для проверки нулевой гипотезы с уровнем значимости α;

д) Вычисление по данным выборки числа $Z_{наблюдаемое}$ (или $Z_{набл.}$). Если оно попадает в критическую область нулевой гипотезы, т.е.

$$Z_{набл} > Z_{крит},$$

то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. Если же

$$Z_{набл} < Z_{крит},$$

то нет основания отвергать нулевую гипотезу.

Замечание 2. Если гипотеза принята, то не стоит думать, что она доказана. На практике для большей уверенности принятия гипотезы ее проверяют, повторяя эксперимент, увеличив объем выборки.

Определение 8. *Ошибкой первого рода* называется решение отвергнуть нулевую гипотезу H_0 и принять конкурирующую гипотезу H_1, если на самом деле гипотеза H_0 верна.

Замечание 3. Вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости α.

Определение 9. *Ошибкой второго рода* называется решение принять нулевую гипотезу H_0, то есть отвергнуть конкурирующую гипотезу H_1, если на самом деле гипотеза H_1 верна.

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Пусть по двум независимым выборкам, объемы которых равны n_1 и n_2 соответственно, полученным из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии s_X^2 и s_Y^2. Требуется сравнить дисперсии генеральных совокупностей.

Схема сравнения D(X) и D(Y)

1) Выдвинуть нулевую гипотезу: H_0: $D(X)=D(Y)$. Тогда конкурирующей гипотезой будет $H_1 : D(X) > D(Y)$;

2) Задать число α – уровень значимости нулевой гипотезы;

3) Найти из табл. П 2.7 распределения Фишера (см. приложение 2) значение $F_{крит}$ по заданному α и числам степеней свободы

$$k_1 = n_1 - 1,\ k_2 = n_2 - 1,$$

где k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии.

4) Найти число

$$F_{набл} = \frac{S^2_{наиб}}{S^2_{наим}},$$

равное отношению большей из двух исправленных выборочных дисперсий s_X^2 и s_Y^2 к меньшей;

5) Сравнить числа $F_{крит}$ и $F_{набл}$:

- если $F_{набл} > F_{крит}$, то отвергнуть гипотезу H_0 и принять гипотезу H_1;
- если $F_{набл} < F_{крит}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Замечание 4. Если для нулевой гипотезы $H_0 : D(X)=D(Y)$ в качестве конкурирующей гипотезы выбрана H_1 $D(X)\neq D(Y)$, то строят двустороннюю критическую область. Для этого по табл. П 2.7 (см. приложение 2) вычисляют правую границу $F_{2\ крит}$ критической области по уровню значимости $\frac{\alpha}{2}$ и числам степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$. Тогда, если $F_{набл} > F_{2\ крит,}$ то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1; если $F_{набл} < F_{2\ крит}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей

Пусть генеральные совокупности $X_1,\ldots, X_l$ распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены независимые выборки объемов $n_1, n_2,\ldots, n_l$ соответственно. По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии $s_1^2,\ldots, s_l^2$. Требуется сравнить дисперсии генеральных совокупностей.

Схема сравнения $D(X_1), \ldots, D(X_l)$

1) Выдвинуть нулевую гипотезу: $D(X_1)=D(X_2)=\ldots= D(X_l)$;
2) Задать число α – уровень значимости нулевой гипотезы;
3) Найти из табл. П 2.5 распределения χ^2 (см. приложение 2) значение $\chi^2_{\text{крит}}$ по заданному α и числу степеней свободы $l-1$;
4) Найти число $B_{\text{набл}} = \dfrac{V}{C}$,

где $V = 2{,}303\cdot\left(k\cdot\lg\bar{s}^2 - \sum\limits_{i=1}^{l} k_i\cdot\lg s_i^2\right)$, $\quad C = 1 + \dfrac{1}{3(l-1)}\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{1}{k_i} - \dfrac{1}{k}\right)$,

$$k_i = n_i - 1, \quad k = \sum_{i=1}^{l} k_i, \quad \bar{s}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2;$$

5) Сравнить числа $\chi^2_{\text{крит}}$ и $B_{\text{набл}}$:

- если $B_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то отвергнуть гипотезу H_0,
- если $B_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$ то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Замечание 5. В случае принятия гипотезы H_0 в качестве оценки дисперсии генеральной совокупности за дисперсию этой генеральной совокупности принимают число $\bar{s}^2$.

Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей

Пусть даны две независимые выборки объемов n_1 и n_2 соответственно из нормально распределенных генеральных совокупностей X и Y. По выборкам найдены оценки математических ожиданий $\bar{x}$, $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии s_X^2, s_Y^2. Требуется сравнить $M(X)$ и $M(Y)$ генеральных совокупностей.

Схема сравнения M(X) и M(Y)

1) Выдвинуть нулевую гипотезу: $H_0 : M(X) = M(Y)$.

В качестве конкурирующей гипотезы рассмотреть

$$H_1 : M(X) \neq M(Y);$$

2) Задать число α – уровень значимости нулевой гипотезы;

3) Найти по табл. П 2.6 распределения Стьюдента (см. приложение 2) значение $T_{\text{крит}}$ по заданному α и числу $k = n_1 + n_2 - 2$;

4) Найти число $T_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot s_X^2 + (n_2 - 1)\cdot s_Y^2}} \cdot \sqrt{\dfrac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$;

5) Сравнить числа $T_{\text{крит}}$ и $T_{\text{набл}}$:

- если $|T_{\text{набл}}| > T_{\text{крит}}$, то отвергнуть гипотезу H_0,
- если $|T_{\text{набл}}| < T_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Замечание 6. Если необходимо проверить гипотезу H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей X и Y при условии известных дисперсий σ_X^2 и σ_Y^2, то в описанной выше схеме вместо $T_{\text{крит}}$ используют число $N_{\text{крит}}$, определяемое с помощью табл. П 2.2 (см. приложение 2) по заданному α из равенства:

$$\Phi(N_{\text{крит}}) = \frac{1 - \alpha}{2}$$

Вместо $T_{\text{набл}}$ по данным выборок вычисляют число

$$N_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_X^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_Y^2}{n_2}}}.$$

Если $|N_{\text{набл}}| < N_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Если $|N_{\text{набл}}| > N_{\text{крит}}$, то гипотезу H_0 отвергают.

Задачи с решениями

Задача 9.1. По двум независимым выборкам объемов $n_1 = 10$ и $n_2 = 15$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены оценки дисперсий: $s_X^2 = 8{,}42$, $s_Y^2 = 4{,}23$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X)>D(Y)$.

Решение. 1) По данным выборки вычисляем

$$F_{\text{набл}} = \frac{S^2_{\text{наиб}}}{S^2_{\text{наим}}} = \frac{8,42}{4,23} = 1,99.$$

2) По табл. П 2.7 (см. приложение 2), учитывая значения

$$\alpha = 0,05,\ k_1 = n_1 - 1 = 9,\ k_2 = n_2 - 1 = 14.$$

находим число: $F_{\text{крит}} = 2,65$.

3) Сравниваем: так как 1,99 < 2,65, т.е. $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Ответ: гипотеза $H_0 : D(X)=D(Y)$ принимается.

Задача 9.2. По двум независимым выборкам объемов n_1=10 и n_2=15, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены оценки дисперсий: S^2_X = 8,42, S^2_Y = 4,23. При уровне значимости α = 0,1 проверить гипотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X)\neq D(Y)$.

Решение. 1) По данным выборки вычисляем

$$F_{\text{набл}} = \frac{S^2_{\text{наиб}}}{S^2_{\text{наим}}} = \frac{8,42}{4,23} = 1,99.$$

2) По табл. П 2.7 (см. приложение 1), учитывая значения

$$\alpha = 0,1 \text{ и } \frac{\alpha}{2} = 0,05,\ k_1 = n_1 - 1 = 9,\ k_2 = n_2 - 1 = 14.$$

находим число: $F_{\text{крит}} = 2,65$.

3) Сравниваем: так как 1,99 < 2,65, т.е. $F_{\text{набл}} < \mathrm{F}_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0.

Ответ: гипотеза $H_0 : D(X)=D(Y)$ принимается.

Задача 9.3. По трем независимым выборкам объемов n_1 = 10 и n_2 = 15 и n_3 = 20, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X, Y и Z найдены оценки дисперсий: S_1^2 = 3,62, S_2^2=4,23, S_3^2=7,45. При уровне значимости α = 0,05 проверить гипотезу $H_0 : D(X)=D(Y)=D(Z)$.

Решение. 1) По данным выборок вычисляем:

$$k_1 = n_1 - 1 = 9,\ k_2 = n_2 - 1 = 14,\ k_3 = n_3 - 1 = 19.$$

$$k = \sum_{i=1}^{l} k_i = 9 + 14 + 19 = 42,$$

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{l} k_i s_i^2 = \frac{1}{42}\cdot(9\cdot 3,62 + 14\cdot 4,23 + 19\cdot 7,45) = 5,56$$

$$V = 2,303\cdot\left(k\cdot \lg \bar{s}^2 - \sum_{i=1}^{l} k_i \cdot \lg s_i^2\right) =$$

$$=2{,}303\cdot(42\cdot\lg 5{,}56-9\cdot\lg 3{,}62-14\cdot\lg 4{,}23-19\cdot\lg 7{,}45)=2{,}13.$$

$$C=1+\frac{1}{3(3-1)}\cdot\left(\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{k_i}-\frac{1}{k}\right)=1+\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{14}+\frac{1}{19}-\frac{1}{42}\right)=1{,}035,$$

$$B_{\text{набл}}=\frac{2{,}13}{1{,}035}=2{,}06.$$

2) По табл. П 2.5 (см. приложение 2), учитывая значения

$$\alpha = 0{,}05,\ k = 3 - 1 = 2,$$

находим число

$$\chi^2_{\text{крит}} = 6{,}0$$

3) Сравниваем: так как 2,06 < 6,0, т.е. $B_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, следовательно нет основания отвергать нулевую гипотезу.

Ответ: гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y) = D(Z)$ принимают.

Задача 9.4. По двум независимым выборкам объемов n_1=10 и n_2=16, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены оценки математических ожиданий $\bar{x}$=2,5, $\bar{y}$=3,1 и исправленные выборочные дисперсии s_X^2 =0,62, s_Y^2=0,43. Проверить нулевую гипотезу: $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ и уровне значимости $\alpha = 0{,}01$.

Решение. 1) Так как $s_X^2 \neq s_Y^2$, то предварительно проверим гипотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X)>D(Y)$. Для этого поступаем по аналогии с решением 1 задачи.

а) По данным выборки вычисляем

$$F_{\text{набл}}=\frac{S^2_{\text{наиб}}}{S^2_{\text{наим}}}=\frac{0{,}62}{0{,}43}=1{,}44;$$

б) По табл. П 2.7 (см. приложение 2), учитывая значения

$$\alpha = 0{,}01,\ k_1 = n_1 - 1 = 9,\ k_2 = n_2 - 1 = 15.$$

находим число:

$$F_{\text{крит}} = 3{,}89.$$

в) Сравниваем: так как 1,44 < 3,89, т.е. $F_{\text{набл}} < F_{\text{крит}}$, то гипотеза о равенстве генеральных дисперсий принимается, то есть различие между s_X^2 = 0,62 и s_Y^2 = 0,43 считаем незначительным.

2) Проверим гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ о равенстве средних при конкурирующей гипотезе

$$H_1 : M(X) \neq M(Y).$$

а) Найдем по табл. П 2.6 (см. приложение 2) значение $T_{\text{крит}}$ по заданному $\alpha = 0{,}01$ и числу $k = 10 + 16 - 2 = 24$:

$$T_{\text{крит}} = 2{,}8.$$

б) Найдем число $T_{\text{набл}}$:

$$T_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\cdot s_X^2 + (n_2 - 1)\cdot s_Y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} =$$

$$= \frac{2{,}5 - 3{,}1}{\sqrt{9\cdot 0{,}62 + 15\cdot 0{,}43}} \cdot \sqrt{\frac{10\cdot 16(10 + 16 - 2)}{10 + 16}} =$$

$$= -\frac{0{,}6}{\sqrt{12{,}03}}\cdot 12{,}153 = -\frac{0{,}6}{3{,}47}\cdot 12{,}153 = -2{,}101.$$

в) Сравнить числа $T_{\text{крит}}$ и $|T_{\text{набл}}|$: так как $2{,}101 < 2{,}8$ то $|T_{\text{набл}}| < T_{\text{крит}}$ и гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$ о равенстве средних принимается.

Ответ: гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$ принимается.

Задача 9.5. По двум независимым выборкам объемов n_1=10 и n_2=16, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, с дисперсиями σ_X^2=9, σ_Y^2=12, вычислены оценки математических ожиданий $\bar{x}$=12,7, $\bar{y}$=10,2. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ и конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Воспользуемся замечанием 6. 1) Вычислим:

$$N_{\text{набл}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2}}} = \frac{12{,}7 - 10{,}2}{\sqrt{\frac{9}{18} + \frac{12}{15}}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{0{,}5 + 0{,}8}}\frac{2{,}5}{\sqrt{1{,}3}} = 2{,}19.$$

2) Находим $N_{\text{крит}}$ из уравнения

$$\Phi(N_{\text{крит}}) = \frac{1 - \alpha}{2}, \text{ то есть } \Phi(N_{\text{крит}}) = 0{,}475$$

используя табл. П 2.2 (см. приложение 2).

Следовательно,

$$N_{\text{крит}} = 1{,}96.$$

3) Сравниваем: так как $2{,}19 > 1{,}96$, т.е. $N_{\text{набл}} > N_{\text{крит}}$, то гипотезу H_0 отвергают. Значит, различие генеральных математических ожиданий значительное.

Ответ: гипотеза $H_0 : M(X) = M(Y)$ отвергается, т.е. $M(X) \neq M(Y)$.

3.4. Критерий согласия Пирсона

Проверка гипотезы о нормальном распределении

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения.

Критерий согласия Пирсона (критерий проверки гипотезы о *нормальном* распределении генеральной совокупности):

1) По выборке объема n построить статистический ряд:

x_i	x_1	x_2	…	x_l
m_i	m_1	m_2	…	m_l

2) Вычислить по таблице оценку математического ожидания $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.

3) В предположении нормального распределения генеральной совокупности вычислить теоретические частоты $m_{1\ \text{теор}},\ldots,\ m_{l\ \text{теор}}$ по формуле:

$$m_{1\ \text{теор}}=n\cdot p_i,$$

где $p_i=\Phi\left(\dfrac{x_{i+1}-\bar{x}}{\sigma_в}\right)-\Phi\left(\dfrac{x_i-\bar{x}}{\sigma_в}\right)$; $\Phi(x)$ – интегральная функция распределения Лапласа – табл. П 2.2(см. приложение 2).

4) Вычислить число $\chi^2_{\text{набл}}$ по формуле:

$$\chi^2_{\text{набл}}=\sum_{i=1}^{l}\frac{(m_i-m_{i\ \text{теор}})^2}{m_{i\ \text{теор}}}\quad\text{или}\quad \chi^2_{\text{набл}}=\sum_{i=1}^{l}\frac{m_i^2}{m_{i\ \text{теор}}}-n.$$

5) По табл. П 2.5 (приложение 2) найти число $\chi^2_{\text{крит}}$, учитывая заданный уровень значимости α и число степеней свободы $k = l - 3$.

6) Сравнить числа $\chi^2_{\text{набл}}$ и $\chi^2_{\text{крит}}$:

- если $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.
- если $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности следует отвергнуть.

Замечание 1. Объем выборки n должен быть достаточно велик (больше 100). Число l обычно выбирают в диапазоне от 7 до 15. Поэтому при составлении интервального статистического ряда не используют интервалы, содержащие малое число значений объединяя их в один и суммируя соответствующее число значений.

Замечание 2. В случае $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, для избежания ошибки первого рода следует повторить опыт, увеличив число n.

Замечание 3. При использовании критерия Пирсона с целью систематизации записи рекомендуется записывать все промежуточные вычисления в виде следующей таблицы:

№	x_i	m_i	m_i^2	$m_{i\,\text{теор}}$	$\dfrac{(m_i - m_{i\,\text{теор}})^2}{m_{i\,\text{теор}}}$
1					
2					
…					
l					
$\sum$		n		n	$\chi^2_{\text{набл}}$

Задачи с решениями

Задача 10.1. Отделом технического контроля качества продукции произведен выбор 200 деталей для измерения отклонений их действительного диаметра от планируемого. Данные измерений приведены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

$[a_i; a_{i+1})$	m_i
[–20; –15)	7
[–15; –10)	11
[–10; –5)	15
[–5; 0)	24
[0; 5)	49
[5; 10)	41
[10; 15)	26
[15; 20)	17
[20; 25)	7
[25; 30)	3

Оценить с помощью критерия Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости α = 0,05.

Решение. Перейдем от интервального статистического ряда к статистическому ряду, заменив каждый промежуток $[a_i; a_{i+1})$ его средним значением $x_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$. Получаем табл. 3.7.

По табл. 3.7 вычислим математическое ожидание $\overline{x}$, дисперсию $D_в$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$:

Таблица 3.7

x_i	m_i
–17,5	7
–12,5	11
–7,5	15
–2,5	24
2,5	49
7,5	41
12,5	26
17,5	17
22,5	7
27,5	3

По табл. 3.7 вычислим математическое ожидание $\overline{x}$, дисперсию $D_в$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$:

$$\overline{x} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{10} x_i m_i =$$

$$= \frac{1}{200}\cdot(-17{,}5\cdot 7 - 12{,}5\cdot 11 - 7{,}5\cdot 15 - 2{,}5\cdot 24 + 2{,}5\cdot 49 + 7{,}5\cdot 41 +$$

$$+ 12{,}5\cdot 26 + 17{,}5\cdot 17 + 22{,}5\cdot 7 + 27{,}5\cdot 3) = \frac{860}{200} = 4{,}3;$$

$$D_в = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 m_i - \overline{x}^{\,2} =$$

$$=\frac{1}{200}\cdot((-17{,}5)^2\cdot 7+(-12{,}5)^2\cdot 11+(-7{,}5)^2\cdot 15+(-2{,}5)^2\cdot 24+2{,}5^2\cdot 49+7{,}5^2\cdot 41+$$

$$+12{,}5^2\cdot 26+17{,}5^2\cdot 17+22{,}5^2\cdot 7+27{,}5^2\cdot 3)-4{,}3^2=\frac{22550}{200}-18{,}49=94{,}26;$$

$$\sigma_{в.}=\sqrt{D_в}=\sqrt{94{,}26}=9{,}71.$$

1) Дальнейшие вычисления выполним по алгоритму критерия согласия Пирсона и оформим их в виде табл. 3.8, причем $x_1=-\infty$, $x_9=+\infty$.

Таблица 3.8

№	x_i	m_i	m_i^2	p_i	$m_{i\,теор}=$ $=200\cdot p_i$	$\dfrac{m_i^2}{m_{i\,теор}}$
1	–17,5	7	49	0,0233	4,66	10,52
2	–12,5	11	121	0,0475	9,5	12,74
3	–7,5	15	225	0,0977	19,54	11,52
4	–2,5	24	576	0,1615	32,3	17,83
5	2,5	49	2401	0,1979	39,58	60,66
6	7,5	41	1681	0,1945	38,9	43,22
7	12,5	26	676	0,1419	28,38	23,82
8	17,5	17	289	0,0831	16,62	17,39
9	27,5	10	100	0,0526	10,52	9,51
∑		200			200	207,21

Следовательно, находим $\chi^2_{набл}=207{,}21-200=7{,}21$.

Из табл. П2.5 (прил. 2) с учетом значений $\alpha=0{,}05$ $k=l-3=6$ находим: $\chi^2_{набл}=12{,}6$.

Так как $7{,}21<12{,}6$, т.е. $\chi^2_{набл}<\chi^2_{крит}$, то нет основания отвергать гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ: принимаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задача 10.2. В результате контрольных испытаний из генеральной совокупности взята выборка объема $n=200$ (табл. 3.9):

Таблица 3.9

x_i	6	8	10	12	14	16	18	20	22
m_i	16	24	28	32	25	24	20	18	15

Оценить с помощью критерия Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при уровне значимости α = 0,01.

Решение. 1) По табл. 3.9 вычислим выборочные математическое ожидание $\overline{x}$, дисперсию $D_в$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$:

$$\overline{x} = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{9} x_i m_i =$$

$$= \frac{1}{200}\cdot(6\cdot16+8\cdot24+10\cdot28+12\cdot32+14\cdot25+16\cdot24+$$

$$+18\cdot20+20\cdot18+22\cdot15)=13{,}68;$$

$$D_в = \frac{1}{200}\sum_{i=1}^{9} x_i^2 m_i - \overline{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{200}\cdot(36\cdot16+64\cdot24+100\cdot28+144\cdot32+196\cdot25+256\cdot24+$$

$$+324\cdot20+400\cdot18+484\cdot15)-187{,}1424=20{,}3776;$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{20{,}3776} = 4{,}51.$$

2) Дальнейшие вычисления выполним по алгоритму критерия согласия Пирсона и оформим их в виде табл. 3.10.

Таблица 3.10

№	x_i	m_i	m_i^2	p_i	$m_{i\,теор} = 200\cdot p_i$	$\frac{m_i^2}{m_{i\,теор}}$
1	6	16	256	0,0446	8,92	28,70
2	8	24	576	0,0592	11,84	48,65
3	10	28	784	0,1023	20,46	38,32
4	12	32	1024	0,1496	29,92	34,23
5	14	25	625	0,1722	34,44	18,15
6	16	24	576	0,1671	33,42	17,24
7	18	20	400	0,1339	26,78	14,94
8	20	18	324	0,0903	18,06	17,94
9	22	15	225	0,0808	16,16	13,92
∑		200		1	200	232,09

Следовательно, находим: $\chi^2_{набл} = 232{,}09 - 200 = 32{,}09$.

Из табл. 3.10 (приложение 2) с учетом значений $\alpha = 0{,}01$ $k = l - 3 = 6$ находим: $\chi^2_{\text{крит}} = 16{,}8$. Так как 32,09 >16,8, то $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}$. Следовательно, отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ: отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задача 10.3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости α=0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами m_i и теоретическими частотами $m_{i\,\text{теор}}$,которые вычислены, исходя их гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности:

m_i	6	10	36	56	32	20	12	8
$m_{i\,\text{теор}}$	4	9	25	60	35	24	14	9

Решение. 1) Найдем $\chi^2_{\text{набл}}$:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - m_{i\,\text{теор}})^2}{m_{i\,\text{теор}}} =$$

$$= \frac{2^2}{4} + \frac{1^2}{9} + \frac{11^2}{25} + \frac{(-4)^2}{60} + \frac{(-3)^2}{35} + \frac{(-4)^2}{24} + \frac{(-2)^2}{14} + \frac{(-1)^2}{9} =$$

$$= 1 + \frac{1}{9} + \frac{121}{25} + \frac{4}{15} + \frac{9}{35} + \frac{2}{3} + \frac{2}{7} + \frac{1}{9} = 7{,}54$$

Из табл. 3.10 (прил. 2) с учетом значений $\alpha = 0{,}05$ $k = 8 - 3 = 5$ находим: $\chi^2_{\text{крит}} = 11{,}1$.

Так как 7,54 < 11,1 то $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$. Следовательно, нет основания отвергать гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности.

Ответ: расхождение случайное.

3.5. Элементы теории корреляции

Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

Определение 1. *Функциональной зависимостью* между случайными величинами X и Y называется зависимость, при которой изменение величины X влечет изменение значений Y, т.е. Y является функцией случайного аргумента X.

Определение 2. *Статистической зависимостью* между случайными величинами называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой

Определение 3. *Корреляционной зависимостью* между случайными величинами называется статистическая зависимость между ними, при которой изменение одной из величин влечет изменение среднего значения другой.

Определение 4. *Функцией регрессии* называется зависимость среднего значения одной из коррелированных случайных величин от другой, т.е. функция:

$\overline{y} = f(x)$ (регрессия Y на X) или $\overline{x} = \varphi(y)$ (регрессия X на Y).

Замечание 1. На практике наибольший интерес представляет анализ следующих вопросов:

- существует ли корреляционная зависимость между двумя случайными величинами;
- если корреляционная зависимость существует, то какой вид имеет функция регрессии (будет ли она линейной, параболической или какой-нибудь другой).

Коэффициент корреляции

Определение 5. Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется число, вычисляемое по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где $\mu_{xy} = M((X - M_x)\cdot(Y - M_y))$ – корреляционный момент; M_x, M_y – математические ожидания x и y; σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения величин X и Y соответственно.

Свойства коэффициента корреляции

1. $|r_{xy}| \le 1$;

2. Коэффициент корреляции служит для оценки «тесноты» *линейной* связи между X и Y:

- чем ближе абсолютная величина числа r_{xy} к единице, тем корреляционная связь между случайными величинами X и Y сильнее;

- чем ближе абсолютная величина r_{xy} к нулю, тем корреляционная связь между случайными величинами *X* и *X* слабее.

3. Если случайные величины связаны линейной зависимостью

$$Y = aX + b,$$

то абсолютная величина коэффициента корреляции равна 1.

Схема вычисления выборочного коэффициента корреляции

1) Провести n испытаний над случайными величинами *X* и *Y*, после чего получить выборки объемов n из генеральных совокупностей *X* и *Y*:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$;

2) Найти: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$;

3) Найти: $\sigma_{вx}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$, $\sigma_{вy}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2$;

4) Найти выборочный корреляционный момент:

$$\bar{\mu}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y};$$

5) Найти выборочный коэффициент корреляции:

$$\bar{r}_{xy} = \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\sigma_{bx}\cdot\sigma_{by}}.$$

Замечание 2. Если число n велико, то выборки представляют интервальными статистическими рядами, причем число интервалов для *X* и *Y* может быть различным (например, k_1 и k_2). По этим интервальным статистическим рядам подсчитывают частоты m_x, m_y и m_{xy}. Результаты вычислений заносят в корреляционную таблицу:

$y \diagdown x$	x_1	x_2	…	x_{k_1}	m_y'
y_1	m_{11}	m_{21}	…	$m_{k_1 1}$	m_1'
y_2	m_{12}	m_{22}	…	$m_{k_1 2}$	m_2'
$\vdots$	…	…	…	…	…
y_{k_2}	m_{1k_2}	m_{2k_2}	…	$m_{k_1 k_2}$	m_{k_2}'
m_x	m_1	m_2	…	m_{k_1}	n

Далее вычисляем:

1) $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k_1}x_i m_i$, $\quad \overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_2}y_j m_j'$,

2) $\sigma_{bx}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k_1}x_i^2 m_i-\overline{x}^2$, $\sigma_{by}^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k_2}y_j^2 m_j'-\overline{y}^2$,

3) $\overline{\mu}_{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k_1}x_i\cdot\left(\sum_{j=1}^{k_2}y_j m_{ji}\right)-\overline{x}\cdot\overline{y}$, $\quad$ 4) $\overline{r}_{xy}=\dfrac{\overline{\mu}_{xy}}{\sigma_{bx}\cdot\sigma_{by}}$.

Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции

1) По двум выборкам объемов n из нормальных генеральных совокупностей X и Y найти выборочный коэффициент корреляции $\overline{r}_{xy}$($\overline{r}_{xy}\neq 0$);

2) Проверить для генеральных совокупностей X и Y нулевую гипотезу $H_0:\ r_{xy}=0$:

- Если H_0 принимается, то нет корреляционной зависимости между случайными величинами X и Y;
- Если H_0 отвергается, то существует корреляционная зависимость между случайными величинами X и Y.

Правило проверки гипотезы $H_0:\ r_{xy}=0$:

Чтобы при уровне значимости α проверить для генеральных совокупностей X и Y нулевую гипотезу $H_0:\ r_{xy}=0$, необходимо :

1) Вычислить наблюдаемое значение критерия

$$T_{\text{набл}}=\frac{\overline{r}_{xy}\cdot\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\left(\overline{r}_{xy}\right)^2}};$$

2) По табл. П 2.6 критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 2) по уровню значимости α и числу степеней свободы $k=n-2$ найти число $T_{\text{крит}}$;

3) Сравнить числа $|T_{\text{набл}}|$ и $T_{\text{крит}}$: если $|T_{\text{набл}}|<T_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0, если $|T_{\text{набл}}|>T_{\text{крит}}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Линейная корреляция. Уравнение регрессии

Определение 6. *Корреляция* случайных величин X и Y называется *линейной*, если являются линейными функции регрессии Y на X (т.е. $\overline{y} = f(x)$) и X на Y (т.е. $\overline{x} = \varphi(y)$).

Определение 7. *Выборочным уравнением линейной регрессии Y на X* называется уравнение вида :

$$y_x - \overline{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bx}}\left(x - \overline{x}\right),$$

где, y_x – условная средняя; $\overline{x}$, $\overline{y}$ – выборочные средние; σ_{bx}, σ_{by} – выборочные средние квадратические отклонения; $\overline{r}_{xy}$ – выборочный коэффициент корреляции.

Выборочным уравнением линейной регрессии X на Y называется уравнение вида:

$$x_y - \overline{x} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{by}}\left(y - \overline{y}\right),$$

Замечание 3. Следует иметь в виду, что прямые

$$y_x = ax + b \text{ и } x_y = cy + d$$

в общем случае не совпадают.

Для их нахождения необходимо:

1) по выборочным данным найти числа $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_{bx}, σ_{by}, $\overline{r}_{xy}$:

2) Проверить гипотезу о существовании корреляционной связи между
X и Y;

3) Составить уравнения обеих линий регрессии.

Замечание 4. Числа

$$\overline{r}_{xy} \cdot \frac{\sigma_{bx}}{\sigma_{by}} = \overline{p}_{yx} \quad \text{и} \quad \overline{r}_{xy} \cdot \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bx}} = \overline{p}_{xy}$$

называются *выборочным коэффициентом регрессии*, соответственно Y на X, или X на Y.

Ранговая корреляция

Рассмотрим выборку объема n из генеральной совокупности X, объекты которой обладают двумя качественными признаками: A и B.

1) Объекты выборки расположим в порядке ухудшения качества по каждому признаку

A: $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n$

B: $y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad \dots \quad y_n$

2) присвоим объектам полученных двух выборок порядковые номера (ранги):

A: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{matrix}$

B: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{matrix}$

3) Составим две последовательности соответствующих друг другу в выборках рангов:

$$x_i: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n$$

$$y_i: \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_n,$$

где a_k – ранг (т.е. порядковый номер) объекта y_{a_k}, соответствующего объекту x_k.

4) Вычислим разности $d_1 = 1 - a_1$, $d_2 = 2 - a_2$, …, $d_n = n - a_n$.

Определение 8. *Коэффициентом ранговой корреляции Спирмана* называется число:

$$\rho_в = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}. \tag{1}$$

5) Найдем число R_1 – количество рангов справа от a_1, больших a_1. Аналогично R_2 – количество рангов справа от a_2, больших a_2. И так далее.

Обозначим : $\quad R = R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}$

Определение 9. *Коэффициентом ранговой корреляции Кендалла* называется число:

$$\tau_в = \frac{4R}{n \cdot (n-1)} - 1.$$

Замечание 5. Абсолютные величины коэффициентов ранговой корреляции не превышают единицы:

$$|\rho_в| \le 1 \quad \text{и} \quad |\tau_в| \le 1$$

Правило проверки наличия связи между качественными признаками

Для обоснованного суждения о наличии связи между качественными признаками A и B генеральной совокупности X следует проверить, значим ли выборочный коэффициент их ранговой корреляции.

1) Пусть при уровне значимости α нулевая гипотеза H_0 : между признаками A и B нет значимой связи.

- По табл. П 2.6 критических точек распределения Стьюдента (см. приложение 2) по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = n - 2$ найти число $t_{\text{крит}}$;
- Найти число $T_{\text{крит}} = t_{\text{крит}} \cdot \sqrt{\dfrac{1-p_в^2}{n-2}}$,

где n – объем выборки; $\rho_в$ – выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена;

- Сравнить числа $T_{\text{крит}}$, $|\rho_в|$:

если $|\rho_в| < T_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0, т.е. ранговая корреляция между признаками не значима;

если $|\rho_в| > T_{\text{крит}}$ то нулевая гипотеза H_0 отвергается, т.е. между качественными признаками существует значимая корреляционная связь.

2) Пусть при уровне значимости α нулевая гипотеза H_0 : между признаками A и B генеральной совокупности нет значимой связи.

- По табл. П 2.2 функции Лапласа (см. приложение 2) по уровню значимости α из равенства $\Phi(z_{\text{крит}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ найти число $z_{\text{крит}}$;
- Найти число $T_{\text{крит}} = z_{\text{крит}} \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot (2n+5)}{9n \cdot (n-1)}}$,

где n – объем выборки;

- Сравнить числа $T_{\text{крит}}$, $|\tau_в|$:

если $|\tau_в| < T_{\text{крит}}$, то нет основания отвергать гипотезу H_0, т.е. ранговая корреляция между признаками не значима;

если $|\tau_в| > T_{крит}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается, т.е. между качественными признаками существует значимая корреляционная связь.

Задачи с решениями

Задача 11.1. Найти выборочный коэффициент корреляции и уравнение линейной регрессии Y на X по данным пяти наблюдений:

X: 2 2,5 3 3,5 4

Y: 1,25 1,45 1,65 1,85 2,05

Решение. Используем формулы:

1) Выборочный коэффициент корреляции:

$$\bar{r}_{xy} = \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\sigma_{bx} \cdot \sigma_{by}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2}};$$

2) линейное уравнение регрессии Y на X:

$$y_x - \bar{y} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_{by}}{\sigma_{bx}}\left(x - \bar{x}\right),$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$\sigma_{вx}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2,\ \sigma_{вy}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \bar{y}^2,\ \bar{\mu}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y}.$$

Проведем необходимые вычисления, для чего составим расчетную таблицу:

№	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	1,25	4	1,5625	2,5
2	2,5	1,45	6,25	2,1025	3,625
3	3	1,65	9	2,7225	4,95
4	3,5	1,85	12,25	3,4225	6,475
5	4	2,05	16	4,2025	8,2
$\sum$	15	8,25	47,5	14,0125	25,75

Тогда получаем:

$$\bar{x}=\frac{15}{5}=3,\quad \bar{y}=\frac{8{,}25}{5}=1{,}65,$$

$$\sigma_{вx}^2=\frac{1}{5}\cdot 47{,}5-3^2=9{,}5-9=0{,}5,\quad \sigma_{вx}=0{,}708$$

$$\sigma_{вy}^2=\frac{1}{5}\cdot 14{,}0125-1{,}65^2=2{,}8025-2{,}7225=0{,}08,\quad \sigma_{вx}=0{,}284,$$

$$\bar{\mu}_{xy}=\frac{1}{5}\cdot 25{,}75-3\cdot 1{,}65=5{,}15-4{,}95=0{,}2,$$

$$\bar{r}_{xy}=\frac{0{,}2}{0{,}708\cdot 0{,}284}=0{,}99.$$

Запишем уравнение линейной регрессии Y на X :

$$y_x-1{,}65=\frac{0{,}2}{0{,}5}(x-3),\quad \text{т.е. } y_x=0{,}4x+0{,}45.$$

Ответ: $\bar{r}_{xy}=0{,}99$, $y_x=0{,}4x+0{,}45$.

Задача 11.2. Найти выборочный коэффициент корреляции и выборочные уравнения линейных регрессий Y на X и X на Y по данным выборки X и Y, сведенным в корреляционную таблицу:

X \ Y	5	10	15	20	25	30	35	40	m_y
100	2	1							3
120	3	4	3						10
140			5	10	8				23
160				1		6	1	1	9
180							4	1	5
m_x	5	5	8	11	*8*	*6*	5	2	50

Решение.

1) Найдем оценки математических ожиданий X и Y :

$$\bar{x}=\frac{1}{50}(5(2+3)+10(1+4)+15(3+5)+20(10+1)+25\cdot 8+30\cdot 6+35(1+4)+40(1+1))=19;$$

$$\bar{y}=\frac{1}{50}(100(2+1)+120(3+4+3)+140(5+10+8)+160(1+6+1+1)+180(4+1))=141{,}2$$

2) Найдем выборочные дисперсии:

$$D_{вx}=\frac{1}{50}(5^2(2+3)+10^2(1+4)+15^2(3+5)+20^2(10+1)+25^2\cdot 8+30^2\cdot 6+$$

$$+35^3(1+4)+40^2(1+1))-19^2=531-361=170,$$

$$D_{вy}=\frac{1}{50}(100^2(2+1)+120^2(3+4+3)+140^2(5+10+8)+$$

$$+160^2\cdot 9+180^2\cdot 5)-141{,}2^2=20344-19937{,}44=406{,}56.$$

3) Найдем выборочные средние квадратические отклонения:

$$\sigma_{вx}=\sqrt{D_{вx}}=13{,}04,\quad \sigma_{вy}=\sqrt{D_{вy}}=20{,}16.$$

4) Найдем выборочный корреляционный момент:

$$\overline{\mu}_{xy}=\frac{1}{50}(5(100\cdot 2+120\cdot 3)+10(100\cdot 1+120\cdot 4)+15(120\cdot 3+140\cdot 5)+$$

$$+20(140\cdot 10+160\cdot 1)+25(140\cdot 5)+30(160\cdot 6)+35(160\cdot 1+180\cdot 4)+$$

$$+40(160\cdot 1+180\cdot 1))-19\cdot 141{,}2=2928-2682{,}8=245{,}2.$$

5) Найдем выборочный коэффициент корреляции:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{245{,}2}{13{,}04\cdot 20{,}16}=\frac{245{,}2}{262{,}9}=0{,}93.$$

6) Напишем выборочное уравнение линейной регрессии Y на X:

$$y_x-\overline{y}=\frac{\overline{\mu}_{xy}}{\sigma_{bx}^2}\left(x-\overline{x}\right)\quad\Rightarrow\quad y_x-141{,}2=\frac{245{,}2}{170}(x-19)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y_x=141{,}2+1{,}44x-27{,}4\quad\Rightarrow\quad y_x=1{,}44x+116{,}8$$

7) Напишем выборочное уравнение линейной регрессии X на Y:

$$x_y-\overline{x}=\frac{\overline{\mu}_{xy}}{\sigma_{by}^2}\left(y-\overline{y}\right)\quad\Rightarrow\quad x_y-19=\frac{245}{406{,}56}(y-141{,}2)\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x_y-19=0{,}6(y-141{,}2)\quad\Rightarrow\quad x_y=0{,}6y-65{,}72$$

Ответ: $\overline{r}_{xy}=0{,}93,\quad y_x=1{,}44x+116{,}8,\quad x_y=0{,}6y-65{,}72.$

Задача 11.3. Знания 10 студентов проверены по двум тестам *A* и *B*. Оценки по стобальной системе оказались следующими:

По *A*: 92 96 90 50 75 83 65 70 62 55

По *B*: 94 98 84 52 70 87 62 74 59 50.

Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции: а) Спирмена; б) Кендалла и оценить их значимость при уровне значимости α=0,1.

Решение. 1) Присвоим ранги a_i оценкам x_i по тесту A, расположив эти оценки в порядке убывания:

a_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	96	92	90	83	75	70	65	62	55	50

2) Присвоим ранги b_i оценкам y_i по тесту B, расположив их в порядке убывания:

b_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	98	94	87	84	74	70	62	59	52	50

3) Рангу a_1=1 оценки 96 по тесту A соответствует ранг b_1 оценки 98 (первого студента) по тесту B

Рангу a_2=2 оценки 92 по тесту A соответствует ранг b_2=2 оценки 94 по тесту B.

Рангу a_3=3 оценки 90 по тесту A соответствует ранг b_4=4 оценки 84.

Аналогично получаем:

b_4= 3, b_5= 6, b_6=5, b_7=7, b_8=8, b_9=10, b_{10}=9.

4) Выпишем последовательности рангов a_i и b_i:

a_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_i	1	2	4	3	6	5	7	8	10	9

и получим разности рангов:

$$d_1=a_1 - b_1= 0;\ d_2=2-2=0;\ d_3 = -1;\ d_4 = 1;\ d_5 = -1;\ d_6 = 1;$$
$$d_7 = 0;\ d_8 = 0;\ d_9 = -1;\ d_{10} = 1.$$

5) Вычислим выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

$$\rho_b = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 6}{1000 - 10} = 1 - \frac{36}{990} = 1 - 0{,}04 = 0{,}96.$$

6) Вычислим выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла:

$$\tau_b = \frac{4R}{n(n-1)} - 1$$

где $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_{n-1} = 9 + 8 + 6 + 6 + 4 + 4 + 3 + 2 + 0 = 42$.

Тогда получаем:

$$\tau_{\text{в}} = \frac{4 \cdot 42}{10(10-1)} - 1 = \frac{168}{90} - 1 = 1{,}87 - 1 = 0{,}87.$$

7) При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ находим число

$$T_{\text{крит}} = t_{\text{крит}} \cdot \sqrt{\frac{1-\rho_b^2}{n-2}} = 1{,}86\sqrt{\frac{1-0{,}92}{8}} = 0{,}186,$$

Сравниваем числа $T_{\text{крит}}$ и $|\rho_b|$: так как 0,96 > 0,186, то $|\rho_b| > T_{\text{крит}}$ и ранговая корреляция между признаками является значимой.

8) При уровне значимости α = 0,1 находим:

$$T_{\text{крит}} = z_{\text{крит}}\sqrt{\frac{2\cdot(2n+5)}{9n\cdot(n-1)}} = 1{,}645\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 25}{90\cdot 9}} = 1{,}645\cdot\frac{\sqrt{5}}{9} = 0{,}43.$$

Сравним числа $T_{\text{крит}}$ и $|\tau_b|$:
так как 0,87 > 0,43, то $|\tau_b| > T_{\text{крит}}$.

Значит корреляционная связь между сравниваемыми оценками значимая.

Ответ: $\rho_b = 0{,}96$; $\tau_b = 0{,}87$; гипотеза о наличии корреляционной связи между оценками принимается.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задача 1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает пять деталей. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Дано:	Решение:
$N = 15$;	$P(m) = \dfrac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$;
$M = 10$;	Формула гипергеометрического распределения, где:
$n = 5$;	N - общее количество деталей;
$m = 3$.	M – количество окрашенных деталей;
$P(m) = ?$	n – количество отобранных деталей;
	m – количество окрашенных среди отобранных;
	$P(3) = \dfrac{C_{10}^3 * C_5^2}{C_{15}^5} = 0{,}3996$
	Ответ: 39,96%

Задача 2. В ящике 120 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных; в) хотя бы одно бракованное; г) больше половины годных

Дано:	Решение:
$N = 120$;	$P(m) = \dfrac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$;
$M = 10$;	Формула гипергеометрического распределения, где:
$n = 4$;	N - общее количество деталей;
а) $m = 0$;	M – количество бракованных деталей;
б) $m = 4$;	n – количество извлеченных деталей;
в) $m>2$.	m – количество бракованных среди отобранных;
	а) $P(0) = \dfrac{C_4^0 * C_{116}^4}{C_{120}^4} = 0{,}8717 = 87{,}17\%$;
	б) $P(4) = \dfrac{C_4^4 * C_{116}^0}{C_{120}^4} = 0{,}00000012 = 0{,}000012\%$;
	в) $P(>2) = P(3) + P(4)$;

$$P(3)=\frac{C_4^3 * C_{116}^1}{C_{120}^4}=0{,}00005649;$$

$$P(>2)=0{,}00000012+0{,}00005649=0{,}00005661=0{,}005661\%$$

Ответ: а) 87,17%

б) 0,000012%

в) 0,00005649%

Задача 3. В группе студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов более пяти отличников.

Дано:	Решение:
N = 14; M =8; n =9; m > 5.	$P(>5)=P(6)+P(7)+P(8)$
$P(m)$ = ?	$P(6)=\frac{C_8^6 * C_6^2}{C_{14}^8}=0{,}1399=13{,}99\%$; $P(7)=\frac{C_8^7 * C_6^1}{C_{14}^8}=0{,}0160=1{,}60\%$; $P(8)=\frac{C_8^8 * C_6^0}{C_{14}^8}=0{,}0003=0{,}03\%$; $P(>5)=13{,}99\%+1{,}60\%+0{,}03=15{,}60\%$ Ответ: 15,60%

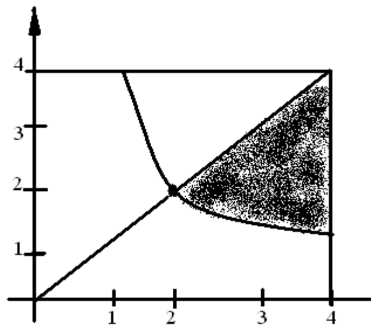
Задача 4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены три изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

Дано:	Решение:
N = 120; M = 10; n = 4; а) m = 0; б) m = 4; в) m>2.	а) $P(1)=\frac{C_3^1 * C_2^2}{C_5^3}=0{,}3000=30{,}00\%$; б) $P(2)=\frac{C_3^2 * C_2^1}{C_5^3}=0{,}6000=60{,}00\%$;
$P(m)$ = ?	в) $P(\geq 1)=P(1)+P(2)+P(3)$; $P(3)=\frac{C_3^3 * C_2^0}{C_5^3}=0{,}1000=10{,}00\%$; $P(>2)=30{,}00\%+60{,}00\%+10{,}00\%=100{,}00\%$ Ответ: а) 30,0%; б) 60,0%; в) *100%*.

Задача 5. Наудачу взяты два положительных числа *x и y,* каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что произведение *xy* будет больше четырех, а частное *y/x* не больше четырех.

Дано:
$x \in [0;4]$;
$y \in [0;4]$;
$xy > 4$;
$\frac{x}{y} \leq 1$

$P(A) = ?$



Построим фигуру ограниченную линиями: $x = 0$; $x = 4$; $y = 0$; $y = 4$. Это квадрат, в который попадают все возможные значения пары x и y. Его площадь $S=16$ $ед^2$. Построим фигуру, $y=\frac{4}{x}$ и $y = x$. Заштрихованная фигура это все возможные пары x и y, удовлетворяющие заданными условиям.

Площадь фигуры:

$$S_ф = \int_2^4 (x - \frac{4}{x})dx = (\frac{x^2}{2} - 4\ln x)[_2^4 = (\frac{4^2}{2} - 4\ln 4) - (\frac{2^2}{2} - 4\ln 2) = 3{,}2274\,(ед^2).$$

Искомую вероятность вычислим, исходя из геометрического смысла вероятности события А:

$$P(A) = \frac{S_б}{S} = \frac{3{,}2274}{16} = 0{,}2017 = 20{,}17\%$$

Ответ: 20,17%

Задача 6. Наудачу взяты два положительных числа *x и y,* каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма *x+y* не превышает трех, а произведение *xy* не меньше двух.

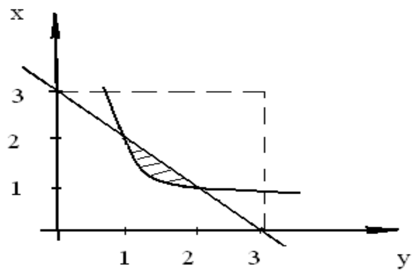
Дано:
$x \in [0;3]$;
$y \in [0;3]$;
$x+y \leq 3$;
õó≥2

$P(A) = ?$

Решение:

Построим фигуру, ограниченную линиями: $x = 0$; $x = 3$; $y = 0$; $y = 3$. Это квадрат, в который попадают все возможные значения пары x и y.

Его площадь: $S=9$ $ед^2$.



Построим фигуру, ограниченную линиями: $y = \frac{2}{x}$ и $y = 3 - x$. Заштрихованная фигура – это все значения пары x и y, удовлетворяющие заданным условиям. Площадь это фигуры:

$$S_{ф} = \int_{1}^{2} (3 - x - \frac{2}{x})dx = (3x - \frac{x^2}{2} - 2\ln x) = (3*2 - \frac{2^2}{2} - 2\ln 2) - (3*1 - \frac{1^2}{2} - 2\ln 1) = 0{,}114$$

Неполную вероятность вычислим исходя из геометрического смысла вероятности события А:

$$P(A) = \frac{S_{ф}}{S} = \frac{0{,}114}{9} = 0{,}013 = 1{,}3\%$$

Ответ: 1,3 %

Задача 7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчик сработает, равна 0,97 для первого датчика и 0,92 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

Дано:	Решение:
$P(A_1) = 0{,}97$;	$P(\overline{A_1})$ - вероятность, что первый датчик не сработает.
$P(A_2) = 0{,}92$.	$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 0{,}03$
$P(1) = ?$	$P(\overline{A_2})$ - вероятность, что второй датчик не сработает.
	$P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_1) = 0{,}08$

Вероятность, что из двух сработает только один датчик вычисляется по формуле:

$$P(1) = P(A_1) * P(\overline{A_1}) + P(A_2) * P(\overline{A_2}) = 0{,}97 * 0{,}08 + 0{,}03 * 0{,}92 = 0{,}1052 = 10{,}52\%$$

Ответ: 10,52%

Задача 8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,72, а для второго - 0,74. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает хотя бы из стрелков.

Дано:	Решение:
$P(A_1)=0{,}72$;	$P(\geq 1)=P(1)+P(2)$;
$P(A_2)=0{,}74$.	$P(1)=P(A_1)*P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)*P(A_2)$;
$P(\geq 1)=?$	где $P(\overline{A}_1)=0{,}28$ - вероятность промаха первого стрелка;
	$P(\overline{A}_2)=0{,}26$- вероятность промаха второго стрелка;
	$P(1)=P(A_1)*P(\overline{A}_2)$;
	$P(1)=0{,}72*0{,}26+0{,}28*0{,}74=0{,}3944$
	$P(2)=0{,}72*0{,}74=0{,}5328$
	$P(\geq 1)=0{,}3944*0{,}5328=0{,}9272=92{,}72\%$
	Ответ: 92,72%

Задача 9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,23. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,85.

Дано:	Решение:
$P(1)=0{,}23$;	$P(1)=P(A_1)*P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)*P(A_2)$;
$P(A_2)=0{,}85$.	где:
$P(A_1)=?$	$P(1)=$ 0,23;
	$P(A_1)=$ x;
	$P(A_2)=$ 0,85;
	$P(\overline{A}_1)=$ 0,15;
	$P(\overline{A}_2)=$ 1-x;
	0,23=x*0,15+(1-x)*0,85;
	0,23=0,15x+0,85-0,85x;
	0,70x=0,62;
	x = 0,8856 = 88,57%
	Ответ: 88,57%

Задача 10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,862. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

Дано:
$n=3$;
$m=2$;
$p=0{,}862$
$P(2)=?$

Решение:
Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(m)=C_n^m * p^m * (1-p)^{n-m};$$

$$P(2)=C_3^2 * 0{,}862^2 (1-0{,}862)^1 = 0{,}3076 = 30{,}76\%$$

Ответ: 30,76%

Задача 11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,62; 0,72; 0,82; 0,92. Найти вероятность того, что деталь содержится: не более чем в трех ящиках; не менее в двух ящиках.

Дано:
$P(A_1)=0{,}62$;
$P(A_2)=0{,}72$;
$P(A_3)=0{,}82$;
$P(A_4)=0{,}92$.
$P(2\le x\le 3)=?$

Решение:

$$P(2\le x\le 3)=P(2)+P(3);$$

$$P(3)=P(A_1)*P(A_2)*P(A_3)*P(\overline{A}_4)+P(A_1)*P(A_2)*P(\overline{A}_3)*P(A_4)+$$
$$+P(A_1)*P(\overline{A}_2)*P(A_3)*P(A_4)+P(\overline{A}_1)*P(A_2)*P(A_3)*P(A_4)$$

где:

$$P(\overline{A}_1)=0{,}38;$$
$$P(\overline{A}_2)=0{,}28;$$
$$P(\overline{A}_3)=0{,}18;$$
$$P(\overline{A}_4)=0{,}08;$$

P(3)=0,62*0,72*0,82*0,08+0,62*0,72*0,18*0,92+
+0,62*0,28*0,82*0,92+0,38*0,72*0,82*0,92=0,3374;

$$P(2)=P(A_1)*P(A_2)*P(\overline{A}_3)*P(\overline{A}_4)+P(A_1)*P(\overline{A}_2)*P(A_3)*P(\overline{A}_4)+$$
$$+P(A_1)*P(\overline{A}_2)*P(\overline{A}_3)*P(A_4)+P(\overline{A}_1)*P(A_2)*P(\overline{A}_3)*P(A_4)+$$
$$+P(\overline{A}_1)*P(A_2)*P(A_3)*P(\overline{A}_4)+P(\overline{A}_1)*P(\overline{A}_2)*P(A_3)*P(A_4)$$

*0,72*0,18*0,08+0,62*0,28*0,82*0,08+
+0,62*0,28*0,18*0,92+0,38*0,72*0,18*0,92+
+0,38*0,72*0,82*0,08+0,38*0,28*0,82*0,92=0,1901;

$$P(2\le x\le 3)=0{,}3374+0{,}1901=0{,}5275;$$

Ответ: 52,75%

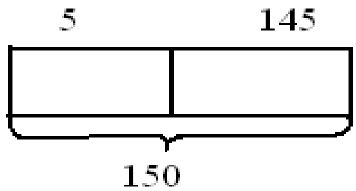
Задача 12. Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 билета, выбранные наудачу, окажутся выигрышными.

Дано:
$N = 150$;
$M = 5$;
$n = 2$;
$m = 2$.

P(2)=?

Решение:

$$P(m) = \frac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$$



$$P(2) = \frac{C_5^2 * C_{145}^0}{C_{150}^2} = 0{,}0009 = 0{,}09\%$$

Ответ: 0,09%

Задача 13. В ящике 30 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окажется окрашенная.

Дано:
$N = 30$;
$M = 6$;
$n = 4$.

$P(\geq 1) = ?$

$$P(\geq 1) = 1 - P(0);$$

$$P(0) = \frac{C_6^0 * C_{24}^4}{C_{30}^4} = 0{,}3877;$$

$$P(\geq 1) = 1 - 0{,}3877 = 0{,}6123 = 61{,}23\%$$

Ответ: 61,23%

Задача 14. Устройствосодержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Дано:
$P(A_1) = 0{,}05$;
$P(A_2) = 0{,}08$.

$P(\geq 1) = ?$

Решение:

$$P(\geq 1) = 1 - P(A_1) * P(A_2);$$

где $P(A_1)$ - вероятность что первый элемент не откажет;

$P(A_2)$ - вероятность что второй элемент не откажет.

$$P(\geq 1) = 0{,}95 : P(A_2) = 0{,}92;$$

$$P(\geq 1) = 1 - 0{,}95 * 0{,}92 = 0{,}1260 = 12{,}60\%$$

Ответ: 12,6%

Задача 15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8956. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Дано:	Решение:
$P(A_1)=P(A_2)=$	$P(\geq 1)=1-(1-p)^4;$
$P(A_3)=P(A_4)=p;$	$(1-p)^4=1-P(\geq 1);$
$P(\geq 1)=0{,}8956$	$p=1-\sqrt[4]{1-p(\geq 1)};$
p=?	$p=1-\sqrt[4]{1-0{,}8956}=0{,}4316;$
	Ответ: 43,16%

Задача 16. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

Дано:	Решение:
$P(H_1)=\frac{1}{2};$	Воспользуемся формулой полной вероятности:
$P(H_2)=\frac{1}{2};$	$P(A)=P(H_1)*P(A/H_1)+P(H_2)*P(A/H_2);$
$P(A/H_1)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3};$	$P(A)=\frac{1}{8}*\frac{2}{3}+\frac{1}{2}*\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=0{,}4333=43{,}33\%$
$P(A/H_2)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$	Ответ: 43,33%
$P(A)=?;$	

Задача 17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,75, для второго - 0,82, для третьего - 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания

в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

Дано:

$P(A_1) = 0{,}75$;

$P(A_2) = 0{,}82$;

$P(A_3) = 0{,}90$.

а) $P(3) = ?$

б) $P(2) = ?$

в) $P(1) = ?$

г) $P(0) = ?$

д) $P(\geq 1) = ?$

Решение:

а) $P(3) = \overline{P}(A_1) * P(A_2) * P(A_3)$;

$P(3) = 0{,}75 * 0{,}82 * 0{,}90 = 0{,}5535 = 55{,}35\%$

б) $P(2) = P(A_1) * P(A_2) * P(\overline{A}_3) + P(A_1) * P(\overline{A}_2) * P(A_3) +$

$+ P(\overline{A}_1) * P(A_2) * P(A_3)$;

$P(2) = 0{,}75 * 0{,}82 * 0{,}10 + 0{,}75 * 0{,}18 * 0{,}90 +$

$+ 0{,}25 * 0{,}82 * 0{,}90 = 0{,}3675 = 36{,}75\%$

в) $P(2) = P(A_1) * P(\overline{A}_2) * P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1) * P(A_2) * P(\overline{A}_3) +$

$+ P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * P(A_3)$;

$P(2) = 0{,}75 * 0{,}18 * 0{,}10 + 0{,}25 * 0{,}82 * 0{,}10 +$

$+ 0{,}25 * 0{,}18 * 0{,}90 = 0{,}0745 = 7{,}45\%$

д) $P(\geq 1) = P(1) + P(2) + P(3) = 7{,}45\% + 36{,}75\% + 55{,}35 = 99{,}55\%$

г) $P(0) = 100\% - 99{,}55\% = 0{,}45\%$

Ответ: а) 55,35%

б) 36,75%

в) 7,45%

г) 0,45%

д) 99,55%

Задача 18. В партии 21% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X - числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Дано:

p = 21% = 0,21;

q = 0,79

n = 4

P(m) = ?

Решение:

Воспользуемся формулами биноминального вычисления:

$P(m) = C_n^m * p^m * q^{n-m}$;

$P(0) = C_4^0 * 0{,}21^0 * 0{,}79^4 = 0{,}3895$;

$P(1) = C_4^1 * 0{,}21^1 * 0{,}79^4 = 0{,}4142$;

$P(2) = C_4^2 * 0{,}21^2 * 0{,}79^4 = 0{,}1651$;

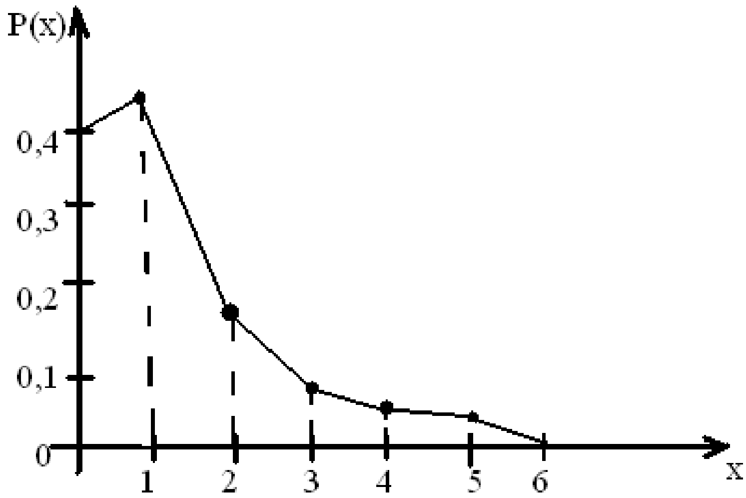
$P(3) = C_4^3 * 0{,}21^3 * 0{,}79^1 = 0{,}0293$;

$P(0) = C_4^4 * 0{,}21^4 * 0{,}79^0 = 0{,}0019$;

Запишем закон биноминального распределения в виде таблицы.

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0,3895	0,4142	0,1657	0,0293	0,0019	0

Построим многоугольник распределения :



Задача 19. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Дано:	Решение:
N = 12; M = 8; n = 2.	Воспользуемся формулой гипергеометрического распределения:
P(m) = ?	$$P(m) = \frac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^m}$$ $$P(0) = \frac{C_8^0 * C_4^2}{C_{12}^2} = 0{,}0910;$$

$$P(1)=\frac{C_8^1 * C_4^1}{C_{12}^2}=0{,}4848;$$

$$P(2)=\frac{C_8^2 * C_4^0}{C_{12}^2}=0{,}4242;$$

Запишем закон распределения в виде таблицы:

m	0	1	2	3
P(m)	0,0910	0,4848	0,4242	0

Задача 20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Найти вероятность т ого, что среди 300 деталей окажется ровно четыре бракованных.

Дано:
p = 0,04;
q = 0,96;
n = 300;
m = 4.

P(m) = ?

Решение:

Воспользуемся формулой Бернулли:

$$P(m)=C_n^m * p^m * q^{n-m};$$

$$P(m)=C_{300}^4 * 0{,}04^4 * 0{,}96^{296}=0{,}0048=0{,}48\%;$$

Ответ: 0,48%

Задача 21. Из колоды в 36 карт наугад берут 10 карт. Какова вероятность того, что больше половины взятых карт не бубновой масти?

Дано:
N = 36;
M =27;
n =10;
m >5.

P(>5)=?

Решение:

P(>5)= $P(6)+P(7)+P(8)+P(9)+P(10)$.

$$P(6)=\frac{C_{27}^6 * C_9^4}{C_{36}^{10}}=0{,}1467;$$

$$P(7)=\frac{C_{27}^7 * C_9^3}{C_{36}^{10}}=0{,}2935;$$

$$P(8)=\frac{C_{27}^8 * C_9^2}{C_{36}^{10}}=0{,}3144;$$

$$P(9)=\frac{C_{27}^9 * C_9^1}{C_{36}^{10}}=0{,}1659;$$

$$P(6)=\frac{C_{27}^{10} * C_9^0}{C_{36}^{10}}=0{,}0332;$$

P(>5)= $0.9537=95.37\%$

Ответ: 95,37%

Задача 22. В приборе 4 элемента. Вероятность поломки первого элемента - 0,10; второго - 0,05; третьего - 0,20; четвертого - 0,15. Какова вероятность, что в приборе сломается 1 элемент?

Дано:

$P(A_1) = 0{,}10$;

$P(A_2) = 0{,}05$;

$P(A_3) = 0{,}20$;

$P(A_3) = 0{,}15$

$P(1) = ?$

Решение:

$$P(1) = P(A_1) * P(\overline{A}_2) * P(\overline{A}_3) * P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_1) * P(A_2) * P(\overline{A}_3) * P(\overline{A}_4) +$$
$$+ P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * P(A_3) * P(\overline{A}_4) + P(\overline{A}_1) * P(\overline{A}_2) * P(\overline{A}_3) * P(A_4)$$

где:

$P(\overline{A}_1) = 0{,}90$ - вероятность, что первый элемент не сломается;

$P(\overline{A}_2) = 0{,}95$ - вероятность, что второй элемент не сломается;

$P(\overline{A}_3) = 0{,}80$ - вероятность что третий элемент не сломается;

$P(\overline{A}_4) = 0{,}85$ - вероятность что четвертый элемент не сломается;

P(1)=0,10*0,95*0,80*0,85+0,90*0,05*0,80*0,85+
+0,90*0,95*0,20*0,85+0,90*0,95*0,80*0,15=0,3432=32,22 %

Ответ: 32,22%

Задача 23. Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 40. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает хотя бы один вопрос.

Дано:

$N = 60$;

$M = 40$;

$n = 4$;

$m \geq 1$.

$P(\geq 1) = ?$

Решение:

$$P(\geq 1) = 1 - P(0);$$

$$P(0) = \frac{C_{40}^{0} * C_{20}^{4}}{C_{60}^{4}} = 0{,}0099;$$

$$P(\geq 1) = 1 - 0{,}0099 = 9901 = 99{,}01\%$$

Ответ: 99,01%

Задача 24. При приемке партии проверяют 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 4%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 6% брака, будет принята.

Дано:
N = 100;
M =25;
4% - норма;
6% - доля брака

$P(A) = ?$

Решение:

4% от 25 = 0,04*25=1

Если в проверяемой части бракованных изделий 0 или 1, то партия принимается.

6% от 100=0,06*100=6

В партии 6 бракованных изделий и для принятия партии должно быть следующее распределение брака:

$$P(0) = \frac{C_{25}^{0} * C_{75}^{6}}{C_{100}^{6}} = 0{,}1689;$$

$$P(1) = \frac{C_{25}^{1} * C_{75}^{5}}{C_{100}^{6}} = 0{,}3620;$$

$P(\leq 1) = P(0) + P(1)$ условие принятия партии.

$$P(\leq 1) = 0{,}1689 + 0{,}3620 = 0{,}5309 = 53{,}09\%$$

Ответ: 53,09%

Задача 25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 - хорошо, 2 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент отличник.

Дано:
$P(H_1) = 0{,}3;$
$P(H_2) = 0{,}4;$
$P(H_3) = 0{,}2;$
$P(H_2) = 0{,}1;$

Решение:

Воспользуемся теоремой Байеса:

$$P(A) = P(H_1) * P(A/H_1) : [P(H_2) * P(A/H_1) + P(H_2) *$$
$$* P(A/H_2) + P(H_3) * P(A/H_3) + P(H_4) * P(A/H_4)],$$

где $P(A/H_1)$ - вероятность, что отличник ответит на все вопроса билета;

где $P(A/H_2)$ - вероятность, что хорошист ответит на все вопроса билета;

где $P(A/H_3)$ - вероятность, что троечник ответит на все вопроса билета;

где $P(A/H_4)$ - вероятность что двоечник ответит на все вопроса билета;

$$P(A/H_1)=1;$$

$$P(A/H_2)=\frac{\tilde{N}_{16}^{3} * \tilde{N}_{4}^{0}}{\tilde{N}_{20}^{3}}=0,4912;$$

$$P(A/H_3)=\frac{\overset{C^{3}}{C_{10}^{3}} * \tilde{N}_{10}^{0}}{\tilde{N}_{20}^{3}}=0,1053;$$

$$P(A/H_4)=\frac{\tilde{N}_{5}^{3} * \tilde{N}_{15}^{0}}{\tilde{N}_{20}^{3}}=0,0088;$$

$$P(H/A_1)=\frac{1*0,3}{(1*0,3+0,4*0,4912+0,2*0,1053+0,1*0,0088}=$$

$$=0,5787=57,87$$

Ответ: 57,87%

ВАРИАНТ 1

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчик сработает, равна 0,95 для первого датчика и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,8, для второго – 0,85, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность т ого, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что все вынутые карты будут одной масти?

22. Юноша, поступающий в ВУЗ, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания - 0.9; 2-го - 0.95; 3-го - 0.8; 4-го - 0.85. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее 2-х испытаний?

23. Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 40. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает больше половины вопросов.

24. При приемке партии проверяют 75% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 4%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 6% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен 3 подготовленных отлично, 4 - хорошо, 2 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

ВАРИАНТ 2

1. В ящике имеется 25 деталей, среди которых 13 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 130 деталей, из них 25 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 14 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 6 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке восемь одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает пяти. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,09.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчика сработает, равна 0,75 для первого датчика и 0,7 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,75, а для второго – 0,6. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,46. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,65.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,9. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,65; 0,75; 0,85; 0,95. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 300 лотерейных билетов есть 12 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 14 деталей, среди которых пять окрашенных. Сборщик наудачу извлекает две детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,02 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9584. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 12 шаров, из них 4 белых; во второй урне 20 шаров, из них 3 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,7, для второго – 0,85, для третьего – 0,93. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 30% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 17 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность т ого, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из двух колод в 36 карт наугад берем по карте. Какова вероятность того, что при этом вынем хотя бы одного туза?

22. Юноша, поступающий в ВУЗ, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания - 0.95; 2-го - 0.9; 3-го - 0.85; 4-го - 0.7. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не более 1 испытания?

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не меньше 2 вопросов.

24. При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 2,5%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

25. В группе из 15 студентов, пришедших на экзамен, 4 подготовленных отлично, 6 - хорошо, 2 - троечника, 3 - двоечника. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **двоечник.**

ВАРИАНТ 3

1. В ящике имеется 19 деталей, среди которых 11 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В ящике 140 деталей, из них 24 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.
3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
4. В коробке пять одинаковых изделий, причем два из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.
6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,25.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчик сработает, равна 0,86 для первого датчика и 0,93 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,95, а для второго – 0,84. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,48. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,9.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,96. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,4; 0,5; 0,6; 0,7. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 4 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 55 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,15 и 0,18. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 2 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,84, для второго – 0,87, для третьего – 0,92. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 20% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 10 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,06. Найти вероятность т ого, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Какова вероятность того, что все вынутые карты будут разной масти?

22. Юноша, поступающий в ВУЗ, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания - 0.9; 2-го - 0.95; 3-го - 0.8; 4-го - 0.85. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет 2 испытания?

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 60. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не больше 2-х вопросов.

24. При приемке партии проверяют 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 4%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 8% брака, будет принята.

25. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовленных отлично, 6 - хорошо, 4 - троечника, 2 - двоечника. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

ВАРИАНТ 4

1. В ящике имеется 45 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 110 деталей, из них 7 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 16 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке семь одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчик сработает, равна 0,75 для первого датчика и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,72, а для второго – 0,87. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,68. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,87.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 200 лотерейных билетов есть 15 выигрышных. Найти вероятность того, что 3 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 20 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,06 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9796. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 2 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,7, для второго – 0,95, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 20% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 15 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность т ого, что среди 150 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 8 карт. Какова вероятность того, что 4 вынутые карты будут бубновой масти?

22. Юноша, поступающий в ВУЗ, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания - 0.8; 2-го - 0.7; 3-го - 0.6; 4-го - 0.5. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее 3-х испытаний?

23. Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не менее 3-х вопросов.

24. При приемке партии проверяют 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 5%. Вычислить вероятность того, что партия из 80 изделий, содержащая 10% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 2 подготовленных отлично, 3 - хорошо, 4 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 30 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный - на 25, посредственно - на 15, плохо - на 10. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **двоечник**.

ВАРИАНТ 5

1. В ящике имеется 18 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 200 деталей, из них 13 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 16 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,085.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих датчика. Вероятность того, что при аварии датчик сработает, равна 0,93 для первого датчика и 0,88 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один датчик.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,93. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,54. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,73.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,6. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее чем в двух ящиках.

12. Среди 140 лотерейных билетов есть 6 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 15 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9388. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 10 шаров, из них 5 белых; во второй урне 25 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,77, для второго – 0,82, для третьего – 0,93. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 15% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 13 деталей имеется 7 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность т ого, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 6 карт. Найти вероятность того, что 5 вынутых карт будут пиковой масти.

22. Юноша, поступающий в ВУЗ, должен пройти 4 испытания. Вероятность успешного выполнения им заданий: 1-го испытания - 0.9; 2-го - 0.8; 3-го - 0.7; 4-го - 0.6. Какова вероятность того, что юноша с успехом пройдет не менее 3 испытаний?

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 55. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не менее 1 вопроса.

24. При приемке партии проверяют 40% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 2.5%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 6% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 5 подготовленных отлично, 2 - хорошо, 2 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

ВАРИАНТ 6

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В ящике 120 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.
3. В группе 14 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.
4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены три изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает четырех. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше единицы.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,075.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,97 для первого сигнализатора и 0,92 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,72, а для второго – 0,74. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,23. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,85.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,862. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,62; 0,72; 0,82; 0,92. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 30 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8956. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 12 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,75, для второго – 0,82, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 21% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,04. Найти вероятность т ого, что среди 300 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 10 карт. Какова вероятность того, что больше половины взятых карт не бубновой масти?

22. В приборе 4 элемента. Вероятность поломки первого элемента – 0,10; второго – 0,05; третьего – 0,20; четвертого – 0,15. Какова вероятность, что в приборе сломается 1 элемент?

23. Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 40. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает хотя бы один вопрос.

24. При приемке партии проверяют 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 4%. Вычислить вероятность того, что партия из 100 изделий, содержащая 6% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовленных отлично, 4 - хорошо, 2 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

ВАРИАНТ 7

1. В ящике имеется 25 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке семь одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает пяти. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,12.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,84 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,65, а для второго – 0,74. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,83.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,65. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,65; 0,75; 0,8; 0,85. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 150 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,065 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8856. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 10 шаров, из них 5 белых; во второй урне 20 шаров, из них 3 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,84, для второго – 0,73, для третьего – 0,92. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 12% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 25 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,015. Найти вероятность т ого, что среди 320 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из двух колод в 36 карт наугад берем по карте. Какова вероятность того, что при этом вынем хотя бы одну карту бубновой масти?

22. Вероятность поломки первого станка – 0,05; второго – 0,10; третьего – 0,15; четвертого – 0,30. Найти вероятность, что будет не более одного поломанного станка.

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не более 2 вопросов.

24. При приемке партии подвергается проверке половина изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 2%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 4% брака, будет принята.

25. В группе из 15 студентов, пришедших на экзамен, 4 подготовленных отлично, 6 - хорошо, 2 - троечника, 3 - двоечника. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **двоечник**.

ВАРИАНТ 8

1. В ящике имеется 18 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 130 деталей, из них 15 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 18 студентов, среди которых 5 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,08.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,92 для первого сигнализатора и 0,88 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,65, а для второго – 0,77. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,52. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,83.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,55; 0,65; 0,7; 0,75. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 180 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 55 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,07 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9785. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 10 шаров, из них 4 белых; во второй урне 20 шаров, из них 3 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,77, для второго – 0,86, для третьего – 0,92. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 17% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 10 деталей имеется 4 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,015. Найти вероятность т ого, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21.Всхожесть семян 75%. Было куплено 8 семян. Какова вероятность, что взойдут не менее 75% всех семян. Решить задачу с помощью формулы Бернулли.

22. Четыре стрелка стреляют по общей мишени. Вероятность попадания у первого – 0,9; второго – 0,95; третьего – 0,80; четвертого – 0,85. Какова вероятность, что в мишени будет три попадания?

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 60. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает больше 2-х вопросов.

24. При приемке партии проверили 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 4%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 6% брака, будет принята.

25. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовленных отлично, 6 - хорошо, 4 - троечника, 2 - двоечника. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

ВАРИАНТ 9

1. В ящике имеется 45 деталей, среди которых 18 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 14 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 6 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,15.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,73 для первого сигнализатора и 0,95 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,68, а для второго – 0,82. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,42. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,82.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,74. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,3; 0,4; 0,5; 0,6. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 200 лотерейных билетов есть 8 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 30 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,07 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,8469. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 10 шаров, из них 5 белых; во второй урне 20 шаров, из них 2 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,84, для второго – 0,89, для третьего – 0,9. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 20% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,03. Найти вероятность т ого, что среди 300 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Из колоды в 36 карт наугад берут 8 карт. Какова вероятность того, что в вынутых картах 5 будут не пиковой масти?

22. Наладчик обслуживает 4 станка. Вероятность, что первый станок потребует внимания наладчика – 0,20; второй – 0,30; третий – 0,40; четвертый – 0,50. Какова вероятность, что не менее трех станков потребуют внимания наладчика.

23. Студент выучил из 60 экзаменационных вопросов 50. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает не более 3-х вопросов.

24. При приемке партии проверили 25% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 5%. Вычислить вероятность того, что партия из 160 изделий, содержащая 10% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 2 подготовленных отлично, 3 - хорошо, 4 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 30 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный - на 25, посредственно - на 15, плохо - на 10. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **двоечник**.

ВАРИАНТ 10

1. В ящике имеется 18 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

2. В ящике 120 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: а) нет бракованных; б) нет годных.

3. В группе 17 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

4. В коробке пять одинаковых изделий, причем три из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.

5. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное y/x не больше двух.

6. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает трех. Найти вероятность того, что сумма $x+y$ не превышает трех, а произведение xy не меньше 0,087.

7. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,75 для первого сигнализатора и 0,92 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

8. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,65, а для второго – 0,83. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

9. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,37. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,65.

10. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,85. найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

11. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,65; 0,78; 0,86; 0,93. Найти вероятность того, что деталь содержится: а) не более чем в трех ящиках; б) не менее в двух ящиках.

12. Среди 100 лотерейных билетов есть 6 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные окажутся выигрышными.

13. В ящике 13 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

14. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,06 и 0,09. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

15. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,7569. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

16. В первой урне содержится 16 шаров, из них 4 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

17. Из трех орудий произведен залп по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия равна 0,77, для второго – 0,82, для третьего – 0,95. Найти вероятности следующих событий: а) три попадания в цель; б) два попадания; в) одно попадание; г) ни одного попадания; д) хотя бы одно попадание.

18. В партии 13% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

19. В партии из 15 деталей имеется 6 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,02. Найти вероятность т ого, что среди 300 деталей окажется ровно четыре бракованных.

21. Вероятность попадания у стрелка 0,7 при одном выстреле. Стрелок стреляет 10 раз. Какова вероятность, что он попадет в цель не менее 7 раз? Решить задачу с помощью формулы Бернулли.

22. Учащийся сдает 4 теста. Вероятность успешно сдать первый тест – 0,9; второй – 0,8; третий – 0,6; четвертый – 0,5. Какова вероятность, что учащийся сдаст успешно более половины тестов?

23. Студент выучил из 80 экзаменационных вопросов 55. В билете 4 вопроса. Найти вероятность того, что ему попадется билет, в котором он знает хотя бы один вопрос.

24. При приемке партии проверили 40% изделий. Условие приемки - наличие брака не выше 2.5%. Вычислить вероятность того, что партия из 200 изделий, содержащая 5% брака, будет принята.

25. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 5 подготовленных отлично, 2 - хорошо, 2 - троечника, 1 - двоечник. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный - на 16, посредственно - на 10, плохо - на 5. Вызванный наугад студент ответил на 3 произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент **отличник**.

Ответы по теории вероятностей (варианты 1 – 5)

№	1 вариант	2 вариант	3 вариант	4 вариант	5 вариант
1	26,37	12,43	17,03	0,85	14,71
2	65,16; 0,01	42,08; 0,11	46,71; 0,07	76,58:0,0006	76,27; 0,0011
3	25,45	11,19	7,07	2,88	34,27
4	60; 30; 90	53,57; 10,71; 64,28	60; 10; 70	57,14; 14,29; 71,43	60; 30; 90
5	38	62,5	63	0	0
6	21	74	0	7,7	44
7	14	40	19,04	30	17,32
8	38	45	19,4	33,72	24,2
9	70	63,33	52,5	25,68	41,3
10	38,4	24,3	11,06	43,23	43,2
11	65,48	58,63	68,2	33,2	65,48
12	0,20	0,15	0,00002	0,03	0,15
13	7,14	10,99	0,0044	0,31	1,1
14	12,6	9,84	30,3	13,52	12,6
15	80	54,84	43,54	62,21	50,26
16	50	24,17	38,33	38,33	33
17	а-61,21 б-32,9 в-5,6 г-0,3 д-99,7	а-55,34 б-37,65 в-6,7 г-0,32 д-99,68	а-67,23 б-28,7 в-3,9 г-0,17 д-99,83	а-59,85 б-35,45 в-4,55 г-0,15 д-99,85	а-58,72 б-34,85 в-6,14 г-0,29 д-99,71
18	0-65,61 1-29,16 2-24,86 3-0,36 4-0,01	0-24,01 1-41,16 2-26,46 3-7,56 4-0,81	0-40,96 1-40,96 2-15,36 3-2,56 4-0,16	0-40,96 1-40,96 2-15,36 3-2,56 4-0,16	0-52,2 1-36,85 2-9,75 3-1,15 4-0,05
19	0-2,22 1-35,56 2-62,22	0-26,47 1-52,94 3-20,59	0-33,33 1-53,33 2-13,33	0-34,29 1-51,43 2-14,29	0-19,23 1-53,85 2-26,92
20	9,02	13,38	0,45	19,22	13,38
21	0,86	20,99	11,14	7,31	0,17
22	99,42	0,83	6,91	56,2	74,28
23	59,26	85,43	25,89	87,42	99,20
24	16,31	5,03	18,58	35,48	7,70
25	57,87	0,37	70,26	0,71	80,62

Ответы по теории вероятностей (варианты 6 – 10)

	6 вариант	7 вариант	8 вариант	9 вариант	10 вариант
1	26,37	5,22	14,71	5,75	4,29
2	70,28; 0,0026	65,16; 0,01	60,86; 0,01	65,16; 0,01	70,28; 0,0026
3	41,96	25,45	1,47	11,19	0,10
4	60; 30; 90	57,14: 14,29; 71,43	60; 30; 90	60;30:90	60; 30; 90
5	39	34,5	36	35,5	36,5
6	2,63	17	19	15	38,4
7	10,52	22,8	18,08	29,3	29
8	39,44	42,868,18	41,9	38,48	40,1
9	88,57	68,18	46,97	62,5	93,33
10	30,76	44,36	38,4	42,71	32,51
11	52,75	62,78	70,11	57,8	56,14
12	0,09	0,09	0,06	0,14	0,30
13	0,05	7,14	0,004	0,05	2,10
14	12,6	13,98	14,44	14,44	14,46
15	43,16	41,84	61,71	37,45	29,78
16	43,33	32,5	27,5	30	22,5
17	а-55,35 б-36,75 в-7,45 г-0,45 д-99,55	а-56,41 б-36,52 в-6,72 г-0,35 д-99,65	а-60,92 б-33,41 в-5,41 г-0,26 д-99,74	а-67,28 б-28,61 в-3,93 г-0,18 д-99,82	а-59,98 б-34,24 в-5,57 г-0,21 д-99,79
18	0-38,95 1-41,42 2-16,51 3-2,93 4-0,19	0-59,97 1-32,71 2-6,69 3-0,61 4-0,02	0-47,46 1-38,88 2-11,95 3-1,63 4-0,08	0-40,96 1-40,96 2-15,36 3-2,56 4-0,16	0-57,29 1-34,24 2-7,67 3-0,76 4-0,03
19	0-9,09 1-48,48 2-42,42	0-70 1-28 2-2	0-33,33 1-53,33 2-13,33	0-2,22 1-35,56 2-62,22	0-34,29 1-51,43 2-14,29
20	0,48	18,30	16,8	3,25	13,38
21	95,37	43,75	67,86	22,41	64,96
22	34,32	89,98	34,32	11,8	65,4
23	99,01	48,26	74,1	52,77	99,2
24	53,09	13,96	38,47	18,28	16,08
25	57,87	0,37	70,26	0,71	80,62

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Авторы представили систематизированное изложение основных понятий теории вероятностей и методов математической статистики.

В пособии рассматривались основные понятия, которыми оперируют в практической деятельности, такие как вероятность, достоверность, значимость.

Материал пособия имеет общий характер и является базой для ряда дисциплин. Он может быть применен в расчетах любых финансовых операций: в финансовом менеджменте, страховом деле, анализе инвестиционных проектов, расчете кредитных и коммерческих операций, эффективности предпринимательской деятельности и т. д.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д. В. Сборник задач по высшей математике. 2-й курс. – М. : Айрис, 2009.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Высш. шк., 2011.

3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М. : Высш. шк., 1999.

4. Рудаковская, Е. Г. Теория вероятностей и матем. статистика / Е. Г. Рудаковская, М. Ф. Рушайло. – М. : РХТУ, 2012.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вероятностные таблицы

Таблица П1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица П2

Значения функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Окончание табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,51	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4499	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Таблица П3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,68	3,92				

Таблица П4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,298	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица П5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица П6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы *k*	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,95
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,59	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3.23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

Окончание табл. П6

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
	0,05	0,025	0,01	0,005	0.\,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица П7

Критические точки распределения *F* Фишера – Снедекора

(k_1— число степеней свободы большей дисперсии,

k_2—число степеней свободы меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$												
	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	90,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5.67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3.52	3,45

Окончание табл. П7

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

	k_1											
k_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,5	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3.34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КОШКИН Виктор Леонидович
ГУБЕРНАТОРОВ Алексей Михайлович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 22.05.20.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,91. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.