

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. Р. НИКИТИН Н. Н. КОРНЕЕВА

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РАДИОСИГНАЛОВ

Учебное пособие



Владимир 2020

УДК 519.2
ББК 22.172
Н62

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
профессор кафедры биомедицинских и электронных средств
и технологий

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Л. Т. Сушкова

Кандидат технических наук
доцент кафедры информационных технологий
Владимирского филиала Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте Российской Федерации
А. Н. Кисляков

Никитин, О. Р. Методы измерения статистических пара-
Н62 метров радиосигналов : учеб. пособие / О. Р. Никитин,
Н. Н. Корнеева ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столето-
вых. – Владимир : Изд-во ВлГУ. – Владимир, 2020. – 227 с.
ISBN 978-5-9984-1107-6

Рассмотрены актуальные вопросы оценки статистических параметров радиосигналов, база критериев: частные и общие критерии согласия, критерии однородности, критерии принятия решений и критерии значимости. Приведены графики кривых Пирсона различных типов для подбора кривых распределения вероятности. Содержится большое количество решений сложных, часто возникающих на практике экспериментальных задач.

Предназначено для студентов-магистрантов направления подготовки 11.04.01 «Радиотехника». Полезно для подготовки и написания ВКР, а также может быть использовано аспирантами в работе над кандидатскими диссертациями при обработке экспериментальных данных.

Табл. 21. Ил. 4. Библиогр.: 17 назв.

УДК 519.2
ББК 22.172

ISBN 978-5-9984-1107-6

© ВлГУ, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. ПОНЯТИЕ И СУЩНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ.....	10
1.1. Постановка проблемы	10
1.2. Статистический критерий.....	11
1.3. Функция потерь и критерий качества выбора решения	13
2. ПРОВЕРКА ПРОСТОЙ ГИПОТЕЗЫ ПРОТИВ ПРОСТОЙ АЛЬТЕРНАТИВЫ	20
2.1. Вероятности правильных и ошибочных решений	20
2.2. Критерии принятия решений	27
2.2.1. Байесовское решение	27
2.2.2. Максимум апостериорной вероятности	29
2.2.3. Максимальное правдоподобие	30
2.2.4. Критерий Неймана-Пирсона	31
2.2.5. Минимаксное правило	32
3. КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ.....	35
3.1. Проверка гипотез для нормального распределения	35
3.1.1. Гипотезы о неизвестном среднем a при известной дисперсии σ^2	35
3.1.2. Гипотезы о неизвестном среднем a при неизвестной дисперсии σ^2	46
3.1.3. Гипотеза о неизвестной дисперсии σ^2	49
3.2. Сравнение средних нормального распределения	57
3.2.1. Проверка гипотез о равенстве средних для двух выборок	57
3.2.1.1. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных..... равных дисперсиях.....	57 57

3.2.1.2. Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях.....	59
3.2.1.3. Сравнение средних при неизвестных неравных дисперсиях .	61
3.2.1.3.1. Критерий Кохрана-Кокса.....	61
3.2.1.3.2. Критерий Сатервайта	62
3.2.2. Проверка гипотез о равенстве средних для $k > 2$ выборок	63
3.2.2.1. Критерий Полсона.....	63
3.2.2.2. Критерий Шеффе.....	67
3.3. Сравнение дисперсий нормального распределения	69
3.3.1. Проверка гипотез о равенстве дисперсий для двух выборок ...	69
3.3.1.1. Критерий Фишера.....	69
3.3.1.2. Критерий Романовского	73
3.3.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий для $k > 2$ выборок ...	74
3.3.2.1. Критерии Бартлетта.....	74
3.3.2.2. Критерии Кохрена	77
3.3.2.3. Критерий Самиуддина	79
3.4. Проверка гипотез для экспоненциального распределения.....	81
3.4.1. Гипотеза о неизвестном параметре экспоненциального распределения.....	81
4. ОБЩИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ	84
4.1. Критерий хи-квадрат Пирсона	84
4.2. Критерий хи-квадрат Фишера	88
4.3. Критерий согласия Колмогорова – Смирнова.....	89
4.4. Критерий Смирнова – Крамера фон Мизеса	91
4.5. Критерий Андерсона-Дарлинга	94
4.6. Критерий согласия Дарбина	97
5. ЧАСТНЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ	98
5.1. Критерии проверки нормальности распределения.....	98
5.1.1. Сравнительный анализ критериев нормальности.....	98
5.1.2. Критерий Шапиро – Уилка.....	100
5.1.3. Критерий α_3	111
5.1.4. Критерий α_4	114
5.1.5. Критерий K^2	117

5.1.6. Критерий нормальности Д'Агостино	118
5.1.7. Энтропийный критерий нормальности (критерий Васичека)	121
5.1.8. Критерий Дэвида – Хартли – Пирсона.....	123
5.2. Критерии проверки экспоненциальности распределения.....	125
5.2.1. Критерий Фроцини.....	126
5.2.2. Критерий Бартлетта – Морана	127
5.3. Критерии проверки равномерности распределения	128
5.3.1. Критерий Ченга – Спиринга.....	128
5.3.2. Критерий Саркади – Косика.....	131
5.4. Критерии симметрии.....	132
5.4.1. Критерий симметрии Смирнова	133
5.4.2. Одновыборочный критерий Вилкоксона	134
6. КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ	137
6.1. Критерий χ^2 -квадрат.....	137
6.2. Критерий Колмогорова	138
6.3. Критерий Уилкоксона – Манна – Уитни	139
7. ПОДБОР КРИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ	141
7.1. Кривые Пирсона типа I	150
7.2. Кривые Пирсона типа II.....	154
7.3. Кривые Пирсона типа III	157
7.4. Кривые Пирсона типа IV	159
7.5. Кривые Пирсона типа V	163
7.6. Кривые Пирсона типа VI	165
7.7. Кривые Пирсона типа VII.....	167
8. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ	170
8.1. Формирование статистического распределения	173
8.2. Расчет координаты центра опытного распределения.....	175
8.3. Расчет оценок стандартных отклонений.....	177
8.4. Идентификация закона распределения методом моментов.....	177

8.5. Устранение грубых ошибок многократных измерений	179
8.6. Исключение прогрессирующей систематической погрешности	182
8.7. Критерии нормальности опытного распределения	182
8.8. Определение случайной погрешности результата измерения....	186
8.9. Проверка однородности дисперсий.....	187
8.10. Определение значимости корреляционной связи	189
8.11. Аппроксимация элементарными функциями	190
8.12. Регрессия полиномами Чебышева	194
8.13. Устранение грубых ошибок совместного измерения.....	196
8.14. Анализ коэффициентов уравнения регрессии.....	197
8.15. Проверка адекватности модели	199
8.16. Прогнозирование по уравнению регрессии.....	200
ПРИЛОЖЕНИЯ	202
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ	223
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	224
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	225

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ СОКРАЩЕНИЙ

- s_i – одно из возможных состояний системы;
- P_i – вероятность события;
- x_i – результат наблюдения;
- n – объем выборки;
- $W_n(x_1, \dots, x_n | s_k)$ – условное распределение выборочных значений, соответствующее состоянию s_k ;
- γ_i – решение о соответствии данных соответствующему состоянию;
- $\delta(\gamma_i | x_1, \dots, x_n), \delta$ – правило выбора решения;
- $\Pi(s_j, \gamma_k)$ – функция потерь;
- $f\{\Pi\}$ – критерий качества выбора решения;
- X – выборка;
- H_i – статистическая гипотеза;
- $S_j(x_1, \dots, x_n)$ – область пространства выборок;
- r_j – условная функция риска;
- R – средняя функция риска;
- $(p_j)_{mm}$ – наименее благоприятное априорное распределение;
- S – критическая область;
- \bar{S} – допустимая область;
- D – поверхность, разделяющая критическую и допустимую области;
- α – уровень значимости, вероятность ошибки первого рода;
- β – вероятность ошибки второго рода;
- K_α – квантиль критерия K на уровне α ;
- $l(x_1, \dots, x_n)$ – отношение правдоподобия;
- $I(\delta, s)$ – количество информации;
- $H(s)$ – энтропия;
- $H(s | \delta)$ – условная энтропия;
- $l(x_1, \dots, x_n)$ – отношение правдоподобия;
- C – пороговое значение критерия;
- ξ – случайная величина;
- $N(a, \sigma^2)$ – нормально распределенная случайная величина с параметрами a и σ^2 ;

\bar{x} – выборочное среднее;
 $a, m_1, M(x)$ – математическое ожидание;
 $\sigma, D(x)$ – дисперсия;
 $f(x)$ – плотность вероятности;
 s^2 – выборочная оценка дисперсии;
 S^2 – несмещенная выборочная оценка дисперсии;
 $F(x)$ – интегральная функция Лапласа;
 $\Phi(x)$ – функция нормального распределения;
 u_α – квантиль нормального распределения уровня $1/2 - \alpha$;
 U – статистика Неймана-Пирсона, статистика Дэвида-Хартли-Пирсона;
 t – статистика Стьюдента;
 $t_{кр}$ – квантиль распределения Стьюдента;
 $\Gamma(n)$ – Гамма-функция;
 χ^2 – распределение хи-квадрат;
 χ^2_α – квантиль распределения хи-квадрат;
 t_k – статистика Кохрена-Кокса;
 t'_p – критическое значение статистики Кохрена-Кокса;
 R – статистика Романовского;
 G – статистика Кокрена;
 $G(\alpha, k, m)$ – критическое значение статистики Кокрена;
 W – статистика Самиуддина, статистика Шапиро-Уилка;
 D_n – статистика Колмогорова – Смирнова;
 α_3 – коэффициент асимметрии;
 α_4 – коэффициент эксцесса;
 B_n – статистика Фроцини;
 B – статистика Бартлетта-Морана;
 W_p – статистика Ченга-Спиринга;
 J – статистика Саркади-Косика;
 T^+ – статистика Вилкокка;

ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах исследователь сталкивается с наблюдениями (различными явлениями природы, результатами эксперимента), имеющими случайный характер. В таких случаях исследователю необходимо принять решения об истинном состоянии явления, однако это решение не может быть априорно правильным (возможны ошибки), также не существует очевидного и единственно верного правила выбора этого решения. Ошибки делятся на два типа. Ошибка, в результате которой принимается гипотеза при условии, что она не верна, называется ошибкой первого рода. В радиотехнике вероятность данной ошибки называется вероятностью ложной тревоги. Другая ситуация, при которой принимается решение об отклонении гипотезы при условии, что она верна, называется ошибкой второго рода. В радиотехнике вероятность данной ошибки называется вероятностью пропуска цели. Предположение о генеральной совокупности называется статистической гипотезой.

Статистическая гипотеза – любое предположение относительно генеральной совокупности. Гипотезы можно классифицировать на параметрические и непараметрические, простые и сложные.

Параметрическая гипотеза – предположение, сформулированное относительно значений параметров функции распределения при условии, что сама функция известна.

Непараметрическая гипотеза – предположение, сформулированное относительно самой функции распределения.

Простая гипотеза – гипотезы, содержащие одно предположение, т. е. ей соответствует одно распределение или одна точка пространства параметров.

Сложная гипотеза – гипотеза, сводящаяся к выбору распределения из множества или точки из конечного или бесконечного интервала.

Метод использования выборки для проверки статистической гипотезы называется статистическим доказательством.

1. ПОНЯТИЕ И СУЩНОСТЬ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1.1. Постановка проблемы

Рассмотрим совокупность *возможных состояний* s_0, \dots, s_m (явлений природы, причин появления событий и т. п.), которые представляют полную группу случайных событий, и пусть p_0, \dots, p_m ($\sum_{k=0}^m p_k = 1$) - априорное распределение вероятностей этих состояний. Рассмотрим далее совокупность результатов наблюдений x_1, \dots, x_n (выборочных значений), зависящих от того, какое из упомянутых состояний в действительности имеет место, и пусть $W_n(x_1, \dots, x_n | s_k)$ - условное распределение выборочных значений, соответствующее состоянию s_k , $k = 0, 1, \dots, m$.

Имеются: набор решений $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ относительно истинности состояний, *правила* $\delta(\gamma_i | x_1, \dots, x_n)$ выбора решения, приписывающие каждому возможному результату наблюдений x_1, \dots, x_n одно из решений γ_i , $i = 0, 1, \dots, m$, а также *функция потерь* $\Pi(s_j, \gamma_k)$, учитывающая последствия выбора решения, и *критерий качества* $f\{\Pi\}$ выбора решения, связанный с функцией потерь.

Требуется: при заданных распределениях $p_k, W_n(x_1, \dots, x_n | s_k)$, наборе решений γ_i функции потерь Π и критерии качества f определить наилучшее в смысле принятого критерия *правило (критерий)* δ использования результатов наблюдений x_1, \dots, x_n для *выбора решения*. Это правило является разновидностью статистического вывода, получаемого по результатам наблюдений, о неизвестных сторонах изучаемого явления, точнее говоря, о принятой математической модели в условиях неполной информации относительно характеристик этой модели.

Замечание: Предполагается, что в процессе извлечения выборочных значений x_1, \dots, x_n состояние s_k изучаемого явления не изменялось. В противном случае выборка оказывается **разнородной**, а от-

дельные ее части принадлежат разным распределениям $w_1(x|s_k)$, $w_1(x|s_j)$ и т.д.

1.2. Статистический критерий

Пусть даны выборки $X = (X_1, \dots, X_n)$ из неизвестного совместного распределения, и семейство статистических гипотез H_0, \dots, H_m . Тогда **статистическим критерием** называется функция, устанавливающая соответствие между наблюдаемыми величинами и возможными гипотезами:

$$\delta: R^n \rightarrow \{H_0, \dots, H_m\}$$

Таким образом, каждой реализации выборки $x = (x_1, \dots, x_n)$ статистический критерий сопоставляет наиболее подходящую с точки зрения этого критерия гипотезу, породившем данную реализацию.

Набор решений $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ представляет собой ряд логических утверждений о том, какая из гипотез относительно состояний s_0, \dots, s_m изучаемого явления истинна. Правило выбора решения δ устанавливает соответствие между набором решений и возможными результатами наблюдений, т. е. пространством выборок. Это означает, что пространство выборок S должно быть разделено на $m+1$ непересекающихся областей S_0, \dots, S_m , и тогда правило выбора решения устанавливает соответствие между решениями γ_k и областями $S_j(x_1, \dots, x_n)$. Важно подчеркнуть, что правило выбора решения устанавливается до проведения наблюдения.

Классификация статистических критериев:

По видам:

- *Критерии согласия.* Проверка предположения о том, что исследуемая случайная величина подчиняется предполагаемому закону распределения.
- *Критерии значимости.* Проверка гипотезы о численных значениях параметров известного закона распределения.
- *Критерии на однородность.* При проверке на однородность случайные величины исследуются на факт взаимного соответствия их

законов распределения (подчиняются ли эти величины одному и тому же закону). Используются в факторном (дисперсионном) анализе для определения наличия зависимостей.

Это разделение условно, и зачастую один и тот же критерий может быть использован в разных качествах.

По способу отображения:

Правило решения может быть **детерминированным** (или **нерандомизированным**). При этом данной области $S_k(x_1, \dots, x_n)$ всегда приписывается определенное решение γ_k , иначе говоря, если наблюдаемая выборка попадает в область S_k , то принимается решение γ_k , т. е. утверждается истинность гипотезы о том, что изучаемое явление находится в состоянии S_k . Правило решения может быть **рандомизированным**. При этом для заданных выборочных значений x_1, \dots, x_n допускается выбор одного из нескольких решений в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Это распределение

$$P\{\gamma_k \mid (x_1, \dots, x_n) \in S_j\},$$

представляет условные вероятности решений при фиксированной выборке

$$\sum_{k=0}^m P\{\gamma_k \mid (x_1, \dots, x_n) \in S_j\} = 1,$$

$$j = 0, 1, \dots, m.$$

Для детерминированного правила решения

$$P\{\gamma_k \mid (x_1, \dots, x_n) \in S_j\} = 1$$

лишь для одного значения $k = j$, и указанная вероятность равна нулю для всех других значений $k \neq j$.

Замечание: Рассматриваться будут только детерминированные статистические критерии.

Часто для упрощения в качестве нулевой гипотезы рассматривается конкретное предположение, а в качестве альтернативной, все остальное пространство возможных вариантов. Тогда выборочное пространство можно разделить на 2 области:

- S - область отклонения основной гипотезы (так же называется **критической областью**),

- \bar{S} - область принятия основной гипотезы (так же называется **допустимой областью**).

При этом $S \cup \bar{S} = \Omega$.

Точки границы S и \bar{S} называют **критическими точками**.

Критические области подразделяют на односторонние (право и левосторонние) рис. 1 а и б, и двусторонние рис. 1 в.

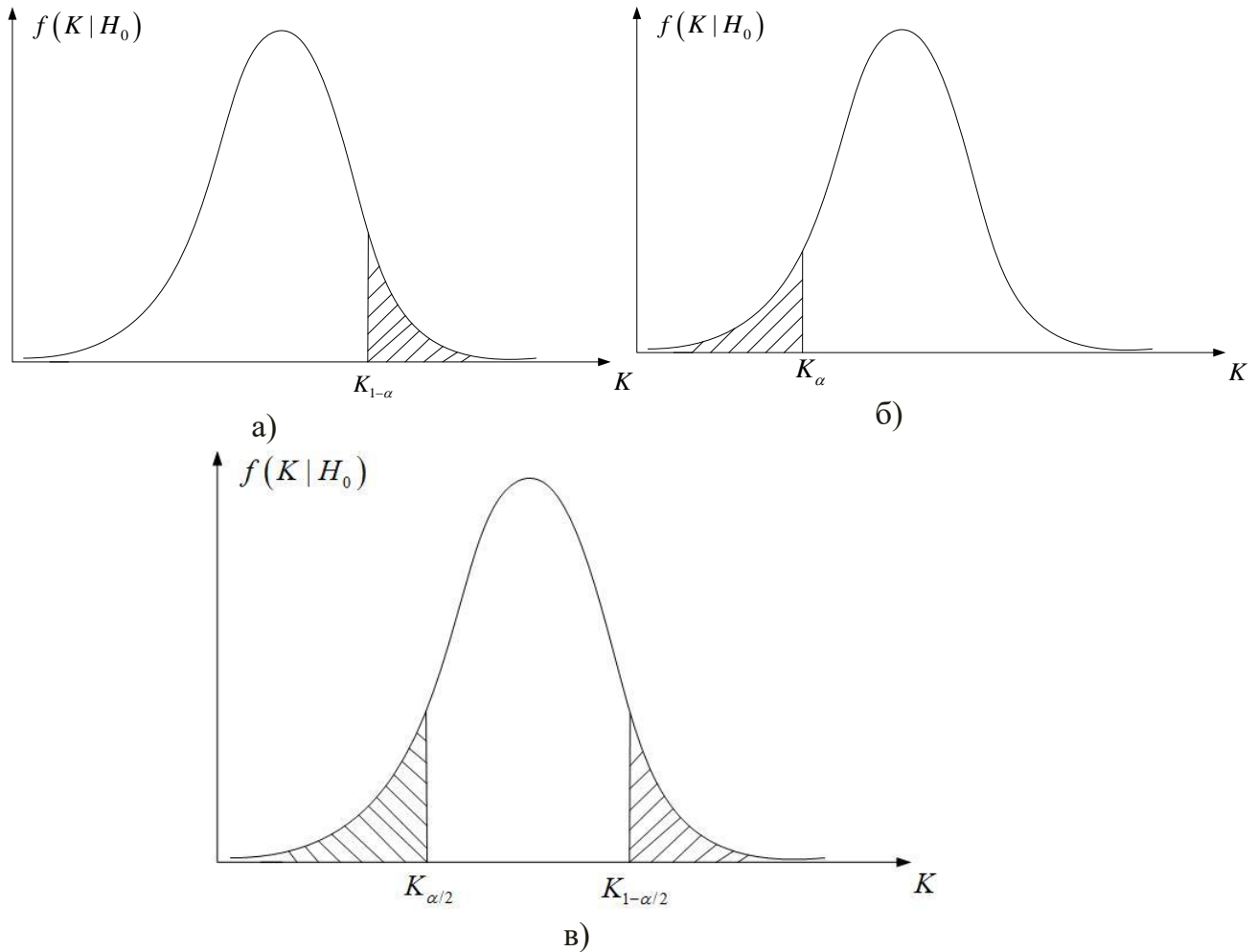


Рис. 1. а) правосторонняя, б) левосторонняя,
в) двусторонняя критическая область

1.3. Функция потерь и критерий качества выбора решения

Использование любого заранее установленного правила выбора решения в силу случайной природы объекта наблюдения неминуемо связано с *возможностью ошибочных решений*. Наблюдаемая выборка

x_1, \dots, x_n может оказаться в области S_k , и будет принято решение γ_k , что изучаемое явление находится в состоянии S_k , хотя в действительности указанная выборка связана с другим состоянием $S_j, j \neq k$. Наличие в последовательности решений не только правильных, но и ошибочных является *неизбежной* платой за попытку получить решение в условиях неполной информации.

Последствия ошибочных решений могут быть различны. Аналитически это обстоятельство учитывается путем введения неотрицательной функции потерь, которая предписывает каждому ошибочному решению, т. е. каждой комбинации S_j и $\gamma_k, j \neq k$, плату

$$\Pi_{jk} = \Pi(S_j, \gamma_k) > 0.$$

Наряду с этим могут быть введены также величины выигрышей (отрицательных потерь), приобретаемых при правильных решениях, или расходы, связанные с вынесением правильных решений

$$\Pi_{jj} = \Pi(S_j, \gamma_j) < \Pi_{jk}, j \neq k.$$

Для заданного состояния S_j средняя величина потерь при использовании определенного правила δ выбора решения (т. е. способа разбиения пространства выборок на области S_k и установления их соответствия набору решений γ_k) в достаточно длинной последовательности экспериментов (результаты которых фиксируются выборками размера n) приближенно равна среднему в пространстве выборок значению (математическому ожиданию) функции потерь

$$r_j = \sum_{k=0}^m \Pi_{jk} P\{\gamma_k | S_j\} = \sum_{k=0}^m \Pi_{jk} P\{(x_1, \dots, x_n) \in S_k | S_j\} \quad (1)$$

где $P\{(x_1, \dots, x_n) \in S_k | S_j\}$ — условная вероятность попадания выборки (x_1, \dots, x_n) в область S_k , если в действительности имеет место состояние S_j .

Условное среднее r_j для данного состояния S_j называется **условной функцией риска**.

Можно принять условную функцию риска за критерий качества правила выбора решения и считать наилучшим правилом то, которое

минимизирует по всем возможным δ величину r_j . Однако оптимальное свойство правила решения зависело бы при этом от заданного состояния s_j . Для другого состояния s_k , $j \neq k$, правило, минимизирующее r_j , возможно, уже не будет реализовывать наименьшее значение r_k .

Усредняя условную функцию риска по всем возможным состояниям s_j , получим

$$R = \sum_{j=0}^m p_j r_j = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m p_j \Pi_{jk} P\{(x_1, \dots, x_n) \in S_k | s_j\} \quad (2)$$

где p_j - априорная вероятность состояния s_j .

Определенное согласно(2) среднее значение функции потерь, которое зависит и от правила выбора решения, и от распределения вероятностей состояний, называется **средней функцией риска**. Эта функция может быть принята за критерий качества правила выбора решения. Тогда оптимальным (наилучшим в смысле принятого критерия) правилом выбора решения будет такое, для которого при заданных функциях потерь, распределении вероятностей состояний и условных распределениях вероятностей выборок при фиксированных состояниях величина средней функции риска будет наименьшей среди значений этой функции, относящихся к любым иным правилам выбора решения. Оптимальным правилом выбора решения задается один (из многообразия возможных) способ разбиения пространства выборок на непересекающиеся области, S_k , $k = 0, 1, \dots, m$, который обеспечивает при длительном его использовании минимальные средние потери.

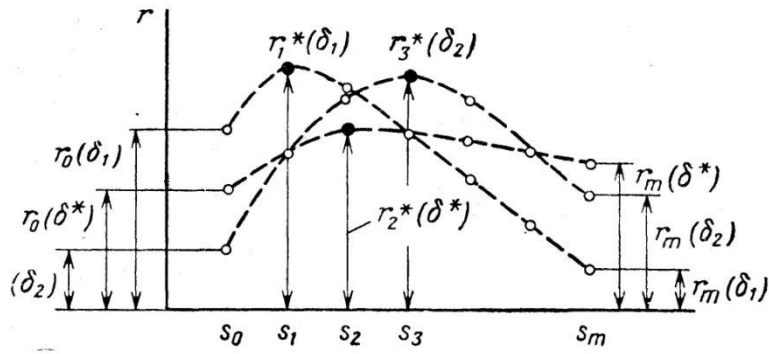
Оптимальное правило выбора решения, минимизирующее среднюю функцию риска, называется **байесовским решением**, а соответствующее ему минимальное значение средней функции риска — **байесовским риском**.

Данная теория обладает существенным недостатком. Прежде чем воспользоваться ее результатами, необходимо запастись достаточно обширной априорной информацией не только об условных

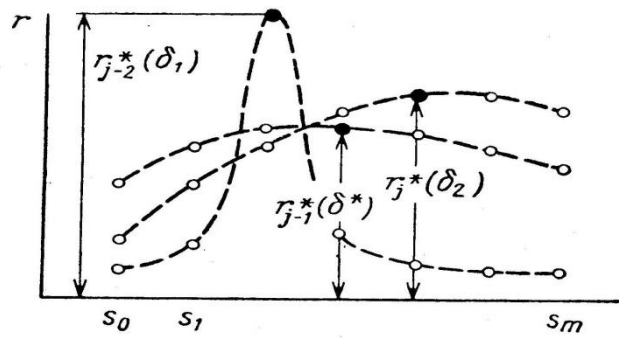
функциях распределения выборочных значений $W_n(x_1, \dots, x_n | s_j)$, которые во многих случаях можно обоснованно задать, но и о функции потерь $\Pi(s_j, \gamma_k)$ и об априорном распределении состояний.

Если априорное распределение состояний неизвестно, то для установления критерия качества выбора решения имеется возможность использовать лишь условную функцию риска r_j , которая представляет функцию целочисленного аргумента j , указывающего состояние s_j . Пусть r_{i1}^* - максимальное значение этой функции для правила выбора решения δ_1 и r_{k2}^* - ее максимальное значение для правила выбора решения δ_2 . Можно считать более благоприятным то из этих двух правил, для которого максимальное значение условной функции риска меньше. Например, если $r_{k2}^* < r_{i1}^*$, то правило δ_2 лучше правила δ_1 . Оптимальным правилом будет такое, которому соответствует минимум среди максимальных значений условных функций риска, определенных при любых других правилах. Это правило называют **минимаксным** правилом выбора решения.

Минимаксное правило выбора решения дает уверенность в том, что потери (в среднем) не будут больше некоторой величины r^* . Хотя во многих случаях использование этого правила разумно, могут быть ситуации, в которых оно будет слишком осторожным, и предпочтительным окажется иное правило решения, для которого максимальное значение условного риска будет больше, чем r^* . Так, например, если в одном из состояний правило выбора решения δ приводит к условному риску, несколько большему, чем r^* , а в остальных состояниях — намного меньшему, чем те, которые соответствуют минимаксному правилу δ^* , то целесообразно отдать предпочтение правилу δ . Указанное обстоятельство иллюстрируется на рис. 2, на котором изображены типичные случаи, когда использование минимаксного правила обоснованно (рис. 2, а) и когда минимаксное правило является чересчур осторожным (рис. 2, б).



а)



б)

Рис. 2. Использование минимаксного правила: а – приемлемо; б – неприемлемо (правило δ_1 лучше, чем δ^*)

Показано [2], что любое минимаксное правило выбора решения является специальным случаем байесовского решения для наименее благоприятного априорного распределения вероятностей $(P_j)_{mm}$ состояний s_j , $j=0,1,\dots,m$, для которого минимальный (байесовский) средний риск имеет наибольшую величину по сравнению с величинами среднего риска, вычисленными для байесовского решения при любом другом распределении. К сожалению, не существует общего метода, при помощи которого можно было бы находить наименее благоприятное априорное распределение $(P_j)_{mm}$.

Однако там же доказано, что байесовское правило выбора решения, которому соответствуют одинаковые для всех состояний условные риски $r_j = r$, $j=0,1,\dots,m$, является минимаксным. Это обстоятельство может быть использовано для определения наименее благоприятного распределения и, следовательно, минимаксного правила. Но следует иметь в виду, что равенство условных рисков при небайесовских решениях не приводит к минимаксному правилу. С другой стороны, если равенство условных рисков неосуществимо, то это еще не

значит, что минимаксного правила не существует. Для его определения в этом случае нужно искать другие методы.

В условиях, когда известно априорное распределение состояний s_j , но нет каких-либо обоснованных соображений относительно величин потерь P^{jk} , может быть использован несколько иной подход к выработке правил выбора решений. Найдем, используя формулу Байеса, апостериорную вероятность состояния s_j , когда наблюдается выборка (x_1, \dots, x_n) :

$$P\{s_j | x_1, \dots, x_n\} = \frac{p_j W_n(x_1, \dots, x_n | s_j)}{\sum_{k=0}^m p_k W_n(x_1, \dots, x_n | s_k)} \quad (3)$$

Указанные апостериорные вероятности представляют наиболее полную характеристику состояния s_j изучаемого явления, какую можно получить, располагая только выборочными значениями случайной величины, связанной с наблюдениями. Поэтому естественно принять следующий критерий: утверждается истинной та из гипотез относительно состояний $s_j, j = 0, 1, \dots, m$, для которой апостериорная вероятность (3) максимальна. Таким образом, критерием качества рассматриваемого правила выбора решения является **максимум апостериорной вероятности**.

Из этого критерия следует правило разбиения пространства выборок. К области S_k относят те выборки (x_1, \dots, x_n) , для которых при всех $j \neq k$.

$$P\{s_k | x_1, \dots, x_n\} \geq P\{s_j | x_1, \dots, x_n\} \quad (4)$$

Если нет никаких априорных сведений и о распределении вероятностей состояний, и о потерях, то можно воспользоваться **критерием максимального правдоподобия**, согласно которому при наблюдении выборки (x_1, \dots, x_n) принимается та из гипотез относительно состояний s_j , для которой функция правдоподобия $W_n(x_1, \dots, x_n | s_j)$ больше других функций правдоподобия $W_n(x_1, \dots, x_n | s_k)$, $k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$. Этот критерий является частным случаем критерия максимальной апостериорной вероятности при условии, что все

состояния равновероятны, т. е. $p_j = \frac{1}{m+1}$.

Еще один критерий качества правила выбора решения связан со средним **количеством информации**, содержащимся в используемом правиле δ относительно исследуемого явления s (характеризуемого $m+1$ состояниями s_0, \dots, s_m и их априорными распределениями P_0, \dots, P_m). По определению среднего количества информации [3].

$$\begin{aligned} I(\delta, s) &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m P\{s_j, \gamma_k\} \ln \frac{P\{s_j, \gamma_k\}}{p_j P\{\gamma_k\}} = \\ &= H(s) - H(s | \delta) = H(s) - \sum_{k=0}^m P\{\gamma_k\} H(s | \gamma_k) \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$H(s) = - \sum_{j=0}^m p_j \ln p_j \geq 0 \quad (6)$$

- *энтропия*, характеризующая априорную неопределенность состояний исследуемого явления, и

$$H(s | \gamma_k) = - \sum_{j=0}^m P\{s_j | \gamma_k\} \ln P\{s_j | \gamma_k\} \geq 0 \quad (7)$$

- *условная энтропия* явления s после того, как принято решение γ_k , причем

$$\begin{aligned} P\{s_j | \gamma_k\} &= \frac{P_j}{P\{\gamma_k\}} \int_{S_k} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_j) dx_1 \dots dx_n \\ P\{\gamma_k\} &= \sum_{j=0}^m p_j \int_{S_k} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_j) dx_1 \dots dx_n \\ H(s | \delta) &= \sum_{k=0}^m P\{\gamma_k\} H\{s_j | \gamma_k\}, 0 \leq H(s | \delta) \leq H(s) \end{aligned}$$

В качестве наилучшего правила δ может быть принято такое, которое доставляет максимум информации $I(\delta, s)$, т. е. минимизирует среднее значение $H(s | \delta)$ условной энтропии (или, как принято говорить в теории информации, *ненадежности*). Иначе говоря, правило выбора решения, удовлетворяющее условию $\max_{\delta} I(\delta, s)$, гарантирует наименьшие в среднем потери информации, связанные с процессом принятия решения на основе выборочных значений [4].

2. ПРОВЕРКА ПРОСТОЙ ГИПОТЕЗЫ ПРОТИВ ПРОСТОЙ АЛЬТЕРНАТИВЫ

2.1. Вероятности правильных и ошибочных решений

Нулевая (основная) гипотеза H_0 утверждает, что различие между выборкой и предполагаемым состоянием отсутствует, а отклонения носят характер случайного колебания выборки.

Альтернативная (конкурирующая) гипотеза H_1 противоречит основной гипотезе.

Рассмотрим следующую ситуацию: Имеется некоторое число наблюдаемых значений x_1, \dots, x_n (выборка размера n) и известно, что эти значения принадлежат одному из двух распределений: $W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)$ или $W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)$, связанных с взаимоисключающими состояниями s_0 и s_1 изучаемого явления. Задача состоит в том, чтобы указать наилучший (в каком-нибудь смысле) алгоритм обработки наблюдаемых данных с целью решить, какому из указанных распределений принадлежит полученная выборка.

Обозначим через H_0 и H_1 - гипотезы о том, что выборочные значения принадлежат распределениям $W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)$ и $W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)$ соответственно, а через γ_0 и γ_1 - решения, состоящие в принятии или отклонении гипотезы H_0 . Гипотеза H_1 является простой альтернативой H_0 , и поэтому может рассматриваться только одна гипотеза H_0 . Ясно, что отклонение гипотезы H_0 означает принятие гипотезы H_1 . Для рассматриваемых *нерандомизированных* процедур проверки задача состоит в установлении до наблюдений правила, согласно которому каждой выборке x_1, \dots, x_n приписывалось бы одно из решений γ_0 или γ_1 иначе говоря, в установлении правила, по которому можно было бы принять или отвергнуть гипотезу H_0 на основании данных, накопленных в процессе наблюдения изучаемого явления. Установление указанного правила эквивалентно разделению n -мерного пространства выборок (x_1, \dots, x_n) на две непересекающиеся области \bar{S} и S . Если данная конкретная выборка попадает в область

\bar{S} , то гипотеза H_0 принимается, а если она попадает в область S то она отвергается (т. е. принимается гипотеза H_1). Таким образом,

$$(x_1, \dots, x_n) \in \bar{S} \rightarrow \gamma_0$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in S \rightarrow \gamma_1$$

где символ включения \in означает принадлежность точки данной области пространства.

Уравнение поверхности $D = (x_1, \dots, x_n) = const$ в n -мерном пространстве, разделяющей указанные области, является аналитическим выражением правила выбора решений.

При использовании любого заранее установленного правила выбора решений наряду с правильными решениями неизбежны (в силу случайной природы выборки) и *ошибочные*. Возможны ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* возникает, когда выборка попадает в критическую область S когда изучаемое явление находится в состоянии s_0 . Тем самым будет отвергнута гипотеза H_0 , хотя в действительности она верна. *Ошибка второго рода* возникает, когда выборка попадает в допустимую область \bar{S} , хотя изучаемое явление находится в состоянии s_1 . В результате будет принята ложная гипотеза. Аналогично могут рассматриваться и два вида правильных решений; принятие верной гипотезы (выборка попадает в область \bar{S} , когда имеет место состояние s_0) и отклонение ложной гипотезы (выборка попадает в область S , когда имеет место состояние s_1).

Нетрудно написать выражения для условных вероятностей ошибок для заданного состояния изучаемого явления. Условная вероятность α ошибки первого рода равна

$$\begin{aligned} \alpha &= P\{\gamma_1 | H_0\} = P\{(x_1, \dots, x_n) \in S | s_0\} = \\ &= \int_{\bar{S}} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (8)$$

Условная вероятность правильного решения, состоящего в принятии верной гипотезы H_0 дополняет указанную вероятность до единицы, т. е.

$$\begin{aligned}
P\{\gamma_0 | H_0\} &= P\{(x_1, \dots, x_n) \in \bar{S} | s_0\} = \\
&= \int_{\bar{S}} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) dx_1 \dots dx_n = \\
&= 1 - \int_S \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) dx_1 \dots dx_n = 1 - \alpha
\end{aligned} \tag{9}$$

Условная вероятность β ошибки второго рода равна

$$\begin{aligned}
\beta &= P\{\gamma_0 | H_1\} = P\{(x_1, \dots, x_n) \in \bar{S} | s_1\} = \\
&= \int_{\bar{S}} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dx_1 \dots dx_n
\end{aligned} \tag{10}$$

Условная вероятность правильного решения, состоящего в отклонении ложной гипотезы, дополняет β до единицы, так как

$$\begin{aligned}
P\{\gamma_1 | H_1\} &= P\{(x_1, \dots, x_n) \in S | s_1\} = \\
&= \int_S \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dx_1 \dots dx_n = \\
&= 1 - \int_{\bar{S}} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dx_1 \dots dx_n = 1 - \beta
\end{aligned} \tag{11}$$

Вероятность α ошибки первого рода (т. е. вероятность отвергнуть правильную гипотезу H_0) называют иногда **уровнем значимости (размером критерия)**, а вероятность $1 - \beta$ отвергнуть ложную гипотезу – **мощностью критерия** выбора решений. Вероятность $1 - \alpha$ называется **надежностью критерия**.

Если известно, что априорные вероятности состояний s_0 и s_1 равны q и $p = q^{-1}$ соответственно, то, используя формулы(8)-(11),

можно найти априорные вероятности принятия решений γ_0 и γ_1 :

$$\begin{aligned}
P\{\gamma_1 | H_1\} &= P\{(x_1, \dots, x_n) \in S | s_1\} = \\
&= \int_S \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dx_1 \dots dx_n = \\
&= 1 - \int_{\bar{S}} \dots \int W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dx_1 \dots dx_n = 1 - \beta \\
P\{\gamma_0\} &= qP\{\gamma_0 | H_0\} + pP\{\gamma_0 | H_1\} = q(1 - \alpha) + p\beta
\end{aligned} \tag{12}$$

$$P\{\gamma_1\} = qP\{\gamma_1 | H_1\} + pP\{\gamma_1 | H_0\} = p(1 - \beta) + q\alpha \tag{13}$$

которые определяют частоты появления отдельных решений в длинной последовательности принятия решений. В формулах (12) и (13) первые слагаемые равны априорным вероятностям правильных решений, а вторые — априорным вероятностям ошибок.

Геометрическая интерпретация ошибок и мощности приведена на рисунке 3.

$f(K | H_i)$ - функция плотности вероятности критерия согласия K , при условии истинности гипотезы H_i .

K_α - квантиль критерия K на уровне α .

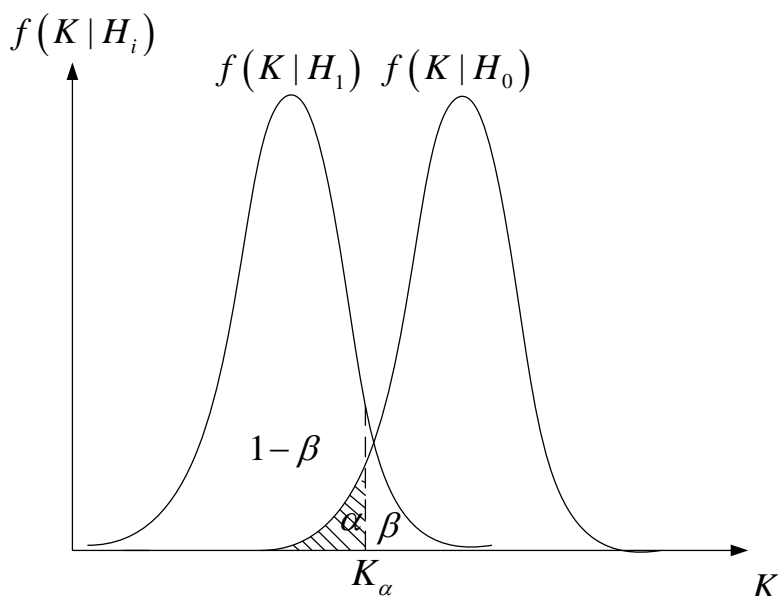


Рис. 3. Геометрическая интерпретация ошибок и мощности

Для заданного размера выборки невозможно одновременно сделать сколь угодно малыми вероятности ошибок и первого, и второго рода.

Действительно, передвигая квантиль K_α влево – уменьшая ошибку первого рода, мы тем самым увеличиваем ошибку второго рода. Единственным способом одновременного уменьшения вероятностей ошибки первого и второго рода является увеличение объема выборки.

Поэтому для того, чтобы сформулировать то или иное правило выбора решений, необходимо выработать какие-то разумные подходы.

Замечание: В радиотехнике вероятность ошибки первого рода называют вероятностью ложной тревоги, а вероятность второго рода – вероятностью пропуска цели.

Пример 1: передача сообщений при наличии помех

Система связи состоит из источника, производящего два сообщения: «да» и «нет», которые преобразуются соответственно в сигналы «1» и «0», канала с помехами, которые могут преобразовывать сигнал «1» в сигнал, «0» или «0» в «1», и приемного устройства, воспроизводящего сигналы в неискаженном или искаженном виде. Оператор, наблюдающий сигнал на выходе приемного устройства, должен расшифровать передачу, т. е. определить по принятому сигналу переданное сообщение.

Если бы сигналы всегда передавались без искажений, то можно было бы по принятому сигналу дать безошибочный ответ на вопрос, какое сообщение было послано. Например, по сигналу «1» всегда узнавалось бы сообщение «да». Иначе говоря, апостериорная вероятность сообщения «да» при условии, что принят сигнал «1», равнялась бы единице. Вследствие искажений помехами принятый сигнал не всегда будет достоверно указывать на то, какое сообщение было передано, т. е. будут случаи, когда принимается сигнал «1» при передаче сообщения «нет», а сигнал «0» — при передаче сообщения «да». Возникает необходимость дать оператору заранее правило поведения в указанной неопределенной ситуации, не полагаясь на его интуицию и субъективные суждения.

Рассмотренный простейший пример содержит все элементы постановки проблемы. Сообщения «нет» и «да» представляют два взаимно несовместимых состояния передатчика s_0 и s_1 . Априорные вероятности этих состояний $p_0 = P\{\text{"Нет"}\}$, $p_1 = P\{\text{"Да"}\} = 1 - p_0$ определяют статистическую структуру источника сообщений, т. е. указывают, какой процент в длинной последовательности сообщений составляют сообщения «нет» и какой процент — сообщения «да». Возможными результатами наблюдений являются сигналы «1» и «0». Условные вероятности этих сигналов $P\{0|s_0\} = 1 - P\{1|s_0\}$, $P\{1|s_1\} = 1 - P\{0|s_1\}$ определяются вероятностными свойствами помех в канале. Величины $P\{0|s_0\}$, $P\{1|s_1\}$ представляют вероятности того, что сигналы «0» и «1» не искажаются помехами, а $P\{1|s_0\}$, $P\{0|s_1\}$ — вероятности искажения двух видов: перехода «0» в «1» и «1» в «0». Набор решений в

этом случае состоит из γ_0 (передано сообщение «нет») и γ_1 (передано сообщение «да»), а правило решения предписывает оператору, какое из этих двух решений он должен выбирать, когда наблюдает сигнал «1» или сигнал «0». Функция потерь в рассматриваемом примере должна учитывать последствия ошибочных решений оператора и назначать «плату» $\Pi_{01} > 0$ за ошибку первого рода (принятие решения, что было передано сообщение «да», когда в действительности передавалось «нет») и «плату» $\Pi_{10} > 0$ за ошибку второго рода (принятие решения, что было передано сообщение «нет», когда в действительности передавалось «да»).

Критерием качества выбора решения может служить среднее значение потерь из-за ошибочных решений, взвешенное с вероятностями их появления. Таким образом, согласно этому критерию выбирается из двух возможных правил выбора решения то, для которого величина среднего значения потерь меньше. Подсчитаем величины средних потерь для двух правил выбора каждого из возможных решений.

Одно правило δ_0 может быть сформулировано так: наблюдаешь сигнал «0» — принимай решение γ_0 (и, следовательно, когда наблюдаешь сигнал «1» — принимай решение γ_1). В этом случае вероятности ошибочных решений равны

$$\begin{aligned} P \{ \text{ошибка 1-го рода} \} &= P\{\gamma_1 | s_0\} = p_0 P\{1 | s_0\}, \\ P \{ \text{ошибка 2-го рода} \} &= P\{\gamma_0 | s_1\} = p_1 P\{0 | s_1\}, \end{aligned}$$

и среднее значение R_0 потерь

$$R_0 = \Pi_{01} p_0 P\{1 | s_0\} + \Pi_{10} p_1 P\{0 | s_1\} \quad (14)$$

Другое правило δ_1 формулируется так: наблюдаешь сигнал «0» — принимай решение γ_1 (и, следовательно, когда наблюдаешь сигнал «1» — принимай решение γ_0). В этом случае вероятности ошибочных решений равны

$$\begin{aligned} P \{ \text{ошибка 1-го рода} \} &= P\{\gamma_0 | s_0\} = p_0 P\{0 | s_0\}, \\ P \{ \text{ошибка 2-го рода} \} &= P\{\gamma_1 | s_1\} = p_1 P\{1 | s_1\}, \end{aligned}$$

и среднее значение R_1 потерь

$$R_1 = \Pi_{01} p_0 P\{0 | s_0\} + \Pi_{10} p_1 P\{1 | s_1\} \quad (15)$$

Принятый критерий качества отдает предпочтение правилу δ_0 ,

если $R_0 < R_1$ т. е. когда

$$R_0 < \frac{1}{2}(R_0 + R_1) \quad (16)$$

Так как

$$R_0 + R_1 = \Pi_{01}p_0 + \Pi_{10}p_1,$$

то из

$$\begin{aligned} R_0 &= \Pi_{01}p_0P\{1|s_0\} + \Pi_{10}p_1P\{0|s_1\} \\ R_0 &= \Pi_{01}p_0P\{1|s_0\} + \Pi_{10}p_1P\{0|s_1\} \end{aligned}$$

и

$$R_0 < \frac{1}{2}(R_0 + R_1)$$

$$R_0 < \frac{1}{2}(R_0 + R_1)$$

приходим к следующему условию, при выполнении которого принимается правило δ_0 :

$$\Pi_{01}p_0P\{1|s_0\} + \Pi_{10}p_1P\{0|s_1\} < \frac{1}{2}(\Pi_{01}p_0 + \Pi_{10}p_1) \quad (17)$$

Формула (17) помимо условных вероятностей ошибок, определяемых вероятностными характеристиками помех в канале, содержит априорные вероятности сообщений и величины потерь. Определение или назначение величин p_0 , Π_{01} , Π_{10} в конкретных ситуациях может представлять значительные трудности. Это обстоятельство является слабым местом и в общей постановке проблемы. Когда нет никаких оснований для того, чтобы ошибку первого рода считать более или менее существенной, чем ошибку второго рода, то полагают потери Π_{01} , Π_{10} одинаковыми, и тогда величины средних потерь просто пропорциональны вероятности ошибки любого рода. Критерий наименьших средних потерь в этом случае переходит в критерий наименьшей частоты ошибок. Когда ничего «неизвестно» о статистической структуре источника сообщений, то остается предположить, что сообщения

«да» и «нет» передаются с равными вероятностями, т. е. $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.

Если $\Pi_{01} = \Pi_{10}$, $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$, то условие (17) становится особенно простым:

$$P\{1|s_0\} + P\{0|s_1\} < 1$$

или

$$P\{1|s_0\} < P\{0|s_1\} \quad (18)$$

Условие (18) означает, что вероятность искажения сигнала «0» меньше вероятности правильного воспроизведения сигнала «1» (иначе, вероятность появления ложного сигнала «1» меньше вероятности неподавления истинного сигнала «1»). Средние потери в этом случае $R_0 < 0,5$, в то время как для правила δ_1 при условии (18) средние потери $R_0 > 0,5$).

2.2. Критерии принятия решений

Плотность вероятности выборки из распределения $w_1(x|s)$ с независимыми элементами x_1, \dots, x_n равна

$$W_n(x_1, \dots, x_n | s) = \prod_{k=1}^n w_1(x_k | s) \quad (19)$$

Совместное распределение выборочных значений называется **функцией правдоподобия выборки**.

Для статистического анализа часто используется отношение правдоподобия:

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} \quad (20)$$

2.2.1. Байесовское решение

Введем, прежде всего, функцию потерь, которая предписывает каждой из четырех комбинаций γ_0 и H_0 , γ_0 и H_1 , γ_1 и H_0 , γ_1 и H_1 соответствующую плату Π_{jk} , $j=0,1$, $k=0,1$. Последние величины удобно представить в виде платежной матрицы

$$\Pi = \begin{pmatrix} \Pi_{00} & \Pi_{01} \\ \Pi_{10} & \Pi_{11} \end{pmatrix}, \Pi_{01} > \Pi_{00}, \Pi_{10} > \Pi_{11} \quad (21)$$

в которой строки соответствуют гипотезам H_0 и H_1 а столбцы – решениям γ_0 и γ_1 . По главной диагонали расположены платы за правильные решения (выигрыши), а по побочной – платы (потери) за ошибочные решения. Среднее значение потерь, взвешенное с вероятностями их появления, или *средний риск* равно

$$R = qr_0 + pr_1 \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} r_0 &= \Pi_{00}(1 - \alpha) + \Pi_{01}\alpha \\ r_1 &= \Pi_{10}\beta + \Pi_{11}(1 - \beta) \end{aligned} \quad (23)$$

– условные риски, соответствующие состояниям s_0 и s_1 .

В качестве критерия для определения правила выбора решений достижение минимальной величины среднего риска R . В рассматриваемом случае средний риск R зависит от критической области S_1 через величины α и $1 - \beta$.

Учитывая определения α и $1 - \beta$ получим следующее неравенство:

$$\frac{pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} \geq \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \quad (24)$$

Таким образом, оптимальное правило, основанное на критерии минимального среднего риска, или *байесовское решение*, может быть сформулировано следующим образом: принимается решение γ_1 (отвергается гипотеза H_0), если для наблюдаемой выборки выполняется неравенство (24), и принимается решение γ_0 (гипотеза H_0 не противоречит выборочным данным), если выполняется неравенство, противоположное (24).

Уравнение поверхности, разделяющей в этом случае критическую и допустимую области пространства выборок, имеет вид

$$D(x_1, \dots, x_n) = \frac{pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} = \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \quad (25)$$

Левую часть этого уравнения $\frac{pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0)}$ называют *обобщенным отношением правдоподобия*. Процедура проверки простой гипотезы H_0 сводится к вычислению обобщенного отношения прав-

доподобия и сравнению его с постоянным порогом C , который для байесовского правила равен

$$C = \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} \quad (26)$$

2.2.2. Максимум апостериорной вероятности

Определим апостериорные вероятности того, что изучаемое явление находится в состоянии s_0 или в состоянии s_1 , когда наблюдается выборка x_1, \dots, x_n . Из (3) в рассматриваемом случае находим

$$P\{s_0 | x_1, \dots, x_n\} = \frac{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0) + pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)} \quad (27)$$

$$P\{s_1 | x_1, \dots, x_n\} = \frac{pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0) + pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)} \quad (28)$$

Установим следующее правило выбора решения: после того как получена выборка x_1, \dots, x_n , принимается гипотеза H_0 , если $P\{s_0 | x_1, \dots, x_n\} > P\{s_1 | x_1, \dots, x_n\}$ (решение γ_0), в противном случае, гипотеза отвергается. Данное правило можно представить в виде: принимается решение γ_1 (отвергается гипотеза H_0), если для наблюдаемой выборки выполняется неравенство

$$\frac{pW_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{qW_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} \geq 1 \quad (29)$$

и принимается решение γ_0 , если выполняется противоположное неравенство.

Таким образом, максимуму апостериорной вероятности соответствует такая критическая область пространства выборок, точки которой удовлетворяют неравенству (29). Процедура проверки простой гипотезы H_0 сводится в этом случае к вычислению обобщенного отношения правдоподобия и сравнению его с единицей. Нетрудно заметить, что рассматриваемое правило выбора решения является просто частным случаем байесовского решения, когда порог $C = 1$. Это соответствует равенству плат за решения γ_0 и γ_1 либо равенству плат за ошибки $\Pi_{10} = \Pi_{01} = \Pi$, если принимается, что $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$. В последнем случае средний риск оказывается равным

$$R = (q\alpha + p\beta)P \quad (30)$$

т. е. отличается только константой P от априорной вероятности ошибок любого рода. Следовательно, правило выбора решения по критерию максимальной апостериорной вероятности *минимизирует априорную вероятность ошибок*. Иначе говоря, это правило на протяжении длинной последовательности принятия решений обеспечивает максимальную частоту *правильных решений*.

2.2.3. Максимальное правдоподобие

Если при выработке правила выбора решений нет никаких данных относительно априорных вероятностей состояний s_0 и s_1 , то вместо рассмотренного критерия можно применить критерий максимума правдоподобия, согласно которому при наблюдении выборки x_1, \dots, x_n принимается та из гипотез, которой соответствует большее значение функции правдоподобия выборки. Таким образом, принимается гипотеза H_0 , если $W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) > W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)$, и отвергается эта гипотеза, если $W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) \leq W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)$. Иначе говоря, принимается решение γ_1 если для наблюдаемой выборки

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} \geq 1 \quad (31)$$

В противном случае принимается решение γ_0 . Процедура проверки простой гипотезы по критерию максимального правдоподобия сводится к вычислению *отношения правдоподобия* и сравнению его с единицей. Отличие от правила, соответствующего максимуму апостериорной вероятности, состоит лишь в замене обобщенного отношения правдоподобия отношением правдоподобия.

Следовательно, правило выбора решения по критерию максимального правдоподобия является частным случаем правила по критерию максимума апостериорной вероятности, когда два возможных состояния изучаемого явления s_0 и s_1 *равновероятны*, т. е. когда

$$p = q = \frac{1}{2}.$$

2.2.4. Критерий Неймана-Пирсона

Другой подход к выработке правила выбора решений при отсутствии априорной информации о потерях и вероятностях состояний указывает критерий Неймана - Пирсона. Согласно этому критерию выбирается такое правило, которое обеспечивает минимально возможную величину β вероятности ошибок второго рода при условии, что вероятность ошибки первого рода не больше заданной величины α .

Теорема Неймана – Пирсона: Среди всех критериев, различающих гипотезы H_0 и H_1 с заданной ошибкой первого рода α , наиболее мощным является критерий отношения правдоподобия.

Согласно теореме Неймана - Пирсона, существует такая константа C , зависящая только от α , что критическая область S наиболее мощного критерия имеет вид

$$S = \{x : W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) \cup \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} > C, W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) \neq 0\}$$

При этом константа C является решением уравнения

$$P\left(\frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} > C | s_0\right) = \alpha \quad (32)$$

Правило выбора решения по критерию Неймана - Пирсона имеет наибольшую мощность среди всех других правил, для которых уровень значимости не превосходит α . Следовательно, нужно максимизировать величину

$$1 - \beta = \int_S W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dt_1 \dots dt_n,$$

при условии

$$\int_S W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dt_1 \dots dt_n = \alpha \quad (33)$$

Множество $T = \{x : W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) = 0\}$ не меняет размера критерия α , но увеличивает его мощность. Считая, что $T \subseteq S$, рассмотрим случай $S \subseteq R_n \setminus T$. Тогда

$$1 - \beta = \int_S \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)} W_n(x_1, \dots, x_n | s_0) dt_1 \dots dt_n$$

при условии

$$\int_S W_n(x_1, \dots, x_n | s_1) dt_1 \dots dt_n = \alpha$$

Следовательно, максимизируется среднее значение случайной

величины $l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | s_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | s_0)}$ при условии истинности нулевой гипотезы H_0 .

Можно заключить, что правило выбора решений, базирующееся на критерии Неймана — Пирсона, является частным случаем байе-

совского решения, в котором величина $\frac{q}{p}$ заменяется величиной C определяемую уравнением (32).

Итак, все рассмотренные выше критерии качества приводят к единообразной процедуре принятия решения: по наблюдаемой выборке x_1, \dots, x_n вычисляется отношение правдоподобия $l(x_1, \dots, x_n)$ и принимается или отвергается гипотеза H_0 в зависимости от того, находится ли эта величина ниже или выше некоторого фиксированного порога, устанавливаемого заранее в соответствии с принятым критерием.

2.2.5. Минимаксное правило

Минимаксное правило выбора решения представляет собой специальный случай байесовского решения для наименее благоприятного априорного распределения состояний изучаемого явления. Так как в рассматриваемом случае проверки простых гипотез имеется лишь два возможных состояния s_0 и s_1 , то указанное распределение определяется лишь одной вероятностью q (или $p = 1 - q$). Поэтому для того, чтобы найти то значение q , с которым связано наибольшее значение байесовского риска, необходимо определить максимум величины R^* как функции q .

Дифференцируя правую часть уравнения полученного из $R = qr_0 + pr_1$ и (23) по q , приравнявая результат дифференцирования нулю и учитывая, что точки поверхности, разделяющей критическую и допустимую области пространства выборок, удовлетворяют усло-

вию(25), приходим к трансцендентному уравнению относительно искомого наименее благоприятного значения вероятности q :

$$R^* = \Pi_{00}[1 - \alpha(q)] + \Pi_{01}\alpha(q) = \Pi_{10}\beta(q) + \Pi_{11}[1 - \beta(q)] \quad (34)$$

Учитывая, что для байесовского критерия

$$\alpha = 1 - F_{10}\left(\frac{q}{p}C\right), \quad \beta = F_{11}\left(\frac{q}{p}C\right),$$

F_{10}, F_{11} - интегральные функции распределения отношения правдоподобия при гипотезах H_0 и H_1 соответственно, получим

$$\frac{\Pi_{00} - \Pi_{11}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} + C \left[1 - F_{10}\left(\frac{q}{p}C\right) \right] = F_{11}\left(\frac{q}{p}C\right) \quad (35)$$

Решая уравнение (35) и выделяя тот корень уравнения μ_{MM} (и, следовательно, q_{MM}) которому соответствует абсолютный максимум байесовского риска, приходим к следующему *минимаксному правилу* выбора решения: отвергается гипотеза H_0 , если для наблюдаемой выборки x_1, \dots, x_n выполняется неравенство

$$\frac{p_{MM}}{q_{MM}} l(x_1, \dots, x_n) \geq C \quad (36)$$

В противном случае, гипотеза принимается.

Величина минимаксного риска в соответствии может быть вычислена по формуле

$$R_{MM} = q_{MM}\Pi_{00} + p_{MM}\Pi_{10} + q_{MM}(\Pi_{01} - \Pi_{00})\alpha_{MM} - p_{MM}(\Pi_{10} - \Pi_{11})(1 - \beta_{MM}) \quad (37)$$

где

$$\alpha_{MM} = 1 - F_{10}(\mu_{MM}C), \quad \beta_{MM} = F_{11}(\mu_{MM}C) \quad (38)$$

Разность $R_{MM} - R^* > 0$ между минимаксным (при неизвестном q) и байесовским риском (при известном q) является платой за отсутствие априорной информации о состояниях изучаемого явления.

Сведем полученные соотношения в таблицу:

Таблица 1. Пороги различных критериев

Критерий	Порог «С»
Байесовские	$\frac{q}{p} \frac{\Pi_{01} - \Pi_{00}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}}$
Максимум апостериорной вероятности	$\mu = \frac{q}{p}$
Максимум правдоподобия	1
Неймана-Пирсона	Из уравнения $F_{10}(C) = 1 - \alpha$
Минимаксный	Из уравнения $\frac{\Pi_{00} - \Pi_{11}}{\Pi_{10} - \Pi_{11}} + C[1 - F_{10}(\mu C)] = F_{11}(\mu C)$

3. КРИТЕРИИ ЗНАЧИМОСТИ

3.1. Проверка гипотез для нормального распределения

Рассмотрим простые методы проверки параметрических гипотез в случае нормального распределения (которые являются формально точными).

3.1.1. Гипотезы о неизвестном среднем a при известной дисперсии σ^2

Пусть случайная величина $\xi \in N(a, \sigma^2)$, причем неизвестно значение математического ожидания a , а дисперсия известна σ^2 . Требуется на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: a = a_0$, если альтернативная гипотеза $H_1: a = a_1$. Вычислить необходимый объем выборки n при ошибке второго рода, равной β .

Решение: Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания a является:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (39)$$

Поэтому естественно выбрать ту гипотезу, к параметру a которой ближе среднее выборочное \bar{x} . При любой из гипотез H_0 и H_1 случайная величина \bar{x} имеет нормальное распределение с параметрами

$$D\bar{x} = \frac{\sigma^2}{n}, \quad M\bar{x} = a_i$$

т.е. математическое ожидание зависит от гипотез. Поэтому распределения случайной величины \bar{x} при гипотезах H_0 и H_1 будут различны:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a_0)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{и} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma^2}}$$

Функции правдоподобия (19) соответственно равны:

$$W_n(x_1, \dots, x_n | H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_0)^2}$$

$$W_n(x_1, \dots, x_n | H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_1)^2}$$

Отсюда отношение правдоподобия (20) имеет вид:

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | H_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | H_0)} = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2]}$$

Критическая область определяется из условия $l(x_1, \dots, x_n) \geq C$. Преобразуем выражение, стоящее в показателе степени:

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n [(x_i - a_1)^2 - (x_i - a_0)^2] = \frac{(a_1 - a_0)(2\bar{x} - a_1 - a_0)n}{2\sigma^2}$$

Отношение правдоподобия имеет вид:

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | H_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | H_0)} = \exp \left[\frac{(a_1 - a_0)(2\bar{x} - a_1 - a_0)n}{2\sigma^2} \right]$$

Поскольку $a_1 > a_0$, это отношение является монотонно возрастающей функцией величины \bar{x} , и так как $W_n(x_1, \dots, x_n | H_0) \neq 0$, то неравенство $l(x_1, \dots, x_n) > C$ равносильно неравенству $\bar{x} > C_1$, где C и C_1 - некоторые константы. Поэтому критическая область имеет вид $S = \{x : \bar{x} > C_1\}$, и C_1 определяется из равенства $P(\bar{x} > C_1 | H_0) = \alpha$.

Для вычисления C_1 прологарифмируем неравенство

$$l(x_1, \dots, x_n) \geq C$$

Получим

$$\ln l(x_1, \dots, x_n) \geq \ln C$$

или

$$\frac{(a_1 - a_0)(2\bar{x} - a_1 - a_0)n}{2\sigma^2} \geq \ln C,$$

откуда найдем \bar{x} :

$$\bar{x} \geq \frac{\sigma^2 \ln C}{(a_1 - a_0)n} + \frac{a_1 + a_0}{2} = C_1 \quad (40)$$

Тогда из определений ошибок первого и второго рода их можно записать в виде:

$$\alpha = 1 - F\left(\frac{C_1 - a_0}{\sigma} \sqrt{n}\right) = 1 - F\left[\frac{a_1 - a_0}{2\sigma} \sqrt{n} + \frac{\sigma \ln C}{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}\right] \quad (41)$$

$$\beta = F\left(\frac{C_1 - a_1}{\sigma} \sqrt{n}\right) = F\left[-\frac{a_1 - a_0}{2\sigma} \sqrt{n} + \frac{\sigma \ln C}{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}\right], a_1 > a_0 \quad (42)$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интегральная функция Лапласа.

Замечание: Величина C может быть определена одним из рассмотренных выше методов, по данным таблицы 1. Рассмотрим несколько критериев принятия решения:

Критерий Неймана-Пирсона:

Поскольку при условии истинности нулевой гипотезы H_0 слу-

чайная величина $\bar{x} \in N\left(a_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, то $\frac{(\bar{x} - a_0)}{\sigma} \sqrt{n} \in N(0,1)$, и вероятность попасть в критическую область будет равна

$$P(S | H_0) = P(\bar{x} \geq C_1, a = a_0) = 1 - F\left[\frac{(C_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \frac{1}{2} - \Phi\left[\frac{(C_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \alpha$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция нормального распределения, которая связана с интегральной функцией Лапласа соотношением:

$$F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2} \quad (43)$$

Обозначим через u_α решение уравнения $\Phi(x) = \frac{1}{2} - \alpha$. Величина

u_α является квантилем уровня $\frac{1 - 2\alpha}{2}$ для стандартного нормального

распределения и принимается здесь в качестве критической точки. Ее значения находят по таблице функции Лапласа из условия

$$\Phi(u_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha.$$

Тогда из равенства

$$\Phi\left[\frac{(C_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}\right] = \frac{1}{2} - \alpha$$

из таблиц функции Лапласа находим квантиль u_α и определяем константу C_1 полагая

$$\frac{(C_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = u_\alpha, \text{ или } C_1 = a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha.$$

Критерий проверки гипотезы можно сформулировать следующим образом: если $a_0 < C_1 < a_1$, то при $\bar{x} > C_1$ принимается гипотеза H_1 , а при $\bar{x} \leq C_1$ принимается гипотеза H_0 .

Таким образом, наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0: a = a_0$ при альтернативной $H_1: a = a_1$ следующий:

- если $\bar{x} \geq a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$, то гипотеза H_0 отклоняется,
- если $\bar{x} < a_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_\alpha$, то гипотеза H_0 принимается.

Если верна гипотеза H_0 , но произошло событие $\bar{x} > C_1$, то принимается гипотеза H_1 , т. е. это ошибка первого рода.

Если же верна гипотеза H_1 , а произошло событие $\bar{x} \leq C_1$, то принимается гипотеза H_0 , и это ошибка второго рода.

Теперь критическая область S полностью определена и можно найти мощность критерия или ошибку второго рода. При истинности гипотезы H_1 среднее наблюдаемое значение x имеет нормальное рас-

пределение $\bar{x} \in N\left(a_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Тогда, по определению, ошибка второго рода и мощность критерия равна

$$\beta = P(\bar{S} | H_1) = P(\bar{x} \leq C_1, a = a_1) = \frac{1}{2} + \Phi \left[\frac{(C_1 - a_1)\sqrt{n}}{\sigma} \right] \quad (44)$$

$$1 - \beta = P(S | H_1) = P(\bar{x} \geq C_1, a = a_1) = \frac{1}{2} - \Phi \left[\frac{(C_1 - a_1)\sqrt{n}}{\sigma} \right] \quad (45)$$

Подставляя в это равенство значение C_1 и учитывая, что $a_1 > a_0$, получаем мощность критерия в виде:

$$1 - \beta = \frac{1}{2} - \Phi \left[-\frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} + u_\alpha \right] \quad (46)$$

Величина $\frac{(a_1 - a_0)}{\sigma}$ называется расстоянием между гипотезами. Из последнего равенства можно определить наименьший объем выборки – такой, чтобы при заданном уровне значимости α вероятность ошибки второго рода была бы равна β .

Поскольку $\Phi \left[\frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} - u_\alpha \right] = \frac{1}{2} - \beta$, то при заданном β аргумент $\Phi(x)$ равен квантили u_β , т.е.

$$u_\beta = \frac{(a_1 - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} - u_\alpha,$$

где u_β - квантиль уровня $\frac{1 - 2\beta}{2}$, полученная как решение уравнения $\Phi(u_\beta) = \frac{1}{2} - \beta$.

Отсюда получаем, что при заданном α риск ошибки второго рода, меньше β , обеспечивается объемом выборки

$$n \geq \frac{(u_\alpha - u_\beta)^2 \sigma^2}{(a_1 - a_0)^2} \quad (47)$$

Замечание: Приведенная формула может давать слишком малые значения n , так как основывается на строго нормальном распре-

делении. На практике n должно быть достаточно велико, чтобы пользоваться асимптотической нормальностью оценок.

Замечание: Практически бывает удобнее, когда конкурирующая гипотеза сложная, возможны 3 варианта: а) $a \neq a_0$, б) $a > a_0$, в) $a < a_0$. При этом основная гипотеза $a = a_0$.

При этом для критерия Неймана-Пирсона¹ статистический критерий имеет вид:

$$U = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma} \sqrt{n} \quad (48)$$

В случае а) критическая точка выбирается из условия

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Если $|U| < u_{кр}$, гипотеза H_0 принимается, если $|U| \geq u_{кр}$ - отвергается. Таким образом, в данном случае имеет место **двусторонняя критическая область**.

В случаях б) и в) критическая точка выбирается из условия

$$\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha.$$

В случае в), если $U < u_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $U \geq u_{кр}$ - отвергается.

В случае б), если $U > -u_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $U \leq -u_{кр}$ - отвергается.

Здесь имеют место **односторонние критические области** (правосторонняя и левосторонняя соответственно).

¹В [5] рассмотрен так же байесовский критерий для проверки сложной гипотезы о неизвестном среднем при известной дисперсии.

Таблица 2. Критические значения функции $\Phi(x)$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0	0						
0,01	0,004	0,13	0,0517	0,25	0,0987	0,37	0,1443
0,02	0,008	0,14	0,0557	0,26	0,1026	0,38	0,148
0,03	0,012	0,15	0,0596	0,27	0,1064	0,39	0,1517
0,04	0,016	0,16	0,0636	0,28	0,1103	0,4	0,1554
0,05	0,0199	0,17	0,0675	0,29	0,1141	0,41	0,1591
0,06	0,0239	0,18	0,0714	0,3	0,1179	0,42	0,1628
0,07	0,0279	0,19	0,0753	0,31	0,1217	0,43	0,1664
0,08	0,0319	0,2	0,0793	0,32	0,1255	0,44	0,17
0,09	0,0359	0,21	0,0832	0,33	0,1293	0,45	0,1736
0,1	0,0398	0,22	0,0871	0,34	0,1331	0,46	0,1772
0,11	0,0438	0,23	0,091	0,35	0,1368	0,47	0,1808
0,12	0,0478	0,24	0,0948	0,36	0,1406	0,48	0,1844
0,49	0,1879	1,02	0,3461	1,55	0,4394	2,16	0,4846
0,5	0,1915	1,03	0,3485	1,56	0,4406	2,18	0,4854
0,51	0,195	1,04	0,3508	1,57	0,4418	2,2	0,4861
0,52	0,1985	1,05	0,3531	1,58	0,4429	2,22	0,4868
0,53	0,2019	1,06	0,3554	1,59	0,4441	2,24	0,4875
0,54	0,2054	1,07	0,3577	1,6	0,4452	2,26	0,4881
0,55	0,2088	1,08	0,3599	1,61	0,4463	2,28	0,4887
0,56	0,2123	1,09	0,3621	1,62	0,4474	2,3	0,4893
0,57	0,2157	1,1	0,3643	1,63	0,4484	2,32	0,4898
0,58	0,219	1,11	0,3665	1,64	0,4495	2,34	0,4904
0,59	0,2224	1,12	0,3686	1,65	0,4505	2,36	0,4908
0,6	0,2257	1,13	0,3708	1,66	0,4515	2,38	0,4913
0,61	0,2291	1,14	0,3729	1,67	0,4525	2,4	0,4918
0,62	0,2324	1,15	0,3749	1,68	0,4535	2,42	0,4922
0,63	0,2357	1,16	0,377	1,69	0,4545	2,44	0,4927
0,64	0,2389	1,17	0,379	1,7	0,4554	2,40	0,4931
0,65	0,2422	1,18	0,381	1,71	0,4564	2,48	0,4934
0,66	0,2454	1,19	0,383	1,72	0,4573	2,5	0,4938
0,67	0,2486	1,2	0,3849	1,73	0,4582	2,52	0,4941
0,68	0,2517	1,21	0,3869	1,74	0,4591	2,54	0,4945

Окончание табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,69	0,2549	1,22	0,3888	1,75	0,4599	2,56	0,4948
0,7	0,258	1,23	0,3907	1,76	0,4608	2,58	0,4951
0,71	0,2611	1,24	0,3925	1,77	0,4616	2,6	0,4953
0,72	0,2642	1,25	0,3914	1,78	0,4625	2,62	0,4956
0,73	0,2673	1,26	0,3962	1,79	0,4633	2,64	0,4959
0,74	0,2703	1,27	0,398	1,8	0,4641	2,60	0,4961
0,75	0,2734	1,28	0,3997	1,81	0,4649	2,68	0,4963
0,76	0,2764	1,29	0,4015	1,82	0,4656	2,7	0,4965
0,77	0,2794	1,3	0,4032	1,83	0,4664	2,72	0,4967
0,78	0,2823	1,31	0,4049	1,84	0,4671	2,74	0,4969
0,79	0,2852	1,32	0,4066	1,85	0,4678	2,76	0,4971
0,8	0,2881	1,33	0,4082	1,86	0,4686	2,78	0,4973
0,81	0,291	1,34	0,4099	1,87	0,4693	2,8	0,4974
0,82	0,2939	1,35	0,4115	1,88	0,4699	2,82	0,4976
0,83	0,2967	1,36	0,4131	1,89	0,4706	2,84	0,4977
0,84	0,2995	1,37	0,4147	1,9	0,4713	2,86	0,4979
0,85	0,3023	1,38	0,4162	1,91	0,4719	2,88	0,498
0,86	0,3051	1,39	0,4177	1,92	0,4726	2,9	0,4981
0,87	0,3078	1,4	0,4192	1,93	0,4732	2,92	0,4982
0,88	0,3106	1,41	0,4207	1,94	0,4738	2,94	0,4984
0,89	0,3133	1,42	0,4222	1,95	0,4744	2,96	0,4985
0,9	0,3159	1,43	0,4236	1,96	0,475	2,98	0,4986
0,91	0,3186	1,44	0,4251	1,97	0,4756	3	0,49865
0,92	0,3112	1,45	0,4265	1,98	0,4761	3,2	0,49931
0,93	0,3238	1,46	0,4279	1,99	0,4767	3,4	0,49966
0,94	0,3264	1,47	0,4292	2	0,4772	3,6	0,499941
0,95	0,3289	1,48	0,4306	2,02	0,4783	3,8	0,499928
0,96	0,3315	1,49	0,4319	2,04	0,4793	4	0,499968
0,97	0,334	1,5	0,4332	2,06	0,4803	4,5	0,499997
0,98	0,3365	1,51	0,4345	2,08	0,4812	5	0,5
0,99	0,3389	1,52	0,4357	2,1	0,4821		
1	0,3413	1,53	0,437	2,12	0,483		
1,01	0,3438	1,54	0,4382	2,14	0,4838		

Пример 2

Пусть имеется 100 выборочных значений из генеральной совокупности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,3997	-1,7424	5,0575	6,3849	7,2887	-0,4558	5,2469	3,5032	7,1303	5,6808
2	7,4894	2,3403	2,2640	8,0389	-7,6183	0,4771	-3,3530	1,0871	6,2434	7,1286
3	-2,0747	0,6447	3,6851	1,5407	4,5091	4,9997	-1,6498	2,1158	-7,6605	8,7268
4	-0,1455	-3,0192	1,7303	-4,1432	2,8957	0,1967	13,8889	8,6923	-9,4844	5,2066
5	-3,9907	1,7247	3,8220	6,7387	1,6348	10,8815	0,5953	4,6376	6,3237	3,4259
6	7,4048	-3,9907	1,7247	3,8220	6,7387	1,6348	10,8815	0,5953	4,6376	6,3237
7	3,4259	7,4048	4,6161	-0,9207	-6,0269	12,2930	-0,0227	3,5168	5,8158	3,5680
8	-1,5236	0,6614	2,3756	10,3948	-1,3041	6,9233	4,5431	1,8307	-2,2849	1,5793
9	2,5665	-4,3470	3,9609	-1,1115	2,5288	4,6811	-1,5233	1,5587	4,7503	-6,1793
10	8,1799	15,1223	7,7970	1,4211	5,1431	-2,1799	12,3893	7,7035	6,9367	-1,3794

Необходимо используя критерий Неймана-Пирсона на уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить гипотезу о равенстве среднего значения $a = a_0 = 3$ при СКО $\sigma = 5$, при условии, что конкурирующая гипотеза $a \neq a_0$.

Решение

Для решения поставленной задачи, необходимо рассчитать статистику Неймана-Пирсона определяемую формулой (48). В статистику входит средне выборочная величина \bar{x} определяемая формулой (39). В данном случае она равна:

$$\bar{x} = 2.6763$$

Тогда, статистика Неймана-Пирсона равна:

$$U = \frac{2.6763 - 3}{5} \sqrt{100} = -0.6474$$

Критическое значение определяется соотношением $\Phi_0(u_{кр}) = 0.495$. Используя таблицу 2 критических значений функции находим $u_{кр} = 2.6$.

Так как $|-0.6474| < 2.6$ гипотеза о равенстве среднего значения $a = a_0 = 3$ принимается на уровне значимости $\alpha = 0,01$.

В случае, если нулевая гипотеза $H_0: a = a_0 = 4$, то соответствующая статистика принимает значение:

$$U = \frac{2.6763 - 4}{5} \sqrt{100} = -2.6474$$

и данная гипотеза на уровне значимости $\alpha = 0,01$ отвергается.

Критерий максимального правдоподобия:

Согласно критерию максимального правдоподобия $l(x_1, \dots, x_n) \geq 1$, следовательно, критерий

$$C_1 = \frac{a_1 + a_0}{2},$$

подставляя данное значение критерия в уравнения (41) и (42) получаем

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{a_1 - a_0}{2\sigma} \sqrt{n}\right) \quad (49)$$

Таким образом, наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0: a = a_0$ при альтернативной $H_1: a = a_1$, следующий:

- если $\bar{x} \geq \frac{a_1 + a_0}{2}$, то гипотеза H_0 отклоняется,

- если $\bar{x} < \frac{a_1 + a_0}{2}$, то гипотеза H_0 принимается.

Обозначим через u_β решение уравнения $\Phi(x) = \frac{1}{2} - \beta$, тогда

$$n \geq 4 \left(\frac{\sigma}{a_1 - a_0} \right)^2 u_\beta^2 \quad (50)$$

Пример 3

Для выборки из примера 2 проверим гипотезу о том, что среднее значение $a_0 = 3$ против альтернативы $a_1 = 5$ методом максимального правдоподобия.

Решение

Как отмечалось выше, пороговым значением для данного критерия является значение:

$$\frac{a_0 + a_1}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4$$

Так как $\bar{x} = 2.6763 < 4$ то нулевая гипотеза принимается, то есть среди двух значений среднего, выбор падает в пользу первого.

Минимаксный критерий:

Пусть $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$, $\Pi_{01} = \lambda \Pi_{10}$. Тогда $C = \lambda \mu = \frac{q}{p} \lambda$ и уравнение, определяющее наименее благоприятную величину априорной вероятности $q_{MM} = 1 - p_{MM}$, может быть представлено в виде:

$$1 - F \left[\frac{\sigma}{(a_1 - a_0)\sqrt{n}} \ln \frac{q\lambda}{1-q} + \frac{a_1 - a_0}{2\sigma} \sqrt{n} \right] = \frac{1}{\lambda} F \left[\frac{\sigma}{(a_1 - a_0)\sqrt{n}} \ln \frac{q\lambda}{1-q} - \frac{a_1 - a_0}{2\sigma} \sqrt{n} \right]$$

Таким образом, наиболее мощный критерий проверки гипотезы $H_0: a = a_0$ при альтернативной $H_1: a = a_1$, следующий:

- если $\bar{x} > \frac{q_{MM}}{p_{MM}} \lambda$, то гипотеза H_0 отклоняется,
- если $\bar{x} \leq \frac{q_{MM}}{p_{MM}} \lambda$, то гипотеза H_0 принимается.

3.1.2. Гипотезы о неизвестном среднем a при неизвестной дисперсии σ^2

Основная гипотеза $H_0: a = a_0$. Альтернативная гипотеза H_1 может быть трех видов: а) $a \neq a_0$, б) $a > a_0$, в) $a < a_0$. Во всех трех случаях для проверки используется статистика критерия

$$t = \frac{\bar{x} - a_0}{S} \sqrt{n} \quad (51)$$

где

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (52)$$

Для проверки берутся критические точки $t_{кр}$ распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы и уровнем значимости α , причем в случае а) — для **двусторонней** критической области, в случаях б) и в) — для **односторонней** критической области.

В случае а), если $|t| < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $|t| \geq t_{кр}$ - отвергается.

В случае б), если $t < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $t \geq t_{кр}$ - отвергается.

В случае в), если $t > -t_{кр}$ - то гипотеза H_0 принимается, если же $t \leq -t_{кр}$ - отвергается.

Таблица 3. Критические значения распределения Стьюдента.

k \ α	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	31,8205	63,6567	636,6192
2	2,92	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,015	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,998	3,4995	5,4079

Продолжение табл. 3

$k \setminus \alpha$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
8	1,8595	2,306	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,201	2,7181	3,1058	4,437
12	1,7823	2,1788	2,681	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,015
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,093	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,086	2,528	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,462	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,75	3,646
35	1,6896	2,0301	2,4377	2,7238	3,5911
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,551
45	1,6794	2,0141	2,4121	2,6896	3,5203
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,496
55	1,673	2,004	2,3961	2,6682	3,4764
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
70	1,6669	1,9944	2,3808	2,6479	3,435
80	1,6641	1,9901	2,3739	2,6387	3,4163
90	1,662	1,9867	2,3685	2,6316	3,4019
100	1,6602	1,984	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,96	2,3263	2,5758	3,2905

Пример 4

Для выборки представленной ниже проверить гипотезу о том, что среднее значение выборки $a_0 = 5$ против альтернативы $a_0 \neq 5$ при условии неизвестной дисперсии и уровне значимости 0,01.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2	5,8089									
3	8,5224	5,3808								
4	3,5210	4,4578	3,0296							
5	6,5796	4,2192	6,8004	4,8087						
6	7,4370	6,6366	1,8451	6,8087	0,5558					
7	4,8116	-1,0659	2,0536	6,1924	6,8340	5,4665				
8	3,0779	10,4266	1,7604	6,1924	4,8087	7,4557	4,1222			
9	3,8808	7,4465	7,3967	5,5976	4,8353	2,7443	9,9080	6,2055		
10	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	6,2040	3,7248	9,4106	
11	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
12	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
13	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
14	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
15	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
16	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
17	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
18	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
19	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
20	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
21	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
22	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
23	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
24	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
25	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
26	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
27	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
28	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
29	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
30	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
31	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
32	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
33	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
34	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
35	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
36	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
37	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
38	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
39	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
40	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
41	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
42	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
43	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
44	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
45	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
46	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
47	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
48	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
49	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
50	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
51	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
52	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
53	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
54	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
55	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
56	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
57	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
58	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
59	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
60	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
61	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
62	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
63	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
64	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
65	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
66	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
67	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
68	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
69	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
70	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
71	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
72	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
73	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
74	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
75	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
76	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
77	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
78	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
79	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
80	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
81	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
82	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
83	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
84	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
85	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
86	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
87	4,8116	-1,0659	1,7604	5,5976	6,8375	1,6438	3,1209	5,7486	2,0209	
88	3,0779	10,4266	7,3967	6,7861	5,3606	2,8291	3,2202	6,2040	7,8264	
89	3,8808	7,4465	4,6045	6,7861	5,3606	6,2384	2,0391	7,2787	3,0284	
90	5,5308	4,0775	4,6045	6,7861	8,1405	4,4061	5,9830	4,2851	5,6888	
91	3,1494	5,8245	6,8033	5,2769	10,1895	3,1743	2,7888	-0,2496	7,7314	5,6888
92	5,8089	6,4829	0,5506	1,9392	3,6590	5,3290	8,3862	4,1301	8,7847	
93	8,5224	5,3808	3,0296	0,5558	5,4665	7,4557	4,1222	3,3776	4,0741	
94	3,5210	4,4578	6,8004	4,8087	6,8340	5,3280	10,4420	5,9361	10,4135	
95	6,5796	4,2192	1,8451	6,8087	4,8353	2,7443	0,6770	6,2055	9,4106	
96	7,4370	6,6366	2,0536	6,1924	4,8353	9,5488	4,9023	9,9080	3,7248	
97	4,8116	-1,0659	1,7604							

На основании представленной выборки, рассчитаем выборочное среднее, выборочную дисперсию и статистику критерия Стьюдента.

Решение

Рассчитаем выборочное среднее по формуле (39):

$$\bar{x} = 5.0466$$

Далее рассчитаем несмещенную оценку дисперсии по формуле (52):

$$S^2 = \frac{1}{100-1} \sum_{i=1}^{100} (x_i - 5.0466)^2 = 6.8687$$

Извлекая корень из полученного числа, получим:

$$S = 2.6208$$

Теперь рассчитаем статистику Стьюдента используя формулу (51):

$$t = \frac{5.0466 - 5}{2.6208} = 0.0178$$

Найдем критическое значение статистики Стьюдента из таблицы 3.

Примерное значение статистики:

$$t_{кр} = 2.6259.$$

Так как $|0.0178| < 2.6259$ гипотеза **принимается**.

3.1.3. Гипотеза о неизвестной дисперсии σ^2

Предположим теперь, что среднее значение нормальной случайной величины равно нулю, а относительно ее дисперсии выдвигается гипотеза H_0 , что она равна σ_0^2 , против простой альтернативы H_1 что дисперсия равна σ_1^2 . Сохраним предположение о независимости элементов выборки, на основании которой должно быть принято решение о принятии или отклонении гипотезы. Распределения случайной величины ξ при гипотезах H_0 и H_1 будут различны:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}} \quad \text{и} \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}$$

Функции правдоподобия (19) соответственно равны:

$$W_n(x_1, \dots, x_n | H_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma_0^2}} \quad W_n(x_1, \dots, x_n | H_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\sigma_1^2}}$$

Отсюда отношение (20) правдоподобия имеет вид:

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{W_n(x_1, \dots, x_n | H_1)}{W_n(x_1, \dots, x_n | H_0)} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \exp \left[- \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \right],$$

тогда логарифм отношения правдоподобия:

$$\ln l(x_1, \dots, x_n) = n \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Учитывая, что правило выбора решения определяется условием $l(x_1, \dots, x_n) \geq C$ и $\ln l(x_1, \dots, x_n) \geq \ln C$ его можно записать следующим образом: принимается решение γ_1 (дисперсия равна σ_1^2), если при $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \ln \left[\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^n C \right] \quad (53)$$

и принимается решение γ_0 (дисперсия равна σ_0^2), если выполняется противоположное неравенство.

Таким образом, процедура проверки гипотезы о дисперсии нормальной случайной величины сводится к сравнению суммы квадратов выборочных значений с порогом

$$K = \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \ln \left[\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \right)^n C \right] \quad (54)$$

Поверхность, разделяющая допустимую и критическую области пространства выборок, представляет в этом случае гиперсферу с центром в начале координат и радиусом, равным \sqrt{K} .

Так как сумма $\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\sigma} \right)^2$ квадратов нормированных нормальных случайных величин имеет χ^2 -распределения с n степенями свободы, то плотности вероятности суммы квадратов в левой части (54) равны

$$w_{10}(y) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma_0^n} \left(\frac{y}{2} \right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma_0^2}}, y > 0$$

если верна гипотеза H_0 , и

$$w_{11}(y) = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma_1^n} \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\sigma_1^2}}, y > 0$$

если верна гипотеза H_1 . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq K \mid H_0\right\} = \int_K^{\infty} w_{10}(y)dy = \\ &= 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{K}{2\sigma_0^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \beta &= P\left\{\sum_{i=1}^n x_i^2 < K \mid H_1\right\} = \int_0^K w_{11}(y)dy = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{K}{2\sigma_1^2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned} \quad (56)$$

где $\Gamma(u, v)$ - неполная гамма-функция.

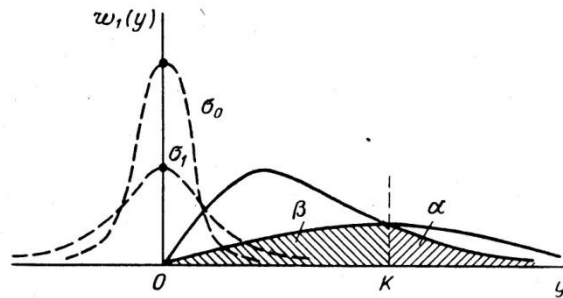


Рис. 4. Правило выбора решения для проверки гипотезы о дисперсии нормальной случайной величины

Рис. 4 иллюстрирует правило выбора решения (54). Пунктирные кривые изображают исходные функции распределения, соответствующие гипотезам H_0 и H_1 . Сплошными линиями показаны распределения суммы квадратов выборочных значений для тех же гипотез. Площади заштрихованных участков равны вероятностям ошибок первого и второго рода.

Величина K для критерия Байеса, максимальной априорной вероятности и максимума отношения правдоподобия определяются по формуле(54). Для критерия Неймана - Пирсона при заданном α из (55)следует:

$$K = \sigma_0^2 \chi_\alpha^2 \quad (57)$$

где χ_α^2 - квантиль случайной величины, распределенной по закону χ^2 с n степенями свободы. Заметим, что порог K , для критерия Неймана-Пирсона, не зависит от величины σ_1 .

Подставляя K в уравнение определяющее ошибку второго рода (56), получим соотношение

$$\frac{\chi_\alpha^2}{\chi_{1-\beta}^2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)^2 \quad (58)$$

связывающее заданную ошибку первого рода, минимально возможную ошибку второго рода и размер выборки, которые неявно входят в уравнение через χ_α^2 и $\chi_{1-\beta}^2$. Отсюда следует, что необходимый размер выборки для достижения наиболее мощного критерия зависит от от-

ношения $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}$.

Если n велико, можно использовать асимптотическую нормальность случайной величины, имеющей χ^2 - распределение, и выразить величины α и β через интеграл Лапласа:

$$\alpha \sim 1 - F\left(\frac{\sqrt{K}}{\sigma_0} - \sqrt{2n}\right)$$

$$\beta \sim F\left(\frac{\sqrt{K}}{\sigma_1} - \sqrt{2n}\right)$$

Замечание: Пусть основная гипотеза $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$, альтернативная же гипотеза H_1 может быть трех видов: а) $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$; б) $\sigma^2 > \sigma_0^2$; в) $\sigma^2 < \sigma_0^2$. Во всех трех случаях для проверки используется статистика критерия

$$\chi^2 = \frac{(n-1)}{\sigma_0^2} S^2 \quad (59)$$

где S^2 определяется соотношением (52).

Для проверки берутся критические точки распределения χ^2 с $n-1$ степенью свободы (и различными уровнями значимости).

В случае а), если $\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \chi^2 < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае она отвергается. Заметим, что границы области **несимметричны** относительно оценки S^2 .

В случае б), если $\chi^2 < \chi_{1-\alpha, n-1}^2$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае отвергается.

В случае в), если $\chi^2 > \chi_{1-\alpha, n-1}^2$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае отвергается.

Критические значения распределения хи-квадрат приведены в таблице 4. Если нужное значение отсутствует, его можно получить с помощью функции `chi2inv` пакета MATLAB.

Пример 5

Пусть имеется выборка из генеральной совокупности, распределенная по нормальному закону с нулевым средним.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,1598	1,7970	0,3674	0,5816	0,2259	0,8799	0,2033	5,5747	-2,3333	-3,7086
2	-2,2814	-2,1867	-0,8672	-0,3369	-0,4371	1,0827	0,7785	1,5025	3,5565	2,4461
3	-2,5665	-4,6579	1,8039	-3,6713	0,1335	0,0710	4,4543	-0,1384	-1,0146	0,4716
4	0,4916	0,1401	-1,2172	-2,4452	0,6330	-2,6857	-2,0644	2,6624	-0,8378	-0,2806
5	1,7996	-0,6002	2,0587	-0,6901	2,0256	1,2587	-0,4260	-1,7314	-2,0862	-0,5401

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10
6	-0,8763	-0,8173	1,9671	-0,5954	2,2874	-1,0632	1,9451	-1,0445	0,3532	1,9415	
7	-0,8279	-0,8765	4,0068	1,9020	-0,8640	1,2979	-0,7202	1,4118	2,8317	-3,2090	
8	2,0577	2,9159	0,0949	3,4925	0,3108	-2,4742	-4,3870	-0,6668	1,4271	0,6348	
9	0,8272	-1,1542	0,2880	-3,2773	-1,5202	-1,6376	1,0395	-0,0283	-2,3111	-0,0190	
10	-1,3796	-1,3334	1,7283	0,2268	0,7967	1,7679	0,3605	1,1017	1,3659	2,3412	

Проверить гипотезу от том, что выборка принадлежит нормальному закону с дисперсией $\sigma^2 = 4$ на уровне значимости 0,01 при альтернативной гипотезе $\sigma^2 \neq 4$.

Решение

Рассчитаем все необходимые величины, используя формулы (39), (52) и (59):

$$\bar{x} = 0.0867$$

$$S^2 = 3.6885$$

$$\chi^2 = 91.2907$$

Критическое значение критерия хи-квадрат:

$$\chi_{\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.005, 99}^2 = \text{chi2inv}(0.005, 99) = 66.5101$$

$$\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 = \chi_{0.995, 99}^2 = \text{chi2inv}(0.995, 99) = 138.9868$$

Так как $\chi_{\alpha/2, n-1}^2 < \chi^2 < \chi_{1-\alpha/2, n-1}^2$, то гипотеза H_0 - выборка сделана из нормальной последовательности с дисперсией $\sigma^2 = 4$ принимается.

Таблица 4. Критические точки распределения χ^2

$n/1-\alpha$	0,99	0,975	0,95	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,025	0,01
1	0,0002	0,001	0,0039	0,0158	0,0642	0,1485	0,275	0,4549	0,7083	1,0742	1,6424	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	0,4463	0,7133	1,0217	1,3863	1,8326	2,4079	3,2189	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	1,0052	1,4237	1,8692	2,366	2,9462	3,6649	4,6416	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	1,6488	2,1947	2,7528	3,3567	4,0446	4,8784	5,9886	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	2,3425	2,9999	3,6555	4,3515	5,1319	6,0644	7,2893	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	3,0701	3,8276	4,5702	5,3481	6,2108	7,2311	8,5581	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119
7	1,239	1,6899	2,1673	2,8331	3,8223	4,6713	5,4932	6,3458	7,2832	8,3834	9,8032	12,017	14,0671	16,0128	18,4753
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	4,5936	5,5274	6,4226	7,3441	8,3505	9,5245	11,0301	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	5,3801	6,3933	7,357	8,3428	9,4136	10,6564	12,2421	14,6837	16,919	19,0228	21,666
10	2,5582	3,247	3,9403	4,8652	6,1791	7,2672	8,2955	9,3418	10,4732	11,7807	13,442	15,9872	18,307	20,4832	23,2093
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	6,9887	8,1479	9,2373	10,341	11,5298	12,8987	14,6314	17,275	19,6751	21,92	24,725
12	3,5706	4,4038	5,226	6,3038	7,8073	9,0343	10,182	11,3403	12,5838	14,0111	15,812	18,5493	21,0261	23,3367	26,217
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	8,6339	9,9257	11,1291	12,3398	13,6356	15,1187	16,9848	19,8119	22,362	24,7356	27,6882
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	9,4673	10,8215	12,0785	13,3393	14,6853	16,2221	18,1508	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	10,307	11,7212	13,0297	14,3389	15,7332	17,3217	19,3107	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	11,1521	12,6243	13,9827	15,3385	16,7795	18,4179	20,4651	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	12,0023	13,5307	14,9373	16,3382	17,8244	19,511	21,6146	24,769	27,5871	30,191	33,4087
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	12,857	14,4399	15,8932	17,3379	18,8679	20,6014	22,7595	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053
19	7,6327	8,9065	10,117	11,6509	13,7158	15,3517	16,8504	18,3377	19,9102	21,6891	23,9004	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	14,5784	16,2659	17,8088	19,3374	20,9514	22,7745	25,0375	28,412	31,4104	34,1696	37,5662
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	15,4446	17,1823	18,7683	20,3372	21,9915	23,8578	26,1711	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322
22	9,5425	10,9823	12,338	14,0415	16,314	18,1007	19,7288	21,337	23,0307	24,939	27,3015	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,848	17,1865	19,0211	20,6902	22,3369	24,0689	26,0184	28,4288	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	18,0618	19,9432	21,6525	23,3367	25,1063	27,096	29,5533	33,1962	36,415	39,3641	42,9798
25	11,524	13,1197	14,6114	16,4734	18,9398	20,867	22,6156	24,3366	26,143	28,1719	30,6752	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141

Окончание табл. 4

26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	19,8202	21,7924	23,5794	25,3365	27,1789	29,2463	31,7946	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	20,703	22,7192	24,544	26,3363	28,2141	30,3193	32,9117	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	21,588	23,6475	25,5093	27,3362	29,2486	31,3909	34,0266	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	22,4751	24,577	26,4751	28,3361	30,2825	32,4612	35,1394	39,0875	42,557	45,7223	49,5879
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	23,3641	25,5078	27,4416	29,336	31,3159	33,5302	36,2502	40,256	43,773	46,9792	50,8922
31	15,6555	17,5387	19,2806	21,4336	24,2551	26,4397	28,4087	30,3359	32,3486	34,5981	37,3591	41,4217	44,9853	48,2319	52,1914
32	16,3622	18,2908	20,0719	22,2706	25,1478	27,3728	29,3763	31,3359	33,3809	35,6649	38,4663	42,5847	46,1943	49,4804	53,4858
33	17,0735	19,0467	20,8665	23,1102	26,0422	28,3069	30,3444	32,3358	34,4126	36,7307	39,5718	43,7452	47,3999	50,7251	54,7755
34	17,7891	19,8063	21,6643	23,9523	26,9383	29,2421	31,313	33,3357	35,4438	37,7954	40,6756	44,9032	48,6024	51,966	56,0609
35	18,5089	20,5694	22,465	24,7967	27,8359	30,1782	32,2821	34,3356	36,4746	38,8591	41,778	46,0588	49,8018	53,2033	57,3421
36	19,2327	21,3359	23,2686	25,6433	28,735	31,1152	33,2517	35,3356	37,5049	39,922	42,8788	47,2122	50,9985	54,4373	58,6192
37	19,9602	22,1056	24,0749	26,4921	29,6355	32,0532	34,2216	36,3355	38,5348	40,9839	43,9782	48,3634	52,1923	55,668	59,8925
38	20,6914	22,8785	24,8839	27,343	30,5373	32,9919	35,192	37,3355	39,5643	42,0451	45,0763	49,5126	53,3835	56,8955	61,1621
39	21,4262	23,6543	25,6954	28,1958	31,4405	33,9315	36,1628	38,3354	40,5935	43,1053	46,173	50,6598	54,5722	58,1201	62,4281
40	22,1643	24,433	26,5093	29,0505	32,345	34,8719	37,134	39,3353	41,6222	44,1649	47,2685	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907
41	22,9056	25,2145	27,3256	29,9071	33,2506	35,8131	38,1055	40,3353	42,6506	45,2236	48,3628	52,9485	56,9424	60,5606	64,9501
42	23,6501	25,9987	28,144	30,7654	34,1574	36,755	39,0774	41,3352	43,6786	46,2817	49,456	54,0902	58,124	61,7768	66,2062
43	24,3976	26,7854	28,9647	31,6255	35,0653	37,6975	40,0496	42,3352	44,7063	47,339	50,548	55,2302	59,3035	62,9904	67,4593
44	25,148	27,5746	29,7875	32,4871	35,9743	38,6408	41,0222	43,3352	45,7336	48,3957	51,6389	56,3685	60,4809	64,2015	68,7095
45	25,9013	28,3662	30,6123	33,3504	36,8844	39,5847	41,995	44,3351	46,7607	49,4517	52,7288	57,5053	61,6562	65,4102	69,9568
46	26,6572	29,1601	31,439	34,2152	37,7955	40,5292	42,9682	45,3351	47,7874	50,5071	53,8177	58,6405	62,8296	66,6165	71,2014
47	27,4158	29,9562	32,2676	35,0814	38,7075	41,4744	43,9417	46,335	48,8139	51,5619	54,9056	59,7743	64,0011	67,8206	72,4433
48	28,177	30,7545	33,0981	35,9491	39,6205	42,4201	44,9154	47,335	49,8401	52,6161	55,9926	60,9066	65,1708	69,0226	73,6826
49	28,9406	31,5549	33,9303	36,8182	40,5344	43,3664	45,8895	48,335	50,866	53,6697	57,0786	62,0375	66,3386	70,2224	74,9195
50	29,7067	32,3574	34,7643	37,6886	41,4492	44,3133	46,8638	49,3349	51,8916	54,7228	58,1638	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539

3.2. Сравнение средних нормального распределения

3.2.1. Проверка гипотез о равенстве средних для двух выборок

Проверяем гипотезу $H_0: a_x = a_y$. Альтернативная гипотеза H_1 может быть трех видов: а) $a_x \neq a_y$, б) $a_x > a_y$, в) $a_x < a_y$. Однако случай в) сводится к случаю б) перестановкой x и y , поэтому не будет рассматриваться отдельно.

3.2.1.1. Гипотеза о равенстве средних при неизвестных равных дисперсиях

Гипотеза H_0 справедлива для любого a , такого, что $a_x = a_y = a$, т. е. гипотеза является сложной и может быть сведена к простой, если рассматривать разность средних $a_x - a_y$. В этом случае естественно рассматривать и разность оценок $\bar{x} - \bar{y}$, распределение которой нормальное, поскольку нормальны x и y . Для того чтобы нормировать разность оценок, найдем ее дисперсию:

$$D(\bar{x} - \bar{y}) = D\bar{x} - D\bar{y} = \frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m} = \frac{n+m}{nm} \sigma^2$$

Тогда случайная величина $\frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma} \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \in N(0,1)$.

Для оценки неизвестной дисперсии σ^2 рассмотрим величины

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}, \quad \frac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^m \frac{(y_i - \bar{y})^2}{\sigma^2}$$

которые распределены по закону χ^2 с $n-1$ и $m-1$ степенями свободы соответственно. Следовательно, случайная величина

$$\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{\sigma^2}$$

-распределена по закону χ^2 с $n+m-2$ степенями свободы. Поскольку $MS_x^2 = MS_y^2 = \sigma^2$, получаем

$$M\left(\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2}\right) = \sigma^2$$

$$\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2}$$

т. е. случайная величина $\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2}$ является несмещенной оценкой для σ^2 . Поэтому величина

$$t = (\bar{x} - \bar{y}) \sqrt{\frac{nm}{n+m}} / \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S} \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \quad (60)$$

где

$$S^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2} \quad (61)$$

S^2 - не зависит от неизвестных a_x , a_y и σ^2 и распределена по закону Стьюдента с $n+m-2$ степенями свободы.

Эту же формулу можно представить в виде

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m}}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

Величина S^2 является объединенной оценкой дисперсии (общей для выборок).

Во всех случаях вычисляют статистику критерия:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}}, \text{ где } S^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{m+n-2}$$

Для проверки берутся критические точки $t_{кр}$ распределения Стьюдента с $n+m-2$ степенью свободы и уровнем значимости α , причем в случае а) - для двусторонней критической области, а в случае б) — для односторонней критической области.

В случае а), если $|t| < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если $|t| \geq t_{кр}$ - отвергается.

В случае б), если $t < t_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если $t \geq t_{кр}$ - отвергается.

Замечание: Поскольку для проверки гипотезы требуется равенство дисперсий для двух выборок, то вначале необходимо проверить это равенство. В противном случае данный метод применять нельзя.

Пример 6

Имеются два ряда выборочных данных:

$(n=12)$ x : 1, 2, 3, 5, 7, 12, 14, 16, 16, 17, 19, 22;

$(m=10)$ y : 12, 16, 19, 22, 24, 26, 32, 34, 36, 44.

Необходимо проверить гипотезу равенства средних в обеих выборках

$H_0: a_x = a_y$ против альтернативы $H_1: a_x \neq a_y$ при доверительной вероятности $p = 0,9$.

Решение

По формуле (39) находим:

$$\bar{x} = 11,167, \quad \bar{y} = 26,5$$

По формуле (52) оценка дисперсии:

$$s_x^2 = 52,515, \quad s_y^2 = 98,5$$

тогда используя формулу (61), получим:

$$s^2 = \frac{(12-1) \cdot 52,515 + (10-1) \cdot 98,5}{12+10-2} = 73,21.$$

Окончательно, наблюдаемое значение статистики определяемое формулой (60) имеет значение:

$$t = \left(\frac{11,167 - 26,5}{8,56} \right) \cdot \left(\frac{12 \cdot 10}{12+10} \right)^{\frac{1}{2}} = -4,18$$

Из табл. 3 для числа степеней свободы $f = 12+10-2 = 20$ и $p = 0,9$ находим $t_{\frac{1+p}{2}} = t_{0,95} = 1,725$. Так как $|t| = 4,18 > t_{kp} = 1,725$, нулевая гипотеза равенства средних должна быть **отклонена**.

3.2.1.2. Гипотеза о равенстве средних при известных дисперсиях

Проверяем гипотезу $H_0: a_x = a_y$. Альтернативная гипотеза H_1 может быть трех видов: а) $a_x \neq a_y$, б) $a_x > a_y$, в) $a_x < a_y$, однако случай в) сводится к случаю б) перестановкой x и y и не будет рассматриваться отдельно. Во всех случаях вычисляют статистику критерия:

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}} \quad (62)$$

В случае а) критическая точка $u_{кр}$ выбирается из условия $\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1-\alpha}{2}$.

Если $|U| < u_{кр}$, гипотеза H_0 принимается, если $|U| \geq u_{кр}$ - отвергается. В случаях б) критическая точка $u_{кр}$ выбирается из условия $\Phi_0(u_{кр}) = \frac{1}{2} - \alpha$. Если $U < u_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $U \geq u_{кр}$ - отвергается.

Замечание: Гипотеза о средних проверяется таким образом обычно в случае больших выборок (объемом порядка сотен), когда оценки дисперсий можно принять за их точные значения.

Пример 7

Имеются две выборки случайных величин:

($n = 10$) x : 1,2; 2,1; 3,2; 3,6; 3,8; 4,4; 6,1; 7,1; 9; 10,2;

($m = 7$) y : 2,4; 2,8; 4,1; 4,4; 6,8; 7,2; 8,9

с известными дисперсиями $\sigma_x^2 = 8,7$ и $\sigma_y^2 = 6,1$. Проверить гипотезу равенства средних значений $H_0: a_x = a_y$ в двух выборках при доверительной вероятности $p = 0,95$ против альтернативы $H_1: a_x \neq a_y$.

Решение

Вычисляем оценки средних, по формуле (39):

$$\bar{x} = 5,07; \bar{y} = 5,23$$

и статистику проверки нулевой гипотезы (62):

$$U = \frac{5,07 - 5,23}{\sqrt{\frac{8,7}{10} + \frac{6,1}{7}}} = -0,121$$

Для $p = 0,95$ имеем (табл. 2) $u_{\frac{1+p}{2}} = u_{0,95} = 1,96$.

Так как $|U| < u_{0,95}$, нулевая гипотеза равенства средних **не отклоняется**.

3.2.1.3. Сравнение средних при неизвестных неравных дисперсиях

Задача сравнения средних двух нормально распределенных совокупностей при неизвестных и неравных (по выборочным оценкам) дисперсиях известна как проблема Беренса-Фишера [5] по имени авторов, впервые ее сформулировавших.

Точного решения этой задачи до настоящего времени нет. На практике обычно используются различные приближения, многие из которых рассмотрены в [6]. Рассмотрим некоторые из них.

3.2.1.3.1. Критерий Кохрана-Кокса

Статистика критерия [7]:

$$t_K = \frac{1}{s}(\bar{x} - \bar{y}) \quad (63)$$

где

$$s^2 = \frac{s_1^2}{n} + \frac{s_2^2}{m} \quad (64)$$

Критические значения статистики вычисляются по формуле:

$$t'_p = \frac{v_1 t_p(f_1) + v_2 t_p(f_2)}{v_1 + v_2} \quad (65)$$

где

$$v_1 = \frac{s_1^2}{n} \quad (66)$$

$$v_2 = \frac{s_2^2}{m} \quad (67)$$

$t_p(f)$ p -квантиль распределения Стьюдента с f степенями свободы (в нашем случае $f_1 = n - 1$ и $f_2 = m - 1$).

Пример 8

Имеются две выборки данных:

$(n = 10)$ x : 2, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 16, 19, 24;

$(m = 9)$ y : 9, 14, 19, 21, 25, 29, 35, 41, 46.

Необходимо проверить гипотезу равенства средних при достоверности $p = 0,95$.

Решение

Вычисляем оценки средних, по формуле (39):

$$\bar{x} = 11,3; \quad \bar{y} = 26,55;$$

Далее находим оценки дисперсии по формуле (52):

$$s_1^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 11,3)^2 = 49,12;$$

$$s_2^2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^9 (x_i - 26,55)^2 = 152,528;$$

Рассчитаем параметры критерия используя формулы (66), (67) и (64):

$$v_1 = \frac{49,12}{10} = 4,912;$$

$$v_2 = \frac{152,528}{9} = 16,947;$$

$$s^2 = v_1 + v_2 = 21,8595;$$

Вычислим теперь статистики критерия Кохрена-Кокса (63):

$$t_K = \frac{1}{4,675} (26,55 - 11,3) = 3,255$$

Для $p = 0,95$ и $f_1 = n - 1 = 9$, $f_2 = m - 1 = 8$ имеем (табл. 3)

$$t_p(f_1) = 1,833, \quad t_p(f_2) = 1,77.$$

Тогда, исходя из (65):

$$t'_p = \frac{4,912 \cdot 1,833 + 16,947 \cdot 1,77}{4,912 + 16,947} = 24,8867$$

Так как $t_K > t'_p$, нулевая гипотеза равенства средних **отклоняется**.

3.2.1.3.2. Критерий Сатервайта

Статистика критерия совпадает со статистикой критерия Кохрена-Кокса. Критическими значениями статистики являются квантили распределения Стьюдента с числом степеней свободы

$$f_C = s^4 \left\{ \frac{1}{n-1} \left(\frac{s_1^2}{n} \right)^2 + \frac{1}{m-1} \left(\frac{s_2^2}{m} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (68)$$

Пример 9

В условиях предыдущей задачи проверить гипотезу равенства средних критерием Сатервайта при достоверности $p = 0,95$.

Решение

Число степеней свободы (68):

$$f_c = 4,675 \left(\frac{1}{9} \left(\frac{49,12}{10} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{152,528}{9} \right)^2 \right) = 12,34$$

Критическое значение статистики табл. 3:

$$t_{0,95}(12,34) \approx 1,77$$

Так как $t_k = 3,255 > t'_p$, нулевая гипотеза равенства средних **отклоняется**.

3.2.2. Проверка гипотез о равенстве средних для $k > 2$ выборок

Имеются k выборок равного объема n из нормально распределенной совокупности $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}; x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}; \dots; x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}$.

Проверке подлежит нулевая гипотеза о статистической неразличимости средних $H_0: a_1 = a_2 = \dots = a_k$ против альтернативы $H_1: |a_{i+1} - a_i| > 0 \ i = 1, 2, \dots, k$. В [6] представлены: модифицированный критерий Стьюдента, критерий «студентизированного» размаха, дисперсионный критерий, критерий Полсона [8], критерий Тьюки [9], обобщенный критерий Тьюки, Критерий Шеффе [10], критерий Стьюдента-Ньюмена-Кейлса [11, 12], критерий Дункана [13], критерий Линка-Уоллеса [14, 15].

3.2.2.1. Критерий Полсона

Полсоном рассмотрена проблема выделения среди k выборок, по n наблюдений в каждой, выборки со средним значением, большим, чем у $k - 1$ остальных.

Статистика критерия имеет вид

$$\lambda = \frac{n \left(\max_{1 \leq j \leq k} \bar{x}_j - \bar{x} \right)}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (\bar{x}_{ij} - \bar{x})^2}}$$

(69)

где

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \quad (70)$$

Если $\lambda \leq \lambda_p$, то с вероятностью P справедлива нулевая гипотеза $H_0: \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_k$. Иначе выборка с наибольшим средним признается значимо отличной от остальных.

Критическое значение статистики равно

$$\lambda_p = \left\{ \frac{n(k-1)F_{p'}}{k[k(n-1) + k - 2 + F_{p'}]} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (71)$$

где $F_{p'}$ – p' – квантиль распределения Фишера (табл.5) с $f_1=1$ и $f_2=kn-2$ степенями свободы и $p' = \frac{2p}{k}$.

Значения для $p' = \frac{2p}{k}$ следует брать из обычных таблиц F -распределения, используя аппроксимацию по P .

Таблица 5. Квантили распределения Фишера при $\alpha = 0,05$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	50	80	100
1	161,448	18,513	10,128	7,709	6,608	5,987	5,591	5,318	5,117	4,965	4,351	4,034	3,960	3,936
2	199,500	19,000	9,552	6,944	5,786	5,143	4,737	4,459	4,256	4,103	3,493	3,183	3,111	3,087
3	215,707	19,164	9,277	6,591	5,409	4,757	4,347	4,066	3,863	3,708	3,098	2,790	2,719	2,696
4	224,583	19,247	9,117	6,388	5,192	4,534	4,120	3,838	3,633	3,478	2,866	2,557	2,486	2,463
5	230,162	19,296	9,013	6,256	5,050	4,387	3,972	3,687	3,482	3,326	2,711	2,400	2,329	2,305

100	80	50	20	15	10	9	8	7	6
253,041	252,724	251,774	248,013	245,950	241,882	240,543	238,883	236,768	233,986
19,486	19,483	19,476	19,446	19,429	19,396	19,385	19,371	19,353	19,330
8,554	8,561	8,581	8,660	8,703	8,786	8,812	8,845	8,887	8,941
5,664	5,673	5,699	5,803	5,858	5,964	5,999	6,041	6,094	6,163
4,405	4,415	4,444	4,558	4,619	4,735	4,772	4,818	4,876	4,950
3,712	3,722	3,754	3,874	3,938	4,060	4,099	4,147	4,207	4,284
3,275	3,286	3,319	3,445	3,511	3,637	3,677	3,726	3,787	3,866
2,975	2,986	3,020	3,150	3,218	3,347	3,388	3,438	3,500	3,581
2,756	2,768	2,803	2,936	3,006	3,137	3,179	3,230	3,293	3,374
2,588	2,601	2,637	2,774	2,845	2,978	3,020	3,072	3,135	3,217
1,907	1,922	1,966	2,124	2,203	2,348	2,393	2,447	2,514	2,599
1,525	1,544	1,599	1,784	1,871	2,026	2,073	2,130	2,199	2,286
1,426	1,448	1,508	1,703	1,793	1,951	1,999	2,056	2,126	2,214
1,392	1,415	1,477	1,676	1,768	1,927	1,975	2,032	2,103	2,191

Практические случаи не ограничиваются уровнем значимости 0.05 поэтому критические значения распределения Фишера можно получить используя функцию `finv` пакета MATLAB.

Пример 10

В результате испытаний пяти выборок приборов объемом $n = 8$ каждая, изготовленных разными заводами, получены следующие значения долговечности приборов (ч):

x_1	11	14	18	21	30	32	40	45
x_2	15	19	21	22	26	38	41	52
x_3	8	11	14	19	31	32	44	58
x_4	4	5	9	18	24	31	45	61
x_5	24	26	32	48	54	62	66	70

Требуется проверить гипотезу о статистической неразличимости средних значений долговечности в выборках при $p = 0,95$.

Решение

Максимальное значение среднего по выборке, найденное по формуле (39) равно:

$$\max_{1 \leq j \leq k} \bar{x}_j = 47,75$$

По формуле (70) находим среднее по всем выборкам:

$$\bar{x} = 31,025$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^8 (x_{ij} - \bar{x})^2 = 9602,34.$$

По формуле (69) находим статистику:

$$\lambda = \frac{8 \cdot (47,75 - 31,025)}{\sqrt{9602,34}} = 1,365$$

Для определения критического значения статистики понадобятся следующие величины:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 5 \cdot 8 - 2 = 38 \\ p' &= \frac{2 \cdot 0,95}{5} = 0,38 \end{aligned}$$

Определим квантиль распределения Фишера:

$$p' = \text{finv}(0.38, 1, 38) = 0.2499$$

Тогда критическое значение статистики, определяемое формулой (71) равно:

$$\lambda_p = \left\{ \frac{8(5-1)0.2499}{5[5(8-1)+5-2+0.2499]} \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,2$$

Так как $1.365 > 0.2$, нулевая гипотеза отклоняется и выборка со средним $\bar{x}_j = 47,75$ должна быть признана значимо отличающейся от остальных. Этот вывод может быть следствием отклонения распределения значений x_{ij} от нормального, а критерий Полсона очень критичен к нормальности распределения.

3.2.2.2. Критерий Шеффе

Среди k средних значений, предварительно упорядоченных по величине: $\bar{x}_1 \leq \bar{x}_2 \leq \dots \leq \bar{x}_k$, производится $k-1$ сравнений. Например, для $k=5$ производится $k-1=4$ множественных сравнения

$$\bar{x}_5 - \bar{x}_1; \bar{x}_5 - \bar{x}_2; \bar{x}_5 - \bar{x}_3; \bar{x}_5 - \bar{x}_4.$$

Если при этом будет превышена критическая разница, то нулевая гипотеза о равенстве средних a_i и a_j отклоняется.

Шеффе предложил использовать в качестве критического значения величину

$$D_1 = s \sqrt{\frac{2(k-1)}{n} F_p(f_1, f_2)} \quad (72)$$

где

$$s^2 = \frac{1}{k(n-1)} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 \quad (73)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j \quad (74)$$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} x_{ij} \quad (75)$$

$F_p(f_1, f_2)$ - p -квантиль распределения Фишера с $f_1 = k - 1$ и $f_2 = k(n - 1)$ степенями свободы. Критерий Шеффе является грубым критерием и особенно пригоден тогда, когда имеется подозрение о неравенстве дисперсий s_j^2 между собой.

Пример 11

В условиях предыдущей задачи требуется проверить гипотезу о статистической неразличимости средних значений долговечности в выборках критерием Шеффе при $p = 0,95$.

Решение

Имеем $n = 8$; $k = 5$;

По формуле (39) вычисляем:

$$\bar{x}_1 = 26,375; \bar{x}_2 = 29,25; \bar{x}_3 = 27,125; \bar{x}_4 = 24,625; \bar{x}_5 = 47,75.$$

Тогда исходя из (52):

$$s = 16,563.$$

Учитывая, что $f_1 = 4$, $f_2 = 35$ находим

$$F_{0,95}(4,35) = 2,65.$$

Следовательно, по формуле (72) находим

$$D_1 = 16,563 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4}{8}} \cdot 2,65 = 26,963$$

Максимальная разность:

$$\max \Delta x = 47,75 - 24,625 = 23,125.$$

Так как $\max \Delta x < D_1$ критерий Шеффе **не отклоняет** нулевую гипотезу.

3.3. Сравнение дисперсий нормального распределения

Пусть имеются две независимые выборки: x_1, \dots, x_n и y_1, \dots, y_m , имеющие нормальное распределение с параметрами (a_x, σ_x^2) и (a_y, σ_y^2) соответственно. Необходимо проверить гипотезу равенства дисперсий σ_x^2 и σ_y^2 , опираясь на их выборочные оценки s_x^2 и s_y^2 .

3.3.1. Проверка гипотез о равенстве дисперсий для двух выборок

В [6] рассмотрены критерий Фишера, критерий Романовского [16], критерий отношения размахов, критерий «студентизированного» размаха, критерий Аризоно-Охты [17].

Рассмотрим самый популярный критерий проверки данного класса гипотез - критерий Фишера и наиболее простой - критерий Романовского.

3.3.1.1. Критерий Фишера

Пусть основная гипотеза $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, альтернативная же гипотеза H_1 может быть трех видов: а) $\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$; б) $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$; в) $\sigma_x^2 < \sigma_y^2$. Однако случай в) сводится к случаю б) перестановкой x и y , поэтому не будет рассматриваться отдельно.

Поскольку средние неизвестны, наилучшими оценками дисперсий (52) являются

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{и} \quad s_y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

Случайные величины s_x^2 и s_y^2 , как следует из *теоремы Фишера*, не зависят от средних, и если справедлива нулевая гипотеза H_0 :

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, то случайные величины $\frac{(n-1)}{\sigma^2} s_x^2$ и $\frac{(m-1)}{\sigma^2} s_y^2$ имеют распре-

деление χ^2 с $n-1$ и $m-1$ степенями свободы соответственно. Тогда статистика

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2} \quad (76)$$

не зависит от параметров нормального распределения и имеет распределение Фишера с $n_1 = n-1$ и $n_2 = m-1$ степенями свободы. Очевидно, что если дисперсии равны, то отношение их оценок должно быть близким к единице. Поэтому критерий таков: гипотеза H_0 отвергается, если $F < C_1$ или $F > C_2$, где $C_1 < 1 < C_2$. Задача свелась к нахождению констант C_1 и C_2 . По заданному уровню значимости α и числу степеней свободы по таблицам распределения Фишера находят квантиль $F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$. Для α -квантилей Фишера справедливо соотношение

$$F_\alpha(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2, n_1)} \quad (77)$$

Отсюда следует алгоритм проверки гипотезы.

В случае а) делят *большую* выборочную дисперсию на *меньшую*:

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2} \quad (78)$$

Обозначим через n_{\min} объем выборки с меньшей выборочной дисперсией и через n_{\max} - с большей. По таблице для распределения Фишера находим критическую точку с уровнем значимости $\alpha/2$ и числами степеней свободы $n_{\min} - 1$ и $n_{\max} - 1$. Если $F < F_{кр}$, то основная гипотеза принимается, в противном случае отвергается.

В случае б) делят первую выборочную дисперсию на вторую:

$$F = \frac{S_x^2}{S_y^2}$$

По таблице для распределения Фишера находим критическую точку с уровнем значимости α и числами степеней свободы $n-1$ и $m-1$. Если $F < F_{кр}$, то основная гипотеза принимается, в противном случае отвергается.

Замечание: Если известны средние распределения a_x и a_y , то

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_x)^2 \quad \text{и} \quad S_y^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - a_y)^2$$

и статистика $F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}$ имеет распределение Фишера с n и m степенями свободы.

Замечание: Критерий Фишера очень чувствителен к отклонениям от нормальности распределений x и y . Для повышения устойчивости используется корректировка степеней свободы. Вместо n_1 и n_2 используются

$$n'_1 = d \cdot n_1 \tag{79}$$

$$n'_2 = d \cdot n_2 \tag{80}$$

где

$$d = \left[1 + \frac{b-3}{2} \frac{n+m-4}{n+m-b+3} \right]^{-1} \tag{81}$$

$$b = (n+m) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 + \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^4}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2 \right]^2} \tag{82}$$

В случае если количество серий результатов наблюдений больше двух, то из всех оценок дисперсий выбирают две - с максимальным и минимальным значениями. Если окажется, что различие между ними незначимо, то тем более незначимо и различие между остальными дисперсиями. Недостатком критерия Фишера в этом случае является то, что информация об остальных сериях, кроме имеющих наибольшую и наименьшую дисперсии, не используется.

Пример 12

Имеются две выборки нормально распределенных случайных величин $n = m = 10$

$$x: 2,1; 3,1; 4,8; 6,1; 7,4; 8,5; 10,1; 12,1; 14,0; 15,6;$$

y : 4,6; 6,1; 8,2; 9,8; 9,9; 10,4; 13,1; 14,5; 16,1; 19,1.

Необходимо проверить гипотезу равенства дисперсий $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ против альтернативы $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ при доверительной вероятности $p = 0.95$.

Имеем

$$\bar{x} = 8.38; \bar{y} = 11.18$$

$$s_1^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 20.757; s_2^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 20.419$$

Далее $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{20.757}{20.419} = 1.016$. Из таблиц находим

$$F_{\frac{1+\alpha}{2}}(n-1; m-1) = F_{\frac{1+0.95}{2}}(9; 9) = 4.03$$

Так как $F = 1.016 < F_{0.975}(9; 9) = 4.03$, нулевая гипотеза **не отклоняется**.

Рассмотрим теперь критерий со скорректированными степенями свободы. Имеем

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 186.813;$$

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 = 183.771;$$

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^4 = 6439.996;$$

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^4 = 7281.725;$$

$$b = (10+10) \cdot \frac{6439.996 + 7281.725}{(186.813 + 183.771)^2} = 1.99832;$$

$$d = \left[1 + 0.5 \cdot \frac{10+10-4}{10+10-3-(1.99832-3)} \cdot (1.99832-3) \right]^{-1} = 1.802$$

Окончательно имеем $f'_1 = d \cdot f_1 = 1.802 \cdot 9 = 16.22$ и $f'_2 = d \cdot f_2 = 1.802 \cdot 9 = 16.22$.

Рассчитаем критическое значение:

$$F_{0.975}(16.22; 16.22) = \text{finv}(0.975, 16.22, 16.22) = 2.741$$

Так как $F = 1.016 < F_{кр} = 2.741$, нулевая гипотеза **не отклоняется** и в этом случае.

3.3.1.2. Критерий Романовского

Статистика критерия:

$$R = \frac{|Q-1|}{\sigma_Q} \quad (83)$$

где

$$Q = \frac{m-3}{m-1} \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (84)$$

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{2(n+m-4)}{(n-1)(m-5)}} \quad (85)$$

Если $R \geq 3$, то нулевая гипотеза равенства дисперсий отклоняется с достоверностью не менее 0,89.

Пример 13

Имеются две выборки нормально распределенных случайных величин $n = m = 10$

x : 2,1; 3,1; 4,8; 6,1; 7,4; 8,5; 10,1; 12,1; 14,0; 15,6;

y : 4,6; 6,1; 8,2; 9,8; 9,9; 10,4; 13,1; 14,5; 16,1; 19,1.

Проверить гипотезу равенства дисперсий критерием Романовского.

Решение

По формуле (84) вычисляем:

$$Q = \frac{10-3}{10-1} \cdot \frac{20,757}{20,419} = 0,7906$$

По формуле (85) находим:

$$\sigma_Q = \sqrt{\frac{2 \cdot (10+10-4)}{(10-1)(10-5)}} = 0,84327$$

Находим статистику критерия (83):

$$R = \frac{|0,7906-1|}{0,84327} = 0,248$$

Так как $R < 3$, нулевая гипотеза равенства дисперсий **не отклоняется**.

3.3.2. Проверка гипотез о равенстве дисперсий для $k > 2$ выборок

Пусть $s_1^2, s_2^2, \dots, s_k^2$ - взаимно независимые выборочные оценки дисперсий $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2$ по выборкам объема n_1, n_2, \dots, n_k . Проверяется нулевая гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_{i+1}^2$ против альтернативы $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_{i+1}^2$ (для $i = 1, 2, \dots, k$).

В литературе встречается множество различных критериев проверки данной гипотезы. В виду ограниченности объема, рассмотрим критерий Бартлетта, критерий Кохрена и критерий Самиуддина. Другие критерии, такие как: критерий Неймана-Пирсона, критерий Блисса-Кохрана-Тьюки [18], Критерий Хартли [19], критерий Кэдуэлла-Лесли-Брауна [20,21] можно найти в [6].

3.3.2.1. Критерии Бартлетта

Пусть генеральные совокупности X_1, \dots, X_m распределены нормально. Из этих совокупностей извлечены независимые выборки объемов n_1, \dots, n_m . По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии S_1^2, \dots, S_m^2 . Требуется на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве дисперсий для всех выборок, т. е. $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2$ (в противоположность гипотезе, что какие-то из дисперсий не равны).

Изложим **критерий Бартлетта**, позволяющий проверить такую гипотезу. Введем обозначения:

пусть $k_i = n_i - 1$ - число степеней свободы S_i^2 ;

Сумма чисел степеней свободы:

$$k = \sum_{i=1}^m k_i \quad (86)$$

Среднее арифметическое исправленных дисперсий, взвешенное по степеням свободы:

$$S^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^m (i-1) \cdot S_i^2 \quad (87)$$

$$V = k \ln S^2 - \sum_{i=1}^m k_i \ln S_i^2 \quad (88)$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{k_i} - \frac{1}{k} \right) \quad (89)$$

Статистикой критерия Бартлетта является величина:

$$B = V/C \quad (90)$$

При условии, что нулевая гипотеза верна, эта статистика распределена примерно как χ^2 с $m-1$ степенью свободы. Для применения критерия необходимо, чтобы все $n_i \geq 4$.

Если $B < \chi_{\alpha, m-1}^2$, то H_0 принимается, в противном случае отвергается.

Иногда нет необходимости вычислять величину C , а именно: если оказывается, что $V < \chi_{\alpha, m-1}^2$, то этого достаточно для выполнения условия $B < \chi_{\alpha, m-1}^2$, поскольку $C > 1$.

Замечание: Критерий Бартлетта, как и критерий Фишера, очень чувствителен к отклонениям от нормальности исследуемых выборок. При отклонениях закона распределения серий результатов наблюдений от нормального наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$M = \frac{n_2 V}{n_1 (b - V)} \quad (91)$$

где

$$n_1 = m - 1 \quad (92)$$

$$n_2 = \frac{m - 1}{(C - 1)^2} \quad (93)$$

$$b = \frac{n_2^2}{n_2 (2 - C) + C} \quad (94)$$

V и C вычисляются по тем же формулам, что и в первом случае.

Критическое значение критерия Бартлетта в этом случае равно квантили распределения Фишера со степенями свободы n_1 и n_2 при заданной доверительной вероятности P .

$$B_{кр} = F_p(n_1, n_2) \quad (95)$$

Пример 14

Имеются четыре выборки случайных величин:

$$x_1: 3, 4, 5, 6, 7; \quad x_2: 2, 8, 9, 11, 15;$$

$$x_3: 9, 11, 15, 20, 28; \quad x_4: 4, 6, 8, 10, 16.$$

Необходимо проверить нулевую гипотезу равенства дисперсий в выборках $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma^2$ критерием Барлетта при доверительной вероятности $p = 0,95$.

Решение

Вычисляем оценки средних по формуле (39):

$$\bar{x}_1 = 5, \quad \bar{x}_2 = 9, \quad \bar{x}_3 = 16,6, \quad \bar{x}_4 = 8,8.$$

Находим оценки дисперсий по формуле (52):

$$s_1^2 = 2,5, \quad s_2^2 = 22,5, \quad s_3^2 = 58,3, \quad s_4^2 = 21,2.$$

Вычисляем параметры по формулам (86)-(90):

$$k = \sum_{i=1}^5 (n_i - 1) = 16;$$

$$M = 16 \cdot \ln \left(\frac{1}{16} \sum_{i=1}^4 4 \cdot s_i^2 \right) - \sum_{i=1}^4 4 \cdot \ln s_i^2 = 4,6088;$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(4-1)} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{5-1} - \frac{1}{16} \right) = 1,104;$$

$$B = 4,474.$$

Из табл. 4 для $f = m - 1 = 4 - 1 = 3$ находим $\chi_{0,95}^2(3) = 7,81$.

Так как $B = 4,474 < \chi_{0,95}^2(3) = 7,81$, нулевая гипотеза не отклоняется. Применим теперь уточненный критерий. Находим (92)-(94)

$$n_1 = k - 1 = 3;$$

$$n_2 = \frac{4+1}{(1,104-1)^2} = 462,28;$$

$$b = \frac{462,28^2}{462,28 \cdot (2 - 1,104)}$$

Тогда (91):

$$M = \frac{462,28 \cdot 4,6088}{3 \cdot (514,566 - 4,6088)} = 1,393.$$

Из табл. 5. находим $F_{0,95}(3; 462, 3) = 2,62$. Так как $M < F_{0,95}$, нулевая гипотеза **не отклоняется**.

3.3.2.2. Критерии Кохрена

Когда размеры выборок одинаковы, предпочтительнее использовать **критерий Кокрена** [22]. Статистикой критерия Кокрена является отношение максимальной исправленной выборочной дисперсии к их сумме:

$$G = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2} \quad (96)$$

В предположении, что нулевая гипотеза верна, распределение этой статистики зависит только от числа степеней свободы $k = n - 1$ и числа выборок m .

По таблице 6 критических точек распределения Кокрена находят критическую точку $G_{кр} = G(\alpha, k, m)$. Если $G < G_{кр}$, то H_0 принимается, в противном случае отвергается.

Если гипотеза о равенстве дисперсий для всех выборок принимается, то в качестве оценки этой общей дисперсии можно использовать величину S^2 .

Табл. 6. Критические значения $G_{кр}(\alpha, k, m)$ статистики Кохрена для доверительной вероятности $p = 0,95$ [23]

k	n											
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	17	37
2	0,999	0,995	0,979	0,959	0,937	0,917	0,899	0,882	0,867	0,854	0,795	0,707
3	0,993	0,942	0,883	0,833	0,793	0,761	0,733	0,711	0,691	0,673	0,606	0,515
4	0,967	0,864	0,781	0,721	0,676	0,641	0,613	0,590	0,570	0,554	0,488	0,406
5	0,928	0,788	0,696	0,633	0,587	0,553	0,526	0,504	0,485	0,470	0,409	0,335
6	0,883	0,722	0,626	0,563	0,519	0,487	0,461	0,440	0,423	0,408	0,353	0,286
7	0,838	0,664	0,568	0,508	0,466	0,435	0,410	0,391	0,375	0,362	0,310	0,249

∞	0,794	0,615	0,521	0,463	0,423	0,393	0,370	0,352	0,337	0,325	0,278	0,221
9	0,754	0,573	0,481	0,425	0,387	0,359	0,338	0,321	0,307	0,295	0,251	0,199
10	0,707	0,536	0,447	0,393	0,357	0,331	0,311	0,294	0,281	0,270	0,230	0,181
12	0,653	0,475	0,392	0,343	0,310	0,286	0,268	0,253	0,242	0,232	0,196	0,153
15	0,548	0,407	0,332	0,288	0,259	0,239	0,223	0,210	0,200	0,192	0,161	0,125
20	0,480	0,330	0,265	0,229	0,205	0,188	0,175	0,165	0,157	0,150	0,125	0,096
30	0,363	0,241	0,191	0,163	0,145	0,133	0,123	0,116	0,110	0,105	0,087	0,066

Критические значения можно найти, пользуясь таблицами F-распределения (при $n \geq 20$), с помощью соотношения

$$G(p, k, m) = \frac{F_{\frac{k+1-p}{k}}[m-1; (m-1)(k-1)]}{k-1 + F_{\frac{k-1+p}{k}}[m-1; (m-1)(k-1)]} \quad (97)$$

где $F_\gamma[f_1, f_2]$ - γ -квантиль F-распределения с f_1 и f_2 степенями свободы.

Пример 15

Имеются четыре выборки случайных величин:

$$\begin{aligned} x_1 : 3, 4, 5, 6, 7; & \quad x_2 : 2, 8, 9, 11, 15; \\ x_3 : 9, 11, 15, 20, 28; & \quad x_4 : 4, 6, 8, 10, 16. \end{aligned}$$

Необходимо проверить нулевую гипотезу равенства дисперсий в выборках $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma^2$ критерием Кохрена при доверительной вероятности $p = 0,95$.

Решение

Для вычисления статистики найдем сумму оценок дисперсии:

$$\sum s_i^2 = 2,5 + 22,5 + 58,3 + 21,2 = 104,4;$$

При этом

$$\max s_i^2 = 58,3;$$

Тогда, по формуле (96) находим:

$$G = \frac{58,3}{104,5} = 0,558;$$

Из табл. 6 для $n=5$, $k=4$ и $p=0,95$ имеем $G(0,95;5;4) = 0,721$.

Так как $G = 0,558 < G(0,95;5;4) = 0,721$, нулевая гипотеза **не отклоняется**.

3.3.2.3. Критерий Самиуддина

Критерий Самиуддина устойчив к отклонениям серий результатов наблюдений от нормального закона. Его мощность выше, чем у критерия Бартлетта.

Пусть имеется m серий результатов наблюдений с объемами выборок n_i ($i=1,2,\dots,m$). Соответствующие несмещенные оценки дисперсий S_i^2 ($j=1,2,\dots,m$).

Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле

$$W_{\text{набл}} = \frac{9}{2} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \left(\sqrt[3]{\frac{n}{c} S_i^2} - 1 \right)^2 \quad (98)$$

где

$$n = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \quad (99)$$

$$c = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2 \quad (100)$$

Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается с заданной доверительной вероятностью P , если

$$W_{\text{набл}} \leq W_{\text{кр}} \quad (101)$$

где $W_{\text{кр}} = \chi_p^2(k)$ - квантиль распределения Пирсона с числом степеней свобода $k = m - 1$ при заданной доверительной вероятности P .

Пример 16

Имеются 4 серии результатов наблюдений. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий этих выборок с помощью критерия Самиуддина при доверительной вероятности $p = 0.95$

x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}
3	2	9	4
4	5	11	6
8	8	15	8
14	11	20	10
17	15	22	16

Решение

Из предыдущего примера имеем

$$m = 4, \quad n = 16,$$

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 5$$

$$S_1^2 = 37.7, \quad S_2^2 = 25.7, \quad S_3^2 = 31.3, \quad S_4^2 = 21.2.$$

$$W_{кр} = \chi_p^2(m-1) = \chi_{0.95}^2(3) = 7.9.$$

Вычислим константу c

$$c = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2 = \sum_{i=1}^4 (5-1) S_i^2 = 4 \sum_{i=1}^4 S_i^2 = 4 \cdot (37.7 + 25.7 + 31.3 + 21.2) = 463.6.$$

Наблюдаемое значение критерия Самиуддина

$$\begin{aligned} W_{набл} &= \frac{9}{2} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{n}{c} \cdot S_i^2} - 1 \right)^2 = \frac{9}{2} \sum_{i=1}^4 (5-1) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot S_i^2} - 1 \right)^2 = 18 \sum_{i=1}^4 \left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot S_i^2} - 1 \right)^2 = \\ &= 18 \cdot \left[\left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot 37.7} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot 25.7} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot 31.3} - 1 \right)^2 + \left(\sqrt[3]{\frac{16}{463.6} \cdot 21.2} - 1 \right)^2 \right] = 3.219 \end{aligned}$$

Поскольку

$$(W_{набл} = 3.219) < (W_{кр} = 7.9),$$

то гипотеза о равенстве дисперсий **принимается** с вероятностью $p = 0.95$.

3.4. Проверка гипотез для экспоненциального распределения

3.4.1. Гипотеза о неизвестном параметре экспоненциального распределения

Пусть x_1, \dots, x_n представляют независимые выборочные значения, принадлежащие экспоненциальному распределению

$$w(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0, \quad x > 0.$$

Проверяется простая гипотеза H_0 о том, что $\lambda = \lambda_0$, против простой альтернативы H_1 , что параметр распределения $\lambda = \lambda_1 > \lambda_0$.
Плотности вероятностей:

$$w_0 = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x}, \quad w_1 = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

Функции правдоподобия (19):

$$W_n(x_1, \dots, x_n | H_0) = \lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$W_n(x_1, \dots, x_n | H_1) = \lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}$$

Отношение правдоподобия (20):

$$l(x_1, \dots, x_n) = \frac{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i}}{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^n e^{-(\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i}$$

Логарифм отношения правдоподобия в этом случае равен

$$\ln l(x_1, \dots, x_n) = n \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - (\lambda_1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^n x_i$$

Правило выбора решения (для заранее фиксированного размера выборки n) формулируется следующим образом: принимается решение γ_1 (параметр распределения равен λ_1), если

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0 C^{1/n}} \right)$$

и принимается решение γ_0 (параметр равен λ_0), если выполняется противоположное неравенство.

Таким образом, процедура проверки гипотезы о параметре экспоненциального распределения вероятностей сводится к сравнению среднего арифметического выборочных значений с порогом

$$K = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0 C^{1/n}} \right) \quad (102)$$

где C определяется в зависимости от выбранного критерия качества правила решения (таблица 1).

Так же как и при проверке гипотезы о среднем нормальной случайной величины, поверхность, разделяющая допустимую и критическую области, представляет гиперплоскость, перпендикулярную единичному вектору и расположенную от начала координат на расстоянии nK . Критическая область при этом расположена под гиперплоскостью.

Найдем условные вероятности ошибок первого и второго рода. Известно, что сумма n независимых экспоненциально распределенных случайных величин имеет χ^2 -распределение с $2n$ степенями свободы. Учитывая необходимую нормировку, находим, что в рас-

считываемом примере случайная величина $2\lambda \sum_{i=1}^n x_i$ распределена по закону χ^2 с $2n$ степенями свободы. Поэтому

$$\alpha = P\{2\lambda_0 \sum_{i=1}^n x_i \leq 2n\lambda_0 K \mid H_0\} = \frac{\Gamma(n, 2n\lambda_0 K)}{\Gamma(n)} \quad (103)$$

$$\beta = P\{2\lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i > 2n\lambda_1 K \mid H_1\} = 1 - \frac{\Gamma(n, 2n\lambda_1 K)}{\Gamma(n)} \quad (104)$$

Величина K для критериев Байеса, максимальной априорной вероятности и минимаксного определяется непосредственно из (102). Для критерия Неймана — Пирсона при заданном α из (103) следует

$$K = \frac{1}{2n\lambda_0} \chi_{1-\alpha}^2 \quad (105)$$

Здесь $\chi_{1-\alpha}^2$ - процентная точка χ^2 -распределения с $2n$ степенями свободы. Заметим, что в это случае порог не зависит от параметра λ_1 .

Если $n \gg 1$, то можно, используя асимптотическую нормальность χ^2 -распределения и переписать уравнения для вероятностей ошибок следующим образом:

$$\alpha \sim F\left(2\sqrt{2n\lambda_0 K} - 2\sqrt{n}\right)$$

$$\beta \sim 1 - F\left(2\sqrt{2n\lambda_1 K} - 2\sqrt{n}\right)$$

Для минимаксного правила решения при $\Pi_{00} = \Pi_{11} = 0$, $\Pi_{01} = \lambda\Pi_{10}$ уравнение, определяющее наименее благоприятную величину априорной вероятности q_{MM} , может быть в соответствии с (34), (103) и (104) представлено в виде

$$\Gamma(n) - \Gamma\left(n, \frac{2n\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{q\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right) = \lambda \Gamma\left(n, \frac{2n\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} \ln \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \left(\frac{q\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \right)$$

4. ОБЩИЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

Критерии проверки гипотезы о предполагаемом законе распределения случайной величины называются **критериями согласия**. И в этом случае гипотезы могут быть простыми и сложными: либо проверяется соответствие некоторому закону с данными параметрами (например, нормальному с определенными средним и дисперсией), либо некоторому закону с произвольными параметрами (например, нормальному с какими-либо средним и дисперсией). Во втором случае параметры вначале оцениваются по выборке.

Следует понимать: на практике мы проверяем не тот факт, что случайная величина *действительно* имеет определенный закон распределения (например, нормальный). Это может быть, строго говоря, вообще неверно (например, никакая положительная и дискретная величина не может иметь нормальное распределение, поскольку оно рассредоточено по всей действительной прямой и непрерывно). Проверяется лишь, достаточно ли хорошо данные *согласуются* с некоторым законом, чтобы его можно было использовать далее для их описания.

Критерии согласия можно условно разделить на общие и частные. Общие критерии устанавливают соответствие выбранному закону распределения, а частные заранее заданному.

Рассмотрим наиболее популярные критерии согласия, такие как критерий хи-квадрат, критерий Колмогорова-Смирнова, критерий Смирнова-Крамера-фон-Мезиса, критерий Дарбина и критерий Андерсона-Дарлинга. Естественно, многообразие критериев этим не ограничивается. В литературе так же можно встретить критерий числа пустых интервалов [24], квартильный критерий Барнетта-Эйсена [25], критерий Реньи [26], критерий Ватсона [27], критерий Купера [28].

4.1. Критерий хи-квадрат Пирсона

Критерий согласия Пирсона (хи-квадрат) идеально подходит для проверки гипотез в полиномиальной схеме.

А именно: пусть проводится n независимых испытаний, каждое из которых может иметь r различных исходов A_1, \dots, A_r . Требуется про-

верить гипотезу о том, что вероятности этих исходов равны p_1, \dots, p_r , если в последовательности испытаний эти исходы встретились m_1, \dots, m_r раз.

Пусть x_1, \dots, x_n независимые наблюдения некоторой случайной величины ξ с неизвестной функцией распределения $F(x)$. Требуется по выборке x_1, \dots, x_n проверить нулевую гипотезу о том, что генеральная совокупность имеет функцию распределения $F_0(x)$, если известны значения параметров закона распределения, а $F_0(x)$ - непрерывная или дискретная функция, т. е. имеет место *простая гипотеза*.

Для проверки этой гипотезы область значений x_1, \dots, x_n наблюдаемой величины ξ , произвольным образом разбивают на r непересекающихся областей $A_i, i=1, 2, \dots, r$. Обычно это последовательность непересекающихся интервалов и полуинтервалов вида $(-\infty, C_1); [C_1, C_2); \dots; [C_{r-1}, \infty)$.

Если справедлива основная гипотеза, т.е. случайные величины x_k своей функцией распределения имеют $F_0(x)$, то можно найти теоретические вероятности попадания случайной величины в частичные интервалы из условия

$$p_i = P(C_i \leq \xi \leq C_{i+1}) = F_0(C_{i+1}) - F_0(C_i)$$

где $p_i > 0, \sum_{i=1}^{r-1} p_i = 1$.

Со случайными величинами x_1, \dots, x_n естественно связана полиномиальная схема с n испытаниями, в которой результатом k -го испытания является попадание значения x_k в какой-либо интервал. Обозначим через $m_i = m_i(x_1, \dots, x_n)$ число значений среди x_1, \dots, x_n , попавших в промежуток $A_i = [C_i, C_{i+1})$. Пусть A_i зафиксировано и вероятности Y - успеха и H - неуспеха равны соответственно

$$P(Y) = P(x_k \in A_i) = p_i$$

$$P(H) = P(x_k \notin A_i) = 1 - p_i$$

$$\frac{m_i}{n}$$

Тогда m_i - это число успехов в n испытаниях Бернулли; $\frac{m_i}{n}$ - относительная частота события $x_k \in A_i$, которая является асимптотически

нормальной, несмещенной и состоятельной оценкой вероятности события, и так как $M\left(\frac{m_i}{n}\right) = p_i$, можно считать справедливым прибли-

женное равенство $\frac{m_i}{n} \approx p_i$, т.е. вектор частот есть оценка гипотетической вероятности.

В качестве меры расхождения (меру расхождения можно измерять различными способами) гипотетической и теоретической вероятностей рассматривается сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \left(\frac{m_i}{n} - p_i \right)^2 \quad (106)$$

где γ_i - веса. (В методе наименьших квадратов принято $\gamma_i = 1$, но, согласно теории ошибок Гаусса, каждое слагаемое должно входить в сумму со своей точностью.) Пирсон показал [29], что если полагать

$$\gamma_i = \frac{n}{p_i}, \text{ т.е.}$$

$$\sum_{i=1}^r \gamma_i \left(\frac{m_i}{n} - p_i \right)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{n}{p_i} \left(\frac{m_i - np_i}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

то величина $y_i = \frac{m_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ как линейная комбинация асимптотически нормальных величин m_i также асимптотически нормальна и

$y_i \in N(0,1)$, следовательно, $\sum_{i=1}^r y_i^2 = \chi^2$ - распределена по χ^2 с $r-1$ степенями свободы.

Следовательно, если x_1, \dots, x_n - выборка из генеральной совокупности с функцией распределения $F_0(x)$, то статистика

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \quad (107)$$

имеет при $n \rightarrow \infty$ (т.е. при достаточно больших n) распределение χ^2 с $r-1$ степенями свободы, если основная гипотеза верна. В противном случае статистика стремится к бесконечности. Поэтому в качестве критической области выбирается область больших значений.

Поскольку односторонний критерий более «жестко» отвергает нулевую гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требования, что вероятность попадания критерия в эту область в предположении об истинности нулевой гипотезы должна быть равна принятому уровню значимости α :

$$P(\chi^2 \geq \chi_{\alpha, r-1}^2) = \alpha$$

Алгоритм проверки гипотезы

1. Выдвигается нулевая гипотеза и выбирается уровень значимости.
2. Из генеральной совокупности производится выборка объемом n ($n > 50$).
3. Весь диапазон полученных значений разбивается на r частичных интервалов равной длины, и пусть в i -м интервале будет m_i

значений, так что $\sum_{i=1}^r m_i = n$ ($m_i \approx 5 \div 8$, иначе интервалы объединяются).

4. Составляется сгруппированный статистический ряд.
5. На основании гипотетической функции распределения $F_0(x)$ вычисляются вероятности попадания случайной величины ξ в частичные интервалы

$$p_i = P(C_i \leq \xi \leq C_{i+1}) = F_0(C_{i+1}) - F_0(C_i), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

Умножая полученные вероятности p_i на объем выборки, получаем теоретические частоты np_i , т. е. частоты, которых следует ожидать, если нулевая гипотеза справедлива.

6. Используем статистику хи-квадрат: $\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$ и находим наблюдаемое значение критерия χ_H^2 .
7. Из таблиц квантилей χ^2 -распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $r-1$ находим критические точки $\chi_{\alpha, r-1}^2$.
8. Сравнивая наблюдаемые значения критерия χ_H^2 с критическим значением $\chi_{\alpha, r-1}^2$ принимаем одно из двух решений: а) если

$\chi_H^2 > \chi_{\alpha, r-1}^2$, то нулевая гипотеза отвергается в пользу альтернативной, т. е. считается, что гипотетическая функция распределения не согласуется с опытными данными; б) если $\chi_H^2 < \chi_{\alpha, r-1}^2$ отклонения нулевой гипотезы нет основания, т.е. гипотетическая функция $F_0(x)$ согласуется с опытными данными.

4.2. Критерий хи-квадрат Фишера

Если значения параметров гипотетической функции распределения $F_0(x)$ неизвестны, то имеем *сложную гипотезу*. Пусть вероятности p_1, \dots, p_r зависят от k неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$, которые можно оценить по данным выборки (обычно методом максимального правдоподобия). Тогда статистика (107) имеет распределение χ^2 с $r - k - 1$ степенями свободы, а гипотетическая функция распределения $F_0(x)$ зависит от неизвестных параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$ и известен только класс функций. Основная гипотеза H_0 заключается в том, что неизвестная функция распределения имеет вид $F_0(x)$ при некоторых значениях параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$, $F(x) = F_0(X, \theta_1, \dots, \theta_k)$. Выборочный критерий проверки истинности нулевой гипотезы имеет вид

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i(\theta_1, \dots, \theta_k))^2}{np_i(\theta_1, \dots, \theta_k)}$$

Если бы истинные значения параметров были известны, мы получили бы случай, рассмотренный выше. Но так как истинные значения $\theta_1, \dots, \theta_k$ не известны, то, подставляя их оценки, найденные методом максимального правдоподобия, получаем статистический критерий χ^2 с меньшим числом степеней свободы, а именно: $\nu = r - k - 1$, где r - число интервалов, на которые разбит весь диапазон наблюдаемых значений; k - число параметров гипотетической функции распределения.

Сравнивая наблюдаемое значение критерия χ_H^2 критическим значением $\chi_{\alpha, r-k-1}^2$ по приведенной схеме, делаем заключение об ис-

тинности нулевой гипотезы: гипотеза принимается, если $\chi_H^2 > \chi_{\alpha, r-k-1}^2$ и отвергается в противном случае.

4.3. Критерий согласия Колмогорова – Смирнова

Критерий согласия Колмогорова – Смирнова применяется для проверки гипотез только о непрерывных законах распределения. Критерий Колмогорова – Смирнова позволяет производить проверку согласия эмпирической функции распределения с теоретической. Проверяется справедливость гипотезы $H_0: F^*(x) = F(x)$ в противоположность гипотезе $H_1: F^*(x) \neq F(x)$

Критерий согласия Колмогорова [30] основан на том факте, что распределение супремума разности между теоретической и эмпирической функциями распределения

$$D_n = \sup |F^*(x) - F(x)| \quad (108)$$

одинаково для любой $F(x)$. Величину D_n называют **статистикой Колмогорова**.

При малых n для статистики Колмогорова имеются таблицы критических точек $D_{кр}$. При больших n используют предельное распределение Колмогорова:

$$P(\sqrt{n}D_n < x) \rightarrow Q(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 x^2}, n \rightarrow \infty$$

Для распределения Колмогорова, предельного для статистики $\lambda = \sqrt{n}D_n$, также существуют таблицы критических точек $\lambda_{кр}$. Практически их используют уже при $n > 20$.

В [31] показано, что статистика $\lambda = \sqrt{n}D_n$ не зависит от вида неизвестной функции распределения.

В общем случае функция распределения $F(x)$ может быть и разрывной, хотя она имеет разрывы только первого рода, являющиеся скачками. Поэтому выборочную статистику λ в общем случае определяют с помощью точной верхней границы (sup):

$$D_n^- = \sup_x [F(x) - F^*(x)], \lambda = \sqrt{n}D_n^- \text{ - статистика Смирнова}$$

$$D_n^+ = \sup_x [F^*(x) - F(x)], \quad \lambda = \sqrt{n}D_n^+ \text{ - статистика Колмогорова}$$

при этом $D_n = \max_x [D_n^-, D_n^+]$.

Алгоритм проверки гипотезы:

1. Результаты наблюдения представляют в виде интервального статистического (вариационного) ряда.
2. Находят значение эмпирической функции распределения $F^*(x)$.
3. Пользуясь гипотетической функцией распределения, вычисляют значения $F(x)$ теоретической функции распределения, соответствующие наблюдаемым значениям случайной величины ξ .
4. Находят D_n и вычисляют наблюдаемое значение выборочной статистики $\lambda_H = \sqrt{n}D_n$.
5. По заданному уровню значимости α из таблиц квантилей распределения Колмогорова находят критические точки λ_α .
6. Сравнивая наблюдаемое значение выборочной статистики λ_H с критической точкой λ_α принимают одно из двух решений: а) если $D_n\sqrt{n} < \lambda_\alpha$, то считается, что для отклонения нулевой гипотезы оснований нет, т. е. гипотетическая функция распределения согласуется с опытными данными; б) если $D_n\sqrt{n} > \lambda_\alpha$, то нулевая гипотеза отклоняется в пользу альтернативной.

Замечание: Критерий Колмогорова, строго говоря, *нельзя* применять в случаях сгруппированных данных при неизвестных параметрах распределения. Тем не менее, он иногда применяется на практике и в подобных ситуациях. Однако при этом статистики критерия получаются *заниженными*, что увеличивает ошибку первого рода. В таких случаях предпочтительнее пользоваться критерием хи-квадрат Пирсона.

4.4. Критерий Смирнова – Крамера фон Мизеса

Согласно этому критерию количественной мерой соответствия служит для заданного размера n выборки среднее значение квадрата отклонения эмпирического распределения от гипотетического

$$\omega^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F^*(x) - F(x)]^2 w(x) dx \quad (109)$$

где $w^*(x) = F'^*(x)$ - гипотетическая плотность вероятности случайной

величины. Учитывая, что $F^*(x_k) = \frac{n_x}{n}$ и интегрируя, можно получить предельное соотношение следующего вида [32]:

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{k=1}^n \left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2 \quad \text{для } n > 40 \quad (110)$$

$$n\omega^{2'} = \left(n\omega^2 - \frac{0,4}{n} + \frac{0,6}{n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad \text{для } n > 40 \quad (111)$$

Нетрудно показать [33], что

$$m_1\{n\omega^2\} = \frac{1}{6n} \quad (112)$$

$$M_2\{n\omega^2\} = \frac{4n-3}{180n^3} \quad (113)$$

Если полученная величина критерия омега-квадрат больше табличной, что гипотеза на данном уровне значимости отклоняется.

Как и критерий Колмогорова, критерий Мизеса, в отличие от χ^2 , не связан с группированием выборочных данных, и его распределение достаточно быстро при увеличении размера выборки приближается к предельному. Важно, что теоретическая функция распределения должна быть известна с точностью до параметров. Оценивание параметров по выборке приведёт к уменьшению величины критического значения статистики, т. е. к увеличению количества ошибок второго рода.

В таблице 7 приведено несколько процентных точек этого предельного распределения:

аблица 7. Процентные точки распределения Смирнова-Крамера-фон Мизеса

α	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,03	0,02	0,01	0,001
Δ_γ	0,1184	0,1467	0,1843	0,2414	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,168

Известна аппроксимация распределения $n\omega^2$ с помощью χ^2 распределения [34] $n\omega_n^2 = a + b \cdot \chi^2$, где χ^2 - случайная величина, имеющая распределение χ^2 -квадрат с f степенями свободы;

$$a = \frac{336n^2 - 959n + 609}{210(32n^2 - 61n + 30)} \quad (114)$$

$$b = \frac{32n^2 - 61n + 30}{84n(4n - 3)} \quad (115)$$

$$f = \frac{98}{5} \frac{n(4n - 3)^3}{(32n^2 - 61n + 30)^2} \quad (116)$$

Исследования авторов работы [35] позволяют сделать вывод о том, что на уровне значимости $\alpha > 0,01$ квантили точной и предельной функций распределения $n\omega^2$ практически неразличимы уже при объеме выборки $n \geq 4$. При таких уровнях значимости использование преобразования $n\omega^{2'}$ вместо $n\omega^2$ не дает существенных преимуществ.

Пример 17

Проверить на уровне значимости $\alpha = 0,1$ нормальность распределения выборки

$$x: 4, 7, 8, 12, 18, 19, 21, 25, 30$$

критерием $n\omega^2$ при условии, что $\Phi(x) = N(10;5)$ (т. е. гипотетическим распределением является нормальное распределение с параметрами $\mu = 10$ и $\sigma = 5$).

Решение

Вычисления сводим в таблицу:

i	x_i	z_i	$F(z_i)$	$\frac{2i-1}{n}$	$F(z_i) - \frac{2i-1}{n}$	$\left\{ F(z_i) - \frac{2i-1}{n} \right\}^2$
1	4	-1,2	0,1151	0,1	0,0151	$2,28 \cdot 10^{-4}$
2	7	-0,6	0,2743	0,3	-0,0257	$6,60 \cdot 10^{-4}$
3	8	-0,4	0,3446	0,5	-0,1554	0,02415
4	9	-0,2	0,4207	0,7	-0,2793	0,0780
5	12	0,4	0,6554	0,9	-0,2446	0,0598
6	18	1,6	0,9452	1,1	-0,1548	0,0240
7	19	1,8	0,9641	1,3	-0,3359	0,1183
8	21	2,2	0,9866	1,5	-0,5134	0,2636
9	25	3,0	0,9986	1,7	-0,7014	0,4919
10	30	4,0	0,9996	1,9	-0,9000	0,8100

Из формулы

$$n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{k=1}^n \left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2 \quad n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{k=1}^n \left[F(x_k) - \frac{2k-1}{2n} \right]^2 \quad \text{для } n > 40$$

(110)

имеем

$$n\omega^2 = \frac{1}{12 \cdot 10} + 1,8706 = 1,8789.$$

При $p=1-\alpha=0,9$ критическое значение равно $n\omega^2(0,1)=0,3473$. Так как $0,3473 < 1,8789$, гипотеза нормальности отклоняется.

Вычислим более точный критерий (111):

$$(n\omega^2)' = \left(1,8789 - \frac{0,4}{10} + \frac{0,6}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{10} \right) = 2,029$$

Видим, что результат тот же - H_0 отклоняется.

Теперь найдем χ^2 аппроксимацию критерия $n\omega^2$ и оценим ее точность.

Вычисляем

$$a = \frac{336 \cdot 100 - 959 \cdot 10 + 609}{210(32 \cdot 100 - 61 \cdot 10 + 30)} = 0,04474 ;$$

$$b = \frac{32 \cdot 100 - 61 \cdot 10 + 30}{84 \cdot 10 \cdot (4 \cdot 10 - 3)} = 0,0843 ;$$

$$f = \frac{98}{5} \frac{10 \cdot (4 \cdot 10 - 3)^3}{(32 \cdot 100 - 61 \cdot 10 + 30)^2} = 1,446$$

$$n\omega^2(0,1) = 0,04474 + 0,0843 \cdot \chi_{0,1}^2(1,446)$$

Из таблицы 4 имеем

$$\chi_{0,1}^2(1,446) \approx 3,65 \text{ и } n\omega^2(0,1) \approx 0,352.$$

Видим, что это значение близко к предельной квантили $n\omega^2(0,1) = 0,3473$, т.е. аппроксимация удовлетворительна.

4.5. Критерий Андерсона – Дарлингга

Андерсон и Дарлинг [36] предложили критерий, использующий нормирование статистики критерия $n\omega^2$ (см. 4.4. Критерий Смирнова – Крамера фон Мизеса) обратным значением теоретической функции распределения.

Статистика Андерсона—Дарлингга имеет вид

$$n\Omega^2 = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln [1 - F(x_i)] \right\} \text{ или}$$

$$n\Omega^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \{ \ln F(x_i) + \ln [1 - F(x_{n-i+1})] \} \quad (117)$$

Предельное распределение статистики $n\Omega^2$ (при $n \rightarrow \infty$) табулировано в [37, 38, 39]. В таблице 8 приведены некоторые квантили предельного распределения $n\Omega^2$ (приближение приемлемо при $n > 50$).

Таблица 8. Квантили предельного распределения статистики $n\Omega^2$

α	0,1	0,05	0,025	0,01
$n\Omega^2(\alpha)$	1,94	2,50	3,08	3,88

Сходимость к предельному распределению становится лучше, если использовать вместо статистики $n\Omega^2$ ее модифицированную форму [40]

$$(n\Omega^2)' = \frac{n^2(n\Omega^2) + n + 1}{n^2 + n + 1} \quad (118)$$

В [41] предложена модификация статистики Андерсона-Дарлинга в форме

$$\Omega^2 = n\Omega^2(U) + n\Omega^2(L) \quad (119)$$

где $n\Omega^2(U)$ - версия критерия $n\Omega^2$ для правого (верхнего) «хвоста», $n\Omega^2(L)$ версия критерия $n\Omega^2$ для левого (нижнего) «хвоста».

Значения $n\Omega^2(U)$ и $n\Omega^2(L)$ вычисляются по формулам

$$n\Omega^2(U) = \frac{n}{2} - 2 \sum_{i=1}^n F(x_i) - \sum_{i=1}^n \left[2 - \frac{2i-1}{n} \right] \ln[1 - F(x_i)] \quad (120)$$

$$n\Omega^2(L) = -\frac{3n}{2} + 2 \sum_{i=1}^n F(x_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \ln F(x_i) \quad (121)$$

Распределение величины $n\Omega^2$ может быть вычислено по формуле [41]

$$n\Omega^2(U)_n = n\Omega^2(U)_\infty \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{n}} \right) \quad (122)$$

где $n\Omega^2(U)_\infty$ - предельное распределение, для которого справедлива аппроксимация

$$n\Omega^2(U)_\infty = 1 - \frac{1}{1 + \exp K(p)} \quad (123)$$

где

$$K(p) = 0,117 - 0,03791y + 0,06318z + 0,09878yz + 0,009184y^2z - 0,0000742y^4z$$

В котором y и z определяются соотношениями:

$$y = \ln \left(\frac{p}{1-p} \right); \quad z = \left(1 + \frac{0,3}{\sqrt{n}} \right)^{-1}.$$

Значения $n\Omega^2(L)$ могут быть вычислены из условия симметрии. Модифицированный критерий Андерсона—Дарлинга более чувствителен к поведению функции распределения вероятностей на ее хвостах.

Пример 18

Проверить на уровне значимости $\alpha = 0,1$ нормальность распределения выборки

$$x: 4, 7, 8, 12, 18, 19, 21, 25, 30$$

критерием $n\Omega^2$ при условии, что $\Phi(x) = N(10;5)$ (т. е. гипотетическим

распределением является нормальное распределение с параметрами $\mu=10$ и $\sigma=5$).

Решение

Вычисления сводим в таблицу:

i	x_i	z_i	$F(z_i)$	x_{n-i+1}	z_{n-i+1}	$F(z_{n-i+1})$	$F(z_i)$	$\ln[1-F(z_{n-i+1})]$	$(2i-1)\{\ln F(z_i) + \ln[1-F(z_{n-i+1})]\}$
1	4	-1,2	0,1151	30	4	0,9999	-2,1619	-10,1266	-12,2885
2	7	-0,6	0,2743	25	3	0,9986	-1,2935	-6,5713	-27,9716
3	8	-0,4	0,3446	21	2,2	0,9866	-1,0653	-4,3125	-26,889
4	9	-0,2	0,4207	19	1,8	0,9641	-0,0658	-3,321	-29,9394
5	12	0,4	0,6554	18	1,6	0,9452	-0,4225	-2,9041	-29,9394
6	18	1,6	0,9452	12	0,4	0,6554	-0,0563	-1,0653	-12,3376
7	19	1,8	0,9641	9	-0,2	0,4207	-0,0366	-0,5459	-7,5725
8	21	2,2	0,9866	8	-0,4	0,3446	-0,0135	-0,4225	-6,54
9	25	3	0,9986	7	-0,6	0,2743	-0,0014	-0,3206	-5,474
10	30	4	0,9999	4	-1,2	0,1151	-4 10^{-5}	-0,1223	-2,3245

На основании данных таблицы и формул (117) и (118) имеем

$$n\Omega^2 = -10 - \frac{1}{10} \cdot (-161,2765) = 6,127;$$

$$(n\Omega^2)' = \frac{6,127 \cdot 100 + 10 + 1}{100 + 10 + 1} = 5,619;$$

Из таблицы 8 имеем $n\Omega^2(p) = 1,94$.

Так как $(n\Omega^2)' = 5,619 > n\Omega^2(0,9) = 1,94$, нулевая гипотеза нормальности распределения H_0 отклоняется.

4.6. Критерий согласия Дарбина

Наиболее известный критерий согласия χ^2 -критерий (см. 4.1. Критерий хи-квадрат Пирсона, 4.2. Критерий хи-квадрат Фишера) гибок, легко используется, но имеет элемент произвола в выборе границ группирования экспериментальных данных. Критерий Колмогорова-Смирнова (см.

4.3. Критерий согласия Колмогорова – Смирнова) [42] свободен от этих недостатков и имеет хорошую асимптотическую мощность по сравнению с альтернативами, определенными в терминах расстояния между функциями распределения. Однако исследования показывают [43], что на практике для выборок среднего объема он часто непригоден, в отличие от критерия χ^2 .

Критерии типа Колмогорова-Смирнова хороши, когда альтернативное распределение таково, что разница между ним и исходным (например, разница в средних) велика. Однако если разница между средними и дисперсиями невелика, но две частотные функции заметно отличаются формой, то критерий Колмогорова - Смирнова не будет мощным критерием.

В [43] предлагаются новые критерии, свободные от распределения, более мощные, чем критерий Колмогорова - Смирнова.

Пусть $F(x)$ - гипотетическая теоретическая функция распределения вероятностей, определенная с точностью до параметров. Обозначим $U_j = F(x_j)$, $j=1, \dots, n$.

При справедливости гипотезы H_0 величина U_j должна быть распределена равномерно на единичном интервале $[0,1]$.

Сутью предлагаемых критериев является проверка равномерности распределения U_j на интервале $[0,1]$. Проверка равномерности распределения приведены в разделе 5.3. Критерии проверки равномерности распределения.

5. ЧАСТНЫЕ КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ

5.1. Критерии проверки нормальности распределения

Нормальный закон распределения вероятностей получил наибольшее распространение в практических задачах обработки экспериментальных данных. Большинство прикладных методов математической статистики исходит из предположения нормальности распределения вероятностей изучаемых случайных величин.

Широкое распространение этого распределения вызвало необходимость разработки специальных критериев согласия эмпирических распределений с нормальности.

5.1.1. Сравнительный анализ критериев нормальности

В этом разделе представлены результаты исследования сравнительной мощности критериев нормальности распределения вероятностей случайных величин [44] для различных альтернативных распределений. В таблице 9 представлено ранжирование 21 критерия нормальности. Критерии по каждой альтернативе представлены в порядке предпочтения - от наибольшего 1 до наименьшего 21. В последней графе приведено общее ранжирование, соответствующее набранной сумме рангов.

Таблица 9 может быть полезной ориентировкой для пользователя при выборе критерия проверки нормальности распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

Таблица 9. Сравнение критериев проверки нормальности распределения случайных величин

Наименование критерия	Характер альтернативного распределения					Ранг
	Асимметричное		Симметричное		≈ нормальное	
	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 < 3$	$\alpha_4 > 3$	$\alpha_4 \approx 3$	
Критерий Шапиро-Уилка	1	1	3	2	2	1
Критерий K^2	7	8	10	6	4	2
Критерий Дарбина	11	7	7	15	1	3
Критерий Д'Агостино	12	9	4	5	12	4
Критерий α_4	14	5	2	4	18	5
Критерий Васичека	2	14	8	10	10	6
Критерий Дэвида-Хартли-Пирсона	21	2	1	9	1	7
Критерий χ^2	9	20	9	8	3	8
Критерий - Андерсона Дарлинга	18	3	5	18	7	9
Критерий Филлибена	3	12	18	1	9	10
Критерий Колмогорова-Смирнова	16	10	6	16	5	11
Критерий Мартинеса - Иглевича	10	16	13	3	15	12
Критерий Лина - Мудхолкара	4	15	13	12	16	13
Критерий α_3	8	6	21	7	19	14
Критерий Шпигельхальтера	19	13	11	11	8	15
Критерий Саркади	5	18	15	14	13	16
Критерий Смирнова - Крамера - фон Мизеса	17	11	20	17	6	17
Критерий Локка-Спурье	13	4	19	21	17	18
Критерий Оя	20	17	14	13	14	19
Критерий Хегази-Грина	6	19	16	19	21	20
Критерий Муроты - Такеучи	15	21	17	20	20	21

Ограничимся приведением наиболее мощных критериев нормальности. Все критерии полностью изложены в [6].

5.1.2. Критерий Шапиро – Уилка

Критерий W Шапиро – Уилка является наиболее эффективным критерием проверки гипотезы о принадлежности выборки к нормальному закону распределения. Следует отметить, что критерий работает одинаково эффективно и при малых и при больших объемах выборки. Критерий можно применять при объеме выборки $n \geq 3$.

Критерий Шапиро – Уилка [45] основан на отношении оптимальной линейной несмещенной оценки дисперсии к ее обычной оценке методом максимального правдоподобия. Статистика критерия имеет вид

$$W = \frac{1}{s^2} \left[\sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 \quad (124)$$

где

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \quad (125)$$

$$k = \begin{cases} \frac{n}{2}, n - \text{четное} \\ \frac{n-1}{2}, n - \text{нечетное} \end{cases} \quad (126)$$

\bar{x} - среднее арифметическое выборки, определяемое по формуле (39).

Числитель является квадратом оценки среднеквадратического отклонения Ллойда [46].

Коэффициенты a_{n-i+1} приведены в таблице 12, заимствованной из [47,45]. Критические значения статистики $W(\alpha)$ приведены в таблице 11, заимствованной из [47, 45].

Если $W < W(\alpha)$, то нулевая гипотеза нормальности распределения отклоняется на уровне значимости α . Приближенную вероятность получения эмпирического значения W при H_0 можно вычислить по формуле [48]:

$$z = \gamma + \eta \ln \left(\frac{W - \varepsilon}{1 - W} \right) \quad (127)$$

где γ , η и ε - коэффициенты, приведенные в таблице 10.

Для больших n таблицы коэффициентов a_{n-i+1} становятся неудобными, поэтому была предложена модификация критерия Шапиро-Уилка - критерий Шапиро - Франчия [49].

При этом коэффициенты a_{n-i+1} определяются соотношением:

$$a_{n-i+1} = \frac{y_{n-i+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \quad (128)$$

где $y_i = u_p^c$ - квантиль стандартного нормального распределения при

$$p = i - \frac{3}{8} / (n + 0,25).$$

Используя аппроксимацию для квантили стандартного нормального распределения, можно записать:

$$u_p = 4,91 \left[p^{0,14} - (1 - p^{0,14}) \right] \quad (129)$$

Тогда для заданного p :

$$y_i = 4,91 \left\{ \left(\frac{i - 3/8}{n + 0,25} \right)^{0,14} - \left(\frac{n - i + 5/8}{n + 0,25} \right)^{0,14} \right\} \quad (130)$$

В [50] приведена полезная аппроксимация, позволяющая применить критерий Шапиро - Уилка без помощи таблиц.

Для наиболее распространенного в технических измерениях значения доверительной вероятности $p = 0,95$ (уровне значимости $\alpha = 0,05$) можно применять модификацию W - критерия, позволяющую обойтись без таблиц критических значений.

Наблюдаемое значение критерия при этом можно определить по формуле

$$W' = \left(1 - \frac{0,6695}{n^{0,6518}} \right) \cdot \frac{s^2}{b} \quad (131)$$

где s^2 - коэффициент, вычисляемый по формуле (125)

$$b = \left[\sum_{i=1}^k a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 \quad (132)$$

k - вычисляется по формуле (126)

$$a_0 = \frac{0,899}{(n-2,4)^{0,4162}} - 0,02 \quad (133)$$

$$d_i = \frac{n-2i+1}{n-0,5} \quad (134)$$

$$a_i = a_0 \left[d_i + \frac{1483}{(3-d_i)^{10,845}} + \frac{71,610^{-10}}{(1,1-d_i)^{8,26}} \right] \quad (135)$$

где n – объем выборки.

Если $W' < 1$, то нулевая гипотеза нормальности распределения случайных величин отклоняется. Модификация критерия Шапиро – Уилка для случая группированных данных (что существенно при наличии совпадающих наблюдений) рассмотрена в [51].

Таблица 10. Значения коэффициентов γ , η и ε

n	γ	η	ε	n	γ	η	ε
3	-0,625	0,386	0,75	27	-5,905	1,905	0,198
4	-1,107	0,714	0,6297	28	-5,988	1,915	0,1943
5	-1,53	0,935	0,5521	29	-6,074	1,934	0,1907
6	-2,01	1,138	0,4963	30	-6,16	1,949	0,1872
7	-2,356	1,245	0,4533	31	-6,248	1,965	0,184
8	-2,696	1,333	0,4186	32	-6,324	1,976	0,1811
9	-2,968	1,4	0,39	33	-6,402	1,988	0,1781
10	-3,262	1,471	0,366	34	-6,48	2	0,1755
11	-3,485	1,515	0,3451	35	-6,559	2,012	0,1727
12	-3,731	1,571	0,327	36	-6,64	2,024	0,1702
13	-3,936	1,613	0,3111	37	-6,721	2,037	0,1677
14	-4,155	1,655	0,2969	38	-6,803	2,049	0,1656
15	-4,373	1,695	0,2842	39	-6,887	2,062	0,1633
16	-4,567	1,724	0,2727	40	-6,961	2,075	0,1612
17	-4,713	1,739	0,2622	41	-7,035	2,088	0,1591
18	-4,885	1,77	0,2528	42	-7,111	2,101	0,1572
19	-5,018	1,786	0,244	43	-7,188	2,114	0,1552
20	-5,184	1,798	0,2375	44	-7,212	2,119	0,1548
21	-5,291	1,818	0,2264	45	-7,266	2,128	0,1534
22	-5,413	1,835	0,2207	46	-7,345	2,141	0,1526
23	-5,508	1,848	0,2157	47	-7,414	2,155	0,1499
24	-5,605	1,862	0,2106	48	-7,555	2,183	0,1466
25	-5,704	1,876	0,2063	49	-7,615	2,198	0,1451
26	-5,803	1,89	0,202	50	-7,677	2,212	0,1436

Таблица 11. Таблица критических значений $W(\alpha)$

n	p=0.99	p=0.98	p=0.95	p=0.90	n	p=0.99	p=0.98	p=0.95	p=0.90
3	0.737	0.756	0.767	0.789	27	0.894	0.906	0.923	0.935
4	0.687	0.707	0.748	0.792	28	0.896	0.908	0.924	0.936
5	0.686	0.715	0.762	0.806	29	0.898	0.910	0.926	0.937
6	0.713	0.743	0.788	0.826	30	0.900	0.912	0.927	0.939
7	0.730	0.760	0.803	0.838	31	0.902	0.914	0.929	0.940
8	0.749	0.778	0.818	0.851	32	0.904	0.915	0.930	0.941
9	0.764	0.791	0.829	0.859	33	0.906	0.917	0.931	0.942
10	0.781	0.806	0.842	0.869	34	0.908	0.919	0.933	0.943
11	0.792	0.817	0.850	0.876	35	0.910	0.920	0.934	0.944
12	0.805	0.828	0.859	0.883	36	0.912	0.922	0.935	0.945
13	0.814	0.837	0.866	0.889	37	0.914	0.924	0.936	0.946
14	0.825	0.846	0.874	0.895	38	0.916	0.925	0.938	0.947
15	0.835	0.855	0.881	0.901	39	0.917	0.927	0.939	0.948
16	0.844	0.863	0.887	0.906	40	0.919	0.928	0.940	0.949
17	0.851	0.869	0.892	0.910	41	0.920	0.929	0.941	0.950
18	0.858	0.874	0.897	0.914	42	0.922	0.930	0.942	0.951
19	0.863	0.879	0.901	0.917	43	0.923	0.932	0.943	0.951
20	0.868	0.884	0.905	0.920	44	0.924	0.933	0.944	0.952
21	0.873	0.888	0.908	0.923	45	0.926	0.934	0.945	0.953
22	0.878	0.892	0.911	0.926	46	0.927	0.935	0.945	0.953
23	0.881	0.895	0.914	0.928	47	0.928	0.936	0.946	0.954
24	0.884	0.889	0.916	0.930	48	0.929	0.937	0.947	0.954
25	0.888	0.901	0.918	0.931	49	0.929	0.937	0.947	0.955
26	0.891	0.904	0.920	0.933	50	0.930	0.938	0.947	0.955
n	p=0.99	p=0.98	p=0.95	p=0.90	n	p=0.99	p=0.98	p=0.95	p=0.90

Таблица 12. Коэффициенты $a_{n-i+1} \cdot 10^4$

n	i																								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
13	5359	3325	2412	1707	1099	539																			
12	5475	3325	2347	1586	922	303																			
11	5601	3315	2260	1429	695																				
10	5739	3291	2141	1224	399																				
9	5888	3244	1976	947																					
8	6052	3164	1743	561																					
7	6233	3031	1401																						
6	6431	2806	875																						
5	6646	2413																							
4	6872	1677																							
3	7071																								

Пример 19

Проверить по критерию Шапиро-Уилка принадлежность выборки объемом $n = 40$ к нормальному закону распределения при доверительной вероятности $p=0,95$.

79 58 54 52 73 67 71 63 85 53 73 67 62 53 41 43 61 52 63 80
72 65 65 77 42 67 64 67 70 68 59 61 75 59 32 69 60 60 60 76

Решение

Поскольку доверительная вероятность $p = 0.95$, то воспользуемся статистикой (131)

Вычислим необходимые коэффициенты.

Вычислены значения $\bar{X} = 62.663$ и $s^2 = 10.965$.

Вычислим коэффициент s^2 (125) с помощью найденного ранее значения СКО s

$$s = (n \cdot S)^2 = (40 \cdot 10.965)^2 = 192369.96.$$

Вычислим коэффициент a_0

$$a_0 = \frac{0.899}{(n-2.4)^{0.4162}} - 0.02 = \frac{0.899}{(40-2.4)^{0.4162}} - 0.02 = 0.177.$$

Вычислим коэффициент k по формуле (126)

$$k = \frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20,$$

значит коэффициентов a_i и d_i будет по 20.

Вычислим коэффициенты $d_i = \frac{n-2i+1}{n-0.5} = \frac{40-2i+1}{40-0.5} = \frac{41-2i}{39.5}$

$$d_1 = \frac{41-2 \cdot 1}{39.5} = 0.987 \quad d_6 = \frac{41-2 \cdot 6}{39.5} = 0.734 \quad d_{11} = \frac{41-2 \cdot 11}{39.5} = 0.481 \quad d_{16} = \frac{41-2 \cdot 16}{39.5} = 0.228$$

$$, \quad , \quad , \quad ,$$

$$d_2 = \frac{41-2 \cdot 2}{39.5} = 0.937 \quad d_7 = \frac{41-2 \cdot 7}{39.5} = 0.684 \quad d_{12} = \frac{41-2 \cdot 12}{39.5} = 0.430 \quad d_{17} = \frac{41-2 \cdot 17}{39.5} = 0.177$$

$$, \quad , \quad , \quad ,$$

$$d_3 = \frac{41-2 \cdot 3}{39.5} = 0.886 \quad d_8 = \frac{41-2 \cdot 8}{39.5} = 0.633 \quad d_{13} = \frac{41-2 \cdot 13}{39.5} = 0.380 \quad d_{18} = \frac{41-2 \cdot 3}{39.5} = 0.127$$

$$, \quad , \quad , \quad ,$$

$$d_4 = \frac{41-2 \cdot 4}{39.5} = 0.835 \quad d_9 = \frac{41-2 \cdot 9}{39.5} = 0.582 \quad d_{14} = \frac{41-2 \cdot 14}{39.5} = 0.329 \quad d_{19} = \frac{41-2 \cdot 19}{39.5} = 0.076$$

$$, \quad , \quad , \quad ,$$

$$d_5 = \frac{41-2 \cdot 5}{39.5} = 0.785 \quad d_{10} = \frac{41-2 \cdot 10}{39.5} = 0.532 \quad d_{15} = \frac{41-2 \cdot 15}{39.5} = 0.278 \quad d_{20} = \frac{41-2 \cdot 20}{39.5} = 0.025$$

$$, \quad , \quad , \quad .$$

Вычислим коэффициенты $a_i = a_0 \left[d_i + \frac{1483}{(3-d_i)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-d_i)^{8.26}} \right]$

$$a_1 = 0.177 \cdot \left[0.987 + \frac{1483}{(3-0.987)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.987)^{8.26}} \right] = 0.308,$$

$$a_2 = 0.177 \cdot \left[0.937 + \frac{1483}{(3-0.937)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.937)^{8.26}} \right] = 0.268,$$

$$a_3 = 0.177 \cdot \left[0.886 + \frac{1483}{(3-0.886)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.886)^{8.26}} \right] = 0.235,$$

$$a_4 = 0.177 \cdot \left[0.835 + \frac{1483}{(3-0.835)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.835)^{8.26}} \right] = 0.208,$$

$$a_5 = 0.177 \cdot \left[0.785 + \frac{1483}{(3-0.785)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.785)^{8.26}} \right] = 0.186,$$

$$a_6 = 0.177 \cdot \left[0.734 + \frac{1483}{(3-0.734)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.734)^{8.26}} \right] = 0.167,$$

$$a_7 = 0.177 \cdot \left[0.684 + \frac{1483}{(3-0.684)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.684)^{8.26}} \right] = 0.150,$$

$$a_8 = 0.177 \cdot \left[0.633 + \frac{1483}{(3-0.633)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.633)^{8.26}} \right] = 0.135,$$

$$a_9 = 0.177 \cdot \left[0.582 + \frac{1483}{(3-0.582)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.582)^{8.26}} \right] = 0.121,$$

$$a_{10} = 0.177 \cdot \left[0.532 + \frac{1483}{(3-0.532)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.532)^{8.26}} \right] = 0.109,$$

$$a_{11} = 0.177 \cdot \left[0.481 + \frac{1483}{(3-0.481)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.481)^{8.26}} \right] = 0.097,$$

$$a_{12} = 0.177 \cdot \left[0.430 + \frac{1483}{(3-0.430)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.430)^{8.26}} \right] = 0.086,$$

$$a_{13} = 0.177 \cdot \left[0.380 + \frac{1483}{(3-0.380)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.380)^{8.26}} \right] = 0.075,$$

$$a_{14} = 0.177 \cdot \left[0.329 + \frac{1483}{(3-0.329)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.329)^{8.26}} \right] = 0.064,$$

$$a_{15} = 0.177 \cdot \left[0.278 + \frac{1483}{(3-0.278)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.278)^{8.26}} \right] = 0.054,$$

$$a_{16} = 0.177 \cdot \left[0.228 + \frac{1483}{(3-0.228)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.228)^{8.26}} \right] = 0.045,$$

$$a_{17} = 0.177 \cdot \left[0.177 + \frac{1483}{(3-0.177)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.177)^{8.26}} \right] = 0.035,$$

$$a_{18} = 0.177 \cdot \left[0.127 + \frac{1483}{(3-0.127)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.127)^{8.26}} \right] = 0.025,$$

$$a_{19} = 0.177 \cdot \left[0.076 + \frac{1483}{(3-0.076)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.076)^{8.26}} \right] = 0.016,$$

$$a_{20} = 0.177 \cdot \left[0.025 + \frac{1483}{(3-0.025)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-0.025)^{8.26}} \right] = 0.006.$$

Расположим выборку экспериментальных данных в ранжированный ряд

32 41 42 43 52 52 53 53 54 58 59 59 60 60 60 61 61 62 63 63
64 65 65 67 67 67 67 68 69 70 71 72 73 73 75 76 77 79 80 85

То есть

$$\begin{aligned} x_1 &= 32, & x_6 &= 52, & x_{11} &= 59, & x_{16} &= 61, & x_{21} &= 64, & x_{26} &= 67, & x_{31} &= 71, & x_{36} &= 76, \\ x_2 &= 41, & x_7 &= 53, & x_{12} &= 59, & x_{17} &= 61, & x_{22} &= 65, & x_{27} &= 67, & x_{32} &= 72, & x_{37} &= 77, \\ x_3 &= 42, & x_8 &= 53, & x_{13} &= 60, & x_{18} &= 62, & x_{23} &= 65, & x_{28} &= 68, & x_{33} &= 73, & x_{38} &= 79, \\ x_4 &= 43, & x_9 &= 54, & x_{14} &= 60, & x_{19} &= 63, & x_{24} &= 67, & x_{29} &= 69, & x_{34} &= 73, & x_{39} &= 80, \\ x_5 &= 52, & x_{10} &= 58, & x_{15} &= 60, & x_{20} &= 63, & x_{25} &= 67, & x_{30} &= 70, & x_{35} &= 75, & x_{40} &= 85, \end{aligned}$$

тогда коэффициент b

$$b = \left[\sum_{i=1}^{20} a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2 =$$

$$= \left[\begin{aligned} &0.308 \cdot (85 - 32) + 0.268 \cdot (80 - 41) + 0.235 \cdot (79 - 42) + 0.208 \cdot (77 - 43) + \\ &+ 0.186 \cdot (76 - 52) + 0.167 \cdot (75 - 52) + 0.150 \cdot (73 - 53) + 0.135 \cdot (73 - 53) + \\ &+ 0.121 \cdot (72 - 54) + 0.109 \cdot (71 - 58) + 0.097 \cdot (70 - 59) + 0.086 \cdot (69 - 59) + \\ &+ 0.075 \cdot (68 - 60) + 0.064 \cdot (67 - 60) + 0.054 \cdot (67 - 60) + 0.045 \cdot (67 - 61) + \\ &+ 0.035 \cdot (67 - 61) + 0.025 \cdot (65 - 62) + 0.016 \cdot (65 - 63) + 0.006 \cdot (64 - 63) \end{aligned} \right]^2 = 4107.4$$

и наблюдаемое значение критерия (131)

$$W' = \left(1 - \frac{0.6695}{n^{0.6518}} \right) \cdot \frac{s}{b} = \left(1 - \frac{0.6695}{40^{0.6518}} \right) \cdot \frac{192369.96}{4107.4} = 44.$$

Поскольку $(W' = 44) > 1$, то с вероятностью $p = 0.95$ можно утверждать, что исследуемая выборка распределена по нормальному закону.

5.1.3. Критерий α_3

Данный критерий следует воспринимать как критерии установления отклонения от нормальности распределения (но не установления нормальности). Коэффициент асимметрии определяется как:

$$\alpha_3 = \frac{1}{ns^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3 \quad (136)$$

При этом известно [37]:

$$\begin{aligned} M(\alpha_3) &= 0; \\ D(\alpha_3) &= \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)} \end{aligned} \quad (137)$$

В [52] показано, что распределение α_3 достаточно быстро стремится к нормальному.

Рассмотрим использование критерия α_3 для установления отклонения эмпирического распределения от нормального. Таблицы процентных точек распределения α_3 приведены в [37]. При $n > 200$ может быть рекомендован грубый критерий:

Если $\alpha_3 \geq \frac{6}{n}$, то нормальность распределения отклоняется.

На практике применяются нормализующие преобразования для α_3 . Рассмотрим некоторые из них. В [53] предложена аппроксимация $\xi = \delta \ln(x - \sqrt{x^2 + 1})$, где $x = \frac{\alpha_3}{\lambda}$, которая при $n \rightarrow \infty$ распределена как стандартная нормальная величина (δ, λ - коэффициенты, приведенные в таблице 13).

Таблица 13. Значения коэффициентов δ и $1/\lambda$.

n	δ	$1/\lambda$	n	δ	$1/\lambda$	n	δ	$1/\lambda$
8	5,563	0,3030	44	3,117	0,9795	125	4,272	1,1250
9	4,260	0,4080	45	3,131	0,9840	130	4,336	1,1285
10	3,734	0,4794	46	3,160	0,9882	135	4,398	1,1318
11	3,447	0,5839	47	3,161	0,9923	140	4,460	1,1348
12	3,270	0,5781	48	3,176	0,9963	145	4,521	1,1377
13	3,151	0,6153	49	3,192	1,0001	150	4,582	1,1403
14	3,069	0,6743	50	3,207	1,0038	155	4,641	1,1428
15	3,010	0,6753	52	3,237	1,0108	160	4,700	1,1452
16	2,968	0,7001	54	3,268	1,0174	165	4,758	1,1474

17	2,937	0,7224	56	3,298	1,0235	170	4,816	1,1496
18	2,915	0,7426	58	3,329	1,0293	175	4,873	1,1516
19	2,900	0,7610	60	3,359	1,0348	180	4,929	1,1535
20	2,890	0,7779	62	3,389	1,0400	185	4,985	1,1553
21	2,870	0,7940	64	3,420	1,0449	190	5,040	1,1570
22	2,882	0,8078	66	3,450	1,0459	195	5,094	1,1586
23	2,882	0,8211	68	3,480	1,0540	200	5,148	1,1602
24	2,884	0,8336	70	3,510	1,0581	210	5,255	1,1631
25	2,889	0,8452	72	3,540	1,0621	220	5,359	1,1657
26	2,895	0,8561	74	3,569	1,0659	230	5,461	1,1681
27	2,902	0,8664	76	3,599	1,0695	240	5,561	1,1704
28	2,910	0,8760	78	3,628	1,0730	250	5,660	1,1724
29	2,920	0,8851	80	3,657	1,0763	260	5,757	1,1744
30	2,930	0,8938	82	3,686	1,0795	270	5,853	1,1761
31	2,941	0,9020	84	3,715	1,0825	280	5,946	1,1779
32	2,952	0,9097	86	3,744	1,0854	290	6,039	1,1793
33	2,964	0,9171	88	3,772	1,0882	300	6,130	1,1808
34	2,977	0,9241	90	3,801	1,0909	350	6,567	1,1868
35	2,990	0,9308	92	3,829	1,0934	400	6,976	1,1914
36	3,003	0,9372	94	3,857	1,0959	450	7,363	1,1950
37	3,016	0,9433	96	3,885	1,0983	500	7,731	1,1979
38	3,030	0,9492	98	3,913	1,1006	600	8,149	1,2023
39	3,044	0,9548	100	3,940	1,1028	700	9,054	1,2058
40	3,058	0,9601	105	4,009	1,1080	800	9,649	1,2078
41	3,073	0,9653	110	4,076	1,1128	900	10,271	1,2096
42	3,087	0,9702	115	4,142	1,1172	1000	10,738	1,2111
43	3,102	0,9750	120	4,207	1,1212			

В [54] предложена следующая нормализующая аппроксимация.

Если

$$y = \alpha_3 \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}} \quad (138)$$

$$\beta = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} \quad (139)$$

$$\omega^2 = -1 + \sqrt{2(\beta - 1)} \quad (140)$$

$$\delta = \sqrt{\ln \omega} \quad (141)$$

$$\alpha = \left(\frac{2}{\omega^2 - 1} \right)^{0,5} \quad (142)$$

то величина

$$z = \delta \ln \left\{ \frac{y}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 + 1} \right\} \quad (143)$$

уже при $n > 25$ может быть аппроксимирована стандартным нормальным распределением.

Пример 20

По предложенной выборке проверить гипотезу нормальности распределения случайных величин критерием асимметрии на уровне достоверности $p = 0,9$

x : -0.8637 0.0774 -1.2141 -1.1135 -0.0068 1.5326
 -0.7697 0.3714 -0.2256 1.1174 -1.0891 0.0326
 0.5525 1.1006 1.5442 0.0859 -1.4916 -0.7423
 -1.0616 2.3505 -0.6156 0.7481 -0.1924 0.8886
 -0.7648 -1.4023 -1.4224 0.4882 -0.1774 -0.1961
 1.4193 0.2916 0.1978 1.5877 -0.8045 0.6966
 0.8351 -0.2437 0.2157 -1.1658 -1.1480 0.1049
 0.7223 2.5855 -0.6669 0.1873 -0.0825 -1.9330
 -0.4390 -1.7947

Решение

Найдем среднее (39), и стандартное отклонение (52):

$$\bar{x} = -0,0379 ; s = 1,0302 ;$$

Значение коэффициента асимметрии (136):

$$\alpha_3 = 0,4047 .$$

Вычисляем далее (137):

$$D(\alpha_3) = \frac{6(50-2)}{(50+1)(50+3)} = 0,106$$

$$\sqrt{D(\alpha_3)} = 0,3264$$

Грубый критерий применять нельзя, так как $n < 200$. Вычислим нормализующие преобразования. Сначала рассмотрим ξ -преобразование:

Из таблицы 13 имеем: $\delta = 3,207$ и $1/\lambda = 1,0038$, тогда

$$x = \frac{\alpha_3}{\lambda} = 0,4062 ; \xi = 3,207 \ln \left(0,4062 - \sqrt{0,4062^2 + 1} \right) = 1,2693 .$$

Теперь рассмотрим z -преобразование:

$$y = 0,4047 \sqrt{\frac{(50+1)(50+3)}{6(50-2)}} = 1,2398;$$

$$\beta = \frac{3(50^2 + 50n - 70)(50+1)(50+3)}{(50-2)(50+5)(50+7)(50+9)} = 3,4525;$$

$$\omega^2 = -1 + \sqrt{2(3,4525 - 1)} = 1,2147; \quad \delta = \sqrt{\ln \omega} = 3,2067; \quad \alpha = \left(\frac{2}{1,2147^2 - 1} \right)^{0,5} = 3,0521$$

;

$$z = 3,2067 \cdot \ln \left\{ \frac{1,2398}{3,0521} + \sqrt{\left(\frac{1,2398}{3,0521} \right)^2 + 1} \right\} = 1,2692$$

Используем нормализующее преобразование α_3 для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального ($u_{0,95} = 1,645$ - 95%-я квантиль стандартного нормального распределения. Так как критерий двусторонний, при $p = 0,9$ следует применять $u_{\frac{1+p}{2}} = u_{\frac{1+0,9}{2}} = u_{0,95}$).

Имеем $\xi = 1,2693 < u_{0,95} = 1,645$ и $z = 1,2692 < u_{0,95} = 1,645$. Следовательно, гипотеза нормальности по коэффициенту асимметрии **не отклоняется**.

5.1.4. Критерий α_4

Данный критерий следует воспринимать как критерии установления отклонения от нормальности распределения (но не установления нормальности). Коэффициент эксцесса определяется как:

$$\alpha_4 = \frac{1}{ns^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4 \quad (144)$$

Для α_4 известны соотношения:

$$M(\alpha_4) = 3 - \frac{6}{n+1} \quad (145)$$

$$D(\alpha_4) = \frac{24 \cdot n \cdot (n-2)(n-3)}{(n+1)^2 (n+3)(n+5)} \quad (146)$$

Распределение α_4 медленно стремится к нормальному [52].

Преобразование для коэффициента эксцесса α_4 рассмотрены в работе [55]. Распределение α_4 может быть аппроксимировано распределением χ^2 с f степенями свободы при

$$f = 6 + \frac{8}{c} \left\{ \frac{2}{c} + \left(1 + \frac{4}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (147)$$

где

$$c = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}} \quad (148)$$

В [55] предложено весьма эффективное нормализующее преобразование для коэффициента эксцесса α_4 . Алгоритм его построения заключается в следующем.

Если $x = \frac{\alpha_4 - M(\alpha_4)}{\sqrt{D(\alpha_4)}}$, то случайная величина

$$d = \left[1 - \frac{2}{9f} - \left\{ \frac{1 - \frac{2}{f}}{1 + x \sqrt{\frac{2}{f-4}}} \right\}^{\frac{1}{3}} \right] \left(\frac{2}{9f} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (149)$$

аппроксимируется стандартным нормальным распределением $N(0,1)$ уже при $n > 20$.

Нормализующие преобразования позволяют использовать таблицы (или аппроксимации) стандартного нормального распределения для проверки отклонения от нормальности.

Пример 21

По предложенной выборке проверить гипотезу нормальности распределения случайных величин критерием эксцесса на уровне достоверности $p = 0,9$

x : -0.8637 0.0774 -1.2141 -1.1135 -0.0068 1.5326
 -0.7697 0.3714 -0.2256 1.1174 -1.0891 0.0326
 0.5525 1.1006 1.5442 0.0859 -1.4916 -0.7423

-1.0616	2.3505	-0.6156	0.7481	-0.1924	0.8886
-0.7648	-1.4023	-1.4224	0.4882	-0.1774	-0.1961
1.4193	0.2916	0.1978	1.5877	-0.8045	0.6966
0.8351	-0.2437	0.2157	-1.1658	-1.1480	0.1049
0.7223	2.5855	-0.6669	0.1873	-0.0825	-1.9330
		-0.4390	-1.7947		

Решение

Найдем среднее (39), и стандартное отклонение (52):

$$\bar{x} = -0,0379; \quad s = 1,0302;$$

Значение коэффициента эксцесса (144):

$$\alpha_4 = 2,7416.$$

Вычисляем далее:

$$M(\alpha_4) = 3 - \frac{6}{50+1} = 2,8824$$

$$D(\alpha_4) = \frac{24 \cdot 50 \cdot (48)(47)}{(51)^2 (53)(55)} = 0,3571$$

$$\sqrt{D(\alpha_4)} = 0,5975$$

Вычислим нормализующее преобразование:

$$c = \frac{6(50^2 - 5 \cdot 50 + 2)}{(50+7)(50+9)} \sqrt{\frac{6(50+3)(50+5)}{50(50-2)(50-3)}} = 1,5821;$$

$$f = 6 + \frac{8}{1,5821} \left\{ \frac{2}{1,5821} + \left(1 + \frac{4}{1,5821^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 20,5427.$$

Следовательно, величина α_4 может быть аппроксимирована распределением χ^2 с $f \approx 20$ степенями свободы.

Далее имеем:

$$x = \frac{2,7416 - 2,8824}{0,5975} = -0,2355;$$

$$d = \left[1 - \frac{2}{9 \cdot 20,5427} - \left\{ \frac{1 - \frac{2}{20,5427}}{1 + x \sqrt{\frac{2}{20,5427 - 4}}} \right\}^{\frac{1}{3}} \right] \left(\frac{2}{9 \cdot 20,5427} \right)^{\frac{1}{2}} = -0,0497$$

Используем нормализующее преобразование α_4 для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального ($u_{0,95} = 1,645$ - 95%-я квантиль стандартного нормального распределения. Так как критерий двусторонний, при $p = 0,9$ следует применять $u_{\frac{1+p}{2}} = u_{\frac{1+0,9}{2}} = u_{0,95}$).

По коэффициенту эксцесса имеем $d = -0,0497 < u_{0,95} = 1,645$. Следовательно, гипотеза нормальности по коэффициенту эксцесса **отклоняется**.

5.1.5. Критерий K^2

Мощность критерия проверки отклонения от нормальности может быть повышена применением так называемого комбинированного K^2 критерия [53, 56]

$$K^2 = X^2(\alpha_3) + X^2(\alpha_4) \quad (150)$$

где $X^2(\alpha_3)$ и $X^2(\alpha_4)$ - стандартные нормальные эквиваленты распределений α_3 и α_4 .

Статистика K^2 имеет χ^2 -распределение с $f = 2$ степенями свободы.

Пример 22

По предложенной выборке проверить гипотезу нормальности распределения случайных величин комбинированным K^2 критерием на уровне достоверности $p = 0,9$

x :	-0.8637	0.0774	-1.2141	-1.1135	-0.0068	1.5326
	-0.7697	0.3714	-0.2256	1.1174	-1.0891	0.0326
	0.5525	1.1006	1.5442	0.0859	-1.4916	-0.7423
	-1.0616	2.3505	-0.6156	0.7481	-0.1924	0.8886
	-0.7648	-1.4023	-1.4224	0.4882	-0.1774	-0.1961
	1.4193	0.2916	0.1978	1.5877	-0.8045	0.6966
	0.8351	-0.2437	0.2157	-1.1658	-1.1480	0.1049
	0.7223	2.5855	-0.6669	0.1873	-0.0825	-1.9330
			-0.4390	-1.7947		

Решение

Используя расчеты предыдущих примеров, получаем:

$$X^2(\alpha_3) = 1,2692^2 = 1,6108, \quad X^2(\alpha_4) = (-0,0497)^2 = 0,0025.$$

Тогда, окончательно (150):

$$K^2 = X^2(\alpha_3) + X^2(\alpha_4) = 1,6108 + 0,0025 = 1,6133$$

Из табл. 4 для $f = 2$ имеем критическое значение $\chi_{0,9}^2(2) = 4,605$. Так как $K^2 = 1,6133 < \chi_{0,9}^2(2) = 4,605$, гипотеза нормальности распределения случайных величин **не отклоняется**.

5.1.6. Критерий нормальности Д'Агостино

Д'Агостино [57, 58] предложил в качестве статистики для проверки нормальности распределения использовать отношение оценки Даутона для стандартного отклонения [59] к выборочному стандартному отклонению, оцененному методом максимального правдоподобия,

$$D = \frac{T}{n^2 s} \quad (151)$$

где

$$T = \sum_{i=1}^n \left\{ i - \frac{n+1}{2} \right\} x_i, \quad (152)$$

$x_1 \leq \dots \leq x_n$; s определяется по формуле (125).

Очевидно, что

$$\tilde{\sigma} = \frac{2\sqrt{\pi}T}{n(n-1)} \quad (153)$$

является несмещенной оценкой стандартного отклонения σ .

Показано, что

$$M(D) = \frac{n-1}{2\sqrt{2\pi n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \approx (2\sqrt{\pi})^{-1} \approx 0,28209479 \quad (154)$$

$$[D(D)]^{1/2} = \left(\frac{12\sqrt{3} - 37 + 2\pi}{24n\pi} \right)^{1/2} = \frac{0,02998598}{\sqrt{n}} \quad (155)$$

$$\alpha_3(D) = -\frac{8,463}{\sqrt{n}} \quad \text{– коэффициент асимметрии;}$$

$$\alpha_4(D) = \frac{107,9}{n} \quad \text{– коэффициент эксцесса.}$$

В качестве статистики критерия Д'Агостино используется величина

$$Y = \sqrt{n} \frac{D - 0,28209479}{0,02998598} \quad (156)$$

критические значения которой приведены в [57, 58] и частично воспроизведены в таблице 14. Гипотеза нормальности принимается, если $Y_1(\alpha) \leq Y \leq Y_2(\alpha)$, где $Y_1(\alpha)$ и $Y_2(\alpha)$ - критические значения статистики Y при уровне значимости α .

Таблица 14. Критические значения критерия Д'Агостино

n	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,1$	
	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2	Y_1	Y_2
10	-4,66	0,385	-3,25	0,299	-2,62	0,235
12	-4,63	0,479	-3,20	0,381	-2,58	0,329
14	-4,57	0,555	-3,16	0,460	-2,53	0,399
16	-4,52	0,613	-3,12	0,526	-2,50	0,459
18	-4,47	0,667	-3,08	0,574	-2,47	0,515
20	-4,41	0,720	-3,04	0,628	-2,44	0,565
22	-4,36	0,775	-3,01	0,677	-2,41	0,609
24	-4,32	0,822	-2,98	0,720	-2,39	0,648
26	-4,27	0,867	-2,96	0,760	-2,37	0,682
28	-4,23	0,910	-2,93	0,797	-2,35	0,714
30	-4,19	0,941	-2,91	0,830	-2,33	0,743
32	-4,16	0,983	-2,88	0,862	-2,32	0,770
34	-4,12	1,020	-2,86	0,891	-2,30	0,794
36	-4,09	1,050	-2,85	0,917	-2,29	0,816
38	-4,06	1,080	-2,83	0,941	-2,28	0,837
40	-4,03	1,110	-2,81	0,964	-2,26	0,857
42	-4,00	1,140	-2,80	0,986	-2,25	0,875
44	-3,98	1,170	-2,78	1,010	-2,24	0,892
46	-3,95	1,190	-2,77	1,020	-2,23	0,908
48	-3,93	1,220	-2,75	1,040	-2,22	0,923
50	-3,91	1,240	-2,74	1,060	-2,21	0,937

60	-3,81	1,340	-2,68	1,130	-2,17	0,997
70	-3,73	1,420	-2,64	1,190	-2,14	1,050
80	-3,67	1,480	-2,60	1,240	-2,11	1,080
90	-3,61	1,540	-2,57	1,280	-2,09	1,120
100	-3,57	1,590	-2,54	1,310	-2,07	1,140
150	-3,41	1,750	-2,45	1,420	-2,00	1,230
200	-3,30	1,850	-2,39	1,500	-1,96	1,290
250	-3,23	1,930	-2,35	1,540	-1,93	1,330
300	-3,17	1,980	-2,32	1,570	-1,91	1,360
350	-3,13	2,030	-2,29	1,610	-1,89	1,380
400	-3,09	2,060	-2,27	1,630	-1,87	1,400
450	-3,06	2,090	-2,25	1,650	-1,86	1,410
500	-3,04	2,110	-2,24	1,676	-1,85	1,420
600	-3,00	2,150	-2,21	1,690	-1,83	1,440
700	-2,97	2,180	-2,20	1,710	-1,82	1,460
800	-2,94	2,210	-2,18	1,730	-1,81	1,470
900	-2,92	2,310	-2,17	1,740	-1,80	1,480
1000	-2,91	2,350	-2,16	1,750	-1,79	1,490

Критерий Д'Агостино следует применять, когда нет сведений об альтернативном распределении. Он показывает хорошую мощность против большого спектра альтернатив, по мощности немного уступая критерию Шапиро - Уилка.

Пример 26

По данной выборке проверить гипотезу нормальности распределения вероятностей случайных величин критерием Д'Агостино при $\alpha = 0,05$
 $x : -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 15$.

Решение

$$\text{Вычисляем } T = \sum_{i=1}^n \left\{ i - \frac{n+1}{2} \right\} x_i = \left(1 - \frac{11}{2} \right) \cdot (-1) + \dots + \left(10 - \frac{11}{2} \right) \cdot (15) = 129;$$

Далее получаем:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot 129}{10 \cdot 9} = 5,081; \quad D = \frac{129}{100 \cdot 4,686} = 0,275288;$$

$$Y = \sqrt{10} \frac{0,275288 - 0,28209479}{0,02998598} = -0,71783.$$

Из таблицы 14 для $n=10$ и $\alpha=0,05$ находим $Y_1(0,05) = -3,25$ и $Y_2(0,05) = 0,299$. Так как $Y_1(0,05) = -3,25 < Y = -0,71783 < Y_2(0,05) = 0,299$, гипотеза нормальности распределения случайных величин **не отклоняется**.

5.1.7. Энтропийный критерий нормальности (критерий Васичека)

Критерий основан на том, что энтропия нормального распределения превышает энтропию любого другого распределения с той же дисперсией.

Энтропия распределения вероятностей с плотностью $f(x)$ равна:

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx \quad (157)$$

а ее оценка по выборочным данным

$$H_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left\{ \frac{n}{2m} (x_{i+m} - x_{i-m}) \right\} \quad (158)$$

где $x_i = x_1$ при $i < 1$; $x_i = x_n$ при $i > n$ (x_i - i я порядковая статистика), m - целое положительное число, меньшее, чем $n/2$.

Статистика критерия Васичека имеет вид [60]:

$$K_{mn} = \frac{n}{2ms} \left\{ \prod_{i=1}^n (x_{i+m} - x_{i-m}) \right\} \quad (159)$$

где s^2 - коэффициент, вычисляемый по формуле(125).

Если $K_{mn} < K_{mn}(\alpha)$, где $K_{mn}(\alpha)$ - критическое значение статистики, то нулевая гипотеза нормальности распределения отклоняется на уровне значимости α .

Значения $K_{mn}(\alpha)$ для $\alpha = 0,05$ приведены в таблице 15. При $n, m \rightarrow \infty$, $n/m \rightarrow \infty$ и справедливости гипотезы H_0 $K_{mn} \rightarrow \sqrt{2\pi e} = 4,133$ и всегда $0 \leq K_{mn} \leq 4,133$.

Таблица 15. Значения $K_{mn}(\alpha)$ при $\alpha = 0,05$

n	m	$K_{mn}(\alpha)$	n	m	$K_{mn}(\alpha)$	n	m	$K_{mn}(\alpha)$	n	m	$K_{mn}(\alpha)$
3	1	0,99	9	3	2,13	18	2	2,62	30	5	3,05
4	1	1,05	10	1	1,76		3	2,69	35	2	3,00
5	1	1,19		2	2,15		4	2,67		3	3,13
	2	1,70		3	2,21	20	1	2,25		4	3,16
6	1	1,33	12	1	1,90		2	2,69		5	3,16
	2	1,77		2	2,31		3	2,77	40	3	3,19
7	1	1,46		3	2,36	25	4	2,76		4	3,24
	2	1,87	14	1	2,01		2	2,83		5	3,24
	3	1,87		2	2,43		3	2,93	45	3	3,25
8	1	1,57		3	2,49		4	2,93		4	3,29
	2	1,97	16	1	2,11		5	2,91		5	3,30
	3	2,05		2	2,54	30	2	2,93	50	3	3,29
9	1	1,67		3	2,60		3	3,04		4	3,34
	2	2,06	18	1	2,18		4	3,06		5	3,35

Критерий прост, не нуждается в таблице коэффициентов, как критерий Шапиро-Уилки, его асимптотическая эффективность удовлетворительна. Наиболее эффективен критерий Васичека при проверке нормальности распределения против альтернатив равномерности и экспоненциальности.

Исследования показали [61], что этот критерий чувствительнее к выбросам случайных величин, чем критерий Шапиро—Уилка.

Пример 23

По данной выборке проверить нормальность распределения случайных величин критерием Васичека на уровне значимости $\alpha = 0,05$

$$x: -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 15.$$

Решение

Для примера используем критерий при $m = 1$ и $m = 2$. Имеем

$$s = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 4,686$$

и при $m = 1$ ($n = 10$) получаем

$$K_{1,10} = \frac{10}{2 \cdot 1 \cdot 4,686} \left\{ \prod_{i=1}^{10} (x_{i+1} - x_{i-1}) \right\}^{\frac{1}{10}} = 1,067 \cdot \{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) \dots (x_{10} - x_9)\}^{\frac{1}{10}} =$$

$$= 1,067 \cdot \{(0+1)(1+1)(2-0) \dots (15-10)\}^{\frac{1}{10}} = 2,913$$

Из таблицы 15 находим $K_{mn}(\alpha) = K_{1,10}(0,05) = 1,76$.

Так как $K_{1,10} = 2,9134 > K_{1,10}(0,05) = 1,76$, нулевая гипотеза нормальности распределения **не отклоняется**.

По аналогии имеем $K_{2,10} = 2,7866 > K_{2,10}(0,05) = 2,15$.

Следовательно, и при $m = 2$ приходим к такому же результату.

5.1.8. Критерий Дэвида – Хартли – Пирсона

В [62] предложен критерий нормальности распределения вероятностей случайной величины, основанный на распределении отношения размаха к стандартному отклонению.

Статистика критерия имеет вид:

$$U = \frac{R}{s} \quad (160)$$

где $R = x_{\max} - x_{\min}$ (или $(x_n - x_1)$ для упорядоченного по возрастанию ряда выборочных значений) - размах выборки; s - стандартное отклонение(125).

Таблица 16. Критические границы $U_1(\alpha)$ и $U_2(\alpha)$ критерия Дэвида – Хартли – Пирсона

n	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,05$		$\alpha = 0,1$	
	U_1	U_2	U_1	U_2	U_1	U_2
3	1,737	2,000	1,758	1,999	1,782	1,997
4	1,870	2,445	1,980	2,429	2,040	2,409
5	2,020	2,803	2,150	2,753	2,220	2,712
6	2,150	3,095	2,200	3,012	2,370	2,949
7	2,260	3,338	2,400	3,222	2,490	3,143
8	2,350	3,543	2,500	3,399	2,590	3,308
9	2,440	3,720	2,590	3,552	2,680	3,449
10	2,510	3,875	2,670	3,685	2,760	3,570
11	2,580	4,012	2,740	3,800	2,840	3,680
12	2,640	4,134	2,800	3,910	2,900	3,780

13	2,700	4,244	2,860	4,000	2,960	3,870
14	2,750	4,340	2,920	4,090	3,020	3,950
15	2,800	4,440	2,970	4,170	3,070	4,020
16	2,840	4,520	3,010	4,240	3,120	4,090
17	2,880	4,600	3,060	4,310	3,170	4,150
18	2,920	4,670	3,100	4,370	3,210	4,210
19	2,960	4,740	3,140	4,430	3,250	4,270
20	2,990	4,800	3,180	4,490	3,290	4,320
25	3,150	5,060	3,340	4,710	3,450	4,530
30	3,270	5,260	3,470	4,890	3,590	4,700
35	3,380	5,420	3,580	5,040	3,700	4,840
40	3,470	5,560	3,670	5,160	3,790	4,960
45	3,550	5,670	3,750	5,260	3,880	5,060
50	3,620	5,770	3,830	5,350	3,950	5,140
55	3,690	5,860	3,900	5,430	4,020	5,220
60	3,750	5,940	3,960	5,510	4,080	5,290
65	3,800	6,010	4,010	5,570	4,140	5,350
70	3,850	6,070	4,060	5,630	4,190	5,410
75	3,900	6,130	4,130	5,680	4,240	5,460
80	3,940	6,180	4,150	5,730	4,280	5,510
85	3,990	6,230	4,200	5,780	4,330	5,560
90	4,020	6,270	4,240	5,820	4,360	5,600
95	4,060	6,320	4,270	5,860	4,400	5,640
100	4,100	6,360	4,310	5,900	4,440	5,680

Гипотеза нормальности принимается, если $U_1(\alpha) < U < U_2(\alpha)$ и (α - уровень значимости). Наиболее полные таблицы критических значений $U(\alpha)$ приведены в [63, 64] (в таблице 16 приведены некоторые значения $U_1(\alpha)$ и $U_2(\alpha)$).

При $n \rightarrow \infty$ имеют местосоотношения [65]:

$$2\sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{R}{s} \leq \sqrt{2(n-1)} \text{ при } n = 2, 4, \dots, 2k;$$

$$2\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{R}{s} \leq \sqrt{2(n-1)} \text{ при } n = 1, 3, \dots, 2k-1.$$

Пример 24

По данной выборке проверить гипотезу нормальности распределения вероятностей случайных величин критерием Дэвида-Хартли-Пирсона при $\alpha = 0,05$

$$x : -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 15.$$

Решение

Имеем $R = x_{\max} - x_{\min} = 15 - (-1) = 16$;

$$s = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 4,686$$

$$U = \frac{R}{s} = \frac{16}{4,686} = 3,414$$

Из таблицы 1б для $n = 10$ и $\alpha = 0,05$ находим $U_1 = 2,67$ и $U_2 = 3,522$.

Так как $2,67 < 3,414 < 3,522$, нулевая гипотеза нормальности распределения **не отклоняется**.

5.2. Критерии проверки экспоненциальности распределения

Экспоненциальный закон распределения вероятностей является базовым законом, используемым в теории надежности. Его аналитическая простота делает его привлекательным для инженеров и исследователей. Однако всегда следует предварительно убедиться в том, что вероятностное поведение случайной величины (например, моментов отказов изделий) подчиняется «желательному» экспоненциальному закону. В ином случае выигрыш от простоты расчетов будет многократно „скомпенсирован“ потерями от ошибочных выводов и заключений, вызванных отклонением реального распределения вероятностей случайной величины от экспоненциального закона.

В [6] предложено множество критериев проверки экспоненциальности распределения, такие как критерий Шапиро-Уилка [66], Критерии типа Колмогорова - Смирнова [67,68], Критерии типа Смирнова-Крамера-фон Мизеса для пензурированных данных [69], Критерий Фроцини [70], Корреляционный критерий экспоненциальности [67]. Регрессионный критерий Брейна - Шапиро [71]. Критерий Кимбера - Мичела [72]. Критерий Фишера. Критерий Бартлетта-Морана [73,74]. Критерий Климко-Антла-Радемакера-Рокетта [75].

Критерий Холлендера-Прошана [76,77]. Критерий Кочара [78]. Критерий Эппса - Палли - Чёрго-Уэлча [79]. Критерий Бергмана [80]. Критерий Шермана [81]. Критерий наибольшего интервала [82]. Критерий Хартли [83]. Критерий показательных меток. Ранговый критерий независимости интервалов. Критерии, основанные на трансформации экспоненциального распределения в равномерное. Критерий \bar{U} . Критерий \tilde{U} . Критерий Гринвуда. Критерий Манн – Фертига-Шуера для распределения Вейбулла. Критерий Дешпанде [84]. Критерий Лоулесса [85,86].

Для краткости рассмотрим один из самых мощных, но в то же время один из самых простым критериев проверки экспоненциальности распределения, критерий Фроцини, а так же критерий Бартлетта-Морана основанный на распределении χ^2 .

5.2.1. Критерий Фроцини

В [70] рассмотрен критерий экспоненциальности, основанный на статистике

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| 1 - \exp\left(-\frac{x_i}{\bar{x}}\right) - \frac{i-0,5}{n} \right| \quad (161)$$

критические значения которой $B_n(\alpha)$ приведены в таблице 17.

Таблица 17. Критические значения $B_n(p)$ критерия экспоненциальности Фроцини (p - доверительная вероятность)

n	p			n	p		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
5	0,3261	0,3687	0,4499	14	0,3373	0,3821	0,4656
6	0,3241	0,3666	0,4495	15	0,3364	0,3837	0,4747
7	0,3292	0,3742	0,4584	16	0,3345	0,3777	0,4693
8	0,3289	0,3740	0,4609	17	0,3387	0,3806	0,4716
9	0,3365	0,3800	0,4660	18	0,3360	0,3814	0,4730
10	0,3377	0,3820	0,4753	19	0,3370	0,3844	0,4796
11	0,3334	0,3790	0,4710	20	0,3351	0,3795	0,4738
12	0,3318	0,3784	0,4641	∞	0,3380	0,3840	0,4760
13	0,3313	0,3768	0,4631				

Мощность критерия не уступает всем известным до $n \leq 20$ и превосходит их при $n > 50$.

Пример 25

Имеется ряд наблюдений

$$x_i: 1, 2, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35,$$

проверить гипотезу экспоненциальности критерием Фроцини при $p = 0,95$.

Решение

Находим среднее значение (39): $\bar{x} = 13,5$;

Статистика критерия (161):

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{10}} \sum_{i=1}^n \left| 1 - \exp\left(-\frac{x_i}{13,5}\right) - \frac{i - 0,5}{10} \right| = 0,0974$$

Из таблицы 17 для $n = 10$ и $p = 0,95$ находим $B_n(0,95) = 0,38$.

Так как $0,0974 < 0,38$, нулевая гипотеза экспоненциальности распределения **не отклоняется**.

5.2.2. Критерий Бартлетта – Морана

Статистика критерия, вычисляемая по ряду значений x_1, \dots, x_n имеет вид

$$B = \frac{2 \cdot n^2}{7n + 1} \left[\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right] \quad (162)$$

При $n \geq 20$ распределение статистики B удовлетворительно аппроксимируется χ^2 распределением с $f = n - 1$ степенями свободы [87]. Поэтому нулевая гипотеза экспоненциальности отклоняется, если $B > \chi_p^2(n - 1)$ на уровне значимости $(1 - p)$.

Пример 26

Имеется ряд наблюдений

$$x_i: 1, 2, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35,$$

проверить гипотезу экспоненциальности критерием Бартлетта-Морана при $p = 0,95$.

Решение

Находим среднее значение (39): $\bar{x} = 13,5$;

Логарифм среднего: $\ln \bar{x} = 2,6027$;

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \bar{x} = 2,1141;$$

$$B = \frac{12 \cdot 10^2}{70+1} [2,6027 + 2,1141] = 13,2869.$$

Из табл. 4 для $f = n - 1 = 9$ и $p = 0,95$ находим $\chi_{0,95}^2(9) = 16,919$.

Так как $13,2869 < 16,919$, нулевая гипотеза нормальности распределения не отклоняется.

5.3. Критерии проверки равномерности распределения

В литературе приводятся множество критериев равномерности, таких как: Критерий Шермана [81]. Критерий Морана [73]. Критерий Ченга - Спиринга [88]. Критерий Саркади - Косика [89]. Энтропийный критерий Дудевича-ван дер Мюлена [90]. Критерий Хегази-Грина [91]. Критерий Янга [92]. Критерии типа Колмогорова - Смирнова. Критерий Фроцини [70]. Критерий Гринвуда – Кэсенберри-Миллера [93]. «Сглаженный» критерий Неймана-Бартона [94].

Рассмотрим наиболее простые критерии, а именно, критерий Ченга - Спиринга и критерий Саркади - Косика.

5.3.1. Критерий Ченга – Спиринга

Критерий равномерности распределения, аналогичный критерию Шапиро-Уилка, предложен в [88]. Его статистика имеет вид

$$W_p = \frac{\left[(x_n - x_1) \frac{n+1}{n-1} \right]}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (163)$$

где $(x_n - x_1)$ - выборочный размах.

Всегда

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4(n+1)^2}{n(n-1)^2} \text{ при } n - \text{ четном.}$$

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4n(n+1)^2}{n(n-1)^3} \text{ при } n - \text{нечетном.}$$

при справедливости нулевой гипотезы.

Гипотеза равномерности отклоняется, если $W_1(p) \leq W_p \leq W_2(p)$, где $W_1(p)$ и $W_2(p)$ - критические значения при доверительной вероятности p , приведенные в таблице 18.

Таблица 18. Критические значения $W_1(p)$ и $W_2(p)$ критерия равномерности Ченга-Спиринга

n	Доверительная вероятность p						n	Доверительная вероятность p					
	0,90		0,95		0,99			0,90		0,95		0,99	
	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂		W ₁	W ₂	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂
3	6,3	7,97	6,15	7,99	6,03	8	16	0,65	1,03	0,62	1,11	0,56	1,31
4	3,74	5,31	3,44	5,43	3,08	5,53	17	0,61	0,97	0,58	1,04	0,53	1,2
5	2,58	4,02	2,42	4,18	2,540	4,39	18	0,58	0,9	0,55	0,98	0,5	1,12
6	2	3,23	1,88	3,41	1,71	3,67	19	0,55	0,85	0,52	0,92	0,47	1,05
7	1,64	2,68	1,54	2,85	1,539	3,13	20	0,52	0,8	0,5	0,86	0,45	0,98
8	1,4	2,32	1,32	2,47	1,18	2,77	21	0,5	0,76	0,47	0,81	0,43	0,92
9	1,22	2,04	1,15	2,19	1,04	2,46	22	0,47	0,72	0,45	0,78	0,41	0,89

10	1,08	1,79	1,02	1,92	0,91	2,18	23	0,45	0,68	0,43	0,73	0,4	0,84
11	0,97	1,6	0,92	1,73	0,83	1,99	24	0,44	0,65	0,42	0,7	0,38	0,8
12	0,89	1,45	0,84	1,57	0,76	1,79	25	0,42	0,62	0,4	0,67	0,36	0,76
13	0,81	1,31	0,77	1,42	0,69	1,64	30	0,35	0,51	0,33	0,54	0,31	0,61
14	0,75	1,22	0,71	1,31	0,64	1,52	40	0,26	0,37	0,25	0,39	0,23	0,44
15	0,7	1,12	0,66	1,21	0,6	1,39	50	0,21	0,29	0,2	0,3	0,19	0,33

Пример 27

Имеется ряд наблюдений над случайной величиной:

$$x : 0,047; 0,05; 0,15; 0,18; 0,29; 0,48; 0,52; 0,61; 0,72; 0,91$$

проверить гипотезу равномерности распределения случайных величин критерием Ченга – Спиринга при доверительной вероятности $p = 0,95$.

Решение

Имеем:

$$x_1 = 0,047, x_n = 0,91 \text{ и } \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}) = 0,7973241$$

Тогда

$$W_p = \frac{\left[(0,91 - 0,047) \cdot \frac{11}{9} \right]^2}{0,7973241} = 1,395;$$

Из таблицы 18 для $n = 10$ и $p = 0,95$ находим $W_1(0,95) = 1,02$ и $W_2(0,95) = 1,92$.

Так как $1,02 < 1,395 < 1,92$, гипотеза равномерности распределения совокупности случайных величин **не отклоняется**.

5.3.2. Критерий Саркади – Косика

В [89] рассмотрен новый, весьма эффективный критерий равномерности на $[0,1]$, основанный на модификации критерия Ватсона, со статистикой

$$J = n^2 \sum_{i=1}^n d_i^2 - n \left(\sum_{i=1}^n d_i \right)^2 \quad (164)$$

где $d_i = \frac{x_i - \frac{i}{n+1}}{i(n-i+1)}$ и $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Распределение признается не противоречащим равномерному на уровне значимости α , если $J < J(\alpha)$, где $J(\alpha)$ - критическое значение, приведенное в таблице 19.

Таблица 19. Критические значения $J(\alpha)$ критерия Саркади – Косика

n	α		n	α	
	0,05	0,1		0,05	0,1
5	0,499	0,408	40	1,040	0,836
10	0,741	0,599	50	1,020	0,823
15	0,881	0,695	60	1,060	0,862
20	0,931	0,748	70	1,070	0,870
25	0,973	0,782	80	1,070	0,876
30	1,000	0,806	90	1,080	0,880
35	1,020	0,823	100	1,080	0,883

Пример 28

Имеется ряд наблюдений над случайной величиной:

$x : 0,047; 0,05; 0,15; 0,18; 0,29; 0,48; 0,52; 0,61; 0,72; 0,91$

проверить гипотезу равномерности распределения случайных величин критерием Саркади – Косика уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Решение

Вычисления статистики критерия приведены в таблице:

i	x_i	$\frac{i}{n+1}$	$x_i - \frac{i}{n+1}$	$i(n-i+1)$	d_i	$d_i^2 \cdot 10^{-5}$
1	0,047	0,0909	-0,0439	10	-0,004390	1,927
2	0,050	0,1818	-0,1318	18	-0,007322	5,631
3	0,150	0,2727	-0,1227	24	-0,005110	2,614
4	0,180	0,3636	-0,1836	28	-0,006557	4,300
5	0,290	0,4545	-0,1645	30	-0,005480	3,010
6	0,480	0,5454	-0,0654	30	-0,002180	4,750
7	0,520	0,6363	-0,1164	28	-0,004150	1,727
8	0,610	0,7272	-0,1173	24	-0,004880	2,387
9	0,720	0,8181	-0,0982	18	-0,005450	2,975
10	0,910	0,9090	0,0009	10	0,0001	0,001

Вычисляем статистику

$$J = 100 \cdot 2,5028 \cdot 10^{-4} - 10 \cdot (0,045419)^2 = 4,399 \cdot 10^{-3}$$

Легко видеть, что $J = 4,399 \cdot 10^{-3} < J(\alpha) = 0,741$, что **не отклоняет** гипотезу равномерности.

5.4. Критерии симметрии

Если отсутствуют предпосылки для проверки согласия эмпирического распределения с каким-либо теоретическим, то выявление даже самых общих свойств эмпирического распределения дает некоторую информацию для выбора приемов и методов обработки экспериментального материала.

Одним из таких практически важных свойств распределения является его симметричность относительно центра группирования значений случайной величины.

В литературе приводятся множество критериев симметрии, таких как: «Быстрый» критерий Кенуя [95]. Критерий симметрии Смирнова [96]. Знаковый критерий симметрии. Одновыборочный критерий Вилкоксона. Критерий Антиллы – Керстинга - Цуккини [97]. Критерий Бхатачарья – Гаствирта - Райта [98]. Критерий Финча

[99]. Критерий Бооса [100]. Критерий Гупты [101,102]. Критерий Фрезера [103,104].

Рассмотрим критерий симметрии Смирнова и одновыборочный критерий Вилкоксона.

5.4.1. Критерий симметрии Смирнова

Проверяется гипотеза $H_0: F(a)=1-F(a)$, то есть гипотеза о том, что предполагаемая функция распределения $F(x)$ симметрична относительно центра a .

Для выборки x_1, x_2, \dots, x_n случайной величины $x > 0$ статистика Смирнова имеет вид [96]:

$$\tau_n = \max_{x>0} |K^+ - K^-| \quad (165)$$

где K^+ - число значений x , попавших в интервал $(a; a+x)$; K^- - число значений x , попавших в интервал $(a-x; a)$.

Гипотеза симметричности распределения отклоняется с достоверностью p , если $\tau_n \geq \tau_n(p)$, где $\tau_n(p)$ - критическое значение статистики, при $n \geq 50$ равное [105]

$$\tau_n(p) = \left(n + \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} u_{\frac{1+p}{2}} \quad (166)$$

Пример 29

Имеется ряд наблюдений

$$x_i: 1, 2, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35,$$

Необходимо проверить гипотезу симметричности распределения случайной величины x_i относительно $a=10$ критерием Смирнова при доверительной вероятности $p=0,95$.

Решение

Заполняем таблицу:

i	x_i	K^+	K^-	$K^+ - K^-$
1	1	1	1	0
2	2	1	1	0
3	3	1	1	0
4	5	1	2	-1
5	9	2	5	-3
6	11	3	5	-2
7	18	3	5	-2
8	21	4	5	-1
9	29	5	5	0
10	35	5	5	0

Тогда $\tau_n \max(K^+ - K^-) = 3$ и $\tau_n(p) = \left(10 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} u_{0,975} = 3,266 \cdot 1,96 = 6,40$.

Так как $\tau_n = 3 < \tau_n(0,95) = 6,4$, распределение можно считать симметричным (критерий следует применять при $n \geq 50$, а настоящий пример следует рассматривать как демонстрационный).

5.4.2. Одновыборочный критерий Вилкоксона

От ряда выборочных величин x_i переходим к ряду величин $y_i = x_i - a$, где a - предполагаемый центр распределения. Значения y_i упорядочим по абсолютной величине: $|y_1| \leq |y_2| \leq \dots \leq |y_n|$. В полученном ряду каждому значению $|y_i|$ припишем ранг (от 1 до n), равный его порядковому номеру в упорядоченной последовательности.

Обозначим через R_i^+ ранги случайных величин y_i , имеющих положительное значение.

Статистика критерия Вилкоксона задается формулой [106]:

$$T^+ = \sum_{i=1}^n R_i^+ \quad (167)$$

Гипотеза симметричности отклоняется, если $T^+ > T^+(p)$, где $T^+(p)$ - критическое значение, приведенное в таблице 20.

Таблица 20. Критические значения $T^+(p)$ одновыборочного критерия Вилкоксона

n	p			n	p		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
3	6	6	6	12	55	60	67
4	8	9	10	13	64	69	77
5	12	14	15	14	73	78	88
6	17	18	20	15	82	89	100
7	21	23	27	16	93	99	111
8	27	29	34	17	103	111	124
9	33	36	41	18	115	123	137
10	40	43	49	19	127	136	151
11	47	51	58	20	139	149	166

При $n > 20$ распределение T^+ удовлетворительно аппроксимируется нормальным с параметрами

$$M(T^+) = \frac{n(n+1)}{4} \quad (168)$$

$$D(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \quad (169)$$

т. е. критические значения могут быть вычислены по формуле

$$T^+(p) = \left[\frac{n(n+1)}{4} + \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}} u_p \right] \quad (170)$$

где $[x]$ - ближайшее целое число к x .

Пример 30

Имеется ряд наблюдений

$$x_i: 1, 2, 4, 5, 9, 11, 18, 21, 29, 35,$$

Необходимо проверить гипотезу симметричности распределения случайной величины x_i относительно $a=10$ критерием Вилкоксона при доверительной вероятности $p=0,95$.

Решение

Представим ряд в виде $y_i = x_i - a$: -9, -8, -7, -5, -1, 1, 8, 11, 19, 25

Ранжированный ряд значений $|y_i|$ имеет вид:

1, 1, 5, 7, 8, 8, 9, 11, 19, 25

для которого имеем последовательность рангов (для одинаковых значений используются средние ранги):

1,5; 1,5; 3; 4; 5,5; 5,5; 7, 8, 9, 10

Отмечая в ряду $|y_i|$ значения $y_i > 0$ (они выделены), приходим к последовательности рангов

$$R_i^+ : 1,5; 5,5; 8, 9, 10$$

Тогда $T^+ = \sum_{i=1}^n R_i^+ = 1,5 + 5,5 + 8 + 9 + 10 = 34$.

Так как $T^+ = 34 < T^+(p) = 43$, гипотеза симметричности не отклоняется.

Для нормального приближения ($u_{0,95} = 1,645$) имеем

$$T^+(p) = \left[\frac{10 \cdot 11}{4} + \sqrt{\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{24}} 1,645 \right] = 43 ;$$

что совпадает с табличным результатом (хотя аппроксимацию, строго говоря, применять нельзя).

6. КРИТЕРИИ ОДНОРОДНОСТИ

6.1. Критерий χ^2 -квадрат

Пусть имеется $k \geq 2$ независимых выборок, содержащих соответственно n_1, \dots, n_k независимых наблюдений $(x_1, \dots, x_{n_1}), (y_1, \dots, y_{n_2}), \dots (z_1, \dots, z_{n_k})$. Гипотеза об однородности предполагает, что генеральные совокупности, из которых извлечены выборки, одинаковы (или все выборки произведены из одной генеральной совокупности), и им соответствуют одинаковые функции распределения, а именно нулевая гипотеза $H_0: F_1(x) = F_2(y) = \dots = F_k(z)$, где $F_i(x)$ - функция распределения i -й генеральной совокупности.

Наиболее часто в приложениях встречается случай, когда $k = 2$. Пусть имеется два ряда наблюдений некоторого признака и каждый ряд разбит на r групп по значениям этого признака. Сгруппированный ряд имеет вид

$n_1:$	m_1	m_2	...	m_r
$n_2:$	l_1	l_2	...	l_r

Пусть m_i и l_i - количество выборочных значений в i -й группе A_i для первого и второго наблюдений соответственно. Тогда статистический критерий для проверки истинности нулевой гипотезы будет иметь вид

$$\chi_H^2 = n_1 n_2 \sum_{i=1}^r \frac{(m_i / n_1 - l_i / n_2)^2}{m_i + l_i} \quad (171)$$

который в случае истинности основной гипотезы при $n \rightarrow \infty$ имеет распределение χ^2 с $\nu = r - 1$ степенями свободы. Следовательно, критическими точками, соответствующими уровню значимости α , будут $\chi_{\alpha, r-1}^2$ и проверка гипотезы проводится по общей схеме, т.е. если $\chi_H^2 < \chi_{\alpha, r-1}^2$ и отвергается в противном случае.

Недостатки критерия:

- Разбиение области производится произвольно и не учитывает специфики функции распределения
- Для проверки гипотез требуются выборки большого объема.

6.2. Критерий Колмогорова

Пусть x_1, \dots, x_{n_1} и y_1, \dots, y_{n_2} вариационные ряды, составленные из элементов первой и второй выборок соответственно. Требуется проверить гипотезу H_0 о совпадении законов распределения. Определим эмпирические функции распределения $F_1^{(n_1)}$ и $F_2^{(n_2)}$. Для проверки гипотезы вводятся следующие статистики:

$$D_{n_1, n_2}^+ = \sup_x \left[F_1^{(n_1)}(x) - F_2^{(n_2)}(y) \right] \quad (172)$$

$$D_{n_1, n_2}^- = \sup_x \left[F_2^{(n_2)}(y) - F_1^{(n_1)}(x) \right] \quad (173)$$

$$D_{n_1, n_2} = \max_x \left(D_{n_1, n_2}^+, D_{n_1, n_2}^- \right) = \sup_x \left| F_1^{(n_1)}(x) - F_2^{(n_2)}(y) \right| \quad (174)$$

В случае истинности нулевой гипотезы распределения статистик D_{n_1, n_2}^+ и D_{n_1, n_2}^- одинаковы, поэтому рассматривается лишь статистика D_{n_1, n_2} . Без ограничения общности можно считать, что $n_2 \leq n_1$. Предположим, что предельные функции $F_1(x)$ и $F_2(y)$ непрерывны и гипотеза H_0 верна.

Пусть $n_2 \rightarrow \infty$ и $n_0 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$. Тогда случайные величины $D_{n_1, n_2}^+ \sqrt{n_0}$, $D_{n_1, n_2}^- \sqrt{n_0}$ имеют распределение Колмогорова. Для статистики $D_{n_1, n_2} \sqrt{n_0}$ критической является область больших значений, т. е. гипотеза об однородности отклоняется, если $D_{n_1, n_2} \sqrt{n_0} > \lambda_\alpha(n_1, n_2)$, где $\lambda_\alpha(n_1, n_2)$ - критическая точка распределения Колмогорова статистики $D_{n_1, n_2} \sqrt{n_0}$ при уровне значимости α .

На практике для сокращения объема вычислений величины D_{n_1, n_2}^+ и D_{n_1, n_2}^- можно находить по формулам

$$D_{n_1, n_2}^- = \max_{1 \leq i \leq n_2} \left[\frac{i}{n_2} - F_1^{(n_1)}(x_{(i)}) \right] = \max_{1 \leq j \leq n_1} \left[F_2^{(n_2)}(y_{(j)}) - \frac{j-1}{n_1} \right] \quad (175)$$

$$D_{n_1, n_2}^+ = \max_{1 \leq i \leq n_2} \left[F_1^{(n_1)}(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n_2} \right] = \max_{1 \leq j \leq n_1} \left[\frac{j}{n_1} - F_2^{(n_2)}(y_{(j)}) \right] \quad (176)$$

$$D_{n_1, n_2} = \max_x (D_{n_1, n_2}^+, D_{n_1, n_2}^-) \quad (177)$$

Если число выборок $k > 2$ и объемы выборок равны ($n_1 = n_2 = \dots = n_k$), то можно использовать следующее обобщение статистик:

$$D_{(n_1)}^{(k)} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \sup |F_i^{(n)}(x) - F_j^{(n)}(x)|$$

Для практических целей обычно достаточно предельных статистик:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n^+ < \lambda) = K(\lambda), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}D_n^- < \lambda) = S(\lambda)$$

где

$$K(\lambda) = \begin{cases} 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 \lambda^2}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda \leq 0 \end{cases} \quad (178)$$

$$S(\lambda) = \begin{cases} 1 - 2^{-2\lambda^2}, & \lambda \geq 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases} \quad (179)$$

Предельное распределение для статистики $\sqrt{n}D_n^-$ в точности совпадаете $S(\lambda)$.

Замечание: При использовании данного критерия не требуется предварительного разбиения на интервалы и группирования.

6.3. Критерий Уилкоксона – Манна – Уитни

Данный критерий основан на подсчете числа *инверсий*. Для этого обе выборки располагают в виде одного *вариационного ряда*

$$y_1, y_2, x_1, y_3, x_2, \dots$$

Если в этой последовательности заданному x_i предшествует s элементов выборки $y_1, y_2, y_3, \dots, y_s$, то имеет место s инверсий. Общее число инверсий U равно сумме инверсий, образуемых всеми элементами первой выборки с элементами второй. Правило проверки гипотезы по критерию Уилькоксона состоит в сравнении общего числа

инверсий с пороговым числом, определяемым заданным уровнем значимости.

В [107] показано, что при $m+n \geq 20$ и $m > 3$ с хорошим приближением можно считать распределение общего числа инверсий нормальным с параметрами

$$m_1\{U\} = \frac{mn}{2} \quad (180)$$

$$M_2\{U\} = \frac{mn}{12}(m+n+1) \quad (181)$$

Тогда пороговое значение U_α числа инверсий для заданного уровня значимости α определяется по формуле

$$U_\alpha = \frac{mn}{2} + \chi_\alpha \sqrt{\frac{mn}{12}(m+n+1)} \quad (182)$$

где χ_α - процентное отклонение нормальной случайной величины. Если вычисленное по заданным двум выборкам значение U превосходит U_α , то гипотеза о том, что эти выборки принадлежат одному и тому же распределению, отклоняется.

7. ПОДБОР КРИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Часто инженер или исследователь не имеет достаточных оснований для выбора того или иного закона распределения вероятностей. Его попытка использовать критерии нормальности, экспоненциальности или равномерности распределения случайных величин потерпели неудачу. Что же ему делать? Очевидно, смириться с тем, что он не сможет применить хорошо известные математические модели для описания своих экспериментальных данных, и попытаться найти все-таки модель, которой отвечают его результаты.

Другими словами, ему необходимо подобрать по экспериментальным данным распределение, которое удовлетворительно описывало бы имеющийся экспериментальный материал.

Наибольшее распространение для аппроксимации эмпирических распределений получили кривые Пирсона. Плотность вероятности $f(x)$, график которой принадлежит семейству Пирсона, является решением дифференциального уравнения [108]

$$\frac{dy}{y} = \frac{x+b}{c_0 + c_1x + c_2x^2}$$

Постоянные b , c_0 , c_1 , c_2 выражаются через первые четыре момента распределения (математическое ожидание, дисперсия, коэффициенты асимметрии α_3 и эксцесса α_4):

$$c_0 = -\sigma^2 \frac{K+1}{K-2} \quad (183)$$

$$c_1 = -b = \frac{\alpha_3 \sigma}{2} \frac{K+2}{K-1} \quad (184)$$

$$c_2 = \frac{1}{2 \cdot K} \quad (185)$$

где

$$K = \frac{6(\alpha_4 - \alpha_3^2 - 1)}{3 \cdot \alpha_3^2 - 2 \cdot \alpha_4 + 6} \quad (186)$$

Выбор из семейства кривых Пирсона такой кривой, у которой первые четыре момента совпадают с выборочными моментами, определенными по экспериментальным данным, составляет содержание

задачи подбора эмпирической кривой для распределения вероятностей случайной величины.

Тип кривой из семейства Пирсона определяется значением показателя χ [108]

$$\chi = -\frac{\alpha_3^2 (K+2)^2}{16 K+1} \quad (187)$$

На практике различают 7 основных типов кривых Пирсона, которым соответствуют различные значения χ , а следовательно α_3 и α_4 . Графики для определения типа кривой Пирсона по значениям α_3 и α_4 приведены в [37], по показателю χ - в [108].

Так как достаточно эффективные и стабильные оценки моментов α_3 и α_4 распределения достигаются при значительных объемах выборок, то анализу подвергаются, как правило, статистические ряды, разбитые на интервалы равной длины $c = x_{i+1} - x_i$, т.е. статистический ряд представляется своей эмпирической гистограммой.

В этом случае границы интервалов разбиения $(x_{i+1}; x_i)$ фиксируются, а случайной величиной является количество выборочных значений данных n_i попавших в тот или иной интервал.

Далее для всех кривых Пирсона переменная представлена в виде

$$x = \frac{x^* - \hat{x}}{c}$$

где x^* - реальное значение переменной;

\hat{x} - мода распределения (значение случайной величины, соответствующее максимуму плотности распределения);

c - длина интервала, на которые разбит эмпирический статистический ряд.

Напомним порядок вычисления моментов распределения, заданного эмпирической гистограммой. Гистограмма представлена совокупностью пар

$$\left(\begin{matrix} x_1 \\ n_1 \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} x_2 \\ n_2 \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} x_N \\ n_N \end{matrix} \right)$$

где x_i - середина i -го интервала разбиения;

n_i количество данных, попавших в i -й интервал;

N - количество интервалов разбиения гистограммы.

Первые четыре момента распределения подсчитываются по формулам

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i^k n_i$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \quad n = \sum_{i=1}^N n_i.$$

Часто вместо переменной x удобнее использовать переменную $\tilde{x} = \frac{x - x_0}{c}$, где x_0 - условное начало отсчета (как правило, это величина, соответствующая интервалу разбиения с наибольшей частотой n_i). Тогда $\bar{x} = x_0 + m_1 c$.

Дисперсия σ^2 выражается через начальные моменты формулой $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Переход к метрической величине осуществляется по формуле $\sigma' = c\sigma$.

Коэффициенты асимметрии и эксцесса выражаются через начальные моменты следующим образом:

$$\alpha_3 = \frac{m_3 - 3 \cdot m_1 \cdot m_2 + 2 \cdot m_1^3}{(m_2 - m_1^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (188)$$

$$\alpha_4 = \frac{m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4}{(m_2 - m_1^2)^2} \quad (189)$$

Легко видеть, что для негруппированного ряда $c = 1$, $n_i = 1$. Порядок вычисления m_k будет продемонстрирован ниже.

Аппроксимация распределением из семейства Пирсона позволяет подыскать подходящую кривую для описания плотности распределения эмпирических данных, что необходимо для выявления основных характеристик распределения (его ход, симметричность, поведение на хвостах). Однако найти квантиль этого распределения по аналитической формуле плотности распределения - задача непростая.

Эту задачу можно решить без подбора распределения, достаточно найти оценки α_3 и α_4 и воспользоваться известными таблицами

квантилей распределения Пирсона (табл.3) для нормированной пере-

менной $y = \frac{x - \bar{x}}{s}$ (тогда истинная квантиль равна $x_\beta = \bar{x} + s \cdot y_\alpha$).

Таблица 21. Значение квантилей $y_\alpha = (x_\alpha - \bar{x}) / s$

α_4	α_3^2															
	0,0 0	0,0 1	0,0 3	0,0 5	0,1 0	0,1 5	0, 2	0, 3	0, 4	0, 5	0, 6	0, 7	0, 8	0, 9	1,0 0	
$p = 0.05$																
1,8	1,56															
2,0	1,61	1,56														
2,2	1,64	1,59	1,51													
2,4	1,65	1,61	1,58	1,47												
2,6	1,65	1,61	1,59	1,57	1,4											
2,8	1,65	1,62	1,59	1,57	1,54	1,35										
3,0	1,64	1,62	1,59	1,58	1,55	1,49	1,33									
3,2	1,64	1,61	1,59	1,58	1,55	1,48	1,41	1,29								
3,4	1,64	1,61	1,59	1,58	1,55	1,45	1,33	1,29								
3,6	1,63	1,61	1,59	1,58	1,55	1,49	1,38	1,33	1,29							
3,8	1,63	1,60	1,59	1,58	1,55	1,51	1,45	1,35	1,29							
4,0	1,62	1,60	1,59	1,57	1,55	1,52	1,42	1,35	1,27							
4,2	1,62	1,60	1,58	1,57	1,55	1,53	1,42	1,37	1,25							
4,4	1,62	1,60	1,58	1,57	1,55	1,54	1,42	1,37	1,25	1,19						
	1,60	1,60	1,58	1,57	1,55	1,54	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18					
	1,58	1,58	1,58	1,57	1,55	1,54	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18				
	1,57	1,57	1,57	1,57	1,55	1,54	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18			
	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,54	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18		
	1,54	1,54	1,54	1,54	1,54	1,53	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	
	1,52	1,52	1,52	1,52	1,52	1,51	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,5	1,49	1,49	1,49	1,49	1,48	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,45	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,45	1,44	1,43	1,43	1,43	1,41	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,42	1,42	1,40	1,40	1,40	1,39	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,4	1,39	1,37	1,37	1,37	1,35	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,37	1,36	1,34	1,34	1,34	1,31	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,34	1,32	1,3	1,3	1,3	1,27	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18
	1,31	1,28	1,26	1,26	1,26	1,23	1,42	1,37	1,25	1,19	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18	1,18

$p = 0,95$																
ε_3^2																
ε_4																
0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
4,2	4,0	3,8	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8				
1,62	1,62	1,63	1,63	1,64	1,64	1,64	1,65	1,65	1,65	1,64	1,61	1,56				
1,64	1,64	1,65	1,65	1,66	1,67	1,67	1,68	1,68	1,69	1,68	1,66					
1,65	1,66	1,66	1,67	1,68	1,69	1,69	1,7	1,71	1,71	1,71	1,7					
1,66	1,67	1,68	1,68	1,69	1,7	1,71	1,72	1,73	1,74	1,74	1,72					
1,68	1,69	1,7	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77	1,77						
1,7	1,71	1,72	1,63	1,74	1,75	1,76	1,77	1,79	1,8	1,8						
1,71	1,72	1,73	1,74	1,76	1,77	1,78	1,8	1,81	1,83	1,83						
1,74	1,75	1,76	1,77	1,79	1,8	1,82	1,84	1,86	1,87							
1,76	1,78	1,79	1,8	1,82	1,84	1,86	1,88	1,9								
1,79	1,8	1,82	1,83	1,85	1,87	1,9	1,92									
1,82	1,83	1,84	1,86	1,88	1,91	1,93										
1,83	1,85	1,87	1,89	1,92	1,94											
1,86	1,88	1,9	1,92	1,95	1,98											
1,88	1,9	1,93	1,95	1,98												
1,91	1,93	1,96	1,98													

$p = 0.025$															
α_4		α_3^2													
		0,0	1,0	3,0	5,0	0,1	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
4,0	3,8	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8				
1,99	1,99	1,99	1,98	1,97	1,96	1,94	1,92	1,88	1,83	1,76	1,65				
1,96	1,95	1,95	1,94	1,93	1,91	1,89	1,86	1,82	1,76	1,68					
1,93	1,92	1,91	1,90	1,89	1,87	1,85	1,82	1,77	1,71	1,62					
1,91	1,90	1,89	1,88	1,86	1,84	1,82	1,78	1,73	1,66	1,56					
1,87	1,86	1,85	1,83	1,81	1,79	1,76	1,71	1,65	1,57						
1,84	1,82	1,81	1,79	1,77	1,74	1,70	1,64	1,58	1,49						
1,81	1,79	1,77	1,75	1,72	1,69	1,65	1,58	1,51	1,41						
1,75	1,73	1,71	1,68	1,65	1,60	1,55	1,47	1,39							
1,70	1,67	1,65	1,61	1,57	1,52	1,45	1,37								
1,64	1,62	1,58	1,54	1,49	1,42	1,35									
1,59	1,56	1,51	1,46	1,40	1,33										
1,53	1,49	1,44	1,39	1,32											
1,47	1,43	1,38	1,31	1,24											
1,41	1,36	1,30	1,23												
1,35	1,29	1,23													

Продолжение табл. 21

$p = 0,975$												
s_4												
s_3^2												
s_4												
3,8	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8		
1,99	1,99	1,98	1,97	1,96	1,94	1,92	1,88	1,83	1,76	1,65		
2,03	2,02	2,02	2,02	2,01	1,99	1,97	1,94	1,89	1,82			
2,05	2,05	2,05	2,05	2,04	2,03	2,01	1,98	1,93	1,86			
2,07	2,07	2,07	2,07	2,06	2,05	2,03	2,01	1,96	1,89			
2,11	2,11	2,11	2,11	2,10	2,09	2,08	2,05	2,00				
2,13	2,14	2,14	2,14	2,13	2,13	2,11	2,08	2,04				
2,16	2,16	2,16	2,16	2,16	2,15	2,14	2,11	2,06				
2,20	2,20	2,21	2,21	2,21	2,20	2,18	2,25					
2,24	2,24	2,25	2,25	2,25	2,24	2,22						
2,27	2,28	2,28	2,29	2,28	2,27							
2,30	2,31	2,32	2,32	2,32								
2,33	2,34	2,35	2,35									
2,36	2,37	2,38	2,38									
2,40	2,41	2,41										
2,43	2,44											
5,0												
4,8												
4,6												
4,4												
4,2												
2,00												
1,97												
1,94												
1,93												
1,90												
1,87												
1,85												
1,81												
1,77												
1,73												
1,69												
1,65												
1,61												
1,57												
1,53												

5,0	4,8	4,6	4,4	4,2	4,0	3,8	3,6	3,4
2,53	2,52	2,51	2,50	2,49	2,47	2,45	2,43	2,40
2,58	2,58	2,57	2,56	2,54	2,53	2,51	2,49	2,47
2,02	2,61	2,60	2,59	2,58	2,57	2,55	2,53	2,51
2,64	2,64	2,63	2,62	2,01	2,60	2,58	2,56	2,54
2,69	2,68	2,68	2,67	2,66	2,65	2,63	2,61	2,59
2,72	2,72	2,71	2,70	2,09	2,68	2,67	2,65	2,63
2,75	2,75	2,74	2,73	2,73	2,73	2,70	2,08	2,66
2,80	2,80	2,79	2,78	2,78	2,77	2,75	2,74	2,71
2,84	2,84	2,83	2,83	2,82	2,81	2,80	2,78	2,75
2,88	2,87	2,87	2,86	2,81	2,85	2,83	2,81	2,79
2,91	2,91	2,90	2,90	2,89	2,88	2,87	2,85	2,82
2,95	2,94	2,94	2,93	2,92	2,91	2,90	2,87	2,84
2,97	2,97	2,97	2,96	2,95	2,94	2,92	2,90	2,86
3,00	3,00	3,00	2,99	2,99	2,97	2,95	2,91	2,87
3,03	3,03	3,03	3,02	3,01	2,99	2,97	2,93	

7.1. Кривые Пирсона типа I

Для кривых этого семейства $\chi < 0$. Уравнение кривой имеет вид

$$y = \lambda \left(1 + \frac{\hat{x}}{l_1}\right)^{q_1} \left(1 - \frac{\hat{x}}{l_2}\right)^{q_2} \quad (190)$$

$$-l_1 < x < l_2$$

где

$$q_1(q_2) = \left\{ \frac{1}{2} \left[(K-2) \mp K(K+2) \frac{\alpha_3}{4\sqrt{(K+1)(1-\chi)}} \right] \right\} \quad (191)$$

$$l = \frac{2s}{c} \sqrt{(K+1)(1-\chi)} \quad (192)$$

$$l_1 = \frac{q_1 l}{K-2} \quad (193)$$

$$l_2 = \frac{q_2 l}{K-2} \quad (194)$$

$$\lambda = \frac{n}{l} \frac{q_1^{q_1} q_2^{q_2}}{(K-2)^{K-2}} \frac{\Gamma(K)}{\Gamma(q_1+1)\Gamma(q_2+1)} \quad (195)$$

$$\hat{x} = \bar{x} - \frac{s \cdot \alpha_3}{2} \frac{K+2}{K-2} \quad (196)$$

$$\hat{x} = \frac{x - \hat{x}}{c} \quad (197)$$

n - объем выборки;

n c - длина интервала разбиения;

n l - размах кривой;

n \hat{x} - модальное значение;

n $s = c \cdot \sigma$ - именованное значение среднеквадратического отклонения.

Для вычисления гамма-функции $\Gamma(z)$ приведем ряд полезных соотношений:

$$\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1) = (z-1)(z-2)\Gamma(z-2) = \dots (z > 1)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \Gamma(z+1) = \frac{1}{z(z+1)} \Gamma(z+2) = \dots (z > 1)$$

Очень полезна аппроксимация

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \approx 1 - 0,427(\beta-1)\beta^{1,9}$$

при $\beta > 1$ ошибка не превышает 0,2%.

В общем случае вычисление гамма-функции по любому аргументу можно производить по формуле ($\beta > 1$, $[z]$ - целая часть числа)

$$\Gamma\left([z] + \frac{1}{\beta}\right) \approx 1 - 0,427(\beta-1)\beta^{-1,9} \cdot \prod_{i=1}^{[z]-1} \left([z] + \frac{1}{\beta} - i\right)$$

Например, вычислим значение $\Gamma(5,6178)$:

$$\Gamma(5,6178) = \Gamma(5 + 0,6178) = \Gamma\left(5 + \frac{1}{1,6186}\right) =$$

$$= \left[1 - 0,427 \cdot 0,6186^{-1,9}\right] \cdot 4,6178 \cdot 3,6178 \cdot 2,6178 \cdot 1,6178 = 63,26699$$

Кривая Пирсона типа I представляет собой бета-распределение, поэтому ее функция распределения $F(x; l_1; l_2; q_1; q_2; \lambda)$ может быть выражена через функцию бета-распределения $F(x; l_1; l_2; q_1; q_2; \lambda) = I_{\frac{l_1+x}{l_1+l_2}}(q_1+1, q_2+1)$

Пример 31

В результате наблюдений получен статистический ряд, заданный таблицей ($n=1000, c=5$). Необходимо подобрать аппроксимирующую кривую распределения Пирсона и найти 95%-ю квантиль распределения.

Сначала найдем моменты распределения. В нашем случае все эмпирические данные разбиты на 13 интервалов длиной $c = 5$ каждый. В качестве случайной величины будем рассматривать середину каждого интервала. Порядок вычислений представлен в таблице (здесь $\tilde{x}_i = \frac{x_i - 42,5}{5}$).

Таким образом, имеем

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot n_i = 0.093; \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \cdot n_i = 4.859; \quad m_3 = 7.755; \quad m_4 = 72.383.$$

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	22,5	11	-4	-44	176	-704	2816
2	27,5	93	-3	-279	837	-2511	7533
3	32,5	162	-2	-324	648	-1296	2592
4	37,5	176	-1	-176	176	-176	176
5	42,5	178	0	0	0	0	0
6	47,5	132	1	132	132	132	132
7	52,5	101	2	202	404	808	1616
8	57,5	67	3	201	603	1809	5427
9	62,5	40	4	160	640	2560	10240
10	67,5	24	5	120	600	3000	15000
11	72,5	12	6	72	432	2592	15552
12	77,5	3	7	21	147	1029	7203
13	82,5	1	8	8	64	512	4096
Σ			100	93	4859	7755	72383

Далее вычисляем

$$\bar{x} = 42.5 + m_1 \cdot c = 42.5 + 0.093 \cdot 5 = 42.965$$

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 = 4.859 - 0.093^2 = 4.85$$

$$\sigma = 2.202$$

$$s = c \cdot \sigma = 5 \cdot 2.202 = 11.011$$

$$\alpha_3 = \frac{7.755 - 3 \cdot 4.859 \cdot 0.093 + 2 \cdot 0.093^2}{(4.85)^{\frac{3}{2}}} = 0.60075$$

Тогда

$$\alpha_3^2 = 0.3609$$

$$\alpha_4 = \frac{72.3383 - 4 \cdot 7.755 \cdot 0.093 + 6 \cdot 4.859 \cdot 0.093^2 - 3 \cdot 0.093^4}{4.85^2} = 2.965$$

Имеем

$$K = \frac{6 \cdot (2.965 - 0.3609 - 1)}{3 \cdot 0.3609 - 2 \cdot 2.965 + 6} = 8.3496$$

$$\chi = -\frac{0.3609 \cdot (2 + 8.3496)^2}{16 \cdot (1 + 8.3496)} = -0.2584$$

Так как $\chi < 0$, можно применить аппроксимацию эмпирического распределения кривой Пирсона типа 1.

Выполняем необходимые вычисления:

$$\hat{x} = \bar{x} - \frac{s \cdot \alpha_3}{2} \cdot \frac{K + 2}{K - 2} = 42.965 - \frac{11.011 \cdot 0.60075}{2} \cdot \frac{10.3496}{6.3496} = 37.574$$

$$l = \frac{2 \cdot 11.011}{5} \cdot \sqrt{9.3496 \cdot 1.25841} = 15.107$$

$$q_1 = \frac{1}{2} \left(6.3496 - 8.3496 \cdot \frac{0.60075}{4 \cdot \sqrt{9.3496 \cdot 1.25841}} \right) = 1.283$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \cdot (6.3496 + 3.7837) = 5.067$$

$$l_1 = \frac{1.283 \cdot 15.107}{6.3496} = 3.052$$

$$l_2 = \frac{5.067 \cdot 15.107}{6.3496} = 12.055$$

$$l = 15.107$$

$$\chi = \frac{1000}{15.107} \cdot \frac{1.283^{1.283} \cdot 5.067^{5.067}}{6.3496^{6.3496}} \cdot \frac{\Gamma(8.3496)}{\Gamma(2.283) \Gamma(6.607)}$$

$$\Gamma(8.3496) = 10289.8761$$

$$\Gamma(2.283) = 1.156879$$

$$\Gamma(6.067) = 134.51827$$

$$\lambda = 2.7135 \cdot \frac{10289.8761}{1.156879 \cdot 134.51827} = 179.449962$$

Таким образом, уравнение для аппроксимирующей плотности распределения имеет вид

$$y = 179.419962 \cdot \left(1 + \frac{\hat{x}}{3.052}\right)^{1.283} \cdot \left(1 + \frac{\hat{x}}{12.055}\right)^{5.607}$$

Напомним, что в качестве переменной мы используем

$$\hat{x} = \frac{x - \bar{x}}{c} = 0.2 \cdot (x - 37.574)$$

Относительно реальной переменной уравнение принимает вид

$$y = 179.419962 \cdot (0.0655 \cdot x - 1.46225)^{1.283} \cdot (1.62337 - 0.01659 \cdot x)^{5.067}$$

Например, для $x = 52.5$ частота равна

$$y(52.5) = 179.419962 \cdot (0.0655 \cdot 52.5 - 1.46225)^{1.283} \cdot (1.62337 - 0.01659 \cdot 52.5)^{5.067} = 101.7$$

что совпадает с эмпирической частотой, равной 101.

Для нахождения 95%-й квантили распределения обратимся к табл. 21.

Для $\alpha_3^2 = 0.359$, $\alpha_4 = 2.965$ и $p = 0.95$ находим, что $y_{0.95} \approx 1.8$. Следовательно,

$$x_{0.95} = 62.78; \quad y_{0.95} = 1.8$$

Следовательно, вероятность того, что $x \leq 62.78$, равна 0.95.

7.2. Кривые Пирсона типа II

Для кривых этого семейства $\chi = 0$, $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 < 3$. Они являются частным случаем кривых типа I и определяются уравнением

$$y = \lambda \left(1 - \frac{\tilde{x}^2}{l_2}\right)^q \tag{198}$$

где

$$l = \sigma \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_4}{3 - \alpha_4}} \tag{199}$$

$$q = \frac{5 \cdot \alpha_4 - 9}{2(3 - \alpha_4)} \tag{200}$$

$$\lambda = \frac{n}{2^{2q+1}} \frac{\Gamma(2q+2)}{[\Gamma(q+1)]^2} \tag{201}$$

$$\tilde{x} = \frac{x - \bar{x}}{c} \quad (202)$$

Кривые симметричны относительно оси ординат и $\hat{x} = \bar{x}$.

Пример 32

Для статистического ряда, заданного таблицей ($n = 205, c = 2$) подобрать кривую распределения из семейства Пирсона.

Решение

Вычисление моментов представлено в таблице (здесь $\tilde{x}_i = \frac{x_i - 34}{2}$).

Находим ($c = 2$)

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	26	1	-4	-4	16	-64	256
2	28	6	-3	-18	54	-162	486
3	30	27	-2	-54	108	-216	432
4	32	40	-1	-40	40	-40	40
5	34	54	0	0	0	0	0
6	36	45	1	45	45	45	45
7	38	23	2	46	92	184	368
8	40	7	3	21	63	189	567
9	42	2	4	8	32	128	512
Σ		205	0	4	4450	64	2706

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot n_i = 0.0195; \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \cdot n_i = 2.1951;$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^3 \cdot n_i = 0.3122; \quad m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 \cdot n_i = 13.2$$

$$\bar{x} = 34 + 0.0195 \cdot 2 = 34.039$$

В случае, когда обе ветви кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс, необходимо при оценке четных центральных моментов ($\mu_2 = m_2 - m_1^2$ и $\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4$) применять корректирующие поправки Шеппарда, с учетом которых

$$\hat{\mu}_2 = \mu_2 - \frac{c^2}{12}; \quad \hat{\mu}_4 = \mu_4 - \frac{c^2}{2} \cdot \mu_2 + \frac{7c^2}{240}$$

В нашем случае, полагая $c = 1$ (половина разряда), имеем

$$\mu_2 = 2.1951 - 0.0195^2 = 2.1947$$

$$\hat{\mu}_2 = 2.1947 - 0.0833 = 2.1114 \quad (\sigma = 1.453)$$

$$\mu_4 = 13.180656 - 0.5 \cdot 2.1947 + 0.02916 = 12.1125$$

$$\hat{\mu}_4 = 13.1800656$$

$$\mu_3 = m_3 - 3 \cdot m_1 \cdot m_2 + 2 \cdot m_1^2 = 0.3122 - 3 \cdot 2.1951 \cdot 0.0195 + 2 \cdot 0.0195^2 = 0.1838$$

Тогда получаем

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\hat{\mu}^{1.5}} = \frac{0.1838}{2.1114^{1.5}} = 0.06$$

$$\alpha_3^2 = 0.0036$$

$$K = \frac{6 \cdot (2.716 - 0.0036 - 1)}{3 \cdot 0.0036 - 2 \cdot 2.716 + 6} = 17.751$$

$$\chi = \frac{0.0036 \cdot 19.751^2}{16 \cdot 18.751} = -0.00468$$

Так как $\alpha_4 > 3$ и $\chi \approx 0$, для аппроксимации заданного статистического ряда можно использовать кривую типа П.

Находим параметры кривой:

$$q = \frac{5 \cdot 2.716}{2(3 - 2.716)} = 8.063$$

$$l = 1.453 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2.716}{3 - 2.716}} = 6.354$$

$$\lambda = \frac{205}{2^{17.126} \cdot 6.354} \cdot \frac{\Gamma(18.126)}{[\Gamma(9.063)]^2} = 225.562 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\Gamma(18.126)}{[\Gamma(9.063)]^2}$$

Далее вычисляем

$$\Gamma(18.126) = 51080.28$$

$$\Gamma(9.063) = 46124.251$$

Окончательно

$$\lambda = 54.15774468$$

Таким образом, уравнение аппроксимирующей кривой имеет вид

$$y = 54.15774468 \cdot \left(1 - \frac{\tilde{x}_2}{40.373316}\right)^{8.063}$$

Переменной здесь является $\tilde{x} = \frac{x - 34.039}{2}$.

Окончательно имеем

$$y = 54.15774468 \cdot (0.421553186 \cdot x - 0.0061922 \cdot x^2 - 6.174624)^{8.063}$$

Например, для $x = 30$:

$$y(30) = 54.15774468 \cdot (0.421553186 \cdot 30 - 0.0061922 \cdot 30^2 - 6.174624)^{8.063} = 23$$

что близко к эмпирической частоте, равной 27.

7.3. Кривые Пирсона типа III

Для этого типа кривых $\chi = \pm\infty$. Уравнение кривой имеет вид

$$y = \lambda \left(1 + \frac{\hat{x}}{l}\right)^q \exp\left(-q \frac{\hat{x}}{l}\right) \quad (203)$$

где

$$q = \frac{4}{\alpha_3^2} - 1 \quad (204)$$

$$l = \sigma \left(\frac{2}{\alpha_3} - \frac{\alpha_3}{2} \right) \quad (205)$$

$$\hat{x} = \frac{x - \hat{x}}{c} \quad (206)$$

$$\hat{x} = \bar{x} = \frac{c \cdot \sigma \cdot \alpha_3}{2} \quad (207)$$

$$\lambda = \frac{n}{l} (q + 2) \left[\exp(q + 1) \Gamma(q + 2) \right]^{-1} \quad (208)$$

Кривые типа III асимметричны и ограничены в одном направлении точкой $x = -l$. Кривая типа III совпадает с гамма-распределением. Хорошая аппроксимация эмпирических распределений кривой типа III достигается уже при $|\chi| > 4$.

Пример 33

Найти аппроксимирующую кривую для плотности распределения случайной величины, заданной эмпирическим статистическим рядом ($n = 4000, c = 2$), приведенным в таблице.

Решение

Вычисления начальных моментов приведены в таблице

$$\left(\tilde{x}_i = \frac{x_i - 2.356}{2} \right):$$

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	1,5	9600	-0,448	-19200	38400	-76800	153600
2	3,5	13600	0,552	-13600	13600	-13600	13600
3	5,5	9200	1,552	0	0	0	0
4	7,5	4000	2,552	4000	4000	4000	4000
5	9,5	2000	3,552	4000	8000	16000	32000
6	11,5	800	4,552	2400	7200	21600	64800
7	13,5	400	5,552	1600	6400	25600	102400
8	15,5	0	6,552	0	0	0	0
9	17,5	400	7,552	2400	14400	86400	518400
Σ		40000		-18400	92000	63200	888800

Вычисляем

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot n_i = -0.46; \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \cdot n_i = 2.3;$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^3 \cdot n_i = 1.58; \quad m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 \cdot n_i = 22.22$$

$$\sigma^2 = \mu_2 = 2.0884$$

$$\sigma = 1.14451$$

$$\mu_3 = 1.58 - 3 \cdot 2.3 \cdot (-0.46) + 2 \cdot (-0.46)^2 = 4.5593$$

$$\mu_4 = 22.22 - 4 \cdot 1.58 \cdot (-0.46) + 6 \cdot 2.3 \cdot (-0.46)^2 - 3 \cdot (-0.46)^4 = 27.9129$$

$$\bar{x} = 5.5 + (-0.46) \cdot 2 = 4.58$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 1.1508$$

$$\alpha_3^2 = 2.2825$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{27.9129}{2.0884^2} = 6.4$$

$$K = \frac{6 \cdot (6.4 - 2.2825 - 1)}{3 \cdot 2.2825 - 2 \cdot 6.4 + 6} = 393.79$$

$$\chi = -56.6$$

Так как $|\chi| \gg 4$, то приемлема аппроксимация кривой Пирсона типа III.

Вычисляем параметры кривой:

$$q = \frac{4}{\alpha_3^2} - 1 = 0.752451$$

$$l = 1.4451 \cdot \left(\frac{2}{1.5108} - \frac{1.5108}{2} \right) = 0.8213977$$

$$\hat{x} = 4.58 - \frac{2 \cdot 1.4451 \cdot 1.5108}{2} = 2.3974292$$

$$\lambda = \frac{40000}{0.8213977} \cdot \frac{2.752451}{\exp(1.752451) \cdot \Gamma(2.752451)} = \frac{23235.19417}{\Gamma(2.752451)}$$

Находим

$$\Gamma(2.752451) = 1.6090457$$

Тогда, окончательно

$$\lambda = \frac{232356451}{1.6090457} = 14440.3569$$

Уравнение кривой имеет вид

$$y = 14440.3589 \cdot \left(1 + \frac{\hat{x}}{0.8213977} \right)^{0.752451} \cdot \exp\left(-\frac{0.752451 \cdot \hat{x}}{0.5213977} \right)$$

Здесь в качестве переменной используется величина $\hat{x} = 0.5x - 1.1925$, и относительно нее после преобразований получаем

$$y = 43052.93758 \cdot (0.608718529 \cdot x - 0.451793692)^{0.752451} \cdot \exp(-0.458030866 \cdot x)$$

Например, для $x = 3.5$ имеем

$$y = 43052.93758 \cdot (0.608718529 \cdot 3.5 - 0.451793692)^{0.752451} \cdot \exp(-0.458030866 \cdot 3.5) = 12796$$

что близко к эмпирической частоте, равной 13600.

7.4. Кривые Пирсона типа IV

Для кривых этого семейства имеет место $0 < \chi < 1$. Уравнение кривой типа IV имеет вид

$$y = \lambda \left(1 + \frac{\hat{x}^2}{l^2}\right)^{-q} \exp\left(-\text{varctg} \frac{\hat{x}}{l}\right) \quad (209)$$

где

$$q = \frac{2+r}{2} \quad (210)$$

$$r = \frac{6 \cdot (\alpha_4 - \alpha_3^2 - 1)}{2 \cdot \alpha_4 - 3 \cdot \alpha_3^2 + 6} \quad (211)$$

$$v = -\frac{r(r-2)\alpha_3}{\sqrt{16(r-1) - \alpha_3^2(r-2)^2}} \quad (212)$$

$$l = \frac{\sigma}{4} \sqrt{16(r-1) - \alpha_3^2(r-2)^2} \quad (213)$$

$$\lambda = \frac{n}{l} \frac{1}{F(r, v)} \quad (214)$$

$F(r, v)$ - функция, значения которой по аргументу $\varphi = \text{arctg} \frac{|v|}{r}$ приведены в [108].

Уравнение записано относительно переменной $\hat{x} = \frac{x - \tilde{x}}{c} - \frac{v}{r} l$.

Кривые асимметричны и имеют неограниченный размах.

Пример 34

Для эмпирического ряда ($n=1000, c=2$), приведенного в таблице, найти аппроксимирующую кривую из семейства Пирсона.

Вычисление начальных моментов приведено в таблице $\left(\tilde{x}_i = \frac{x_i - 1.9}{0.2}\right)$

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	0,5	-7	2	-14	98	-686	4802
2	0,7	6	5	-30	180	-1080	6480
3	0,9	-5	14	-70	350	-1750	8750
4	1,1	-4	33	-132	528	-2112	8448
5	1,3	-3	67	-201	603	-1809	5427
6	1,5	-2	123	-246	492	-984	1968
7	1,7	-1	160	-160	160	-160	160
8	1,9	0	172	0	0	0	0
9	2,1	1	153	153	153	153	153
10	2,3	2	112	224	448	896	1792
11	2,5	3	68	204	612	1836	5508
12	2,7	4	41	164	656	2624	10496
13	2,9	5	25	125	625	3125	15625
14	3,1	6	14	84	504	3024	18144
15	3,3	7	7	49	343	2401	16807
16	3,5	8	3	24	192	1536	12288
17	3,7	9	1	9	81	729	6561
Σ		1000		183	6025	7743	123409

Имеем

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \cdot n_i = 0.183; \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^2 \cdot n_i = 6.025;$$

$$m_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^3 \cdot n_i = 7.743; \quad m_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i^4 \cdot n_i = 123.409$$

$$\hat{\mu}_2 = m_2 - m_1^2 - \frac{1}{12} = 5.908$$

$$\sigma = 2.43064$$

$$\mu_3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3 = 4.448$$

$$\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4 = 118.948$$

$$\hat{\mu}_4 = 118.484$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\hat{\mu}_2^3} = 0.30974$$

$$\alpha_3^2 = 0.096$$

$$\alpha_4 = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} = 3.407816$$

Вычисляем далее:

$$K = \frac{6 \cdot (3.4078164 - 0.096 - 1)}{3 \cdot 0.096 - 2 \cdot 3.407816 + 6} = -26.288959$$

$$\chi = -\frac{\alpha_3^2 \cdot (K+1)^2}{16 \cdot (K+1)} = -0.139971$$

Таким образом, для аппроксимации может быть выбрана кривая типа IV из семейства Пирсона. Вычисляем ее параметры:

$$r = -K = 26.288959$$

$$q = \frac{2 + 26.288959}{2} = 14.1444795$$

$$l = \frac{2.43064}{4} \cdot \sqrt{16 \cdot 25.288959 - 0.0961 \cdot 24.288959^2} = 11.3345908$$

$$v = -\frac{26.288959 \cdot 24.288959 \cdot 0.30974}{\sqrt{16 \cdot 25.288959 - 0.096 \cdot 24.288959^2}} = -10.602238$$

$$\lambda = \frac{n}{l} \cdot \frac{1}{F(r, v)} = \frac{88.225505}{F(r, v)}$$

Находим из [108, таблица XIV, с. 532]: $F(r, v) \approx 1.82$ для

$$\varphi = \arctg \frac{|v|}{r} = \arctg \frac{11.12625}{226.576} = 22.6^\circ$$

$$\lambda = \frac{88.225505}{1.82} = 48.4753$$

Далее $\hat{x} = \frac{x-1.9}{0.2} + \frac{10.602238 \cdot 11.3345908}{26.225505} = 5x - 4.928023$

Окончательно получаем уравнение кривой

$$y = 48.4753 \cdot \left(1 + \frac{\hat{x}}{4.3345908^2}\right)^{-14.1444795} \cdot \exp\left(10.602238 \cdot \arctg \frac{\hat{x}}{11.3345908}\right) =$$

$$= 48.4753 \cdot \left[1 + \frac{(5x - 4.9288023)}{11.335908^2}\right]^{-14.1444795} \cdot \exp\left[10.602238 \cdot \arctg\left(\frac{5x - 4.9288023}{4.3345908}\right)\right]$$

7.5. Кривые Пирсона типа V

Для кривых этого типа $\chi = 1$. Уравнение кривой типа V имеет вид

$$y = \lambda \hat{x}^{-q} \exp\left\{-\frac{\nu}{\hat{x}}\right\} \quad (215)$$

где

$$q = 4 + \frac{8 + 4\sqrt{4 + \alpha_3^2}}{\alpha_3^2} \quad (216)$$

$$\nu = \sigma(q-2)\sqrt{q-3} \quad (\text{знак такой же, как у } \alpha_3) \quad (217)$$

$$\lambda = n \frac{\nu^{q-1}}{\Gamma(q-1)} \quad (218)$$

$$\hat{x} = \frac{x - \bar{x}}{c} + \frac{\nu}{q-2} \quad (219)$$

Кривые симметричны и определены для $0 < x < \infty$.

Пример 35

Для статистического ряда, приведенного в таблице, найти аппроксимирующую кривую из семейства Пирсона ($n=1000, c=0.04$).

Имеем $\tilde{x}_i = \frac{x_i - 0.2}{0.04}$ и сводим результаты вычислений в таблицу:

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	0,04	-4	3	-12	48	-192	768
2	0,08	-3	11	-33	99	-297	891
3	0,12	-2	99	-198	396	-792	1584
4	0,16	-1	346	-346	346	-346	346
5	0,2	0	288	0	0	0	0
6	0,24	1	148	148	148	148	148
7	0,28	2	83	168	332	664	1328
8	0,32	3	15	45	135	405	1215
9	0,36	4	6	24	96	384	1536
10	0,40	5	1	5	25	125	625
Σ			1000	-119	1625	99	8441

Находим:

$$m_1 = -0.199; m_2 = 1.625; m_3 = 0.099; m_4 = 8.441.$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = 1.585$$

$$\mu_3 = m_3 - 3 \cdot m_2 \cdot m_1 + 2 \cdot m_1^3 = 1,053$$

$$\mu_4 = m_4 - 4 \cdot m_3 \cdot m_1 + 6 \cdot m_2 \cdot m_1^2 - 3 \cdot m_1^4 = 8.901$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} = 1.259$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{1.5}} = 0.528$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3.549$$

$$\bar{x} = 0.2 + c \cdot m_1 = 0.192$$

Далее

$$K = \frac{6 \cdot (3.543 - 0.278 - 1)}{3 \cdot 0.278 - 2 \cdot 3.543 + 6} = -53.928$$

$$\chi = 0.885$$

Так как $\chi \approx 1$, для аппроксимации может быть использована кривая из семейства Пирсона типа V.

Вычисляем параметры кривой

$$q = 4 \cdot \frac{8 + 4 \cdot \sqrt{4 + 0.278}}{0.278} = 62.537$$

$$\nu = 1.259 \cdot 60.637 \cdot \sqrt{59.537} = 588.085$$

$$\lambda = 1000 \cdot \frac{588.085^{61.537}}{\Gamma(61.537)} = 3.5514 \cdot 10^{90}$$

Уравнение кривой принимает вид

$$y = 3.5514 \cdot 10^{90} \cdot \hat{x}^{-62.537} \cdot \exp\left(-\frac{588.085}{\hat{x}}\right)$$

В нашем случае переменная $\hat{x} = \frac{x - 0.192}{0.04} + \frac{588.085}{60.537} = 25x + 4.9145$ и

$$y = 3.5514 \cdot 10^{90} \cdot (25x + 4.9145)^{-62.537} \cdot \exp\left(-\frac{588.085}{25x + 4.9145}\right)$$

Например, для $x = 0.16$ имеем

$$y = 3.5514 \cdot 10^{90} \cdot 8.91456^{-62.537} \cdot \exp\left(-\frac{588.085}{8.91456}\right) = 304$$

что близко к эмпирическому значению 346.

7.6. Кривые Пирсона типа VI

Для кривых этого типа справедливо неравенство $1 < \chi < \infty$.
Уравнение кривой имеет вид

$$y = \lambda \hat{x}^{-q_1} (\hat{x} - l)^{q_2} \quad (220)$$

где

$$q_1(q_2) = \frac{1}{2} \left\{ K(K+2) \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_3^2(K+2) + 16(K+1)}} \mp (K-2) \right\} \quad (221)$$

$$l = 2\sigma \sqrt{(K+1)(1-\chi)} \quad (222)$$

$$\lambda = n \frac{l^{q_1 - q_2} \Gamma(q_1)}{\Gamma(q_1 - q_2 - 2)} \quad (223)$$

$$\hat{x} = \frac{x - \hat{x}}{c} + \frac{l(q_1 - 1)}{q_1 - q_2 - 2} \quad (224)$$

Кривые асимметричны и ограничены в одном направлении точкой $x = l$. Если $\alpha_3 < 0$, то $l < 0$ и размах распределения находится в пределах $(-\infty; 1)$.

Пример 36

Для статистического ряда, приведенного в таблице, найти аппроксимирующую кривую из семейства Пирсона и 99%-ю квантиль распределения ($n = 386, c = 1$).

Решение

При условии, что $x_i = x - 3$ составим таблицу:

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	1	-2	1	-2	4	-8	16
2	2	-1	56	-56	56	-56	56
3	3	0	167	0	0	0	0
4	4	1	98	98	98	98	98
5	5	2	34	68	136	272	544
6	6	3	9	27	81	243	729
7	7	4	2	8	32	128	512
8	8	5	1	5	25	125	625
Σ			368	148	432	802	2580

Находим

$$m_1 = 0.4021; m_2 = 1.17391; m_3 = 2.17935; m_4 = 7.01087.$$

Учитывая, что размах кривой неограничен, при оценке центральных моментов будем учитывать поправки Шеппарда ($c=1$).

Имеем

$$\begin{aligned}\mu_2 &= m_2 - m_1^2 = 1.0121 \\ \hat{\mu}_2 - \mu_2 - 1/12 &= 0.92883 \\ \mu_3 &= 2.17935 - 3 \cdot 1.17391 \cdot 0.40217 + 2 \cdot 0.40217^2 = 0.8931 \\ \mu_4 &= 4.56573 \\ \hat{\mu}_4 &= \mu_4 - \frac{\hat{\mu}_2}{2} + \frac{7}{240} = 4.088 \\ \sigma &= \sqrt{\hat{\mu}_2} = 0.96376 \\ \alpha_3 &= \frac{\mu_3}{\hat{\mu}_2^{1.5}} = 0.9977 \\ \alpha_4 &= \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} = 4.7394 \\ \bar{x} &= 3 + 0.40217 \cdot 1 = 3.40217\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}K &= \frac{6 \cdot (4.7394 - 0.9954 - 1)}{3 \cdot 0.9954 - 2 \cdot 4.7394 + 6} = -33.423 \\ \chi &= -\frac{0.9954(-31.423)^2}{16(-32.423)} = 1.761\end{aligned}$$

Видим, что возможна аппроксимация кривой типа VI. Находим параметры кривой:

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{1}{2} [(-33.423) \cdot (-31.423)] \cdot \frac{0.9977}{\sqrt{0.9954 \cdot (-31.423) + 16 \cdot (-32.423)}} - (-35.423) = 42.031 \\ q_2 &= \frac{1}{2} [(-33.423) \cdot (-31.423)] \cdot \frac{0.9977}{\sqrt{0.9954 \cdot (-31.423) + 16 \cdot (-32.423)}} + (-35.423) = 6.608 \\ l &= 2 \cdot 0.96376 \cdot \sqrt{(-32.423) \cdot (1 - 1.761)} \cdot 9.5745 \\ \lambda &= 368 \cdot \frac{9.5745^{42.031 - 6.608 - 1} \cdot \Gamma(42.031)}{\Gamma(34.423) \cdot \Gamma(7.608)} = 1.5268527 \cdot 10^{46} \\ \hat{x} &= \frac{x - \hat{x}}{c} + 12.345 = \frac{x - 3}{1} + 12.345 = x + 9.345\end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$y = 1.5268627 \cdot 10^{46} \cdot (x + 9.345)^{-42.031} \cdot (x - 1.0383)^{6.608}$$

Например, при $x=3$ имеем $y=177$, что близко к эмпирическому значению 167. Для нахождения 99%-й квантили обратимся к табл. 21. Из

нее следует для $\alpha_3^2 = 0.9954$ и $\alpha_4^2 = 4,74$, что $y_{0,99} = 3.03$

и

$$x_{0,99} = \bar{x} + \sigma \cdot c \cdot y_{0,99} = 3.40217 + 0.96376 \cdot 1 \cdot 3.03 = 6.32236$$

7.7. Кривые Пирсона типа VII

Для этого случая $\chi = 0$, $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 > 3$. Уравнение кривой имеет вид

$$y = \lambda \left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{l^2} \right)^{-q} \quad (225)$$

где

$$q = \frac{5 \cdot \alpha_4 - 9}{2(\alpha_4 - 3)} > 0 \quad (226)$$

$$l = \sigma \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha_4}{\alpha_4 - 3}} \quad (227)$$

$$\lambda = \frac{n}{l} \frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (228)$$

$$\tilde{x} = \frac{x - \bar{x}}{c}$$

Кривые асимметричны относительно среднего значения, совпадающего с модой, и имеют неограниченный размах. При $\chi = 0$, $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 = 3$ распределение переходит в нормальное.

Замечание: Во всех расчетах кривых Пирсона требуется высокая точность вычислений (необходимо удерживать до 8-10 знаков после запятой), что объясняется мультипликативной схемой накопления ошибок в степенных членах.

Пример 37

Для статистического ряда, заданного таблицей, найти аппроксимирующее распределение из семейства Пирсона ($n = 2886, c = 10$).

Решение

Здесь $x_{0.99} = \bar{x} + \sigma \cdot c \cdot y_{0.99} = 3.40217 + 0.96376 \cdot 1 \cdot 3.03 = 6.6322$.

Результаты расчетов сведем в таблицу:

i	x_i	n_i	\tilde{x}_i	$n_i \cdot \tilde{x}_i$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^2$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^3$	$n_i \cdot \tilde{x}_i^4$
1	725	-5	4	-20	100	-500	2500
2	735	-4	10	-40	160	-640	2560
3	745	-3	84	-252	756	-2268	6804
4	755	-2	270	-540	1080	-2160	4320
5	765	-1	658	-658	658	-658	658
6	775	0	1095	0	0	0	0
7	785	1	506	506	506	506	506
8	795	2	152	304	608	1216	2432
9	805	3	63	189	567	1701	5103
10	815	4	32	128	512	2048	8192
11	825	5	12	60	300	1500	7500
Σ			2886	-323	5247	745	40575

Далее вычисляем все необходимые величины:

$$q = \frac{5 \cdot 4.390574 - 9}{2 \cdot (4.390574 - 3)} = 4.657382$$

$$l = 1.34365 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4.390574}{1.390574}} = 3.376484$$

$$\lambda = \frac{2886}{3.376484} \cdot \frac{\Gamma(4.657382)}{\Gamma(4.157382) \cdot \Gamma(0.5)}$$

$$\Gamma(4.657382) = 14.492645$$

$$\Gamma(4.157382) = 7.346622$$

$$\Gamma(0.5) = \frac{\Gamma(1.5)}{0.5} = \frac{1 - 0.427 \cdot 1 \cdot 2^{-1.9}}{0.5} = 1.771176$$

$$\lambda = \frac{2886}{3.376484} \cdot \frac{14.492645}{7.3466223 \cdot 1.771176} = 951.98444575$$

Имеем уравнение искомой кривой

$$y = 951.9844785 \cdot \left(1 + \frac{\tilde{x}^2}{3.376484^2}\right)^{-4.657382}$$

В нашем случае переменной является

$$\tilde{x} = \frac{x - \bar{x}}{c} = 0.1 \cdot (x - \bar{x})$$

$$\bar{x} = 775 + m_1 \cdot c = 773.88$$

$$\tilde{x} = 0.1 \cdot x - 77.388$$

Относительно реальной переменной уравнение кривой имеет вид

$$y = 951.984475 \cdot \left(1 + \frac{(0.1 \cdot x - 77.388)^2}{3.376484^2}\right)^{-4.657382}$$

Например, при $x = 795$ имеем

$$y(795) = 951.984475 \cdot (0.000877145 \cdot 795^2 - 1.3576075 \cdot 795 + 526.3126435)^{-4.657382} = 204$$

что находится вблизи эмпирического значения 152.

8. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ

Обработка результатов наблюдений включает в себя следующие этапы:

1. На каждом уровне воздействия x_i обрабатываются результаты прямых многократных наблюдений отклика $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}\}$. На этом этапе проводится устранение возможных грубых погрешностей измерения и переменной составляющей систематической (дрейфовой) погрешности, проверяются гипотезы принадлежности опытных распределений к нормальному закону, рассчитываются результаты измерений Y_i^* и случайные погрешности Δ_i , с которыми они были получены. Таблица экспериментальных данных преобразуется к виду

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

где $y_i = Y_i^*$ – результат измерения отклика на i -ом уровне воздействия.

2. Проверяется однородность дисперсий результатов наблюдения отклика на всех уровнях воздействия. Значимое отличие дисперсии на каком-либо уровне от остальных значений может быть следствием использования средства измерения с другими свойствами (например, проводилась калибровка и, соответственно, изменились составляющие систематических погрешностей прибора). В этом случае использование результатов наблюдений на данном уровне вместе с остальными неправомерно.
3. Проверяется наличие (значимость) корреляционной связи между уровнями воздействия $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и результатами измерений отклика $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ (где $y_i = Y_i^*$). В случае, если корреляционная связь отсутствует, то следующие этапы обработки не имеют смысла.
4. Определяется аналитическое выражение, описывающее функциональную зависимость $Y^* = f(X)$ (уравнение регрессии). На

этом этапе выбирается вид аппроксимирующей функции, рассчитываются её коэффициенты.

5. Устраняются возможные грубые погрешности совместного измерения воздействия и отклика.
6. Проводится анализ коэффициентов уравнения регрессии. На этом этапе проверяется значимость (существенное отличие от нуля) коэффициентов уравнения регрессии и рассчитываются их доверительные интервалы.
7. Проверяется адекватность полученной модели (соответствие уравнения регрессии экспериментальным данным).
8. В случае, если модель соответствует результатам эксперимента, может решаться задача прогнозирования величины отклика при значениях воздействия, отличных от условий проведения эксперимента. Это важно, когда нужно узнать о поведении исследуемого объекта в условиях, воспроизведение которых невозможно или экономически нецелесообразно. Прогнозирование включает в себя расчет оценки отклика подстановкой требуемого значения воздействия в уравнение регрессии и определение доверительных границ полученного значения отклика.

В основе обработки экспериментальных данных лежат методы теории вероятности и математической статистики. Для большинства классических методов статистики в настоящее время существуют точные аппроксимации критериев, параметров и свойств, что позволяет автоматизировать процесс обработки с помощью любого языка программирования высокого уровня и эффективно применять аппарат математической статистики в любых математических приложениях (MATLAB, MathCAD, Scilab и др.)

Для исследования зависимости $Y = f(X)$ двух параметров X и Y некоторого объекта были проведены 10 опытов. На каждом уровне воздействия сделаны по 40 наблюдений соответствующих им значений отклика.

Таблицы экспериментальных данных вида

x_i	x_1	x_2	...	x_{10}
y_{ij}	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{140}$	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{240}$...	$y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{n40}$

даны в Приложении 6. Номер таблицы T экспериментальных данных выбирается по номеру варианта N :

<i>N</i>	1,7,13,19,2 5	2,8,14,20,2 6	3,9,15,21,2 7	4,10,16,22,2 8	5,11,17,23,2 9	6,12,18,24,3 0
<i>T</i>	1	2	3	4	5	6

Необходимо:

1. По каждому из 10 опытов провести статистическую обработку прямых многократных наблюдений параметра Y .
2. Проверить однородность дисперсий результатов наблюдения отклика.
3. Оценить значимость корреляционной связи параметров X и Y .
4. Найти аналитический вид уравнения регрессии $Y = f(X)$ (в случае наличия корреляционной связи) и построить график зависимости.
5. Провести статистический анализ полученного уравнения регрессии.
6. Сделать прогноз о значении параметра Y при $X=X_0$. Значение X_0 определяется по номеру варианта N :

<i>N</i>	X_0	<i>N</i>	X_0	<i>N</i>	X_0	<i>N</i>	X_0	<i>N</i>	X_0	<i>N</i>	X_0
1	111.5	6	3.25	11	270	16	37	21	99.5	26	20.75
2	37	7	94	12	4.45	17	360	22	31	27	122
3	58.25	8	29.5	13	76.5	18	5.95	23	410	28	23.5
4	49	9	95.75	14	30.75	19	83.5	24	4.15	29	230
5	170	10	44.5	15	84.5	20	38.25	25	108	30	2.65

Требования к пояснительной записке

Пояснительная записка к курсовому проекту выполняется на листах формата А4 (с одной стороны листа). На листах должны присутствовать рамки и штампы согласно ЕСКД. Тексты программ печатаются шрифтом Courier New (12-й кегль, единичный интервал), остальная текстовая информация – шрифтом Times New Roman (14-й кегль, полуторный интервал).

Пояснительная записка должна состоять из следующих частей:

1. Техническое задание: таблица экспериментальных данных, соответствующая номеру варианта, и описание задач обработки.
2. Анализ технического задания: выбор и обоснование методов и алгоритмов решения поставленных задач, математическое описание выбранных алгоритмов и блок-схемы их реализации.

3. Проектирование программы обработки экспериментальных данных: реализация выбранных методов и алгоритмов в виде m-функций MATLAB и составление на их основе общей программы обработки экспериментальных данных. Тексты программ должны содержать комментарии, поясняющие ход решения.

4. Результаты обработки экспериментальных данных: решение поставленных задач с помощью написанной программы. Результаты должны быть представлены в виде соответствующих числовых данных, таблиц и графиков с необходимыми выводами и заключениями.

8.1. Формирование статистического распределения

Набор всех видов значений наблюдений, которые могли бы быть при данном комплексе условий проведения эксперимента, называются *генеральной совокупностью*. На практике при проведении экспериментов из генеральной совокупности (бесконечного множества возможных значений измеряемого параметра) извлекается ограниченное число объектов. Совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности (результаты наблюдения, экспериментальные данные) называется *выборочной совокупностью (выборкой)*. Количество результатов наблюдений называется *объемом выборки*. Объем выборки обозначается n .

Результаты наблюдений, записанные в порядке их получения, называются *статистическим рядом* и записываются в виде x_1, x_2, \dots, x_n . Если значения результатов наблюдений записать в порядке возрастания $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, то такой ряд называется *ранжированным*, а номер элемента такого ряда называется *рангом*. В ранжированном ряду может быть несколько одинаковых значений x_i . В этом случае значение x_i называется *вариантой*. Последовательность вариантов, расположенных в порядке возрастания их значений $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$, называется *вариационным рядом*.

Если количество вариантов k невелико, то экспериментальные данные представляются статистическим распределением, которое имеет вид таблицы с перечнем значений вариантов $\{x_i\}$ и соответствующих им *частот* $\{m_i\}$ (количество значений данной варианты в выборке)

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

Если же количество вариант велико, то экспериментальные данные представляются в виде *интервального распределения*. В этом случае весь диапазон значений $[x_{\min}, x_{\max}]$ разбивается на равные интервалы, оптимальное количество которых можно вычислить по формуле Старджесса

$$k = 1 + 3.31 \cdot \lg n, \quad (229)$$

где n - объем выборки. Полученное значение округляется до ближайшего нечетного числа.

Далее по известному количеству интервалов вычисляется ширина интервалов

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k}, \quad (230)$$

и границы интервалов

$$\begin{aligned} x_i^{\text{лев}} &= x_{\min} + (i - 1) \times h \\ x_i^{\text{прав}} &= x_{\min} + i \times h \end{aligned} \quad (231)$$

где $x_i^{\text{лев}}$ левая,

$x_i^{\text{прав}}$ - правая граница i -ого интервала.

Для расчета границ интервалов можно использовать итерационные формулы

$$\begin{aligned} x_1^{\text{лев}} &= x_{\min}, & x_i^{\text{лев}} &= x_{i-1}^{\text{лев}} + h, \\ x_1^{\text{прав}} &= x_{\min} + h, & x_i^{\text{прав}} &= x_{i-1}^{\text{прав}} + h \end{aligned} \quad (232)$$

Частоту попадания экспериментальных значений в i -й интервал рассчитывают из следующих соображений:

1. Для всех интервалов, кроме последнего, значение результата наблюдения x_j принадлежит i -ому интервалу, если $x_i^{\text{лев}} \leq x_j < x_i^{\text{прав}}$

2. Значение результата наблюдения x_j принадлежит последнему (k -ому) интервалу, если $x_k^{\text{лев}} \leq x_j < x_k^{\text{прав}}$

Далее вычисляют координаты центров интервалов по формуле

$$x_i = x_{\min} + i \cdot h - \frac{h}{2} \quad (233)$$

или с помощью итерационной формулы

$$x_i = x_{\min} + \frac{h}{2}, \quad x_i = x_{i-1} + h. \quad (234)$$

В итоге экспериментальные данные представляются интервальным распределением, которое имеет вид таблицы

Границы интервалов $x_i^{\text{лев}} \leq x_j < x_i^{\text{прав}}$	Центры интервалов x_i	Частота попадания в интервал m_i

8.2. Расчет координаты центра опытного распределения

При многократных измерениях координата центра опытного распределения принимается за оценку результата измерения. Известны несколько оценок координаты центра распределения: среднее арифметическое, медиана, среднее арифметическое 90%-ной выборки, центр срединного размаха, центр размаха.

Среднее арифметическое (выборочное среднее арифметическое) вычисляется по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (235)$$

где x_i – результаты наблюдений

n – общее количество результатов (объем выборки).

В случае представления экспериментальных данных статистическим распределением формула (235) будет иметь вид

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k x_i m_i, \quad (236)$$

где x_i – варианты (или центры интервалов),

m_i – частота наблюдения i -ой варианты (или частота попадания результатов наблюдений в i -й интервал),

k – количество вариантов (или интервалов) статистического распределения.

Среднее арифметическое 90%-ной выборки $\bar{X}_{0,9}$ представляет собой среднее арифметическое вариационного ряда, из которого исключили по $r = 0.05 \cdot n$ элементов с каждой стороны. Значение $\bar{X}_{0,9}$ вычисляется по формуле

$$\bar{X}_{0,9} = \frac{1}{n - 2r} \cdot \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i \quad (237)$$

или в случае статистического распределения

$$\bar{X}_{0,9} = \frac{1}{n-2r} \cdot \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i m_i \quad (238)$$

Медианой \bar{X}_M называют значение x_i , которое делит ранжированный ряд на две части, равные по числу элементов

$$\bar{X}_M = \begin{cases} \frac{1}{2} * \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right), & \text{если } n \text{ четное} \\ x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases} \quad (239)$$

Центр размаха \bar{X}_R вычисляется по формуле

$$\bar{X}_R = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \quad (240)$$

где x_{\min}, x_{\max} – наименьшее и наибольшее значение элементов выборки.

Центр срединного размаха \bar{X}_C определяется по формуле

$$\bar{X}_C = \frac{x_{0,25} + x_{0,75}}{2} \quad (241)$$

где $x_{0,25}, x_{0,75}$ – 25%-ный и 75%-ный квантили (такие элементы ранжированного ряда, составленного по экспериментальным данным, левее которых лежат соответственно 25% и 75% остальных элементов), для вычисления которых используются формулы

	$x_{0,25} = x_k$	$x_{0,75} = x_k$
При n , кратном 4	$k = \frac{n}{4} + 1$	$k = \frac{3n}{4}$
При $(n-1)$, кратном 4	$k = \frac{n-1}{4} + 1$	$k = n - \frac{n-1}{4}$
При $(n+1)$, кратном 4	$k = \frac{n+1}{4} + 1$	$k = n - \frac{n+1}{4}$
Остальные четные n	$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{3n+2}{4}$

За оценку координаты центра распределения (результат измерения) X^* принимается медиана оценок $\bar{X}, \bar{X}_{0,9}, \bar{X}_M, \bar{X}_R, \bar{X}_C$, расположенных в ранжированный ряд. Такая оценка устойчива к отклонениям результатов наблюдений от нормального закона распределения.

8.3. Расчет оценок стандартных отклонений

Стандартное отклонение (среднеквадратическое отклонение, СКО) результатов наблюдений объемом n вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - X^*)^2}, \quad (242)$$

где x_i – результаты наблюдений,

X^* – результат измерения (центр опытного распределения).

В случае представления экспериментальных данных статистическим распределением формула (8.3.1) будет иметь вид

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^k m_i (x_i - X^*)^2}, \quad (243)$$

где x_i – варианты (или центры интервалов),

X^* – результат измерения (центр опытного распределения),

m_i – частота наблюдения i -ой варианты (или частота попадания результатов наблюдений в i -й интервал),

k – количество вариантов (или интервалов) статистического распределения.

В общем случае оценка СКО результатов наблюдений, определяемая по формулам (242) или (243) не является несмещенной. Несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений может быть определена следующим образом

$$S^* = S \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \quad (244)$$

Оценка стандартного отклонения результата измерения (центра опытного распределения)

$$S_x^* = \frac{S^*}{\sqrt{n}}. \quad (245)$$

8.4. Идентификация закона распределения методом моментов

Закон распределения результатов наблюдений близок к нормальному, если статистическая функция плотности распределения – функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значений аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует. Это можно определить по виду гистограммы. Для автоматизации этого процесса можно использовать ме-

тод моментов, в котором для идентификации закона распределения результатов наблюдений используются выборочные центральные моменты 2-ого (μ_2), 3-его (μ_3) и 4-ого (μ_4) порядков, которые определяются следующим образом

$$\mu_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - X^*)^k \quad (246)$$

где x_i – результаты наблюдений,

X^* – результат измерения (центр опытного распределения),

k – порядок момента.

По значениям центральных моментов определяются оценки коэффициентов формы опытного закона распределения:

– несмещенная оценка коэффициента асимметрии

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-2)} \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}, \quad (247)$$

– несмещенная оценка коэффициента эксцесса

$$\varepsilon^* = \frac{n^2 - 1}{(n-2)(n-3)} \cdot \left[\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 + \frac{6}{n+1} \right], \quad (248)$$

где n – объем выборки.

Если опытный закон распределения нормальный, то коэффициенты асимметрии и эксцесса должны быть малы (в идеале для нормального распределения $\alpha = \varepsilon = 0$). О малости коэффициентов асимметрии и эксцесса судят по их сравнению с оценками их стандартных отклонений

$$S_\alpha^* = \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1)(n+3)}},$$

$$S_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{24 \cdot (n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}},$$

где n – объем выборки.

Закон распределения близок к нормальному, если одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} |\alpha^*| \leq 3 \cdot S_\alpha^*, \\ |\varepsilon^*| \leq 5 \cdot S_\varepsilon^*. \end{cases} \quad (249)$$

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то закон распределения отличен от нормального и идентификацию закона распределения можно провести по сравнению оценок коэффициентов эксцесса и асимметрии с их теоретическими значениями.

8.5. Устранение грубых ошибок многократных измерений

Результаты наблюдений иногда существенно отличаются от наблюдаемых средних значений. Необходимо быть уверенным, что эти результаты не являются грубым промахом, ошибкой при фиксировании наблюдаемой величины, результатом неконтролируемых условий измерений или неисправности.

Если по коэффициентам формы опытного распределения не удалось идентифицировать закон распределения результатов наблюдений как нормальный, то для исключения промахов следует использовать универсальный приближенный метод. При этом исключаются значения $x_i < x_{r-}$ и $x_i > x_{r+}$, где x_{r-}, x_{r+} – границы промахов, определяемые выражением:

$$x_{r\pm} = X^* \pm S^* \cdot \left(1.55 + 0.8 \cdot \sqrt{\varepsilon^* + 2 \cdot \lg \frac{n}{10}} \right), \quad (250)$$

где n – объем выборки,

X^* – оценка координаты центра распределения (результата измерения),

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений,

ε^* – несмещенная оценка коэффициента эксцесса опытного распределения (248).

Если закон распределения близок к нормальному, то следует использовать статистические критерии обнаружения промахов. При этом подозрительные результаты наблюдений проверяются последовательно, по одному.

Критерий Романовского

Выбирается подозрительное значение $x_{i\text{под}}$. Выдвигается нулевая гипотеза “Значение $x_{i\text{под}}$ является грубой ошибкой измерения” с вероятностью p (задают значение доверительной вероятности).

Наблюдаемое значение критерия Романовского вычисляется по формуле

$$|x_{i\text{под}} - X_-^*| = t_p(k) * S_-^*, \quad (251)$$

где $x_{i\text{под}}$ – “подозрительное” значение результата наблюдения,

X_-^* – оценка результата измерения, вычисленная без учета всех подозрительных результатов наблюдений,

S_-^* – несмещенная оценка СКО результатов наблюдений, вычисленная без учета всех подозрительных результатов наблюдений,

$t_p(k)$ – квантиль распределения Стьюдента (Приложение 3, формула (ПЗ.1)) при заданной доверительной вероятности P с числом степеней свободы $k = n - n_{\text{ипод}}$

(n – объем выборки, $n_{\text{ипод}}$ – число подозрительных результатов наблюдений). Значение $t_p(k)$ может быть вычислено по

Правило “трех сигм”

Критерий “правило трех сигм” является одним из простейших для проверки результатов, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Результат $x_{\text{ипод}}$ считается грубой погрешностью, если выполняется условие

$$|x_{\text{ипод}} - X^*| \geq 3S^*, \quad (252)$$

где X^* – оценка результата измерения, вычисленная без учета всех подозрительных результатов наблюдений,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

Критерий вариационного размаха

Определяется размах вариационного ряда результатов наблюдений по формуле

$$R = x_{\text{max}} - x_{\text{min}}, \quad (253)$$

где x_{max} и x_{min} – наибольшее и наименьшее значения результатов наблюдений.

Подозрительный результат $x_{\text{ипод}}$ не является грубой погрешностью, если он лежит внутри интервала

$$X^* - z * R < x_{\text{ипод}} < X^* + z * R, \quad (254)$$

где X^* – результат измерения, вычисленный без учета подозрительного результата $x_{\text{ипод}}$,

z – критериальное значение, зависящее от объема выборки

n	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8

Критерий Шовене

Выбирается подозрительное значение $x_{i\text{под}}$. Выдвигается нулевая гипотеза “Значение $x_{i\text{под}}$ является грубой ошибкой измерения” с вероятностью p (задают значение доверительной вероятности).

Вычисляется коэффициент

$$z = \frac{|x_{\text{под}} - X^*|}{S^*}, \quad (255)$$

где X^* – оценка результата измерения,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

Вычисляется вероятность появления подозрительного результата $p = P\left(\frac{|x_{\text{под}} - X^*|}{S^*} > z\right)$, (т.е. вероятность выхода результатов наблюдений за квантиль $\pm z$) по формуле

$$p = 2 \times (1 - F(z)), \quad (256)$$

где $F(z)$ – интегральная функция стандартного нормального распределения (Приложение 1, формула (П1.2)).

Вычисляется количество ожидаемых результатов, у которых, по крайней мере, такая же погрешность, как и у подозрительного результата

$$n_{\text{под}} = n * p, \quad (257)$$

где n – объем выборки.

Гипотеза о наличии грубой погрешности принимается с заданной доверительной вероятностью p , если выполняется условие

$$n_{\text{под}} < 0.5. \quad (258)$$

Проверку следует выполнять сразу по нескольким критериям (рекомендуется использовать не меньше трех). Окончательное заключение о наличии грубых погрешностей следует делать по большинству критериев. При обнаружении промаха в i -ом результате наблюдения, этот результат следует исключить из выборки.

После исключения промахов следует пересчитать оценки центра распределения и стандартных отклонений.

8.6. Исключение прогрессирующей систематической погрешности

Наиболее часто встречающийся вид систематической погрешности – это прогрессирующая (дрейфовая) погрешность, которая может быть выявлена методами дисперсионного анализа. Однако для решения инженерных задач достаточно применить приближенный метод.

Пусть x_1, \dots, x_n - результаты наблюдений, записанные в порядке их получения (статистический ряд), а t_1, \dots, t_n - моменты времени получения результатов наблюдений (или порядковые номера результатов в случае равномерного во времени их получения).

Алгоритм устранения дрейфовой погрешности:

1. Выполняется линейная аппроксимация зависимости $x = f(t)$ и определяется разность крайних значений $x(t_n)$ и $x(t_1)$

$$\Delta x = A(t_n - t_1), \quad (259)$$

где $A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n t_i - n \sum_{i=1}^n x_i t_i}{\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)^2 - n \sum_{i=1}^n t_i^2}$ (аппроксимация методом наименьших квадратов).

2. Если $\Delta x = 0$, то дрейфовой погрешности нет. В противном случае для каждого результата наблюдения определяется величина систематической погрешности

$$\delta_i = \frac{\Delta x}{n} \cdot i, \quad (260)$$

которая округляется до точности представления результатов наблюдений.

3. Вносятся поправки на величину систематической погрешности

$$x_{i \text{ испр}} = x_i - \delta_i \quad (261)$$

После исключения дрейфовой погрешности следует пересчитать оценки центра распределения и стандартных отклонений.

8.7. Критерии нормальности опытного распределения

Для того чтобы с определенной вероятностью утверждать о нормальности опытного распределения, следует использовать критерии

согласия для нормального закона распределения (критерии нормальности).

Критерий Пирсона

Критерий χ^2 Пирсона эффективен при большом объеме выборки (условно $n > 50$). Идея критерия состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе нормального распределения.

Для использования критерия необходимо, чтобы в каждый интервал статистического распределения попадало не меньше 5 значений. В случае, если это не так, следует объединить несколько расположенных рядом интервалов в один.

Алгоритм проверки гипотезы по критерию Пирсона:

1. Выдвигается нулевая гипотеза: “генеральная совокупность распределена нормально”. Выбирается значение доверительной вероятности p .

2. Рассчитывается для каждого интервала параметр

$$z_i = \frac{|x_i - \bar{X}|}{S^*} \quad (262)$$

где x_i – середина соответствующего интервала,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений,

\bar{X} – выборочное среднее арифметическое.

3. По значению z_i определяется значение дифференциальной функции стандартного нормального распределения $f(z_i)$ (Приложение 1, формула (П1.1)) – вероятность попадания значений в интервал в случае, если распределение нормальное.

4. Вычисляются теоретические частоты попадания значений выборки в i -й интервал

$$m'_i = \frac{n \cdot h}{S^*} \cdot f(z_i), \quad (263)$$

где h – длина интервала,

n – объем выборки,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

5. Наблюдаемое значение критерия Пирсона определяется по формуле

$$\chi_{\text{набл}}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}, \quad (264)$$

где m_i – частота попадания экспериментальных значений в i -й интервал,

m'_i – теоретические частоты, вычисленные в предположении нормально-распределенной генеральной совокупности,

k – количество интервалов статистического распределения.

6. Критическое значение критерия Пирсона определяется по формуле

$$\chi_{\text{кр}}^2 = \chi_p^2(k - 3), \quad (265)$$

где $\chi_p^2(k - 3)$ – p -квантиль распределения Пирсона с числом степеней свободы $k - 3$ (Приложение 2, формулы (П2.1) и (П2.2)),

k – количество интервалов статистического распределения.

7. Нулевая гипотеза о нормальности опытного распределения принимается с принятой вероятностью p , если

$$\chi_{\text{набл}}^2 \leq \chi_p^2(r). \quad (266)$$

Критерий Шапиро-Уилка

Критерий W Шапиро-Уилка является наиболее эффективным критерием проверки гипотезы о принадлежности выборки к нормальному закону распределения. Он работает одинаково эффективно и при малых и при больших объемах выборки. Критерий можно применять при объеме выборки $n \geq 3$.

Алгоритм проверки гипотезы по критерию Шапиро-Уилка:

1. Выдвигается нулевая гипотеза: “генеральная совокупность распределена нормально”. Выбирается значение доверительной вероятности p .

2. Вычисляется коэффициент

$$s = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (267)$$

где x_i – результаты наблюдений, \bar{X} – среднее арифметическое выборки.

3. Вычисляется коэффициент

$$k = \begin{cases} 0.5n, & \text{если } n - \text{четное;} \\ 0.5(n-1), & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (268)$$

4. Вычисляется наблюдаемое значение критерия Шапиро-Уилка

$$W = \frac{1}{s} \cdot \left[\sum_{i=1}^k a_{n-i+1} (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2, \quad (269)$$

где a_{n-i+1} – константы, для которых существуют таблицы значений,
 x_i – элементы выборки, представленной в виде ранжированного ряда.

Для автоматизации применения W -критерия можно использовать аппроксимацию коэффициентов a_{n-i+1} (метод Шапиро-Франчия)

$$a_{n-i+1} = d_{n-i+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (270)$$

где $d_j = u_p^c$ – квантиль стандартного нормального распределения при $p = \frac{j-0.375}{n+0.25}$ (Приложение 1, формула (П1.4)).

5. При выбранном значении доверительной вероятности p определяется критическое значение критерия W из таблицы (Приложение 5.) для известного объема выборки n .

6. Нулевая гипотеза о нормальности закона распределения выборки принимается при заданной доверительной вероятности p , если

$$W > W_{кр..} \quad (271)$$

Для наиболее распространенного в технических измерениях значения доверительной вероятности $p = 0.95$ можно применять модификацию W - критерия, позволяющую обойтись без всяких таблиц.

Наблюдаемое значение критерия при этом определяется по формуле

$$W' = \left(1 - \frac{0.6695}{n^{0.6518}} \right) \cdot \frac{s}{b}, \quad (272)$$

где s и k – те же коэффициенты, что и в общем случае,

$$b = \left[\sum_{i=1}^k a_i \cdot (x_{n-i+1} - x_i) \right]^2, \quad a_i = a_0 \left[d_i + \frac{1483}{(3-d_i)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1-d_i)^{8.26}} \right],$$

$$a_0 = \frac{0.899}{(n-2.4)^{0.4162}} - 0.02, \quad d_i = \frac{n-2i+1}{n-0.5}.$$

Нулевая гипотеза о нормальности распределения принимается, если

$$W' < 1.. \quad (273)$$

8.8. Определение случайной погрешности результата измерения

Случайная погрешность Δ определяет интервальную оценку результата измерения. Под *интервальной оценкой результата измерения* понимается интервал, который с заданной доверительной вероятностью содержит истинное значение измеряемой величины. Границы, зависящие от выбранной доверительной вероятности, могут быть заданы как симметричными, так и несимметричными. Чаще используются симметричные границы. Это означает, что с принятой доверительной вероятностью p истинное значение измеренной величины лежит в доверительном интервале

$$X^* - \Delta \leq X_{\text{ист}} \leq X^* + \Delta, \quad (274)$$

Доверительная вероятность обычно принимается исходя из следующих соображений:

– При выполнении технических измерений, а также при контроле параметров технологического процесса принимают доверительную вероятность $p = 0.95$.

– При невозможности повторного измерения, доверительную вероятность допускается принимать равной $p = 0.99$.

– В особых случаях, когда результаты измерения имеют большое значение для здоровья людей, допускается принимать более высокую доверительную вероятность.

Для нормального закона распределения случайная погрешность определяется в зависимости от величины доверительной вероятности p по формуле

$$\Delta = t_{\frac{1+p}{2}}(k) \cdot S_x^*, \quad (275)$$

где S_x^* – стандартное отклонение результата измерения,

$t_{\frac{1+p}{2}}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 1$ (Приложение 3, формула (ПЗ.1)).

Поскольку выбор доверительной вероятности при расчете границ доверительного интервала носит произвольный характер, то на практике часто применяется правило трех сигм. При этом случайная погрешность определяется по формуле

$$\Delta = 3 \cdot S_x^*, \quad (276)$$

а доверительная вероятность определяется в зависимости от объема выборки n

n	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	30	50	150	∞
p	0.96	0.97	0.976	0.98	0.983	0.985	0.988	0.99	0.991	0.992	0.993	0.994	0.995	0.996	0.997	0.9973

Результат многократных измерений записывается в виде

$$X_{\text{ИСТ}} = X^* \pm \Delta \quad (277)$$

Обработка результатов наблюдений отклика Y_i по пп.1-8 проводится для каждого уровня воздействия x_i . В результате исходная таблица экспериментальных данных преобразуется к виду

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	...	y_n

где $y_i = Y_i^*$ – результат многократного измерения отклика при i -ом уровне воздействия.

8.9. Проверка однородности дисперсий

Значимое отличие дисперсии результатов наблюдений отклика на каком-либо уровне воздействия от остальных значений (неоднородность дисперсий) может быть следствием использования средства измерения с другими свойствами (например, проводилась калибровка и, соответственно, изменились составляющие систематических погрешностей прибора) или следствием неисправности средства измерения. В этом случае использование результатов наблюдений на данном уровне вместе с остальными неправомерно.

Критерий Самиуддина

Для проверки гипотезы об однородности дисперсий отклика на всех уровнях воздействия можно использовать критерий равенства дисперсий Самиуддина. Этот критерий устойчив к отклонениям ре-

зультатов наблюдений от нормального закона, и, кроме того, имеет мощность выше, чем у многих классических критериев (например, критериев Бартлетта и Фишера).

На предыдущих этапах были получены несмещенные оценки стандартных отклонений результатов наблюдений отклика на всех уровнях воздействия S_i^* . По их значениям вычисляется наблюдаемое значение критерия Самиуддина

$$W_{\text{набл}} = \frac{9}{2} \sum_{i=1}^n (m_i - 1) * \left(\sqrt[3]{\frac{m}{c} S_i^2} - 1 \right)^2, \quad (278)$$

где n – количество оцениваемых дисперсий (т.е. количество уровней воздействия, на которых проверяется однородность дисперсий результатов наблюдений отклика),

m_i – объем результатов наблюдений отклика на i -ом уровне воздействия,

$$m = \sum_{i=1}^n (m_i - 1), \quad c = \sum_{i=1}^n (S_i^*)^2 \cdot (m_i - 1).$$

Критическим значением критерия Самиуддина является квантиль распределения Пирсона с числом степеней свободы $n-1$ при заданной доверительной вероятности p (Приложение 2, формулы (П2.1) или (П2.2)), т.е.

$$W_{\text{кр}} = \chi_p^2(n - 1). \quad (279)$$

Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается при выполнении условия

$$W_{\text{набл}} \leq W_{\text{кр}}. \quad (280)$$

Если нулевая гипотез отклоняется, то чтобы определить, какая из оценок дисперсий значимо отличается от других, можно попарно сравнивать медианное значение ряда дисперсий с остальными оценками. При обнаружении отличающейся дисперсии, необходимо исключить соответствующий ряд наблюдений из таблицы экспериментальных данных, поскольку его использование для поиска уравнения регрессии может привести к ошибкам.

8.10. Определение значимости корреляционной связи

Если измеряемые величины зависимы друг от друга, то они называются *коррелированными*, в противном случае – *некоррелированными*. Степень такой зависимости определяется *коэффициентом корреляции*.

Пусть имеются две выборки $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ объемом n , тогда оценка коэффициента корреляции случайных величин X и Y определяется выражением

$$r_{xy} = \begin{cases} r * \left(1 + \frac{1-r^2}{2(n-3)}\right), & \text{если } n < 15, \\ r, & \text{если } n \leq 15, \end{cases} \quad (281)$$

где $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2}}$,

\bar{X} , \bar{Y} – средние арифметические значения.

Значимость корреляционной связи между величинами X и Y определяется проверкой статистической гипотезы.

Наблюдаемым значением критерия при этом является модуль оценки коэффициента корреляции, т.е.

$$R_{\text{набл}} = |r_{xy}|. \quad (282)$$

Критическое значение критерия $R_{\text{кр}}$ определяется в зависимости от объема результатов наблюдений n и значения доверительной вероятности p

– при $5 < n \leq 10$

$$R_{\text{кр}} = \frac{a-1}{a+1}, \quad (283)$$

где $a = \exp\left(\frac{2}{\sqrt{n-3}} \cdot u_{\frac{1+p}{2}}^c\right)$,

$u_{\frac{1+p}{2}}^c$ – квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1, формула (П1.4)),

– при $10 < n \leq 200$

$$R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{b^2}{n-2+b^2}}, \quad (284)$$

где $b = t_{\frac{1+p}{2}}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$ (Приложение 3, формула (П3.1)),
– при $n > 200$

$$R_{кр} = \frac{u_{\frac{1+p}{2}}^c}{\sqrt{n-1}}, \quad (285)$$

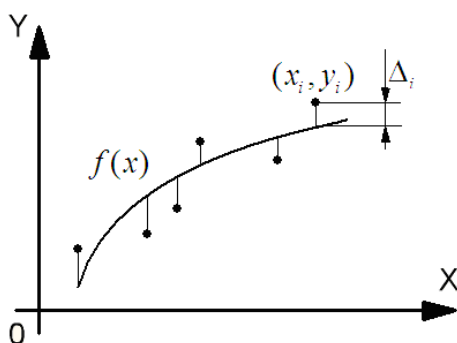
где $u_{\frac{1+p}{2}}^c$ – квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1, формула (П1.4)),

Корреляционная связь признается значимой с вероятностью p , если

$$R_{набл} \geq R_{кр}. \quad (286)$$

8.11. Аппроксимация элементарными функциями

Пусть заданы значения аргумента x_1, x_2, \dots, x_n некоторой функции, называемые *узлами*, и соответствующие им значения этой функции y_1, y_2, \dots, y_n . Необходимо определить аналитический вид функции $y = f(x)$, близко проходящей через точки (x_i, y_i) . Решение этой задачи называется *аппроксимацией*, а функция $f(x)$ называется *аппроксимирующей*.



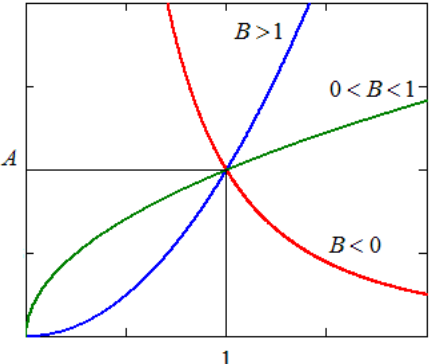
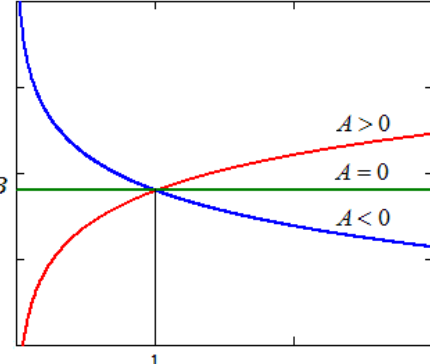
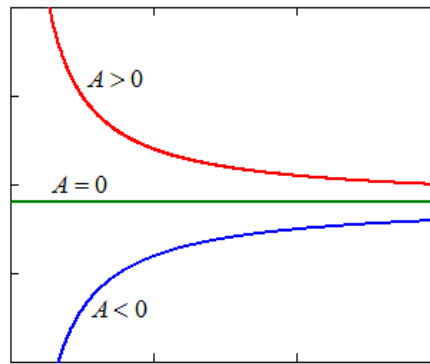
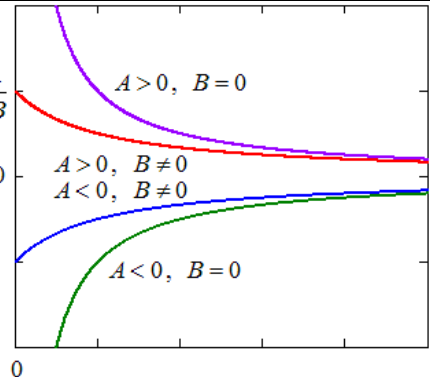
Δ_i – *уклонение* (разность в i -ой точке между значением аппроксимирующей функции и экспериментальным значением, т.е. $\Delta_i = f(x_i) - y_i$). В математической статистике уклонения называют *регрессионными остатками*.

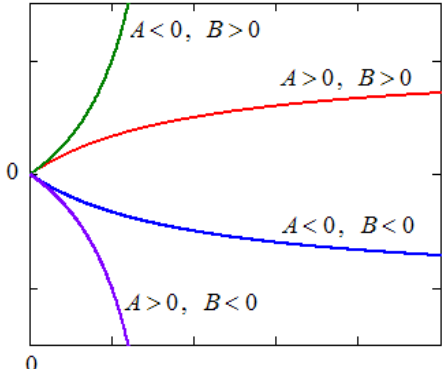
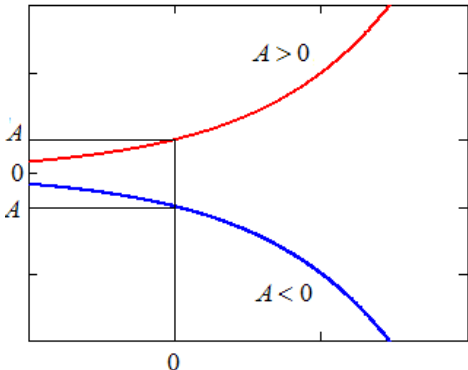
Критерием близости аппроксимирующей функции к экспериментальным точкам в методе наименьших квадратов является минимальная сумма квадратов уклонений, т.е.

$$\delta = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Аппроксимация может быть линейной, когда используется функция $y = Ax + B$ и нелинейной.

В качестве аппроксимирующих чаще всего используются следующие нелинейные функции

<p>Степенная</p>	$y = Ax^B$	
<p>Логарифмическая</p>	$y = A \ln(x) + B$	
<p>Гиперболическая</p>	$y = \frac{A}{x} + B$	
<p>Дробно-линейная 1</p>	$y = \frac{1}{Ax + B}$	

Дробно-линейная 2	$y = \frac{x}{Ax + B}$	
Показательная	$y = AB^x$	

Выбор аппроксимирующей функции может проводится двумя методами:

1. Рассчитываются уклонения $\Delta_i = f(x_i) - y_i$ для нескольких функций и выбирается функция с минимальным значением критерия.
2. Аппроксимирующая функция методом замены переменных преобразуется к линейному виду (метод выравнивания)

Исходная функция	Замена переменных	Выровненная функция
$y = Ax^B$	$x' = \ln(x), y' = \ln(y)$	$y' = \ln(A) + Bx'$
$y = A \ln(x) + B$	$x' = \ln(x), y' = y$	$y' = Ax' + B$
$y = \frac{A}{x} + B$	$x' = \frac{1}{x}, y' = y$	$y' = Ax' + B$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$x' = x, y' = \frac{x}{y}$	$y' = Ax' + B$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$x' = x, y' = \frac{1}{y}$	$Y = y'x' + B$
$y = AB^x$	$x' = x, y' = \ln(y)$	$y' = \ln(A) + \ln(B) \cdot x'$

Функция наилучшим образом проходит через экспериментальные точки, если эти точки в новой системе координат лежат на одной прямой. Для этого нужно, чтобы разделенные разности первого порядка

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \dots, \quad \delta y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \quad (287)$$

были примерно (а в идеальном случае строго) равны, т.е.

$$\delta y_1 \approx \delta y_2 \approx \dots \approx \delta y_{n-1}. \quad (288)$$

Таким образом, алгоритм выбора аппроксимирующей функции методом выравнивания следующий:

1. Рассчитываются разделенные разности первого порядка по координатам экспериментальных точек (x_i, y_i) . Если они равны, то в качестве аппроксимирующей выбирается линейная функция. В противном случае переход к шагу 2.
2. Экспериментальные точки (x_i, y_i) пересчитываются в новую систему координат для нелинейных функций.
3. Вычисляются значения разделенных разностей первого порядка по формулам (287).
4. Выбирается та функция, для которой значения разделенных разностей наиболее близки друг к другу.

Коэффициенты A и B выбранной функции рассчитываются через вспомогательные коэффициенты P и Q , которые определяются по формулам

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n k_i - n \sum_{i=1}^n k_i t_i}{\left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n k_i^2}, \quad (289)$$

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n k_i \cdot \sum_{i=1}^n k_i t_i - \sum_{i=1}^n t_i \cdot \sum_{i=1}^n k_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n k_i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n k_i^2}, \quad (290)$$

где

Аппроксимирующая функция	A	B	Переменные
$y = Ax + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i, t_i = y_i$
$y = Ax^B$	$A = e^Q$	$B = P$	$k_i = \ln x_i, t_i = \ln y_i$
$y = AB^x$	$A = e^Q$	$B = e^P$	$k_i = x_i, t_i = \ln y_i$
$y = A \ln x + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = \ln x_i, t_i = y_i$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i, t_i = \frac{x_i}{y_i}$
$y = \frac{A}{x} + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = \frac{1}{x_i}, t_i = y_i$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i, t_i = \frac{1}{y_i}$

Альтернативным методом поиска уравнения регрессии является аппроксимация полиномами Чебышева.

8.12. Регрессия полиномами Чебышева

Если не удастся подобрать элементарную функцию, адекватно описывающую экспериментальные данные, то нужно применять регрессию полиномами.

Любое уравнение регрессии может быть представлено в виде полинома степени k

$$y = \sum_{i=0}^k A_i P_i(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) \dots + A_k P_k(x), \quad (291)$$

где $P_i(x)$ – полином Чебышева порядка i .

Полиномы Чебышева первых двух порядков имеют вид

$$P_0(x) = 1, \quad (292)$$

$$P_1(x) = x - \bar{X} = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (293)$$

Полином Чебышева произвольного порядка $P_i(x)$ можно найти, зная полиномы двух предыдущих порядков $P_{i-1}(x)$ и $P_{i-2}(x)$, по формуле

$$P_i(x) = (x + \alpha_i) P_{i-1}(x) + \beta_i P_{i-2}(x), \quad (294)$$

где

$$\alpha_i = -\frac{\sum_{j=1}^n x_j P_{i-1}^2(x_j)}{\sum_{j=1}^n P_{i-1}^2(x_j)}, \quad \beta_i = -\frac{\sum_{j=1}^n x_j P_{i-1}(x_j) P_{i-2}(x_j)}{\sum_{j=1}^n P_{i-2}^2(x_j)}, \quad (295)$$

$P_{i-1}(x_j), P_{i-2}(x_j)$ – значения полиномов Чебышева в точках x_j .

Коэффициенты уравнения регрессии находятся по формуле

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^n y_j P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^n P_i^2(x_j)}. \quad (296)$$

Оптимальное значение степени полинома k находится последовательным уточнением (увеличением значения k , начиная с величины $k=1$). Значение степени полинома оптимально, если оно обеспечивает наименьшее значение *остаточной дисперсии* D_k (дисперсии, обусловленной разбросом экспериментальных точек вокруг линии регрессии). Иными словами, последовательное увеличение величины k обеспечивает приближение аппроксимирующей кривой к экспериментальным точкам (т.е. уменьшает остаточную дисперсию) до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное значение k , после которого его дальнейшее увеличение приводит к увеличению D_k .

Остаточная дисперсия определяется по формуле

$$D_k = \frac{S_k^2}{n-k-1}, \quad (297)$$

где

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2, \quad \dots, \quad S_k^2 = S_{k-1}^2 - A_k^2 \cdot \sum_{i=1}^n P_k^2(x_i). \quad (298)$$

Таким образом, алгоритм поиска уравнения регрессии следующий:

1. Принимается значение $k=1$.
 - 1.1. Определяются выражения для полиномов $P_0(x)$ и $P_1(x)$.
 - 1.2. Вычисляются значения полиномов $P_0(x_i)$ и $P_1(x_i)$ в экспериментальных точках x_i .
 - 1.3. Вычисляются коэффициенты A_0 и A_1 и составляется уравнение регрессии порядка 1.
 - 1.4. Вычисляется значение остаточной дисперсии D_1 .

2. Принимается значение $k = 2$.
- 2.1. Определяется выражение для полинома $P_2(x)$.
- 2.2. Вычисляются значения $P_2(x_i)$ в экспериментальных точках x_i .
- 2.3. Вычисляется коэффициент A_2 и составляется уравнение регрессии порядка 2.
- 2.4. Вычисляется значение остаточной дисперсии D_2 .
3. Сравниваются значения D_1 и D_2 . Если $D_1 < D_2$, то в качестве модели выбирается уравнение регрессии порядка 1. Если $D_2 < D_1$, то переходят к следующему шагу.
4. Проводятся аналогичные вычисления для $k = 3$, затем для $k = 4$ и т.д. Вычисления заканчиваются, когда будет установлено, что для некоторого значения k справедливо $D_k < D_{k+1}$. Таким образом, достигнуто наименьшее значение остаточной дисперсии и оптимальная степень полинома k установлена.

8.13. Устранение грубых ошибок совместного измерения

Наличие грубых отклонений (промахов) в значениях y_i , не связанных с естественным разбросом, может приводить к большим ошибкам при построении регрессии. Обнаружение промахов осуществляется проверкой статистической гипотезы. Наиболее простым является критерий Прескотта-Лунда. При этом вычисляются *регрессионные остатки*

$$e_i = y_i - y'_i, \quad (299)$$

где y_i – результат i -ого измерения величины Y ,

$y'_i = f(x_i)$ – значение, вычисленное подстановкой i -ого наблюдения x_i величины X в уравнение регрессии.

Наблюдаемое значение критерия Прескотта-Лунда вычисляется по формуле

$$R_{\text{набл}} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^n e_i^2}} * \max |e_i|, \quad (300)$$

где $\max |e_i|$ – наибольшее значение модуля регрессионных остатков.

Критическое значение критерия при заданной доверительной вероятности p вычисляется по формуле

$$R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{(n-l)*d}{n-l+1+d}}, \quad (301)$$

где $d = F_{1-\frac{1-p}{n}}(k_1, k_2)$ – квантиль распределения Фишера со степенями свободы $k_1 = 1$, $k_2 = n - 3$ (Приложение 4, формула (П4.1)).

Гипотеза о наличии в i -ом результате наблюдений (x_i, y_i) промаха при заданном уровне доверительной вероятности p принимается, если

$$R_{\text{набл}} \geq R_{\text{кр}}. \quad (302)$$

Этот результат должен быть исключен из экспериментальных данных, а оценки коэффициентов уравнения регрессии должны быть пересчитаны.

8.14. Анализ коэффициентов уравнения регрессии

Анализ коэффициентов уравнения регрессии предполагает проверку гипотезы о их значимости (существенном отличии от нуля) и построение доверительных интервалов для них.

Анализ коэффициентов уравнения регрессии, построенного с помощью элементарной функции

Вычисляются оценки стандартных отклонений коэффициентов A и B

$$S_A = \sqrt{\frac{D}{S^2(n-1)}}, \quad S_B = \sqrt{D \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}'^2}{(n-1) \cdot S^2} \right)}, \quad (303)$$

где $D = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y'_i - B - Ax'_i)^2$, $\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x'_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x'_i - \bar{X}')^2$,

(x'_i, y'_i) – экспериментальные точки, пересчитанные в систему координат, в которой выбранная аппроксимирующая функция линейна. Заметим, что для степенной функции нужно также пересчитать коэффициент A , а для показательной – оба коэффициента A и B (см. замену переменных в методе выравнивания (таблица перед формулой (290))).

Далее при заданном уровне доверительной вероятности p рассчитывается квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n-2$, т.е. $t_{\frac{1+p}{2}}(n-2)$ (Приложение 3, формула (П3.1)).

Гипотеза о значимости коэффициента A или B принимается с вероятностью p , если, соответственно, справедливы условия

$$|A| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A, \quad |B| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B. \quad (304)$$

Если гипотеза о значимости какого-либо коэффициента отклоняется, то его значение следует принять равным нулю.

Доверительные интервалы для истинных значений коэффициентов уравнения регрессии определяются по формулам

$$A - t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A \leq A_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}} \leq A + t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A, \quad (305)$$

$$B - t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B \leq B_{\dot{E}\dot{N}\dot{O}} \leq B + t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B, \quad (306)$$

Анализ коэффициентов уравнения регрессии, построенного с помощью полиномов Чебышева

Стандартное отклонение коэффициента A_i можно найти по формуле

$$S_{A_i} = \sqrt{\frac{S_i^2}{(n-1) \cdot \sum_{j=1}^n P_i^2(x_j)}}, \quad (307)$$

где $P_i(x_j)$ – значения полиномов Чебышева в экспериментальных точках x_j ,

S_i^2 – значения, вычисляемые по формуле (298).

Далее при заданном уровне доверительной вероятности p рассчитывается квантиль распределения Стьюдента $t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)$ (Приложение 3, формула (ПЗ.1)), где k – степень полинома, описывающего уравнение регрессии.

Коэффициент A_i является значимым с заданной доверительной вероятностью p , если

$$|A_i| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1) \cdot S_{A_i}. \quad (308)$$

Если гипотеза о значимости какого-либо коэффициента отклоняется, то его значение следует принять равным нулю.

Доверительный интервал для истинных значений коэффициентов уравнения регрессии строится по формуле

$$A_i - t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1) \cdot S_{A_i} \leq A_{i \dot{E}\dot{N}\dot{O}} \leq A_i + t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1) \cdot S_{A_i}. \quad (309)$$

8.15. Проверка адекватности модели

Под адекватностью модели (соответствие уравнения регрессии экспериментальным данным) понимается статистическая неразличимость результатов наблюдений y_i и значений y'_i , вычисляемых по уравнению регрессии. Статистическая неразличимость определяется проверкой гипотезы. При этом используется вся таблица экспериментальных данных

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_{ij}	$y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1m}$	$y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2m}$...	$y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nm}$

1. Вычисляется значение дисперсии D , определяемой рассеянием значений y_i вокруг линии регрессии (остаточная дисперсия), по формуле

$$D = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^n (\bar{Y}_i - y'_i)^2 \quad (310)$$

где l – количество коэффициентов уравнения регрессии,

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_{ij} - \text{среднее значение отклика при } i\text{-ом уровне воздей-}$$

ствия.

2. Вычисляется значение дисперсии s^2 , определяемой естественным рассеянием значений y_{ij} вокруг своих средних \bar{Y}_i , по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^2, \quad (311)$$

$$\text{где } S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{Y}_i)^2.$$

3. При заданной доверительной вероятности p вычисляется квантиль распределения Фишера $F_p(n-2, m-1)$ (Приложение 3, формула (ПЗ.1)).

4. Ошибка в определении регрессии с доверительной вероятностью p признается статистически значимой, если

$$\frac{D}{s^2} > F_p(n-2, m-1). \quad (312)$$

В этом случае уравнение регрессии не соответствует экспериментальным данным. Следует проверить правильность расчета коэффициентов уравнения регрессии и, если ошибки отсутствуют, выбрать другую аппроксимирующую функцию.

8.16. Прогнозирование по уравнению регрессии

Если найдено уравнение регрессии $y = f(x)$, адекватно описывающее экспериментальные данные, то можно с его помощью вычислить значение отклика Y при уровне X , отличном от условий проведения эксперимента, т.е. сделать прогноз о возможном значении Y . Это важно, когда нужно узнать о поведении исследуемого объекта в условиях, воспроизведение которых по разным причинам невозможно.

Расчет прогнозируемого значения отклика y_0 производится подстановкой требуемого значения воздействия x_0 в уравнение регрессии. Поскольку значение y_0 оценивается по реализации случайных величин x и y (экспериментальные данные), то оно также случайно, поэтому необходимо определить доверительный интервал полученного значения y_0 .

Если уравнение регрессии получено с помощью аппроксимации элементарными функциями, то границы доверительного интервала для заданной доверительной вероятности p вычисляются по формуле

$$y_{\bar{a}} = Ax_0 + B \pm t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \sqrt{\frac{M}{n-2} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{X})^2}{Q} \right]}, \quad (313)$$

где $M = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{Y})^2$, $Q = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$,

(x_i, y_i) – экспериментальные точки,

A, B – коэффициенты уравнения регрессии,

x_0 – уровень воздействия, для которого ведется прогноз,

$t_{\frac{1+p}{2}}(n-2)$ – квантиль распределения Стьюдента (Приложение 3,

формула (ПЗ.1)).

Заметим, что формула (313) справедлива для системы координат, в которой уравнение регрессии является линейной функцией, поэтому, прежде чем её применять, следует пересчитать в эту систему участвующие в формуле координаты (см. замену переменных в методе выравнивания (таблица перед формулой (287))). Для функций, которые предусматривают пересчет координаты y , ещё необходимо провести обратный перенос результата вычисления по формуле (313) в исходную систему координат.

Если уравнение регрессии получено с помощью полиномов Чебышева по равноотстоящим значениям x_i , то границы доверительного интервала для значения $y_{n+r} = f(x_{n+r})$ (r – глубина прогноза) вычисляются по формуле

$$y_{\bar{\omega}} = y_{n+r} \pm \frac{t_{1+p}}{2} (n-k-1) \cdot \sqrt{D_k} \cdot \varphi(n, r), \quad (314)$$

где D_k – величина остаточной дисперсии,

$\frac{t_{1+p}}{2} (n-k-1)$ – квантиль распределения Стьюдента (Приложение 3,

формула (ПЗ.1)),

$\varphi(n, r)$ – коэффициент, зависящий от количества точек n , по которым определялось уравнение регрессии и глубины прогноза.

Для линейной регрессии ($k=1$)

$$\varphi(n, r) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[(n+1)^2 + \frac{3(n+2r-1)^2}{(n-1)} \right]} \quad (315)$$

Для квадратичной регрессии ($k=2$)

$$\varphi(n, r) = \sqrt{1 + \frac{(n+r)^2}{I_1} + \frac{I_2 - 2(n+1)^2 I_1 + n(n+r)^4}{nI_2 - I_1^2}}, \quad (316)$$

где $I_1 = \sum_{i=1}^n i^2$, $I_2 = \sum_{i=1}^n i^4$.

Для вычисления I_1 и I_2 можно использовать следующие формулы

$$I_1 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (317)$$

$$I_2 = \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \quad (318)$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА

Обозначение	$N(\mu, \sigma)$
Параметры	μ, σ
Плотность вероятности	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad (-\infty < x < +\infty)$
Функция распределения	$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\} dt, \quad (-\infty < x < +\infty)$
Среднее	μ
Дисперсия	σ^2
Стандартное отклонение	σ
Коэффициент вариации	$\frac{\sigma}{\mu}$
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	0

В практических задачах используется нормированная случайная величина $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, распределение которой называется *нормированным нормальным распределением* (или *стандартным нормальным распределением*) $N(0,1)$.

Значение дифференциальной функции стандартного нормального распределения определяется по формуле

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}. \quad (\text{П1.1})$$

Значение интегральной функции стандартного нормального распределения $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ можно определить с помощью аппроксимации

$$F(z) = \begin{cases} 1 - 0.852 \cdot \exp \left[- \left(\frac{z + 1.5774}{2.0637} \right)^{2.34} \right] & \text{при } z \geq 0, \\ 1 - F(-z) & \text{при } z < 0. \end{cases} \quad (\text{П1.2})$$

Значение функции Лапласа $\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$ вычисляется через значение $F(z)$

$$\Phi(z) = 2F(z) - 1. \quad (\text{П1.3})$$

Значение p -квантиля стандартного нормального распределения можно определить по аппроксимации

$$u_p^c = \begin{cases} 2.0637 \cdot \left(\ln \frac{1}{1-p} - 0.16 \right)^{0.4274} - 1.5774, & \text{при } 0.5 \leq p \leq 0.999, \\ -u_{1-p}^c, & \text{при } 0.001 < p < 0.5 \end{cases} \quad (\text{П1.4})$$

Значение p -квантиля u_p нормального распределения с параметрами μ и σ вычисляется через квантиль стандартного нормального распределения u_p^c

$$u_p = \mu + u_p^c \cdot \sigma. \quad (\text{П1.5})$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИРСОНА

Если X_1, X_2, \dots, X_k – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, то сумма их квадратов подчиняется распределению χ^2 (хи-квадрат) Пирсона с числом степеней свободы k .

Обозначение	$\chi^2(k)$
Параметр	k – число степеней свободы
Плотность вероятности	$f(x) = \left[\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \right]^{-1} \cdot x^{\frac{k-2}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0$
Функция распределения	$F(x) = \left[\sqrt{2} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \right]^{-1} \int_0^x t^{\frac{k-2}{2}} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) dt, \quad x > 0$
Среднее	k
Дисперсия	$2k$
Стандартное отклонение	$\sqrt{2k}$
Коэффициент вариации	$\sqrt{\frac{2}{k}}$
Коэффициент асимметрии	$2\sqrt{\frac{2}{k}}$
Коэффициент эксцесса	$\frac{12}{k}$

Значение p -квантиля распределения Пирсона обозначается $\chi_p^2(k)$ и может быть рассчитано по формуле аппроксимации Голдштейна

$$\chi_p^2(k) = k \cdot \left[\sum_{i=0}^6 k^{-\frac{i}{2}} \cdot d^i \cdot \left(a_i + \frac{b_i}{k} + \frac{c_i}{k^2} \right) \right]^3, \quad (\text{П2.1})$$

где $d = u_p^c$ – p -квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1),

a_i, b_i, c_i – константы

i	a_i	b_i	c_i
0	1.0000886	-0.2237368	-0.01513904
1	0.4713941	0.02607083	-0.008986007
2	0.0001348028	0.01128186	0.02277679
3	-0.008553069	-0.01153761	-0.01323293
4	0.00312558	0.005169654	-0.006950356
5	-0.0008426812	0.00253001	0.001060438
6	0.00009780499	-0.001450117	0.001565326

или с помощью аппроксимации Корниша-Фишера (более простая, но менее точная, чем аппроксимация Голдштейна)

$$\chi_p^2(k) = k + A\sqrt{k} + B + \frac{C}{\sqrt{k}} + \frac{D}{k} + \frac{E}{k\sqrt{k}}, \quad (\text{П2.2})$$

где $d = u_p^c$ – p -квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1),

$$A = d\sqrt{2}, \quad B = \frac{2}{3}(d^2 - 1), \quad C = d \cdot \frac{d^2 - 7}{9\sqrt{2}}, \quad D = \frac{6d^4 + 14d^2 - 32}{405},$$

$$E = d \cdot \frac{9d^4 + 256d^2 - 433}{4860\sqrt{2}}.$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Если Y – случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, а независимая от нее случайная величина X имеет распределение хи-квадрат с k степенями свободы, то случайная величина $t = Y \cdot \sqrt{\frac{k}{X}}$ подчиняется распределению Стьюдента с k степенями свободы.

Обозначение	$t(k)$
Параметр	k – число степеней свободы
Плотность вероятности	$f(t) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \cdot \left[\sqrt{\pi k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (-\infty < t < +\infty)$
Функция распределения	$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dy, \quad (-\infty < t < +\infty)$
Среднее	0
Дисперсия	$k \cdot (k-2)^{-1}, \quad k > 2$
Коэффициент вариации	0
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	$10 \cdot (k-4)^{-1}, \quad k > 4$

Значение p -квантиля распределения Стьюдента с k степенями свободы $t_p(k)$ можно вычислить с помощью аппроксимации Морана

$$t_p(k) = d \cdot \left(1 - \frac{d^2 + 1}{4k}\right)^{-1}, \quad (\text{ПЗ.1})$$

где $d = u_p^c$ – p -квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1).

Значение интегральной функции распределения Стьюдента можно вычислить с помощью аппроксимации

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=0}^5 c_i \cdot |t^i| \right)^{-8}, \quad (\text{П3.2})$$

где $c_i = \left(1 + \sum_{j=1}^2 \frac{b_{ij}}{k^j} \right)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^4 \frac{a_{ij}}{k^j}$,

a_{ij} – константа, значения которой даны в таблице

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
0	0.09979441	0.04431742	0.009694901	-0.0000918228	0.000579602
1	-0.58121	-0.2206018	-0.1408854	0.03789901	-0.02763334
2	1.390993	0.03317253	1.88993	-1.280346	0.4517029
3	-1.222452	5.679969	-12.75532	9.249528	-2.657967
4	2.151185	-12.96519	25.77532	-19.08115	5.127212

b_{ij} – константа, значения которой даны в таблице

$i \backslash j$	1	2	3	4	5
1	-5,537409	-5,166733	-4,233736	-2,777816	-0,5657187
2	11,42343	13,49862	14,3963	16,461132	21,83269

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

Если две независимые случайные величины $X = \chi_1^2$ и $Y = \chi_2^2$ распределены по закону Пирсона со степенями свободы, соответственно, k_1 и k_2 , то случайная величина $F = \frac{X \cdot k_2}{Y \cdot k_1}$ имеет распределение Фишера (F -распределение) со степенями свободы k_1 и k_2 .

Обозначение	$F(k_1, k_2)$
Параметры	k_1, k_2
Плотность вероятности	$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \cdot \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \cdot \frac{x^{\frac{k_1}{2} - 1}}{\left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1 + k_2}{2}}}, \quad x \geq 0$
Функция распределения	$F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)} \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}} \cdot \int_0^x y^{\frac{k_1}{2} - 1} (k_1 + k_2 y)^{\frac{k_1 + k_2}{2}} dy, \quad x \geq 0$
Среднее	$\frac{k_2}{k_2 - 2}, \quad k_2 > 2$
Дисперсия	$\frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}, \quad k_2 > 4$

Значение p -квантиля распределения Фишера со степенями свободы k_1 и k_2 можно найти с помощью аппроксимации Воглера-Нортон

$$F_p(k_1, k_2) = \left[\frac{(1-a)(1-b) + d\sqrt{a(1-b)^2 + b(1-a)^2 - c}}{(1-b)^2 - bd^2} \right]^3, \quad (\text{П4.1})$$

где $d = u_p^c$ – p -квантиль стандартного нормального распределения

(Приложение 1). $a = \frac{2}{9k_1}, \quad b = \frac{2}{9k_2}, \quad c = \frac{4d^2}{81k_1k_2}.$

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ШАПИРО-УИЛКА

<i>n</i>	<i>p</i> =0.99	<i>p</i> =0.98	<i>p</i> =0.95	<i>p</i> =0.90
3	0.737	0.756	0.767	0.789
4	0.687	0.707	0.748	0.792
5	0.686	0.715	0.762	0.806
6	0.713	0.743	0.788	0.826
7	0.730	0.760	0.803	0.838
8	0.749	0.778	0.818	0.851
9	0.764	0.791	0.829	0.859
10	0.781	0.806	0.842	0.869
11	0.792	0.817	0.850	0.876
12	0.805	0.828	0.859	0.883
13	0.814	0.837	0.866	0.889
14	0.825	0.846	0.874	0.895
15	0.835	0.855	0.881	0.901
16	0.844	0.863	0.887	0.906
17	0.851	0.869	0.892	0.910
18	0.858	0.874	0.897	0.914
19	0.863	0.879	0.901	0.917
20	0.868	0.884	0.905	0.920
21	0.873	0.888	0.908	0.923
22	0.878	0.892	0.911	0.926
23	0.881	0.895	0.914	0.928
24	0.884	0.889	0.916	0.930
25	0.888	0.901	0.918	0.931
26	0.891	0.904	0.920	0.933
27	0.894	0.906	0.923	0.935
28	0.896	0.908	0.924	0.936
29	0.898	0.910	0.926	0.937
30	0.900	0.912	0.927	0.939
31	0.902	0.914	0.929	0.940
32	0.904	0.915	0.930	0.941
33	0.906	0.917	0.931	0.942
34	0.908	0.919	0.933	0.943

35	0.910	0.920	0.934	0.944
36	0.912	0.922	0.935	0.945
37	0.914	0.924	0.936	0.946
38	0.916	0.925	0.938	0.947
39	0.917	0.927	0.939	0.948
40	0.919	0.928	0.940	0.949
41	0.920	0.929	0.941	0.950
42	0.922	0.930	0.942	0.951
43	0.923	0.932	0.943	0.951
44	0.924	0.933	0.944	0.952
45	0.926	0.934	0.945	0.953
46	0.927	0.935	0.945	0.953
47	0.928	0.936	0.946	0.954
48	0.929	0.937	0.947	0.954
49	0.929	0.937	0.947	0.955
50	0.930	0.938	0.947	0.955

Приложение 6

ТАБЛИЦЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

T1

X	10.0	13.5	17.0	20.5	24.0	27.5	31.0	34.5	38.0	41.5
	7.90	15.07	21.89	29.00	35.84	43.19	50.02	57.33	64.21	71.35
	8.09	14.84	22.41	28.89	35.54	42.86	49.94	57.03	64.14	71.37
	7.75	15.26	21.83	29.00	35.62	43.14	50.15	56.73	64.03	71.21
	7.79	15.18	22.08	28.98	35.53	43.05	50.03	57.00	64.03	71.46
	7.98	14.93	22.00	29.05	35.52	42.90	50.07	57.04	63.87	71.12
	7.93	14.89	22.04	28.94	35.59	42.98	50.24	56.79	63.95	71.36
	7.80	15.04	21.66	28.96	35.55	43.11	50.26	57.14	63.85	71.29
	7.97	15.04	21.86	28.70	35.67	42.74	49.91	57.03	64.05	71.45
	8.08	15.02	22.02	29.15	35.91	42.66	50.11	57.17	64.17	71.15
	8.08	15.00	22.03	29.16	35.73	42.92	49.87	57.01	63.92	71.55
Y	7.83	15.28	21.98	29.12	35.61	43.09	49.86	57.05	63.99	71.34
	8.38	15.09	22.13	28.82	35.61	42.99	50.00	56.80	63.81	71.21
	8.04	15.00	21.74	28.81	35.83	42.98	50.07	57.02	64.14	71.07
	7.92	15.11	21.95	28.84	35.84	43.18	50.05	57.22	63.92	71.10
	7.97	15.07	21.96	29.12	35.82	42.94	49.99	57.11	64.01	71.31
	8.16	15.09	21.96	28.87	35.81	43.10	50.04	56.96	64.10	71.33
	8.18	15.20	21.90	28.91	35.72	43.26	50.20	57.20	64.09	71.35
	7.83	14.93	22.21	29.05	35.41	42.95	49.81	57.30	63.93	71.36
	7.61	15.15	22.07	28.58	35.82	43.23	50.17	56.98	63.95	71.48
	7.98	14.94	22.14	29.01	35.73	43.01	50.06	57.27	63.82	71.37
	8.26	14.98	21.86	29.21	35.73	42.98	50.09	56.89	63.86	71.28

7.99	15.08	21.87	28.84	35.92	42.94	49.94	57.05	63.98	71.21
8.01	15.03	22.10	28.93	35.68	42.86	49.88	57.16	63.88	71.15
7.95	15.31	21.76	29.16	35.59	43.00	50.05	57.00	63.87	71.37
8.04	15.06	22.19	28.97	35.82	43.01	50.06	56.92	64.11	71.24
7.94	14.96	21.91	29.09	35.77	42.98	50.00	56.78	63.98	71.33
8.05	14.95	22.12	28.93	35.81	42.99	50.03	56.87	64.06	71.24
8.01	14.97	22.19	29.02	35.87	43.06	50.05	56.94	64.07	71.37
8.12	15.38	21.93	28.81	35.68	43.07	50.15	56.82	63.90	71.50
8.31	15.13	22.07	28.71	35.84	43.08	49.83	57.01	63.82	71.26
7.79	14.94	21.82	29.20	35.62	43.14	49.79	57.09	63.71	71.00
7.96	14.94	22.22	28.94	35.56	43.13	50.04	57.04	63.70	71.19
8.13	14.95	22.17	28.73	35.50	43.09	49.61	57.15	64.04	71.42
7.80	15.20	22.24	29.21	35.68	43.03	50.06	57.14	63.89	71.16
8.24	15.07	21.95	28.70	35.47	43.11	50.15	56.76	63.74	71.40
8.26	15.01	21.82	28.81	35.60	43.08	50.08	56.97	63.91	71.26
8.21	14.98	21.93	29.20	35.62	43.04	50.23	56.98	63.97	71.16
8.17	14.99	21.71	28.94	35.80	42.99	50.11	57.53	63.88	71.17
8.14	15.18	22.00	29.25	35.91	42.97	50.07	56.85	63.93	71.04
7.95	15.09	21.85	28.89	35.85	42.91	50.09	56.93	63.77	71.31

T2

X	2.00	3.25	4.50	5.75	7.00	8.25	9.50	10.75	12.00	13.25
Y	23.38	17.65	14.97	13.76	12.33	12.15	11.53	11.13	11.01	11.02
	23.44	17.88	14.92	13.96	12.59	12.16	11.52	11.08	11.10	11.25
	23.57	17.71	15.24	13.84	12.58	12.27	11.67	11.16	11.21	10.77
	23.32	17.88	15.32	13.76	12.42	12.21	11.83	11.37	10.97	11.07
	23.56	17.68	15.05	13.86	12.37	12.21	11.53	11.26	10.94	11.23
	23.44	17.68	15.20	13.82	12.58	12.29	11.79	11.12	11.25	10.85
	23.57	17.64	15.34	13.87	12.49	12.21	11.69	11.20	11.07	11.18
	23.42	17.89	15.15	13.34	12.53	12.18	11.79	11.70	11.00	11.16
	23.78	17.81	15.19	13.69	12.51	11.93	11.66	11.39	11.04	11.13
	23.36	17.79	15.19	13.68	12.48	12.15	11.95	11.25	11.02	11.09
	23.48	17.73	15.22	13.72	12.11	12.60	11.74	11.37	11.04	11.02
	23.46	17.78	15.05	13.68	12.40	12.06	11.81	11.22	11.01	11.10
	23.38	17.72	15.23	13.54	12.55	12.24	11.65	11.19	11.25	10.91
	23.62	17.85	15.31	13.33	12.49	12.15	11.47	11.13	10.99	11.02
	23.77	17.72	15.11	13.81	12.63	12.37	11.64	11.60	10.62	11.05
	23.50	17.96	14.93	13.81	12.55	12.30	11.65	10.96	11.25	11.00
	23.49	17.77	15.13	13.89	12.38	12.22	11.65	11.26	11.11	10.85
	23.57	17.86	15.10	13.70	12.40	12.04	11.65	11.26	11.13	10.96
	23.84	17.89	15.14	13.77	12.42	12.33	11.47	11.35	10.79	11.15
	23.28	17.79	15.04	13.81	12.48	12.23	11.53	11.34	11.10	11.07
	23.54	17.99	14.92	13.68	12.66	12.22	11.65	11.23	11.00	11.15
	23.43	17.48	15.28	13.81	12.68	12.09	11.45	11.11	10.76	10.88
	23.36	17.77	15.01	13.59	12.40	12.19	11.64	11.37	11.30	11.31
23.37	17.95	14.94	13.77	12.49	12.09	11.51	11.07	10.93	10.79	

23.52	17.93	14.85	13.63	12.40	12.20	11.71	10.91	10.93	11.11
23.69	17.73	15.23	13.88	12.62	12.07	11.70	11.25	11.07	11.17
23.60	17.63	15.29	13.53	12.63	12.02	11.54	11.39	10.85	11.07
23.56	17.66	15.27	13.96	12.76	12.24	11.73	11.06	11.12	11.13
23.25	17.87	15.11	13.76	12.44	12.13	11.53	11.37	10.81	11.25
23.52	17.58	15.11	13.46	12.50	12.14	11.40	11.10	10.86	11.14
23.61	17.77	15.04	13.65	12.75	12.12	11.77	11.17	11.07	11.08
23.60	17.73	15.05	13.73	12.31	12.12	11.66	11.37	10.94	10.97
23.69	17.92	15.11	13.65	12.56	12.48	11.61	11.47	11.03	10.96
23.32	18.01	15.05	13.77	12.32	12.02	11.52	11.44	11.14	11.25
23.47	17.94	15.20	13.55	12.37	12.51	12.06	11.18	11.14	10.65
23.56	17.71	15.07	13.49	12.51	11.91	11.66	11.13	10.90	11.20
23.32	17.84	15.00	13.75	12.36	12.35	11.44	11.18	11.19	11.06
23.76	17.82	15.24	13.74	12.56	12.50	11.93	11.37	11.05	11.06
23.28	18.07	14.99	14.02	12.26	12.26	11.32	11.01	11.10	11.05
23.90	17.73	15.08	13.81	12.36	12.28	11.58	11.25	10.90	11.21

T3

X	2.00	5.75	9.50	13.25	17.00	20.75	24.50	28.25	32.00	35.75
Y	7.40	34.09	46.31	54.78	60.41	65.85	69.98	73.52	75.78	80.34
	7.86	33.73	46.23	54.48	60.33	65.67	69.64	73.43	75.35	79.94
	7.73	34.25	46.38	54.66	60.48	65.88	69.98	73.51	77.05	78.88
	7.09	33.75	46.08	54.44	60.68	65.85	69.42	73.47	76.29	79.65
	7.63	33.95	46.44	54.41	60.61	66.32	69.55	73.46	77.30	80.22
	7.53	34.00	46.29	54.70	60.46	65.96	70.76	73.58	76.80	80.06
	7.54	33.93	46.15	54.28	60.25	66.15	69.43	73.37	75.39	80.14
	6.68	33.69	46.16	54.72	60.50	66.34	68.68	73.62	76.06	80.51
	7.11	33.51	46.24	54.52	60.53	64.78	69.95	73.48	77.06	79.63
	7.52	33.69	46.32	54.67	60.48	65.88	70.57	73.54	75.52	80.30
	7.30	33.81	46.11	54.95	60.39	66.12	70.20	73.85	76.49	79.12
	7.90	33.84	46.14	54.89	60.50	66.73	70.46	73.71	75.95	80.62
	7.09	33.69	46.13	54.59	60.29	65.79	70.54	73.42	77.27	79.82
	7.14	33.95	46.14	54.87	60.34	65.05	68.63	73.52	76.87	80.42
	7.48	33.53	46.11	54.49	60.63	65.83	69.13	73.33	76.65	79.81
	7.01	34.09	46.18	54.51	60.43	65.44	69.07	73.38	78.50	79.29
	7.83	33.96	46.25	54.88	60.59	65.89	71.32	73.72	76.85	79.25
	7.61	34.01	46.00	54.94	60.52	65.26	70.28	73.66	75.76	79.67
	7.35	33.80	46.15	54.61	60.49	66.48	69.53	73.70	75.13	79.60
	7.81	33.84	46.22	54.51	60.26	65.72	69.86	73.35	75.61	79.21
7.22	33.95	46.10	54.72	60.49	67.31	70.83	73.41	76.75	79.40	
7.27	33.96	46.29	54.30	60.78	66.21	68.59	73.56	75.48	80.36	
6.17	33.72	46.02	54.78	60.48	65.28	70.71	73.64	76.91	80.20	
7.53	33.94	46.18	54.92	60.64	65.68	70.14	73.64	76.36	79.86	

	7.10	33.15	46.47	54.09	60.79	66.00	69.48	73.68	75.97	79.43
	7.12	33.43	46.29	54.65	60.25	66.25	69.46	73.68	77.86	79.66
	8.11	33.93	46.34	54.69	60.63	66.61	69.27	73.49	76.43	80.27
	7.48	33.84	46.48	54.54	60.35	65.90	70.26	73.44	76.37	79.28
	6.84	33.89	46.33	54.97	60.48	65.79	69.41	73.49	76.55	80.22
	7.29	33.00	46.17	54.39	60.41	66.59	69.90	73.36	75.73	79.52
	7.33	34.03	46.16	55.00	60.57	64.92	70.28	73.79	75.26	79.24
	7.28	34.22	46.32	54.50	60.51	65.84	70.25	73.58	76.24	78.98
	8.10	33.84	46.11	54.58	60.57	65.50	70.37	73.51	76.47	80.33
	7.12	33.62	46.20	54.25	60.50	66.25	70.30	73.88	77.06	78.93
	7.26	33.45	46.23	54.01	60.52	64.91	70.93	73.59	76.05	79.33
	7.09	33.79	46.29	54.31	60.58	65.91	70.71	73.48	76.37	79.57
	7.34	33.66	46.37	54.42	60.53	65.73	70.68	73.02	76.58	80.15
	7.55	33.95	46.10	54.67	60.43	66.06	71.63	73.53	77.20	79.58
	6.89	33.58	46.25	54.90	60.64	65.64	70.31	73.73	76.80	79.78
	7.29	33.56	46.18	54.47	60.55	66.00	68.82	73.45	76.08	79.36

T4

X	1.0	2.5	4.0	5.5	7.0	8.5	10.0	11.5	13.0	14.5
Y	5.52	6.74	8.34	11.10	14.31	21.22	25.57	31.57	39.55	47.94
	5.60	6.20	8.22	10.99	14.45	20.14	24.75	31.34	39.40	47.52
	5.89	6.62	7.94	10.91	14.53	19.48	26.04	31.63	39.94	47.47
	5.84	6.30	8.04	11.17	14.64	19.40	24.97	31.80	37.26	47.77
	5.22	6.35	7.95	10.76	14.41	19.99	25.08	31.64	39.60	47.15
	5.34	6.34	8.09	11.14	14.53	19.26	23.54	31.85	38.07	47.31
	4.58	6.40	8.08	11.04	14.25	19.30	24.62	31.88	38.18	47.04
	6.10	6.46	8.24	10.44	14.57	20.02	25.19	31.73	39.40	47.94
	5.34	6.83	8.18	10.67	14.37	20.17	24.96	31.50	39.04	47.43
	4.87	6.14	8.07	10.83	14.21	19.42	25.21	31.81	39.65	47.03
	5.62	6.31	8.21	10.85	14.53	19.81	25.36	31.82	37.91	47.38
	4.61	6.38	8.32	10.88	14.48	20.32	26.15	31.62	38.66	47.69
	4.51	6.49	7.91	11.16	14.41	19.68	24.59	31.59	39.29	47.68
	4.66	6.69	8.41	11.03	14.83	19.41	25.24	31.63	37.66	47.20
	5.37	6.30	7.88	10.48	14.66	19.87	23.59	31.86	38.40	47.37
	5.19	6.37	8.26	11.39	14.26	20.43	25.28	31.91	39.28	47.34
	5.72	6.75	8.40	11.03	14.44	19.89	24.90	31.94	38.44	46.47
	5.35	6.30	8.04	10.77	14.25	20.52	26.52	31.74	38.21	47.19
	4.94	6.37	8.04	10.99	14.00	19.31	24.40	31.70	38.67	47.17
	5.43	6.30	8.06	10.90	14.55	19.60	25.23	31.62	38.61	47.40
5.28	6.47	8.28	10.96	14.67	19.38	26.26	31.82	37.73	46.83	
5.47	6.44	8.23	10.94	14.62	18.88	23.89	31.58	38.79	47.28	
5.64	6.37	8.28	10.68	14.51	19.95	25.16	31.93	38.84	47.24	
5.10	6.04	8.06	11.33	14.49	20.20	27.32	31.54	39.82	47.64	

	5.31	6.38	8.13	10.55	14.28	18.75	25.35	31.75	37.91	46.86
	5.44	6.52	7.92	11.17	14.35	19.58	24.96	31.81	37.99	47.00
	5.06	6.97	7.99	11.23	14.51	20.03	24.61	31.78	38.97	47.15
	5.19	6.50	8.17	11.02	14.49	19.49	24.45	32.00	39.36	47.96
	5.15	6.49	8.29	11.02	14.42	19.61	26.15	31.53	40.88	47.31
	6.02	6.63	8.35	10.50	14.57	19.43	25.99	31.77	39.49	47.20
	5.11	6.95	8.07	10.81	14.30	18.90	25.37	31.88	39.65	46.65
	5.26	6.92	8.17	10.81	14.66	19.43	25.68	31.61	38.07	47.48
	5.60	6.78	8.15	11.06	14.50	19.60	24.74	31.55	38.90	47.05
	5.23	6.38	8.05	11.06	14.53	20.82	24.16	31.73	37.69	47.11
	5.21	6.58	7.98	11.04	14.29	20.36	23.45	31.78	38.47	46.93
	5.39	6.04	8.31	11.01	14.26	19.43	25.57	32.02	37.66	47.54
	5.68	6.47	8.40	11.34	14.36	18.98	25.01	32.00	39.33	47.70
	5.02	6.36	8.17	10.85	14.17	19.31	25.54	31.56	38.03	46.97
	5.23	5.91	8.26	11.12	14.67	18.77	24.26	31.51	39.06	46.93
	5.34	6.67	8.08	11.50	14.42	20.32	25.12	31.71	39.52	47.48

T5

X	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Y	22.97	27.95	32.74	38.37	42.65	47.59	53.34	57.91	62.40	69.27
	23.26	27.84	33.03	38.00	42.71	47.71	52.32	58.09	63.28	68.12
	23.17	27.85	32.81	37.77	42.87	47.64	52.88	58.13	62.86	68.53
	23.26	28.46	33.11	38.50	42.59	48.81	53.38	58.15	62.66	68.26
	23.21	28.52	32.97	38.23	43.03	48.63	52.69	58.09	62.79	68.54
	22.57	27.98	33.22	38.16	42.44	47.76	53.31	58.09	62.42	67.98
	23.23	27.62	32.87	38.25	42.51	49.02	52.32	58.14	63.91	67.81
	22.53	27.75	32.83	37.82	42.76	48.15	51.82	57.91	62.02	69.14
	22.90	27.98	32.98	38.51	42.57	48.74	52.79	58.04	63.40	68.44
	22.83	28.04	33.00	38.37	42.88	47.73	52.47	58.26	63.41	68.35
	22.92	28.10	32.98	37.84	42.86	47.30	52.70	57.83	63.58	68.32
	22.76	28.28	32.93	37.92	42.81	48.74	53.05	58.17	62.66	67.75
	23.37	27.80	32.75	38.17	42.77	48.43	52.35	58.33	63.67	67.79
	22.62	28.03	33.09	38.15	42.53	49.06	54.05	57.97	62.64	67.63
	23.23	27.76	32.95	38.09	42.63	47.78	53.29	57.91	63.03	69.56
	22.77	27.89	32.91	38.02	42.78	47.29	53.57	57.83	64.23	68.54
	23.05	27.34	33.04	37.88	42.58	47.55	53.76	57.86	62.47	68.06
	22.71	27.91	33.05	37.73	42.53	47.49	52.30	58.00	64.48	68.14
	23.24	27.76	32.70	37.90	42.75	48.22	52.16	58.24	62.48	68.99
	22.60	28.31	32.96	37.61	42.70	47.79	53.55	58.14	62.93	68.44
22.68	28.22	33.09	37.71	42.92	48.63	52.15	57.57	63.06	67.47	
23.05	27.46	32.91	37.99	42.64	47.83	54.90	57.82	62.75	68.12	
22.75	27.95	33.00	37.95	42.68	49.41	52.32	57.76	62.40	68.25	
23.13	27.68	33.03	38.05	42.69	48.36	52.80	58.43	62.49	68.15	

22.16	27.97	33.06	38.23	42.68	48.01	53.73	58.06	62.52	67.74
23.46	27.98	33.09	37.77	42.76	47.79	52.21	58.15	63.49	68.55
23.04	28.01	32.92	38.14	42.67	47.64	53.56	57.84	62.17	68.76
22.66	28.15	32.83	37.80	42.63	48.65	52.59	57.83	63.14	68.08
22.74	28.39	33.21	38.20	42.59	48.90	54.41	58.06	62.85	68.99
23.25	28.01	32.90	37.38	42.67	48.27	53.25	58.17	62.94	68.62
23.05	28.02	32.87	38.02	42.60	47.03	52.94	57.89	62.22	68.35
22.85	27.90	32.97	37.90	42.58	46.35	52.44	57.79	61.88	68.61
22.79	28.29	32.83	38.41	42.75	46.93	54.64	57.88	63.84	68.63
23.75	27.82	32.93	37.61	42.58	48.55	52.88	57.76	63.93	68.17
23.45	28.11	32.94	38.09	42.81	48.21	54.51	58.34	62.74	68.54
23.03	27.93	32.63	37.94	42.33	48.41	54.26	58.04	63.38	68.03
22.57	28.20	33.11	38.02	42.71	48.32	54.31	57.92	63.11	67.48
23.29	27.49	33.09	38.24	42.93	48.76	53.06	57.71	63.09	68.01
22.58	27.90	33.28	37.73	42.52	47.16	53.47	58.10	62.63	67.89
23.21	27.62	32.91	37.83	42.68	48.26	52.43	58.00	62.94	67.84

T6

X	0.10	0.25	0.40	0.55	0.70	0.85	1.00	1.15	1.30	1.45
Y	9.86	3.93	2.42	1.93	1.36	1.03	1.20	1.02	0.83	0.79
	9.99	4.13	2.61	1.80	1.51	1.33	0.86	0.92	0.73	0.58
	9.77	4.15	2.44	1.73	1.54	1.25	0.90	0.88	0.82	0.54
	10.20	4.19	2.38	1.80	1.25	1.05	0.87	1.05	0.84	0.52
	9.94	3.88	2.49	1.86	1.47	1.20	1.06	0.60	0.70	0.73
	9.76	3.91	2.27	1.74	1.37	1.13	1.23	0.96	0.71	0.67
	9.98	4.14	2.40	1.77	1.13	1.16	1.08	0.80	0.67	0.71
	9.81	4.05	2.33	1.83	1.20	1.35	1.05	1.01	0.72	0.63
	10.01	4.07	2.49	2.25	1.58	1.39	1.14	1.30	0.84	0.85
	10.28	4.11	2.36	1.58	1.56	1.23	1.12	1.28	0.90	0.71
	9.95	3.93	2.64	1.74	1.25	1.20	1.09	0.69	0.93	0.73
	9.97	4.26	2.41	1.79	1.47	1.38	0.93	1.09	0.78	0.67
	10.22	3.92	2.67	1.67	1.50	1.15	0.79	1.03	0.72	0.62
	9.93	4.17	2.52	1.62	1.04	1.19	0.97	1.16	0.85	0.82
	9.85	4.10	2.41	1.69	1.46	1.41	1.08	1.13	0.60	0.41
	10.14	3.90	2.66	2.00	1.61	1.44	0.88	0.89	0.71	0.43
	10.03	4.00	2.23	1.78	1.52	1.31	0.87	1.06	0.78	0.83
	9.95	4.24	2.54	1.59	1.39	1.11	1.08	0.74	1.07	0.52
	10.45	4.31	2.48	1.68	1.56	0.98	1.26	0.99	0.63	0.63
	9.82	3.90	2.62	1.87	1.67	0.98	1.21	0.94	0.69	0.80
	9.93	4.28	2.35	2.10	1.54	1.29	1.14	1.00	0.65	0.72
	10.09	3.91	2.40	1.59	1.65	1.05	1.07	1.20	0.95	0.65
10.06	3.90	2.65	1.78	1.54	1.51	1.03	0.85	0.75	0.65	
10.00	4.22	2.59	1.78	1.33	1.33	0.98	0.83	0.95	0.77	

	9.85	4.27	2.44	1.98	1.47	1.34	0.63	1.11	0.62	0.81
	9.80	4.11	2.46	1.61	1.20	1.04	0.95	0.80	0.70	0.67
	9.95	4.18	2.70	1.58	1.22	1.22	1.30	0.89	0.97	0.64
	10.12	4.03	2.51	1.91	1.09	1.05	1.44	0.51	1.08	0.67
	10.08	3.99	2.61	1.83	1.40	1.07	0.93	0.81	0.79	0.70
	9.94	3.69	2.32	1.78	1.23	1.30	0.86	0.72	0.98	0.68
	10.10	4.15	2.70	2.01	1.55	1.28	0.96	0.74	0.88	0.83
	9.90	4.06	2.48	1.95	1.21	1.26	0.91	1.29	0.55	0.80
	10.15	3.99	2.18	2.02	1.45	1.16	0.89	0.80	0.60	0.75
	10.15	4.15	2.50	1.83	1.03	1.33	1.01	1.04	0.77	0.59
	9.91	4.14	2.50	1.43	1.21	1.39	1.16	0.74	0.82	0.32
	9.95	3.96	2.57	1.85	1.52	0.92	0.89	0.60	0.81	0.69
	9.98	4.31	2.37	1.78	1.28	1.22	0.99	0.70	0.74	0.60
	9.87	4.02	2.16	1.80	1.46	1.02	1.02	1.16	0.93	0.60
	10.14	4.05	2.40	1.69	1.47	1.09	0.84	0.87	0.65	0.60
	10.12	4.17	2.52	1.81	1.27	1.21	0.59	0.81	0.95	0.76

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие и сущность статистических гипотез
2. Функция потерь и критерий качества выбора решения
3. Проверка простой гипотезы против простой альтернативы. Вероятности правильных и ошибочных решений.
4. Критерии принятия решений.
5. Байесовское решение
6. Максимальное правдоподобие
7. Критерий Неймана-Пирсона
8. Минимаксное правило
9. Проверка гипотез для нормального распределения
10. Гипотеза о неизвестной дисперсии σ^2
11. Сравнение средних нормального распределения
12. Критерий Кохрана-Кокса
13. Проверка гипотез о равенстве средних для $k > 2$ выборок
14. Сравнение дисперсий нормального распределения
15. Критерий Фишера
16. Критерий Романовского
17. Проверка гипотез о равенстве дисперсий для $k > 2$ выборок
18. Общие критерии согласия
19. Критерий хи-квадрат Пирсона
20. Критерий хи-квадрат Фишера
21. Критерий согласия Колмогорова- Смирнова
22. Частные критерии согласия
23. Критерии проверки экспоненциальности распределения
24. Критерии проверки равномерности распределения
25. Критерии симметрии
26. Критерии однородности
27. Подбор кривых распределения вероятностей по экспериментальным данным

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии были приведены основы математической статистики и теории вероятности. Рассматривались методы определения статистических характеристик и эмпирических величин. Используемый математический аппарат в большинстве своём известен магистрантам и аспирантам из пройденных ими ранее дисциплин бакалавриата и магистратуры. Важнейшая задача изложения материала в пособии – научить студентов выбирать математический аппарат, адекватный решаемой ими научно-технической задаче. На приведённых многочисленных примерах показано, как работает этот аппарат при решении конкретных задач, а также представлено, как объективно выбрать количество необходимых измерений параметров радиотехнических устройств и систем и определить объем испытаний.

Издание может быть использовано аспирантами и магистрантами других технических направлений обучения, в работах которых необходимо определить статистические характеристики экспериментально исследуемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9. – М.: ИТ Пресс, 2006.
2. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
3. Белашов В.Ю., Чернова Н.М. Эффективные алгоритмы и программы вычислительной математики. – Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997.
4. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. – СПб: Питер, 2001.
5. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. – М.: Мир, 1980.
6. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 1986.
7. Дьяконов В, Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001.
8. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
9. Крянев А.В, Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
10. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
11. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1988.
12. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. – М.: Издательство стандартов, 1991.
13. Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

14. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т: Пер. с англ. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989.

15. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М.: Мир, 1985.

16. Третьяк Л.Н. Обработка результатов наблюдений: Учебное пособие. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004.

17. Штефан И.А. Математические методы обработки экспериментальных данных: Учеб. пособие/ И.А. Штефан, В.В. Штефан. – ГУ КузГТУ. – Кемерово, 2003.

Учебное издание

НИКИТИН Олег Рафаилович
КОРНЕЕВА Наталья Николаевна

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ
РАДИОСИГНАЛОВ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 19.03.20.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 13,25. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.