

Владимирский государственный университет

А.В. БЕЛЕВИЧ

**ОСНОВЫ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКИ**

ТЕКСТ ЛЕКЦИЙ

Владимир 1999

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Владимирский государственный университет

А.В. БЕЛЕВИЧ

ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Текст лекций

Владимир 1999

УДК 621.01 : 531: 621.73: 621.771(0.75)8

Б 43

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор Московского государственного
института стали и сплавов (технический университет)

Б.А.Романцев

Доктор технических наук, заведующий кафедрой технического творчества,
профессор Владимирского государственного педагогического
университета

А.А.Молдаванов

Кандидат технических наук, доцент Владимирского государственного
университета

Э.И.Комарова.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Владимирского
государственного университета

Белевич А.В.

Б43 Основы технологической механики: Текст лекций / Владим. гос. ун-
т. Владимир, 1999. 86 с.

ISBN 5 – 89368 – 125 – 8

Составлен для студентов специальности 1207 - Машины и технология высокоэффективных процессов обработки. Рассмотрены подходы к определению напряженно-деформированного состояния материалов и инструментов с применением методов теории упругости, пластичности и вычислительной механики. Учитываются опыт ведущих российских и зарубежных ученых, специализирующихся в области механики деформируемого тела, теории пластичности и упругости, технологии машиностроения, а также результаты собственных научных исследований, выполненных в ВлГУ. Текст лекций может быть полезен аспирантам и работникам научных учреждений при проектировании процессов обработки, связанных с интенсивными тепловыми, механическими нагрузками и пластическим деформированием.

Табл.1. Ил. 14. Библиогр.: 42 назв.

УДК 621.01 : 531: 621.73: 621.771(0.75)8

ISBN 5 – 89368 – 125 – 8

© Владимирский государственный
университет, 1999

*Посвящается светлой памяти
профессора, доктора технических
наук Геннадия Яковлевича Гуна.*

В тексте лекций затрагивается один из важных аспектов технологической механики, с которым приходится на практике сталкиваться инженеру, - определение напряжений и деформаций в упругой и пластической областях. Цель текста лекций - познакомить студентов машиностроительных специальностей с подходами к определению напряженно-деформированного состояния металла и инструмента. Как правило, напряжения определяют с помощью экспериментальных методов либо вычисляют путем измерения микротвердости, по волокнистому строению, по деформациям. Применение данных методов не всегда оправдано из-за необходимости проведения большого числа лабораторных и механических испытаний и невысокой точности. Названные обстоятельства и возрастание требований к сокращению сроков проектирования выдвигают на одно из первых мест задачи моделирования процессов и автоматизации научных исследований. Поэтому внимание уделяется новому научному направлению, связанному с применением цифровой вычислительной техники.

В лекциях рассматриваются методы, основанные на соотношениях теории упругости и механики твердого деформируемого тела. Приведены примеры математической постановки линейных и нелинейных задач, изложены экспериментально-расчетные методы их решения. Рассмотрены системы уравнений и алгоритмы расчета напряженно-деформированного состояния в пластической и упругой области с помощью вычислительной техники.

Рассмотренные в лекциях задачи иллюстрируются результатами собственных расчетов локальных параметров. Расчетным путем установлено распределение скоростей движения частиц, скоростей деформаций сдвига и температуры деформируемой среды в пластической области. Сформулирована и решена задача определения температуры в системе "инструмент - заготовка". Приведены результаты вычисления напряжений. Расчеты выполнены с помощью прикладных программ,

разработанных на основе метода конечных элементов по методике автора на кафедре технологии машиностроения Владимирского государственного университета.

Решение задач получено с учетом эффектов выделения тепла, зависимости свойств материалов от температуры и скорости деформаций. Учитывается нелинейный характер зависимости интенсивности напряжений от степени деформаций сдвига.

Материал настоящего курса вводит студентов в круг вопросов, рассматриваемых в дисциплине “Методы решения технологических задач”. Особенность настоящих лекций состоит в том, что в них, наряду с изложением методов расчета параметров напряженно-деформированного состояния, на примере анализа сложных технологических систем “металл - инструмент” развивается идея комплексного подхода к решению технических задач с применением математического моделирования. Подходы к описанию пластического течения деформируемого металла рассмотрены в лекциях с точки зрения, выработанной в монографиях российских ученых Г.Я.Гуна, В.Л.Колмогорова, А.А.Поздеева, А.Н.Скороходова, Б.В.Кучеряева, а также зарубежных У.Джонсона, Х.Кудо, К.Осакады и других.

Автор выражает признательность рецензенту профессору Б.А.Романцеву, заведующему кафедрой обработки металлов давлением Московского государственного института стали и сплавов профессору О.М.Смирнову и профессору В.А.Тюрину за сделанные полезные замечания при подготовке рукописи, а также профессору Б.В.Кучеряеву и профессору Б.А.Прудковскому за их советы при ее написании.

А.Белевич

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.	4
Введение.	6

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Лекция 1. Основы теории напряженного состояния.	7
Лекция 2. Тензор напряжений.	11
Лекция 3. Разложение тензора напряжений	13
Лекция 4. Кинематика деформирования.	17
Лекция 5. Поле скоростей и скорости деформаций.	22
Лекция 6. Уравнения теории упругости и пластичности.	27
Лекция 7. Теория малых пластических деформаций	29
Лекция 8. Уравнения пластического состояния.	32
Лекция 9. Определяющие уравнения и реологические модели	35
Лекция 10. Деформируемость металлов при обработке	39

РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ И ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЯХ

Лекция 11. Определение пластических деформаций.	43
Лекция 12. Определение напряжений по кинематике деформирования	48
Лекция 13. Краевые задачи теории теплопроводности	49
Лекция 14. Остаточные напряжения.	57
Лекция 15. Вычисление деформаций и напряжений на основе вариационного принципа Ж.Лагранжа.	62
Лекция 16. Напряженное состояние сопряженных деталей	70
Лекция 17. Напряженное состояние с учетом пластичности.	73
Лекция 18. Математическое описание пластических течений с применением вариационных принципов механики.	79
Лекция 19. Разработка и применение математических моделей с целью улучшения показателей технологических систем	82
Заключение	87
Послесловие	88
Список условных обозначений.	89
Библиографический список	91

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическим и экспериментальным методам определения напряженно-деформированного состояния конструкций и материала в процессах пластического деформирования посвящена обширная литература. Однако применение многих методов при анализе операций пластическим деформированием, резанием, обработке лазерным лучом и другими сдерживается по ряду причин. Одна из них - математические трудности решения задач. Отсутствие универсальных методик расчета напряжений заставляет искать пути решения технических задач с применением экспериментального и математического моделирования.

В лекциях отражена точка зрения на математическое моделирование как один из наиболее эффективных и универсальных способов определения напряжений в упругой и пластической областях при решении различных технических задач. Приведены примеры, показывающие, что путем сочетания экспериментальных методов определения деформированного состояния в области пластического течения и решения уравнений механики можно установить распределение всех локальных параметров. С помощью данного подхода установлено распределение температуры в системе “деформируемый металл - инструмент”. Реализация математических постановок выполнена в рамках теории малых упругопластических деформаций в соответствии с вариационным принципом Ж.Лагранжа на основе метода конечных элементов. Дана оценка теплового эффекта пластической деформации и его вклада в картину распределения температуры металла и напряжений в инструменте и заготовке.

В лекциях намеренно не затрагиваются вопросы обоснования численных алгоритмов и техника их реализации, поскольку метод конечных элементов доведен в настоящее время до высокой степени совершенства, а изложение данных вопросов рассмотрено в специальной литературе. В лекциях затронуты другие вопросы: математической постановки задач, их приближенного решения и интерпретации с использованием понятий механики сплошных сред..

Достоверность результатов расчетов подтверждается в лекциях путем сравнения расчетных графиков с аналитическим решением задач для простых областей. Приведено также сравнение расчетных напряжений с данными метода фотоупругости и расчетных графиков температуры с экспериментальными данными и результатами расчетов других авторов.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

Лекция 1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

При расчете напряженно-деформированного состояния в деформируемом металле и инструменте необходим учет не только силового фактора, но и целого ряда других параметров и условий: формы и особенностей границы тел, условий их контакта с другими телами, неравномерного распределения температуры и т.п. В разделах теории упругости используют два основных понятия: напряжения и деформации. В разделах механики твердого деформируемого тела обычно используют три основных понятия: напряжения, деформации и скорости деформации. Два первых широко используются в курсе “Соппротивление материалов”. Применение третьего понятия - скорости деформации - связано с существенными различиями закономерностей в областях упругого и пластического формоизменения.

В теории упругости рассматривают тело, находящееся в состоянии равновесия под действием приложенных внешних сил и исследуют величину возникающих при этом внутренних сил в произвольной точке. Мысленно разделяют тело поверхностью F на две части и отбрасывают одну из них. Тогда ее действие на оставшуюся часть необходимо заменить некоторой системой сил, в общем случае различных в разных точках поверхности F .

Предполагают, что эти силы распределены по поверхности F непрерывно, как распределяется гидростатическое давление. Величины таких сил определяются их интенсивностью, т. е. величиной силы, отнесенной к площади, на которую она действует. Интенсивность внутренних сил называется *напряжениями*. Напряжениями Коши σ_n называют поверхностную плотность сил на площадке dS_n с нормалью n в окрестности рассматриваемой точки. *Напряженным состоянием* называют совокупность напряжений σ_{ij} , однозначно определяющих напряжения σ_n на любой площадке в окрестности рассматриваемой точки.

В работах [1 - 6] показано, что при описании процессов деформации в сплошной среде следует рассматривать не просто точки, а частицы с бесконечно малыми размерами, но конечной массы.

Для обозначения компонентов напряжений обычно используют несколько способов. Наиболее предпочтительным с точки зрения краткости записей следует считать двухиндексное обозначение, например, σ_{ij} , где первый индекс указывает направление нормали к площадке, а второй - направление проекции.

При такой форме записи разложение векторов σ_i на проекции имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{xx}e_x + \sigma_{xy}e_y + \sigma_{xz}e_z; \\ \sigma_y &= \sigma_{yx}e_x + \sigma_{yy}e_y + \sigma_{yz}e_z; \\ \sigma_z &= \sigma_{zx}e_x + \sigma_{zy}e_y + \sigma_{zz}e_z.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Сокращенно данная система трех уравнений записывается в виде

$$\sigma_i = \sigma_{ij}e_j,\tag{1.2}$$

где суммирование осуществляют по повторяющемуся индексу j .

Таким образом, напряженное состояние определяется тремя векторами σ_x , σ_y , σ_z или скалярными σ_{ij} величинами. Последние при повороте осей координат преобразуются по уравнениям. Напряженное состояние в точке характеризуется тензором второго ранга, который имеет вид $T_\sigma = \|\sigma_{ij}\|$. При обозначении осей x, y, z тензору соответствует матрица

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}\tag{1.3}$$

В технических приложениях при обозначении нормальных напряжений оставляют только один индекс, указывающий на направление нормали к площадке и самой проекции, например, $\sigma_x = \sigma_{xx}$; $\sigma_y = \sigma_{yy}$; $\sigma_z = \sigma_{zz}$; . Напряжения, не стоящие на диагонали в (1.3), называют касательными и обозначают буквой τ_{ij} с двумя разными индексами. Заметим, что скаляры являются тензорами нулевого ранга, а векторы — тензорами первого ранга. Компоненты тензоров второго ранга, так же, как векторы и скаляры могут иметь разные знаки.

Знаки проекций векторных величин (скорости, силы и др.), определяемые их направлением по отношению к выбранной системе координат, относятся к субъективным характеристикам. Знак векторов всегда может быть изменен путем соответствующего изменения системы координат.

Правило определения знака напряжений и других величин, относящихся к тензорам второго ранга, сложнее. Оно зависит от выбора системы координат и характера действующих усилий. Знаки компонентов напряжений соответствуют изменениям, происходящим внутри объема. При этом нормальные напряжения считают положительными, если они способствуют увеличению объема. Сжимающие нормальные напряжения принято называть отрицательными.

Знаки касательных напряжений определяют по общему правилу с учетом ориентации площадок, на которых они действуют. Компоненты напряжений считают положительными, если на площадке внешняя нормаль совпадает с положительным направлением оси координат. Напряжения на координатных площадках $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ так же, как и их проекции σ_{ij} , зависят от выбора системы координат и при изменении последней также будут изменяться.

Для изучения напряженного состояния в точке тела в окрестности последней выделяют элемент объема в виде прямоугольного параллелепипеда, три ребра которого принимают за оси координат. При этом предполагают, что длина ребра равна нулю, т. е. параллелепипед как бы представляет собой точку.

Нагружая параллелепипед системой положительных напряжений, в дополнение к условиям равновесия приравнивают нулю сумму моментов всех сил, создаваемых напряжениями на ограничивающих его гранях, относительно любой оси координат: $\sum M_i = 0$. Поступая таким образом с моментами сил относительно каждой оси координат, получают

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}. \quad (1.4)$$

Данное условие в теории упругости известно как закон парности касательных напряжений. Согласно данному закону составляющие касательных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках, перпендикулярные линии пересечения этих площадок, равны между собой и направлены либо к линии пересечения, либо от нее. При этом касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках внутри деформируемого тела, находящегося в равновесии, равны по величине и знаку. Поэтому тензор (1.3) обладает свойством симметрии относительно

главной диагонали. Следовательно, индексы у компонентов напряжений можно менять местами

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (1.5)$$

Таким образом, с учетом симметрии тензора напряжений (1.3) для описания напряженного состояния достаточно шести независимых скалярных величин: трех нормальных и трех касательных напряжений на взаимно перпендикулярных гранях прямоугольного параллелепипеда.

Чтобы выяснить, как изменяются напряжения на произвольно ориентированных площадках, т. е. без связи с выбором системы координат, вновь рассматривают элементарный тетраэдр с положительными компонентами напряжений. Используя условие равновесия для проекций всех сил в направлении координатных осей, получают три уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_{nx} &= \sigma_{xx}l_{nx} + \sigma_{yx}l_{ny} + \sigma_{zx}l_{nz}; \\ \sigma_{ny} &= \sigma_{xy}l_{nx} + \sigma_{yy}l_{ny} + \sigma_{zy}l_{nz}; \\ \sigma_{nz} &= \sigma_{xz}l_{nx} + \sigma_{yz}l_{ny} + \sigma_{zz}l_{nz}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

которые с учетом правила суммирования по повторяющемуся индексу можно записать

$$\sigma_{nj} = \sigma_{ij}l_{ni}. \quad (1.7)$$

Уравнения (1.7) называют “статическими условиями на контуре”, так как с их помощью определяют компоненты тензора σ_{ij} по заданным напряжениям на поверхности тела или наоборот. Поскольку три уравнения содержат шесть неизвестных, значения σ_{ij} однозначно не определяются.

Наоборот, если задан тензор T_{σ} , с помощью (1.7) можно найти компоненты σ_{ni} на любой площадке по ее заданной ориентации. Модуль вектора напряжения σ_n составляет

$$\sigma_n^2 = \sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2, \quad (1.8)$$

а нормальная компонента

$$\sigma_{nn} = \sigma_{nx}l_{nx} + \sigma_{ny}l_{ny} + \sigma_{nz}l_{nz}, \quad (1.9)$$

где l_{nx} , l_{ny} , l_{nz} - направляющие косинусы. Величина касательных напряжений на этой же площадке составляет

$$\tau_n^2 = \sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2. \quad (1.10)$$

В каждой точке тела существуют, по крайней мере, три взаимно-перпендикулярные площадки, в которых касательные напряжения равны нулю. Эти площадки называют главными, а нормальные напряжения в них — главными нормальными напряжениями или просто главными напряжениями. Согласно (1.10) полные напряжения σ_n на таких площадках совпадают с нормальными σ_{nn} , т. е. направлены перпендикулярно этим площадкам.

Вопросы

1. В чем состоит свойство симметрии тензора напряжений?
2. Какие площадки в точке тела называют главными?

Лекция 2. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ

При расчете напряжений стремятся снижать количество скалярных характеристик напряженного состояния путем выбора предпочтительной системы координат, в которой касательные напряжения отсутствуют.

Чтобы замкнуть систему, содержащую 4 неизвестных, к ней добавляют известное из аналитической геометрии условие связи между направляющими косинусами в прямоугольной декартовой системе координат.

Таким образом, главные напряжения являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma) \sigma^2 - I_2(T_\sigma) \sigma - I_3(T_\sigma) = 0, \quad (2.1)$$

где $I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$$I_2(T_\sigma) = -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2, \quad (2.2)$$

$$I_3(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

Уравнение (2.1) имеет три действительных корня [1]. При этом

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2.3)$$

Нормальные напряжения на главных площадках достигают экстремальных значений. Их также называют главными значениями тензора. Для главных осей тензор напряжения принимает вид

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты при неизвестных в уравнении (2.1), не изменяющиеся при повороте координатных осей, называют инвариантами тензора по отношению к повороту осей.

Линейный инвариант $I_1(T_{\sigma})$ определяется суммой нормальных напряжений на главной диагонали тензора.

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (2.5)$$

Квадратичный инвариант равен сумме миноров элементов главной диагонали определителя, составленного из компонент тензора напряжений

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1. \quad (2.6)$$

Кубический инвариант равен определителю третьего порядка, элементами которого являются компоненты тензора напряжений

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (2.7)$$

Таким образом, приведение тензора напряжений к диагональному виду, соответствующее повороту координатных осей тензора, позволяет полностью описать напряженное состояние с помощью трех скалярных величин (главных напряжений) и ориентации главных площадок.

В зависимости от значений инвариантов I_i различают следующие виды напряженного состояния:

а) линейное напряженное состояние, когда $I_1 \neq 0$; $I_2 = I_3 = 0$; в этом случае тензор напряжений имеет вид

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (2.8)$$

б) плоское напряженное состояние, когда только одно из главных напряжений равно нулю; при этом $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$;

в) объемное напряженное состояние, когда $I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, которое в общем случае записывают в виде (1.3) или (2.4).

Вопросы

1. С какой целью приводят тензор напряжений к диагональному виду?
2. В чем заключается связь инвариантов с видом напряженного состояния?

Лекция 3. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Общий случай напряженного состояния представляют в виде суммы двух напряженных состояний, характеризуемых:

1) одинаковыми нормальными напряжениями σ_0 в координатных плоскостях;

2) нормальными напряжениями

$$S_x = \sigma_x - \sigma_0; S_y = \sigma_y - \sigma_0; S_z = \sigma_z - \sigma_0; \quad (3.1)$$

и касательными напряжениями $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

Если положить

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (3.2)$$

то во втором состоянии сумма координатных напряжений в координатных плоскостях равна нулю

$$S_x + S_y + S_z = 0.$$

Как показывают опыты, при всесторонних равных растяжениях или сжатиях пластические деформации не возникают. Образование их связано с искажением формы элемента. Это оправдывает представления тензора T_σ в виде

$$T_\sigma = \sigma \delta_{ik} + D_\sigma, \quad (3.4)$$

где $\sigma \delta_{ik}$ называется шаровым тензором и обозначается

$$T_{\sigma_0} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

D_σ называется девиатором напряжений и обозначается

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} S_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & S_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & S_z \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Шаровой тензор напряжений соответствует всестороннему равномерному напряжению или сжатию. Девиатор, записанный в главных осях, имеет вид

$$D_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma \end{vmatrix}. \quad (3.7)$$

Для характеристики шарового тензора достаточно одной скалярной величины σ .

Подставляя в формулы (2.1) компоненты шарового тензора (3.5) и девиатора напряжений (3.6), используя при этом соотношения (3.1) и (3.2), получим инварианты шарового тензора и девиатора

$$\left. \begin{aligned} I_1(T_{\sigma_0}) &= 3\sigma_0 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2(T_{\sigma_0}) &= -3\sigma_0^2 = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2; \\ I_3(T_{\sigma_0}) &= \sigma_0^2; \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1(D_{\sigma}) &= S_x + S_y + S_z = 0; \\ I_2(D_{\sigma}) &= -S_x S_y - S_y S_z - S_z S_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \\ &= -\frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]; \\ I_3(D_{\sigma}) &= \begin{vmatrix} S_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & S_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & S_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Поскольку под действием шарового тензора форма тела не изменяется, считают, что пластическое формоизменение зависит только от девиатора. Для характеристики девиатора достаточно двух скалярных величин, соответствующих второму и третьему инвариантам.

Значения инвариантов девиатора, записанного в главных осях, имеют вид

$$\begin{aligned} I_2(D_\sigma) &= -S_1 S_2 - S_2 S_3 - S_3 S_1 = \left(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \right) ; \\ I_3(D_\sigma) &= S_1 S_2 S_3 = \frac{1}{3} \left(S_1^3 + S_2^3 + S_3^3 \right) . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Экспериментально доказано, что переход в пластическое состояние в значительной степени зависит от значения второго инварианта девиатора. Принято считать [1, 2, 3, 23, 17], что данный инвариант служит основной характеристикой напряженного состояния для большинства металлов с точки зрения их пластического течения. Главные нормальные напряжения являются естественной физической характеристикой напряженного состояния в точке. Можно столь же естественно охарактеризовать напряженное состояние в точке другим способом, более тесно связанным с физическим состоянием ее окрестности. Основные инвариантные характеристики напряженного состояния интерпретируют также с помощью напряжений на октаэдрических площадках, равнонаклоненных к главным осям тензора. Направляющие косинусы нормалей ко всем граням имеют одинаковые по модулю значения

$$l_{n1}^2 = l_{n2}^2 = l_{n3}^2 = \frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

Нормальное напряжение σ на грани октаэдра равно

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1(T_\sigma)}{3} = \sigma$$

и называется средним гидростатическим напряжением.

Из построения формулы (3.12) видно, что нормальные напряжения на всех гранях октаэдра одинаковы и равны среднему нормальному напряжению. Касательные напряжения на октаэдрической площадке подсчитываются с помощью формулы

$$\tau_{hh} = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \quad (3.13)$$

Величина $\tau_{окт}$ называется *октаэдрическим касательным напряжением*. Итак, на все грани тетраэдра действуют одинаковые нормальные напряжения $\sigma_{окт}$ и одинаковые касательные напряжения $\tau_{окт}$. Первые, подвергая октаэдр всестороннему сжатию или растяжению, приводят к изменению объема, при котором форма октаэдра вследствие равномерности давления не изменится. Вторые не участвуют в изменении объема, но приводят к изменению формы. В практических расчетах наибольшее распространение получили интенсивности напряжений, которые отличаются от $\tau_{окт}$ лишь постоянным множителем.

Следует отличать интенсивность нормальных и интенсивность касательных T напряжений. Первая из них определяется

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{окт} = \sqrt{(3I_2)} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}. \quad (3.14)$$

Интенсивность напряжений всегда положительна, в случае линейного растяжения $\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ она равна величине σ_1 .

Интенсивность касательных напряжений сдвига пропорциональна второму инварианту девиатора напряжений. Ее величину находят по формуле

$$T = \sqrt{(I_2(D\sigma))} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y + \sigma_z)^2 + (\sigma_z + \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2)}{6}}. \quad (3.15)$$

Применение данной характеристики позволяет использовать диаграммы, полученные экспериментальным путем при испытаниях на растяжение (сжатие) для описания механических и пластических свойств деформируемых материалов. Приведенные характеристики являются основными при оценке перехода металла в пластическое состояние.

Три уравнения связывают шесть независимых компонентов напряжения. Поэтому только из статических условий найти напряжения нельзя. Для этого необходимы дополнительные уравнения.

Вопросы

1. Каким свойством обладают инварианты тензора?
2. Почему нельзя найти напряжения из статических условий?
3. Какое практическое значение имеет второй инвариант девиатора $D\sigma$?

Лекция 4. КИНЕМАТИКА ДЕФОРМИРОВАНИЯ

В механике сплошных сред под точкой понимают точку пространства, а под частицей - материальную точку сплошной среды. Деформирование рассматривают в декартовой системе координат. Обозначая координаты частицы до деформирования (начальные координаты) через X_i , а координаты частицы в процессе деформирования (текущие координаты) - через x_i , можно описать движение сплошной среды уравнениями

$$x_i = x_i(X_i, t), \quad (4.1)$$

что соответствует лагранжеву способу описания движения, или

$$X_i = X_i(x_i, t), \quad (4.2)$$

что соответствует эйлерову способу описания среды.

Таким образом, при изучении движения сплошной среды возможны два подхода. В первом из них, связанном с именем Лагранжа, объектом изучения являются сами материальные частицы. При этом рассматривают изменение во времени скалярных или векторных величин, таких как плотность, температура, скорость фиксированной материальной частицы, а также изменение этих величин при переходе от одной частицы к другой. При этом переменные X_i, t называются *переменными Лагранжа*. Второй подход, развитый Эйлером, в качестве объекта наблюдения принимает неподвижное пространство наблюдателя, заполненное движущейся средой. Различные величины, характеризующие движение, считаются функциями *точки и времени*, т.е. функциями трех аргументов x_i и времени t , называемых *переменными Эйлера*.

Если перемещения заданы в зависимости от текущих координат, деформированное состояние в точке описывают с помощью эйлерова тензора деформации. Его компоненты выражают через перемещения с помощью соотношений

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (4.3)$$

Аналогично, если перемещения заданы в зависимости от начальных координат, определяют компоненты лагранжева тензора

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right). \quad (4.4)$$

Для выяснения физического смысла компонент тензора ε_{ij} наблюдают за изменением взаимного положения двух выделенных частиц. Квадраты расстояний между соседними частицами до и в рассматриваемый момент деформирования можно записать в виде $ds^2_0 = dX_i dX_i$; $ds^2 = dx_i dx_i$. Выражают разность

$$ds^2 - ds^2_0 = dx_i dx_i - dX_i dX_i. \quad (4.5)$$

Определив из уравнения (4.1) дифференциалы $dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_i$, и подставив их в соотношение (4.5), получают:

$$ds^2 - ds^2_0 = 2 \varepsilon_{ij} dX_i dX_j. \quad (4.6)$$

Пусть отрезок ds совмещен с осью x_1 , тогда $dx_1 = ds$. Из (4.6) получают

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{(1 + \Delta_{11})^2} \right], \quad (4.7)$$

где $\Delta_{11} = \frac{ds - ds_0}{ds_0}$ - относительное удлинение связанного с материалом

бесконечно малого отрезка, параллельного в деформированном состоянии оси x_1 . Аналогично получают и два других подобных соотношения. Для двух пересекающихся бесконечно малых отрезков длиной dx_1 , dx_2 , параллельных в деформированном состоянии осям x_1 , x_2 , косинус угла между единичными векторами i, j , задающими их направление до деформирования, определяется

$$(\cos \varphi_{i,j}) = -2 \varepsilon_{12} (1 + \Delta_{11}) (1 + \Delta_{22}). \quad (4.8)$$

Происходящее в процессе деформирования уменьшение углов φ_{12} между рассматриваемыми линейными элементами определяют из соотношения

$$\varepsilon_{12} = \frac{\sin \varphi_{12}}{2(1 + \Delta_{11})(1 + \Delta_{22})}. \quad (4.9)$$

Таким образом, при $i = j$ деформации ε_{12} характеризуют относительное удлинение волокон, параллельных в рассматриваемом деформированном состоянии координатным осям, а при $i \neq j$ они связаны с изменением углов между отрезками, параллельными в деформированном состоянии осям x_i, x_j . Совмещая отрезок ds_0 с осью x_1 , из соотношений (4.6) получают:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} \left[(1 + \delta'_{11})^2 - 1 \right], \quad (4.10)$$

где δ'_{11} - относительное удлинение бесконечно малого отрезка, до деформирования параллельного оси x_1 . Используя допущение, что перемещения малы, рассматривают отрезок до деформации, параллельный оси x_1 . После деформации этот отрезок повернется относительно оси на угол $\beta \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$. Аналогично поворот отрезка, параллельного до деформации оси x_2 , составит $\gamma \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. Если до деформации имеем два отрезка, исходящие из одной точки, параллельные координатным осям, то после деформации первоначально прямой угол между этими отрезками изменится на величину

$$\alpha = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (4.11)$$

Отсюда

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \alpha. \quad (4.12)$$

Компонента тензора деформаций ε_{12} численно равна половине угла, на который изменится первоначально прямой угол между двумя элементарными отрезками, лежащими до деформации в плоскости x_1x_2 и параллельными координатным осям. Таким образом, ε_{12} характеризует сдвиг в плоскости x_1x_2 .

Аналогичные рассуждения повторяют для определения физического смысла других боковых компонент тензора деформации. Элементы тензора деформаций, находящиеся на главной диагонали, называются компонентами относительного удлинения по направлениям координатных осей, а боковые компоненты - сдвиговыми деформациями. Рассматриваемые тензоры симметричны. Они также приводятся к главным осям. В каждой точке деформируемого тела существуют три взаимно перпендикулярных “материальных” отрезка, которые были взаимно перпендикулярными и до деформирования. Соответствующие этим отрезкам направления являются главными и для тензора T_{ε} , и для тензора T_{ε} .

При малых деформациях и углах поворота приведенные соотношения, определяющие различные тензоры деформации, приводятся к форме

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.13)$$

Тензор $T_{\varepsilon} = \|\varepsilon_{ij}\|$ называют тензором малых деформаций. При этом безразлично, что понимается под x_i - текущие или начальные координаты.

Соотношения (4.13) устанавливают связь шести компонентов деформации с тремя компонентами перемещения (u_i), (в теории течения шести компонентов скорости деформации с тремя компонентами скорости перемещения). Следовательно данные соотношения не являются независимыми функциями координат. Между ними существуют зависимости, которые в теории упругости называют уравнениями совместности деформаций.

Так как компоненты деформации (4.3), (4.4), (4.13) образуют симметричные тензоры второго ранга, для них справедливы все соотношения, рассмотренные выше для тензора напряжений. В частности в окрестности любой точки деформируемого тела можно выделить три главных направления, вдоль которых деформации сдвига отсутствуют, а деформации растяжения достигают максимальных значений. Тензор деформации в главных осях имеет вид

$$T_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

Компоненты на главной диагонали тензора после приведения к главным осям называют главными деформациями. Значение формы записи

тензора деформаций (4.14) для практических расчетов при развитых деформациях рассмотрено в 11-й лекции.

В теории упругости доказывается, что при повороте прямоугольных осей координат компоненты деформации изменяются так же, как компоненты напряжения. При изучении деформированного состояния также пользуются понятиями разложения тензора деформаций на шаровой и девиатор, приведения тензора деформаций к главным осям, интенсивности деформаций.

При изучении пластического течения в области развитых пластических деформаций упругими составляющими пренебрегают, а объем любой выделенной частицы считают неизменным. Шаровой тензор в этом случае равен нулю. При этих условиях полный тензор и девиатор совпадают. Наиболее важным считают второй инвариант. В практических расчетах важной характеристикой тензора деформаций $T\epsilon$ является интенсивность деформации сдвига, определяемая по формуле

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} \left[(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]}, \quad (4.15)$$

где $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ - компоненты тензора малых деформаций на его диагонали; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - боковые компоненты. Интенсивности деформаций так же как и интенсивности напряжений всегда положительны и не зависят от выбора системы координат.

При изучении процессов деформирования, протекающих во времени, рассматривают приращения перемещений некоторой точки тела по координатным осям du_x, du_y, du_z в течение бесконечно малого промежутка времени dt , которые вычисляют по формулам

$$du_x = V_x dt, \quad du_y = V_y dt, \quad du_z = V_z dt, \quad (4.16)$$

где V_x, V_y, V_z - проекции скорости перемещения точки на оси x, y , и z . Разделив компоненты тензора деформаций на общий множитель, получают компоненты скоростей деформаций, обозначаемые $\xi_x, \xi_y, \xi_z, \eta_{xy}, \eta_{yz}, \eta_{zx}$.

Если при исследовании стационарных процессов сетка нанесена так, как показано на рисунке, чтобы одно семейство линий было ориентировано вдоль скорости v_0 движения жесткой области относительно инструмента, то в дальнейшем принимают, что эти линии совпадают с линиями тока.

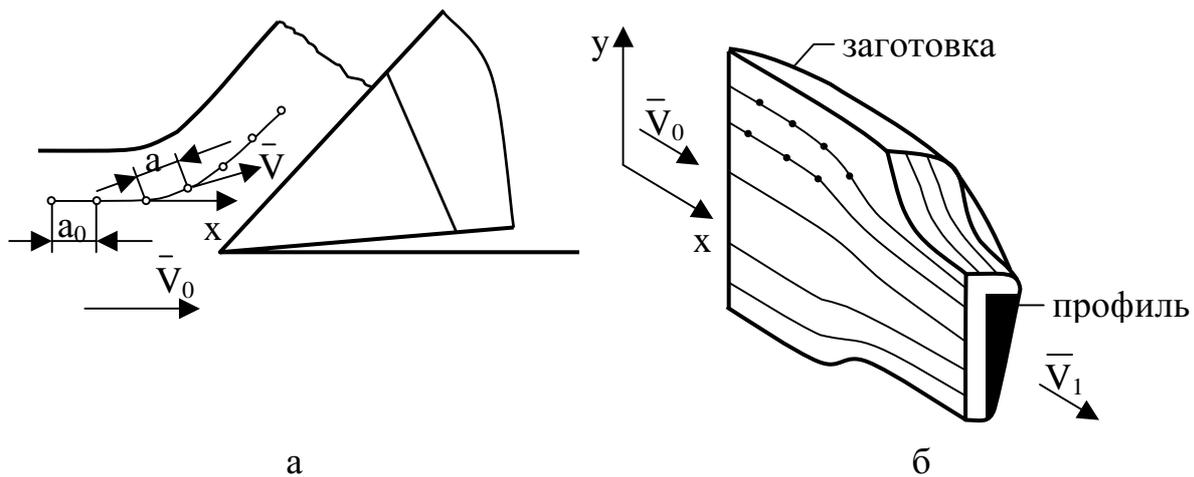
Например, модуль скорости движения частиц относительно инструмента в процессах резания (рисунок, а) и прессования профиля с одной осью симметрии (рисунок, б) в предположении о стационарности деформирования вычисляют по формулам

$$v = v_0 \frac{a}{a_0}, \quad (4.17)$$

где a - расстояние между соседними узлами на линиях тока; a_0 - база сетки. Составляющие скорости определяются из соотношений

$$v_x = v \cos \alpha = \frac{v_0}{a_0} a \cos \alpha; \quad v_y = v \sin \alpha = \frac{v_0}{a_0} a \sin \alpha \quad (4.18)$$

где α - угол наклона касательной к линии тока, отсчитываемой в положительном направлении от оси x .



Вопросы

1. В чем заключается физический смысл главных и боковых компонент тензора деформаций?
2. В чем отличие представления Ж.Лагранжа и Л.Эйлера о движении сплошной среды?

Лекция 5. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ

При изучении механической обработки будем рассматривать процессы, происходящие во времени в движущейся среде. В механике сплошной среды любое векторное поле характеризуется понятиями ротора (*rot*)

и дивергенции (div). Используя переменные Эйлера, рассматривают поле вектора скорости $\bar{v} = \bar{v}(x_i t)$, где x_i - декартовы координаты произвольной точки пространства M , \bar{v} - скорость материальной частицы, находящейся в этой точке в момент времени t . Поскольку поле скоростей является частным случаем векторного поля, для его описания можно использовать результаты общей теории векторных полей.

В соответствии с записью закона (4.2) \bar{v} есть вектор скорости материальной частицы, проходящей в момент времени t через точку $M(\bar{x})$, где \bar{x} - радиус-вектор. Определим скорость в близкой к ней точке M' с радиус-вектором $\bar{x} + d\bar{x}$

$$\bar{v}(\bar{x} + d\bar{x}) = \bar{v}(\bar{x}) + d\bar{v}. \quad (5.1)$$

Воспользуемся правилом дифференцирования векторной функции по векторному аргументу, согласно которому дифференциал равен

$$d\bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} d\bar{x} = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\| dx, \quad (5.2)$$

где $\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\|$ - тензор. Разлагая производную вектора \bar{v} по векторному аргументу на сумму

$$\left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\| + \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\| \quad (5.3)$$

и введя в рассмотрение вихрь вектора скорости

$$rot \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

получим

$$\bar{v}(\bar{x} + d\bar{x}) = \bar{v}(\bar{x}) + \frac{1}{2} rot \bar{v} \times d\bar{x} + \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\| d\bar{x}. \quad (5.5)$$

Таким образом, формула (5.5) представляет скорость в точке M' в виде суммы трех слагаемых: скорости $\bar{v}(\bar{x})$ поступательного перемещения

элемента $\bar{v}(\bar{x})$, скорости $\frac{1}{2} \text{rot } \bar{v} \times d\bar{x}$, связанной с вращением элемента как абсолютно твердого тела, и наконец, составляющей

$$\left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \right\| d\bar{x},$$

связанной с деформацией элемента.

Симметричный тензор $T_\xi = \|\xi_{ik}\|$, где

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right), \quad (5.6)$$

называется *тензором скоростей деформаций*.

Для изучения физического смысла его компонент дадим времени t приращение, dt . Полю перемещений $d(\bar{u}_i) = \bar{v} dt = (du_i)$ соответствует поле тензора деформаций с компонентами $d\varepsilon_{ik}$. Разделим компоненты $d\varepsilon_{ik}$ на приращение времени dt и устремим dt к нулю. Величина

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \left(\frac{du_i}{dt} \right)}{\partial x_k} + \frac{\partial \left(\frac{du_k}{dt} \right)}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) = \xi_{ik} \quad (5.7)$$

называется *скоростью деформации*. Диагональные компоненты тензора

$$T_\xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{vmatrix}$$

представляют скорости относительного удлинения элементарных отрезков, параллельных координатным осям. Боковые компоненты T_ξ характеризуют скорость искажения первоначально прямых углов между этими отрезками, т.е. *скорость сдвиговых деформаций*.

Симметричный тензор скоростей деформаций T_ξ поворотом координатных осей может быть приведен к диагональному виду

$$T_{\xi} = \begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad (5.8)$$

причем, $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3$.

Главные компоненты скорости деформации являются действительными корнями характеристического уравнения

$$|\xi_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0,$$

или в развернутой форме

$$\lambda^3 - \xi^I \lambda^2 + \xi^{II} \lambda - \xi^{III} = 0, \quad (5.9)$$

где ξ^I , ξ^{II} , ξ^{III} - инварианты тензора скоростей деформаций.

Наибольшее значение для решения практических задач имеет первый инвариант, равный

$$\xi^I = \xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \text{div } \bar{v}. \quad (5.10)$$

Физический смысл линейного инварианта ξ^I очевиден: эта величина равна скорости относительного изменения объема среды.

Тензор скорости деформации может быть представлен в виде суммы девиатора D_{ξ} и шарового тензора $\xi_0 I$

$$T_{\xi} = D_{\xi} + \xi_0 I, \quad (5.11)$$

где $\xi_0 = \frac{1}{3} \xi_{ii} = \frac{1}{3} (\xi_{11} + \xi_{22} + \xi_{33})$

или

$$\|\xi_{ik}\| = \|\xi_{ik} - \xi_0 \delta_{ik}\| + \xi_0 \|\delta_{ik}\|. \quad (5.12)$$

По определению первый инвариант девиатора D_{ξ} равен нулю. Поэтому девиатор характеризует скорости деформации элемента среды, не связанные с изменением объема. Формула (5.11) характеризует скорость деформации бесконечно малого элемента среды как суперпозицию двух деформаций. Первая из них описывается девиатором и характеризует скорость искажения формы элемента без изменения его объема. Вторая составляющая (шаровой тензор) характеризует скорость равномерного все-стороннего растяжения или сжатия этого элемента.

Поскольку девиатор симметричен, он может быть приведен к диагональному виду. Главные направления девиатора скорости деформации сдвига совпадают с главными направлениями тензора. Характеристическое уравнение девиатора имеет вид $|\eta_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$ или

$$\lambda^3 + \eta^I \lambda = 0. \quad (5.13)$$

Второй инвариант равен

$$\begin{aligned} \eta^I &= \begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{32} & \eta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_{33} & \eta_{31} \\ \eta_{13} & \eta_{11} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{6} \left[(\xi_{11} - \xi_{22})^2 + (\xi_{22} - \xi_{33})^2 + (\xi_{33} - \xi_{11})^2 + 6(\xi_{12}^2 + \xi_{23}^2 + \xi_{31}^2) \right]; \end{aligned} \quad (5.14)$$

Величину

$$H = +2 \sqrt{|\eta^I|} = +\sqrt{2\eta_{ik}\eta_{ik}} \quad (5.15)$$

называют интенсивностью скоростей деформации сдвига. Эта величина, как и интенсивность деформации сдвига Γ будет часто встречаться в дальнейшем.

Зная поле скоростей, можно установить связь начальных и текущих координат материальной частицы и перейти к вычислению деформаций. В работах [1 - 6] показано, что при описании эффектов упрочнения существенную роль играет суммарное формоизменение окрестности материальной частицы. Ее мерой служит *степень деформации сдвига*

$$\Lambda = \int_0^t H(\tau) d\tau. \quad (5.16)$$

Интегрирование выполняется вдоль всей траектории материальной частицы - от ее начального положения ($\tau=0$) до текущего ($\tau = t$).

Вопросы

1. Как вычислить скорость относительного изменения объема?
2. Что называется интенсивностью скоростей деформаций сдвига?
3. Какие виды деформации характеризуют компоненты тензора скорости деформаций?
4. В чем заключается физический смысл линейного инварианта?
5. Почему девиатор скорости деформаций можно привести к диагональному виду?

Лекция 6. УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

В основе теории упругости лежит закон Гука, устанавливающий линейную зависимость между компонентами напряжений и деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx},\end{aligned}\tag{6.1}$$

где E - модуль упругости I рода, μ - коэффициент Пуассона, G - модуль упругости II рода. Закон упругого изменения объема, устанавливающий связь между шаровыми тензорами напряжений и деформаций, имеет вид

$$\sigma = 3\bar{k}\varepsilon,\tag{6.2}$$

где \bar{k} - модуль объемной упругости, определяемый:

$$\bar{k} = \frac{E}{3(1-2\mu)}.\tag{6.3}$$

Соотношения между модулями упругости I и II рода имеет вид

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.\tag{6.4}$$

Теорию можно считать завершенной, если она оформлена в замкнутую систему. В классическом варианте современной механики деформируемого твердого тела решение сводится к замкнутой системе, которая включает:

– дифференциальные уравнения движения (или равновесия при отсутствии инерционных сил)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho X_j = \rho \frac{dv}{dt},\tag{6.5}$$

где σ_{ij} – напряжения Коши, ρX_j – объемные силы, ρ – плотность.

Соотношения между шаровыми тензорами и девиаторами напряжений и деформаций, а также между шаровыми и девиаторными составляющими тензоров напряжений и тензоров скорости деформаций, например для упругой области, имеют вид

$$\sigma = 3\bar{k}\varepsilon, \quad D\sigma = \psi D\varepsilon \quad (6.6)$$

или для теории пластического течения несжимаемой среды

$$D\sigma = \bar{\mu} D\xi, \quad (6.7)$$

где $\bar{\mu}$ – коэффициент вязкости сплошной среды.

Условие несжимаемости сплошной среды имеет вид

$$\operatorname{div}\vec{V} = \xi_{xx} + \xi_{yy} + \xi_{zz} = 0, \quad (6.8)$$

где ξ_{xx} , ξ_{yy} , ξ_{zz} – диагональные компоненты тензора скорости деформации.

В систему входят уравнения связи между перемещениями и деформациями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.9)$$

а в теории течения между скоростями и скоростями деформаций

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.10)$$

Данную систему, как и методы ее решения, условно можно разделить на следующие группы:

- уравнения статики, которые включают только напряжения;
- уравнения кинематики, включающие условие постоянства объема;
- уравнения связи между статическими и кинематическими характеристиками.

Особенности поведения различных материалов с точки зрения механики деформируемых твердых тел проявляются в уравнениях связи между компонентами тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций.

В последующих параграфах приведены уравнения, описывающие поведение однородных изотропных материалов при упругих и пластических

деформациях. Связь между девиаторными составляющими определяется в виде

$$\frac{\sigma_x - \sigma}{\varepsilon_x - \varepsilon} = \frac{\sigma_y - \sigma}{\varepsilon_y - \varepsilon} = \frac{\sigma_z - \sigma}{\varepsilon_z - \varepsilon} = \frac{2\tau_{xy}}{\gamma_{xy}} = \frac{2\tau_{yz}}{\gamma_{yz}} = \frac{2\tau_{zx}}{\gamma_{zx}} = 2G. \quad (6.11)$$

Вопросы

1. Какие гипотезы используются при выводе системы уравнений теории упругости?
2. Чем отличаются уравнения связи, записанные по теории упругости и теории течения?

Лекция 7. ТЕОРИЯ МАЛЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Экспериментально установлено, что закон упругого изменения объема с высокой точностью подтверждается вплоть до давления 5000 МПа, не достигаемого в обычных процессах обработки давлением. Давление в технологических процессах поверхностного пластического деформирования в технологии машиностроения составляют несколько сотен мегапаскалей. Это дает основание распространить пропорциональность шаровых тензоров на пластическую область.

В теории малых пластических деформаций уравнение связи девиатора напряжений и девиатора деформаций имеет вид

$$D_{\sigma} = \psi D_{\varepsilon}, \quad (7.1)$$

причем

$$\psi = \frac{2T}{\Gamma} = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i}. \quad (7.2)$$

Как правило, значение ψ устанавливают опытным путем из механических испытаний на растяжение или сжатие образцов. При развитых пластических деформациях упругими составляющими и изменением объема обычно пренебрегают, считая $\varepsilon=0$. При этом средние напряжения могут изменяться в широких пределах.

Функцию $\bar{\mu}$, как и коэффициент ψ , можно определить через интенсивности тензоров напряжений, деформаций и скоростей деформаций

$$\bar{\mu} = \frac{2T}{H} = \frac{2\sigma_i}{3\xi_i}, \quad (7.3)$$

если свойства среды известны. В то же время T представляет собой функцию $T = T(\Gamma, H, \theta)$, где θ – температура. Данную зависимость обычно определяют при линейном напряженном состоянии или чистом сдвиге и в соответствии с гипотезой единой кривой используют при анализе других видов напряженного состояния. Для теоретических расчетов часто применяют сравнительно простые виды формул (7.2) и (7.3), например

$$\sigma = \sigma_s + A \Gamma^b, \quad (7.4)$$

где σ_s – предел текучести материала; величины A и b предполагаются константами материала или функциями температуры и скоростей деформаций.

Таким образом, для материалов с заданными свойствами рассмотренная система уравнений является замкнутой и может быть решена, если известны соответствующие граничные условия. Система содержит 17 уравнений и 17 неизвестных: шесть компонент тензора напряжений, шесть компонент тензора скорости деформаций, три компоненты вектора скорости, интенсивность касательных напряжений и скорость деформаций сдвига H .

Поскольку решение такой системы связано с большими математическими трудностями, при теоретическом анализе процесса пластического течения вводят дополнительные предположения о свойствах среды или другие упрощающие допущения.

Для преодоления трудностей аналитического решения замкнутой системы рассмотренных выше уравнений ее дополняют условием пластичности. С помощью данного условия описывают соотношение между напряжениями при переходе материала в пластическое состояние.

Для ряда материалов (свинца и сталей в горячем состоянии) упрочнением обычно пренебрегают. Тогда интенсивность напряжений σ_i или T в процессе деформации остается постоянной во всем объеме пластически деформируемой части заготовки

$$\sigma_i = \sqrt{3} T = \text{const}. \quad (7.5)$$

Константу в уравнении (7.5) определяют экспериментально при линейном растяжении или чистом сдвиге. Для тензора напряжений данное условие имеет вид

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 6k^2 = 2\sigma_s^2, \quad (7.6)$$

где k – пластическая постоянная материала (предел текучести на сдвиг);

σ_s – предел текучести при растяжении.

Присоединение условия (7.6) к системе (6.5) ничего не дает, поскольку она по-прежнему остается статически неопределимой. В то же время для плоского напряженного состояния ($\sigma_3=0$) и плоского деформированного состояния ($\varepsilon_3=0$) система (6.5) приводится к двум уравнениям

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad (7.7)$$

которые содержат только 3 неизвестных.

Для указанных случаев система при $k = \text{const}$ становится замкнутой и может быть решена графическими или численными методами [1 - 6]. Условие пластичности можно интерпретировать в виде условия постоянства интенсивности напряжений или деформаций или как предельное значение среднеквадратического отклонения главных напряжений от их среднего значения.

Для плоского деформированного состояния условие пластичности интерпретируют так же, как условие постоянства максимальных касательных напряжений. Для этого случая в главных осях данное условие имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k. \quad (7.8)$$

При этом

$$\tau_{max} = k. \quad (7.9)$$

Рассмотренных выше уравнений достаточно для большинства практических задач как в упругой, так и в пластической областях.

Следует отметить, что в связи с существенными математическими трудностями точные методы, рассматривающие полную систему уравнений, включая уравнения связи, применяют крайне редко. Данное обстоятельство служит одной из причин, обуславливающих высокий интерес ученых к вариационным методам и высокую популярность среди инженеров-механиков проекционных методов, в частности, метода конечных элементов.

Сравнительный анализ статических и кинематических методов приведен в работе [24]. Кинематические методы позволяют учитывать инерционные эффекты, определять предельные условия деформирования с указанием возможных видов дефектов, прогнозировать свойства изделия. Например, в результате сведения данной системы к краевой задаче и ее решения в соответствии с вариационным принципом Лагранжа при полном математическом описании геометрии исследуемых областей путем расчетов на ЭВМ в 15-й лекции установлено распределение расчетных

величин (перемещений, деформаций и напряжений) в сечениях конструкций под действием заданных нагрузок. Там же рассмотрен эффект концентрации напряжений в областях с глубокими вырезами. Знание эффектов такого рода и умение управлять ими позволяет выявить и лучше понять особенности явлений, протекающих не только в обрабатываемых материалах, но и в объеме формообразующего инструмента, подойти к оптимизации его конструкции и условий эксплуатации.

Вопросы

1. В какой форме записывают условие пластичности?
2. Какие уравнения образуют замкнутую систему в теории пластичности?

Лекция 8. УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Определяющие уравнения характеризуют конкретные физико-механические свойства изучаемой среды и вместе с кинематическими зависимостями и законами сохранения (массы, количества движения, энергии) наряду с начальными и граничными условиями образуют замкнутую систему уравнений. Это позволяет описать динамическое и кинематическое состояние каждой материальной частицы.

Определяющие уравнения теории пластичности выводят, как правило, на основании результатов экспериментальных исследований. При проведении эксперимента и построении искомых зависимостей руководствуются определенными принципами, используют гипотезы и допущения, позволяющие выделить наиболее существенные свойства пластической среды и описать их математически. В частности условие перехода из упругого состояния в состояние текучести для одноосного растяжения (сжатия) обобщают и формулируют условие текучести (условие или критерий пластичности) при трехмерном напряженном состоянии в виде

$$f_1(\sigma_{i,j}) = \text{const} = c_s, \quad (8.1)$$

где c_s - константа материала (постоянная текучести), связанная с пределом текучести. При этом предполагается, что пока тело находится в упругом состоянии, выполняется неравенство $f_1(\sigma_{i,j}) < 0$, а переходу в пластическое состояние соответствует условие (8.1). Для большей наглядности вводят девятимерное пространство напряжений Π_9 тензора σ_{ij} . Каждому тензору T_σ в пространстве Π_9 соответствует некоторая точка, а условию пластичности некоторая замкнутая *поверхность пластичности* Σ .

Поверхность пластичности не проходит через начало координат и должна быть выпуклой. Поскольку любой луч, исходящий из начала координат, пересекает ее только один раз, первое свойство очевидно: состояние пластичности достигается при напряжениях, отличных от нуля. При упрочнении материала поверхность пластичности меняется в процессе деформирования: она может расширяться, приобретать ребра, конические точки и т.д.

Если условие пластичности не зависит от σ_0 , оно интерпретируется цилиндрической поверхностью, осью которой является прямая, перпендикулярная к девиаторной плоскости. Поэтому для определения свойств условия пластичности рассматривают след этого цилиндра на девиаторной плоскости - кривую C , называемую кривой пластичности.

Для изотропного тела значения $f(\sigma_{i,j})$ не должны изменяться при повороте системы координат в соответствии с принципом независимости от системы отсчета А.А.Ильюшина. Поскольку условие текучести в силу представлений указанной теории инвариантно по отношению к преобразованиям системы координат, выражение (8.1) можно записать в виде

$$f_2 [I_1, I_2, I_3] = c_s. \quad (8.2)$$

Экспериментально доказано, что при больших всесторонних давлениях вплоть до ≈ 1000 МПа металлы деформируются упруго, в связи с чем можно считать, что в (8.2) первый инвариант тензора напряжений $I_1(T\sigma)$ не влияет на условие перехода в пластическое состояние. Так как пластические деформации при всестороннем растяжении (сжатии) не возникают, условие текучести (8.2) представляют в виде функции девиаторов напряжений

$$f_3 [I_2(D\sigma), I_3(D\sigma)] = c_s. \quad (8.3)$$

Экспериментально подтверждено, что выпуклая кривая c_s на девиаторной плоскости преобразуется в окружность, если третий инвариант не оказывает существенного влияния на условие текучести. Уравнение (8.3) в этом случае записывают

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_s = 6\tau_s, \quad (8.4)$$

или, сохраняя обозначения координат, введенные ранее,

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2\sigma_s = 6\tau_s. \quad (8.5)$$

Уравнения (8.4) и (8.5), известные в теории пластичности как условия текучести Мизеса, называют также условием постоянства интенсивности касательных напряжений. Уравнения (8.4) и (8.5) широко используют при решении различных прикладных задач теории пластичности. Наряду с условием Мизеса используют также условия текучести Треска-Сен-Венана, Ишлинского-Хилла и др.

При изотропном упрочнении считают, что поверхности текучести (8.1) - (8.5) или, как их еще называют *поверхности нагружения*, не являются фиксированными как для идеально пластического материала, а расширяются по мере упрочнения, другими словами радиус цилиндрической поверхности увеличивается.

Реальные металлы характеризуются более сложным, в частности, трансляционным упрочнением. Модель упрочняющейся среды с учетом эффекта Баушингера описывается уравнением

$$f(\sigma_{i,j} - a_{i,j}) = F(q), \quad (8.6)$$

где F - возрастающая функция параметра q , характеризующего предшествующую пластическую деформацию.

При теоретическом и экспериментальном исследовании пластического течения, как правило, руководствуются следующими требованиями и ограничениями в соответствии с принятыми гипотезами, допущениями и упрощениями теорий пластичности:

- среда изотропна;
- свойства металла одинаковы при растяжении и сжатии;
- эффект Баушингера отсутствует;
- первый и третий инварианты тензора напряжений не оказывают влияния на условия текучести.

Особую важность при решении задач технологической механики представляет определение параметров напряженного состояния. Одним из подходов к решению данной задачи, наиболее полно рассмотренных в литературе, является определение напряжений по кинематике пластического течения. Не затрагивая пока вопроса о методах определения напряжений, отметим, что значение T может быть определено разными способами. Например при известной кинематике процесса величину T определяют по диаграмме T - Λ , совпадающей с диаграммой T - $\bar{\Gamma}$ для монотонного процесса. Другой способ определения значений Λ , разработанный Г.Д.Делем, состоит в построении диаграмм пластичности на основе измерений твердости. В зависимости от принятого закона изменения формы и размеров поверхности нагружения (поверхности пластичности), называемого также законом упрочнения, можно получить различные теории пластичности.

По данным работ [1-3] наиболее удовлетворительное описание поведения металлов дают деформационная теория и теория пластического течения, используемые при исследовании процессов обработки металлов давлением.

Вопросы

1. Какие гипотезы используют в теории течения?
2. Почему условие перехода металла в пластическое состояние представляют в форме девиаторных зависимостей?
3. С каким инвариантом тензора напряжений связывают условие перехода металлов в пластическое состояние?

Лекция 9. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ И РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Кинематические зависимости и законы сохранения не дают полной системы уравнений, позволяющих вместе с начальными и граничными условиями целиком описать движение сплошной среды. К дополнительным соотношениям, позволяющим сделать систему замкнутой относятся так называемые *определяющие соотношения*, характеризующие конкретные физические свойства изучаемой среды. Примером определяющих уравнений является закон Гука, связывающий напряжения и деформации в классической теории упругости. Другим примером определяющего уравнения может служить уравнение теории теплопроводности $q = -k \text{ grad}\theta$, связывающее вектор теплового потока с градиентом температуры θ (закон Фурье).

Как правило, определяющие уравнения выводят на основании результатов экспериментальных исследований. Чтобы эти эмпирические зависимости могли правильно описывать поведение материала в условиях, отличающихся от условий проведения эксперимента, установлены некоторые правила, которым должны удовлетворять эти соотношения. К наиболее существенным из них относят принципы макроскопической определенности, физической допустимости и независимости от системы отсчета.

Первый из этих принципов связан с понятием *термомеханического процесса*, происходящего в сплошной среде. Например, рассматривая в соответствии с указанным принципом окрестность фиксированной материальной частицы, полагают, что задан процесс деформации, если тензор деформации данной частицы представлен в виде непрерывно дифференцируемой функции времени на интервале $[t_0, t]$.

Сформулированный академиком А.А.Ильюшиным *постулат (принцип) макроскопической определенности* утверждает, что для данного вещества термомеханическое состояние, т.е. любая термомеханическая величина для материальной частицы M в момент t однозначно определяется процессом $T_\varepsilon(t), \theta(t), t_0 \leq t \leq t_1$.

Принцип физической допустимости требует, чтобы определяющие соотношения были согласованы с физическими законами сохранения. В соответствии с *принципом независимости от системы отсчета* уравнения состояния должны быть ковариантны по отношению к преобразованиям системы координат наблюдателя.

В технологических процессах механической обработки резанием, обработки давлением напряженное и деформированное состояние нагружаемых тел является в общем случае неоднородным, т.е. различным в разных точках тела, и нестационарным, изменяющимся во времени. В то же время при решении задач, выделяя достаточно малую окрестность произвольной материальной частицы, вследствие непрерывности напряженное состояние в этой окрестности считают однородным.

Создание общей теории определяющих уравнений, как отмечал Г.Я.Гун является одной из основных задач важного раздела механики сплошных сред реологии (от греческого слова “*reo*” - *теку, наука о течении материала*). Реология должна ответить на вопрос: каковы напряжения (деформации) в окрестности данной материальной частицы в момент t при известном процессе ее деформирования (нагружения). Более точно реология устанавливает вид функционалов $T_\sigma = T_\sigma[T_\varepsilon(t)]_{t_0}^t$, описывающих термомеханические свойства различных сплошных сред.

Решение этой задачи предусматривает проведение большого объема экспериментальных исследований и создание *реологических моделей*, позволяющих описывать реальные термомеханические свойства веществ. Для испытаний обычно применяют разрывные машины, позволяющие автоматически строить первичную диаграмму растяжения. В этой диаграмме по оси ординат откладывают усилия P , а по оси абсцисс - соответствующие им удлинения Δl . Вид диаграмм растяжения в осях P - Δl зависит не только от свойств материала, но и от размеров испытуемого образца.

Чтобы получить диаграмму, учитывающую только механические свойства, первичную диаграмму растяжения пересчитывают в координатах σ - ε . Ординаты такой диаграммы получают путем деления растягивающей силы P на первоначальную площадь поперечного сечения испытуемого образца. Абсциссы диаграммы напряжений получают делением

абсолютных удлинений расчетной части образца на первоначальную длину.

Полученный таким образом график называют *условной диаграммой напряжений*. Его следует отличать от *истинной диаграммы напряжений*, при построении которой силу P делят на текущую площадь поперечного сечения.

Анализ кривых на участке разгрузки образцов в области упруго-пластических деформаций показывает, что деформация полностью не исчезает, повторное нагружение приводит к повышению предела упругости и потере в значительной степени способности к пластической деформации. Данное явление называется *упрочнением* (наклепом). Аналогичный характер имеют диаграммы напряжений, построенные при сжатии и кручении цилиндрических образцов.

Влияние скорости деформации. Влияние скорости деформации на диаграмму напряжений существенно зависит от температуры. Это связано с тем, что при температуре θ_p , составляющей около 0.4 температуры плавления, а также при ее повышении в деформированном металле происходит с определенной скоростью *процесс рекристаллизации*. Таким образом, при пластической деформации образца, нагретого выше температуры рекристаллизации, наряду с упрочнением протекает процесс разупрочнения, вызванный рекристаллизацией. В работах [4, 5, 6, 36, 37] показано, что характер кривых $\sigma - \epsilon$ определяется *соотношением скоростей* этих двух процессов. При этом материал проявляет *вязкие свойства* в области упругопластических деформаций, а напряжения σ растут с увеличением скорости деформации ξ . В простейшем случае имеет место линейная зависимость $\sigma = \sigma_s + \bar{\mu}\xi$, где $\bar{\mu}$ - коэффициент вязкости.

Влияние скорости деформации и температуры на диаграмму напряжений изучают на специальных испытательных машинах - *пластометрах*, позволяющих проводить растяжение или сжатие при постоянной скорости деформации. Методика испытаний, а также результаты исследований механических свойств многих сталей и сплавов приведены в работе [36].

Анализ данных литературы по растяжению цилиндрических образцов позволяет выделить следующие фундаментальные свойства реального материала: *упругость, вязкость, пластичность*. Используя комбинацию этих свойств, для описания поведения некоторых идеализированных сред вводят простые реологические модели.

Для линейного напряженного состояния принято рассматривать:

1. Модель *линейно-упругой среды*, подчиняющейся закону Гука:

$$\sigma = E\epsilon, \quad (9.1)$$

2. Модель *линейно-вязкой* среды, подчиняющейся закону вязкости Ньютона:

$$\sigma = \bar{\mu} \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (9.2)$$

3. Модель *жесткопластической* среды

$$\sigma = \sigma_s, \quad (9.3)$$

при построении которой предполагают, что при напряжениях ниже предела текучести деформации отсутствуют.

При рассмотрении простейших комбинированных моделей соединяют упругие и пластические элементы. В результате получают:

1. Модель *упругопластической* среды. Общая диаграмма при этом состоит из двух частей: упругой ε^e и пластической ε^p

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p. \quad (9.4)$$

2. Модель *упруговязкой* среды Максвелла. При этом скорость деформации $\dot{\xi} = d\varepsilon/dt$ есть сумма упругой составляющей $\dot{\xi}^e = 1/E \cdot d\sigma/dt$ и вязкой $\varepsilon^p = \sigma/\bar{\mu}$, отвечающей одному и тому же напряжению

$$d\varepsilon/dt = 1/E \cdot d\sigma/dt + \sigma/\bar{\mu}. \quad (9.5)$$

В теории пластичности и ползучести рассматривают также другие более сложные комбинации вязких и пластических свойств. Например, модель вязкопластической среды обладает свойствами линейно-вязкой среды при $\sigma < \sigma_s$ и течет подобно идеально пластическому телу при $\sigma = \sigma_s$.

При изучении *упругонаследственных* сред допускают, что полная деформация складывается из мгновенной упругой деформации $\varepsilon^e = \sigma(t)/E$, которая определяется напряжением $\sigma(t)$, действующим в данный момент времени, и наследуемой деформации. Рассмотренные реологические уравнения (9.1)-(9.5) относятся к частному случаю линейного напряженного состояния.

Вопросы

1. Что является предметом изучения в реологии?
2. Какие виды моделей среды принято рассматривать при анализе линейного напряженного состояния?
3. Как влияет скорость деформации на диаграмму напряжения?
4. На каких принципах основывается построение реологических зависимостей?

Лекция 10. ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ МЕТАЛЛОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ

Очень часто необходимые для реализации технологического процесса или сопутствующие ему деформации, как например при формоизменяющих операциях, обработке поверхности пластической деформацией или лазерной сварке, превышают пластичность материала – степень деформации, при которой образуется трещина, видимая невооруженным глазом и являющаяся браковочным признаком. При обработке материалов концентрированными потоками энергии величина механических нагрузок по сравнению с процессами обработки давлением невелика. Прочность изделия зависит также от распределения температурных и остаточных напряжений, концентрации напряжений, обусловленной влиянием геометрического фактора и других. В связи с этим большое значение для практики имеет получение расчетных оценок деформируемости – способности заготовки выдерживать ту или иную технологическую операцию, не разрушаясь, на стадии проектирования технологического процесса. В работе [2] показано, что задача оценки деформируемости относится к классу задач теории разрушения.

В настоящее время общепринятыми являются представления о механизме разрушения на “дислокационном уровне”. При оценке деформируемости необходимо определение деформаций, при которых образуется магистральная трещина, в зависимости от свойств материала, напряженного состояния, истории деформирования, температурно-скоростных условий. Очевидно, такое определение сейчас невозможно.

Например, опираясь только на дислокационный механизм, невозможно сделать однозначный вывод о повышении пластичности при сжатии по сравнению с растяжением, хотя известно, что при сжимающих напряжениях вследствие снижения потенциальных барьеров подвижность дислокаций повышается. При этом облегчается как их объединение, так и распад этих объединений. В механике разрушения ограничиваются рассмотрением развития трещин в идеально упругом или упругопластическом материале, когда основной объем материала находится в упругом состоянии и лишь вблизи вершины трещины материал деформируется пластически.

При больших пластических деформациях и сжимающих напряжениях наряду с зарождением и развитием дефектов происходит их “залечивание”. Экспериментальные данные о “залечивании” дефектов при различных напряженных состояниях и историях деформирования чрезвычайно ограничены. В то же время существуют примеры другого рода,

свидетельствующие о благоприятном воздействии процесса, связанного с пластической деформацией, на первоначально литую структуру с дефектами, выявленными на микроуровне. Наряду с рассмотренными существует также другой класс машиностроительных задач, требующих оценки деформируемости. Например, в работе [7] показано, что для решения одной из важнейших проблем машиностроения - повышения качества выпускаемой продукции, необходимо дальнейшее повышение научной обоснованности назначения системы параметров поверхностного слоя деталей машин и приборов. Отсутствие научного подхода к назначению параметров состояния рабочих поверхностей деталей, как правило, приводит к необоснованному завышению требований, а следовательно, удорожанию выпускаемых машин без должного повышения их надежности. Несущая способность и контактное взаимодействие зависят от состояния поверхностного слоя в целом (макроотклонения, волнистости, шероховатости, физико-химических свойств), а не только от параметров шероховатости. Таким образом, требуется комплексный подход к изучению состояния поверхностного слоя деталей машин.

Из работ, касающихся контактного взаимодействия реальных поверхностей, известно, что характер деформации микронеровностей и волн в значительной мере определяется их физико-механическими характеристиками. В работах А.Ю.Ишлинского, Э.В.Рыжова и других, рассматривающих характер деформации микронеровностей, показано перемещение начала пластических деформаций в зону более высоких давлений. В работе [7] высказана точка зрения, что к решению проблем контактного взаимодействия следует подходить с учетом предположения о том, что материал ведет себя как упругопластический, а не жесткопластический. Например, установлено, что первостепенное влияние на переход упругих деформаций в пластические при одинаковом материале оказывает поверхностная микротвердость $H_{\mu 0}$ или поверхностные остаточные напряжения. Установлено также, что контактное сближение микронеровностей, соответствующее началу их пластических деформаций, в значительной мере определяется физико-механическими характеристиками $E, \mu, \sigma, H_{\mu \text{исх}}, H_{\mu 0}, \sigma_0$.

Под пластичностью в дальнейшем понимается накопленная к моменту разрушения пластическая деформация (или параметр Удквиста). Зависимость пластичности от вида напряженного состояния характеризуется диаграммой пластичности, являющейся механической характеристикой материала. Диаграмму пластичности обычно строят в координатах коэффициент жесткости, или вид напряженного состояния η , - пластичность $e_{пр}$.

Предполагается, что диаграмма пластичности, построенная в указанных координатах, является единой для различных напряженных состояний. В работе [2] рассмотрены различные выражения коэффициента жесткости напряженного состояния через напряжения, полученные разными авторами. Например, по Я.Б.Фридману

$$\eta = (\sigma_1 - \sigma_3) / [2 \sigma_1 - 2\mu (\sigma_2 - \sigma_3)], \quad (10.1)$$

где μ - коэффициент Пуассона, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$;
по С.И.Губкину

$$\eta = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 [\sigma_{max}] \quad (10.2)$$

или

$$\eta = 1 - (\sigma_{max} - \sigma_{min}) / (2 |\sigma_{max}|). \quad (10.3)$$

Теория деформируемости С.И.Губкина предназначена для изучения зависимости пластичности металлов от температуры, скорости деформирования, структуры и т. п. Она позволяет выбрать температурно-скоростные условия деформирования, при которых будет достаточно высокая пластичность металла. Данная теория подходит близко к ответу на вопрос об оценке режимов обработки в смысле напряженно-деформированного состояния металла и его разрушения, так как рекомендует строить диаграммы пластичности металла в зависимости от напряженного состояния. Эту проблему Л.Д.Соколов решал, основываясь на известном положении, что схема напряженного состояния оказывает влияние как на силу, потребную для деформирования, так и на пластичность - деформируемость.

Методы оценки деформируемости получили развитие в работах Л.Д.Соколова, Г.А.Смирнова-Аляева, М.А.Зайкова, В.Н.Перетяtko и В.Л.Колмогорова. Теория разрушения от потери устойчивости листового материала при его штамповке-вытяжке была предложена А.Д.Томленовым. Наиболее простой метод оценки деформируемости заключается в следующем. Предполагается, что деформирование происходит без разрушения, если накопленная деформация удовлетворяет неравенству

$$\bar{e} < e_{np}(\eta), \quad (10.4)$$

где e_{np} - пластичность, зависящая от вида напряженного состояния, температуры, скорости деформации. Обычно предполагается, что она не зависит от градиента напряжений и деформаций и истории деформирования. Методика оценки деформируемости по критерию (10.4) приведена в работе [2]. Современная теория деформируемости металла при обработке металлов давлением была предложена В.Л.Колмогоровым [5].

Математический аппарат этой теории позволяет определить допустимые пластические деформации, не приводящие к растрескиванию. Он основан на экспериментальных данных о зависимости пластичности от показателя напряженного состояния или на так называемых диаграммах пластичности. В соответствии с данной теорией формула, показывающая степень использования запаса пластичности к моменту времени t , имеет вид

$$\psi = \int_0^t B \frac{H d\tau}{\Lambda_\rho}, \quad (10.5)$$

где B - коэффициент, учитывающий историю деформирования.

Если принять, что в исходном недеформированном состоянии $\psi = 0$, а в момент разрушения $\psi = 1$, то условие деформирования за период времени $0 - t$ элементарного объема металла без разрушения будет иметь вид

$$\psi = \int_0^t B(\tau) \frac{H(\tau) d\tau}{\Lambda_\rho[k(\tau)]} d\tau < 1, \quad (10.6)$$

где H , k , Λ_ρ , - известные функции, описывающие напряженно-деформированное состояние некоторого элементарного объема металла и его пластические свойства. Условие деформирования без разрушения (10.5) не учитывает залечивание микродефектов за счет явлений рекристаллизации и за счет диффузионных процессов, которые происходят при высоких температурах. В теории В.Л.Колмогорова подынтегральное выражение в условии деформирования без разрушения для процессов горячего деформирования отличается от выражения (10.5) наличием множителя $E(t-\tau)$ - коэффициента наследственности. Данный коэффициент изменяется от 0 до 1 и является монотонно убывающей функцией аргумента. Одной из основных величин, входящих в условия деформирования без разрушения, является Λ_ρ , точнее зависимость Λ_ρ от показателя напряженного состояния σ/T в условиях, близких к монотонному деформированию, т.е. диаграмма пластичности, которая должна быть определена экспериментальным путем. Использование рассмотренного критерия затруднено тем, что в литературе не приводятся данные о коэффициентах E и B при различных процессах пластического деформирования. Поэтому эти коэффициенты обычно принимают равными единице.

Вопросы

1. В чем особенности и значение диаграмм пластичности?
2. В чем особенности современной теории деформируемости металлов?
3. Что такое «запас пластичности»?

РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В УПРУГОЙ И ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЯХ

Лекция 11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Основные уравнения связи между напряжениями и деформациями зависят от конкретных соотношений пластичности и ползучести, положенных в основу расчета. Наряду с теориями пластического течения, наиболее разработанными и широко используемыми, применяют также теории пластичности и ползучести деформационного типа. Основные положения и уравнения этих теорий, используемые для конкретных расчетов, достаточно известны [1, 3, 19].

Опираясь на представления деформационной теории пластичности, рассматривают задачи активного нагружения, когда приближенно можно полагать, что компоненты напряжений в выделенных точках тела пропорциональны одному параметру. В этом случае реализуется так называемое “простое нагружение”. Такое представление является достаточно обоснованным и удобным для дисков турбин и ответственных деталей конструкций, гравюры матриц и штампов горячего деформирования. При простом нагружении различные теории приводят к одинаковым результатам. Деформационная теория пластичности опирается на следующие гипотезы.

1. Объемная деформация материала является упругой

$$\varepsilon = \frac{1-2\mu}{E} \sigma + \varepsilon_{\theta}, \quad (11.1)$$

где ε и σ - средняя объемная деформация и среднее напряжение, соответственно равные;

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}); \quad \sigma = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}); \quad (11.2)$$

$\varepsilon_{\theta} = \alpha \theta$ линейное расширение.

2. Девиатор деформаций подобен девиатору напряжений

$$e_{kl} = \bar{\mu} (\sigma_i, \theta) S_{kl}, \quad (11.3)$$

где компоненты девиатора $e_{kl} = \varepsilon_{kl} - \delta_{kl} \varepsilon$, $S_{kl} = \sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma$.
Символ Кронекера (единичный тензор)

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \quad (k = 1 \ 2 \ 3).$$

Скалярный коэффициент, являющийся функцией интенсивности напряжений σ_i и температуры θ , удобно представить в виде $\bar{\mu} = \bar{\mu} (\sigma_i, \theta) = \psi (\sigma_i, \theta) / 2G$, где $\psi (\sigma_i, \theta)$ - параметр пластичности, G - модуль сдвига; в упругой области $\psi = 1$. Основные уравнения деформационной теории пластичности можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{kl} - \delta_{kl} \varepsilon = \psi / 2G (\sigma_{kl} - \delta_{kl} \sigma). \quad (11.4)$$

Из уравнения (11.3) следует, что существует единая зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и деформаций ε_i , реализуемая в виде

$\sigma_i = f(\varepsilon_i)$. Интенсивность напряжений $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}$. После преобразований получают

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)]^{\frac{1}{2}}, \quad (11.5)$$

В практических расчетах обычно используют интенсивность деформации растяжения-сжатия

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (11.6)$$

Величины ε_i и σ_i с точностью до числовых коэффициентов выражаются вторыми инвариантами соответствующих девиаторов. С учетом (11.3), (11.4) – (11.6)

$$\varepsilon_i = \frac{\psi}{3G} \sigma_i. \quad (11.7)$$

Наиболее просто пластические деформации определяют методом делительных сеток. Чаще всего применяют сетки, наносимые на плоские

наружные поверхности или поверхности в плоскости разреза заготовок в виде окружностей и прямоугольных сеток. Их наносят типографским, фотографическим способами, травлением, напылением и т.д. Для исследования кинематики объемных пластических течений в технологических процессах с развитыми пластическими деформациями широко применяют составные образцы со свидетелями или координатными сетками в плоскости разреза.

Однако при выборе теории возникает вопрос, в каких разумных пределах и с какой точностью на практике возможно использование более простых соотношений для бесконечно малых деформаций.

Ответ на этот вопрос дан в работе [36]. Поскольку наличие жестких поворотов увеличивает различие между результатами расчетов по указанным формулам, использование формул бесконечно малых деформаций требует дополнительного обоснования. Это относится, в частности, к задачам изгиба пластин и оболочек при прогибах, сравнимых с толщиной, сжатии и изгибе тонких стержней и пластин, в задачах устойчивости упругого равновесия и т.п. Как отмечают авторы работы [36], при определении деформации с погрешностью 5% применимы линейные соотношения при величине изучаемой деформации менее 0.1% и углов поворота $\omega < 0.05$, а в отдельных случаях диапазон определяемых малых деформаций (без учета жестких поворотов) следует сужать еще больше: величина деформаций не должна превышать 0.03.

Данные литературы о распределении твердости в сечениях поверхностного слоя деталей, подвергнутых обработке поверхностным пластическим деформированием, накатыванием, выглаживанием, резанием, косвенно подтверждают, что деформации, достигаемые на практике, значительно превосходят указанные величины. Поэтому применять тензор малых деформаций с компонентами, определяемыми с помощью соотношений (4.13), для описания указанных процессов нельзя. Это заставляет подходить к исследованию указанных технологических процессов методами теории течения. В рамках данной теории экспериментальные исследования сводятся к определению приращений и скоростей деформаций на первом этапе и расчету напряжений в обрабатываемых материалах на втором.

Если исследуют процессы деформирования, при которых направление одной из осей (например z), нормальное к плоскости ячеек делительной сетки, является главным направлением тензоров деформаций, то удобно рассмотреть тензор (4.13), приведенный к главным осям. На практике используют логарифмическую меру деформации, определяемую логарифмом отношения конечной длины к начальной. При использовании метода координатных сеток логарифмические деформации

$$e_i = \ln \frac{ds}{ds_0}, \quad (11.8)$$

где ds, ds_0 - соответственно длина линейного элемента, ориентированного в главном направлении, до и после деформации. Логарифмические деформации широко применяют при описании процессов пластического деформирования, но только для главных направлений тензора (4.13). Интенсивность логарифмической деформации определяют

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2}. \quad (11.9)$$

Если методом делительных сеток исследуется нестационарный процесс пластического деформирования, то для определения приращений деформаций за некоторый достаточно малый промежуток времени Δt при выполнении эксперимента деформацию в этом случае дробят на малые степени так, чтобы на каждой из них был применим аппарат теории течения. При исследовании стационарных процессов определение приращений по искажению прямоугольной сетки значительно упрощается.

Например, модуль скорости движения частиц относительно инструмента в предположении о стационарности процесса вычисляют с помощью формул (4.17), а значения компонент скорости - с помощью формул (4.18). Компоненты тензора скорости деформации в этом случае находят:

$$\xi_x = \frac{v_0}{a_0} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \cos \alpha - a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right); \quad \xi_y = \frac{v_0}{a_0} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \sin \alpha - a \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right); \quad (11.10)$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{2} \frac{v_0}{a_0} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - a \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) \sin \alpha + \left(\frac{\partial a}{\partial y} + a \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \cos \alpha.$$

При осесимметричном деформировании скорость окружной деформации

$$\xi_\varphi = \frac{v_r}{r} = \frac{v_0}{a_0} \frac{a}{r} \cos \alpha. \quad (11.11)$$

Деформированное состояние при стационарном течении изучают с помощью координатных сеток на плоскости разъема образца, остановленного в некоторый момент времени и извлеченного из инструмента. Декартовую сетку после деформации по схемам, приведенных на рисунке в лекции 4, рассматривают как сопутствующую. При изучении деформации допускают, что в пределах отдельно взятой ячейки сетки деформация однородна по объему, ограниченному ячейкой.

В настоящее время для расчета деформированного состояния в процессах прокатки, прессования используют подход к описанию процесса

течения при совместном использовании эйлеровых и лагранжевых координат. Алгоритмы вычисления компонентов скорости, скорости деформаций и техника проведения экспериментов подробно обсуждаются в работах [4, 36].

Примером применения такого подхода служит экспериментальная картина линий тока на рис. 11.1 и соответствующие ей картины полей расчетных значений Λ и H на рис. 11.2. Картины получены после проведения автором эксперимента по горячему прессованию на прессе ГПЗОО из контейнера диаметром 30 мм составной заготовки из стали X12 с координатной сеткой в плоскости симметрии профиля. Внешний вид прессуемого профиля, области течения и ее положение в системе координат для расчета параметров соответствуют схемам, приведенным на рисунке в лекции 4.

Поле интенсивности скорости деформации сдвига на рис. 11.2,а получено также с помощью ЭВМ после вычисления H на линиях тока по формуле (5.15). Картина изолиний на рис. 11.2,б образована расчетными значениями степени деформации сдвига, полученными в результате замены интегрирования в (5.16) операцией суммирования. Результаты расчета температуры для данного примера приведены в 13-й лекции.

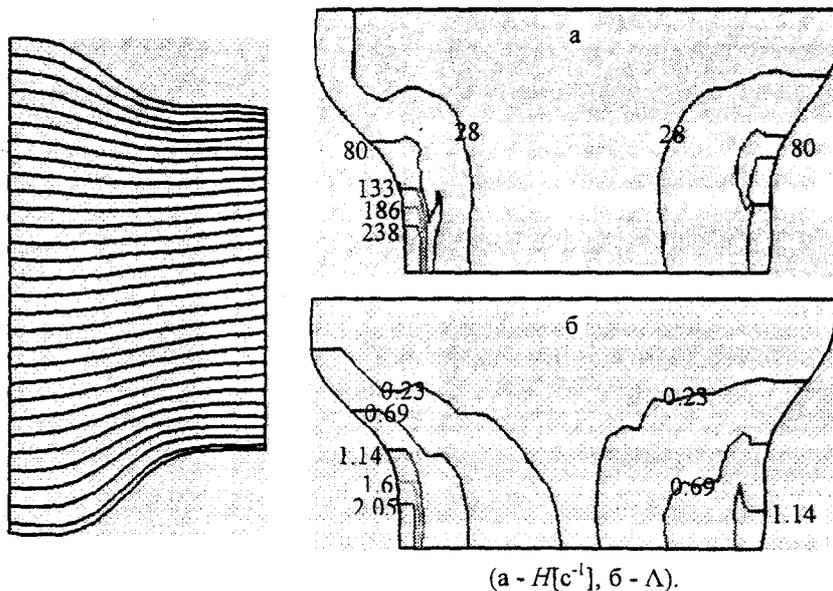


Рис. 11.1

Рис. 11.2

Вопросы

1. На каком представлении основывается гипотеза о простом нагружении?
2. В чем отличие изучения стационарных и нестационарных процессов?

Лекция 12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПО КИНЕМАТИКЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Не затрагивая вопроса определения напряжений внутри упругой области, когда связь между напряжениями и деформациями подчиняется закону Гука, рассмотрим методы определения напряжений в области течения при развитых пластических деформациях. Если кинематика пластического течения установлена, то по уравнениям пластического состояния рассчитывают компоненты девиатора напряжений, а гидростатическое напряжение находят интегрированием дифференциальных уравнений равновесия.

Наиболее просто определяются компоненты девиатора напряжений по соотношениям деформационной теории пластичности (6.7) или (7.1), (7.2). Если изучают процессы деформирования, при которых направление z , нормальное к плоскости ячейки делительной сетки, является главным направлением тензоров деформации, то с помощью уравнений связи находят компоненты S_x , S_x и τ_{xy} , а величину S_z из соотношения $S_z = -S_x - S_y$. При таком способе определения напряжений в формулу (7.2) входит интенсивность логарифмической деформации, которую находят по формуле (11.9). Интенсивность напряжений находят по интенсивности деформаций из кривой течения, построенной путем испытаний материала на растяжение или сжатие. Такой способ определения девиатора напряжений является корректным лишь при простом деформировании. Обычно данное требование смягчают, полагая такое определение достаточно точным.

Для определения компонентов девиатора напряжений по найденному полю скоростей в соответствии с теорией течения необходимо использовать соотношения (7.3). Для определения T по кривой деформирования необходимо определить накопленную степень деформации Λ . Если началу пластического деформирования соответствует $t = 0$, то вправе воспользоваться формулой (5.16).

Чаще всего процесс деформирования разбивают на ряд последовательных этапов, принимая деформирование в пределах каждого из них близким к простому. В этом случае находят приращения деформации во всех узлах делительной сетки на линиях тока (см. рисунок в лекции 4) от упругой области до рассматриваемой точки. Путем суммирования находят накопленную степень деформации в выделенных точках.

Согласно рекомендациям работы [2], для определения гидростатического давления σ необходимо использовать одно из дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial(S_{xx} + \sigma)}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(S_{yy} + \sigma)}{\partial y} = 0.$$

На практике стараются выбрать то уравнение, для которого имеются достаточно четкие граничные условия. В работе [5] показано, что произвол в выборе одного из дифференциальных уравнений с целью его точного удовлетворения и игнорирование второго уравнения, которое не удается тождественно удовлетворить, не может быть обосновано.

Лучшее приближение дает минимизация по σ функционала J , выражающего невязку в удовлетворении дифференциальных уравнений равновесия. В работе [5] показано, что минимизация функционала должна производиться на классе функций $\sigma = \sigma(x, y)$, удовлетворяющих граничным условиям. К аналогичной задаче минимизации функционала относительно σ приводит задача вычисления компонентов тензора напряжений через определенные экспериментальные функции в методе фотоупругости.

Вопросы

1. Какие локальные параметры пластического течения необходимо определить для вычисления напряжений?
2. Какие напряжения вычисляют по установленному полю скоростей?
3. Почему невозможен произвол в выборе уравнения для определения гидростатического давления в области пластического деформирования?

Лекция 13. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Интенсификация режимов обработки приводит к тому, что температура процесса становится одним из факторов, ограничивающих производительность операций, оказывая существенное влияние на качество и точность изделий. В связи с этим возникает необходимость управления тепловыми явлениями при различных видах обработки металлов.

Трудности интегрирования уравнения теплопроводности заставляют прибегать к выводу формул, пригодных для расчета температуры в точках

поверхности контакта. Указанный подход к расчету температуры при механической обработке на основе метода “источников” получил развитие в работе АН.Резникова [22].

Во многих случаях данных о средней температуре на поверхности контакта инструмента с заготовкой недостаточно для получения полной картины их теплового состояния. Поэтому для изучения эффектов, сопутствующих процессам пластического течения при механической обработке, уравнение теплопроводности включают в систему уравнений теории упругости и механики деформируемого твердого тела. В данном случае искомыми локальными параметрами, характеризующими состояние сплошной среды, являются напряжения, деформации, скорости и температура.

Для описания процесса переноса тепла в твердых телах, сопровождающего технологические процессы их обработки давлением, резанием, лазерной и других, рассматривают дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее перенос тепла в движущейся сплошной среде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \nu \sigma_{ik} \xi_{ik}^P, \quad (13.1)$$

где $\chi = \frac{\lambda}{c\rho}$ - называется коэффициентом температуропроводности, а величина $\nu = 1/[J\rho c]$.

Вывод данного уравнения связан с составлением уравнения теплового баланса с учетом сделанных предположений и гипотез. Во-первых, выделяя в деформируемой среде объем W , ограниченный поверхностью S , будем следить за изменением за время dt температуры произвольной материальной частицы на $d\theta$. В целом для объема W поглощаемое тепло будет равно $\iiint_W (d\theta c\rho) dW$ и состоит из двух частей: теплового потока

через поверхность S и тепла, выделяющегося в процессе его деформации.

Во-вторых, тензор скорости деформации T_ξ может быть представлен в виде суммы двух тензоров: тензора скоростей упругих (обратимых) деформаций $T_\xi^e = \left[\xi_{ik}^e \right]$ и тензора скоростей пластических (необратимых) деформаций $T_\xi^p = \left[\xi_{ik}^p \right]$.

Величина $\sigma_{ik} \xi_{ik}^p$ в (13.1) называется диссипативной функцией, она представляет скорость рассеяния энергии в единице объема. При этом за время dt в элементе объема dW выделится тепло $\left(\sigma_{ik} \xi_{ik}^p / J \right) dW dt$, где J - механический эквивалент тепла.

Общее количество тепла равно интегралу $\frac{1}{J} \iiint_W \sigma_{ik} \xi_{ik}^P dW dt$. Для вычисления

потока тепла через поверхность S в механике сплошных сред вводят гипотезу о существовании вектора теплового потока $\vec{q} = \vec{q}(x, t)$, причем количество тепла, протекающего за единицу времени через поверхность S , равно потоку вектора через эту поверхность: $Q = \iint_S q_n dS$.

$$\iiint_W (d\theta c \rho) dW = - \iint_S q_n dS dt + \frac{1}{J} \iiint_W \sigma_{ik} \xi_{ik}^P dW dt. \quad (13.2)$$

Далее после преобразования интеграла по поверхности в интеграл по объему

$$\iiint_W \left(\frac{d\theta}{dt} \rho c + \frac{dq_i}{dx_i} - \frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^P}{J} \right) dW = 0 \quad (13.3)$$

приходят к выражению

$$\frac{d\theta}{dt} \rho c - \frac{dq_i}{dx_i} - \frac{\sigma_{ik} \xi_{ik}^P}{J} = 0. \quad (13.4)$$

В качестве второй гипотезы связывают вектор теплового потока \vec{q} с градиентом температурного поля θ зависимостью (закон Фурье)

$$\vec{q} = - \lambda \text{grad} \theta. \quad (13.5)$$

где λ - некоторая величина, называемая коэффициентом теплопроводности. После подстановки (13.5) в уравнение (13.4) получают уравнение теплопроводности, которое после деления обеих частей на ρc , записывают в виде (13.1).

Данное уравнение устанавливает связь между пространственными и временными изменениями температуры тела $\theta(\vec{x}, t)$. Поскольку

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial x_i} v_i,$$

а напряжения и скорости деформации заранее неизвестны, уравнение (13.1) не может рассматриваться без анализа движения сплошной среды и одновременного определения поля скоростей и напряжений. Таким образом, краевая задача теории теплопроводности является *связанной*, поскольку она объединяет теорию теплопроводности и механику сплошных сред. Уравнение (13.1) представляет линейное

дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами $v_i(\bar{x}, t)$ при производных $\partial\theta/\partial x_i$. Это уравнение относится к параболическому типу и имеет в общем случае бесконечное множество решений. Для того, чтобы из этого множества выбрать конкретное, однозначно характеризующее рассматриваемый процесс, необходимо к основному уравнению присоединить краевые условия. К ним относится начальное условие

$$\theta(\bar{x}, 0) = \varphi(x), \quad (13.6)$$

характеризующее распределение температуры внутри тела в начальный момент времени, и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела S (граничные условия). Наиболее типичными при изучении процессов обработки металлов являются следующие типы граничных условий.

Граничное условие I рода задает распределение температуры по поверхности тела в любой момент времени

$$\theta|_S = \psi(M, t), \quad (13.7)$$

где M – точка поверхности S .

Граничное условие II рода задает плотность теплового потока в каждой точке поверхности тела как функцию времени

$$q_n|_S = \psi(M, t). \quad (13.8)$$

Здесь q_n – проекция вектора теплового потока на направление внешней нормали \vec{n} к поверхности тела.

Граничное условие III рода описывает конвективный теплообмен между поверхностью тела и окружающей средой по закону Ньютона

$$q_n|_S = \alpha(\theta_S - \theta_\infty), \quad (13.9)$$

где θ_∞ – температура окружающей среды; α – коэффициент теплообмена ($\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{град}$).

Граничное условие IV рода описывает теплообмен поверхности с омывающей его жидкостью или газом, а также теплообмен соприкасающихся твердых тел в предположении, что температура соприкасающихся поверхностей одинакова. При этом наряду с равенством температур имеет место равенство тепловых потоков

$$-\lambda \left(\frac{\partial\theta}{\partial n} \right) \Big|_S = -\lambda_c \left(\frac{\partial\theta}{\partial n} \right)_c. \quad (13.10)$$

Применение данного граничного условия предусматривает решение еще одной температурной задачи – анализ распределения температур в окружающей среде. Поскольку поверхность тела покрыта слоем окислов или

смазки, значения теплофизических констант поверхностного теплообмена известны приближенно. Поэтому во многих случаях приходится ограничиваться приближенным описанием условий на поверхности, граничными условиями первого или третьего рода.

При задании температурных граничных условий наибольшие трудности связаны с описанием процесса передачи тепла между пластически деформируемым телом и инструментом. Строгий подход к этой проблеме предусматривает совместный расчет температурных полей для этих тел, т.е. решение двух достаточно сложных задач с согласованием решений на границе раздела.

Вместе с тем во многих случаях из-за отсутствия полной информации о значениях теплофизических констант на контактных поверхностях, а также сложного влияния на процессы теплопередачи пленок окислов или смазок, уместно ограничиться приближенным описанием граничных условий путем решения сравнительно простых задач о контакте полуограниченных тел.

При моделировании процесса горячей объемной штамповки в работе [4] рассматривают два вида граничных условий: *идеальный тепловой контакт* при наличии теплового потока, вызванного контактными касательными напряжениями и скоростями, и *наличие пограничного слоя, обладающего температурным сопротивлением*. При расчете температуры в системе “инструмент–заготовка” области инструмента присваивают индекс, например 1, а области заготовки – индекс 2. В этом случае первый вид граничных условий описывают уравнением

$$T(\theta) \cdot v_k f_p = -\lambda_1(\text{grad}_n \theta)_1 + \lambda_2(\text{grad}_n \theta)_2, \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad (13.11)$$

где $T(\theta)$ – интенсивность напряжений материала заготовки; v_k – скорость движения частиц пластической области относительно инструмента на границе контакта; f_p – коэффициент пластического трения; λ_1 и λ_2 – коэффициенты теплопроводности материала инструмента и заготовки; t_1 – время контакта инструмента с заготовкой.

Условие (13.11) выражает равенство тепловых потоков, направленных в инструмент и заготовку, тепловому потоку, вызванному на границе контактными касательными напряжениями и скоростями. При $f_p=0$ или $v_k=0$ условие (13.11) переходит в граничное условие IV рода. Условие $f_p=0$ выполняется для идеально гладкого инструмента, а условие $v_k=0$ имеет место после завершения операции формоизменения.

При наличии на границе контакта с инструментом пограничного слоя, обладающего температурным сопротивлением (толщиной слоя и его

теплоемкостным сопротивлением пренебрегают), из условия непрерывности теплового потока по границам получают уравнения

$$\lambda_1 R (\text{grad } \theta)_1 = \theta^* - \theta^{**}; \lambda_2 R (\text{grad } \theta)_2 = \theta^* - \theta^{**}; 0 \leq t \leq t_1 \quad (13.12)$$

где R – температурное сопротивление пограничного слоя (его значение может быть вычислено, если известна толщина слоя и его теплофизические характеристики); θ^* – температура инструмента на границе контакта; θ^{**} – температура заготовки на границе контакта.

Для периода охлаждения заготовки и штампа принимают условие конвективного теплообмена по закону Ньютона, в котором коэффициент теплообмена $\alpha = \alpha(\theta)$ является функцией времени и температуры

$$\mp \lambda_{1,2} (\text{grad } \theta)_{1,2} = \alpha(\theta_\infty - \theta), t_1 < t \leq t_0, \quad (13.13)$$

где θ_∞ – температура окружающей среды; t_0 – длительность теплового контакта. Знак “–” и индекс 1 в уравнении (13.13) относятся к инструменту; знак “+” и индекс 2 – к заготовке. К условию (13.13) приводится также условие радиационного теплообмена, которому соответствует определенная функция $\alpha(\theta)$.

При моделировании технологических процессов механической обработки рассматривают [22] граничные условия I рода. Последние в технологической теплофизике вводят тогда, когда по известной (например, найденной экспериментально) температуре поверхности детали или инструмента требуется определить температуру внутри этих тел. Частным случаем условий первого рода является изотермическая граница. Граничные условия второго рода используют применительно к контактными поверхностям изделия или инструмента, задавая какой-либо закон изменения и численные величины источников.

Если теплообменом граничной поверхности с окружающей средой пренебречь нельзя, используют граничные условия III рода. Граничное условие IV рода возникает, если рассматриваемое тело соприкасается с другим телом.

При лазерном термоупрочнении область разогрева до высоких температур мала по сравнению с остальными поверхностями тела. Тепло отводится от обрабатываемого лазером участка поверхности в окружающие объемы в основном вследствие теплопроводности. В этих условиях тепловой поток с нагретой поверхности вследствие теплоотдачи относительно мал и им пренебрегают. Эти условия существенно упрощают

аналитическое решение уравнения (13.1). При лазерной обработке удельное

количество теплоты, выделяемое источниками нагрева Q , определяется эффективной мощностью источника нагрева.

Результаты расчетов автора, приведенные на рисунках, иллюстрируют степень влияния на температурное поле в заготовке и инструменте эффектов выделения тепла в объеме пластически деформируемого металла и на границе их контакта. Распределение температуры на рис.13.1 относится к области пластического течения на рис.11.1 в плоскости симметрии прессуемого профиля. Температурное поле соответствует прессованию заготовки диаметром 30 мм из стали X12, нагретой до 1050 °С. Расчет температуры выполнен для условий горячего прессования со скоростью 0.5 м/с в предположении о стационарном пластическом течении, равномерном начальном распределении температуры и адиабатических условиях. Наблюдаемое увеличение температуры в периферийных слоях по сравнению с центральной частью сечения свидетельствует о выделении тепла вследствие пластической деформации (рис.13.1 и 13.2).

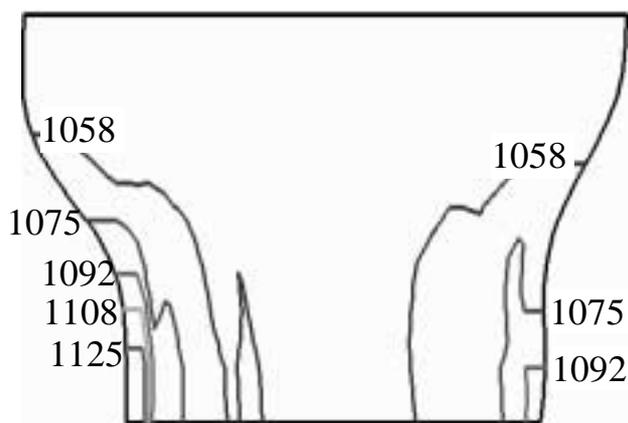


Рис.13.1

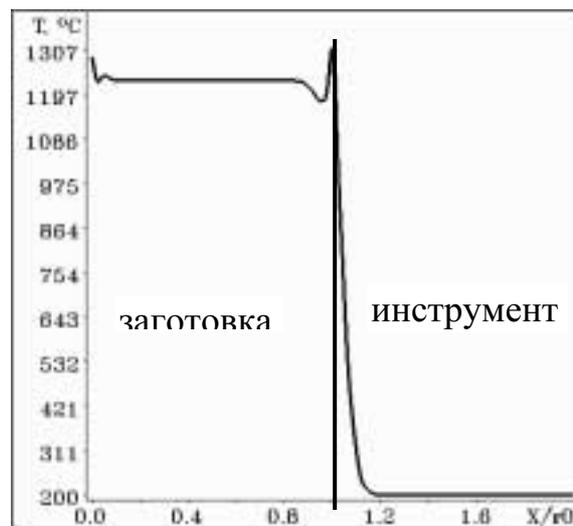


Рис.13.2

При вычислении мощности пластической деформации учтена зависимость T от температуры и скорости деформации. С этой целью в программу вычисления температуры введена стандартная вычислительная процедура аппроксимации табличных значений $T(H, \theta)$ с помощью двумерных сплайн-функций и базы данных физико-механических свойств. Приведенный пример показывает, что максимальное увеличение

температуры деформируемого металла в результате пластической деформации для рассмотренного случая составляет 122°C.

График на рис.13.2 соответствует распределению температуры в прессуемой заготовке и инструменте с учетом выделения тепла в результате трения на поверхности их контакта через 0.08 с после начала прессования. Расчеты выполнены для условий горячего прессования с коэффициентом трения $f_p = 0.2$ при равномерном нагреве заготовки до 1200°C и равномерном предварительном нагреве матрицы до 200°C. Увеличение температуры металла вблизи поверхности контакта для рассмотренного случая составляет 100°C. Одновременно возрастает температура матрицы. Температура поверхности инструмента для указанного момента времени составляет 950 °C.

При сравнении расчетных графиков, полученных с помощью разработанной конечно-элементной модели, с аналогичными графиками, полученными в работе [12], и с результатами экспериментальных измерений температуры матриц при горячем прессовании сталей установлено их хорошее количественное и качественное совпадение. Это свидетельствует о том, что разработанная математическая модель учитывает не только закономерности передачи тепла в системе “металл-инструмент”, но и эффекты, соответствующие реальным условиям пластического деформирования .

Хорошее совпадение результатов расчетов с данными экспериментальных исследований и универсальность разработанных вычислительных процедур позволяют рекомендовать предложенную методику для анализа теплофизических явлений в технологических системах при других видах обработки, связанных с пластической деформацией (резания, поверхностного пластического деформирования и других).

На кафедре технологии машиностроения ВлГУ применяют рассмотренную методику при выполнении исследований для решения различных машиностроительных задач, требующих расчета и анализа температуры. С помощью разработанных программ выполнен анализ температурных полей в других сложных технологических системах (в наладках гидравлических прессов), при обработке резанием, в режущем инструменте, деталях кокилей и пресс-формах.

Составной частью исследований в указанном направлении является разработка нового вида программных продуктов – универсальных программ для решения различных технологических задач. Реализация таких алгоритмов и программ в комплексе с программами расчета напряжений и выбором надежных критериев приводит к разработке

оптимизационных моделей и созданию проектирующих систем. Особенности алгоритма и одной из таких программ, разработанных по методике автора и применяемой в ВлГУ при проектировании прессовых матриц с гравюрой сложной формы, рассмотрены в лекции 19.

Вопросы

1. Какие условия относятся к граничным условиям 1-го рода?
2. Почему задачу теории теплопроводности называют связанной?

Лекция 14. ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Диапазон их влияния исключительно широк - от существенно негативного в одних конструкциях и при одних условиях работы до существенно позитивного в других.

В то же время в большинстве случаев остаточные напряжения играют отрицательную роль. При воздействии внешних нагрузок в процессе дальнейшей механической обработки или эксплуатации остаточные напряжения, суммируются с напряжениями от действия внешних сил. Напряжения превышают предел упругости, что приводит к неравномерности пластической деформации, потере устойчивости, короблению, искривлению, скручиванию и другим отрицательным эффектам.

В зависимости от преобладающего влияния внешних воздействий (температурного или силового фактора) проблему снижения остаточных напряжений и изменения их знака рассматривают в рамках механики твердого деформируемого тела с двух точек зрения: на основе анализа термических и деформационных остаточных напряжений.

Например, неравномерный нагрев и изменение объема тела вследствие температурного расширения, фазовых или структурных превращений приводят к возникновению упругих и пластических деформаций. Данные, приведенные в работе [42], свидетельствуют о значительной неоднородности распределения остаточных напряжений на поверхностных участках сталей, термоупрочненных излучением CO₂-лазера.

Установлено, что несмотря на многообразие экспериментальных данных, распределение остаточных напряжений подчиняется определенным закономерностям. Значение и знак остаточных напряжений на термоупрочненных участках поверхности зависят от соотношения остаточных пластических деформаций, вызванных локальным тепловым воздействием и объемными эффектами структурных превращений. Знание закономерностей образования остаточных

напряжений и их связей с режимами операций обработки позволяет регулировать распределение остаточных напряжений на обрабатываемых участках поверхности для обеспечения высоких служебных характеристик.

Следуя рекомендациям работы [28], соответствующую задачу можно сформулировать следующим образом: в начальный момент времени ($t = 0$) материал исследуемой области находится в естественном (ненапряженном и недеформированном) состоянии в некотором неоднородном температурном поле $\theta_0(\mathbf{x})$. При остывании до температуры среды θ_1 на область действуют различные тепловые и силовые нагрузки, часть которых можно рассматривать как управления. Требуется найти управления, минимизирующие уровень остаточных напряжений в конце процесса.

В такой постановке можно рассматривать остаточные напряжения различного происхождения: это могут быть термические остаточные напряжения, деформационные остаточные напряжения за счет неоднородных пластических деформаций, напряжения вследствие фазовых превращений и т.д. В соответствии с рекомендациями работы [28] рассмотрим постановку краевой задачи определения остаточных напряжений. Пусть исследуемое тело занимает объем V трехмерного евклидова пространства. Внутренность области обозначим V , границу - S .

При постановке краевой задачи учитывают следующее.

1. Система остаточных напряжений $\sigma_{i,j}(\mathbf{x})$ является самоуравновешенной.

$$\nabla \sigma = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (14.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \sigma = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (14.2)$$

2. Допускают, что тензор малой остаточной деформации η представим в виде суммы тензоров упругой η^e , пластической η^p и температурной η^θ деформации.

$$\eta = \eta^e + \eta^p + \eta^\theta, \quad \mathbf{x} \in \bar{V}, \quad (14.3)$$

здесь

$$\eta^e = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \alpha_\theta(\theta) d\theta, \quad (14.4)$$

$\alpha_\theta(\theta)$ - коэффициент линейного теплового расширения как функция температуры θ .

3. Остаточные напряжения связаны с упругими остаточными деформациями законом Гука

$$\sigma = E \eta^e, x \in \bar{V}. \quad (14.5)$$

4. Компоненты тензора полной деформации после разгрузки (остаточные деформации) удовлетворяют условиям совместности деформаций, которые эквивалентны обращению в нуль компонент тензора второго ранга

$$\text{Ink } \eta = \text{rot} (\text{rot } \eta)^* = 0, \quad (14.6)$$

где *- символ транспонирования. При заданных пластических η^p и температурных η^θ деформациях решение этой системы относительно остаточных напряжений $\sigma(x)$ ищется в классе непрерывных функций, имеющих почти всюду непрерывную производную второго порядка по координатам.

В работе [28] показано, что в условиях неравномерного нагрева при зависимости механических характеристик материала от температуры наиболее удобным методом для определения остаточных напряжений является решение связанной задачи термоупругопластичности в течение всего периода охлаждения тела от начальной температуры θ_0 до температуры среды θ_1 . Постановка связанной задачи термоупругопластичности позволяет определить напряжения $\sigma_{i,j}(x,t)$, деформации $\varepsilon_{i,j}(x,t)$, перемещения $u_i(x,t)$, температуру тела $\theta(x,t)$ в процессе остывания и остаточные напряжения $\sigma_{i,j}(x)$, перемещения $u_i(x,t_1)$, деформации $\eta_{i,j}(x)$ в конце процесса. Время остывания области обозначено через t_1 . В систему уравнений входят:

геометрические уравнения, уравнение нестационарной теплопроводности

$$c\rho (\partial\theta/\partial t + v \nabla\theta) = \nabla (\lambda \nabla\theta) + W, \quad x \in V; \quad (14.7)$$

уравнение равновесия (для квазистатических процессов)

$$\nabla \sigma + F = 0; \quad x \in V; \quad (14.8)$$

определяющие уравнения термоупругопластичности, конкретный вид которых зависит от принятой теории термоупругопластичности:

$$d\sigma = Dd\varepsilon + R d\theta, \quad x \in V; \quad (14.9)$$

Решение оптимизационных прикладных задач в механике деформируемого тела, соответствующих реальным технологическим процессам, как отмечают авторы работы [28], представляет новое научное направление.

Если в теории оптимального проектирования конструкций имеется большое число решенных задач, то здесь оно невелико. Наиболее развито направление, связанное с оптимизацией нагрева массивных тел перед прокаткой с учетом возникающих при нагреве упругих напряжений. Указанные задачи наиболее полно рассмотрены в монографии А.Г.Бутковского [26]. Другие прикладные оптимизационные задачи изложены в работе Т.К.Сиразетдинова [27].

В работе [28] задача снижения остаточных напряжений поставлена как оптимизационная задача термоупругопластичности. Следует учитывать, что решение большинства прикладных задач термоупругопластичности возможно лишь с помощью численных методов. Поэтому нужно, чтобы целевая функция зависела от текущих, а не от конечных параметров процесса охлаждения.

В работах [19,28,29] также показано, что причиной появления остаточных напряжений является *несовместность упругих остаточных деформаций*.

Полная деформация складывается из упругой и неупругой деформации. В последнюю входят пластическая и температурная деформации. Так как компоненты тензора полной деформации всегда совместны, то несовместность компонент тензора упругой деформации связана с несовместностью компонент тензора неупругой деформации.

Как правило, полная температурная деформация заранее известна, поэтому уменьшить несовместность неупругой деформации и следовательно, остаточные напряжения, можно только с помощью пластических деформаций. В реальных процессах горячей обработки металлов воздействовать на пластические деформации можно лишь на начальной стадии процесса охлаждения, пока предел текучести достаточно низок. Поэтому целевая функция должна учитывать, какие пластические деформации нужно создать в начале процесса охлаждения для минимизации остаточных напряжений в его конце.

Примером служит двухстержневая модель с неодинаковыми начальными температурами стержней θ_0^1 и θ_0^2 . Для определенности принимают, что $\theta_0^1 > \theta_0^2$ и стержни не напряжены.

При остывании до температуры θ_1 обоих стержней в системе возникнут остаточные напряжения. Если считать, что напряженное состояние одноосное и изгиб отсутствует, то условие совместности здесь заключается в равенстве длин стержней.

Остаточные напряжения не возникнут, если для остаточных деформаций будет иметь место условие

$$\eta_{\theta}^{(1)} + \eta_p^{(1)} = \eta_{\theta}^{(2)} + \eta_p^{(2)}, \quad (14.10)$$

$$\text{где } \eta_{\theta}^{(1)} = \int_{\theta_0^{(1)}}^{\theta_1} \alpha_{\theta} d\theta, \quad \eta_p^{(2)} = \int_{\theta_0^{(2)}}^{\theta_1} \alpha_{\theta} d\theta, \quad (14.11)$$

$\eta_{\theta}^{(1)}$, $\eta_p^{(2)}$ - пластические деформации в стержнях при достижении ими температуры θ_1 .

Другими словами, так как в первом стержне, где начальная температура выше, произойдет большая температурная усадка, чем во втором стержне, в нем необходимо создать пластические деформации растяжения относительно второго стержня.

Таким образом, в качестве целевой функции можно выбрать функционал $\Phi[\varepsilon_{i,j}^P, (t_k)]$, где t_k - момент окончания пластического деформирования. Данный функционал служит мерой несовместности неупругих деформаций и может использоваться для оценки остаточных напряжений. Постановка оптимизационной задачи снижения остаточных напряжений с его помощью включает вместе с минимизацией $\Phi[\varepsilon_{i,j}^P, (t_k)]$ ограничения типа неравенств: уравнения краевой задачи термоупругопластичности, связывающие перемещения, напряжения, деформации, температуру и управляющие воздействия a_j (коэффициент теплоотдачи α , поверхностные нагрузки p_i , параметры геометрии рассматриваемого тела и другие).

Вопросы

1. Что является причиной появления остаточных напряжений?
2. Какие требования предъявляют к выбору целевой функции при постановке задачи минимизации остаточных напряжений?
3. В чем положительное и отрицательное значение остаточных напряжений?
4. Какие уравнения записывают при постановке задачи расчета остаточных напряжений?

Лекция 15. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА Ж. ЛАГРАНЖА

Воспользуемся системой (6.5), которая вместе с уравнениями (6.6, 6.9) является замкнутой. Для завершения математической постановки задачи к системе присоединяем краевые условия (1.7). Постановка задачи расчета перемещений, деформаций и напряжений для тел, находящихся в равновесии под действием приложенных нагрузок в системе декартовых координат включает систему дифференциальных уравнений равновесия, уравнения связи между напряжениями и деформациями, соотношения между деформациями и перемещениями, смешанные граничные условия.

Так как массовые и инерционные силы по условию задачи пренебрежимо малы, тензор напряжений должен удовлетворять уравнению равновесия. Расчет полей перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в заготовках и деталях под воздействием температурных полей и механических нагрузок, целесообразно производить на основе вариационного принципа Ж.Лагранжа. Принцип виртуальной работы характеризуется вариацией энергии деформации и потенциала прикладываемых нагрузок.

Суть всякой вариационной задачи сводится к поиску экстремалей функционала, сообщающих ему экстремальные значения. Разработке методов определения экстремалей функционалов посвящен раздел математики, называемый “Вариационное исчисление”. Важность данного раздела в приложениях к инженерным задачам трудно переоценить [3 - 6, 8, 16, 24]. Ряд важных результатов в данном разделе математики в настоящее время применяют к задачам конечно-элементного анализа конструкций [9, 15, 22]. В вариационном исчислении такой подход, когда предполагается заданной некоторая замкнутая относительно конечного числа функций система уравнений с необходимыми граничными условиями и связями, накладываемыми на эти функции, называют *обратным решением вариационной задачи*.

В соответствии с указанным вариационным принципом решение полученной системы уравнений сводится к минимизации функционала, который для задач механики твердого деформируемого тела имеет вид

$$J_{\mathcal{L}} = \int_{\Omega} \Pi_{\nu} d\Omega - \int_S \bar{\sigma}^n \bar{\nu} dS, \quad (15.1)$$

σ^n - напряжения Коши, Π_{ν} - потенциал.

При этом [8, 24] потенциал в функционале (15.1) построен так, что его вариация

$$\delta\Pi_v = T_\sigma \delta T_\xi, \quad (15.2)$$

где \vec{v} - вектор скорости или перемещения, T_ξ - тензор скоростей деформаций или малых деформаций, связанный с \vec{v} .

Вариационное уравнение Лагранжа, соответствующее началу возможных перемещений, записанное применительно к деформируемому телу, имеет вид:

$$\delta\Pi = \delta(U - W) = 0, \quad (15.3)$$

где U - потенциальная энергия деформаций, W - работа внешних сил, $\Pi = U - W$ - полная потенциальная энергия системы.

Величину Π можно представить в матричной форме

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon_0\}^T) \{\sigma\} dV - \int_S \{u\} \{p\} dS = 0, \quad (15.4)$$

где

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{or} \\ \varepsilon_{oz} \\ \varepsilon_{o\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix}$$

векторы напряжений, деформаций, начальных деформаций, перемещений, поверхностной нагрузки в цилиндрической системе координат.

Обратное решение наиболее часто применяется в реализации постановки вариационных задач благодаря развитию численных методов поиска экстремумов функций и широкому распространению средств цифровой вычислительной техники. После разбиения области на конечные элементы, суммирования потенциальной энергии элементов вариацию функционала (15.1) записывают в виде

$$\delta\Pi = \delta \sum_{e=1}^n \Pi_e, \quad (15.5)$$

где Π_e - полная потенциальная энергия конечного элемента. При использовании трехузлового симплекс-элемента с линейной аппроксимирующей

функцией связь между вектором перемещений любой точки внутри элемента и узловыми перемещениями задается выражением

$$\{u\} = [N] \{u\}_e, \quad (15.6)$$

где

$$\{u\}_e^T = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k] \quad (15.7)$$

- вектор узловых перемещений; $[N]$ - матрица функций формы конечного элемента [9, 14, 15, 23].

Зависимость между вектором деформации и вектором узловых перемещений имеет вид

$$\{\varepsilon\}_e = [B] \{u\}_e, \quad (15.8)$$

где $\{\varepsilon\}_e^T = [\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz}]$ - вектор деформаций конечного элемента; $[B]$ - матрица производных. Для изотропных тел связь между напряжениями и деформациями в соответствии с законом Гука имеет вид

$$\{\sigma\}_e = [D] (\{\varepsilon\}_e - \{\varepsilon_0\}), \quad (15.9)$$

где $[D]$ - матрица упругости; $\{\varepsilon_0\} = [\varepsilon_{0r}, \varepsilon_{0z}, \varepsilon_{0\theta}, 0]$ - вектор начальной деформации; E, ν - модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

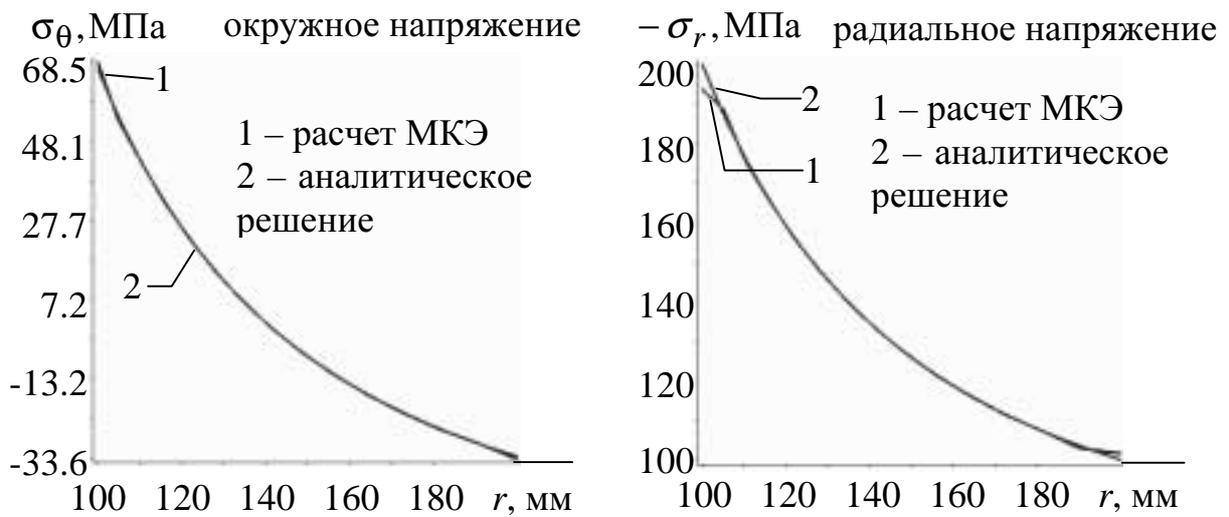
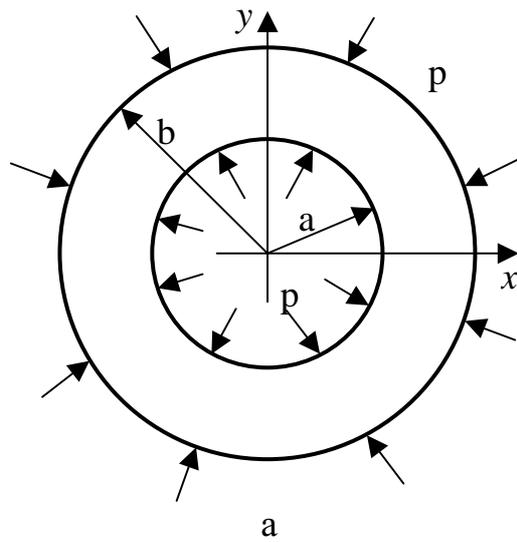
После подстановки выражений (15.6)-(15.9) в уравнение (15.4) и дифференцирования по u приходят к матричному уравнению, записываемому для каждого элемента. Суммирование интегралов в правой и левой частях уравнения (15.10) по элементам дает систему линейных алгебраических уравнений относительно глобальных неизвестных узловых перемещений

$$[K] \{u\} = \{F\}. \quad (15.10)$$

При вычислении интегралов используют универсальные соотношения, приведенные в работе [22]. Рассмотренный алгоритм реализован автором в виде универсальной программы для персональных ЭВМ.

Иллюстрацией к применению изложенной методики служит пример расчета напряжений в толстостенной трубе (рис.15.1,а), нагружаемой радиальным давлением и упирающейся торцами в жесткие плиты. Классическим примером расчета такой конструкции на прочность в теории упругости является решение задачи Габриэля Ламэ. Анализ данной задачи и вывод формул рассмотрены также в работах С.П.Тимошенко, А.А.Ильюшина. Для проверки точности приближенного решения задачи с помощью метода

65



в

Рис.15.1

конечных элементов результаты вычисления с помощью ЭВМ сравним с данными, полученными Г.Э.Аркулисом [42]. Расчеты напряжений МКЭ и по формулам Г.Ламэ выполнены при следующих данных: $a = 100$ мм, $b = 200$ мм, $p_a = 200$ МПа, $p_b = 100$ МПа, $E = 207360$ МПа, $\mu = 0.28$.

Погрешность приближенного решения осесимметричной задачи (рис.15.1,б) относительно аналитического решения при заданных параметрах разбиения области составляет 1% на внутреннем контуре. Погрешность вычисления напряжений (рис.15.1,в) менее 1%. Расчеты показали, что путем увеличения числа узлов и уменьшения размеров элементов погрешность вычисления упругих перемещений можно уменьшить во всей области.

Решение рассмотренной задачи имеет практическое значение для расчета прочности прессовых матриц и пресс-форм под действием радиальных нагрузок. Возможность использования такого подхода основывается на характере разрушения матриц, так как трещины во многих случаях имеют ярко выраженную радиальную направленность. Применение классических формул для расчета конструкций матриц с каналом сложного сечения дает завышенные значения прочности. Наибольшие расхождения с производственным опытом при использовании аналитических формул возникают в случае, когда форма прессуемых профилей при прессовании из круглого контейнера значительно отличается от окружности. В таких случаях прочность при заданных нагрузке и толщине стенки матриц зависит от отношения размеров канала и радиуса закругления в его углах.

На практике из-за трудностей учета данных факторов зачастую необоснованно применяют многослойные конструкции инструмента, что приводит к высокой металлоемкости узлов. Для расчета напряжений при сложной форме границ и различных значениях параметров необходима разработка более сложного алгоритма. Универсальный алгоритм решения данной задачи и методика его численной реализации в виде пакета прикладных программ рассмотрены в работах [25, 32].

Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния сложной конструкции, выполненных автором с помощью программ, разработанных в соответствии с рассмотренным вариационным принципом, приведены на рис.15.2 - 15.4. Расчетные картины изолиний максимальных касательных напряжений и полос интерференции на данных рисунках соответствуют нагружению по наружному контуру области с четырьмя глубокими вырезами. Расчеты выполнены при тех же условиях нагружения и параметрах области на рис.15.2,а: $R_1=60$ мм, $R_2 = 25$ мм, $d = 4.09$ мм,

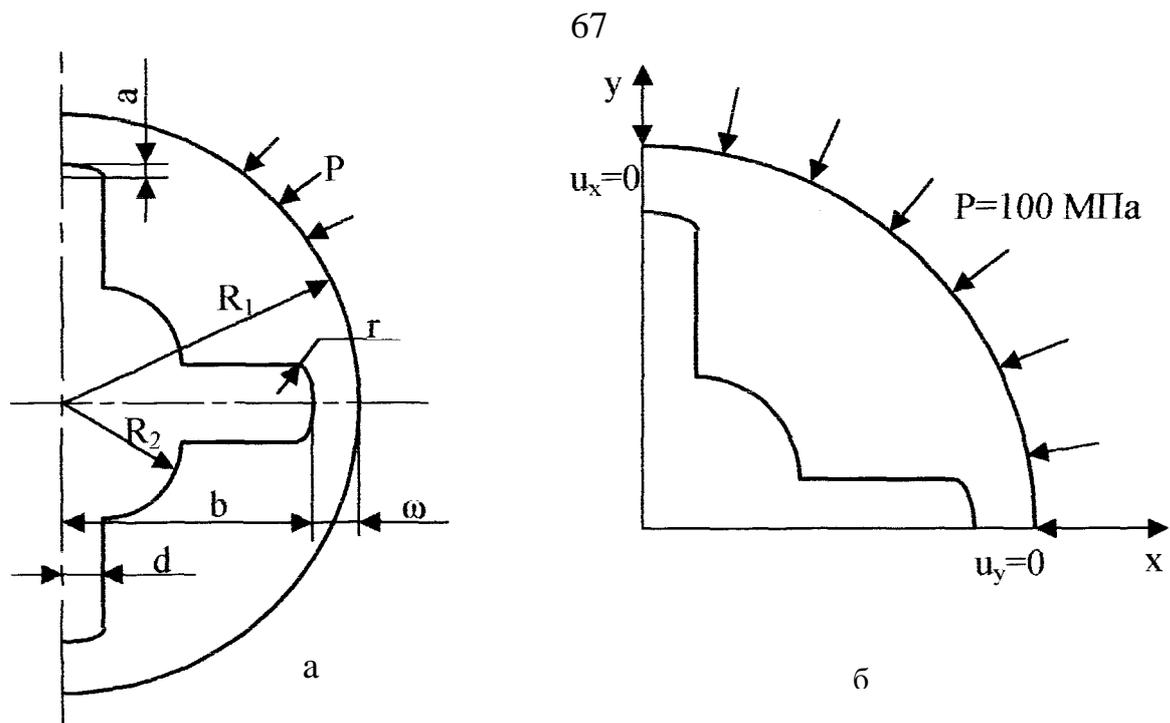


Рис. 15.2.

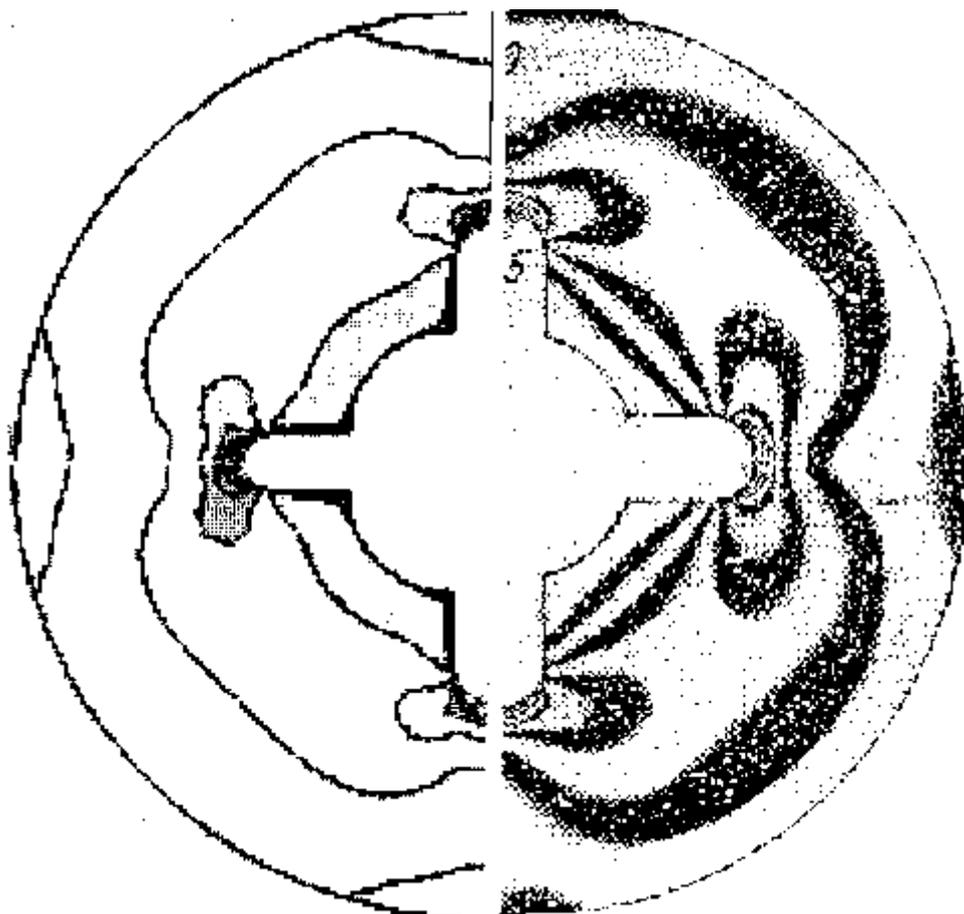


Рис. 15.3.

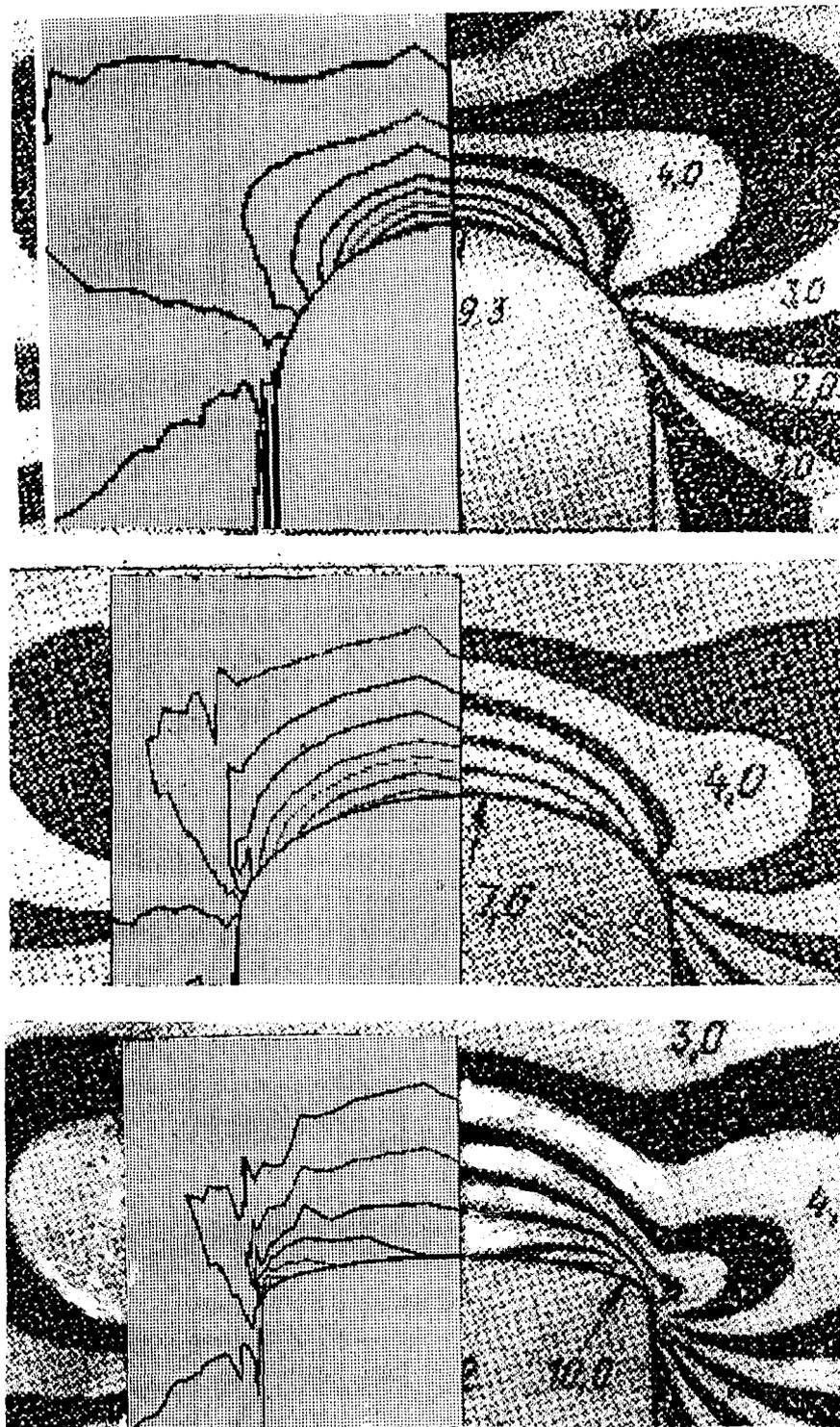


Рис. 15.4

$b = 18.4$ мм, $r = 0.76$ мм, $p = 100$ МПа, что и при моделировании напряжений методом фотоупругости в работе [34].

На рис.15.3 приведена полученная расчетным путем картина (а), образованная линиями равных значений разности главных напряжений, и для сравнения с ней, картина интерференционных полос (б), полученная поляризационно-оптическим методом в работе [34]. Качественное сходство линий уровня напряжений свидетельствует, во-первых, о справедливости допущений при выводе системы линейных алгебраических уравнений в соответствии с изложенной вариационной постановкой задачи и, во-вторых, о достоверности результатов, полученных с помощью вычислительной процедуры, разработанной с использованием матричных соотношений метода конечных элементов. Неравномерный характер распределения напряжений на рис.15.3 свидетельствует о концентрации напряжений в местах вырезов.

Результаты расчетов на рис.15.4 (а,б,в) соответствуют нагружению той же модели (рис.15.2) при $d = 5$ мм для трех рассмотренных вариантов конструкции, соответственно при $a = 5$ мм, $a = 3$ мм, $a = 1$ мм. Расчеты показали, что характер распределения напряжений в донной части вырезов зависит от формы дна выреза, а их максимальные значения в точках концентрации напряжений - от отношения радиуса закругления в углах к толщине стенки (свода) напротив выреза. При одинаковых условиях нагружения наиболее высокий уровень максимальных касательных напряжений соответствует контуру с плоской формой дна выреза (в).

При этом в отличие от вариантов (а) и (б) наблюдаются две точки с максимальным уровнем напряжений, расположенные в углах контура. Замечания о характере неравномерности напряженного состояния, сделанные на основе анализа расчетных картин, полностью совпадают с представлениями о распределении напряжений в данной области, полученными с помощью метода фотоупругости в работе [34].

Хорошее качественное совпадение расчетных картин напряжений с картинками, образованными интерференционными полосами на рис.15.4, и данные таблицы позволяют судить о точности результатов вычисления по изложенной выше методике. По данным таблицы погрешность вычисления коэффициента концентрации напряжений для данного примера относительно значений, полученных другими методами, не превышает 5%.

Это подтверждает правомерность схематизации области, принятых допущений и позволяет сделать вывод о пригодности разработанного пакета программ для расчета напряжений в конструкциях со сложной формой границы.

Сравнение расчетного коэффициента концентрации напряжений с коэффициентами, полученными на плоских моделях

Источник данных	Параметры области		Коэфф. концентрации напряжений		
	ω/r	Ω/R	K_1	k_2	k_2
Данные Б.Н.Ушакова [34]	6	0.5	2.25	2.24	2.18
Расчет автора методом конечных элементов	6.26	0.53	$k = 2.14$		

Вопросы

1. В чем состоит сущность вариационного принципа Ж.Лагранжа?
2. Какие уравнения образуют замкнутую систему?
3. Какие особенности метода конечных элементов обуславливают погрешности решения задач механики твердого деформируемого тела?

Лекция 16. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ

Для повышения достоверности прочностного расчета прессовых матриц, многослойных втулок прессов и деталей, устанавливаемых с натягом, необходим учет влияния на картину напряжений комплекса факторов. В реальных условиях напряжения в инструменте зависят не только от условий на границе контакта с деформируемым металлом, но и от условий их закрепления в блоке инструмента или сопряжения при установке с натягом в обойме. При постановке контактных задач рассматривают взаимодействие системы тел с учетом изменения в процессе нагружения контактных областей и распределения по ним контактных напряжений, возникновение и изменение областей скольжения и сцепления. В настоящее время алгоритмы расчета напряжений в системе заготовка - инструмент, учитывающие нелинейность, обусловленную сложными механизмами на границе контакта с деформируемым металлом, пока не доведены до оптимизационных моделей и промышленных расчетных методик.

В указанном случае при постановке задачи расчета напряжений рассматривают систему контактирующих плоских или осесимметричных упругих тел, которая может быть подвержена температурным воздействиям.

Поскольку граничные условия на поверхности контакта не могут быть заданы однозначно, их представляют в виде следующих неравенств:

$$U_n - \Delta \leq 0; \quad (16.1)$$

$$\sigma_n \leq 0; \quad (16.2)$$

$$(U_n - \Delta) \sigma_n = 0; \quad (16.3)$$

$$|\tau_n| \leq f \sigma_n, \quad (16.4)$$

где U_n - разность перемещений, нормальных к контактирующим поверхностям; Δ - начальный зазор; σ_n - напряжение контактного взаимодействия тел в направлении нормали; τ_n - касательные напряжения; f - коэффициент сухого трения.

Включение условий (16.1) - (16.4) в систему уравнений указывает на нелинейности в процессе решения задачи, связанные с определением зон взаимодействия. Последние зависят от нагрузки, условий взаимодействия контактных поверхностей. Для устранения нелинейности, обусловленной граничными условиями, между рассматриваемыми телами вводят контактный слой. В этом случае, сохраняя общность постановки, систему тел рассматривают как единое тело, состоящее из подобластей с различными физико-механическими свойствами.

Методика решения рассмотренной задачи МКЭ заключается в использовании процедур метода последовательных приближений, так как краевые условия рассмотренной задачи неизвестны заранее. При этом значения искомого давления σ_n на каждом шаге зависят от результатов вычислений на предыдущем шаге.

В соответствии с изложенным подходом при решении контактной задачи в пределах предполагаемой области контакта вводят тонкий слой симплекс-элементов толщиной в один элемент, наделяя материал данного слоя свойствами анизотропного тела. Оси анизотропии удобно связать с местной системой координат $\xi \eta$ с учетом расположения границы контакта.

Согласно введенному соглашению одна из граней контактного конечного элемента, например $i-k$, совпадает с плоскостью контакта и параллельна единичному вектору оси ξ . При назначении параметров упругости материала, отвечающих за деформацию в направлении, перпендикулярном поверхности раздела тел, и сдвиг в плоскости $\xi\eta$, учитывают жесткость

прослойки между телами. Остальные параметры упругости принимают малыми или равными нулю. Рассмотренная модель получила распространение при решении контактных задач в двигателестроении, так как в большинстве случаев правильно отражает характер взаимодействия между телами. В случае модели трансверсально-изотропного тела для плосконапряженного состояния матрица упругости в системе $\xi\eta$ принимает вид:

$$[D^*] = \frac{E_2}{(1-nv_2^2)} \begin{bmatrix} n & nv_2 & 0 \\ nv_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-v_2^2) \end{bmatrix}, \quad (16.5)$$

где $n = \frac{E_1}{E_2}$; $m = \frac{G_2}{E_2}$, E_1 - модуль упругости, характеризующий свойства материала в плоскости слоев, E_2, G_2, v_2 - модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона, характеризующие свойства материала в направлении, перпендикулярном к плоскости слоев.

В работе [9] показано, что вид матрицы $[D^*]$ для данной задачи зависит от ориентации слоев в системе декартовых координат. Например, если слои, расположены под некоторым углом к оси x , что означает поворот осей $\xi \eta$ на данный угол, то для получения матрицы $[D]$ в глобальной системе координат справедливо следующее преобразование

$$[D] = [T][D^*][T]^T, \quad (16.6)$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (16.7)$$

$c = \cos \alpha$, $s = \sin \alpha$, α - угол между осью x и осью ξ .

Сформулирована задача теории упругости, отличающаяся от традиционной постановки наличием контактных граничных условий в виде неравенств. Согласно изложенному подходу, алгоритм расчета напряжений, разработан на основе метода конечных элементов для системы тел, находящихся в равновесии под действием тепловых и механических нагрузок в цилиндрической системе координат в соответствии с вариационным принципом возможных перемещений Лагранжа. Силовое контактное взаимодействие для рассмотренного класса задач обеспечивается путем создания

поля начальных деформаций в охватывающем цилиндре. Радиальные перемещения точек внутренней поверхности приняты равными половине диаметрального натяга. Решение осуществляется итерационным методом.

Вопросы

1. В чем отличие постановки задачи расчета напряжений в телах, сопрягаемых с натягом, от постановки, изложенной в лекции 15?
2. Как изменяется вид матрицы упругих характеристик при решении контактной задачи методом тонкого слоя?

Лекция 17. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧНОСТИ

При анализе технологических операций вопрос перехода упругих деформаций в пластические рассматривают с двух точек зрения. Первая из задач состоит в определении предельно допустимых нагрузок и условий работы ответственных конструкций, когда появление пластических деформаций либо нежелательно, либо допустимо в разумных пределах. При анализе формоизменяющих операций без удаления стружки расчет в приращениях скорости деформаций и приращениях напряжений позволяет получить приближенное представление о развитии области пластических деформаций и изменении напряжений с начала процесса деформирования.

Деформационная теория пластичности [1, 3], хотя и не дает исчерпывающие ответы на все поставленные вопросы, но во многих случаях служит

надежным инструментом для анализа прочности ответственных деталей. Данная теория предполагает наличие однозначной зависимости между суммарными деформациями в упругопластическом теле и напряжениями. Соотношения деформационной теории пластичности для изотропного тела, записанные в виде (11.1) – (11.3), содержат параметр ψ , представляющий скалярную функцию интенсивности напряжений и интенсивности деформаций сдвига.

$$\psi = \frac{3}{2(1+\nu)} E \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\sigma_i^*}{\sigma_i}, \quad (17.1)$$

где σ_i^* - интенсивность напряжений в упругом теле, соответствующая интенсивности деформаций сдвига ε_i .

Экспериментальные исследования показали, что основные зависимости деформационной теории пластичности справедливы при монотонном возрастании нагрузки и в случае *простого* нагружения. В

расчетах принимается, что интенсивности напряжений σ_i и деформаций сдвига ε_i связаны однозначной зависимостью (рис.17.1). Ответ на поставленный вопрос можно получить, если рассматривать задачу расчета конструкций с учетом пластичности, используя уравнения связи деформаций с напряжениями и диаграмму растяжения. Уругопластический расчет выполняют, применяя процедуру последовательных приближений. Метод расчета переменных параметров упругости приведен в работе [30]. Согласно данным И.А.Биргера компоненты тензора пластической деформации

$$\varepsilon_{kl} = e_{kl} - e_{kl}^p = \frac{\psi - 1}{2G} S_{kl}, \quad (17.2)$$

а интенсивность пластической деформации

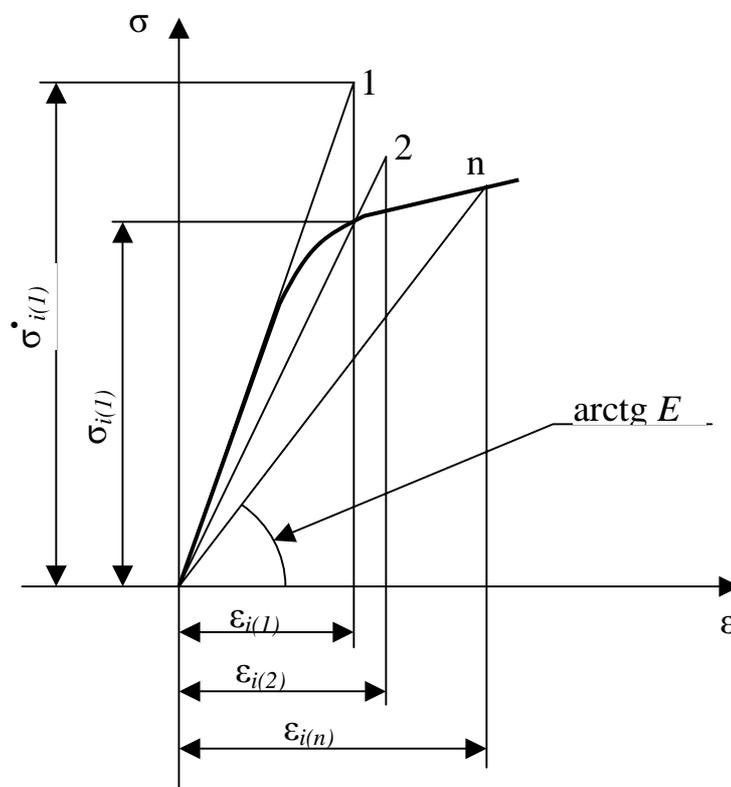


Рис. 17.1

$$\varepsilon_i^p = \frac{\psi - 1}{3G} \sigma_i, \quad (17.3)$$

Для практических расчетов при небольшом уровне пластической деформации (до 1-2 %) пользуются условной диаграммой, так как на этом участке она практически совпадает с истинной. При значительной пластической деформации, в частности при расчете несущей способности,

пользуются истинной диаграммой. Секущий модуль диаграммы растяжения вычисляют

$$E_c = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}. \quad (17.4)$$

Пластическая деформация

$$\varepsilon_0^P = \varepsilon_0 - \frac{\sigma_0}{E}. \quad (17.5)$$

Интенсивность напряжений и пластической деформации для случая растяжения

$$\sigma_i = \sigma_0, \varepsilon_i^P = \varepsilon_0^P. \quad (17.6)$$

Интенсивность деформаций сдвига

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0^P + \frac{2(1+\mu)}{3} \frac{\sigma_0}{E}. \quad (17.7)$$

или с учетом сделанных выше допущений

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \frac{1-2\mu}{3} \frac{\sigma_0}{E}. \quad (17.8)$$

Параметр пластичности представляют в виде

$$\psi = 1 + \frac{3}{2(1+\mu)} \left(\frac{E}{E_c} - 1 \right). \quad (17.9)$$

Полагая $\mu = 0.5$, приближенно можно считать $\psi = E/E_c$.

Численные методы упругопластических расчетов при использовании деформационной теории пластичности основаны [30] на сведении физически нелинейной задачи расчета напряжений при упругопластических деформациях к последовательности линейных задач с переменными параметрами упругости или дополнительными деформациями. Эти методы являются удобными для расчетов напряжений в деталях, формообразующем инструменте при активном нагружении или в заготовках на начальном этапе их деформирования. Для расчета по уравнениям деформационной теории пластичности вводят E^* и μ^* , переменные параметры, которые в отличие от упругих параметров E и μ

зависят от напряженно-деформированного состояния. Выражения для вычисления переменных параметров упругости имеют вид

$$E^* = \frac{3E}{2(1 + \mu)\psi + 1 - 2\mu} \quad (17.10)$$

и

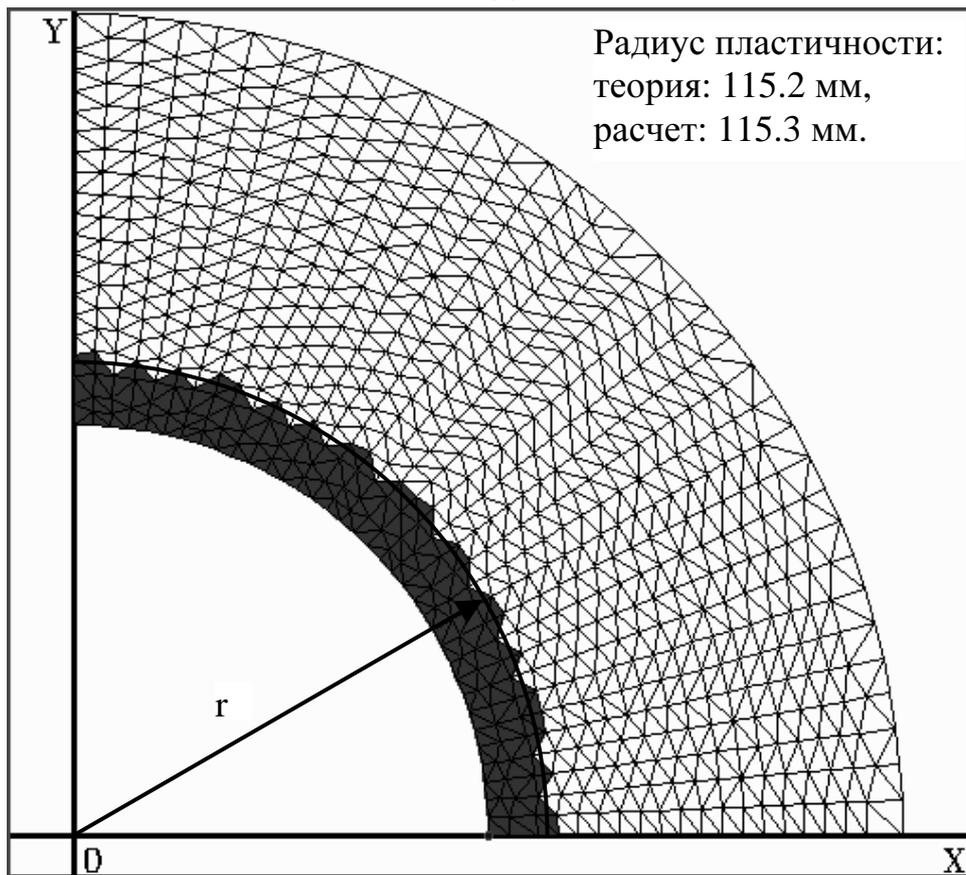
$$\mu^* = \frac{(1 + \mu)\psi - 1 + 2\mu}{2(1 + \mu)\psi + 1 - 2\mu} . \quad (17.11)$$

Основной недостаток рассмотренной теории пластичности состоит в отсутствии учета истории нагружения. Хотя данная теория приспособлена для описания монотонно возрастающего нагружения (теплого или силового) при отсутствии явления разгрузки, во многих практических задачах расчет по деформационным теориям пластичности дает хорошие результаты и вполне пригоден для сравнительной оценки прочности деталей. Примеры применения данной теории в литературе относятся к расчету несущей способности вращающихся дисков, ответственных деталей двигателей внутреннего сгорания. Расчеты, выполненные с помощью конечно-элементной системы FEM, разработанной на кафедре технологии машиностроения ВлГУ [25, 32], позволили распространить изложенную методику на решение задач, представляющих интерес для проектирования технологических процессов обработки и сборки.

Например, результаты расчета, приведенные на рис.17.2, соответствуют поведению конструкции из стали 45 при нагружении наружным (p_b) и внутренним (p_a) давлением в соответствии со схемой на рис.15.1. Расчеты, выполненные при $p_a=200$ МПа, $p_b=0$, $r_a=100$ мм, $r_b=200$ мм, показали, что при данных условиях нагружения металл внутренней части трубы переходит в пластическое состояние.

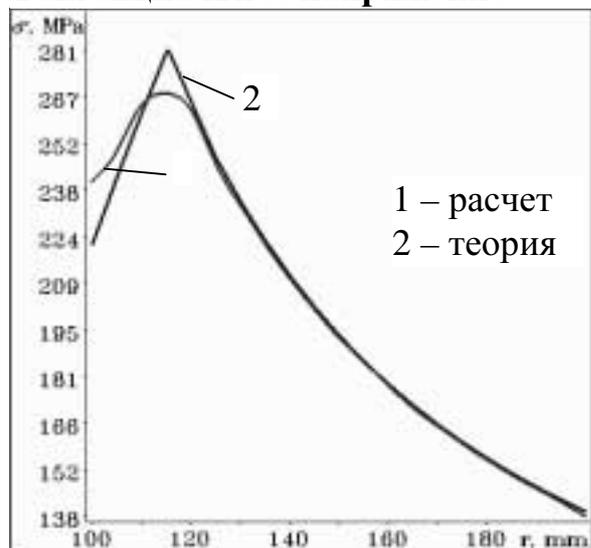
На рис.17.2 область расчетных пластических деформаций занимает лишь часть сечения. Сравнение графиков на рис.17.2,б с графиками на рис.15.1 показывает, что с переходом металла в пластическое состояние изменяется характер распределения тангенциальной составляющей напряжений. Точка, соответствующая максимальному значению тангенциальной составляющей, находится на границе пластической области.

Расчеты показали, что погрешность вычисления радиуса пластичности в данной области для сетки конечных элементов на рис.17.2 составляет 4% и уменьшается до 1% при увеличении количества элементов. Хорошее качественное и количественное совпадение графиков расчетных



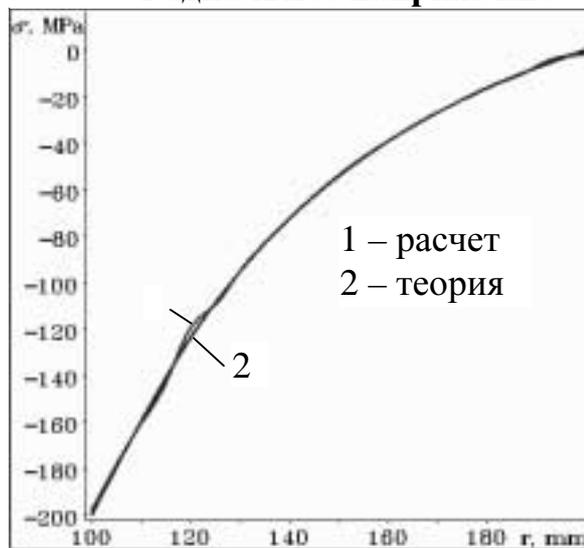
а

Задача Ламе
Тангенциальное напряжение



б

Задача Ламе
Радиальное напряжение



в

Рис. 17.2.

напряжений с одноименными графиками, соответствующими аналитическому решению данной задачи (рис.17.2), также свидетельствует о правомерности сделанных допущений. Это позволяет сделать вывод о пригодности разработанной методики расчета на основе метода конечных элементов для моделирования процесса статического нагружения за пределами упругости при возрастании нагрузки. Хорошее совпадение расчетных данных с теорией при других условиях нагружения позволяет сделать вывод о пригодности модели для более широкого круга задач.

Например, с помощью рис.17.3 можно наблюдать за процессом развития зоны пластических деформаций и увеличением интенсивности напряжений в цилиндрической заготовке, установленной в контейнер пресса, на начальной фазе процесса прессования. Результаты расчетов на рис.17.3 соответствуют двум выделенным этапам деформирования длительностью 250 мкс (а) и 500 мкс (б).

Расчеты выполнены для случая прессования заготовки из стали Р9К5 диаметром 70 мм и длиной 70 мм при температуре 20°C, помещенной в круглый контейнер. По расположению выделенных участков пластичности на рис.17.3,а установлено, что местом начала пластической деформации является наклонный участок заготовки на поверхности ее фаски, соприкасающийся с матрицей.

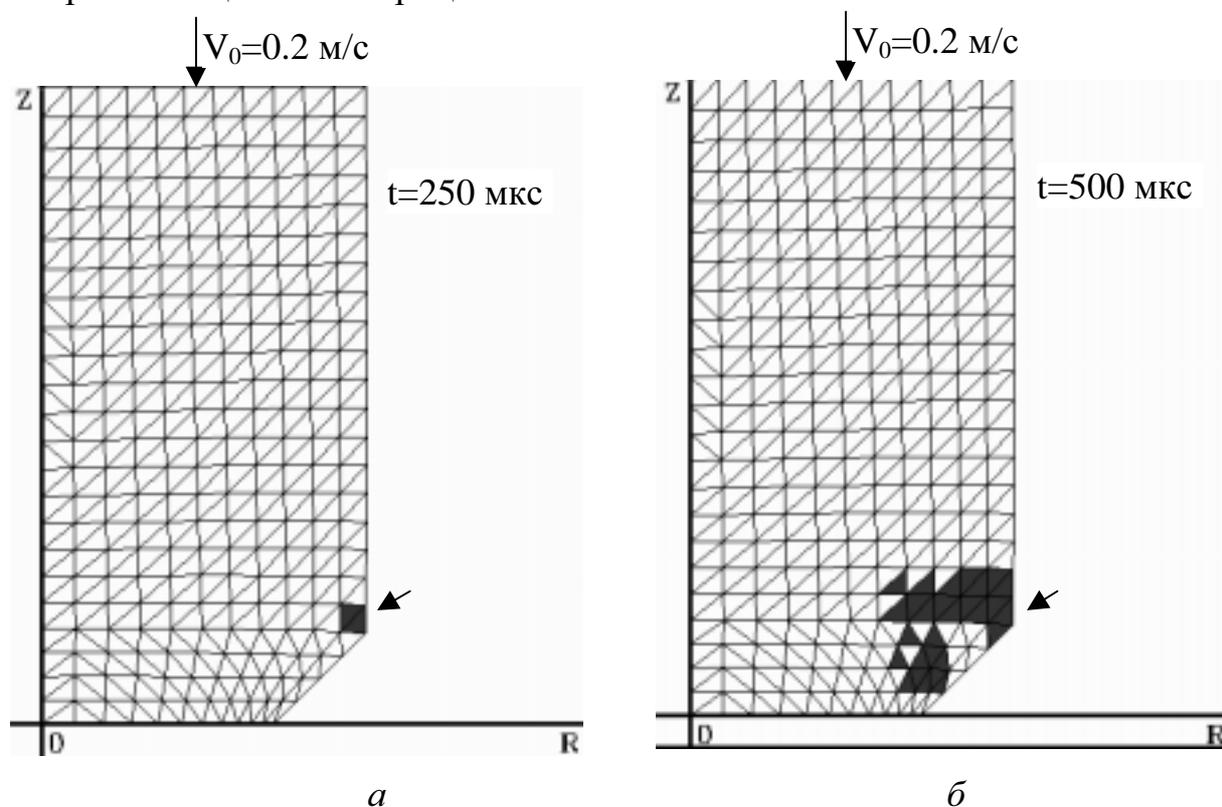


Рис. 17.3

Вопросы

1. Какой теорией следует воспользоваться в последнем примере, чтобы завершить анализ напряженно-деформированного состояния заготовки на последующих этапах процесса ?
2. Можно ли применить рассмотренную теорию для описания процесса обработки резанием?

Лекция 18. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ МЕХАНИКИ

Определение напряженно-деформированного состояния в пластически деформируемых средах во многих случаях стало возможным благодаря применению вариационных принципов механики сплошных сред. Внедрение вариационных методов в практику решения задач обработки металлов давлением [3 - 5, 6, 8, 17, 24] способствовало разработке методов расчета энергосиловых параметров процессов, прогнозирования показателей качества, оптимизации технологических параметров.

При математической формулировке краевой задачи описания пластического течения (см. рисунок в лекции 4), рассматривают систему, объединяющую дифференциальные уравнения движения (6.5), уравнения связи тензоров T_σ и T_ξ (6.7), уравнение неразрывности (6.8) и геометрические соотношения (6.10). В постановку задачи входит также запись уравнения теплопроводности (13.1) и механических граничных условий. Если пренебрегать действием массовых сил и инерционными эффектами, то уравнение (6.5) приводится к форме $div T_\sigma = 0$.

Неизвестными при описании объемных течений для каждой выделенной частицы являются 6 компонентов девиатора D_σ , среднее напряжение, 6 компонентов тензора скорости деформаций T_ξ , три компоненты скорости v_i . В работе [8] при выводе замкнутой системы уравнений с использованием формулы Дж. Стокса для плоской задачи рассмотрена система из 9 уравнений относительно 9 неизвестных, а для объемной - система из 16 уравнений относительно 16 неизвестных.

Центральное место при описании пластических течений занимает задача нахождения кинематически возможных полей скоростей. Значительный вклад в решение данной научной проблемы при решении задач обработки металлов давлением с помощью вариационных принципов внесли

И.Я.Тарновский, В.Л.Колмогоров, А.А.Поздеев, Г.Я.Гун, Л.Г.Степанский и другие. В работах [2, 3, 4, 5, 6, 8] рассмотрены различные подходы к решению задачи о неизотермическом течении несжимаемой среды, основанные на применении функций тока, экспериментально-расчетных методов построения функций поля скоростей, метода конечных элементов.

Ограничивая рассуждения анализом процесса течения при горячем прессовании профилей в конические матрицы, когда поверхность деформируемой области является криволинейной и полностью заключена между поверхностями инструмента, остановимся на методах описания течения в соответствии с принципом виртуальных скоростей.

Один из подходов к построению кинематически возможных полей скоростей, отвечающий указанному принципу, получил развитие в работе [4]. Решение согласно методике, предложенной Г.Я.Гуном, основывается на концепции опорного решения и его уточнения в предположении о стационарных условиях течения. Решение задачи о пластическом течении в исследуемой области с применением начала виртуальных скоростей сводится к построению опорного решения, координатной и проекционной систем функций, приближенному представлению поля скоростей в виде отрезка ряда и определению коэффициентов ряда из системы (18.3).

Приближенное решение в данном случае следует искать в виде отрезка ряда. При этом a_i - неизвестные параметры, определяемые из вариационного уравнения. Поле скоростей имеет вид

$$\vec{v}^{(m)} = \vec{v}_0 + \sum_{i=1}^m a_i \vec{v}^i, \quad (18.1)$$

где \vec{v}_0 - вектор функции опорного поля.

Вводя в заданной области наряду с координатной системой полную линейно-независимую систему векторных функций $\delta \vec{v}_1, \delta \vec{v}_2, \dots, \delta \vec{v}_m$, принадлежащих линейному пространству E и удовлетворяющих однородным граничным условиям, рассматривают поле виртуальных скоростей $\delta \vec{v}_m \in G^{(m)}$

$$\delta \vec{v} = \sum_{i=1}^m b_i \delta \vec{v}^i, \quad (18.2)$$

называемое, проекционной системой.

Подставляя вместо $\delta\vec{v}$ последовательно $\delta\vec{v}^1, \delta\vec{v}^2, \dots, \delta\vec{v}^m$ в уравнение начала виртуальных скоростей [4], получают систему из m уравнений для нахождения коэффициентов a_i

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\sigma} \vec{\sigma}^n \delta\vec{v}^i dS + \int_{S_\tau} \vec{\tau} e_\nu \delta\vec{v}_\tau^i dS + P \delta v^i + \iiint_D \rho \vec{F} \delta\vec{v}^i dW = \\ & = \iiint_D \left(2 \frac{T}{H} \eta_{pq} \delta\eta_{pq}^i + 3\sigma_0 \delta\xi_0^i \right) dW + \iiint_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \delta\vec{v}^i dW, \end{aligned} \quad (18.3)$$

где $\rho, \vec{\tau}, P, F$ - соответственно плотность среды, вектор напряжений трения, осевая сила, массовая сила; $\vec{\sigma}^n$ - вектор напряжений на поверхности S_τ ; T - интенсивность напряжений, H - интенсивность скорости деформации; первое слагаемое в круглых скобках - вариация диссипации энергии (мощности).

Обычно проекционную систему выбирают так, что она совпадает с координатной системой \vec{v}_i . В результате решение может быть получено методом Б.Г.Галеркина. Если задачу о пластическом течении можно привести к вариационной задаче о минимизации некоторого функционала I , применение метода Ритца и определение коэффициентов a_i из условия $\frac{\partial I}{\partial a_i}$ так-

же приводят к системе (18.3). При этом учитывают, что $\frac{\delta\vec{v}^{(m)}}{\delta a_i} = \vec{v}^i \equiv \delta\vec{v}^i$.

Для линеаризации системы (18.3) используют метод последовательных приближений. Его сущность заключается в том, что на k -й итерации величины $\vec{\mu} = \frac{T}{H}, \sigma_0, \vec{e}$, а также функции, описывающие форму варьируемых участков границы S , являются функциями коэффициентов $a_i^{(k-1)}$, полученных решением системы (18.3) для предыдущей итерации. Поскольку начальные значения коэффициентов $a_i = a_i^0$ можно положить равными нулю, поле скоростей в первом приближении определяется опорным решением. При построении последующих приближений решение описывает

движение линейно-вязкой среды с переменным по области D коэффициентом вязкости $\bar{\mu}$.

Математическое описание объемных пластических течений связано с большими математическими трудностями. При использовании МКЭ решение трехмерных задач приводит к системам уравнений с многими тысячами и десятками тысяч неизвестных. Решение таких систем возможно на ЭВМ с высоким быстродействием и оперативной памятью объемом в несколько мегабайтов.

Большое преимущество в связи с этим дает разработка универсальных алгоритмов описания сложных поверхностей с применением аппарата конформных отображений [4, 25]. Решение задач теории прессования и теории резания с применением *конформного отображения* односвязных и двухсвязных областей рассмотрено в работе [4].

Вопросы

1. В чем отличие математической постановки задачи в механике твердого деформируемого тела от вариационной постановки?
2. Какое поле называют виртуальным полем скоростей?
3. В чем состоит сущность метода последовательных приближений?
4. На каких допущениях основывается методика решения задачи описания пластических течений с применением начала виртуальных скоростей?

Лекция 19. РАЗРАБОТКА И ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЦЕЛЬЮ УЛУЧШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Примеры задач упругости, пластичности и расчета напряжений, приведенные в предыдущих лекциях, показывают, что рассмотренный математический аппарат в сочетании с методом конечных элементов обеспечивает получение результатов с точностью, сопоставимой с аналитическим решением и другими приближенными методами. В то же время число расчетных технических задач при проектировании может быть значительно увеличено в результате развития методов экспериментального и теоретического моделирования технологических процессов обработки.

Примеры определения деформаций и напряжений, рассмотренные в лекциях 11 – 17, и их сравнение с данными работ [10, 30, 33, 34, 36] свидетельствуют о возможности применении разных подходов к изучению

напряженного состояния. В то же время данные литературы показывают, что существующие методы анализа напряжений и рекомендации по проектированию технологических процессов обработки не доведены пока до постановки оптимизационных задач. В связи с этим актуальной задачей является развитие методов теоретического моделирования. Это приводит к описанию и анализу «тонких» эффектов, сопровождающих процессы обработки резанием, поверхностным пластическим деформированием, лучом лазера, ионно-плазменной, сборки и других.

Исследованию кинематики пластических течений и напряженного состояния деформируемого металла с применением вариационных принципов посвящено большое число работ, в том числе [4 - 6, 8, 12, 17, 40, 24]. Методы расчета напряжений в конструкциях с применением метода конечных элементов рассмотрены в работах [9, 14, 15, 16, 28, 29]. Анализ данных работ позволяет сделать вывод о тенденции развитии методов решения технических задач на основе методов вычислительной механики.

Одновременно в последние годы наметилась тенденция к разработке математических моделей процессов деформирования [4] и их реализации в виде пакетов прикладных программ [13, 35]. Для решения технических задач применяют комплексные математические модели пластического течения при развитых пластических деформациях [4, 13, 24, 35], модели течения с учетом упруго-пластического перехода [17] и модели процессов при малых упругопластических деформациях [30]. В теории резания оптимизацию режимов связывают с разработкой моделей теплофизических явлений в технологических системах [22]. С помощью моделей первого вида рассматривают процессы установившегося пластического течения. Модели второго вида имеют значение при изучении пластических деформаций на начальной стадии процессов деформирования. Применение теории малых пластических деформаций приводит к разработке программ расчета температуры и напряжений в конструкциях при статических нагрузках.

Как правило с помощью моделей какого-либо одного вида не удается описать сложный характер явлений в технологических системах из-за влияния на параметры большого числа факторов. Это выдвигает на одно из первых мест задачу моделирования технологических процессов с учетом нескольких, как правило, противоречащих друг другу, критериев.

В связи с этим актуальное значение имеет развитие комплексного подхода к моделированию технологических процессов путем описания всех рассмотренных выше условий реальных процессов: кинематики, распределения напряжений, распределения температуры. Идеи развития такого подхода применительно к проектированию процессов обработки металлов давлением были выдвинуты в работах [4, 5]. Аппарат, рассмотренный в

лекциях 12, 13, 18, полностью применим к описанию кинематики пластического течения и передачи тепла между материалом и инструментом при обработке другими методами, например поверхностным накатыванием.

Ниже рассмотрена задача, описываемая системой уравнений (6.1), (6.5), (6.8) с граничными условиями. После сведения к вариационной задаче о минимизации функционала (15.1) алгоритм, благодаря применению матричных соотношений метода конечных элементов, заключается в дискретизации области, построении и решении системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных перемещений. Уравнение теплопроводности включено в систему уравнений теории пластичности для описания процесса передачи тепла в системе металл - инструмент.

В соответствии с предложенной методикой расчет напряжений в прессовом инструменте осуществляют на каждом шаге изменения параметров в несколько этапов.

1-й этап. Вычисление компонентов скорости деформации, интенсивности скорости деформаций, накопленной степени деформации сдвига, компонентов девиатора напряжений, мощности пластической деформации.

2-й этап. Вычисление температуры в узлах деформированной координатной сетки с учетом выделения тепла.

3-й этап. Расчет температуры в точках инструмента при его предварительном нагреве.

4-й этап. Расчет температуры в системе металл-инструмент.

5-й этап. Вычисление напряжений с учетом неравномерного распределения температуры.

Примером изложенного подхода к анализу технологических систем служит пакет FEM [25, 32], разработанный для расчета напряжений в деформирующем инструменте на этапах технологического цикла горячего прессования и штамповки выдавливанием. Исходными данными для расчета по уравнениям (4.17), (4.18), (5.6), (5.15), (5.16) являются: давление, скорость деформирования, температура нагрева заготовок, размеры области течения, параметры инструмента, координаты точек деформированной координатной сетки в области пластического течения, параметры, характеризующие условия подвода тепла к блоку инструмента при его предварительном нагреве.

Разработана [25, 32] модель, имеющая блочную структуру, в которую входят: ядро системы, блок ограничений, база данных, блок управления, блок визуализации. В ядро системы включены процедуры вычисления локальных параметров пластического течения и температуры, процедуры решения упругой задачи и вычисления напряжений в инструменте. Блок

ограничений осуществляет контроль вводимой информации. База данных содержит табличные значения температурных зависимостей физико-механических свойств материалов. Блок управления осуществляет переключение между отдельными этапами решения задачи.

Модель учитывает явления выделения тепла пластической деформации, тепла от трения, зависимость свойств от температуры. Результатами расчетов являются: упругие перемещения и деформации, напряжения (радиальные, тангенциальные и осевые для тел с осевой симметрией), интенсивность напряжений и температура.

Разработанная математическая модель проверена и внедрена при проектировании технологии горячего прессования стальных профилей в машиностроении. С ее помощью установлены количественные зависимости температуры и напряжений в прессовых матрицах от геометрических и эксплуатационных факторов.

В результате сравнительного анализа вариантов конструкции матриц и схем нагрева наладок по выбранным критериям приняты обоснованные рекомендации по конструированию гравюры матриц, совершенствованию температурного режима их эксплуатации на прессах типа ГП300. В результате их внедрения повышена стойкость матриц и штампов без замены существующих инструментальных сталей на более стойкие и дорогие, сокращены затраты ресурсов в машиностроении.

Достоинствами конечно-элементной системы FEM являются универсальность и пригодность для расчета напряжений при решении различных технических задач. Применение данного пакета позволило с помощью единой методики охватить анализом кинематику, температурные условия стационарных и нестационарных процессов пластического деформирования, а также изменение напряжений и температуры в инструменте с учетом скоростных условий, трения, сложной геометрии инструмента и другие условия реального процесса.

С помощью пакета FEM на кафедре технологии машиностроения ВлГУ выполняют исследования, направленные на повышение долговечности ответственных деталей оборудования, различных видов формующей оснастки и штампов. Например, на рис.19.1,а приведена схема к расчету температуры и температурные поля (рис.19.1,б) в одной из пластин кокиля (сталь 4X5MФС) для получения отливок из алюминиевого сплава. Распределение температуры соответствует начальному периоду контакта формы с металлом через 0.5 и 1 с. Расчет выполнен при подводе тепла конвекцией ($\theta_c = 680^\circ\text{C}$) и предварительном нагреве пластины до 100°C . Температурное поле в резце из стали 45 с пластиной из сплава ВК8 на рис.19.2, полученное с помощью пакета FEM, также представлено в виде

картины изолиний температуры. Температура резания 700°C , температура жидкости в канале 20°C .

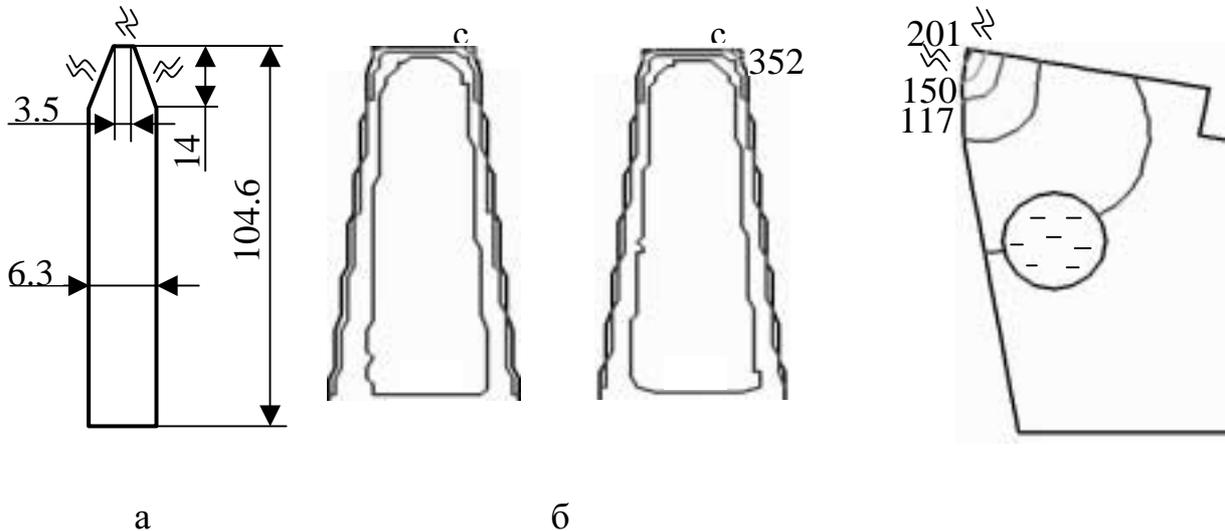


Рис.19.1.

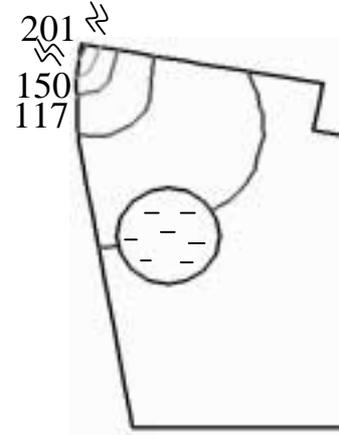


Рис.19.2.

С помощью подхода, изложенного в лекции 18, на кафедре технологии машиностроения выполняют исследования, направленные на разработку моделей пластического течения, соответствующих плоскому прессованию, обработке лезвийным инструментом и другим операциям. В соответствии с идеями, изложенными в работах [4, 5, 24], описание течения выполняется в два этапа: опорное решение и его уточнение. Под руководством автора аспирант Гольцов П.В. реализовал пакет программ расчета параметров пластического течения на этапе опорного решения с помощью потенциальных полей. Данная задача решена методом конечных элементов.

Исследования с помощью разработанных программ направлены на установление зависимости физико-механических свойств обрабатываемых материалов от параметров и условий процессов, повышение стойкости инструмента и решение других задач. Построение и анализ расчетных полей в зависимости от условий процессов с помощью компьютерного моделирования позволили автоматизировать решение технологических задач и значительно ускорили разработку новых технических решений.

Вопросы

1. Какие блоки входят в конечно-элементную систему?
2. Какие параметры входят в базу данных пакета FEM?
3. Какие задачи решают с помощью комплексных моделей?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современный этап развития технологической механики, благодаря накопленному обширному экспериментальному материалу, достижениям в области пластичности, бурному развитию средств вычислительной техники, внедрению проекционных методов и средств автоматизации измерений, характеризуется возрастанием сложности решаемых задач. Наблюдается тенденция к анализу “тонких” эффектов в технологических системах, учету динамических эффектов и анизотропии при обработке новых материалов, исследованию составных конструкций под действием различных видов нагрузок.

Приведенные в лекциях результаты вычисления локальных параметров с помощью разработанных программ свидетельствуют, что данный подход к решению технических задач зачастую является единственным надежным средством получения достаточно подробных результатов при разумных затратах. Наряду с совершенствованием методов вычисления напряжений при статических условиях актуальное значение имеет совершенствование методов описания различных эффектов, сопутствующих пластической деформации: выделения и передачи тепла с учетом накопления пластической деформации, скорости деформирования, трения, а также циклического характера приложения нагрузок. Описание данных условий с учетом технологических, геометрических и эксплуатационных факторов позволяет подойти к установлению надежных критериев оптимизации технологических процессов. В связи с этим разработка комплексных математических моделей процессов деформирования и их численная реализация в виде универсальных программ имеет актуальное значение, так как способствует повышению обоснованности и существенному ускорению принятия решений.

Другое обстоятельство, обуславливающее значение развития приближенных методов расчета напряжений, заключается в том, что исследования в указанном направлении приводят к разработке моделей управления технологическими системами. Разработка пакетов универсальных прикладных программ для решения задач механики и их объединения в комплексы с экспериментальными установками для проведения широкомасштабных физических экспериментов будет иметь решающее значение для создания автоматизированного оборудования, прогнозирования качества изделий и разработки новых технологий.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Невозможно представить развитие теории обработки металлов давлением в СССР, начиная с 60-х годов без научных трудов профессора Геннадия Яковлевича Гуна. С его именем связано активное внедрение вариационных принципов в практику решения задач обработки металлов давлением, переход подготовки инженерных кадров в Московском государственном институте стали и сплавов на качественно новую ступень в связи с внедрением вычислительной техники, становление нового научного направления в обработке металлов давлением, возглавляемого академиком Петром Ивановичем Полухиным.

Автору посчастливилось учиться, выполнять научные исследования в Московском институте стали и сплавов под руководством профессора Г.Я.Гуна, а затем на протяжении 20 лет поддерживать творческие научные и личные отношения.

Несмотря на то, что последняя монография Геннадия Яковлевича Гуна “Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением”, вышла в 1983 году, рассмотренная в ней проблема математического описания пластических течений, математическая постановка краевых задач и предложенные методы их решения являются актуальными в настоящее время. Трудно переоценить значение разработанного Г.Я.Гуном теоретического подхода к решению краевых задач обработки металлов давлением. Данный подход, благодаря универсальности вариационных методов и мощности применяемого математического аппарата, был положен в основу ряда методик автоматизированного проектирования технологических процессов, применяемых в промышленности. Бурное развитие средств вычислительной техники делает возможными лишь в настоящее время реализацию многих идей, выдвинутых Г.Я.Гуном, и численное решение задач, сформулированных им. Новизна и оригинальность разработанных Г.Я.Гуном методик, ориентированных на применение ЭВМ с доступными ресурсами, заставляет постоянно обращаться к его многочисленным статьям, монографиям и на их примере находить ответы на вопросы при решении новых технологических задач.

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$T_{\sigma}, \ \sigma_{ij}\ $	- тензор напряжений,
σI	- шаровой тензор напряжений,
D_{σ}	- девиатор напряжений,
T_{ε}	- тензор малых деформаций,
εI	- шаровой тензор деформаций,
D_{ε}	- девиатор деформаций,
σ_n	- модуль вектора полного напряжения,
τ_n	- касательное напряжение на нормальной площадке,
$I_1(T_{\sigma})$	- первый инвариант тензора напряжений,
$I_2(T_{\sigma})$	- второй инвариант тензора напряжений,
$I_3(T_{\sigma})$	- третий инвариант тензора напряжений,
$\tau_{окт}$	- касательное напряжение на октаэдрической площадке,
σ_i	- интенсивность нормальных напряжений,
T	- интенсивность касательных напряжений,
x_i, X_i	- текущие и начальные координаты частицы в процессе деформирования,
h	- коэффициент теплообмена,
ε_{ij}	- компоненты эйлера тензора деформаций,
u_i	- компоненты вектора перемещений,
ε_{ij}	- компоненты лагранжева тензора деформаций,
T_{ε}	- тензор деформаций,
e_{ij}	- компоненты главных логарифмических деформаций,
σ_{ij}	- напряжения Коши,
X_i	- объемные силы,
$\bar{\mu}$	- коэффициент вязкости сплошной среды,
\bar{v}	- вектор скорости в точке,

$\overline{rot v}$	- вихрь вектора скорости,
$\left\ \frac{\partial v_i}{\partial v_k} \right\ $	- производная вектора скорости по векторному аргументу,
$\xi_{xx}, \xi_{yy}, \xi_{zz}$	- компоненты тензора скорости деформаций в направлении осей координат,
$T\xi$	- тензор скорости деформаций,
$D\xi$	- девиатор скорости деформаций,
η^{II}	- второй инвариант девиатора скорости деформаций,
ε	- средняя объемная деформация,
ε_i	- интенсивность деформации растяжения,
e_i	- логарифмическая деформация,
H	- интенсивность скорости деформации сдвига,
Γ	- интенсивность степени деформации сдвига,
μ	- коэффициент Пуассона,
G	- модуль упругости II рода,
\bar{k}	- модуль объемной упругости,
ψ	- функция пластичности,
θ	- температура,
σ_s	- предел текучести,
τ_{max}	- максимальное касательное напряжение,
c_s	- постоянная текучести,
Пр	- пространство напряжений,
Пз	- пространство главных напряжений,
Λ	- накопленная степень деформации,
\bar{q}	- вектор потока тепла,
ρ	- плотность,
λ	- коэффициент теплопроводности,
c	- коэффициент удельной теплоемкости,
χ	- коэффициент температуропроводности,
$\delta\Pi$	- вариация потенциала,
Π	- полная потенциальная энергия системы,

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Малинин Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести: Учеб. для вузов. -М.: Машиностроение. 1968. - 400 с.
2. **Дель Г.Д.** Технологическая механика.- М. :Машиностроение,1978.-174с.
3. **Качанов Л.М.** Основы теории пластичности. – М.: Наука. 1969. - 420 с.
4. **Гун Г.Я.** Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. – М.: Металлургия. 1983. -351 с.
5. **Колмогоров В.Л.** Механика обработки металлов давлением: Учеб. для вузов. – М.: Металлургия. 1986. - 688 с.
6. **Унксов Е.П.** и др. Теория пластических деформаций металлов/ Е.П. Унксов, У.Джонсон, В.Л.Колмогоров и др./ Под ред. Е.П.Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. -598 с.
7. **Суслов А.Г.** Технологическое обеспечение параметров состояния поверхностного слоя деталей. – М.: Машиностроение, 1987. -208 с.
8. **Кучеряев Б.В., Потапов Н.А.** Механика сплошных сред. Разд . : Математические методы решения задач теории ОМД. Учеб. пособие. - М.: МИСиС. 1992. -164 с.
9. **Зенкевич. О.** Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. - 688 с.
10. **Пригоровский Н.И.** Методы и средства определения полей деформаций и напряжений: Справ. – М.: Машиностроение, 1983. -243 с.
11. **Чиченев Н.А., Кудрин А.Б., Полухин П.И.** Методы исследования процессов обработки металлов давлением (экспериментальная механика). – М.: Металлургия, 1977. - 311 с.
12. **Непершин Р.И.** Алгоритм расчета на ЭВМ температурных полей в процессах горячей объемной штамповки // Исследование процессов пластического формоизменения металлов. – М.: Наука, 1974. С.51–63.
13. **Биба Н.В.** и др. Применение конечно-элементной системы ФОРМ–2Д при оптимизации технологии штамповки // Пластическая деформация металлов и сплавов: – М.: МИСиС, 1996. С. 238–244.
14. **Мяченков В.И.** Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справ. / В.И. Мяченков, В.П. Мальцев, В.П. Майборода и др. – М.: Машиностроение. 1989. -520 с.
15. **Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.** Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1985. -392 с.
16. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. Основы.-М.: Мир, 1984.-428 с.

17. **Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.** Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. - М.: Наука, 1986. - 232 с.
18. **Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
19. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. - М.: Наука. Главная редакция физ.- мат. лит., 1979. - 744 с.
20. **Алюшин Ю.А.** Энергетическая модель обратимых и необратимых деформаций: Учеб. пособие для вузов./ Ю.А.Алюшин, С.А.Еленев, С.А.Кузнецов и др. – М.: Машиностроение, 1995. - 128 с.
21. **Г. Корн, Т. Корн.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. - 831 с.
22. **Резников А.Н.** Теплофизика процессов механической обработки. - М.: Машиностроение, 1981. - 279 с.
23. **Сегерлинд Л.** Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. - 392 с.
24. **Кучеряев Б.В.** Механика сплошных сред (теоретические основы обработки давлением композитных металлов). – М.: МИСиС, 1999. -320 с.
25. **Белевич А.В.** Математическое описание калибровок и конструкций матриц для горячего прессования стальных профилей // Изв. вузов.Черная металлургия. 1995. №5. - С. 34 - 37.
26. **Бутковский А.Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1975. -568 с.
26. **Сиразетдинов Т. К.** Оптимизация систем с распределенными параметрами. - М.: Наука, 1977. - 480 с.
28. **Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.** Остаточные напряжения: теория и приложения. - М.: Наука, 1982. -111 с.
29. **Скороходов А.Н.** Остаточные напряжения в профилях и способы их снижения / А.Н.Скороходов, Е.Г.Зудов, А.А.Киричков и др. - М.: Металлургия, 1985. -184 с.
30. **Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.** Расчет на прочность деталей машин: Справ.- М.: Машиностроение, 1979. - 702 с.
31. **Одинг И. А.** Прочность металлов. Металловедение. - М.- Л.: ОНТИ, 1937. - 566 с.
32. **Белевич А.В., Гольцов П.В., Шибяев О.В.** Математическая модель теплового и напряженного состояния прессовых матриц.// Конверсия. Рынок. Приборостроение. - Владимир. 1997. - С. 116 – 119.
33. **Петерсон Р.** Коэффициенты концентрации напряжений.-М.: Мир, 1977. - 302 с.

34. **Ушаков Б.Н., Фролов И.П.** Напряжения в композитных конструкциях. - М.: Машиностроение, 1979. - 134 с.
35. **Чумаченко Е.Н., Смирнов О.М., Чумаченко С.Е.** /Оптимизация проектирования штамповой оснастки и ответственных узлов металлургических машин //Теория и технология процессов пластической деформации. /Под ред.А.В.Зиновьева, - М.: МИСиС, 1997. - С. 377-380.
36. **Воронцов В.К.** Экспериментальные методы механики деформируемых твердых тел./ В.К.Воронцов, П.И.Полухин, В.А.Белевитин и др.,- М.: Металлургия, 1990. - 480 с.
37. **Полухин П.И., Гун Г.Я., Галкин А.М.** Сопротивление пластической деформации металлов и сплавов. - М.: Металлургия, 1976. - 488 с.
38. **Демьянушко И.В., Биргер И.А.** Расчет на прочность вращающихся дисков. - М.: Машиностроение, 1978. -247 с.
39. **Григорьянц А.Г.** Основы лазерной обработки материалов. - М.: Машиностроение, 1989. -304 с.
40. **Гун Г.Я.** Диалоговое проектирование прессового инструмента для изготовления режущих частей вырубных штампов / Г.Я.Гун, А.Ф. Аверченко, А.В.Белевич и др. //Кузнечно-штамповочное производство. 1989. - С. 51 - 53.
41. **Комарова Э.И, Белевич А.В.** Проектирование штамповой оснастки: Учеб. пособие / Владим. гос. техн. ун – т. Владимир, 1996. - 148 с.
42. **Аркулис Г.Э., Дорогобид В.Г.** Теория пластичности: / Учеб.пособие. - М.: Металлургия, 1987.- 352 с.

Учебное издание

БЕЛЕВИЧ АЛЕКСАНДР ВИКТОРОВИЧ

ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Текст лекций

Редактор А.П. Володина
Корректор О.В. Чезганова

Изд. лиц. № 020275 от 13.11.96. Подписано в печать 99.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Times.
Печать офсетная. Усл. печ. 5,58. Уч. печ. л. 5,82. Тираж 100 экз.

Заказ 332-99

Владимирский государственный университет
Подразделение оперативной полиграфии
Владимирского государственного университета
Адрес университета и подразделения оперативной полиграфии:
600026, Владимир, ул. Горького, 87.