Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра автомобильных дорог

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ ОТЫСКАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ДОРОЖНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Методические указания к лабораторной работе

Составитель
Э.Ф. СЕМЕХИН

Владимир 2003

УДК 625.7

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
Владимирского государственного университета
А.В. Вихрев

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Применение линейного программирования при отыскании оптимальных решений в дорожном строительстве: Метод. указания к лабораторным работам / Владим. гос. ун-т; Сост. Э.Ф. Семехин. Владимир, 2003. 16 с.

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой лабораторных занятий по курсу «Экономико-математические методы».

Предназначены для студентов специальности 291000 – автомобильные дороги и аэродромы всех форм обучения.

Табл. 10. Библиогр.: 2 назв.

УДК 625.7

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Цель работы

Научить студентов практически использовать метод линейного программирования в дорожном строительстве.

Введение

Метод линейного программирования используется для решения задач по оптимизации перевозок дорожно-строительных материалов из притрассовых карьеров на участки строящихся автомобильных дорог минимальным количеством транспортных средств. Он позволяет повысить эффективность использования автомобильного транспорта путем сокращения простоев, порожних пробегов, увеличения коэффициента внутрисменного использования автомобилей.

Для решения этой проблемы наиболее подходит транспортная задача линейного программирования.

Постановка задачи

Рассмотрим решение транспортной задачи на примере, исходные данные для которого приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Данные для расчета транспортной задачи

Карьеры	Объекты работы				Запасы, тыс. т a_i
	1-й	2-й	3-й	4-й	
1-й	$c_1 = 10$ $x_{11} = ?$	$c_{12} = 5$ $x_{12} = ?$	$c_{13} = 6$ $x_{13} = ?$	$c_{14} = 7$ $x_{14} = ?$	$a_1 = 25$
2-й	$c_{21} = 8$ $x_{21} = ?$	$c_{22} = 2$ $x_{22} = ?$	$c_{23} = 7$ $x_{23} = ?$	$c_{24} = 6$ $x_{24} = ?$	$a_2 = 25$
3-й	$c_{31} = 9$ $x_{31} = ?$	$c_{32} = 3$ $x_{32} = ?$	$c_{33} = 4$ $x_{33} = ?$	$c_{34} = 8$ $x_{34} = ?$	$a_3 = 50$
Потребность, тыс. т b_j	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

В табл. 1 использованы следующие обозначения:

- величина c_{ij} выражает стоимость перевозок 1 тыс. т. дорожно-строительных материалов из карьера i на участок работ j в рублях;

- x_{ij} – количество ДСМ, перевозимое из i-го карьера на j-й объект, которое надо определить при минимальных затратах на перевозки;

- a_i – запасы материалов в карьере номер i (i=1,2,3...m);

- b_j – потребность строящейся дороги номер j (j=1,2,3...n).

Матрица исходных данных должна удовлетворять следующему условию [1; 2]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{1}$$

Матрица итоговых данных должна удовлетворять следующим условиям [1; 2]:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le a_i , \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le b_i , \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} = \min L , \tag{5}$$

где L – целевая функция.

Необходимо разработать план перевозок так, чтобы стоимость всего объема перевозок была минимальной.

Решение поставленной задачи осуществляют в 2 этапа:

1. Построение опорного плана перевозок;
2. Оптимизация опорного плана.

Построение опорного плана

Существуют три метода отыскания опорных планов:

1) метод «северо-западного угла»;
2) метод «минимума по строке»;
3) правило «минимального элемента».

1) *Метод «северо-западного угла»* состоит в том, что в верхнем левом, северо-западном углу (табл. 1) искомое значение x_{11} примем равным меньшей из величин a_1 и b_1 , т.е. x_{11}=min a_1; b_1). Принимаем x_{11}= b_1=15 и то-

гда x_{21}=0; x_{31}=0, так как вся потребность на 1 объект удовлетворена из 1 карьера (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

$x_{11} = b_1 = 15$	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$a_1 = b_1 = 10$
$x_{21} = 0$	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$a_2 = 25$
$x_{31} = 0$	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$a_3 = 50$
$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

На 2-м шаге в северо-западном углу оказывается уже неизвестная величина x_{12}, которая также назначается из условия:

$x_{12} = \min\,(a_1 – b_1 : b_2)$. Примем $x_{12} = a_1 – b_1 = 10$ (табл. 3).

Т а б л и ц а 3

$x_{11} = b_1 = 15$	$x_{12} = a_1 – b_1 = 10$	0	0	$a_1 = 25 – 15 – 10 = 0$
0	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$a_2 = 25$
0	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$a_3 = 50$
15	$b_2 = 20 – 10 = 10$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

Далее $x_{22} = \min[a_2;\ (b_2 – (a_1 – b_1)]$; откуда $x_{22} = b_2 – (a_1 – b_1) = 10$. Последовательно выполняя эти операции, получим исходный опорный план (табл. 4).

Т а б л и ц а 4

15	10	0	0	$a_1 = 25$
0	10	15	0	$a_2 = 25$
0	0	15	35	$a_3 = 50$
$b_1 = 20$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

Теперь необходимо проверить, удовлетворяет ли матрица опорного плана приведенным условиям (2, 3, 4, 5), и определить целевую функцию для данного плана:

$L = \Sigma c_{ij}\, x_{ij} = 10 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 8 \cdot 35 = 665$ руб.

2) *Метод «минимума по строке»* состоит в том, что в первой строке табл. 1 найдем минимальное значение c_{ij} , а именно $c_{12} = 5$. Как в методе северо-западного угла, следует принять $x_{12} = \min(a_1;\ b_2)$, т.е. $x_{12} = b_2 = 20$. При этом x_{22}=0; x_{32}=0 (табл. 5).

Т а б л и ц а 5

x_{11}	$x_{12} = b_2 = 20$	x_{13}	x_{14}	$a_{1} - в_2 = 5$
x_{21}	$x_{22} = 0$	x_{23}	x_{24}	$a_3 = 25$
x_{31}	$x_{32} = 0$	x_{33}	x_{34}	$a_4 = 50$
$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

В первой строке табл. 1 наименьшей после c_{12} стоимостной характеристикой перевозки является c_{13}=6. На 2-м шаге примем x_{13}= min [($a_1 - b_1$); b_3]. Тогда $x_{13} = a_1 - b_2 = 5$. При этом $x_{11} = 0$; $x_{14} = 0$, так как из карьера 1 уже выбран весь имевшийся в нем запас материала. Затем переходим ко второй строке табл. 1 и т.д. В результате получим исходный опорный план (табл. 6).

Т а б л и ц а 6

0	2	5	0	$a_1 = 25$
0	0	25	0	$a_2 = 25$
15	0	0	35	$a_3 = 50$
$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

Целевая функция:

L=5·20+ 6·5 + 7·25 + 9·15 + 8·35 = 720 руб.

3) *Правило «минимального элемента»* применяется так. В табл.1 найдем минимальное значение c_{ij}, а именно $c_{22} = 2$. Принимаем $x_{22} = \min(a_2; b_2)$, т.е. $x_{22} = b_2 = 20$. При этом $x_{12} = 0$; $x_{32} = 0$.

Затем находим в матрице (табл. 1) наименьшую стоимость после c_{22}; $c_{32} = 3$, но так как $x_{32} = 0$, то следующее меньшее значение $c_{33} = 4$. Принимаем $x_{33} = \min(a_3; b_3)$, т.е. $x_{33} = b_3 = 30$. При этом $x_{13} = 0$; $x_{23} = 0$. Выполняем последовательно все операции и получаем найденный опорный план.

Т а б л и ц а 7

0	0	0	25	$a_1 = 25$
0	20	0	5	$a_2 = 25$
15	0	30	5	$a_3 = 50$
$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

Целевая функция:

$L = 7 \cdot 25 + 2 \cdot 20 + 6 \cdot 5 + 9 \cdot 15 + 4 \cdot 30 + 8 \cdot 5 = 540$ руб.

Наконец, сравниваем значения целевых функций для трех планов и выбираем для оптимизации тот, который имеет меньшее значение целевой функции. В данном примере выбираем опорный план, построенный по правилу «минимального элемента» (табл. 7).

Оптимизация опорного плана методом потенциалов

Метод потенциалов состоит из двух этапов.

На *первом этапе* проверим, является ли опорный план (табл. 7) оптимальным. Составим для него систему из уравнений следующего вида:

$$U_i + V_j = c_{ij}. \qquad (6)$$

Число уравнений должно быть:

$$m + n - 1 = 6, \qquad (7)$$

где m – число строк, $m = 3$; n – число столбцов, $n = 4$.

В том случае, если число уравнений меньше, чем рассчитанное по выражению (7), необходимо искусственно загрузить недостающее количество клеток матрицы, для чего в них записывают нуль и в дальнейшем с ними оперируют, как с загруженными.

Постановка нуля не влияет на баланс наличия груза и потребности в нем. Нуль следует ставить в ту клетку, которая лежит на пересечении строки или столбца, не имеющих потенциала, со строкой или столбцом, для которых потенциалы уже определены.

Уравнения составляются для значений x_{ij}, входящих в опорный план, т.е. для x_{14}; x_{22}; x_{24}; x_{31}; x_{33}; x_{34}.

$U_1 + V_4 = 7$; $U_2 + V_2 = 2$; $U_2 + V_4 = 6$;

$U_3 + V_1 = 9$; $U_3 + V_3 = 4$; $U_3 + V_4 = 8$.

В данной системе из 6 уравнений 7 неизвестных, поэтому принимаем равным нулю коэффициент U_i или V_j, который соответствует строке или столбцу с наибольшим количеством заполненных элементов x_{ij}.

Принимаем $U_3 = 0$ или $V_4 = 0$ и решаем систему уравнений. Получаем:

$U_1 = -1$; $U_2 = -2$; $U_3 = 0$; $V_1 = 9$; $V_2 = 4$; $V_3 = 4$; $V_4 = 8$.

Таблица 8

U_i	V_i			
	$V_1 = 9$	$V_2 = 4$	$V_3 = 4$	$V_4 = 8$
$U_1 = -1$	$\overline{c}_{11} = 8$	$\overline{c}_{12} = 3$	$\overline{c}_{13} = 3$	$\overline{c}_{14} = 7$
$U_2 = -2$	$\overline{c}_{21} = 7$	$\overline{c}_{22} = 2$	$\overline{c}_{23} = 2$	$\overline{c}_{24} = 6$
$U_3 = 0$	$\overline{c}_{31} = 9$	$\overline{c}_{11} = 4$	$\overline{c}_{33} = 4$	$\overline{c}_{34} = 8$

Значения $\overline{c}_{ij}$, подсчитанные в таблице 8, сравниваются со значениями c_{ij}, приведенные в табл. 1. Для того чтобы план был оптимальным, необходимо, чтобы удовлетворялось условие:

$$\overline{c}_{ij} - c_{ij} \le 0\ . \qquad (8)$$

Вычисляем разности $\overline{c}_{ij} - c_{ij}$ для x_{ij}, не входящих в опорный план: для $x_{11} = -2$; $x_{12} = -2$; $x_{13} = -3$; $x_{21} = -1$; $x_{23} = -5$; $x_{32} = +1$;

Таким образом, $\overline{c}_{32} - c_{32} > 0$, условие (8) не выполняется и опорный план не является оптимальным.

Второй этап состоит в улучшении плана. Выбираем ту переменную x_{ij}, для которой $c_{ij} - c_{ij} > 0$, в нашем примере это x_{32}. Если таких переменных несколько, то выбираем ту, для которой стоимость перевозок c_{ij} имеет меньшее значение.

Для этой клетки строят так называемый контур – замкнутую линию, состоящую из прямых горизонтальных и вертикальных отрезков, все вершины которой лежат в загруженных клетках.

Каждой клетке может соответствовать только один контур, который строят следующим образом. От выбранной клетки проводят линию по строке или столбцу до загруженной клетки, которой, в свою очередь, должна соответствовать еще одна загруженная клетка под прямым углом. И так до тех пор, пока контур не замкнется в исходной точке. Движение от точки к точке совершается под прямым углом, причем в каждой строке или столбце, которые находятся в замкнутой линии, в состав контура входят всегда по 2 клетки. Вид контуров может быть весьма разнообразным.

Следует иметь в виду, что число вершин контура всегда будет четным. При этом клетки, где горизонтальные и вертикальные линии пересекаются, нельзя рассматривать как его вершины. Вершиной считается лишь та загруженная клетка, где эти линии образуют прямой угол. В табл. 9 построен контур для клетки a_3b_2.

Затем всем вершинам контура попеременно присваиваются знаки «–» и «+», начиная с выбранной для начала построения контура клетки, которой присваивают знак «–».

Т а б л и ц а 9

0	0	0	25	$a_1 = 25$
0	20 +	0	5 –	$a_2 = 25$
15	0 –	30	5 +	$a_3 = 50$

$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 30$	$b_4 = 35$	

Теперь из всех клеток, обозначенных знаком «+», выбирают наименьшую цифру загрузки. В табл. 9 это загрузка 5 в клетке a_2b_4. Эту величину отнимают от загрузки, указанной в клетках со знаком «+», и прибавляют к загрузке в клетках со знаком «–».

Полученное распределение загрузки записывают в новую матрицу, куда также переносят, не изменяя, загрузки тех клеток, которые не являлись вершинами контура. Результаты этих действий приведены в табл. 10. Таким образом получаем новый опорный план.

Исследуем данный план на оптимальность, для чего составим систему уравнений (6):

$U_1 + V_4 = 7$; $U_2 + V_2 = 2$; $U_2 + V_4 = 6$;

$U_3 + V_1 = 9$; $U_3 + V_2 = 3$; $U_3 + V_3 = 4$;

Отсюда $U_1 = 0$; $U_2 = -1$; $U_3 = 0$; $V_1 = 9$; $V_2 = 3$; $V_3 = 4$; $V_4 = 7$.

Т а б л и ц а 10

U_i	V_i			
	$V_1 = 9$	$V_2 = 3$	$V_3 = 4$	$V_4 = 7$
$U_1 = 0$	9	3	4	7
$U_2 = -1$	8	2	3	6
$U_3 = 0$	9	3	4	7

Вычисляем разности $\overline{c_{ij}} - c_{ij}$: для $x_{11} = -1$; $x_{12} = -2$; $x_{13} = -2$; $x_{21} = 0$; $x_{23} = -4$; $x_{34} = -1$;

Итак, условие (8) выполняется, и полученный план перевозок является оптимальным.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Вариант № 1

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	

1-й	1,6	3,0	2,7	0,8	2500
2-й	2,6	1,4	3,0	2,0	1600
3-й	1,1	2,2	2,5	1,8	4200
Потребность, т	1800	2600	1700	2200	

Вариант № 2

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	2,6	1,7	3,1	1,9	260
2-й	1,6	0,4	2,1	5,6	140
3-й	2,1	0,9	4,0	2,2	370
Потребность, т	130	170	260	210	

Вариант № 3

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	17,6	9,7	10,9	14,5	120
2-й	16,1	12,4	15,1	9,4	170
3-й	17,1	6,2	18,1	10,4	195
Потребность, т	115	110	160	100	

Вариант № 4

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	0,86	0,42	0,12	0,52	265
2-й	0,14	0,68	0,38	0,27	495
3-й	0,24	0,22	0,41	0,39	385
Потребность, т	240	310	180	415	

Вариант № 5

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	1,24	4,12	0,96	0,76	146
2-й	2,10	2,32	0,52	1,12	212
3-й	0,68	1,16	0,91	0,88	184
Потребность, т	118	162	141	121	

Вариант № 6

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	2,16	3,12	0,86	0,46	46
2-й	1,10	1,32	0,52	1,12	112
3-й	0,88	1,16	0,91	0,88	84
Потребность, т	102	84	22	34	

Вариант № 7

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	0,24	0,12	1,06	0,18	126
2-й	0,14	0,08	0,17	0,22	192
3-й	0,31	0,16	0,24	0,09	164
Потребность, т	103	147	126	106	

Вариант № 8

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	9,7	10,9	17,6	14,5	246
2-й	12,4	15,1	16,1	9,4	312
3-й	18,1	17,1	6,2	10,4	394
Потребность, т	128	262	241	221	

Вариант № 9

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	12	3	4	10	60
2-й	20	2	8	15	80
3-й	21	25	5	9	50
Потребность, т	25	55	90	20	

Вариант № 10

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	0,45	0,10	0,20	0,60	7
2-й	0,99	0,45	0,30	0,59	10
3-й	0,60	0,20	0,61	0,80	9
Потребность, т	4	4	8	10	

Вариант № 11

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	7	10	12	20	125
2-й	6	4	5	10	200
3-й	8	4	3	2	135
Потребность, т	150	35	150	125	

Вариант № 12

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	12	8	4	20	44
2-й	6	15	21	11	53
3-й	4	18	17	14	53
Потребность, т	22	41	42	45	

Вариант № 13

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	6	4	5	10	25
2-й	8	4	3	2	100
3-й	7	10	12	20	35
Потребность, т	50	35	50	25	

Вариант № 14

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	5	14	2	13	20
2-й	18	3	16	18	100
3-й	11	17	10	4	70
Потребность, т	30	40	70	50	

Вариант № 15

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	16	12	14	9	1200
2-й	12	10	5	16	1600
3-й	18	3	8	12	4200
Потребность, т	1600	2200	2100	1100	

Вариант № 16

Карьеры	Объекты	Запасы, т

	1	2	3	4	
1-й	8,1	6,2	7,0	4,5	700
2-й	6,1	5,2	2,5	8,3	800
3-й	9,4	1,6	4,3	6,2	1600
Потребность, т	650	720	970	760	

Вариант № 17

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	7,7	2,8	3,1	5,2	260
2-й	10,1	8,1	4,2	8,8	150
3-й	8,6	12,1	5,7	3,2	250
Потребность, т	150	120	130	260	

Вариант № 18

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	0,18	0,16	0,07	0,05	170
2-й	0,06	0,05	0,03	0,08	260
3-й	0,09	0,16	0,05	0,14	300
Потребность, т	250	240	210	90	

Вариант № 19

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	16	9	11	12	1400
2-й	9	7	5	13	800
3-й	14	8	7	9	800
Потребность, т	800	500	600	1100	

Вариант № 20

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	1,1	1,9	1,6	1,4	6,0
2-й	0,2	1,6	1,4	0,3	3,5
3-й	1,9	2,0	0,5	0,4	4,8
Потребность, т	3,2	5,5	3,5	2,1	

Вариант 21

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	

1-й	0,6	0,8	1,2	0,2	400
2-й	2,2	1,4	2,1	0,9	600
3-й	1,8	2,2	3,1	2,0	800
Потребность, т	100	500	700	500	

Вариант 22

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	1,4	2,2	1,9	1,7	60
2-й	0,7	1,6	1,4	0,3	35
3-й	1,7	1,9	0,5	0,4	48
Потребность, т	32	55	35	21	

Вариант 23

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	12,0	5,0	4,0	8,0	1300
2-й	6,0	3,0	1,4	6,6	700
3-й	10,0	3,2	4,4	5,1	700
Потребность, т	700	400	600	1000	

Вариант 24

Карьеры	Объекты				Запасы, т
	1	2	3	4	
1-й	1,2	2,0	1,5	1,3	60
2-й	0,5	1,45	1,25	0,4	35
3-й	1,6	1,8	0,6	0,35	48
Потребность, т	55	32	21	35	

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Золотарь И.А. Экономико-математические методы в дорожном строительстве. – М.: Транспорт, 1974. – 248 с.

2. Геронимус Б.Л., Царфин Л.В. Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. – М.: Транспорт, 1988. – 192 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ПРИ ОТЫСКАНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
В ДОРОЖНОМ СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Методические указания к лабораторной работе

Составитель
СЕМЕХИН Эдуард Фролович

Ответственный за выпуск – зав.кафедрой доцент С.А. Щуко

Редактор И.В. Бойцова
Корректор В.В. Гурова
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 22.04.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,95. Тираж 100 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.