

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

А. А. КУЗНЕЦОВ

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Для инженерно-технических направлений бакалавриата

Учебное пособие



Владимир 2019

УДК 53
ББК 22.3
К89

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры инфокоммуникационных технологий
Южно-Уральского государственного университета
В. И. Тамбовцев

Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой радиотехники и радиосистем
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
О. Р. Никитин

Доктор технических наук, профессор
зав. кафедрой биомедицинских и электронных средств и технологий
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Л. Т. Сушкова

Кузнецов, А. А.

К89 Курс общей физики. Для инженерно-технических направлений бакалавриата : учеб. пособие / А. А. Кузнецов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 216 с.
ISBN 978-5-9984-0988-2

Содержит материалы курса общей физики, сокращенного до объема годичного, в соответствии с ранее опубликованными учебными пособиями и программой «Общая физика» на основе авторских лекций трех семестров обучения. Предназначено для студентов 1-го курса очной формы обучения направлений бакалавриата: 11.03.01 – Радиотехника, 11.03.02 – Инфокоммуникационные технологии и системы связи, 11.03.03 – Конструирование и технология электронных систем, 12.03.01 – Приборостроение, 12.03.04 – Биотехнические системы и технологии, 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехнологии.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС поколения 3++.

Табл. 4. Ил. 113. Прил. 16. Библиогр.: 23 назв.

ISBN 978-5-9984-0988-2

УДК 53
ББК 22.3
© Кузнецов А. А., 2019

Предисловие

Материя, а значит и ее свойства (связи, взаимодействия между объектами, явлениями) неисчерпаемы, поэтому охватить познанием все их многообразие невозможно. Поэтому на основе эксперимента и наблюдений создается непротиворечивое физическое представление – модель, представляющая выделенные факторы, на основе которых делается предсказание о ее динамике. Модель составляется из образов наблюдаемых объектов, явлений, ситуаций и связей между ними, а также правил оперирования с ними. Количественные соотношения между физическими величинами выясняются в результате измерений, наблюдений и экспериментальных исследований и выражаются языком математики. Далее модель уточняется, делаются новые предсказания и т.д. Метод познания требует, чтобы представлениям, понятиям и другим элементам, составляющим физическую модель, было дано однозначное толкование. Учет лишь существенных факторов сводится к абстрагированию от реальной ситуации и созданию модели в рамках принятых абстракций. Ограниченность – общее свойство моделей.

Задача физики состоит в том, чтобы создать в сознании модельное представление, наиболее полно отражающее свойства внешнего мира и соотношения между его элементами.

Для определения физической величины, надо указать общее, что делает ее элементом всеобщей физической связи явлений, и различие, что делает эту физическую величину конкретной. За основу определения физической величины берутся существующие между ними математические соотношения. Указывается физический объект, свойство которого принимается за единичное. Определяется процедура измерения с сопоставлением свойств измеряемого и единичного объектов. Мировая научная и техническая общественность приняла наиболее целесообразную международную систему единиц (СИ). Она принята РФ и оформлена правительственным постановлением. Основные единицы СИ: метр, килограмм, секунда, Ампер, Кельвин, кандела.

Принято считать, что единственно возможным алгоритмом формирования научной теории является: постановка задачи,

эксперимент, анализ данных с разрешением поставленных вопросов, и далее, итоговый результат в форме ясной физической идеи. При формировании первых 5 частей данного учебного пособия, чаще всего так и было. Но при становлении квантовой теории все было наоборот: построенные на смутных догадках утверждения ученых подтверждались позже. Результаты предшествовали смыслу. Так Планк применил квантование энергии к осциллятору, Никольсон – к атому, Эйнштейн – к излучению и упругим колебаниям. Трудность была в том, чтобы решиться на отказ от равенства частоты излучения частоте обращения электрона на орбите. Это сделал Нильс Бор в созданной им теории атома.

Нильс Бор был философом квантовой физики и обладал сочетанием глубины мысли, силы убеждения и душевной чистоты. Конечно, физика немыслима без математических понятий и логики, но и не сводится к ним. Она развивается не на основе формул, а на их интерпретации – понимании, питающих физическую интуицию в поиске истины. Физическое и математическое описание – дополнительные: первое – требует пренебрежения деталями, уводя от математической точности; второе – задает точность, затрудняя ясное понимание явления. Нильс Бор полагал, что законченное физическое описание предшествует математической формулировке, и дополнительным понятием истины является ясность, определяющая красоту теории.

Главное открытие квантовой механики – вероятностный характер законов микромира. Сформулированное Борном вероятностное толкование волновой функции было подготовлено работами Бора (1923 – 1924 гг.), где идея вероятности применялась к электронным переходам. Эта идея, в свою очередь, пришла из работы Эйнштейна 1916 г., где впервые проявилась мысль о вероятности спонтанного и индуцированного переходов. Предсказания квантовой механики дают лишь вероятность того или иного результата. В шестой и седьмой частях учебного пособия представлен сложный и необычный ход идей и состав экспериментов, которые привели к созданию квантовой физики.

В приложениях представлены математические выводы и экзаменационные вопросы к рейтинг-контролю по всему курсу.

1. МЕХАНИКА

Кинематика поступательного и вращательного движений материальной точки и твердого тела

Предмет и объект изучения. Система отсчета. Кинематика описывает механические движения материальной точки, не интересуясь ни причинами, ни их реальностью в природе.

Материальная точка – физический объект в геометрическом смысле эквивалентный математической точке, но обладающий единственным признаком отличия – массой.

Система отсчета – совокупность точек пространства и материального тела, относительно которого определено положение точек пространства. Положение точек пространства в системе отсчета характеризуется системой координат и в реальном геометрическом пространстве системы отсчета характеризуется максимум тремя независимыми параметрами. В качестве тела отсчета в системах отсчета применяется абсолютно твердое тело, расстояние между любыми точками которого, неизменно.

В бескоординатной форме можно обойтись одним радиус-вектором – вектором, начало которого совпадает с точкой начала отсчета системы координат, а конец – с рассматриваемой точкой.

Материальная точка проходит непрерывную последовательность точек системы отсчета, называемую *траекторией* движения (рис. 1). Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ соединяет точки траектории, в которых материальная точка находилась в моменты t и $t + \Delta t$, направлен от начальной точки к конечной точке и численно равен расстоянию между ними.

Скорость и ускорение. Вектор средней скорости \vec{v}_{cp} определяется как вектор, совпадающий по направлению с перемещением между двумя точками и равный по модулю вектору перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 1), деленному на интервал времени Δt перемещения:

$$\vec{v}_{\text{cp}}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1)$$

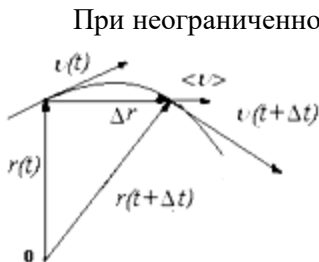


Рис. 1.

При неограниченном уменьшении интервала времени Δt средняя скорость стремится к предельному значению, называемому *мгновенной скоростью*:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2)$$

Очевидно, что вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории.

В декартовой системе координат $\vec{r}(t) = \vec{i}x(t) + \vec{j}y(t) + \vec{k}z(t)$ и

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

Следовательно, проекции скорости даются формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Ускорением называется скорость изменения скорости (рис. 2). Пусть в моменты t и $t + \Delta t$ скорости равны соответственно $\vec{v}(t)$ и $\vec{v}(t + \Delta t)$. В течение промежутка времени Δt скорость изменилась на $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$. Среднее ускорение за Δt равно $\vec{a}_{cp}(t, t + \Delta t) = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$.

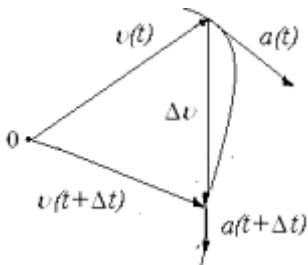


Рис. 2.

$$\text{Ускорение: } \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Годограф скоростей – это кривая, которую описывает конец радиус-вектора скорости (рис. 2, 3). Вектор ускорения направлен по касательной к годографу скоростей. Это означает, что он может быть направлен под любым углом к касательной к траектории движения.

Полное ускорение $\vec{a} = \vec{n} \frac{v^2}{R} + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}$ состоит из двух взаимно перпендикулярных векторов: *тангенциального ускорения*:

$\vec{\tau} \frac{dv}{dt} = \vec{a}_\tau$, направленного вдоль траектории движения, и *нормально-*

го ускорения $\vec{n} \frac{v^2}{R} = \vec{a}_n$, направленного перпендикулярно траектории по главной нормали, к центру кривизны траектории (т. 0). При движении точки по окружности нормальное ускорение называют *центростремительным* (рис. 3). Здесь $\vec{\tau}$, \vec{n} – единичные векторы

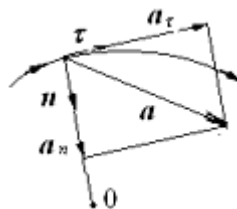


Рис. 3.

$$\text{Модуль полного ускорения } a = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Для прямой траектории $R \rightarrow \infty$, $\frac{v^2}{R} \rightarrow 0$ и $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Кинематика твердого тела. *Минимальное число независимых функций (или параметров), требуемое для описания движения системы материальных точек, называют числом ее степеней свободы.* Для описания движения материальной точки требуются три функции зависимости ее координат от времени (три степени свободы). Для системы из N материальных точек необходимо задать $3N$ таких функций с описанием поступательных движений.

Поступательное движение твердого тела – движение, при котором все его точки движутся по одинаковым траекториям. Скорости точек тела в любой момент времени одинаковы, поэтому отрезок прямой, соединяющий любые две точки тела, перемещается параллельно самому себе.

Плоское движение твердого тела – движение, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях. Движение тела определяется движением любого одного сечения в одной из параллельных плоскостей, а положение сечения – положением двух его точек.

Вращательное движение твердого тела является плоским. Прямая, проходящая через неподвижные точки – ось вращения.

При движении по окружности любой точки твердого тела длина дуги (путь) $S = R\varphi$ и значение скорости $v = \frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}$, где $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ называют *угловой скоростью* (рис. 4). Если эта скорость постоянна, то ее называют *круговой частотой* вращения твердого тела вокруг оси: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период вращения. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения так, чтобы вектор линейной скорости точек твердого тела определялся: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (прил. 1). Модули линейной скорости, нормального и тангенциального ускорения точек твердого тела равны соответственно:

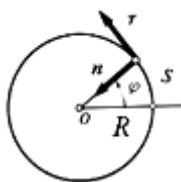


Рис. 4.

$$v = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega; a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R; a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}.$$

Полное ускорение: $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \dot{\omega}^2}$,

где $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Принцип относительности Галилея. Во всех системах координат, движущихся равномерно поступательно и прямолинейно относительно сферы неподвижных звезд (и друг относительно друга), все механические явления протекают одинаково. Иными словами, механические явления протекают одинаково во всех *инерциальных* системах координат. *Физические законы в инерциальных системах координат – одинаковы.* Но законы описывают взаимосвязи между физическими величинами. А как себя ведут сами величины при смене координат или при переходе из одной системы в другую? Величины, значения которых не изменяются при преобразовании координат, называются *инвариантами преобразований*. Инвариантами преобразований Галилея являются: длина, интервал времени, ускорение.

Динамика поступательного движения

К понятию силы. Измерение силы. До Галилея (1564 – 1642) фактор взаимодействия тел названный силой был принят в трактовке Аристотеля (384 – 322 до н.э.): сила передается телу из окружающей среды и пропорциональна скорости тела. *Галилео Галилей* связал указанный фактор со скоростью изменения скорости – ускорением. Он утверждал, что тело стремится сохранить вектор скорости, или приданное ему состояние равномерно-прямолинейного движения. И это основной закон инерции, который не может быть сведен к чему-либо более простому. Силы же не являются независимыми самостоятельными сущностями, а создаются материальными телами для взаимодействия. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействий.

В качестве эталона силы, измеряя ее независимо от ускорения, используют деформацию. Силы не только меняют вектор скорости движения материальных тел, но и вызывают деформацию.

Законы Ньютона. *Первый закон Ньютона* – независимый закон, определяющий инерциальность системы отсчета, как критерий ее пригодности для рассмотрения движений. Только после его выполнения можно говорить об физическом смысле законов 2 и 3.

Тело (материальная точка), не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно. Такое тело называется свободным, а его движение – свободным движением, или движением по инерции.

Система отсчета, центр которой совмещен с Солнцем, а оси направлены на выбранные соответствующим образом звезды, принята за инерциальную гелиоцентрическую систему отсчета. Любая иная система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы прямолинейно и равномерно, становится инерциальной. Очевидно, что связанная с земной поверхностью система отсчета – неинерциальная, но ее ускорение настолько мало, что практически ее принимают инерциальной.

Второй закон Ньютона – это математически выраженный физический характер связи внешних условий и динамических переменных движения материальной точки. Под силой в механике

понимают любую причину, изменяющую вектор импульса тела. Для материальной точки общая форма записи второго закона:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (4)$$

где: $\vec{p} = m\vec{v}$ – вектор импульса материальной точки, $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – равнодействующий вектор внешних сил.

Система материальных точек – это конечная совокупность точек системы, на которые действуют силы двоякого происхождения: во-первых, силы, источники которых лежат вне системы (внешние силы) и, во-вторых, силы со стороны других точек системы (внутренние силы). Для системы материальных точек в равен-

стве (4) $\vec{p} = \sum_{j=1}^m \vec{p}_j$ – равнодействующий вектор импульса материаль-

ных точек, составляющих систему.

Так как сила определяет вторые производные координат по времени ($d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$), то из инвариантности ускорения относительно преобразований Галилей следует инвариантность силы.

Третий закон Ньютона говорит о том, что во взаимодействии двух тел каждое из тел действует на другое тело с одинаковой по значению, но противоположной по направлению силой. По своей природе «действие» и «противодействие» не отличаются. Обычно принимается, что внутренние силы удовлетворяют третьему закону Ньютона, а потому не участвуют в формировании равнодействующего вектора сил (см. формулу (4)).

В замкнутой системе двух материальных точек справедлив закон сохранения импульса (см. далее): $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$. Дифферен-

цируя это соотношение по времени, получаем: $\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$, или

на основании второго закона Ньютона (4): $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

Об инерциальных и неинерциальных системах отсчета.

Системы отсчета делят на два класса. К одному классу относят те, в которых существует единое время и геометрия евклидова; к другому – те, в которых единого времени нет и геометрия неевклидова. К первому из указанных классов относят системы отсчета, в которых отсутствуют силы тяготения и справедлив первый закон Ньютона – закон инерции. Поэтому эти системы отсчета называются *инерциальными*. В системах отсчета, в которых имеются силы тяготения и не выполняется первый закон Ньютона – *неинерциальные*. В инерциальной системе отсчета движение относительно сферы неподвижных звезд происходит без ускорения. Неинерциальной системой отсчета называют систему, движущуюся ускоренно относительно инерциальной.

Простейшими неинерциальными системами отсчета являются движущиеся ускоренно прямолинейно и вращающиеся системы. При построении теории движения в неинерциальных системах отсчета можно было бы принять, что ускорения тел вызываются не только силами, но и другими факторами. Но исторически был выбран иной путь – эти другие факторы были признаны силами. Получилось, что наряду с «обычными» силами взаимодействия существуют силы иной природы (факторы), названные *силами инерции*. Силы инерции подбираются для обеспечения в неинерциальной системе отсчета по величине фактических ускорений: $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$, или $\vec{F}_{in} = m(\vec{a}' - \vec{a})$, где \vec{a}' - относительное ускорение (в неинерциальной системе отсчета), \vec{a} - абсолютное ускорение (относительно инерциальной системы отсчета).

Центробежная и кориолисова силы инерции. Силу инерции, возникающую во вращающейся по отношению к инерциальным системам отсчета, называют *центробежной силой инерции*. Она действует на тело во вращающейся системе отсчета независимо от того, покоится тело в этой системе или движется относительно нее со скоростью \vec{v}' . Если положение тела во вращающейся системе отсчета характеризовать радиусом-вектором \vec{r}' (рис. 5), то центробежную силу инерции можно представить в виде двойного векторного произведения:

$$\vec{F}_{ц.б.} = m\vec{\omega} \times \vec{r}' \times \vec{\omega}. \quad (5)$$

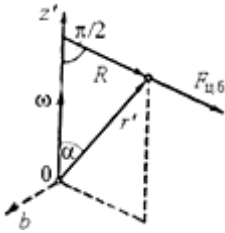


Рис. 5.

По определению вектор $\vec{b} = \vec{r}' \times \vec{\omega}$ направлен перпендикулярно векторам $\vec{\omega}$ и $\vec{F}_{ц.б.}$ «на нас», (прил. 1) и равен по модулю $\omega r' \sin \alpha = \omega R$. Векторное произведение взаимно перпендикулярных векторов $m\vec{\omega}$ и \vec{b} совпадает по направлению с $\vec{F}_{ц.б.}$ и имеет модуль: $m\omega b = m\omega^2 R = \vec{F}_{ц.б.}$.

При движении тела относительно вращающейся системы отсчета, кроме центробежной силы инерции, проявляется *сила Кориолиса*, или кориолисова сила инерции. Если сила $\vec{F}_{ц.б.}$ не зависит от \vec{v}' , действуя одинаково как на покоящееся, так и на движущееся тело, то сила Кориолиса \vec{F}_K при $\vec{v}' = 0$ отсутствует, а ее вектор лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 6, а, б):

$$\vec{F}_K = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}, \quad (6)$$

где ускорение $\vec{a}_K = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$ называют *кориолисовым ускорением*.

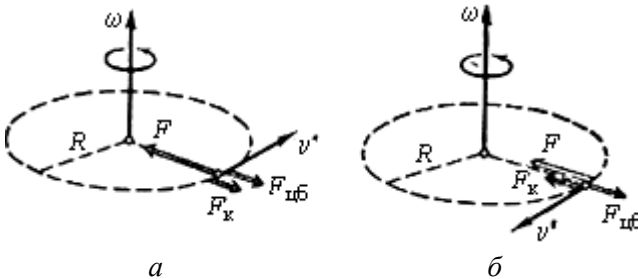


Рис. 6.

Уравнение моментов. Моментом силы, действующей на материальную точку, относительно точки 0 (рис. 7), называется вектор

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (7)$$

где \vec{F} – равнодействующий вектор всех сил.

Моментом импульса материальной точки относительно точки 0 называется вектор (рис. 7):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (8)$$

Вектор момента импульса перпендикулярен плоскости, в которой лежат радиус-вектор \vec{r} и импульс \vec{p} точки, а вектор момента силы \vec{L} перпендикулярен плоскости расположения радиус-вектора и силы (рис. 7).

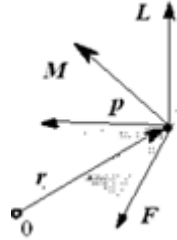


Рис. 7.

Продифференцируем равенство (8):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (9)$$

где $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\vec{v} \parallel \vec{p}$ и $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = |\sin 0 = 0| = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Уравнение (9) принимает форму уравнения моментов

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (10)$$

Для системы материальных точек: $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$, $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$,

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i = \vec{F}_i' + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$, \vec{F}_i' - внешняя сила, действующая на i -тую точку из их совокупности; $\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ - внутренняя сила, действующая на точку.

Внутренние силы состоят из взаимно компенсирующих пар: $\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} = 0$, поэтому результирующая сила равна алгебраической сумме только внешних сил: $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i'$, а момент – алгебраической суммой моментов внешних сил $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i'$.

Механика твердого тела

Уравнения движения твердого тела. Уравнения $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ полностью описывают характер движения твердого тела и системы материальных точек и называются уравнениями движения. Твердое тело имеет шесть степеней свободы, и число проецированных уравнений тоже шесть (уравнения замыкают систему). Необходимо только знать начальные условия.

Центр масс. При движении с малыми скоростями введем понятие центра масс. Представим импульс системы точек в виде:

$$\vec{p} = \sum_i m_{oi} \vec{v}_i = \sum_i m_{oi} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i m_{oi} \vec{r}_i = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{m} \sum m_{oi} \vec{r}_i \right),$$

где $m = \sum_i m_{oi}$ - масса системы, равная сумме масс покоя составляющих ее точек. Радиус-вектор: $\vec{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_{oi} \vec{r}_i$ определяет воображаемую точку, которая называется *центром масс*. Тогда $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ -

вектор скорость ее движения и $\vec{p} = m \frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{V}$, т.е. представляется как произведение массы системы на скорость ее центра масс. За движением центра масс можно следить так же, как за движением материальной точки. Уравнение движения системы обретает вид:

$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$ и эквивалентно уравнению движения материальной точки, вся масса которой сосредоточена в центре масс, а внешние силы приложены к ее центру масс.

Вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть есть твердое тело с неподвижной осью вращения (рис. 8). Для i -й материальной частицы: $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$.

Так как $\vec{r} \perp \vec{v}$, то модуль $L_i = m_i r_i \omega R_i$.

Для всех частиц твердого тела $(\vec{L}_i; \vec{\omega}) < 90^\circ$, поэтому проекции их на ось имеют одинаковые знаки. Итак, $L_{zi} = m_i R_i^2 \omega$, так как:

$$L_{zi} = L_i \cos \alpha_i = m_i r_i \omega R_i \cos \alpha_i = m_i r_i \cos \alpha_i R_i \omega.$$

Проецируем на ось Z и получаем:

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \sum_i m_i R_i^2, \quad \text{где величина}$$

$I = \sum_i m_i R_i^2$ как сумма произведений элементар-

ных масс на квадраты их расстояний от некоторой оси называется *моментом инерции тела* относительно данной оси. Формула $\vec{L}_z = I \vec{\omega}_z$ по информативности аналогична формуле $\vec{p}_z = m \vec{v}_z$.

Уравнение моментов, или основное уравнение динамики вращательного движения представляется в виде: $\vec{M} = \frac{d(I \vec{\omega})}{dt}$.

Для тел с постоянной осью вращения и неизменным распределением масс около этой оси

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \quad \vec{M} = I \vec{\epsilon}. \quad (11)$$

Формула Штейнера. Зная момент инерции I_0 тела относительно оси OZ , проходящей через центр масс, можно легко вычислить момент инерции относительно любой другой параллельной оси: $I = I_0 + ma^2$, где a – кратчайшее расстояние между этими осями, а $I_0 = I_{\min}$.

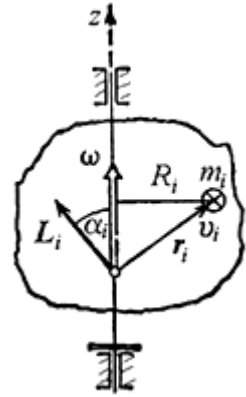


Рис. 8.

Законы сохранения

Законы сохранения обусловлены фундаментальными свойствами пространства и времени – однородностью и изотропностью пространства и времени и отвечают на вопрос: что в последовательности физических ситуаций остается неизменным.

Однородность времени - одинаковость развития и изменение данной физической ситуации независимо от того, в какой момент времени эта ситуация сложилась.

Однородность пространства – свойство неизменности характеристик пространства при переходе от одной его точки к другой. Развитие событий в любой изолированной физической системе не зависит от того, в какой точечной области пространства эта система локализована.

Изотропность пространства – эквивалентность направлений в пространстве. Развитие событий в любой изолированной физической системе не зависит от ее ориентации в пространстве.

Закон сохранения импульса. Система материальных точек или материальная точка называется *изолированной*, если отсутствуют внешние силы: $\vec{F} = 0$, уравнение движения: $d\vec{p}/dt = 0$ или $\vec{p} = \text{const}$, или в проекциях на оси координат: $p_x = \text{const}$, $p_y = \text{const}$, $p_z = \text{const}$. Импульс изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих внутри системы: для материальной точки – в отсутствии внешних сил (она движется с постоянной скоростью по прямой линии); для системы материальных точек – ее центр масс движется равномерно и прямолинейно.

Закон сохранения момента импульса. Для изолированной системы $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда $\vec{L} = \text{const}$, или в проекциях $L_x = \text{const}$, $L_y = \text{const}$, $L_z = \text{const}$. Момент импульса изолированной системы не меняется при любых процессах внутри системы.

Примечание. Закон сохранения \vec{p} и \vec{L} можно применять не только к изолированным системам, но и к частично изолированным, когда только одна или две проекции рассматриваемых векторов (\vec{p} или \vec{L}) постоянны.

Работа, мощность, энергия. Элементарной работой силы \vec{F} на перемещение $d\vec{r}$ называется проекция F_l этой силы на направление перемещения, умноженное на само перемещение: $dA = F_l dr = F dr \cos \alpha$, где α – угол между \vec{F} и $d\vec{r}$ (рис. 9).

Работу $A = \int_L (\vec{F} d\vec{r})$ перемещения материальной точки по криволинейной траектории конечной длины L по форме записи называют криволинейным интегралом вектора \vec{F} вдоль траектории L .

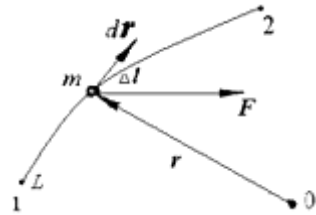


Рис. 9.

Элементарная работа результирующей силы равна сумме элементарных работ составляющих сил: $dA = dA_1 + dA_2 + \dots$. Утверждение справедливо и для работ на конечных перемещениях.

Так как $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ и $d\vec{r} = \vec{v} dt$, то $A = \int \vec{v} d\vec{p}$, но $\vec{p} = m\vec{v}$, а в нерелятивистской механике масса не зависит от скорости, поэтому $\vec{v} d\vec{p} = m\vec{v} d\vec{v}$. Здесь $\vec{v} d\vec{v} = v dv$, что справедливо для любых векторов, поэтому: $A_{12} = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$, где v_2 – конечная скорость точки. Величину $K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ называют *кинетической энергией* материальной точки. Единица измерения работы и энергии равна 1 Дж в СИ.

Работа силы при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки

$$A_{12} = K_2 - K_1. \quad (12)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий составляющих ее материальных частей. Работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

Мощность – работа, отнесенная к единице времени:

$$P = dA / dt, \text{ Вт.}$$

Консервативные и неконсервативные силы. Если в макроскопической механике силы взаимодействия зависят только от конфигурации материальных точек системы (от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение определяется только начальной и конечной конфигурацией системы, то силы называют *консервативными*. Из определения следует, что работа консервативных сил не зависит от пути перехода, и по любому замкнутому контуру она равна нулю. К консервативным силам относят центральные силы, постоянно направленные к (или от) одной точке (*центр сил*) и зависящие от расстояния до нее.

К неконсервативным силам относят диссипативные силы (трения, сопротивления и т.п.), зависящие не только от расположения тел, но и от их скоростей относительно среды и направленные и действующие против вектора скорости. Полная работа диссипативных сил при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна. К неконсервативным силам относят гироскопические силы, также зависящие от скорости материальной точки, но действующие перпендикулярно вектору скорости.

Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии. Если на систему действуют только консервативные и гироскопические силы, то для нее вводят понятие потенциальной энергии U , как функции только ее координат, так как работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а только от начальных и конечных координат. Любое удобное для решения задачи положение системы условно принимают за нулевое. Работу, совершаемую консервативными силами при переходе системы из исходного в нулевое положение, называют *потенциальной энергией системы в первом положении*. Если в заданном положении потенциальную энергию считать нулевой нельзя, то необходимо говорить о разности потенциальных энергий в двух положениях.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы $A_{12} = U_1 - U_2$. Та же работа A_{12} определена приращением кинетической энергии (формула (12)). Тогда $K_2 - K_1 = U_1 - U_2$ и $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$.

В консервативной системе разрешены лишь взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий при сохранении полной механической энергии: $E = K + U = \text{const}$. Это положение называется *законом сохранения энергии* в механике.

Связь между потенциальной энергией и силой. Рассмотрим материальную точку, находящуюся в силовом поле неподвижных тел. Если силы консервативные, то величина потенциальной энергии U материальной точки в этом поле будет функцией \vec{r} этой точки или ее координат x, y, z . Пусть точка претерпела произвольное бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ под действием силы \vec{F} . Работа силы при таком перемещении будет равна убыли потенциальной энергии: $\vec{F}d\vec{r} = -dU$ или $F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$ (полный дифференциал).

Пусть одна из координатных осей (X) совпадает с \vec{r} , тогда: $F_x dx = - (dU)_{y,z}$. Иные направления y, z не влияют на результат дифференцирования и это принято обозначать в индексах. Получающиеся величины называют частными производными функции U :

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Эти три формулы можно объединить в одну и записать:

$$\vec{F} = -\text{grad}U, \tag{13}$$

где $\text{grad}U \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей.

В иной форме записи: $\vec{F} = -\nabla U$, где ∇ – оператор Гамильтона:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Представим поверхность (рис. 10) как геометрическое место точек с одинаковой потенциальной энергией. Одну из координатных осей совместим с \vec{n} ,

тогда $\text{grad}U = \frac{dU}{dn} \vec{n}$, а вектор силы

\vec{F} направлен в обратную сторону.

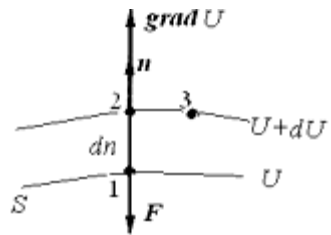


Рис. 10.

Механика жидкости и газа

Механика сплошной среды. Механика сплошной среды – часть механики о движении деформируемых материальных тел, заполняющих пространство непрерывно – сплошным образом.

Жидкость – среда, которая в состоянии равновесия находится в консервативном поле сил: нормальные напряжения действуют, касательные напряжения отсутствуют. Но при движении жидкости наряду с нормальным напряжением в ней могут возникать и касательные силы, которые определяются не самими деформациями (сдвигами), а их скоростями. Поэтому они относятся к классу сил трения или вязкости и называются *сдвиговыми вязкими силами*.

В отличие от твердых тел жидкости в состоянии равновесия не обладают *упругостью формы*, но обладают *объемной упругостью*. Каждой жидкости свойственен собственный объем, незначительно меняющийся с изменением внешнего давления. Поэтому часто пользуются понятием абсолютно несжимаемой жидкости.

Газы не обладают *упругостью формы* и *объемной упругостью*, но обладают способностью к неограниченному расширению.

В *идеальной жидкости* при любых ее движениях могут быть только силы нормального давления и не возникают касательные и нормальные силы вязкости. Этой абстракцией можно пользоваться только при малых скоростях изменения деформаций в жидкости.

Основные уравнения равновесия и движения жидкостей. Действующие в сплошной среде силы разделяют на массовые (объемные) и поверхностные. Массовая сила обозначается $\bar{f}dV$, где \bar{f} – объемная плотность массовых сил. Например, объемная плотность массовых сил в поле тяжести $\bar{f} = \rho\bar{g}$.

Поверхностные силы – силы, которым подвергается объем жидкости благодаря нормальным и касательным напряжениям, действующим на его поверхности со стороны соседних частей жидкости. Для идеальной жидкости и если поле давлений определяется

консервативным полем сил: $\nabla p = \frac{dp}{dx} \bar{i} + \frac{dp}{dy} \bar{j} + \frac{dp}{dz} \bar{k}$.

В состоянии равновесия действие внешней силы в единице объема уравнивается массовой силой \vec{f} . Получаем основное уравнение гидростатики (равновесия): $\text{grad}p = \vec{f}$, или

$$\vec{f} - \text{grad}p = 0. \quad (14)$$

При равновесии элементарного объема плотность силы \vec{f} определяется операцией градиент над однозначной скалярной функцией. А это есть необходимое и достаточное условие того, чтобы \vec{f} была бы объемной плотностью консервативной силы.

Основное уравнение гидродинамики (уравнение Эйлера) описывает движение со скоростью \vec{v} элементарного объема идеальной жидкости

$$\vec{f} - \nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (15)$$

Гидростатика несжимаемой жидкости. В случае отсутствия массовых сил, когда $\vec{f} = 0$, имеем $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0$, т.е. при равновесии давления во всех точках одинаковы (закон Паскаля (1623 – 1662)). В противном случае возникает движение жидкости.

Следствие. При отсутствии массовых сил давление на поверхности и давление во всех точках внутри жидкости одинаковое.

Пример. Пусть жидкость находится в поле тяжести: $\vec{f} = \rho\vec{g}$. Направим ось Z вертикально вверх. Уравнения равновесия (14) примут вид $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} = 0$ и

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (16)$$

Пусть для малых значений z величина g не меняется, жидкость однородна и ее плотность неизменна. Интегрируя уравнение (16), получим: $p = p_0 - \rho g z$, где p_0 – давление жидкости при $z = 0$. Эта формула определяет также давление жидкости на дне и стенках сосуда, а также на поверхности тела, погруженного в жидкость.

Кинематическое описание движения жидкости. Для описания движения жидкости и создания векторного поля скоростей, необходимо проследить либо за движением каждой частицы, указывая их скорости в каждый момент времени и определяя траектории частиц, либо за каждой точкой пространства, фиксируя векторы скоростей разных частиц, проходящих через каждую данную точку последовательно в разные моменты времени. Очевидно, при этом приходится пользоваться некоторыми новыми терминами.

Линия тока – линия, огибающая последовательные во времени векторы скоростей выделенной частицы жидкости. Траектории частиц всегда совпадают с линией тока. При *стационарном* движении поле скоростей неизменно с течением времени: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$.

При *нестационарном* (неустановившемся) движении поле скоростей меняется с течением времени: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$. Линии тока, в общем случае, не совпадают с траекториями.

Проведем синхронно линии тока через каждую точку произвольного замкнутого контура в объеме стационарного течения жидкости. Так как векторы \vec{v} частиц направлены по касательной к линиям тока, то они не могут пересекать боковую трубчатую поверхность – *трубку тока*. При бесконечно малом сечении трубки, скорость можно считать постоянной и вдоль оси трубки тока.

К теореме о неразрывности струи. Масса жидкости, протекающая за время dt через площадь S нормального (поперечного) сечения трубки: $dm = \rho v S dt$. В случае стационарного течения элементарное приращение массы dm будет одним и тем же для всех сечений, и $(\rho v S)_1 = (\rho v S)_2 = \dots$. Если жидкость несжимаема, то $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ и $v_1 / v_2 = S_2 / S_1$. Для несжимаемой жидкости величина $S_i v_i$ в любом i -том сечении одной и той же трубки тока должна быть одинакова.

Отсюда следует, что скорость жидкости в трубке тока тем больше, чем уже поперечное сечение трубки, и при переменном сечении трубки тока частицы несжимаемой жидкости движутся с ускорением.

Уравнение Бернулли. Дано стационарное течение жидкости в бесконечно узкой трубке в консервативном поле сил (рис. 11). Допуская возможность применения к этому течению закона сохранения энергии необходимо рассматривать течение идеальной жидкости с единственными поверхностными силами нормального давления p . Но они определяются плотностью и температурой, поэтому придется пренебречь силой вязкости, теплообменом между частями жидкости и внешней средой и сжимаемостью жидкости.

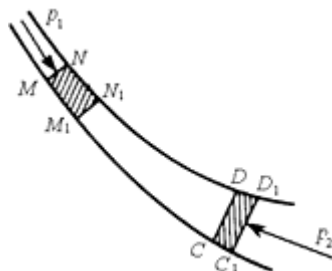


Рис. 11.

Пусть объем $MNDC$ переместится в бесконечно близкое положение $M_1N_1D_1C_1$. Вычислим работу A , совершаемую при этом силами давления. По определению трубки тока, давление, действующее на боковую поверхность трубки тока, перпендикулярно к перемещению и работы не совершает. При перемещении границы MN в положение M_1N_1 совершается работа $A_1 = p_1 S_1 l_1$, где $l_1 = MM_1$, $S_1 l_1 = \Delta V_1 = \Delta m_1 / \rho_1$.

Работа при перемещении границы CD в C_1D_1 : $A_2 = p_2 \Delta m_2 / \rho_2$. При стационарном движении $\Delta m = \text{const}$, и $A = A_1 - A_2 = (p_1 / \rho_1 - p_2 / \rho_2) \Delta m$ — приращение полной энергии жидкости. Но энергия жидкости в объеме $M_1N_1D_1C_1$ не изменилась, поэтому ΔE равна разности энергий массы Δm в положениях: CDD_1C_1 и MNN_1M_1 . Обозначим полную энергию, приходящуюся на единицу массы жидкости ε . Тогда $\Delta E = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \Delta m$. Приравнявая эту величину работе A и сокращая на Δm , имеем: $\varepsilon_1 + p_1 / \rho_1 = \varepsilon_2 + p_2 / \rho_2$, откуда получаем уравнение в форме уравнения Бернулли: $\varepsilon + p / \rho = B$, где постоянная Бернулли $B = \text{const}$ вдоль одной линии тока при стационарном течении идеальной жидкости.

Пример. В поле тяжести Земли: $\varepsilon = v^2 / 2 + gh$, тогда для единицы массы жидкости: $v^2 / 2 + gh + p / \rho = B' = \text{const}$.

Вязкость. В реальных жидкостях, кроме сил нормального давления, на границах движущихся элементов жидкости действуют касательные силы вязкости. Для стационарности течения на концах трубы необходимо поддерживать постоянную разность давления, уравнивающую силы вязкости.

Эксперимент Ньютона. Представим две бесконечно длинные параллельные пластины (рис. 12): нижняя AB – покоится, верхняя CD – движется с постоянной скоростью \vec{v}_0 . Для поддержания рав-

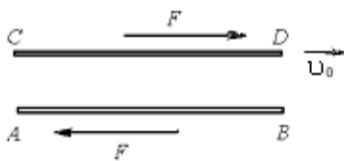


Рис. 12.

номерного движения пластины CD к ней должна быть приложена постоянная сила \vec{F} , направленная в сторону движения. На пластину AB должна действовать такая же, но противоположно направленная сила,

удерживающая эту пластину в покое. Величина этой силы пропорциональна скорости v_0 и площади S взаимодействия пластины, но обратно пропорционально расстоянию h между ними.

Пусть движутся обе пластины равномерно и параллельно друг другу: пластина AB – со скоростью v_1 , пластина CD – со скоростью v_2 . Тогда сила вязкости определится как $F = \eta S \frac{v_2 - v_1}{h}$, где

η – постоянная, называемая *вязкостью жидкости*. Она не зависит от материала пластин, но зависит от температуры.

Под вязкостью понимают как явление, так и коэффициент, характеризующий свойства текущей жидкости. Иногда пользуются величиной $\nu = \eta / \rho$, называемой *кинематической вязкостью*, тогда величину η , отличая ее от ν , называют *динамической вязкостью*.

Биологические жидкости (кровь), состоят из сложных крупных молекул, образующих пространственные структуры, и не являются ньютоновскими. Их вязкость намного превосходит вязкость ньютоновских жидкостей, потому что при течении этих жидкостей работа внешней силы затрачивается не только на преодоление истинной, ньютоновской, вязкости, но и на разрушение структур.

Стационарное течение жидкости в прямолинейной трубе.

Формула Пуазейля. Вязкая несжимаемая жидкость течет в прямолинейной цилиндрической трубе радиусом R . Линии тока параллельны оси X трубы. Вдоль бесконечно узкой трубки тока скорость течения не будет меняться (по условию несжимаемости). Выделим в трубе произвольный цилиндрический элемент длиной dx и радиуса r (рис. 13). На его боковую поверхность действует касательная сила вязкости $dF = 2\pi r\eta \frac{dv}{dr} dx$.

На основания цилиндра действует сила разности давлений

$$dF_1 = \pi r^2 [p(x) - p(x + dx)] = -\pi r^2 \frac{dp}{dx} dx$$

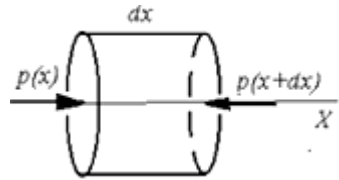


Рис. 13.

При стационарном течении $d\vec{F} + d\vec{F}_1 = 0$, и $2\eta \frac{dv}{dr} = r \frac{dp}{dx}$.

Величина Δp по оси X подбирается постоянной и такой, чтобы $v(r)$ и, следовательно, и dv/dr не менялись с изменением X .

Тогда $\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{l}$, где p_1, p_2 – давление на входе и выходе трубы.

Получаем форму: $\frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r$, или в интегральном виде:

$v = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$. Постоянная C определяется из краевых условий: на стенке трубы скорость $v(r = R) = 0$. Получаем:

$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (R^2 - r^2)$, т.е. на оси трубы $v(r = 0) = v_{\max}$, а при удалении от оси $v(r)$ спадает по параболическому закону.

Расход жидкости через кольцо с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$: $dQ = 2\pi r v dr$. Определим расход жидкости через поперечное сечение трубы, подставляя выражение скорости:

$$Q = \pi \rho \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr.$$

Формула Пуазейля в интегральной форме: $Q = \pi \rho \frac{P_1 - P_2}{8\eta l} R^4$.

Для прямолинейных труб произвольного поперечного сечения формула Пуазейля принимает общий вид: $Q = C \frac{P_1 - P_2}{\eta l} \rho S^2$,

где C – эмпирическая постоянная формы поперечного сечения.

Элементы теории гидродинамического подобия. Для повторения с заданной точностью (создать подобие) произвольный изотермический поток жидкости надо повторить его основные параметры: радиус-вектор \vec{r} и скорость \vec{v} в подобно расположенных точках, характерный размер l , характерная скорость v_0 потока, плотность ρ , вязкость η , скорость звука c , ускорение свободного падения g , характерное время τ качественного изменения течения.

Удобнее пользоваться безразмерными коэффициентами, несущими качественную информацию о системе. В таблице 1 представлены шесть безразмерных комбинаций основных параметров в форме критериев гидродинамического подобия. По правилу размерности каждая комбинация является функцией остальных,

например: $\frac{\vec{v}}{v_0} = f\left(\frac{\vec{r}}{l}; Re; F; M; S\right)$. Если для двух течений совпадают пять, то совпадают и шестые. Такие течения называют

механически или *гидродинамически подобными*.

Пример: а) для стационарных течений τ , а, следовательно, и S обращаются в ∞ ; б) для несжимаемых жидкостей $M = 0$. Таким

образом, для обоих условий: $\vec{v} = v_0 f\left(\frac{\vec{r}}{l}; Re; F\right)$, т.е. течения по-

добны, если они имеют одинаковые величины Re и F .

По порядку величины число Рейнольдса есть отношение кинетической энергии жидкости к потере ее, обусловленной работой сил вязкости на характерной длине. По порядку величины число Фруда определяет отношение кинетической энергии жидкости к приращению ее, обусловленному работой силы тяжести на пути, равному характерной длине.

Таблица 1. Основные критерии подобия

Символ и формула критерия	Критерий	Физический смысл
$\frac{\bar{v}}{v_0}$	Подобия поля скоростей	Характеризует поле скоростей, являясь отношением скорости течения в каждой точке к характерной скорости течения
$\frac{\bar{r}}{l}$	Геометрического подобия	Характеризует масштабное расположение элементов жидкости по отношению к характерному размеру
$Re = \frac{\rho l v_0}{\eta} = \frac{l v_0}{\nu}$	Режима движения. Число Рейнольдса	Характеризует режим движения при вынужденной конвекции, являясь отношением сил инерции и сил вязкости
$F = \frac{v_0^2}{l \cdot g}$	Гравитационного подобия. Число Фруда	Характеризует соотношение сил тяжести и сил инерции в потоке
$M = \frac{v_0}{c}$	Сжимаемости жидкости. Число Маха	Характеризует сжимаемость жидкости при увеличении ее характерной скорости
$S = \frac{v_0 \tau}{l}$	Гидродинамической гомохронности. Число Струхала	Характеризует меру отношения переносного (конвективного) ускорения к ускорению в данной точке

Характер течения жидкости по трубе зависит от свойств жидкости, скорости ее течения, размеров трубы и определяется числом Рейнольдса Re . При достаточно больших скоростях ($\bar{v} > \bar{v}_{кр}$ или $Re > Re_{кр}$) ламинарное (слоистое) течение оказывается неустойчивым и переходит в турбулентное течение, гидродинамические характеристики которого (ν ; p , а для газов ρ и T) быстро и нерегулярно изменяются во времени (флуктуируют). Для гидродинамически подобных течений переход от ламинарного к турбулентному течению обязан происходить при одних и тех же значениях числа Re (закон Рейнольдса).

Потенциальные и вихревые движения. Рассмотрим поле скоростей жидкости $\vec{v}(\vec{r})$ в фиксированный момент времени. Выделим в жидкости произвольный замкнутый контур L и на нем зададим положительное направление обхода (рис. 14).

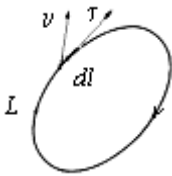


Рис. 14.

Интеграл $\Gamma = \oint_L \vec{v}_\tau dl = \oint_L (\vec{v} dl)$ называют циркуляцией Γ вектора скорости по контуру L . Если $\Gamma = 0$ по любому замкнутому контуру, то движение жидкости называют *потенциальным*, если $\Gamma \neq 0$ – *вихревым*.

Любое течение идеальной жидкости, возникшее из состояния покоя под действием консервативных сил, является *потенциальным*. Например, течение жидкости вдоль параллельных прямых с постоянной скоростью.

Примером вихревого движения служит плоское течение жидкости, когда частицы вращаются по концентрическим окружностям с одной и той же угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 15). В этом случае для окружности с r :

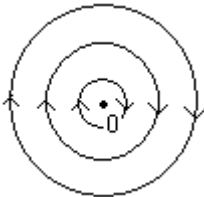


Рис. 15.

$$\Gamma = 2\pi r v, \text{ или } \Gamma = 2\pi r^2 \omega.$$

Отношение к площади контура $\frac{\Gamma}{\pi r^2} = 2\omega$ и

не зависит от r . Предел $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi r^2} = |\text{rot} \vec{v}| = 2\omega$

называют модулем *вихря* или *ротора* скорости \vec{v} , или, точнее проекцией вектора ротора на направление, перпендикулярное к плоскости контура: $\text{rot}_n \vec{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}$, где n – индекс нормали.

Теорема Жуковского. Рассмотрим движение жидкости относительно тела в форме крыла (совокупности крыльев) при следующих условиях:

- длина крыла бесконечно большая;
- крыло несимметричное или несимметрично расположено относительно горизонтальной плоскости, в которой оно движется;
- крыло движется в идеальной жидкости (безвязкостной);
- вокруг крыла установилась постоянная циркуляция скорости;
- невозмущенный поток горизонтален (рис. 16).

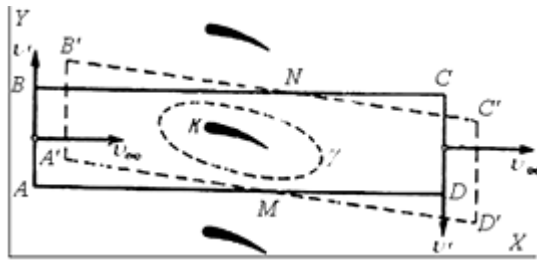


Рис. 16.

Заклучим одно крыло в виртуальный прямоугольный контур $ABCD$ в прямоугольной системе координат с направлением оси X вдоль потока. За время dt жидкость из $ABCD$ переместится в условный объем контура $A'B'C'D'$. Вертикальная скорость \vec{v}' обусловлена циркуляцией.

Искомое приращение импульса $d\vec{p}$ найдется, если из импульса в объеме $CC'D'D$ вычтем импульс в объеме $AA'B'B$. Каждый из этих объемов для единицы длины равен $lv_\infty dt$, где $l = AB = CD$, скорость невозмущенного течения \vec{v}_∞ постоянна, а вертикальные скорости \vec{v}' вдоль AB и CD равны по модулю. Приращение получает только вертикальная составляющая импульса, и оно равно $dp_y = -2lv_\infty v' dt$. Но $2lv' = \Gamma$ и есть циркуляция скорости \vec{v}' по контуру $ABCD$. Тогда: $dp_y = -\Gamma v_\infty dt$. Применяя второй закон Ньютона, получим формулу Жуковского $F_y = \Gamma v_\infty$.

Подъемная сила. В поток идеальной жидкости внесем тонкую пластину с ориентацией вдоль потока. Скорость жидкости равна нулю на краях – в точках A и B (рис. 17 *a*). При установке пластины перпендикулярно потоку критические точки P_1 и P_2 сместятся к центру, а скорость течения достигнет максимума на краях A и B (рис. 17 *б*).

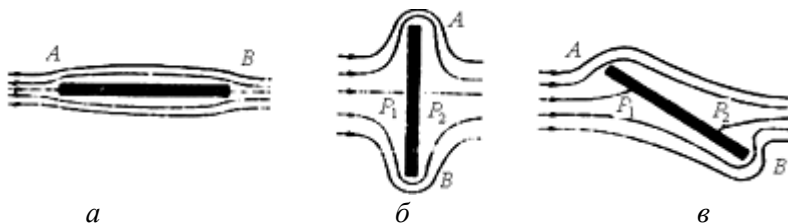


Рис. 17.

При наклонной ориентации пластины потоку (рис. 17 *в*) критические точки P , займут положения между центром пластины и краями. Скорость течения максимальна на краях, но в области критической точки P_1 она больше снизу, чем сверху, так как нижний поток расположен значительно ближе к краю B пластинки, чем верхний к краю A . Поток воздуха под крылом огибает заднюю кромку, встречается на линии PD с потоком, огибающим крыло сверху, формируя поверхность раздела, которая свертывается в вихрь с вращением против часовой стрелки (рис. 18 *a, б*).

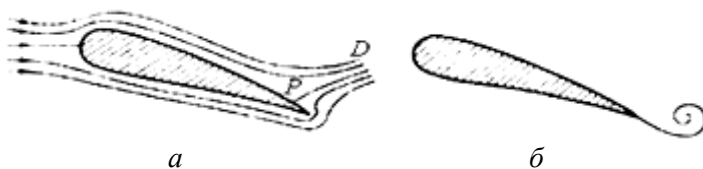


Рис. 18.

Масса воздуха, находившаяся в пограничном слое под крылом, в результате отрыва уносится вихрем со связанным с ним моментом импульса. Для сохранения момента импульса воздух во

внешнем потоке должен начать вращаться вокруг профиля крыла по часовой стрелке. Циркуляционное течение образуется как реакция на отделяемый от задней кромки крыла «начальный вихрь». Скорость потока под крылом уменьшится, а над ним – увеличится. Из уравнения Бернулли для внешнего потока следует, что в результате циркуляции давление под крылом возрастет, а над ним – уменьшится. Возникшая разность давлений проявится в подъемной силе, направленной вверх.

Эффект Магнуса. Если неподвижный круглый цилиндр обтекается равномерным потоком воздуха, перпендикулярным к его оси, то вследствие симметрии возникает лобовое сопротивление. Если цилиндр привести во вращение, то дополнительно появляется подъемная сила, направленная перпендикулярно направлению потока (*эффект Магнуса* (1802 – 1870)).

Пусть вращающийся цилиндр обдувается равномерным потоком воздуха слева направо (рис. 19). Сверху цилиндра направление потока совпадает с направлением вращения цилиндра, а снизу – противоположно ему. Частицы в пограничном слое сверху цилиндра ускоряются потоком, что препятствует отрыву пограничного слоя. Снизу – поток тормозит движение в пограничном слое и способствует его отрыву в виде вихрей с направлением вращения против часовой стрелки. Как следствие вокруг цилиндра возникает циркуляция скорости в противоположном направлении, т.е. в том же в каком вращается цилиндр. Вместе с циркуляцией появляется и подъемная сила, направленная вверх. При изменении направления вращения цилиндра подъемная сила меняет направление на противоположное.

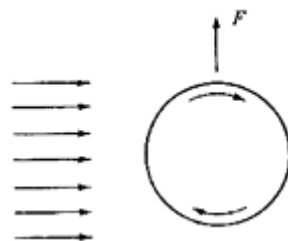


Рис. 19.

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Основные положения. Простейшей моделью системы многих частиц является *идеальный газ*, состоящий из точечных материальных частиц конечных масс, которые взаимодействуют по законам абсолютно упругих соударений, но не взаимодействуют на расстоянии. Модель применима к реальным системам, если в них энергия взаимодействия подавляюще меньше энергии самих частиц.

Так как при нормальных условиях (н.у.) средняя длина свободного пробега значительно больше размера твердых точечных частиц идеального газа, а интервал времени столкновений подавляюще меньше интервалов времени между столкновениями, то подавляющее время частицы движутся равномерно и прямолинейно.

При столкновениях частицы рассеиваются в пространстве, занимая весь объем. Если стенки материальны, то частицы отражаются от них и передают стенке суммарный импульс силы, создавая давление газа на стенку. При равновесном состоянии газа стенки обозначают выделенной замкнутой виртуальной границей, отвечающей за обмен частиц, эквивалентный их упругому отражению.

При неизменных внешних параметрах в газе устанавливается равновесное состояние. Любое отклонение от этого состояния сглаживается непрерывным хаотическим движением и столкновениями частиц с обменом энергией. За время релаксации по любому макропараметру газ возвращается в равновесное состояние. Столкновения частиц приводят не только к установлению в газе одинаковой плотности, но и к равномерному распределению в пространстве направлений движения частиц: сколько частиц движется в одном направлении, столько же в среднем движется в любом другом. Давление в идеальном газе оказывается изотропным. Средние скорости и число частиц, движущихся в разных направлениях, оказывается одинаковым: $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$,

Известны три метода, или подхода к изучению систем частиц: *динамический*, *статистический* и *термодинамический*.

Динамический метод. Если в некоторый момент времени известны координаты и скорости всех частиц системы и известен закон их взаимодействия, то решением уравнений классической механики находят эти координаты и скорости в последующий момент времени. *Динамический* метод однозначно определяет последующее состояние системы по предыдущему.

При нормальных условиях 1 см^3 воздуха содержит $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул. Это значит, что для записи в некоторый момент времени потребовалось бы зафиксировать $6,2,7 \cdot 10^{19}$ чисел положений и скоростей всех молекул. Даже простая фиксация при скорости 1 млрд чисел в секунду потребует около 5 тысяч лет. Но и эта информация бесполезна, т.к. каждая частица испытывает около 10^9 столкновений в секунду. Если на уровне погрешности изменить направление скорости частицы, то через $N \cdot 10^{-9}$ с изменятся скорости и положение у 2^N других частиц. Поэтому динамический метод может быть эффективен только для систем с малым числом степеней свободы.

Статистический метод. Если информация относится к совокупности большого числа частиц, то для осмысленности она должна иметь обобщенный характер (прил. 2). Но это влечет появление статистических понятий и закономерностей внутренней динамики.

Случайная величина не может быть предсказана, но совокупность системных случайных величин может обретать закономерности, изучаемые *теорией вероятности*. Способы и методы набора таких совокупностей изучает *математическая статистика*.

Статистическим методом исследования называют метод, при котором предыдущее состояние системы определяет последующее с некоторой вероятностью. Величина вероятности становится количественной оценкой прогноза последующего состояния.

Термодинамический метод. Модель идеального газа определяется параметрами, характеризующими систему в целом без анализа внутренней структуры. Связи между этими параметрами определяются с помощью самых общих положений, например, закона сохранения энергии.

Статистический метод

Основные понятия теории вероятности. Количественной оценкой прогноза последующего состояния является величина вероятности: $P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N}$, где N_A – число опытов с результатом A , N – число всех опытов, $P(A)$ – вероятность результата A .

Для физической системы объектов объемом V_i вводится понятие плотности вероятности: $f(x, y, z) = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{P(V_i)}{V_i} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{N_i}{NV_i}$,

где x, y, z – координаты исследуемой точки координатного пространства, в которую стягивается бесконечно малый объем.

Связь между вероятностью $P(V_i)$ частице i находиться и быть обнаруженной в объеме V_i и плотностью вероятности $f(x, y, z)$ этой частице иметь координаты (x, y, z) в этом объеме определяется:

$$P(V_i) = \frac{N(V_i)}{N} = \int_{V_i} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Если $V_i \rightarrow \infty$, то указанная i -я молекула будет определена с надежностью 100%. Тогда условие $\int_{V_i \rightarrow \infty} f(x, y, z) dx dy dz = 1$, или $\sum_{i=1} P_i = 1$ называется *условием нормировки вероятностей*.

Среднее значение дискретной величины: $\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Среди x_i могут быть одинаковые величины. Перегруппируем правую часть так, чтобы в нее входили разные x_j и получим: $\langle x \rangle = \sum_j \left(\frac{N_j}{N} \right) x_j$, где $N = \sum_j N_j$, а N_j – число одинаковых (j) членов в сумме i -х членов. Так как $N_j/N = P_j$ определяет вероятность того, что x принимает значение x_j , то $\langle x \rangle = \sum_j P_j x_j$ называют *математическим ожиданием* случайной величины с учетом вероятности.

Для непрерывно меняющейся величины x : $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$.

Дисперсию («разброс») задает средний квадрат отклонения $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$ величины x от среднего значения $\langle x \rangle$ и *стандартное*, или *среднеквадратичное отклонение* $\sqrt{\sigma^2}$ от среднего.

Задача сводится к идентификации функции $F(x)$ распределения вероятностей. Вероятность того, что случайная величина $x < x_0$ задается формулой: $P(x < x_0) = F(x_0) = \sum_{x_j < x_0} P_j$, где функция рас-

пределения вероятностей: $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx$; $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Вероятность того, что случайная величина x принимает значение, лежащее в интервале $x_1 < x < x_2$, выражается формулой:

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} dF(x) = F(x_2) - F(x_1).$$

Микроскопическое состояние системы. Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая ячейка. *Микроскопические состояния системы* – состояние газа, характеризуемое положениями и скоростями всех N -частиц, т.е. $6N$ числами: $3N$ координатами (x_i, y_i, z_i) и $3N$ проекциями их скоростей (v_x, v_y, v_z) . Изображают графически *фазовыми точками* в $6N$ -мерном пространстве.

При диаметре атома $d \approx 10^{-10}$ м объем частицы $V \sim d^3$. Весь объем газа может быть разбит на ячейки объемом $d^3 \sim 10^{-30}$ м³, занятые частицами с временем пребывания d/v . Микросостояния по пространству характеризуется распределением частиц определенным образом по этим ячейкам. Их число в 1 м³: $N \approx 1/d^3 = 10^{30}$, но частиц при н.у. в 1 м³: $N_L = 2,7 \cdot 10^{25}$ и на одну частицу приходится $\sim 4 \cdot 10^4$ ячеек. Иная часть – «отдано движению».

Объем *фазовой ячейки* частицы: $(\Delta x \Delta y \Delta z)_0 (\Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z) = h^3$ определен в пространстве координат-импульсов – *фазовом пространстве*. Здесь постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

Постулат равновероятности. Если от начального момента прошло много времени и все системы ансамбля «забыли» свои начальные состояния, то ячейка с конкретной системной частицей стала случайной. Отсутствие алгоритма памяти приводит к отсутствию алгоритма выбора перехода, что в свою очередь приводит к потере любых признаков предпочтения к конкретной для этого мгновения ячейке. Все фазовые ячейки микросостояния системы становятся равноценными, равновозможными и равновероятными.

Макроскопическое состояние системы. Системная совокупность физических объектов имеет характерные свойства и особенности границы: материальной или виртуальной, неподвижной или движущейся, проницаемой или непроницаемой для вещества и энергии. *Макроскопическое состояние* системы характеризуется макропараметрами: давлением p , температурой T и объемом V .

Система переходит без предпочтений от одного набора микросостояний к другому, «не зная» какое макро-состояние является наиболее вероятным и конечным. Не существует запретов на любой микропереход, поэтому проходит подавляющее число микропереходов. Хаотичные переходы из одного микросостояния в другое создают закономерное движение системы в направлении равновесного состояния – состояния максимальной свободы выбора и наиболее вероятным и предпочтительным состоянием. Система обретает равновесное состояние, но продолжает микропереходы, пребывая в постоянном поиске. Обретенный максимальный набор нереализованных возможностей (степеней свободы) система все время «пробует» микропереходами, проверяя их эффективность в пространстве и времени.

Равновесное макроскопическое состояние газа, находящегося в изолированном от внешней среды объеме V , является стационарным: p , V , T – постоянны во времени и во всех частях объема. Но в каждый момент времени и в каждой точке области пространства системы они испытывают малые случайные колебания около среднего, или *флуктуации*. Относительная роль флуктуаций растет с уменьшением объема системы, и убывает с ростом числа частиц в нем. Мера флуктуаций – дисперсия $\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$.

Закон равнораспределения энергии по степеням свободы.

Число степеней свободы – число независимых переменных, которыми определяется состояние системы. Для характеристики энергетического состояния материальной точки в некоторый момент времени необходимо задать три компоненты скорости для определения кинетической энергии и три координаты для определения потенциальной энергии. Степени свободы, как носители потенциальной энергии, отвечают за взаимодействие частиц в системе и с внешними потенциальными полями, поэтому в идеальном газе полевым взаимодействием частиц пренебрегают. Для него в условиях статистического равновесия на каждую степень свободы системы приходится

одинаковая средняя кинетическая энергия $\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2}kT$, где

T – температур, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Температура T является термодинамической температурой, связанной с температурой Цельсия: $T = t + 273,15$ (прил. 3).

Средняя кинетическая энергия частиц идеального газа:

$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3kT}{2}$, а т.к. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ и $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$, то вы-

полняется $\left\langle \frac{mv_x^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_y^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{mv_z^2}{2} \right\rangle = \frac{kT}{2}$ для любой частицы.

Если потенциальной энергией взаимодействия атомов пренебречь нельзя и она является квадратичной функцией расстояния (при малых колебаниях), то на нее также приходится $kT/2$.

В конкретный момент времени значение энергии, связанной с данной степенью свободы, может сильно отличаются от энергий, связанных с другими степенями. Только средние энергии за большие промежутки времени, связанные с разными степенями свободы, равны между собой. Это справедливо и для смеси газов.

Пример: Шесть степеней свободы 2- атомной молекулы складываются из 3 степеней свободы центра масс: $3kT/2$, а оставшиеся $3kT/2$ приходится на 2 вращательные степени свободы и одну колебательную.

Распределение Максвелла. Распределение молекул в пространстве скоростей установлено Джеймсом Клерком Максвеллом в 1860 г. В смеси газов, заключенных в изолированном объеме, разные сорта молекул имеют одинаковые средние кинетические энергии. Выравнивание происходит по энергиям к состоянию термодинамического равновесия системы. Макроскопическим параметром, характеризующим распределение молекул по скоростям, является средняя кинетическая энергия. Термодинамическое равновесие устанавливается в результате громадного числа столкновений между молекулами. Изменение скорости молекулы рассмотрим как ее изменение в пространстве скоростей (рис. 20).

Пусть $\Delta v_{xi}; \Delta v_{yi}; \Delta v_{zi}$ – изменения проекций скорости молекулы при ее i -м столкновении. После большого числа столкновений проекции ее скорости:

$$v_x = \sum_i \Delta v_{xi}, v_y = \sum_i \Delta v_{yi}, v_z = \sum_i \Delta v_{zi}.$$

Так как каждая проекция – сумма большого числа случайных величин, то и скорость молекулы становится случайной величиной.

При равновесном состоянии максимального выбора для молекулы не существует ни запрещенных значений скорости, ни избранного направления движения – любое направление движения равновероятно.

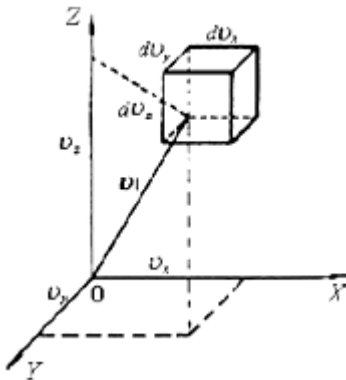


Рис. 20.

Это указывает на непрерывность функций распределения и по обоим параметрам и независимость от времени (стационарность). Значит можно искать и распределение скоростей молекул вдоль некоторого направления, и распределение молекул по абсолютной величине скорости. Выбираем второй путь.

Для получения такой функции вида $f(v^2)$ перейдем к пространству случайной величины скорости одной молекулы. На трех независимых осях OX, OY, OZ отложим проекции скорости молекулы v_x, v_y, v_z (рис. 20).

Вероятность $dP(v_x) = \varphi(v_x^2)dv_x$ определяет проекцию скорости молекулы на ось OX в интервале от v_x до $v_x + dv_x$. Функция распределения должна зависеть от v_x^2 , так как от изменения направления оси OX на обратное, вероятность определенной проекции скорости не изменится. Поэтому функция распределения $\varphi(v_x^2)$ зависит только от величины проекции скорости. Аналогично вводятся в рассмотрение функции $\varphi(v_y^2)$ и $\varphi(v_z^2)$. Все три функции из-за эквивалентности всех направлений формально идентичны.

Гипотеза Максвелла. Вероятность обладания молекулой одновременно тремя проекциями v_x, v_y, v_z скорости v в соответствующих интервалах dv_x, dv_y, dv_z равно произведению трех вероятностей проекций скоростей молекулы (как трех независимых случайных величин):

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x^2) \cdot \varphi(v_y^2) \cdot \varphi(v_z^2) dv_x dv_y dv_z. \quad (17)$$

Это равенство определяет вероятность того, что точка, совпадающая с концом вектора скорости находится в элементарном объеме пространства скоростей $dv_x dv_y dv_z$ (см. рис.20).

Наличие у скорости молекулы трех проекций v_x, v_y, v_z определяет направление движения и модуль скорости, которые также являются случайными величинами. Функция $f(v^2)$ распределения плотности вероятности скоростей вдоль произвольного направления движения должна иметь такой же вид, как и вдоль любой из осей с точностью до нормировочной постоянной.

Теперь вероятность обнаружения скорости молекулы в элементарном объеме пространства скоростей $dv = dv_x dv_y dv_z$ с помощью функции $f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$ равна вероятности определенного значения скорости молекулы:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dv_x dv_y dv_z \quad (18)$$

или, сравнивая (17) и (18), получаем:

$$\varphi(v_x^2) \varphi(v_y^2) \varphi(v_z^2) = f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (19)$$

Используя свойства непрерывности и положительности функций, составляющих уравнение (19) определим вид функции $f(v^2)$. Для этого последовательно прологарифмируем и продифференцируем обе части уравнения (19):

$$\ln \varphi(v_x^2) + \ln \varphi(v_y^2) + \ln \varphi(v_z^2) = \ln [f(v^2)],$$

$$\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} d(v_x^2) + \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} d(v_y^2) + \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} d(v_z^2) = \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2).$$

Раскрыв скобки в правой части, получаем:

$$\left[\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] d v_x^2 + \left[\frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] d v_y^2 + \left[\frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} - \frac{f'(v^2)}{f(v^2)} \right] d v_z^2 = 0$$

Ввиду независимости дифференциалов, следует равенство нулю выражений в квадратных скобках и далее:

$$\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} = \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} = \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)},$$

А это, в свою очередь, возможно из-за независимости v_x, v_y, v_z только в том случае, когда эти выражения равны одной

постоянной, т.е.
$$\frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)} = \frac{\varphi'(v_y^2)}{\varphi(v_y^2)} = \frac{\varphi'(v_z^2)}{\varphi(v_z^2)} = \pm \alpha.$$

На примере одной из проекций приведем последовательно операции интегрирования и потенцирования:
$$\frac{d[\varphi(v_x^2)]}{\varphi(v_x^2)} = -\alpha d v_x^2,$$

$$\ln \varphi(v_x^2) = -\alpha v_x^2 + c_1; \quad \varphi(v_x^2) = e^{-\alpha v_x^2 + c_1}; \quad \varphi(v_x^2) = e^{c_1} e^{-\alpha v_x^2},$$

где множители $e^{c_1} \equiv A$ и α для всех трех проекций одинаковы, т.к. оси координат эквивалентны, а случайные величины v_x, v_y, v_z независимы.

Функция со знаком плюс в экспоненте не подходит в качестве решения, поскольку он определяет случай безграничного увеличения плотности вероятности при удалении от центра «мишени», что невозможно. С другой стороны условие нормировки выполняется

(интеграл сходится) только при отрицательном показателе. Поэтому, принимая неопределенный параметр $\alpha > 0$, подставляем его в степень со знаком «минус».

$$\text{Окончательно: } \varphi(v_x^2) = Ae^{-\alpha v_x^2}; \quad \varphi(v_y^2) = Ae^{-\alpha v_y^2}; \quad \varphi(v_z^2) = Ae^{-\alpha v_z^2}$$

называют *распределением Гаусса*.

Вероятность того, что проекция скорости на ось OX заключена в интервале $[v_x, v_x + dv_x]$: $dP(v_x) = \varphi(v_x^2)dv_x = Ae^{-\alpha v_x^2}dv_x$. Аналогия справедлива и для других проекций скорости. Тогда

$$dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = dP(v_x, v_y, v_z) = A^3 e^{-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dv_x dv_y dv_z \quad (20)$$

Постоянная A находится из условия нормировки с учетом того, что запрещенных значений скоростей нет, а значит для любой ячейки: $\int_{-\infty}^{\infty} \int \int dP(v_x; v_y, v_z) = 1$. Для решения этого интеграла понадо-

бится интеграл Пуассона с известным значением: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Проводя замену переменной $x = \sqrt{\alpha}v_x$, просто определить значение каждого интеграла по оси OX :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (21)$$

Тогда из условия нормировки $A\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 1$, определяем $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

Вычислим среднее значение кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle &= \left(\frac{m}{2} \right) \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \left(\frac{m}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int \int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dP(v_x, v_y, v_z) = \\ &= \left(\frac{m}{2} \right) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int \int \int (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \exp[-\alpha(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] dv_x dv_y dv_z \end{aligned}$$

Распишем правую часть равенства как сумму тройных интегралов:

$$\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \left(\frac{m}{2} \right) \cdot \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_z^2} dv_z + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} v_y^2 e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_z^2} dv_z + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_y^2} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} v_z^2 e^{-\alpha v_z^2} dv_z \right]$$

Квадратная скобка содержит девять интегралов, шесть из которых вида (21), а значит, имеют известное значение $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$. Оставшиеся три формально идентичны и определяются методом дифференцирования. Например:

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\frac{d}{d\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = -\frac{d}{d\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}.$$

Подставляем известные значения интегралов и с учетом множителя перед квадратной скобкой получаем: $\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3m}{4\alpha}$.

Так как в равновесном состоянии $\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT$, то определяется вторая постоянная: $\alpha = \frac{m}{2kT}$.

Перейдем к сферической системе координат скоростей, определяемой радиус-вектором \vec{v} и телесным углом Ω (прил. 4).

Так как $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{\frac{1}{2}}$, то объем тонкого сферического слоя толщиной dv и радиуса v составит $dv_x dv_y dv_z = v^2 d\Omega dv$. (прил. 4). Проинтегрируем первые два множителя в правой части по всему телесному углу: $\int_{\Omega=4\pi} v^2 d\Omega = v^2 \int_{\Omega=4\pi} d\Omega = 4\pi v^2$. Тогда формула (17), с учетом $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ и $\alpha = \frac{m}{2kT}$ в сферических координатах может представлять вероятность частице массой m находиться в сферическом слое толщиной dv пространства скоростей:

$$dP(v) = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2 dv, \quad (22)$$

Перепишем уравнение (22) в виде:

$$f(v) = \frac{dP(v)}{dv} = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2 \quad (23)$$

Функция (23) определяет плотность вероятности обладания молекулой модулем скорости v и в форме называется *распределением Максвелла*.

Число $dN(v)$ частиц имеют вероятность $dP(v)$ быть обнаруженными в интервале $[v, v + dv]$ и $dN(v) = NdP(v)$. Здесь N - полное число молекул в системе. Относительное число молекул в указанном интервале $\frac{dN(v)}{N} = dP(v) = f(v)dv$, или

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right] v^2 \quad (24)$$

Характерные скорости распределения Максвелла. По виду функций распределения Максвелла (формулы (23) и (24)) видно (рис. 21), что с ростом температуры максимум распределения смещается к большим скоростям, а высота кривой в максимуме падает. Условие нормировки обязует равенство площадей, ограниченных каждой кривой и осью скоростей независимо от значения температуры. Вследствие этого с увеличением температуры число молекул с большими скоростями увеличивается, а число медленных молекул обязано уменьшаться.

Среднее значение функций $f(v)$, зависящих от модуля скорости:

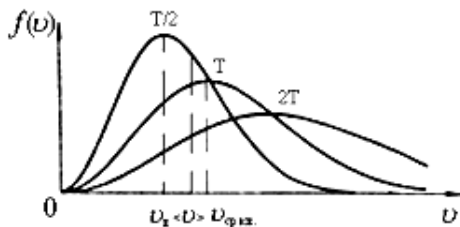


Рис. 21.

$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv$, $\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv$. Получаем формы среднеарифметической и среднеквадратичной скорости: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ и

$v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$. *Наивероятнейшая* скорость $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, соответствует максимуму кривой распределения (рис. 21, прил. 5).

Для определения числа молекул в заданном интервале скоростей, характеризуемое как постоянное при равновесном состоянии, применяют иную форму записи распределения Максвелла:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 \Delta u, \text{ где относительная скорость } u = v/v_e.$$

Давление газа на стенку. Рассмотрим поток J_x частиц вдоль оси X перпендикулярно и в направлении (+) единичной площадки ΔS_n стенки (рис. 22) за время Δt : $J_{x^+} = \frac{N_{x^+}}{\Delta S_n \Delta t}$. Индекс (+) касается

только молекул, движущихся к стенке, т.е. половины общего их числа. Количество молекул N_{x^+} , пришедших на единичную площадку за единицу времени, равно частоте ν их ударов о стенку. Эти молекулы приходят на стенку из малого объема с границами, выделенными штриховыми линиями на рис. 22. Тогда

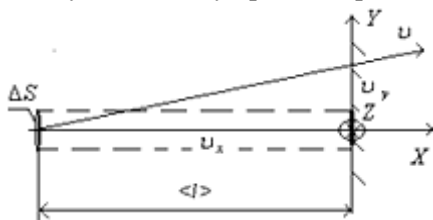


Рис. 22.

$$J_{x^+} = \frac{N_{x^+}}{\Delta S_n \Delta t} \cdot \frac{\langle l \rangle}{\langle l \rangle} = \frac{N_{x^+}}{\Delta V} \cdot \langle v_x^+ \rangle$$

Давление возникает в результате ударов молекул о стенки сосуда. При упругом ударе нормальная (к стенке) составляющая количества движения $mv_x^{(+)}$ меняется на обратную ($-mv_x^{(+)}$), а параллельная стенке составляющая mv_y и mv_z остается неизменной (см. рис. 22). Тангенциальные составляющие импульсов компенсируются, а нормальные – сумми-

руются, обуславливая давление. Изменение количества движения молекулы при ударе о стенку $2m\mathbf{v}_x^{(+)}$ называют импульсом силы, действующим нормально на молекулу со стороны стенки. На стенку передается импульс той же величины.

Из определения давления и теоремы импульсов следует, что давление равно суммарному импульсу, передаваемому стенке площадью 1 м^2 молекулами в результате их контакта со стенкой за 1 с . Поэтому давление определяет удвоенный поток импульса молекул, нормальный к поверхности стенки (см. рис. 22).

При концентрации n_0 частиц их поток в направлении стенки:

$$J_{N_x^+} = \int_0^{\infty} n_0 f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) v_x^{(+)} dv_x^{(+)} dv_y dv_z .$$

Поток импульса по направлению к стенке:

$$J_{mv_x^+} = \int_0^{\infty} m v_x^{(+)} n_0 f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) v_x^{(+)} dv_x^{(+)} dv_y dv_z .$$

Тогда давление газа на стенку $p_x = 2J_{mv_x^+}$

$$p_x = 2n_0 m \int_0^{\infty} f(v_x^{(+)}, v_y, v_z) (v_x^{(+)})^2 dv_x^{(+)} dv_y dv_z = \frac{2n_0 m}{4\alpha} = n_0 kT .$$

Для p_y и p_z рассуждения аналогичны, то: $p_x = p_y = p_z = n_0 kT$, или в общем виде: $p = n_0 kT$. Давление газа в разных направлениях одинаково (изотропно) и его обозначают в скалярной форме (p).

С учетом $v_{\text{ср.кв}} = \sqrt{3kT/m}$, получаем форму *основного уравнения кинетической теории идеальных газов*. $p = \frac{2}{3} n_0 < \frac{mv^2}{2} >$.

Уравнение равновесного состояния идеального газа может принимать и иные формы записи. При общем числе N молекул газа в объеме V , $n_0 = \frac{N}{V}$ и $PV = NkT$. Далее при $N = \nu N_A$, где ν – количество молей, получаем форму *уравнения состояния Клапейрона-Менделеева*: $pV = \nu RT$, где молярная газовая постоянная $R = kN_A = 8,314 \text{ Дж/моль}\cdot\text{К}$. Так если $\nu = m/M$, а $m/V = \rho$, то в первом случае получим форму $PV = mRT/M$, а во втором: $P = \rho RT/M$.

Распределение Больцмана. Поместим объем газа при термодинамическом равновесии во внешнее потенциальное поле. Поле входит в объем газа и на каждую молекулу в потенциальном поле действует сила $\vec{F} = -\nabla U$, где U – потенциальная энергия молекулы. Действие компенсируется силами давления. В конечном итоге система находит стационарное состояние (квазиравновесия).

Вдоль оси Ox на молекулы действует потенциальная сила $dF_{1x} = -n_0 dydz dx \frac{dU}{dx}$, где n_0 – концентрация, $dydz dx$ – элементарный объем. Сила разности давлений $dF_{2x} = -\left(\frac{dp}{dx}\right) dx dy dz$ в направлении оси Ox . При установлении стационарного состояния:

$$dF_{1x} + dF_{2x} = 0, \text{ или } \left(\frac{dp}{dx}\right) dx = -n_0 \left(\frac{dU}{dx}\right) dx.$$

С учетом справедливости равенства для других координат суммируем их левые и правые части:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz = -n_0 \left[\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy + \left(\frac{dU}{dz}\right) dz \right] = -n_0 dU$$

Дифференцируя $p = n_0 kT$ при $T = \text{const}$, получаем $dp = kT dn_0$.

Далее: $-n_0 dU = kT dn_0$, или $\frac{dn_0}{n_0} = -\frac{dU}{kT}$. Интегрируя это уравнение

между точками (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) по произвольному пути, получаем распределение Больцмана:

$$n_0(x, y, z) = n_0(x_0, y_0, z_0) \exp\left\{-\frac{U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0)}{kT}\right\}.$$

Если отсчет потенциальной энергии делать от $U(x_0, y_0, z_0) = 0$ (т.е. назначить в точке (x_0, y_0, z_0) $U = 0$), то форму записи можно

упростить: $n_0 = n_{00} e^{-\frac{U}{kT}}$, где $n_0 = n_0(x, y, z)$, $n_{00} = n_0(x_0, y_0, z_0)$.

При наложении внешнего потенциального поля на физическую систему частиц при термодинамическом равновесии (при $T = \text{const}$) меняется распределение концентрации молекул.

Барометрическая формула. Для изотермической атмосферы распределение давления с высотой h дается для каждой компоненты воздуха: $p_i(h) = n_{oi}(h)kT$. Используя формулу распределения Больцмана для системы частиц в вертикальном поле тяготения, получаем *барометрическую* формулу $p_i(h) = p_i(0)\exp\left[-\frac{m_i gh}{kT}\right]$.

Воздух состоит в основном из молекул O_2 и N_2 , тогда:

$$p(h) = p_1(h) + p_2(h) = p_1(0)\exp\left[-\frac{m_1 gh}{kT}\right] + p_2(0)\exp\left[-\frac{m_2 gh}{kT}\right].$$

Для смеси газов соотношение компонент газа и парциальных давлений меняются с высотой, но для воздуха $m_{O_2} \cong m_{N_2} = m$ и

$$p(h) = p_0 \exp\left[-\frac{mgh}{kT}\right], \text{ где } m \text{ – масса «молекулы воздуха»}.$$

В иной форме записи $p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 gh}{p_0}\right)$ с учетом

$$\frac{m}{kT} = \frac{\rho_0}{p_0}, \text{ где } \rho_0, p_0 \text{ – плотность и давление воздуха при } h = 0.$$

Распределение Максвелла - Больцмана. Подсчет микросостояний зависит от того, обладают ли частицы какими-то признаками, которые позволяют различать их. Если частицы различимы, то микросостояние считается иным, если они поменялись местами. В случае неразличимости частиц микросостояние неизменно. Подсчет числа микросостояний в предположении различимости частиц приводит к распределению Максвелла – Больцмана – основному распределению классической статистической физики:

$$dN(x, y, z, v_x, v_y, v_z) = A e^{-\left[\frac{mv^2}{2} + U\right] \frac{1}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

Распределения Максвелла и Больцмана являются составными частями распределения Дж. Гиббса. Модели, в которых частицы рассматриваются неразличимыми, называют распределениями Бозе – Эйнштейна и Ферми – Дирака.

Термодинамический метод

Определения термодинамики равновесных состояний.

Термодинамика имеет в своем основании три закона. Первый – применение закона сохранения энергии; второй – характеризует направление развития процессов и эффективность преобразования энергии в работу; третий – накладывает ограничения на процессы при приближении к термодинамическому нулю температуры.

Законы термодинамики универсальны в живой или неживой материи, но в качестве модели вещества и для иллюстрации термодинамического метода выберем модель идеального газа.

Термодинамическая система – часть пространства с материальным содержимым, ограниченная оболочкой и изучаемая термодинамическими методами. Область вне оболочки – окружающая внешняя среда. Выделяют четыре типа связи систем с внешней средой: изолированные, замкнутые, открытые и полуоткрытые. Тип системы определяется свойствами оболочки.

Изолированной термодинамической системе запрещен обмен с внешней средой веществом и энергией. *Замкнутой* (замкнутой) системе разрешен обмен энергией, но запрещен – веществом.

Открытая термодинамическая система обменивается с внешней средой и энергией, и веществом. *Полуоткрытая* система обменивается с внешней средой и веществом, и энергией избирательно (оболочка обладает свойствами селективного отбора).

Состояния термодинамической системы описывают с помощью *макропараметров* – макроскопических величин, описывающих всю систему в целом. Макропараметры условно (в зависимости от содержания задачи) подразделяют на внешние и внутренние: внешние – фиксируют внешние условия для системы; внутренние – устанавливаются в системе. Охарактеризованное таким способом состояние называют *макросостоянием*.

Внутренние *экстенсивные* макропараметры (масса m , объем V) определяют общее количество вещества в системе. Внутренние *интенсивные* (давление p , температура T , концентрация n) не зависят от массы системы.

Термодинамический процесс – переход системы из равновесного состояния (p_1, V_1, T_1) в другое – с макропараметрами: p_2, V_2, T_2 . Если переходить в состояние с другим объемом не медленно, то постоянство давления и температуры по объему нарушится: во всех точках объема они будут разными. Их распределение по объему зависит не только от начальных и конечных его значений, но от способа перехода. При переходах все промежуточные состояния системы будут *неравновесными*. Если даже один переход будет неравновесным, то и весь процесс будет *неравновесным*. Такой процесс практически невозможно изобразить графически.

Если переходить в состояние с другим объемом очень медленно, т.е. после каждого малого изменения (условного шага) параметров, следующее изменение не проводить до тех пор, пока система не придет в равновесное состояние, и все макроскопические параметры успеют принять постоянные значения. Так пошагово посредством флуктуаций *равновесный* процесс состоит из последовательности промежуточных равновесных процессов, которые так называют, если они протекают ниже уровня флуктуационных.

Если возможен обратный переход из конечного состояния в начальное через те же промежуточные состояния, что и в прямом, но в обратной последовательности, то процесс называют *обратимым*. В любом ином случае – процесс *необратимый*. Неравновесный процесс – необратимый, равновесный процесс – обратимый.

Первое начало термодинамики. Задача термодинамики состоит в том, чтобы найти *функции состояния*, однозначно определяющие изменение состояний термодинамической системы в независимости от пути или способа перехода. Внутренняя энергия U является функцией состояния системы и определяется как суммарная кинетическая и потенциальная энергия, аккумулированная всеми атомами и молекулами системы, за вычетом кинетической энергии движения центра масс и потенциальной энергии системы во внешних полях, включая и энергию частиц, составляющих сложные частицы. Ее бесконечно малое изменение принимается положительной $dU > 0$ при возрастании U . Для циклических процессов в изолированных системах $\oint dU = 0$.

Макроскопическая работа. Дан газ, заключенный в цилиндрический объем с поршнем. Сила, создаваемая давлением p газа на поршень площади S , равна pS , а работа по перемещению поршня на расстояние dx : $\delta A = pSdx$, или $\delta A = pdV$. Принимают работу, совершаемую над системой, отрицательной с обозначением: $\delta A < 0$.

Для определения работы при конечном процессе $A = \int pdV$, необходимо, чтобы давление было определенной функцией объема V . Но, согласно уравнению состояния: $p(V, T)$. Меняя в ходе процесса различным образом температуру системы, можно квазистатически перевести систему из начального состояния в конечное бесчисленным множеством способов. Каждому из этих способов соответствует своя функция $p = p(V)$ и свое значение вышеуказанного интеграла. Значит работа A не определяется заданием начального и конечного состояний системы и *не является функцией состояния*. Ее величина зависит также от способа или «пути» перехода системы из начального состояния в конечное. *Функциями состояния* называют параметры системы, имеющие вполне определенные значения в каждом состоянии системы.

Характерной особенностью термодинамических процессов является то, что системе сообщается или забирается энергия только путем изменения макроскопических параметров.

Количество теплоты. Если система помещена в адиабатическую оболочку, то единственным способом изменить ее внутреннюю энергию является производство над ней макроскопической работы. Если адиабатической изоляции нет, то изменение внутренней энергии возможно без производства макроскопической работы.

Теплообмен – процесс обмена внутренними энергиями соприкасающихся тел, не сопровождающийся производством макроскопической работы. Энергию, переданную телу внешней средой в результате теплообмена, называют количеством теплоты, или теплотой.

Итак, под теплотой понимают не особую форму энергии, как в случае с потенциальной, кинетической, электрической или магнитной, но только лишь как особый вид перехода энергии из одного количества вещества в иное, обусловленное разностью температур.

Если теплота обозначает только кинетическую часть внутренней энергии и служит энергетической мерой интенсивности хаотического движения частиц, то ее называют «тепловой энергией». Бесконечно малая энергия δQ положительна, если теплота сообщается системе, и отрицательна, если – забирается от нее.

В замкнутой системе изменение внутренней энергии можно определить, измеряя теплоту и выполненную работу:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = Q - A, \quad (25)$$

Разность ΔU зависит только от начального и конечного состояния системы, а работа A зависит еще и от пути перехода. Но тогда и количество теплоты Q также зависит от пути перехода (от способа приведения системы в конечное состояние), и не является функцией состояния.

Полный запас энергии изолированной термодинамической системы есть величина постоянная: $U = \text{const}$. При этом разрешены превращения видов энергии в эквивалентных соотношениях.

Первый закон термодинамики в дифференциальной форме

$$dU = \delta Q - \delta A, \quad \text{или} \quad \delta Q = dU + \delta A. \quad (26)$$

Первое начало термодинамики – выражение закона сохранения энергии для всех процессов с участием теплоты. Оно не предсказывает направление течения процесса, но указывает, как меняются величины, если процесс происходит. Если какой-либо процесс происходит, он должен удовлетворять первому началу.

Примечание. Обозначения δ и d указывают, что все три слагаемых являются бесконечно малыми приращениями, но dU – полный дифференциал, а δQ и δA – не могут им быть. – функция состояния. Параметры p , V , T и U – функции состояния и являются полными дифференциалами.

О равновесных и неравновесных состояниях. При равновесном состоянии механической системы скорости и ускорения материальных точек равны нулю. Результирующая сила, действующая на каждую точку в любой момент времени, равна нулю. При термодинамическом равновесии входящие в систему молекулы подвержены действию несбалансированных сил и движутся во всевозможных направлениях, и понятие равновесия применимо к коллективным характеристикам системы в целом (макропараметрам).

Система находится в термодинамическом равновесии, если ответственные за обмены характеристики имеют одинаковые значения и в системе, и во внешней среде, а различные части системы между собой термодинамически неразличимы. Поэтому при равновесии алгебраическая сумма потоков на границе равна нулю. Равновесие состояние – всегда стационарное состояние.

Неравновесные состояния связаны с неисчезающими потоками между системой и внешней средой. Различия некоторых переменных могут мгновенно возникнуть, благодаря начальному условию и релаксировать в направлении равновесия между системой и внешней средой, или могут быть постоянными, если создать и поддерживать соответствующие условия – *ограничения*. В обоих случаях появляется *конкуренция* между состояниями отдельных частей системы. Неравновесное состояние обретает способность к изменениям: малые локальные изменения могут быть усвоены и усилены системой, становясь источником новообразований и разнообразия.

Теплоемкость. При сообщении системе теплоты δQ ее температура изменяется на dT . Величину $C = \delta Q/dT$ называют теплоемкостью, как количественную оценку способности системы аккумулировать тепловую энергию при заданном характере процесса. Теплоемкость измеряется количеством теплоты (Дж), затрачиваемым для повышения температуры тела на 1 градус. Убирая зависимость теплоемкости от количества вещества используют: *удельную* $c_m = C/m$ или *молярную* $c_\mu = C/\nu$ *теплоемкости*.

Теплоемкость – характеристика вещества тела, но сильно зависит от условий изменения температуры тела и характера процесса. В общем случае она меняется от отрицательных до положительных значений. Но при фиксированных условиях изменения температуры тела теплоемкость отвечает данным числовым значением только за свойства вещества тела. Так при постоянном объеме:

$$C_V = (\delta Q/dT)_V = dU/dT + (pdV/dT)_V.$$

При заданном условии $dV = 0$ получаем $(\delta Q/dT)_V = dU/dT$, что означает: δQ при $V = \text{const}$, есть полный дифференциал. Исходная формула принимает вид $C_V = dU/dT$, где C_V – теплоемкость при постоянном объеме является функцией состояния.

При постоянном давлении: $C_p = (\delta Q/dT)_p = dU/dT + (pdV/dT)_p$, или: $C_p = d(H/dT)_p$, где $H = U + pV$ – *энтальпия*, или полное тепло-содержание системы. Тогда $(\delta Q)_p$ – полный дифференциал, а теплоемкость C_p при постоянном давлении является функцией состояния. В дифференциальной форме (при $p = \text{const}$):

$$dH = dU + p dV. \quad (27)$$

Соотношение между теплоемкостями идеального газа. Формула Майера. В зависимости от того, какие из трех переменных макропараметров независимы, они между собой функционально сопряжены: $p = p(T, V)$, или $T = T(p, V)$, или $V = V(p, T)$. Назначим независимыми переменными V, T . Тогда внутренняя энергия системы: $U = U(T, V)$. Подставив выражение полного дифференциала $dU = (\partial U / \partial T)_V dT + (\partial U / \partial V)_T dV$ в (26), имеем:

$$\delta Q = (\partial U / \partial T)_V dT + [p + (\partial U / \partial V)_T] dV. \quad (28)$$

Формула для теплоемкости может быть представлена в виде

$$C = (\partial U / \partial T)_V + [p + (\partial U / \partial V)_T] dV / dT, \quad (29)$$

где dV/dT определяется характером процесса: при $V = \text{const}$ эта величина равна нулю; при $p = \text{const}$ формула (29) принимает вид:

$$\begin{aligned} C_p &= (\partial U / \partial T)_V + [p + (\partial U / \partial V)_T] (\partial V / \partial T)_p = \\ &= C_V + [p + (\partial U / \partial V)_T] (\partial V / \partial T)_p. \end{aligned} \quad (30)$$

Внутренняя энергия идеального газа зависит от числа степеней свободы частиц. На каждую из них приходится энергия $1/2 kT$. Значит, внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры $U = U(T)$. С учетом того, что уравнение состояния для одного моля может быть записано в виде: $V_m = RT/p$, находим:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = R/p. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (30) получаем:

$$C_p = C_V + R. \quad (32)$$

Соотношение (32) для молярных теплоемкостей C_p и C_V в идеальном газе называют *уравнением Майера*. Разделив обе части уравнения (32) на молярную массу M газа, получим: $c_p = c_V + R_0$, где $c_p = C_p/M$, $c_V = C_V/M$ – удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме; $R_0 = R/M$ – удельная газовая постоянная.

Теплоемкость идеального газа. Частица идеального газа имеет три степени свободы поступательного движения и энергию $\frac{3}{2} kT$. Частица, состоящая из двух жестко связанных точечных частиц, ведет себя подобно твердой гантели, имеет пять степеней свободы – три поступательные и две вращательные, и энергию $\frac{5}{2} kT$. Частица, состоящая из двух нежестко связанных точечных частиц, имеет энергию $\frac{7}{2} kT$. Точечные частицы могут совершать колебательное движение вдоль соединяющей их линии, что добавляет две степени свободы кинетической энергии $\frac{1}{2} kT$ и потенциальной энергии $\frac{1}{2} kT$. Сложная частица с i степенями свободы имеет энергию $(i/2)kT$. В качестве иллюстрации на рис. 23. показана экспериментальная зависимость $C_V(T)$ для молекулярного водорода.

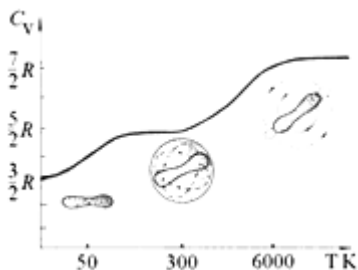


Рис. 23.

В моле имеется N_A частиц и, внутренняя энергия моля идеального газа $U = \left(\frac{i}{2}\right)N_A kT = \left(\frac{i}{2}\right)RT$.

Тогда из определения теплоемкости $C_V = dU/dT$ и используя формулу Майера, получаем:

$$C_V = \left(\frac{i}{2}\right)R, \quad C_P = \left(\frac{i+2}{2}\right)R.$$

Теория теплоемкостей идеального газа имеет расхождения с экспериментом к основным, из которых относят следующие:

1. Если теплоемкость Cl_2 равна примерно $\frac{6}{2} kT$, что невозможно объяснить в рамках теории теплоемкостей идеального газа, то у трехатомных газов отклонения от теории не единичные.

2. Разреженный водородный газ близок к идеальному и является удобным объектом для проверки теории. Теоретически для двухатомного газа C_V равна либо $\frac{5}{2} R$, либо $\frac{7}{2} R$ и от температуры не зависит. Теплоемкость реального молекулярного водорода зависит от температуры. При низкой температуре (до 50 К) молекула водорода ведет себя как точечная частица ($C_V = \frac{3}{2} R$); при нормальной температуре – как жесткая гантель ($C_V = \frac{5}{2} R$); при высокой температуре (более 6000 К) – как гантель с нежесткой внутренней связью ($C_V = \frac{7}{2} R$). При изменении температуры включаются (или

выключаются) разные степени свободы. Переход от одного режима движения к другому происходит не скачком, а постепенно в некотором интервале температур, когда возникает возможность перехода молекул в другой режим движения, которая реализуется не сразу всеми молекулами.

Процессы в идеальных газах. Процесс, в котором теплоемкость является постоянной величиной, называется *политропным*. Из требования постоянства теплоемкости C в процессе, следует, что первое начало термодинамики должно иметь вид $CdT = C_V dT + pdV$. Разделим это уравнение на T и переходя к молярным теплоемкостям (для 1 моля) получим:

$$(C - C_V) \frac{dT}{T} = \frac{R}{V} dV, \text{ или при } R = C_p - C_V \text{ равенство переписывается в виде: } \frac{dT}{T} + \left[\frac{(C_p - C_V)}{(C_V - C)} \right] \frac{dV}{V} = 0.$$

Обозначим: $(C_p - C_V) / (C_V - C) = n - 1$, и $n = (C - C_p) / (C - C_V)$. Тогда:

$$\frac{dT}{T} + (n - 1) \frac{dV}{V} = 0, \tag{33}$$

Интегрируя (33) и учитывая, что $dT/T = d \ln T$, $dV/V = d \ln V$, получаем, получаем уравнение политропы в интегральной форме и в переменных T, V : $TV^{n-1} = \text{const}$. Исключая T с помощью равенства $T = pV/R$, получаем уравнение политропы в интегральной форме в переменных (p, V) : $pV^n = \text{const}$ и т.д.

Изобарный, изохорный, изотермический и адиабатный процессы являются частными случаями политропного процесса для разных значений показателя политропы n (табл. 2).

Таблица 2. Изопроцессы

$C = \text{const}$	n	Название	Уравнение	Кривая
$C = 0$	$n = C_p / C_V = \gamma$	<i>Адиабатный</i>	$pV^\gamma = \text{const}$	<i>адиабата</i>
$C = \infty$	$n = 1$	<i>Изотермический</i>	$pV = \text{const}$	<i>изотерма</i>
$C = C_p$	$n = 0$	<i>Изобарный</i>	$V/T = \text{const}$	<i>изобара</i>
$C = C_V$	$n = \pm \infty$	<i>Изохорный</i>	$p/T = \text{const}$	<i>изохора</i>

Изобарный процесс проходит при постоянном давлении. Температуры в точках (p_1, V_1) и (p_1, V_2) определяются уравнением состояния для моля ($\nu = 1$) соответственно: $T_1 = p_1 V_1 / R$, $T_2 = p_1 V_2 / R$. При этом процессе с ростом объема к системе необходимо подводить теплоту, для того чтобы обеспечить постоянство давления.

Работа в процессе определяется интегралом $A = \int_1^2 p_1 dV = p_1 (V_2 - V_1)$.

Работа при *изохорном процессе* ($V = \text{const}$): $A = \int_1^2 p dV = 0$.

Изотермический процесс проходит при постоянной температуре. Работа в этом процессе равна: $A = \int_1^2 p dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1}$.

Внутренняя энергия идеального газа не изменяется ($dU = 0$), так как $T = \text{const}$. Поэтому $\delta Q = \delta A$, т.е. в изотермическом процессе все количество теплоты, подводимое извне, идет на совершение работы.

Адиабатный процесс - процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой ($\Delta Q = 0$). Первое начало термодинамики для этого процесса записывают в виде: $C_V dT + p dV = 0$. Откуда ясно, что $dT < 0$ при $dV > 0$, и работа, совершаемая газом при расширении в этом процессе, происходит за счет его внутренней энергии; $dT > 0$ при $dV < 0$, поэтому работа, совершаемая над газом, приводит к увеличению его внутренней энергии.

По общей формуле для работы:

$$A = \int_1^2 p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{RT_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где $p_1 V_1 = RT_1$. Принимая во внимание, что $(V_1/V_2)^{\gamma-1} = T_2/T_1$, формулу для работы можно преобразовать к виду $A = \frac{R(T_1 - T_2)}{(\gamma-1)}$.

Энтропия идеального газа (в трактовках Р. Клаузиуса и Л. Больцмана). Запишем формулу (26) первого начала термодинамики

в виде:
$$\frac{\delta Q}{T} = C_V \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dV.$$

Используя уравнение состояния для одного моля: $p/T = R/V$, и учитывая, что $dT/T = d\ln T$, $dV/V = d\ln V$, получаем

$$\delta Q/T = d(C_V \ln T + R \ln V), \quad (34)$$

Так как правая часть равенства (34) – полный дифференциал, то $\delta Q/T$ – также полный дифференциал функции состояния, названной *энтропией* S (от греч. – изменение, превращение):

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (35)$$

В изолированной термодинамической системе изменение энтропии

$$dS \geq 0, \quad (36)$$

где знак (=) соответствует обратимым процессам, а знак (>) – реальным необратимым процессам. Для необратимых процессов в закрытых системах неравенство принимает вид:

$$dS = \frac{\partial Q_e}{T} + \frac{\partial Q_i}{T}, \quad (37)$$

где ∂Q_i – теплота, рожденная в системе необратимыми процессами.

Уравнения (35) – (37) представляют математическую запись второго закона термодинамики: *в изолированной системе энтропия сохраняет постоянное значение для обратимых процессов ($S = \text{const}$), возрастает при необратимых процессах и достигает максимального значения при термодинамическом равновесии ($S \rightarrow \text{max}$).*

Необратимые процессы всегда протекают в направлении возрастания энтропии, а сама она является количественным показателем способности системы к самопроизвольным изменениям.

Людвиг Больцман дал физическую трактовку энтропии исходя из понятий статистической физики: *энтропия является мерой молекулярного хаоса, а закон ее неубывания отражает возрастающую дезорганизацию системы.* Это удалось доказать предположив, что энтропия любого и каждого макроскопического состояния связана с вероятностью реализации состояния:

$$S = k \ln \Gamma, \quad (38)$$

где k – постоянная Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-23}$, Дж/К), Γ – термодинамическая вероятность, как число успешных или незапрещенных способов реализации N молекул в i ячейках системы:

$$\Gamma = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\dots N_i!}, \quad (39)$$

где $N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots + N_i$ – число молекул в системе; N_i – число молекул в i -м фазовом объеме (рис. 24).

Если все микросостояния системы равновероятны, величина Γ пропорциональна классической вероятности макро-состояния.

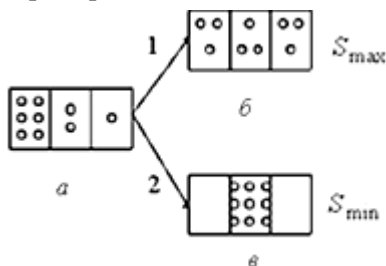


Рис. 24.

Рассмотрим идеальный газ в сосуде с тремя отсеками (рис. 24). Пусть в начальном состоянии молекулы газа распределены по отсекам различно (рис. 24 а). Согласно уравнениям (38, 39) термодинамическая вероятность начального состояния: $\Gamma_0 = 9!/6!2!1! = 252$. Переход (1) в равновесное состояние (рис. 24 б)

будет самопроизвольным и наиболее вероятным (термодинамическая вероятность максимальна) процессом. Наименее вероятен самопроизвольный переход (2) в наиболее упорядоченное состояние (рис. 24 в). Термодинамические вероятности для этих состояний составляют: $\Gamma_1 = 9!/3!3!3! = 1680$; $\Gamma_2 = 9!/0!9!0! = 1$. В трактовке Больцмана: *энтропия – мера неупорядоченности системы*. Чем более упорядочена система, тем больше запретов, меньше выбор и меньше число микросостояний для реализации макросостояния.

Изолированная система переходит в состояние термодинамического равновесия с максимальной энтропией самопроизвольно. Такой переход наиболее вероятен при фиксированных внешних условиях. *Стремление энтропии к S_{\max} является главным эволюционным принципом изолированной термодинамической системы* и называется законом неубывания энтропии и содержанием 2-го начала термодинамики. При равновесии флуктуации могут локально уменьшать энтропию $dS < 0$, но это порождает в системе изменения, возвращающие ее в равновесное состояние с S_{\max} .

Значение энтропии следует изменениям внешних условий, достигая все время совместимого с ними максимума.

Циклические процессы. Циклическим называется процесс, в результате которого система возвращается в исходное состояние.

Если обе части равенства $\delta Q = dU + p dV$, проинтегрировать по циклу, то: $\oint \delta Q = \oint dU + \oint p dV$. Интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен нулю: $\oint dU = 0$. Поэтому вся работа, совершенная за цикл, получается за счет количества теплоты, поступившей в систему:

$$\oint \delta Q = \oint p dV = A. \quad (40)$$

Если работа совершается над системой ($\delta A < 0$), то система преобразует работу в теплоту: в одной части цикла в систему поступает теплота, а в другой – вытекает больше теплоты, чем входит.

Трактовки второго начала термодинамики: 1. Принцип Кельвина (В. Томпсон, 1851г.): *невозможен циклический процесс, единственным результатом которого является производство работы и обмен теплоты с одним тепловым резервуаром, имеющим во всех частях одинаковую температуру* (рис. 25, а). Превращение теплоты в работу сопровождается передачей ее части холодильнику ($T_1 > T_2$).

2. Формулировка Р. Клаузиуса (1850 г.): *невозможен циклический процесс, единственным результатом которого была бы передача теплоты от менее нагретого тела более нагретому* (рис. 25, б).

Иллюстрация второго начала термодинамики в формулировках Кельвина (а) и Клаузиуса (б) приведена на рис. 25 при $T_1 > T_2$ с примечанием, что указанные на рисунке процессы невозможны.

Если с помощью процесса, запрещенного формулировкой Кельвина, превратить отнятое у тела тепло полностью в работу, а затем превратить ее при посредстве трения в тепло, сообщаемое другому телу с более высокой температурой, то в итоге получим запрещенный формулировкой Клаузиуса процесс.

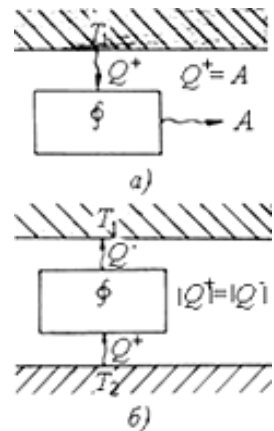


Рис. 25.

Коэффициент полезного действия. Система, выполняющая циклический процесс, является машиной, производящей работу за счет количества теплоты из термостата. Чем больше теплоты превращается в работу, тем более эффективна машина. Эффективность характеризуется коэффициентом полезного действия η , равным отношению произведенной машиной работы A за один цикл к количеству теплоты Q^+ , полученному машиной от термостатов:

$$\eta = A/Q^+. \quad (41)$$

Работа A задается формулой (40) может быть измерена графически площадью, ограниченной замкнутой кривой, изображающей цикл на диаграмме процессов (рис. 26); Q^+ - количество теплоты, которое вошло в систему от термостатов ($Q^+ > 0$). Формулу (41) перепишем в виде:

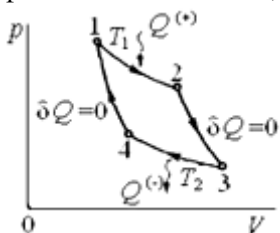


Рис. 26.

$$\eta = \frac{(Q^+ + Q^-)}{Q^+} = 1 + \frac{Q^-}{Q^+}. \quad (42)$$

Эта величина всегда меньше единицы, поскольку Q^- отрицательна.

Вычисление КПД цикла Карно с помощью энтропии. Модельный и предельный по информации цикл был придуман Саади Карно. Он состоит из двух изотерм при температурах T_1 и T_2 между состояниями 1 – 2 и 3 – 4 и двух адиабат ($\delta Q = 0$) между состояниями 2 – 3 и 4 – 1. Направление цикла указывают стрелками на диаграмме процессов в форме схемы цикла Карно в переменных p, V (см. рис. 26). При выполнении цикла Карно необходимы два термостата: теплоотдатчик – термостат с высокой температурой T_1 ; теплоприемник – термостат с более низкой температурой T_2 .

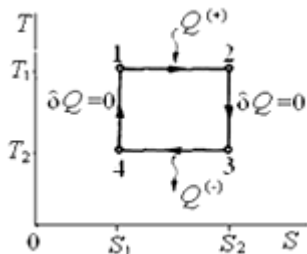


Рис. 27.

Представим цикл Карно в координатах T, S (рис. 27). Чередующиеся изотермы и адиабаты организуют в координатной сетке прямоугольник. По определению $\delta Q = TdS$, поэтому:

$$Q^+ = \int_1^2 \delta Q = T_1 \int_1^2 dS = T_1 (S_2 - S_1),$$

$$Q^- = \int_3^4 \delta Q = T_2 \int_3^4 dS = T_2 (S_4 - S_3).$$

Учитывая, что в адиабатном обратимом процессе энтропия не изменяется, получаем $S_2 = S_3$, $S_1 = S_4$, и формула (42) принимает вид

$$\eta = 1 + [T_2 (S_4 - S_3)] / [T_1 (S_2 - S_1)] = 1 - T_2 / T_1, \quad (43)$$

Термодинамические потенциалы. Подход И.Р. Пригожина. Объединим первый и второй законы термодинамики:

$TdS = dU + \delta A$, или $TdS = dU + \delta A_p + \delta A_0$, где $\delta A_p = p dV$, δA_0 – полезная работа. Тогда $-\delta A_0 = dU + pdV - TdS$.

Если процессы идут при постоянной температуре ($T = \text{const}$) и постоянном объеме ($V = \text{const}$), то максимальная полезная работа в системе выполняется за счет изменения *свободной энергии Гельмгольца* F (изохорно-изотермический потенциал):

$$-\delta A_0 = dU - TdS = d(U - TS) = dF, \text{ или: } dF = dU - TdS.$$

где $pdV = 0$, $F = U - TS$; TS – *связанная энергия* – часть внутренней энергии, которая не может быть преобразована в работу в изотермических условиях. Термин «связанная энергия» несет в себе оттенок обесцененной энергии, и она тем выше, чем больше S . Энтропия – мера обесцененности энергии, значит энтропия – мера «качества» энергии.

2. Если процессы проходят при постоянной температуре и давлении, то максимальная полезная работа выполняется за счет изменения свободной энергии Гиббса G (изобарно-изотермический потенциал): $-\delta A_0 = dU + pdV - TdS = dH - TdS = d(H - TS) = dG$, где $G = H - TS$. В дифференциальной форме: $dG = dH - TdS$.

Все функции состояния, используемые в термодинамике, называют термодинамическими потенциалами. Каждому набору независимых макропараметров соответствует термодинамический потенциал. Изменения потенциалов, происходящие в ходе процессов, определяют либо совершаемую системой работу, либо получаемое системой тепло (табл. 3).

Таблица 3. Характеристики устойчивого состояния системы

Характеристика системы	$V = \text{const}$	$p = \text{const}$	$V = \text{const}$	$T = \text{const}$
	$S = \text{const}$	$S = \text{const}$	$T = \text{const}$	$p = \text{const}$
Критерий устойчивости	$dU < 0$	$dH < 0$	$dF < 0$	$dG < 0$
Термодинамический потенциал устойчивого состояния системы	U_{\min}	H_{\min}	F_{\min}	G_{\min}

Энтропия и энергия (в трактовке Л. Бриллюэна). Из второго закона термодинамики следует, что не все виды энергии эквивалентны. Энергиям, эффективно превращающимся в другие виды энергии, соответствует наименьшее значение энтропии.

Л. Бриллюэн разделил виды энергии по качеству и связал их с величиной энтропии. Энергии «высшего качества» (класс А): гравитационная, ядерная, световая, электрическая энергии; энергия «среднего качества» (класс В): химическая; энергия «низкого качества» (класс С) – тепловая с максимальной энтропией. В этой трактовке второй закон термодинамики для изолированной системы утверждает о постоянной деградации энергии потерей качества.

Подведем итоги представления разных трактовок и подходов к термину энтропия и второму началу термодинамики:

1. Пока энергетические превращения в системе с переходами разных видов энергии друг в друга, но без переходов в тепло, все процессы обратимы. Рассеивание энергии отсутствует ($TdS = 0$).

2. Выполнение полезной работы при осуществлении необратимых процессов сопровождается рассеиванием энергии TdS . Чем больше эта величина, тем более необратим процесс.

3. Самопроизвольные процессы проходят с уменьшением термодинамических потенциалов ($dF < 0$ или $dG < 0$) и с выделением энергии. Процессы, протекающие с увеличением термодинамических потенциалов ($dF > 0$ или $dG > 0$), требуют энергии из внешней среды, а потому – не самопроизвольные.

4. При равновесии термодинамические потенциалы принимают минимальные значения: $F \rightarrow \min$, $dF = 0$; $G \rightarrow \min$, $dG = 0$.

5. Энтропия закона сохранения не знает. Она сохраняется только при высшей стадии идеализации – обратимых процессах.

Элементы физической кинетики

Элементы теории столкновений. При относительном движении двух одинаковых молекул их центры не могут сблизиться на расстояние, меньшее, чем диаметр d . Столкновение может произойти всякий раз, когда центр движущейся молекулы (точечная частица) при своем движении пересечет площадку с площадью $\sigma = \pi d^2$ вокруг центра другой молекулы (мишени). Эта площадь – *поперечное сечение* является количественной характеристикой вероятности столкновения пары. Вероятность столкновения определяют вероятностью конкретного результата – события (изменения направления движения, поляризации, захвата нейтрона ядром урана и т.п.).

Рассмотрим газ из молекул в виде твердых шаров радиуса r , разряженный настолько, чтобы происходили только двойные упругие столкновения. Падающую частицу определим точечной, а остальные частицы – неподвижными мишенями с площадями поперечного сечения σ в перпендикулярном направлении движения падающей частицы (рис. 28). Эта воображаемая площадь подбирается такой, чтобы вероятность результата столкновения была равна вероятности того, что частица, двигаясь прямолинейно без взаимодействия, на нее попадет.

Пусть падающая частица падает на площадь S объема V . В слое dV толщины dx находится $n_0 S dx$ частиц-мишеней с концентрацией n_0 . Сумма их поперечных сечений закрывает часть площади S и равна $dS = \sigma n_0 dx S$. Вероятность столкновения частицы хотя бы с одной частицей-мишенью в слое dx : $dP = \frac{dS}{S} = \sigma n_0 dx$. Величины

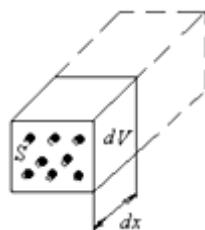


Рис. 28.

σ и n_0 не зависят от x , поэтому вероятность столкновения (события) растет пропорционально пройденному падающей частицей пути.

Длину пути $\langle l \rangle$, на которой эта вероятность равна единице ($1 = \sigma n_0 \langle l \rangle$), называют *средней длиной свободного пробега* $\langle l \rangle = 1/(\sigma n_0)$, обозначая средний путь, проходимый точечной частицей в веществе мишеней между последовательными столкновениями.

Процессы переноса. Как только условия, приводящие систему к неравновесному состоянию, исчезают, «включается» *релаксация* к равновесному состоянию – самопроизвольный возврат системы в равновесное состояние. Время *релаксации* для разных сортов молекул и по разным параметрам разное. Для смеси двух сортов молекул, распределение которых отлично от максвелловского, оба сорта молекул достигнут распределения Максвелла в течение разных промежутков времени (время термализации). Время достижения однородной плотности характеризуется собственным временем релаксации. Процессы перехода к равновесному состоянию в газах за время релаксации называют *процессами переноса*:

- *Теплопроводность* – перенос теплоты при выравнивании поля температур.
- *Диффузия* – перенос вещества при выравнивании плотности (концентрации) компонент системы во всех частях.
- *Внутреннее трение* – перенос импульса между соседними слоями текущей жидкости или газа при выравнивании поля скоростей.

Общее уравнение переноса. Отметим каждую частицу в равновесной системе произвольным признаком отличия G (масса, импульс, электрический заряд и т.п.). Допустим в первой области системы концентрация G выше, чем в соседней, т.е. градиент концентрации направлен в сторону первой области. Признак G смещается в направлении уменьшения его проявления, и система релаксирует по этому признаку к равновесному состоянию. Для простоты рассмотрения потребуем для системы изотропность по признаку G , а исследуемое направление обозначим осью X (рис. 29).

При выбранном направлении среднее расстояние, пробегаемое молекулами, и пересекающими перпендикулярно площадку dS после последнего столкновения равно $2\langle l \rangle/3$, т.е. еще меньше, чем при случайном направлении и очень мала. Поэтому на расстоянии $2\langle l \rangle/3$ от площадки ограничимся первым членом разложения в ряду Тейлора в точке x (прил. б):

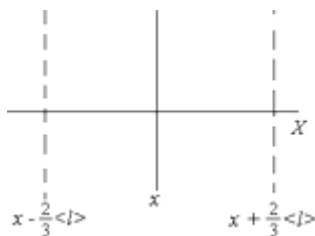


Рис. 29.

$$G\left(x \pm \frac{2}{3} \langle l \rangle\right) = G(x) \pm \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx},$$

Поток числа молекул в направлении оси X равен $n_0 v_0 / 4$. Поток J признака G , транспортируемого молекулами сквозь площадку dS в направлении отрицательных значений оси X :

$$J_G^{(-)} = -\frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle \left\{ G(x) + \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx} \right\},$$

а в направлении X : $J_G^{(+)} = \frac{1}{4} n_0 \langle v \rangle \left\{ G(x) - \frac{2}{3} \langle l \rangle \frac{dG(x)}{dx} \right\}$.

Суммарный поток:

$$J_G = J_G^{(+)} + J_G^{(-)} = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{dG}{dx}. \quad (44)$$

Уравнение (44) является *общим уравнением процессов переноса G* .

Теплопроводимость. Пусть G – средняя энергия теплового движения молекул. При равномерном распределении энергии по степеням свободы имеем:

$$G = \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{kN_A}{N_A} T = \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{C_V}{N_A} T, \quad (45)$$

где C_V – молярная теплоемкость.

Подставляя (45) в уравнение (44), получаем *уравнение Фурье* для теплопроводности (закон Фурье):

$$J_Q = -\frac{1}{3} n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{C_V}{N_A} \frac{dT}{dx} = -\frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle c_V \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

где J_Q – поток теплоты; λ – теплопроводность, $\rho = n_0 m$ – плотность, $c_V = \frac{C_V}{N_A m}$ – удельная теплоемкость газа при $V = \text{const}$.

Количество теплоты, перенесенное за время dt : $dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} dS dt$.

При фиксированной n_0 , различия определяются разными $\langle v \rangle$, поэтому теплопроводность легких газов больше, чем у тяжелых.

Так как $n_0 \langle l \rangle = 1/\sigma$, а $\langle v \rangle \sim T^{1/2}$, то теплопроводимость пропорциональна $T^{1/2}$ и не зависит от давления.

Вязкость. По механизму внутреннего трения между слоями газа быстрый слой тормозится, а медленный – ускоряется. При этом переносится импульс $G = mu$ поперек направления движения газа

Суммарный поток признака: $J_{mu} = -\frac{1}{3}n_0 \langle l \rangle \langle v \rangle \frac{\partial(mu)}{\partial x} = -\eta \frac{\partial u}{\partial x}$.

Сила внутреннего трения: $dF = -\eta \frac{du}{dx} dS$, где динамическая

вязкость: $\eta = n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{m}{3} = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$. Так как $\langle v \rangle \sim T^{1/2}$, то динамическая вязкость пропорциональна $T^{1/2}$.

Самодиффузия. Пусть одинаковые по всем параметрам молекулы, отличаются по одному индивидуальному признаку i , не оказывающему влияние на их взаимодействие. Системный признак отличия $G = n_i/n_0$, где n_i – концентрация молекул с этим признаком n_0 – равновесная концентрация. Суммарный поток признака G

определяет форму уравнения Фика: $J_{N_i} = -\frac{1}{3}n_0 \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{d}{dx} \left(\frac{n_i}{n_0} \right)$,

или $J_{N_i} = -D \frac{dn_i}{dx}$, где коэффициент диффузии: $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle$.

Перенесенная за время dt масса $dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS dt$.

При фиксированном давлении ($p = \text{const}$): $D \sim T^{3/2}$.

Очевидно, наличие связи между коэффициентами λ , η и D :

$$\lambda = \frac{\eta C_V}{m N_A} = \eta c_V; \quad D = \frac{\eta}{\rho} = \frac{\lambda}{c_V \rho}.$$

В смеси молекул с разными динамическими свойствами и характером взаимодействия, для компенсации неоднородности давления, образующегося из-за разной скорости диффузии компонентов газа, возникнут гидродинамические потоки (*взаимодиффузия*). Если при этом создать градиент температур, то дополнительно сформируется *термическая диффузия*. В более теплых областях вырастет концентрация легких компонент, а в более холодных – тяжелых.

Реальные газы

Жидкое и газообразное состояния. *Реальные газы* – газы с межмолекулярным взаимодействием. Результат межмолекулярного взаимодействия определяется соотношением между средней кинетической энергией $\langle K \rangle$ и модулем средней потенциальной энергии $\langle U \rangle$ (потенциальная энергия притяжения – отрицательна): у газов $\langle K \rangle \gg |\langle U \rangle|$, у жидкостей $\langle K \rangle \approx |\langle U \rangle|$, у твердых тел $\langle K \rangle \ll |\langle U \rangle|$.

Если $\langle K \rangle + \langle U \rangle > 0$, то молекулы расходятся, аккумулируя минимальную плотность энергии. При сжатии газа средняя длина $\langle l \rangle$ свободного пробега молекул уменьшается, и потенциальная энергия падает. Если при этом средняя кинетическая энергия невелика, то сумма энергий может поменять знак. Такая система уже не может самопроизвольно рассеяться в большом объеме, так как после рассеяния ее энергия состояла бы лишь из положительной кинетической, что оказывается невозможным при отрицательной полной энергии. Возникает связанное состояние в конечном объеме.

В жидкостях упаковка молекул плотнее, чем в газах. Группы молекул образуют непрерывно самореорганизуемые ассоциаты (кластеры) молекул. Неустойчивость кластеров объясняется сильной зависимостью близкодействующих сил взаимодействия от расстояния r между частицами: $F(r) \sim r^{-7}$. Результат столкновения кластера с молекулой становится сильно зависимым от расположения молекулы в распределении Максвелла: молекулы малой скорости кластер захватит, молекулы с большой скоростью его разваливают.

Изотермы реального газа и жидкости. Наблюдаемый в экспериментах при сжатии газов типичный вид изотерм реального газа показан на рис. 30. При сжатии газа при температуре T_1 до объема V_1 его давление повышается до p_1 . При дальнейшем уменьшении объема часть газа превращается в жидкость, но давление при этом остается равным p_1 . Значит на участке изотермы от B до C в сосуде одновременно имеются и жидкость, и газ, разделенные границами поверхностей жидкости. Физические однородные части в этой системе называют *фазами*. В точке B объем заполнен газообразной фазой.



Рис. 30.

При увеличении температуры участок изотермы, соответствующий двухфазной системе, уменьшается. При $T \rightarrow T_{кр}$ участок изотермы выражается в точку K , для которой жидкость и газ обретают одинаковые физические свойства и неотличимы. Это состояние называют *критическим* и характеризуют величинами $p_{кр}$, $V_{кр}$, $T_{кр}$. Изотерма $p(V, T_{кр})$ разделяет газообразное состояние и жидкое. При $T > T_{кр}$ газ не может быть превращен в жидкость.

Область двухфазных состояний выделена штриховой кривой $СКВА$. Смена фазы возможна через эту область, или минуя ее. Например, переход из газообразного состояния N в жидкое M можно осуществить либо по пути $NBCM$, либо по пути $NN'RM'M$. Во втором случае в точке R будет совершен переход в жидкое состояние, минуя двухфазную систему. В этой точке свойства жидкого и газообразного состояний совпадают. Однако в соседних точках, по разные стороны изотермы эти свойства различны.

Фазовые переходы (превращения). В точке K на рис. 30 изотерма принимает горизонтальное положение: давление (плотность) не зависит от объема и $(\partial p / \partial V)_T = 0$. Это означает, что вещество не оказывает сопротивления изменению объема как жидкость, и не стремится увеличить свой объем как газ. Иными словами, если в некоторой области плотность частиц увеличилась, то там не возникает реакционных сил давления, стремящихся эту плотность уменьшить, и, наоборот, уменьшение плотности (давления) не при-

водит к возникновению факторов, стремящихся восстановить равновесное состояние. Среда становится пассивной к изменению плотности. Флуктуации плотности допускаются самим веществом, что запускает реализацию очень больших колебаний плотности. При этом от точки к точке сильно меняется показатель преломления и поглощения среды. В результате свет сильно рассеивается и поглощается средой. Это явление определено фазовым переходом второго рода и называется *критической опалесценцией*.

При заданной температуре в двухфазной системе сосуществуют жидкость и пар, определенные характерными средними величинами плотности и давления. Если пар невозможно «уплотнить» при сохранении этой температуры, то его называют насыщенным. При попытке «уплотнения» часть насыщенного пара переходит в жидкость, что и происходит при уменьшении объема системы. И, наоборот, при увеличении объема двухфазной системы часть жидкости переходит в насыщенный пар. Но при этом для поддержания постоянной температуры, системе необходимо сообщать извне количество теплоты – теплоты фазового превращения (скрытой теплоты перехода). Она идет на изменение состояния (фазы) вещества, т.е. на преодоление сил притяжения, или на компенсацию отрицательной потенциальной энергии межмолекулярного притяжения. Фазовые переходы с поглощением или выделением скрытой теплоты перехода называют *фазовыми переходами первого рода*.

Уравнение Ван-дер-Ваальса. В широком диапазоне давлений и температур произведение pV непостоянно при $T = \text{const}$, но меняется с давлением так, будто при малых давлениях газ сжимается более охотно, чем идеальный, а при больших давлениях он сопротивляется сжатию сильнее, чем идеальный. Иными словами, при малых плотностях газа в нем действуют дополнительные силы притяжения, а при больших – дополнительные силы отталкивания.

Действия отталкивания сводятся к тому, что молекула не допускает проникновения иных молекул в занимаемый ею собственный объем. Поэтому доступным для изменения является не весь объем V , а лишь его часть $(V - mb')$, где mb' – суммарный эффективный объем молекул.

Заметное действие молекул друг на друга происходит лишь на небольших расстояниях – радиусах молекулярного действия. Сила взаимного притяжения двух элементарных объемов, имеющих размеры порядка этого радиуса, пропорциональна числу молекул и в одном, и в другом объеме. Наличие сил притяжения приводит к появлению эффекта дополнительного внутреннего давления на газ пропорционального n_0^2 или m^2/V^2 , что приводит к уменьшению внешнего давления, оказываемого на газ стенками сосуда и удерживающего газ в исходном объеме.

С учетом этих поправок получаем одну из форм уравнения состояния Ван-дер-Ваальса:
$$\left(p + \frac{m^2 a'}{V^2}\right)(V - mb') = \frac{m}{M} RT,$$

где постоянные Ван-дер-Ваальса a' и b' имеют разные значения для разных газов.

Уравнение Ван-дер-Ваальса может быть представлено и в иных формах учетом удельного объема $v = \frac{V}{m}$, газовой постоянной

$R_0 = \frac{R}{M}$ и замены постоянных a' и b' на $a = a'M^2$ и $b = b'M$, соответственно. Для моля газа при $V_m = V/v$ уравнение принимает вид:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

При больших значениях V_m и для разреженных газов константами a и b пренебрегают, и уравнение Ван-дер-Ваальса принимает форму уравнения состояния идеального газа.

Универсального уравнения состояния для реальных газов и жидкостей не существует. При учете взаимодействия между молекулами каждый сорт молекул имеет собственное уравнение состояния. Уравнение Ван-дер-Ваальса лишь одно из многих известных уравнений состояния реальных газов и жидкостей. Оно качественно верно передает поведение плотных газов, но в количественном соотношении годится для них лишь как оценочное.

3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Электростатика

Предмет изучения электростатики – электрические поля неподвижных зарядов в допущении, что заряды удерживаются в разных точках пространства силами неэлектрического происхождения.

Однако не существует такой конфигурации зарядов, которая была бы устойчива, если нет других сил, кроме сил кулоновского взаимодействия между зарядами системы (теорема Ирншоу). Неподвижных элементарных зарядов не существует, и потому не существует постоянных полей. В большинстве явлений наблюдается суперпозиция полей многих зарядов. Вклад в поле каждого элементарного заряда очень мал. Напряженность электрического поля определяется как средняя величина по некоторому физическому объему и физически малому отрезку времени. Малые флуктуации среднего значения напряженности поля указывают на постоянство во времени суммарного электрического поля. Такие поля и составляют предмет изучения электростатики.

Закон Кулона. Формула для вектора напряженности \vec{E} электрического поля от отдельного точечного заряда имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{e}_r}{r^2} + \frac{r}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{e}_r}{r^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \vec{e}_r \right] \quad (46)$$

Первый член: $\vec{E} = -\frac{q\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ - закон Кулона, где \vec{e}_r - единич-

ный вектор, направленный от точки наблюдения P , где измеряется напряженность (этим объясняется знак «минус»), r – расстояние от P до q . Воздействие не может распространяться быстрее света, поэтому первое слагаемое, пропорциональное второй степени расстояния, определяет запаздывающий закон Кулона, а второе – дает поправку на запаздывание первого члена на время r/c . Величина третьего слагаемого спадает обратно пропорционально расстоянию и доминирует на больших расстояниях, выражая закон излучения.

Работа в электрическом поле. При перемещении точечного заряда q в электрическом поле силой \vec{F} на расстояние $d\vec{l}$ (рис. 31)

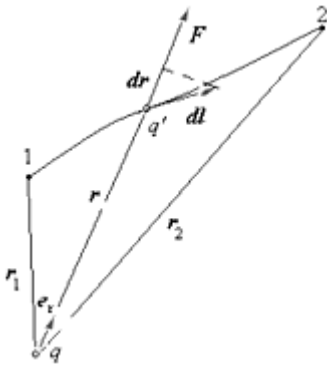


Рис. 31.

совершается работа $dA = \vec{F}d\vec{l} = q\vec{E}d\vec{l}$.

Удельная работа: $dA' = \frac{dA}{q} = \vec{E}d\vec{l}$, и

$$A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}d\vec{l}$$

определена криволинейным интегралом $A' = \int_L \vec{E}d\vec{l}$ вдоль L .

Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. В *потенциальном* поле сил работа перемещения зависит от начальной и конечной точек

пути и не зависит от форм траектории.

Из потенциальности поля каждого произвольного точечного заряда и на основании принципа суперпозиции следует потенциальность произвольного электростатического поля. В таком поле работа равна нулю при перемещении точечного заряда по замкнутому пути. Но замкнутых путей бесконечное число, поэтому применяют иной критерий потенциальности.

В произвольном векторном поле $\vec{E}(x, y, z)$ выберем любое направление, задав его единичной нормалью \vec{n} к площади ΔS , ограниченной замкнутым контуром L . *Ротор* – вектор $rot\vec{E}$ с проекцией

$$rot_n \vec{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E}d\vec{l}}{\Delta S}$$

на направление \vec{n} . Направление положительного обхода определяется правилом правого винта.

Дифференциальная формулировка потенциальности поля:

$$rot \vec{E} = 0, \tag{47}$$

является достаточным условием консервативности электростатического поля. В потенциальном поле силовые линии не замкнуты. *Силовая линия* электростатического поля – линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором \vec{E} .

Градиент потенциальной функции. Электростатическое поле можно описать градиентом скалярной функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\text{grad}\varphi = \vec{i} \frac{d\varphi}{dx} + \vec{j} \frac{d\varphi}{dy} + \vec{k} \frac{d\varphi}{dz}.$$

Для выяснения смысла этого вектора вычислим полный дифференциал функции φ при перемещении $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$:

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz = \text{grad}\varphi d\vec{r}. \quad (48)$$

При значениях угла $\alpha = 90^\circ$ между векторами $\nabla\varphi$ и $d\vec{r}$, значения $\cos\alpha = 0$ и $d\varphi = 0$ и вектор $\text{grad}\varphi$ направлен перпендикулярно поверхности с $\varphi = \text{const}$ (*эквипотенциальной поверхности*).

Скалярный потенциал. Работа по перемещению заряда в потенциальном поле не зависит от форм траектории, поэтому ее можно выразить через координаты ее концов с помощью потенциала. Можно убедиться, что $\text{rot}(\text{grad}\varphi) \equiv 0$, поэтому уравнение (47) будет удовлетворено, если $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Знак «минус» показывает направление вектора \vec{E} в сторону убывания. Скалярная функция φ , связанная так с вектором напряженности \vec{E} , называется *скалярным потенциалом* электрического поля.

Напряженность не может быть бесконечной, поэтому и производные по координатам от потенциала должны быть конечными. Это означает, что потенциал является непрерывной функцией.

Потенциал φ определен с точностью до аддитивной постоянной, так как производные по координатам от постоянной величины равны нулю. Он приобретает определенные значения во всех других точках, если ему приписать любое значение в одной точке. Придание однозначности потенциалу называют *нормировкой*.

Если заряд перемещается между точками 1 и 2 (см. рис. 32), то удельная работа: $A' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} d\vec{l} = - \int_{(1)}^{(2)} \text{grad}\varphi d\vec{r}$, где $d\vec{l} = d\vec{r}$. Физический смысл имеет не сам потенциал, а разность потенциалов между разными точками.

Электрическое поле в диэлектриках

Диэлектрики. При наличии в электрическом поле диэлектриков электрические заряды различают на свободные и связанные. Под *свободными* понимают электрические заряды, которые под влиянием электрического поля могут перемещаться на макроскопические расстояния (электроны в металлах и вакууме, ионы в газах и электролитах и т.п.), заряды, нанесенные извне на поверхность диэлектриков и нарушающие их нейтральность. *Связанными* называют заряды, входящие в состав нейтральных молекул диэлектриков, ионы, закрепленные в твердых диэлектриках вблизи определенных положений равновесия.

Диэлектрики – вещества, в которых заряды под действием электрического поля сдвигаются на микроскопические расстояния.

Любой малый физический элемент объема диэлектрика электрически нейтрален. Внешнее электрическое поле стремится сдвинуть положительные заряды в своем направлении, а отрицательные – в противоположном. В направлении вектора напряженности в диэлектрике образуется избыток положительного заряда, а в противоположном направлении – их недостаток. Процесс называют *поляризацией*. Диэлектрик приобретает *дипольный момент* (\vec{p}). Степень поляризации характеризуют *вектором поляризации*:

$$\vec{P} = \sum \Delta \vec{p}_i / \Delta V .$$

Примечание. *Диполь* – совокупность двух одинаковых по величине и разных по знаку точечных зарядов, находящихся на малом расстоянии l один от другого. Вектор $\vec{p} = ql\vec{l}$ называют *моментом диполя*, где \vec{l} , проведенный от отрицательного заряда к положительному, – *плечом диполя*.

Механизмы поляризации. Если при отсутствии внешнего электрического поля электронное облачко в атоме распределено сферически симметрично относительно положительного заряда ядра, то атом не обладает электрическим дипольным моментом. Атомы и молекулы с такой симметрией распределения (H_2 , N_2 , O_2 , ..., CO_2 и др.) называют неполярными. При отсутствии внешнего поля, составленный из них диэлектрик, не поляризован.

Во внешнем электрическом поле положительные заряды смещаются в направлении поля, а отрицательные – в противоположном (*ионная и электронная поляризация*). неполярные молекулы обретают дипольный момент, и диэлектрик поляризуется.

Молекулы и атомы, обладающие электрическим дипольным моментом при отсутствии внешнего поля, называют полярными (CO, N₂O, др.). Полярные молекулы также приобретают индуцированный внешним полем дипольный момент, но этот механизм – второстепенный. Главный механизм поляризации для них другой – *ориентационный*: во внешнем электрическом поле на постоянные дипольные моменты молекул действуют моменты сил, стремящиеся переориентировать дипольные моменты в направлении напряженности поля (рис. 32).

Поляризованность $|\vec{P}|$, как количественная характеристика ориентационной поляризации превалирующе больше, чем в случае индуцированных дипольных моментов.

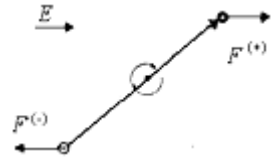


Рис. 32.

Если свойства диэлектрика по всем направлениям одинаковы, то диэлектрик называют *линейным изотропным*. Его диэлектрические свойства характеризуются скалярной величиной – *диэлектрической восприимчивостью* $\kappa > 0$ и $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$.

Влияние поляризации на электрическое поле. Дипольный момент $d\vec{p} = \vec{P}dV = \kappa \epsilon_0 \vec{E}dV$ элемента объема dV совпадает по направлению с \vec{E} (рис. 33). Поэтому напряженность поля дипольного момента направлена противоположно напряженности внешнего поля, ослабляя его. Роль поляризации сводится лишь к разделению разноименных зарядов, в результате чего в объеме диэлектрика, как и на его поверхности, образуются *поляризационные, или связанные заряды*. Локальное электрическое поле, создаваемое связанными зарядами, возникающими в результате поляризации, следует учитывать. Поэтому необходимо найти выражение связанных зарядов.

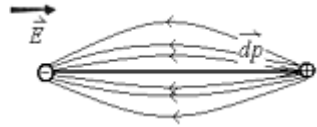


Рис. 33.

Электростатическая теорема Гаусса. Пусть точечный заряд q находится внутри объема V , ограниченного поверхностью S (рис. 34). Поток Φ векторов напряженности \vec{E} сквозь эту поверхность

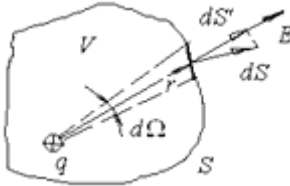


Рис. 34.

будет: $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}$. Теорема Гаусса

устанавливает математическую связь между потоком векторов напряженности сквозь замкнутую поверхность S и зарядом q , находящимся в объеме V , стягиваемом этой поверхностью.

Примечание. Скалярный единичный поток частиц $J = \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t}$ – это число частиц, про-

шедших нормально через единицу поверхности за единицу времени. Это своего рода канал, через который «капают» частицы. Если умножить J на Δt , то с ростом Δt канал стремится стать «слитным» и выразится «струйкой» частиц. Так при достаточно большом времени наблюдения можно $\Delta N / \Delta S$ представить вектором.

Скалярный поток векторного поля. Суммарный поток равен числу векторов, пересекающих произвольную поверхность S :

$$\lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{E}_i \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{E} d\vec{S}, \text{ или } \Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S}.$$

Под знаком интеграла имеем скалярное произведение векторов $\vec{E} d\vec{S} = E dS \cos \alpha$. Ясно, что знак потока определен знаком косинуса. При $\alpha < \pi/2$ поток векторов, выходящий из объема сквозь поверхность S , положителен. Для замкнутых поверхностей в качестве положительного направления назначают направление в сторону внешней нормали, поэтому элемент поверхности $d\vec{S}$ направлен во внешнюю сторону от объема (см. рис. 34).

По закону Кулона (см. уравнение (46)): $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, и поэтому:

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \oint_S \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) d\vec{S}. \quad (49)$$

Учтем $\frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \left(\frac{r}{r}\right) dS \cos(\angle \vec{r}, d\vec{S}) = dS'$, так как $d\vec{S} = dS \vec{n}$, где

dS' – проекция элемента dS на плоскость, перпендикулярную радиус-вектору \vec{r} . Известно, что $d\Omega = dS'/r^2$, где $d\Omega$ – телесный угол, под которым виден элемент площади dS' из начала отсчета и местонахождения точечного заряда q . Тогда $\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega$, где

$\oint_S d\Omega = 4\pi$ – полный телесный угол, под которым видна замкнутая

поверхность S объема и полный поток векторов \vec{E} :

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (50)$$

Если точечный заряд находится вне объема V , то поток векторов \vec{E} также определяется формулой (49). Но теперь через поверхность ADB (рис. 35) поток

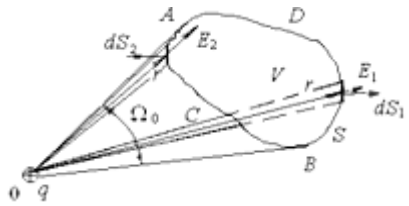


Рис. 35.

положителен, а через ACB – отрицателен. Подынтегральное выражение содержит положительные и отрицательные значения. Поверхности ADB и ACB из точки O видны под одним углом, поэтому

$$\oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) d\vec{S} = \int_{ADB} d\Omega - \int_{ACB} d\Omega = \Omega_0 - \Omega_0 = 0, \quad (51)$$

Объединяя результаты (50) и (51), имеем $\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

когда q находится внутри объема, ограниченного S ; $\Phi_E = 0$ – когда q находится вне объема, ограниченного S .

Обобщим теорему Гаусса для системы точечных зарядов $Q = \int_V \rho dV$ и с учетом принципа суперпозиции полей ($\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$):

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} Q = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (52)$$

где ρ – объемная плотность зарядов.

Дивергенция векторного поля. Математическое понятие дивергенция (англ. *divergence* – расходящийся) характеризует локальные свойства векторного поля. Применение этой процедуры к вектору \vec{E} характеризует интенсивность генерации этого вектора:

$$\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} d\vec{S}}{\Delta V} .$$

По форме записи операцию *div* можно назвать объемной плотностью мощности источника.

Суммирование мощностей источников по объему, в котором они заключены, $\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum (\text{div } \vec{E})_i \Delta V_i = \int_V \text{div } \vec{E} dV$, или

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = \oint_S \vec{E} d\vec{S} \quad (53)$$

называется формулой Гаусса и связывает интеграл по объему от дивергенции вектора с потоком этого вектора сквозь замкнутую поверхность S ограничивающую объем V .

Связанные заряды. Вернемся к связанным зарядам. По определению $\int_V \rho_t dV = Q$, а из определения дипольного момента и вектора поляризации $dQ = \vec{P} d\vec{S}$, тогда получаем $\int_V \rho_t dV = -\int_S \vec{P} d\vec{S}$.

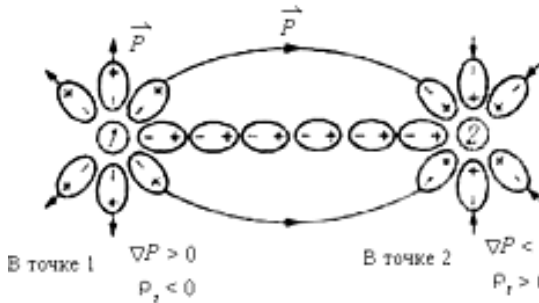


Рис. 36.

Знак «минус» показывает, что в объеме возникает заряд противоположный по знаку заряду, вытекающему через ограниченную объемом поверхность (рис. 36). В точке 1:

$$\nabla \vec{P} > 0, \rho_t < 0;$$

в точке 2: $\nabla \vec{P} < 0, \rho_t > 0$. С учетом (53) получаем объемную плотность связанных зарядов

$$\int_V (\rho_t + \text{div } \vec{P}) dV = 0 \quad \rho_t = -\text{div } \vec{P} \quad (54)$$

Геометрическая интерпретация формулы (54) дана на рис. 36. Ясно, что объемные связанные заряды возникают лишь тогда, когда вектор поляризации \vec{P} изменяется непрерывно от точки к точке.

При одинаковом векторе напряженности \vec{E} граничная поверхность двух диэлектриков разной поляризованности со стороны каждого диэлектрика пересекается разным числом поляризованных поверхностных зарядов. Вблизи границы сосредоточивается связанный заряд с поверхностной плотностью σ_t .

Интегрируя по объему (54) и используя (53), получаем:

$$\int_V \rho_t dV = - \int_V \operatorname{div} \vec{P} dV, \quad \int_V \rho_t dV = \sigma_t \Delta S,$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{P} dV = \int_S \vec{P} d\vec{S} = \int_{S_2} P_2 dS_2 + \int_{S_1} P_1 dS_1 = P_{2n} \Delta S - P_{1n} \Delta S, \text{ или}$$

$$\sigma_t = -(P_{2n} - P_{1n}).$$

Если $P_{2n} = 0$ (один из пары диэлектриков – вакуум), то $\sigma_t = P_n$, где P_n – нормальная компонента вектора поляризации диэлектрика на границе с вакуумом.

Формула Пуассона и условие Лапласа. Применим формулы (52) и (53): $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} dV$, $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$, и перепишем электростатическую теорему Гаусса в виде:

$$\int_V \left(\operatorname{div} E - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Подставим $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ в $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ и получим: $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

$$\text{Учтем, что } \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Формула Пуассона: $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, где ∇^2 - оператор Лапласа.

Для областей пространства без зарядов имеем условие Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$.

Диэлектрическое смещение. С учетом связанных зарядов формула Пуассона запишется в виде $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_t}{\epsilon_0} + \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$. А с учетом

(53) получаем: $\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$, или

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f, \quad (55)$$

Вектор $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ называют *вектором смещения*. Это не чисто полевой вектор, т.к. учитывает поляризацию среды. Единственным источником \vec{D} являются сторонние свободные заряды, на которых этот вектор начинается и заканчивается. Так как $\vec{P} = \kappa \epsilon_0 \vec{E}$, то $\vec{D} = (\epsilon_0 + \kappa \epsilon_0) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$, где $\epsilon = (1 + \kappa) \epsilon_0 = \epsilon_r \epsilon_0$ – *диэлектрическая проницаемость*, характеризующая способность вещества не пропускать электрическое поле, ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость. В новых обозначениях: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$.

Умножим обе части (55) на dV и, интегрируя по объему V , получим в конечной форме запись электростатической теоремы Гаусса при наличии диэлектриков:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_V \rho dV; \quad \int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \int_S \vec{D} d\vec{S}; \quad \int_V \rho dV = Q; \quad \int_S \vec{D} d\vec{S} = Q \quad (56)$$

Условия на границе диэлектриков. *Граничными условиями* называют связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. На плоскости раздела (границе) двух диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 (рис. 37) произвольно направим ось x . Выделим небольшой прямоугольный контур длины a и ширины b , захватывающий первый и второй диэлектрики так, чтобы ось x проходила через середину b .

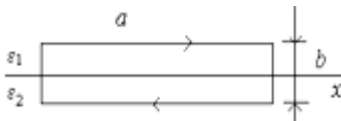


Рис. 37.

Создадим в диэлектриках поле с напряженностью \vec{E}_1 в первом диэлектрике и \vec{E}_2 – во втором. Так как $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, то и циркуляция этого вектора по выбранному контуру должна быть равна нулю. Тогда при выбранном направлении обхода:

$$\oint E_i dl = E_{1x}a - E_{2x}a + \langle E_b \rangle 2b = 0,$$

$$(E_{2x} - E_{1x})a = \langle E_b \rangle 2b.$$

Здесь $\langle E_b \rangle$ – среднее значение E_i на перпендикулярных к границе участках контура. В пределе, при стремящейся к нулю ширине контура b , получаем $E_{1x} = E_{2x}$. Ясно, что при выборе направления оси таким, что $E_{1x} = 0$, то проекция E_{2x} также будет нулевой. Это означает, что векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 в двух близких точках, но по разные стороны от границы, лежат в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела и каждый представляет сумму нормальной и тангенциальной компонент: $\vec{E}_1 = E_{1n}\vec{n} + E_{1\tau}\vec{\tau}$; $\vec{E}_2 = E_{2n}\vec{n} + E_{2\tau}\vec{\tau}$.

Тогда в новых обозначениях

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (57)$$

Здесь $E_{i\tau}$ – проекция вектора \vec{E}_i на направление τ вдоль линии пересечения плоскости раздела диэлектриков плоскостью векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 . Из $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, получаем: $D_{1\tau}/\epsilon_0\epsilon_1 = D_{2\tau}/\epsilon_0\epsilon_2$, или

$$D_{1\tau}/D_{2\tau} = \epsilon_1/\epsilon_2. \quad (58)$$

Далее, на границе раздела двух диэлектриков мысленно выделим цилиндрическую поверхность высоты h (рис. 38) с малыми одинаковыми основаниями S_1 и S_2 . Основания $S_1 = S_2 = S$ настолько малы, что поле в пределах них можно считать однородным.

Применим к этой поверхности теорему Гаусса и, если сторонних зарядов на границе между диэлектриками нет ($Q_f = 0$), то правая часть формулы (52) равна нулю, и $\Phi_D = 0$. Поток вектора \vec{D} через цилиндрическую поверхность представим в виде: $\Phi_D = D_{1n}S + D_{2n}S +$

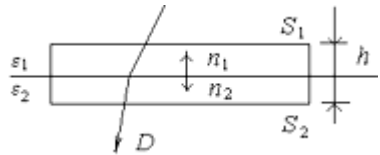


Рис. 38.

$\langle D_n \rangle S_{бок} = 0$. Здесь D_{1n} и D_{2n} – проекции вектора \vec{D} , в первом и во втором диэлектрике на нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , соответственно; $D_{1n}S$ и $D_{2n}S$ – потоки через соответствующие основания S_1 и S_2 ; $\langle D_n \rangle$ – значение D_n , усредненное по боковой поверхности площадью $S_{бок}$; $\langle D_n \rangle S_{бок}$ – поток через боковую поверхность.

Если устремить высоту цилиндра h к нулю, $S_{\text{бок}}$ также будет стремиться к нулю и в пределе получится $D_{1n} = -D_{2n}$. Знаки проекций оказались разными вследствие того, что нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 к основаниям цилиндра имеют противоположные направления. Если же проецировать \vec{D}_1 и \vec{D}_2 на одну и ту же нормаль, то получим:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (59)$$

Заменив проекции \vec{D} соответствующими проекциями вектора $\varepsilon_0 \vec{E}$, получим соотношение $\varepsilon_0 \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n}$, или

$$E_{1n} / E_{2n} = \varepsilon_2 / \varepsilon_1. \quad (60)$$

Соотношения (57) – (60) определяют условия, которым должны удовлетворять векторы \vec{E} и \vec{D} на границе двух диэлектриков в том случае, если на ней нет сторонних зарядов: нормальная составляющая вектора \vec{D} и тангенциальная составляющая вектора \vec{E} меняются непрерывно, а тангенциальная составляющая вектора \vec{D} и нормальная составляющая вектора \vec{E} претерпевают разрыв. Эти соотношения справедливы и для полей, меняющихся со временем.

На границе диэлектриков линии смещения терпят излом (преломляются), угол α между нормалью к поверхности раздела и линией \vec{D} меняется. Из рис. 39 следует:

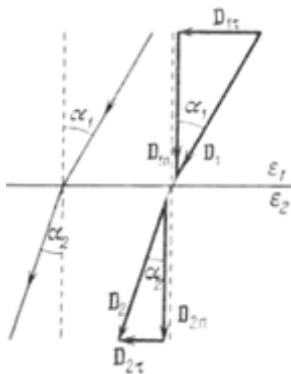


Рис. 39.

$$\text{tg } \alpha_1 / \text{tg } \alpha_2 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}} / \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}, \quad \text{откуда с учетом}$$

формул (13) и (14) получаем закон преломления линий электрического смещения:

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

При переходе в диэлектрик с меньшей ε угол, образуемый линиями смещения с нормалью, уменьшается, и линии располагаются реже; и, наоборот, при переходе в диэлектрик с большей ε линии смещения сгущаются.

Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.

1. *Поле бесконечной однородно заряженной плоскости.* Точечный заряд на плоскости генерирует изотропное электростатическое поле. Симметричные вектора напряженности имеют проекции, равные по модулю и противоположные по направлению. В любой точке не компенсируется лишь вектор напряженности поля, нормальный к плоскости. Внутри мысленно выделенной цилиндрической поверхности с перпендикулярными плоскости образующими (рис. 40) заключен заряд $Q = \sigma \Delta S$.

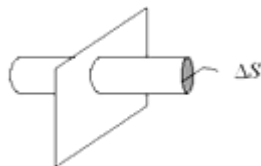


Рис. 40.

Для оснований цилиндра векторы $E_n \vec{n}$ совпадают с векторами \vec{E} . А так как поток вектора \vec{E} через боковую поверхность цилиндра отсутствует, то поток векторного поля \vec{E} через оба основания цилиндра: $\Phi_E = 2E\Delta S$, или: $2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$; $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Результат не зависит от длины цилиндра. На любых расстояниях от плоскости $\vec{E} = \text{const}$.

2. *Поле двух разноименно заряженных плоскостей.* Для простоты и удобства рассмотрим случай $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$ (рис. 41) Поле определяется суперпозицией полей от каждой плоскости по-отдельности.

Для двух разноименно заряженных параллельных неограниченных плоскостей поле с одинаковой напряженностью во всех точках сосредоточено между плоскостями. Для плоскостей конечных размеров отклонения поля от однородности нарастатют вблизи краев, а



Рис. 41.

внутри и при условии, если расстояние d между пластинами много меньше их размеров (S): $E = \sigma/\epsilon_0$. С учетом равенств $E = U/d$, $\sigma = Q/\Delta S$, $C = Q/U$ и с учетом диэлектрика с ϵ между пластинами, получаем формулу плоского конденсатора: $C = \epsilon_0 \epsilon \Delta S / d$.

3. Поле двух бесконечных однородно заряженных коаксиальных цилиндров. При постоянстве поверхностной плотности σ и из соображений симметрии следует, что вектор напряженности \vec{E} в любой точке цилиндра должен быть направлен вдоль радиальной прямой, нормальной к оси цилиндра, а потому величина E может зависеть только от расстояния r от оси цилиндра, а через основания поток векторов \vec{E} отсутствует.

Даны два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусами R и $2R$ равномерно заряженные до значений поверхностных плотностей: $\sigma_1 = 3\sigma$ и $\sigma_2 = -\sigma$. Определим напряженность E поля в областях I, II, III (рис. 42). Поле отрицательно заряженного цилиндра отличается от поля положительно заряженного цилиндра направлением вектора \vec{E} .

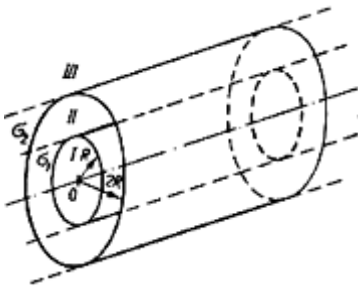


Рис. 42.

В области I ($r < R$) стягиваемый объем не содержит зарядов и $E(r) = 0$ (рис. 43).

При $r \approx R$ в непосредственной близости от поверхности заряженного цилиндра напряженность испытывает скачок $E(r = R) = \sigma_1/\epsilon_0 = 3\sigma/\epsilon_0$ (рис. 43).

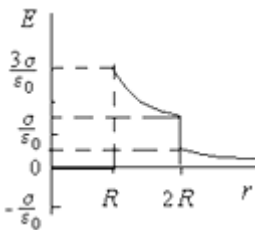


Рис. 43.

В области II суммарное поле на расстояниях $r \approx R$ составляет $E(R) = \sigma_1/\epsilon_0$; на

расстояниях $R < r < 2R$: $E(r) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R}{r}$ (рис. 43).

В области III ($r \approx 2R$) в непосредственной близости от поверхности второго заряженного цилиндра напряженность испытывает скачок $E(r = R) = \sigma_2/\epsilon_0 = -\sigma/\epsilon_0$. Суммарное поле на расстояниях $r > 2R$ в вакууме:

$$E(r > 2R) = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \frac{2R}{r} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{R}{r} (3\sigma - 2\sigma) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r}.$$

4. Поле двух сферических concentрических однородно заряженных поверхностей. Вектор напряженности \vec{E} в любой точке должен быть направлен вдоль радиальной прямой и проходить через центр сферы (рис. 44).

Исследуем характерные области I, II и III concentрических сферических поверхностей с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$ и радиусами $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$, соответственно. В области I для всех $r < R_1$, $E_1 = 0$ (рис. 44).

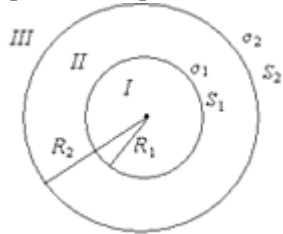


Рис. 44.

В области II: для всех $r \approx R_1$:

$$E(R_1)4\pi R_1^2 = -Q/\epsilon_0, \text{ или } E(R_1) = -\sigma/\epsilon_0;$$

для всех $R_1 < r < R_2$ (рис. 44, 45):

$$E_2 4\pi r^2 = -\frac{Q_1}{\epsilon_0}; \quad E_2 = -\frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R_1}{r}\right)^2.$$

для всех $r \approx R_2$: $E(R_1)4\pi R_2^2 + E(R_2)4\pi R_2^2 = \frac{-Q_1 + Q_2}{\epsilon_0}$ и

$$E(R_2) = \frac{1}{\epsilon_0 R_2^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2] = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + \frac{2\sigma}{\epsilon_0}, \text{ далее с подстановкой:}$$

$$E(R_2) = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1,75\sigma}{\epsilon_0}$$

Для всех $r > R_2$ (рис. 44, 45):

$$E_3 = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} [\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2].$$

5. Поле объемно заряженного

шара. Для поля вне шара ($r > R$) результат будет такой же, как для сферы. Для всех $r < R$: $E(r)4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$; $E(r) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r$.

Внутри шара напряженность поля растет линейно с увеличением расстояния r от центра шара. Вне шара напряженность поля убывает по такому же закону, как и у поля точечного заряда.

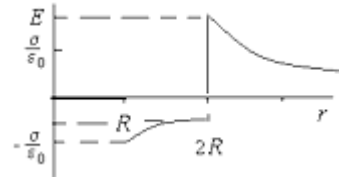


Рис. 45.

Электрическое поле проводников

Заряженный проводник. Из определения потенциала, как характеристики потенциальной энергии системы зарядов следует, что гладкая поверхность заряженного проводника является поверхностью постоянного потенциала. Сторонние электрические заряды расходятся по поверхности гладкого проводника с одной σ . Потенциальная энергия любой произвольной области на поверхности проводника будет постоянной. Электрическое поле, характеризующее $\vec{E} = -grad \varphi$, должно быть перпендикулярным к поверхности в каждой ее точке. Разности потенциалов между полюсами нет, и внутри поле отсутствует. На поверхности – скачок потенциала.

Проводник во внешнем электрическом поле. Положительные ионы увлекаются полем в одном направлении, а отрицательные – в противоположном направлении. Заряды не могут уйти дальше поверхности. Скопившись около нее, они сами создают внутреннее электрическое поле, которое будет стремиться уничтожить внешнее первоначальное поле. Движение зарядов к поверхности продолжается до полной компенсации поля внутри проводника. Этот эффект характерен для всех проводников, поэтому во внешнем поле следует рассматривать только поверхность проводника.

Полый проводник во внешнем поле. Если в пространстве внутри полого проводника любой формы нет зарядов, то и электрическое поле в нем равно нулю. Это утверждение описывается уравнением Пуассона и условием Лапласа. Прикладное применение этого утверждения – основа для электрозащиты.

Свойство системы двух и более проводников, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга содержать (аккумулировать) электрическую энергию поля на своей поверхности и около нее называется емкостью $C = Q/\Delta\varphi$. Сами системы получили название конденсатора. Емкость фиксированной системы проводников с распределением диэлектриков постоянна.

Проводниками называют материальные тела, в которых при наличии электрического поля возникает перераспределение зарядов, как электрический ток.

Постоянный электрический ток

Плотность тока. Электрическим током называют упорядоченное движение электрических зарядов под действием электрического поля. За положительное направление тока условно принимают движение положительных зарядов. Положительные заряды перемещаются по полю, отрицательные – против. Такой ток в проводнике называют *током проводимости*.

Если в пространстве перемещается заряженное макроскопическое тело, то возникает ток, называемый *конвекционным*.

Количественной мерой электрического тока служит скалярная физическая величина силы тока: $I = dQ/dt$.

За время dt через поперечное сечение проводника переносится заряд $dQ = n|e| \langle v \rangle S dt$, где e – заряд электрона; n – концентрация носителей тока; $\langle v \rangle$ – средняя упорядоченная скорость носителей тока. Тогда: $I = n|e| \langle v \rangle S$, а плотность тока: $\vec{j} = n|e| \langle \vec{v} \rangle$, или $\vec{j} = \rho \vec{v}$, где ρ и \vec{v} – объемная плотность и скорость зарядов с учетом знаков. Тогда сила тока $dI = \vec{j} d\vec{S}$ – это поток вектора \vec{j} сквозь произвольную элементарную площадку $d\vec{S} = dS \vec{n}$, \vec{n} – единичный вектор нормали к площадке dS , $d\vec{S}$ – ориентированная в пространстве площадка.

В общем случае интенсивность переноса заряда в произвольном объеме ΔV характеризуется плотностью тока: $\vec{j} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} e_i \vec{v}_i$.

Дифференциальные формы законов Ома и Джоуля - Ленца. Экспериментальный закон, связывающий силу тока с разностью потенциалов на концах проводника, открыт Омом в 1827 г.: $I = U/R$.

В проводнике выделим малый цилиндрический элемент длиной Δl с сопротивлением току: $R = \rho \frac{\Delta l}{\Delta S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$, где γ – удельная электрическая проводимость вещества.

$$\text{В осевом направлении } \tau: I_{\tau} = j_{\tau} \Delta S; \quad \Delta \phi = j_{\tau} \Delta S \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$$

Так как $\Delta \phi / \Delta l = E_{\tau}$ – напряженность электрического поля в произвольно заданном направлении, то $j_{\tau} = \gamma E_{\tau}$, то соотношение справедливо при любой ориентации элемента. В общем случае и в дифференциальной форме закон Ома записывается для плотности тока: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. Наличие внутри проводника электрического поля указывает на наличие в нем электрического тока.

Известно, что $dA = dQU$ и $\frac{dQ}{dt} = I$, откуда $dA = IUdt$, а раз-
виваемая током на участке цепи мощность $P = \frac{dA}{dt}$ и $P = IU$, или с
учетом закона Ома, получаем интегральную форму закона Джоуля –
Ленца $P = I^2 R$. Перепишем иначе: $\Delta P = (j \Delta S)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta l}{\Delta S}$. Здесь
 $\Delta S \Delta l = \Delta V$, и объемная плотность выделяемой в проводнике теп-
ловой мощности: $P_V = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{\Delta P}{\Delta S \Delta l} = \frac{j^2}{\gamma}$, или $P_V = \gamma E^2$ и $P_V = \vec{j} \vec{E}$

Любое из полученных равенств с левой частью в форме P_V является записью закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Механизм существования постоянного тока. Источник тока, или источник сторонних ЭДС представляет процесс или устройство, разделяющее положительные и отрицательные заряды (противокулоновские силы). Разделенные заряды перемещаются на электроды и по закону Кулона действуют на заряды проводника вблизи электродов. В результате коллективных взаимодействий в цепи на поверхности проводников возникает распределение зарядов, обеспечивающее внутри проводника электрическое поле. Роль зарядов на полюсах источника состоит не в том, чтобы создавать в проводниках электрическое поле, а в том, чтобы обеспечивать распределение поверхностных зарядов на них, которое создает нужное электрическое поле внутри них. Это и обеспечивает постоянный ток.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Для удобства технических расчетов разветвленных цепей Кирхгоф предложил два правила: 1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна 0, что следует из закона сохранения электрического заряда; 2. Алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих замкнутых участков контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре, что следует из общего закона Ома для разветвленных цепей.

Необходимые условия применения этих правил: разбить цепь на замкнутые контуры, задать направление обхода и направления токов по всем контурам (большим и малым). Применить второе правило к каждому контуру, а первое – к каждому узлу.

Сегнетоэлектрики. Сегнетоэлектриками называют вещества, относящиеся к пирозлектрикам. Они состоят из областей (доменов) с разными направлениями поляризации, изменяющимися под действием внешних воздействий: электрического поля, упругих напряжений, температур. Сегнетоэлектрики – это полярные диэлектрики, которые в определенном интервале температур спонтанно поляризованы и при отсутствии электрического поля. На их поверхности возникает заряд ($\sigma \neq 0$). Именно на границах указанного интервала температур сегнетоэлектрик в результате фазового перехода обретает качества полярного диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость ($\epsilon \approx 10^4$) зависит и от напряженности поля, и от истории изменения напряженности. Их называют ферроэлектриками по формальной аналогии между их свойствами и ферромагнетиков.

Точка фазового перехода (изменения физических свойств вещества) из состояния сегнетоэлектрика в состояние полярного диэлектрика называется точкой Кюри, определяемой температурой Кюри T_K . Некоторые сегнетоэлектрики имеют верхнюю (Кюри-Вейсса) и нижнюю (Кюри-Неерста) точки фазового перехода, т.е. сегнетоэлектрические свойства исчезают также и при понижении температуры (для сегнетовой соли: $t_{K-B} = 24^\circ\text{C}$, $t_{K-N} = -18^\circ\text{C}$). Но подавляющая часть сегнетоэлектриков имеет лишь верхнюю точку.

Наиболее типичные из нескольких сотен сегнетоэлектриков: $\text{KNaC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$ (сегнетова соль), BaTiO_3 , LiNbO_3 , KIO_3 и WO_3 .

Магнитное поле в вакууме

Магнитная сила. Закон Кулона не достаточен для анализа взаимодействия движущихся зарядов, создающих в окружающем его пространстве магнитное поле. Со стороны магнитного поля на движущийся заряд действует сила. Магнитное взаимодействие сравнимо с электрическим лишь при больших скоростях. Оно проявляется и при малых скоростях, если кулоновское взаимодействие по каким-то причинам отсутствует.

Взаимодействие параллельных проводников с током. Пусть в двух параллельных тонких в целом электрически нейтральных цилиндрических проволоках течет электрический ток. Вне проволоки действует лишь магнитная сила. Значит, вокруг проводника с током проявляется сила магнитного взаимодействия токов:

$$dF_m = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} dl, \quad (61)$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ - магнитная постоянная. Знак «минус» показывает, что при одинаковых направлениях I_1, I_2 между проводниками действует сила притяжения. При различных направлениях токов I_1 и I_2 возникает сила отталкивания.

Ампер есть сила постоянного тока в двух параллельных проводниках бесконечной длины и ничтожно малого круглого сечения, расположенных на расстоянии 1 м в вакууме, вызывает между этими проводниками возникновение силы, равной $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины. Если подставить в формулу (61) значения $I_1 = I_2 = 1\text{А}$, $d = 1\text{м}$, $l_2 = 1\text{м}$, $F_{ml} = 2 \cdot 10^{-7}\text{Н}$, то $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Н/А}^2$.

Сила Лоренца. Сила Лоренца представляется в общем виде: $\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$. Первое слагаемое в правой части характеризует составляющую вектора силы со стороны электрического поля, а второе - со стороны магнитного. Здесь \vec{u} - вектор скорости частицы; \vec{B} - вектор магнитной индукции.

Поскольку сила, действующая со стороны магнитного поля на движущийся заряд, описывается вектором \vec{B} , то естественно

назвать этот вектор напряженностью магнитного поля. Исторически название *напряженности магнитного поля* закрепилось за другим вектором, обозначаемым \vec{H} . Этот вектор не является полевой характеристикой магнитного поля, он учитывает свойства материальной среды, в котором само поле существует. В частности, при заданном \vec{H} вектор \vec{B} , а следовательно, и сила, действующая на движущийся заряд, могут иметь разные значения. За вектором \vec{B} установилось название *индукции магнитного поля*.

Сила Ампера. Пусть имеется совокупность точечных зарядов, концентрация которых равна n . Тогда в элементе объема dV имеется ndV зарядов. Если они все движутся со скоростью \vec{u} и на каждый из них действует магнитная сила, определяемая вторым слагаемым в уравнении Лоренца, то на заряды в элементе объема dV действует сила $d\vec{F}_m = nq dV \vec{u} \times \vec{B}$. Учитывая $nq = \rho$, $nq\vec{u} = \rho\vec{u} = \vec{j}$, где ρ и \vec{j} - плотность зарядов и вектор плотности тока. Перепишем $d\vec{F}_m$ в виде $d\vec{F}_m = \rho\vec{u} \times \vec{B} dV$, или $d\vec{F}_A = \vec{j} \times \vec{B} dV$. Последняя формула Ампера определяет силу, действующую на элемент электрического тока плотностью \vec{j} , заключенного в объеме dV . Для линейных токов $\vec{j} dV = \vec{j} S_0 dl = I d\vec{l}$ и формула Ампера:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}. \quad (62)$$

Из формул (61) и (62) заключаем, что ток, текущий по прямолинейному бесконечному проводнику, создает магнитное поле, силовые линии которого являются окружностями, concentрическими току и лежащими в плоскостях, перпендикулярных току (рис. 46). Из принципа суперпозиции для напряженности электрического поля следует справедливость принципа суперпозиции для индукции магнитного поля.

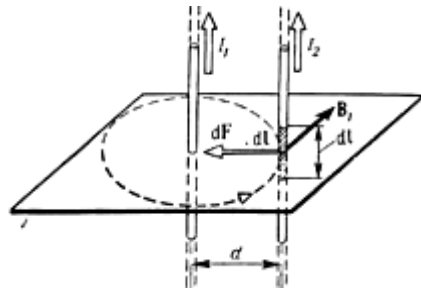


Рис. 46.

Закон Био - Савара. Закон Био – Савара позволяет вычис-

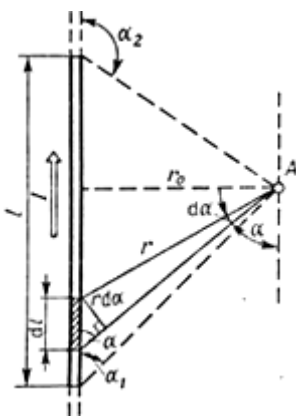


Рис. 47.

лить индукцию $d\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{l} \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$ маг-

нитного поля от элемента тока $I_1 dl_1$ в точке 2 на расстоянии r_{12} в вакууме.

Пример. Элемент $I dl$ линейного тока I , текущего по бесконечному проводнику, создает в точке A поле с индукцией $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$, направленное

перпендикулярно плоскости «от нас» (рис. 47.).

Далее приводится алгоритм расчета индукции магнитного поля в т. А:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^3 \alpha d\left(\frac{l}{r_0}\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\infty}^{-\infty} \sin^3 \alpha d\text{ctg} \alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} \quad (63)$$

Закон полного тока. Вычислим циркуляцию вектора \vec{B} по замкнутому вокруг тока I контуру L (рис. 48, а). Прямолинейным бесконечно-длинным током порождается магнитное поле в форме концентрических окружностей силовых линий с центром на линии тока и величиной. Поэтому контур L удобно выбрать :

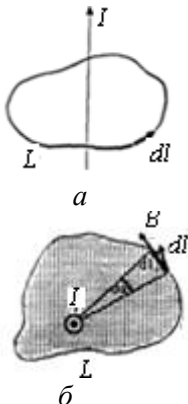


Рис. 48

$\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos(\vec{B}, d\vec{l}) = B dl_{\perp}$, где $d\alpha = dl_{\perp} / r$ (рис. 48, б).

Учитывая формулу (63), перепишем

$$\vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} dl_{\perp} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\alpha.$$

В общем случае сила тока I есть сумма всех токов, охватываемых контуром $I = \sum_i I_i$, поэтому:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_{\Omega} d\alpha = \mu_0 I.$$

Магнитное поле в веществе

Магнетики. Вещества, которые при внесении во внешнее поле становятся источниками собственного магнитного поля называют *магнетиками*. По механизмам намагничивания магнетики разделяют на диа-, пара-, ферро- и ферромагнетики.

Диамагнетики. При внесении в магнитное поле движение электронов в атомах меняется так, что образуется ориентированный суммарный круговой ток и индуктивный магнитный момент. Вещество намагничивается и становится источником собственного поля.

Парамагнетики. Орбитальное (круговое) движение электронов в атомах обеспечивает атомы постоянным магнитным моментом при отсутствии магнитного поля. Магнитные моменты каждой молекулы без внешнего поля ориентированы беспорядочно. Вещество ненамагничено. При внесении его в магнитное поле постоянные магнитные моменты отдельных молекул переориентируются в направлении индукции поля. Магнетик намагничивается по преимущественному направлению ориентации магнитных моментов.

Ферромагнетики. Электроны в атомах обладают магнитным моментом, находящимся в соотношении с их механическим моментом. Намагничивание таких магнетиков называют спиновым.

Намагниченность. *Намагниченность* – объемная плотность магнитного момента магнетика. Определяется отношением суммарного магнитного момента всех молекул физического объема ΔV

к объему: $\vec{J} = \frac{\sum_i \vec{p}_{mi}}{\Delta V}$, где ΔV – элементарный объем, $\vec{p}_{mi} = \vec{n}IS$ – магнитные моменты молекул, \vec{n} – единичный вектор нормали (положительной) к плоскости контура с силой тока I и площадью S .

Напряженность магнитного поля. Напряженность магнитного поля не является чисто полевой величиной среды:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \quad (64)$$

где $\vec{J}(\vec{H}) = \chi \vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость.

Зависимость $\vec{B}(\vec{H})$ принято записывать $\vec{B} = \mu \vec{H}$, где μ – магнитная проницаемость среды. Величины χ и μ для диа- и парамагнетиков не зависят ни от \vec{B} , ни от \vec{H} . Подставим их в выражение (64), и, сократив на \vec{H} , получим: $1 = \frac{\mu}{\mu_0} - \chi$, и $\chi = \frac{(\mu - \mu_0)}{\mu_0} = \mu_r - 1$,

где μ_r – относительная магнитная проницаемость.

У диамагнетиков вектор намагниченности \vec{J} направлен против вектора напряженности \vec{H} и $\chi < 0$, тогда $\mu < \mu_0$ и $\mu_r < 1$. Это значит, что порождаемое диамагнетиком поле направлено против исходного внешнего поля и диамагнетик его ослабляет. Величина $|\chi| \sim 10^{-5}$ и не зависит от температуры.

Диамагнетизм имеется у всех веществ.

У парамагнетиков вектор \vec{J} совпадает по направлению с вектором \vec{H} . Для них $\chi_{\text{л}} > 0$, $\mu > \mu_0$, $\mu_r > 1$. Парамагнетик усиливает магнитное поле, парамагнитная восприимчивость $\chi_{\text{л}}$ зависит от температуры: $\chi_{\text{л}} = C/T$ – закон Кюри, C – постоянная Кюри. При комнатной температуре парамагнитная восприимчивость веществ в твердом состоянии по порядку величины $\sim 10^{-3}$, поэтому у парамагнетиков роль диамагнитной восприимчивости относительно мала и ею часто пренебрегают.

У ферромагнетиков вектор \vec{J} совпадает по направлению с вектором \vec{H} , а величина $|\vec{J}|$ является очень большой. Для них $\chi \gg 1$, $\mu \gg \mu_0$. Значения χ и μ зависят как от поля, так и от предыстории намагничивания. Благодаря этому намагниченность образца в целом сохраняется (остаточная намагниченность) и после того, как внешнее поле стало равным нулю.

Ферромагнетик имеет: 1. *Намагниченность насыщения*, как предел, на графике функции $J(H)$; 2. *Температуру Кюри*, при переходе через которую испытывает фазовый переход второго рода (без выделения или поглощения теплоты фазового перехода), превращаясь в парамагнетик.

Условия на границе двух магнетиков. Вблизи поверхности раздела двух магнетиков (рис. 49, 50) векторы \vec{B} и \vec{H} должны удовлетворять соотношениям: $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$.

Выделим мысленно на границе магнетиков цилиндрический контур (рис. 49). Поток вектора \vec{B} через его поверхность:

$$\Phi = B_{1n}S + B_{2n}S + \langle B_n \rangle S_{\text{бок}}.$$

Так как $\nabla \vec{B} = 0$, то и $\Phi_B = 0$, и при $h \rightarrow 0$ и при проецировании \vec{B}_1 и \vec{B}_2 на одну и ту же нормаль, имеем $B_{1n} = B_{2n}$.

Так как $\mu_0 \mu_1 H_{1n} = \mu_0 \mu_2 H_{2n}$, то

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Выделим мысленно на границе магнетиков прямоугольный контур (рис. 50). Если на границе раздела не текут макроскопические токи, то в пределах контура $\text{rot } \vec{H} = 0$. А значит и циркуляция равна нулю. При $b \rightarrow 0$ приходим к $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, тогда

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

При переходе через границу раздела двух магнетиков нормальная составляющая вектора \vec{B} и тангенциальная составляющая вектора \vec{H} изменяются непрерывно. Вектор \vec{B} ведет себя аналогично \vec{D} , а вектор \vec{H} – аналогично \vec{E} .

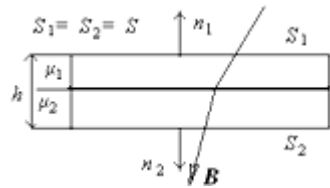


Рис. 49.

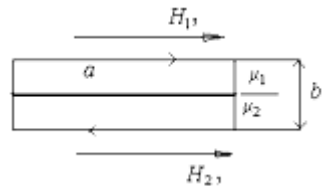


Рис. 50.

Электромагнитная индукция

Закон электромагнитной индукции. Возникновение электрического тока в движущемся в магнитном поле проводнике называют *индукцией токов в движущихся проводниках*.

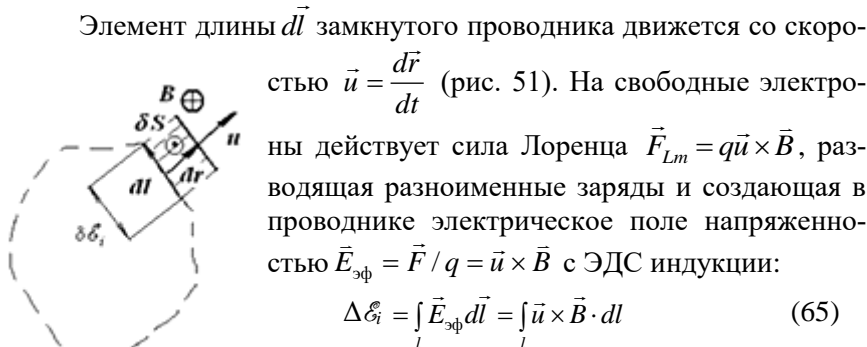


Рис. 51.

Элемент длины $d\vec{l}$ замкнутого проводника движется со скоростью $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (рис. 51). На свободные электроны действует сила Лоренца $\vec{F}_{Lm} = q\vec{u} \times \vec{B}$, разводящая разноименные заряды и создающая в проводнике электрическое поле напряженностью $\vec{E}_{эф} = \vec{F} / q = \vec{u} \times \vec{B}$ с ЭДС индукции:

$$\Delta \mathcal{E}_i = \int_l \vec{E}_{эф} \cdot d\vec{l} = \int_l \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (65)$$

Под интегральном: $d\mathcal{E}_i = \vec{u} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{dt} (\vec{dr} \times \vec{B} \cdot d\vec{l})$,

и смешанное произведение: $d\vec{r} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = d\vec{l} \times d\vec{r} \cdot \vec{B} = -d\vec{r} \times d\vec{l} \cdot \vec{B} = -d\vec{S} \cdot \vec{B} = -\delta\Phi$, где $\delta\Phi$ – поток магнитной индукции сквозь элемент поверхности $d\vec{S} = d\vec{r} \times d\vec{l}$, образованный перемещением элемента длины $d\vec{l}$. Положительное направление нормали к этому элементу поверхности выбирается совпадающим с положительным направлением нормали к контуру, так как элемент ему принадлежит.

Подставляя полученное равенство в (65), имеем $d\mathcal{E}_i = -\frac{\delta\Phi}{dt}$.

Для нахождения полной электродвижущей силы индукции в замкнутом контуре суммируем ЭДС индукции по всем элементам dl :

$$\mathcal{E}_i = \oint d\mathcal{E}_i = -\frac{1}{dt} \oint \delta\Phi = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{где } \oint \delta\Phi = d\Phi.$$

Закон электромагнитной индукции – при произвольных движениях и деформациях замкнутого контура замкнутого проводника во внешнем магнитном поле в его контуре возникает электродви-

жущая сила индукции, равная скорости убыли потока индукции внешнего магнитного поля сквозь поверхность замкнутого контура.

Явление самоиндукции. ЭДС индукции возникает при любых изменениях потока Φ , охватываемого контуром тока. В частности, сам замкнутый ток создает поток магнитной индукции сквозь поверхность, которую он ограничивает. Следовательно, при изменении силы тока в контуре возникает ЭДС. Это явление называют *самоиндукцией* (*self induction* (*si*)).

Ток создает магнитное поле по правилу правого винта, а ЭДС в контуре связана с изменением потока по правилу левого винта (рис. 52). Ясно, что ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_{si} направлена так, что препятствует изменению силы тока, ее вызывающей (правило Ленца). Величина ЭДС не зависит от величины силы тока и определяется скоростью его изменения. Сила тока в контуре связана с охватываемым им собственным потоком магнитной индукции $\Phi = LI$, где L –индуктивность контура. Поэтому

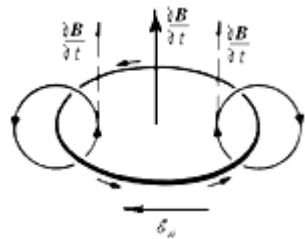


Рис. 52.

$$\text{му } \mathcal{E}_{si} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Например, при выключении тока в цепи при $t = 0$ и $I = I_0$ электродвижущая сила процесса самоиндукции $\mathcal{E}_{si} = IR$. Тогда

$$IR = -L \frac{dI}{dt} \text{ или } \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \text{ с интегральным решением } I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Работа источника сторонних сил против ЭДС самоиндукции определена: $dA = -\mathcal{E}_{si} Idt = \left(\frac{d\Phi}{dt} \right) Idt = Id\Phi$. При этом изменение энергии $dW = dA$ магнитного поля тока в контуре связано с изменением потока $dW = Id\Phi$, или в интегральной форме $W = LI^2 / 2$.

Уравнения Максвелла

Ротор векторной функции. Формула Стокса. Для векторного поля $\vec{E}(x, y, z)$ линейный интеграл, взятый по замкнутому пути L (по кривой L), определяет циркуляцию вектора \vec{E} : $\Gamma = \int_L \vec{E} d\vec{l}$. Кривая L представляет границу стягиваемой поверхности S . Пересечем поверхность, образовав две смежные петли L_1 и L_2 , в каждую из которых входит путь по пересекающей перегородке. С учетом выбранного направления обхода сумма двух циркуляций Γ_1 и Γ_2 будет равна первоначальной циркуляции вдоль петли L . Это объясняется тем, что путь по перегородке проходится при интегрировании в противоположных направлениях, поэтому вклад в интеграл дают лишь те части петли, которые в сумме составляют первоначальную петлю L . Дальнейшее разделение на большее количество петель (рис. 53) L_1, L_2, \dots, L_N , не меняет величины суммы интегралов:

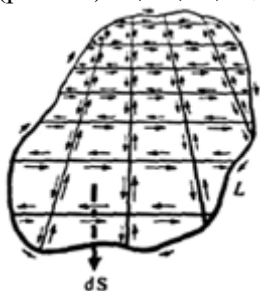


Рис. 53.

$$\int_L \vec{E} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \vec{E} d\vec{l}, \text{ или } \Gamma = \sum_i \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \int_{L_i} \vec{E} d\vec{l}.$$

Умножим и разделим правую часть выражения на величину площади S_i i -той петли:

$$\Gamma = \int_L \vec{E} d\vec{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N S_i \left[\frac{\Gamma_i}{S_i} \right] \quad (66)$$

Продолжая деление, увеличивая число петель, получаем петли с все меньшей площадью и меньшей циркуляцией.

Заданная петля L произвольна и не связана с конкретной стягиваемой поверхностью, поэтому и малые петли, полученные при ее делении, могут иметь любую ориентацию. Площадь S_i элемента поверхности, стягиваемой каждой малой петлей L_i , несет информацию о своей ориентации в пространстве, т.е. обретает признак вектора. Отношение скалярной функции Γ к векторной $\vec{S}_i = \vec{n} S_i$ не имеет смысла, поэтому приходится заранее выбирать и фиксировать ориентацию вектора \vec{n} к площади S_i .

Выберем определенную ориентацию для элемента поверхности S_i в одной из последних стадий разбиения. Зададим с самого начала точку стягивания как точку выхода вектора \vec{n} . Тогда при выбранном направлении обхода \vec{n} будет определен заданным рельефом в малой окрестности выбранной точки стягивания и направлением обхода кривой l_i по правилу правого винта. Предел отношения циркуляции к площади участка $\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i}$, или $\lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{E} d\vec{l}$ пред-

ставляет скалярную величину, связанную в векторном поле с точкой выхода и направлением \vec{n} . Предел, полученный для определенного направления \vec{n} , является величиной проекции $\text{rot}_n \vec{E}$ на это направление: $(\text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{E} d\vec{l}$,

т.е. $(\text{rot} \vec{E}) \vec{n} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \int_{l_i} \vec{E} d\vec{l}$, или:

$$\int_{S_i} (\text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{n} dS = \int_{l_i} \vec{E} d\vec{l} \quad (67)$$

Выражение (67) для i -того контура с учетом (66) для контура, стягивающего длиной L поверхность S , приводит к форме записи теоремы Стокса: $\int_L \vec{E} d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S}$, связывающей линейный интеграл от вектора с поверхностным интегралом от ротора вектора.

В общем случае вектор $\text{rot} \vec{E}$ меняется от точки к точке. Его направление в любой точке нормально к той плоскости с точкой, для которой величина циркуляции максимальна. Тогда величина ротора является предельным значением циркуляции, приходящейся в этой плоскости на единицу площади, вокруг выбранной точки.

Наглядное представление о роторе вектора скорости можно получить, представив небольшую легкую крыльчатку, помещенную в малую окрестность заданной точки текущей жидкости. В тех местах, где ротор отличен от нуля, крыльчатка будет вращаться, причем с тем большей скоростью, чем больше по величине проекция ротора на ось крыльчатки.

Первое уравнение Максвелла. Имея форму записи закона электромагнитной индукции $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}$, перепишем левую часть с учетом формулы Стокса для вектора \vec{E} в виде: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S}$. Объединяя обе формы записи, получаем:

$$\int_S \text{rot}\vec{E}d\vec{S} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}d\vec{S}, \text{ или}$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \quad (68)$$

Закон сохранения заряда. Сила тока $I = \int_S \vec{j}d\vec{S}$ есть мгновенная скорость, с которой заряды покидают замкнутый объем, а $\int_V \rho dV$ – полный заряд внутри объема в любой момент времени, то

$$\int_S \vec{j}d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (69)$$

Пусть ток нестационарный $\vec{j}(x, y, z, t)$ тогда уравнение (69) (с учетом формулы Гаусса) переходит в зависящее от времени распределение зарядов: $\int_S \vec{j}d\vec{S} = \int_V \text{div}\vec{j}dV$; $\int_V \text{div}\vec{j}dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$,

$$\text{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (70)$$

Примечание. Производная по времени от плотности заряда ρ написана в виде частной производной, т.к. ρ зависит от времени и от пространственных координат.

Уравнения (69) и (70) выражают закон сохранения заряда: заряд не вытекает из области V , если в ней не убывает заряд. Для стационарных токов: $\text{div}\vec{j} = 0$.

Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Из закона полного тока имеем для стационарного тока:

$$\int_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I, \text{ или}$$

$$\int_L \bar{B} d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{j} d\bar{S} \quad (71)$$

Ясно, что уравнение (71) выполнится при условии

$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{j} \quad (72)$$

Но уравнения (72) недостаточно для определения $\bar{B}(x, y, z)$ при заданном векторе \bar{j} , так как различные векторные поля могут иметь одинаковый ротор. Поэтому дополним полученную связь условием, не распространяемым на поля, создаваемые любым распределением токов:

$$\text{div} \bar{B} = 0. \quad (73)$$

Уравнения (72) и (73) однозначно определяют \bar{B} , если дано \bar{j} .

Для нестационарных токов $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, и $\text{div} \bar{j} \neq 0$. Подставляя в

(72) получаем противоречие: $\text{div} \bar{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\text{rot} \bar{B}) \equiv 0$, так как дивер-

генция ротора любой векторной функции тождественно равна нулю. Значит что-то не учтено. Добавим это «что-то» в форме x в уравнение (72):

$$\text{rot} \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + (\bar{x}) = 0 \quad (74)$$

но тогда $\text{div} \mu_0 \bar{j} = -\text{div}(x)$, что возможно, исходя из уравнения (70). Очевидно, что в общем случае имеются в виду сторонние – свободные заряды. Имея уравнение $\nabla(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P}) = \rho_f$, или $\text{div} \bar{D} = \rho_f$, и

продифференцировав его по времени, получаем: $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div} \bar{D}) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$,

или при смене порядка дифференцирования: $\text{div} \left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho_f}{\partial t}$.

$$\text{Окорчательно: } \text{rot} \bar{B} = \mu_0 \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \mu_0 \bar{j}, \quad \text{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{j}, \quad (75)$$

или $\text{rot} \bar{H} = \bar{j} + \bar{j}_{\text{см}}$, где векторную сумму плотности токов проводимости и смещения называют вектором плотности полного тока

Система уравнений Максвелла. Для полей в вакууме при наличии электрического заряда и электрического тока, вызванных движением зарядов уравнения Максвелла разбиты на пары. Первую пару составляют основные характеристики \vec{E} и \vec{B} поля:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{— закон электромагнитной индукции;}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \text{— отсутствие магнитных зарядов (монополей).}$$

Во вторую пару входят вспомогательные характеристики \vec{D} и \vec{H} :

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad \text{— связь между токами проводимости и смещения и порождаемым ими магнитным полем;}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_f \quad \text{— источником } \vec{D} \text{ являются сторонние заряды.}$$

Уравнения Максвелла в интегральной форме получаем путем интегрирования с использованием формул Стокса и Гаусса:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0;$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \vec{j}d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D}d\vec{S};$$

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho_f dV$$

Ток смещения. Ток смещения $j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t}$ — это изменяющееся

во времени электрическое поле. Размерность тока смещения $[j_{\text{см}}] = \text{А/м}^2$ совпадает с размерностью плотности тока. Но из всех известных свойств тока проводимости ток смещения обладает лишь одним — способностью создавать магнитное поле.

Введение тока смещения «уравняло в правах» электрическое и магнитное поля. Из явления электромагнитной индукции следует, что изменяющееся магнитное поле порождает электрическое. Из уравнения (75) следует, что изменяющееся электрическое поле порождает магнитное.

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Электромагнитные колебания

Электромагнитные колебания в RLC -контуре. Физическая система – электромагнитное поле, локализованное телами (проводниками, катушками индуктивности, конденсаторами). Основная задача в теории электромагнитных колебаний – нахождение закона изменения во времени электрической или магнитной величины.

Рассмотрим RLC -контур из соединенных последовательно проводников сопротивлением R , катушки с индуктивностью L , конденсатора с электроемкостью $C = Q/U$. За положительное напряжение U примем такое, когда верхняя пластинка конденсатора заряжена положительно (рис. 54). При разрядке конденсатора в цепи контура возникает ток, равный скорости

убыли заряда Q на конденсаторе $I = -\frac{dQ}{dt}$.

Противодействуют процессу разрядки конденсатора через контур два независимых процесса: омическое сопротивление току и процесс самоиндукции. Оба процесса ограничены напряжением на

конденсаторе: $U = L \frac{dI}{dt} + RI$.

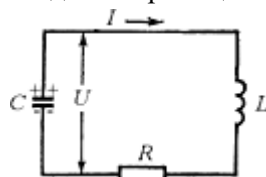


Рис. 54.

Объединим представленные выше три соотношения для скалярных переменных $Q(t)$, $I(t)$ и $U(t)$ в систему и получим однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка по каждой переменной

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{LC} U = 0 \quad (76)$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0; \quad (77)$$

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0.$$

Уравнения (76), (77) формально одинаковы и имеют одно и то же характеристическое уравнение $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$ с корнями:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \quad (78)$$

Чтобы не путаться в обозначениях переменных (Q, I, U) во время анализа, введем их общее обозначение y .

Рассмотрим три возможных случая для корней p_1 и p_2 .

1. Корни p_1 и p_2 – действительные и различные числа. Из (78) видно, что они могут быть только отрицательными. Для реализации этого случая необходимо выполнение $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$, или

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (79)$$

Общее решение дифференциального уравнения $y = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$, где C_1 и C_2 – постоянные, определяемые по начальным условиям. Так как $p_1 < 0$ и $p_2 < 0$ и $p_1 \neq p_2$, то оба частных решения графически определены обратными экспонентами разной крутизны. Физически этот случай описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени.

Если $LC \gg 1$, то $\frac{1}{LC} \rightarrow 0$, и характеристическое уравнение имеет один отрицательный действительный корень, второй корень равен нулю. Общее решение $y = C_1 e^{p_1 t}$.

2. Корни p_1 и p_2 – действительные и одинаковые: $p_1 = p_2$.

Если условие (79) выполняется в форме равенства $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$,

то оба корня характеристического уравнения (78) равны $-\frac{R}{2L}$.

Общее решение уравнений (76), (77): $y = (C_1 + C_2 t)e^{p_1 t}$.

Первое частное решение описывает релаксационный процесс уменьшения y во времени, а второе – процесс импульсного типа.

3. Корни $p_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ – комплексные сопряженные числа. Для реализации этого случая необходимо выполнение неравенства:

$$\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0, \text{ или}$$

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (80)$$

Общее решение уравнений (76), (77) записывается в виде:

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t},$$

где C_1 и C_2 – произвольные комплексные постоянные.

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos\beta t + i\sin\beta t) = e^{\alpha t} \cos\beta t + i e^{\alpha t} \sin\beta t;$$

$$e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos\beta t - i\sin\beta t) = e^{\alpha t} \cos\beta t - i e^{\alpha t} \sin\beta t.$$

Для получения решений в действительной форме, применим правило: *если дифференциальное уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексное решение $y = u(t) + i v(t)$, то каждая из функций $u(t), v(t)$ является решением этого уравнения.*

Правило проверяется подстановкой комплексного решения в дифференциальное уравнение.

В силу этого правила функции $e^{\alpha t} \cos\beta t$, $e^{\alpha t} \sin\beta t$ являются решениями дифференциального уравнения. Зная частные решения, строим общее решение

$$y = C_1 e^{\alpha t} \cos\beta t + C_2 e^{\alpha t} \sin\beta t = e^{\alpha t} (C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t),$$

где C_1 и C_2 – уже действительные постоянные.

Возьмем функцию $U = A e^{-\alpha t} \cos\omega t$ в качестве решения уравнения (76). Здесь A, α, ω – постоянные величины.

Возьмем производные от этой функции:

$$\frac{dU}{dt} = A e^{-\alpha t} (-\alpha \cos\omega t - \omega \sin\omega t),$$

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -A e^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos\omega t + 2\alpha \omega \sin\omega t]$$

Подставим в уравнение (76) и, сократив на множитель $Ae^{-\alpha t}$, получим: $(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega\sin\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0$.

Это выражение справедливо для всех t тогда, когда коэффициенты при $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$ равны 0, т.е. при условиях:

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0, \quad \alpha^2 - \omega^2 - \frac{\alpha R}{L} + \frac{1}{LC} = 0.$$

Первое условие дает $\alpha = \frac{R}{2L}$, тогда из второго следует

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{dR}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Так как ω представляет собой действительное число, то ω^2 может иметь только положительное значение, поэтому функция $U = Ae^{-\alpha t}\cos\omega t$ будет решением уравнения (76) только при

$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, или $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$. Это совпадает с условием (80). График решения показан на рис. 55.



Рис. 55.

С таким же успехом и при тех же полученных α и ω можно взять в качестве решения уравнения (76)

функцию $Be^{-\alpha t}\sin\omega t$ или $Ce^{(\alpha+i\omega)t}$ (прил. 7).

Если напряжение U описывается затухающей косинусоидой,

то ток: $I = -C \frac{dU}{dt} = AC\omega \left[\sin\omega t + \left(\frac{\alpha}{\omega} \right) \cos\omega t \right] e^{-\alpha t}$.

Здесь отношение α/ω называют *мерой затухания*. Если значение α/ω невелико, то член с косинусом тоже будет мал. В таком случае колебания тока отстают по фазе от колебания напряжения почти точно на четверть периода и сводятся к переходу энергии от конденсатора к индуктивности, т.е. от электрического поля к магнитному и обратно, сопровождаясь взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Идеальный колебательный контур (контур Томсона, 1853 г.). Если условие (35) сделать идеально выполнимым и пренебречь величиной сопротивления ($R = 0$), то полученный LC -контур будет осциллятором без затухания с собственной частотой $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Ясно, что вторые слагаемые в дифференциальных уравнениях (76), (77) становятся равными нулю и уравнения переписываются в виде

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{LC}U = 0, \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0, \quad \frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0 \quad (81)$$

Решением для $Q(t)$ является уравнение гармонических колебаний $Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, α_0 – начальная фаза.

Относительное затухание осциллятора выражается величиной, обозначаемой \mathcal{Q} и характеризующей «добротность» контура: $\mathcal{Q} = \omega/2\alpha = \omega L/R$. Добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевают совершиться прежде, чем амплитуда уменьшится в e раз. Для идеального контура $\mathcal{Q} \rightarrow \infty$.

Переменный ток. Наличие в цепи конденсатора исключает возможность протекания по ней постоянного тока. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсатора, на которых располагаются соответствующие заряды, полностью компенсирует действие сторонней ЭДС. Однако переменный ток в цепи при наличии конденсатора протекать может, поскольку в этом случае заряд на обкладках конденсатора переменен, а разность потенциалов не компенсирует действия сторонней ЭДС. При введении в RLC -контур генератора переменного напряжения U (рис. 56) выполняется

$$\text{равенство } IR = U - L \frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C}.$$

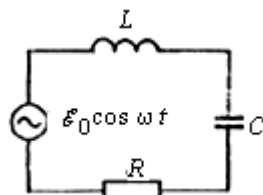


Рис. 56.

Продифференцируем обе части по времени t :

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}U. \quad (82)$$

С учетом того, что $I = \frac{dQ}{dt}$, перепишем уравнение (82) в виде:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = U;$$

$$\ddot{Q} + \left(\frac{R}{L}\right) \dot{Q} + \left(\frac{1}{LC}\right) Q = \frac{U}{L}. \quad (83)$$

Примечание. Запишем уравнение для вынужденных механических колебаний: $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$, где x – отклонение точки от положения; m – масса, F – внешняя сила; $\alpha = \frac{b}{2m}$ – декремент затухания; b – коэффициент трения. Сравним с этим уравнением уравнение (83). Получается, что роль отклонения в электромагнитном контуре играет заряд на пластинах конденсатора, роль массы – индуктивность L , роль силы – электродвижущая сила U ; роль коэффициента трения – омическое сопротивление R , роль скорости – сила тока $I = \frac{dQ}{dt}$.

Продолжая и имея в виду, что $U_C = \frac{Q}{C}$, перепишем (83) в форме

$\ddot{U}_C + 2\alpha\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 U$, где $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота собственных колебаний. При наличии трения колебания становятся затухающими. Частота затухающих колебаний: $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$. Логарифмический декремент затухания: $\Theta = \alpha T$, где $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период собственных колебаний.

Если сторонняя ЭДС изменится по закону $U = U_0 e^{i\omega t}$, то сила тока в уравнении (82) должна меняться со временем по закону $I = I_0 e^{i\omega t}$. Тогда $\frac{dU}{dt} = i\omega U$, и уравнение (82) принимает вид

$\left(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}\right)I = i\omega U$. Разделим обе части на $i\omega$, тогда уравне-

ние примет вид закона Ома $IZ = U$, где $Z = R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]$ называют *импедансом*. Как комплексная величина он позволяет учесть не только соотношение между амплитудами силы тока и напряжения, но и соотношение между их фазами (прил. 8).

Связь между их амплитудами определяется через модули величин $|I||Z| = |U|$, где $|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}$.

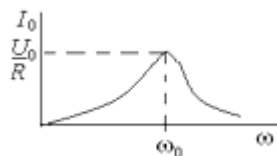
Зависимость амплитудного значения силы тока I_0 и разность фаз γ между током и внешним напряжением от частоты (прил. 8):

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

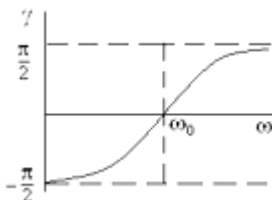
Сила тока достигает максимума $I_0 = \frac{U_0}{R}$, а разность фаз $\gamma = 0$ при *резонансной частоте* контура $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. На

этой частоте напряжения на емкости и индуктивности взаимокompенсируются (в цепи как бы нет емкости и индуктивности), контур ведет себя как активное сопротивление, и состояние называют *резонансом напряжений* (рис. 57). В

добротном контуре амплитуда колебаний напряжения на конденсаторе может быть во много раз больше амплитуды приложенного к контуру напряжения. Если же силы токов в емкости I_C и индуктивности I_L компенсируют друг друга, то возникает *резонанс токов*, характеризуемый очень большими значениями токов в контуре.



а



б

Рис. 57.

Электромагнитные волны

Изменяющееся магнитное поле порождает изменяющееся электрическое поле, которое порождает изменяющееся магнитное поле, которое порождает изменяющееся электрическое поле и т.д. Сцепленные электрические и магнитные поля составляют электромагнитную волну. Способ существования электромагнитной волны делает невозможным ее неподвижность и постоянство напряженностей ее полей во времени, поэтому постоянные токи и движущиеся равномерно и прямолинейно заряды, не излучают.

Волновое уравнение. Величина $W = \frac{1}{2} \int_V (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) dV$ характеризует электромагнитную энергию, заключенную в объеме V . Величина вектора Пойнтинга (1884 г.) $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ является плотностью потока энергии сквозь поверхность, ограничивающую (мысленно или реально) объем V .

Однородное уравнение Даламбера вида $\nabla^2 \Phi - k' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ предложено к описанию движения волны в среде. Здесь Φ – формальное обозначение функции $\Phi(x, y, z, t)$, а k' – постоянный коэффициент размерности $[\text{м/с}]^2$. Для изотропного пространства резонно рассмотреть одномерный случай: $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - k' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$. Решениями этого уравнения является любая непрерывная функция Φ от аргумента $t - \frac{x}{v}$ или $t + \frac{x}{v}$. В предложенных рамках функции $\Phi\left(t - \frac{x}{v}\right)$ и $\Phi\left(t + \frac{x}{v}\right)$ представляют волны, движущиеся в направлении положительных (прямая) и отрицательных (обратная) значений оси X соответственно, со скоростью v . Так как указанным требованиям удовлетворяют функции косинуса и синуса, то общее выражение для бегущей плоской гармонической волны, распространяющейся, например, в положительном направлении оси, имеет вид:

$$\Phi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + B \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right).$$

В частном случае $\Phi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, учитывая, что для плоской волны $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Направим волновой вектор \vec{k} параллельно оси X . Тогда в векторных обозначениях: $\Phi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ при $\vec{k}\vec{r} = kx$ Направление, характеризуемое волновым вектором, называется *лучем*.

Перепишем общее выражение для бегущей плоской гармонической волны, распространяющейся в положительном направлении оси, и для обеих волновых составляющих:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (84)$$

В бескоординатной форме оператор Гамильтона $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r$ и:

$$\nabla e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -i\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{r}}, \quad \nabla^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = (-i\vec{k})^2 e^{-i\vec{k}\vec{r}} = -k^2 e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{i\omega t} = (i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 e^{i\omega t}, \quad \text{где } i^2 = -1, \quad \vec{r} = r \cdot \vec{e}_r.$$

Подставим $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$ решением в уравнение Даламбера:

$$\nabla^2 \left[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right] - k \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \right] = 0,$$

$$\text{или } -k^2 - k'(-\omega^2) = 0 \quad \text{и} \quad k' = \frac{1}{v^2}.$$

$$\text{Однородное уравнение Даламбера вида } \nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

называют *волновым уравнением*.

Если вектор электромагнитной волны имеет одинаковую величину во всех точках плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения, то волну называют *плоской* с решениями волнового уравнения: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$

Плоская электромагнитная волна. Представим уравнения Максвелла при помощи оператора ∇ :

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \nabla \times \vec{E}, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \nabla \times \vec{B}, \quad \operatorname{div}\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B}.$$

Для вакуума ($j = 0, \rho = 0$) эти уравнения принимают вид (прил. 9):

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0, \quad \operatorname{div}\vec{D} = 0, \quad \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\vec{H}, \quad \text{или}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla\vec{B} = 0, \quad \nabla\vec{E} = 0. \quad (85)$$

Рассмотрим правые и левые части уравнений (85):

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \times [\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}] = i\vec{k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \vec{e}_r \times \vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E};$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \times [\vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}] = i\vec{k} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{B}$$

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}] = i\omega\vec{B};$$

$$\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}] = \varepsilon_0 (-i\omega)\vec{E} = -i\omega\varepsilon_0\vec{E};$$

$$\nabla\vec{B} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \vec{B}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = i\vec{k} \cdot \vec{B};$$

$$\nabla\vec{D} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r \cdot \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = i\varepsilon_0 \vec{k} \vec{E}.$$

Подставим рассмотренные части в уравнения Максвелла (85):

$$\frac{1}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{B} = -i\omega\varepsilon_0\vec{E}, \quad i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega\vec{B}, \quad i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad i\varepsilon_0 \vec{k} \vec{E} = 0, \quad \text{и получаем}$$

их символическую форму для плоской электромагнитной волны в вакууме: $\vec{k} \times \vec{B} = -\mu_0\omega\varepsilon_0\vec{E}, \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B}, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \vec{E} = 0$



Рис. 58.

Векторы \vec{E} и \vec{B} плоской волны перпендикулярны вектору \vec{k} , т.е. направлению распространения. Первые два уравнения показывают, что векторы \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны. По-

этому векторы \vec{E} , \vec{B} и \vec{k} составляют тройку взаимно-перпендикулярных векторов, а электромагнитная волна – поперечная (рис. 58).

Рассмотрим второе уравнение, взяв от обеих частей модули:

$$|\vec{k} \times \vec{E}| = \omega |\vec{B}|.$$

Левая часть этого уравнения: $|\vec{k} \times \vec{E}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{E}| = kE = \frac{\omega}{c} E$.

Тогда получаем: $\frac{\omega}{c} E = \omega B$ и $E = cB$.

То же сделаем для первого уравнения: $|\vec{k} \times \vec{B}| = \mu_0 \epsilon_0 \omega |\vec{E}|$.

Левая часть этого уравнения: $|\vec{k} \times \vec{B}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{B}| = kB$.

Получаем: $kB = \omega \mu_0 \epsilon_0 Bc$ и $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. Для вакуума скорость

распространения электромагнитной волны постулируется постоянной, исходя из диэлектрических и магнитных свойств вакуума.

Так как k , ω , μ_0 , ϵ_0 – вещественные величины, то \vec{E} и \vec{B} в плоской волне изменяются в одинаковой фазе, т.е. одновременно достигают и нулевых, и максимальных значений.

Электромагнитная природа света. Значение электромагнитной постоянной $3,1 \cdot 10^8$ м/с в уравнениях Максвелла совпало с измеренной Физо в 1849 г. скоростью света в вакууме ($3,15 \cdot 10^8$ м/с). Поперечность электромагнитных волн, определенная в системе уравнений Максвелла, подтвердила результаты экспериментов по поляризации света Юнга в 1817 для световых волн. Так примирились английская и французская научные школы (академии), исследовавшие по-разному и соответственно, электромагнитные и световые волны. Только после этого было проведено подразделение по границам диапазонов длин электромагнитных волн с созданием рабочей шкалы (прил. 10). Эта шкала дорабатывается сверху и снизу. Снизу вообще трудно представить ограничения энергии фотона, а сверху, назначив $\nu = \infty$, уже трудно представить такой квант энергии.

Время разрешения. Когерентность. С регистрацией электромагнитной волны даже в диапазоне видимого света также возникают неразрешимые проблемы. Обозначим вектор Пойтинга в форме мгновенных значений величин, приняв модуль:

$$|\vec{S}| = |\vec{E}| \cdot |\vec{H}| = \frac{EB}{\mu_0} = \varepsilon_0 c E^2 \text{ с учетом } \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \text{ и } E = cB.$$

Принимая $E = E_0 \cos \omega t$ (см. рис. 58), получаем, что векторы электромагнитной волны видимого диапазона колеблются с частотами $\nu = c/\lambda = (0,4 - 1) \cdot 10^{15}$ Гц, на которых невозможно отслеживать мгновенные изменения. Таких технологий нет. Современными приборами регистрируются значения величин по большому числу периодов, равному *времени разрешения* прибора, поэтому в течение многих сотен периодов, величины напряженности прибором считаются постоянными $\langle E \rangle = 0$ (рис. 59 а). Поэтому мгновенными значениями величин пользуются теоретики, а практики переходят поневоле даже не к средним величинам напряженности, а к средним величинам квадрата напряженности, т.е. потокам энергии волн (рис. 59 б) – средней по времени плотности потока энергии:

$$\langle S \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2, \text{ или } \langle S \rangle = c \varepsilon_0 I, \text{ где } I - \text{интенсивность световой волны.}$$

При постоянных c и ε_0 величину $\langle S \rangle$ определена интенсивностью света. Результат уже не нулевой, но все еще зависит от времени разрешения. При увеличении и приближении промежутка времени усреднения к величине τ_0 , реальная кривая потока от времени сглаживается, сплошная кривая приближается к пунктирной (рис. 59 б). При τ_0 изменения плотности потока энергии исчезают, а τ_0 равно времени *когерентности* τ_k (масштаб флуктуаций).

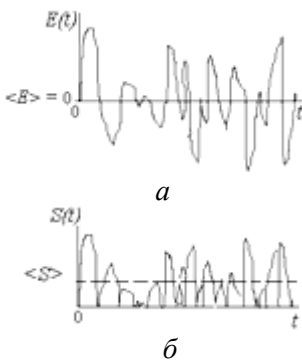


Рис. 59.

Увеличение усреднения далее не меняет среднего значения потока.

5. ОПТИКА

Геометрическая оптика.

Приближение геометрической оптики, это переход от уравнений, описывающих волны к уравнениям, описывающим лучи. Распространение света здесь рассматривается как движение световой энергии по *лучам*. Плоскость, перпендикулярную лучам называют *волновым фронтом*. В геометрической оптике не учитываются эффекты дифракции, а оптические длины всех путей, соединяющих точку предмета с точкой изображения, одинаковы. Это утверждение называется *принципом таутохронизма*.

Законы отражения и преломления. 1. Частота электромагнитной волны при отражении и преломлении границе раздела разных сред не меняется: $\omega_{\text{пад}} = \omega_{\text{от}} = \omega_{\text{пр}}$.

2. Волновые векторы (лучи) падающей, отраженной и преломленной волны лежат в одной плоскости (рис. 60). Если: $\vec{k}_{\text{пад}} \cdot \vec{r} = 0$, то $\vec{k}_{\text{от}} \cdot \vec{r} = \vec{k}_{\text{пр}} \cdot \vec{r} = 0$, где \vec{r} – вектор с началом отсчета в плоскости раздела сред, перпендикулярной вектору \vec{n} .

3. Угол падения равен углу отражения: $\theta_{\text{пад}} = \theta_{\text{от}}$.

4. Закон Снелла:
$$\frac{\sin \theta_{\text{пад}}}{\sin \theta_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

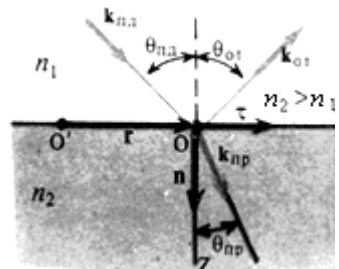


Рис. 60.

Принцип Ферма (П. Ферма 1657 г.). Лучи от точки предмета идут по разным путям, но все они затрачивают одно и то же время на прохождение пути до встречи в точке изображения. Принцип Ферма как «принцип наименьшего времени» может быть высказан в форме утверждения, что лучом, соединяющим две точки, является луч стационарного времени.

Поместим точки P_1 и P_2 в однородные среды с показателями преломления n_1 и n_2 и разделенные плоской границей (рис. 61).

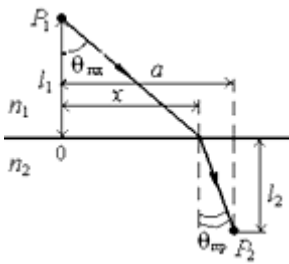


Рис. 61.

Время распространения света из P_1 в P_2 :

$$t = \left(\frac{n_1}{c}\right) \sqrt{l_1^2 + x^2} + \left(\frac{n_2}{c}\right) \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2},$$

где $v = c/n$ зависит от переменной x .

Условие стационарности $\frac{dt}{dx} = 0$ принимает вид

$$\frac{n_1 x}{c \sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{n_2 (a-x)}{c \sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = 0.$$

Учитывая $\frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \sin \theta_{\text{нд}}$; $\frac{a-x}{\sqrt{l_2^2 + (a-x)^2}} = \sin \theta_{\text{нр}}$,

получаем:: $n_1 \sin \theta_{\text{нд}} = n_2 \sin \theta_{\text{нр}}$.

Показатель преломления n_{21} второй среды относительно первой называется относительным показателем преломления. Если одна из сред вакуум, то $n_1 = c/v_1$ и $n_2 = c/v_2$ – абсолютные показатели преломления сред 1 и 2, относительно вакуума.

5. Полное внутреннее отражение ($n_2 < n_1$). При предельном значении угла $\theta_{\text{нд}} = \theta_{\text{пред}}$ гол преломления становится равен $\pi/2$, и преломленный луч движется вдоль поверхности раздела не выходя во среду 2 (рис. 62, а, б).

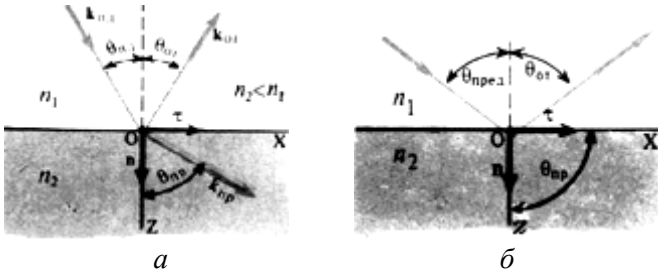


Рис. 62.

Поляризация света

Закон Брюстера. При отражении света от границы среды с большим показателем преломления ($n_2 > n_1$) фаза отраженной волны меняется на π , т.е. вектор напряженности электрического (магнитного) поля меняет направление на обратное (рис. 64 а). При отражении света от границы со средой с меньшим показателем преломления фаза вектора \vec{E} не меняется. Преломленная волна не меняет фазы в обоих случаях.

Плоскость, в которой лежит вектор падающей волны, и нормаль к поверхности раздела в точке падения луча называют *плоскостью падения*.

Обозначим индексом \parallel компоненты векторов, лежащих в плоскости падения луча, а индексом \perp — в перпендикулярной плоскости (рис. 63). Рассмотрим два случая (рис. 64 а, б).

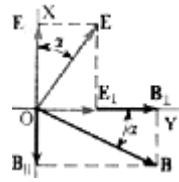


Рис. 63.

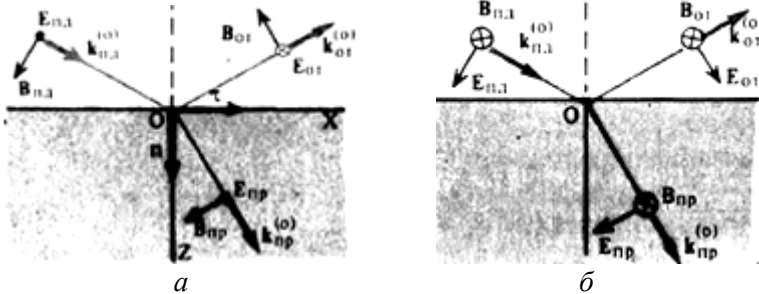


Рис. 64.

Явление Брюстера (1815 г.): у волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения (рис. 64 б), при угле падения θ_B , отраженная волна полностью отсутствует (рис. 65 б). Угол Брюстера θ_B находится из условия $\left(\frac{E_{\text{пд}}}{E_{\text{от}}}\right)_{\parallel} = 0$ при $\theta_{\text{пд}} + \theta_{\text{от}} = \frac{\pi}{2}$. Из

$$n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_B\right) = n_2 \cos\theta_B \text{ получаем формулу Брюстера } \operatorname{tg}\theta_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

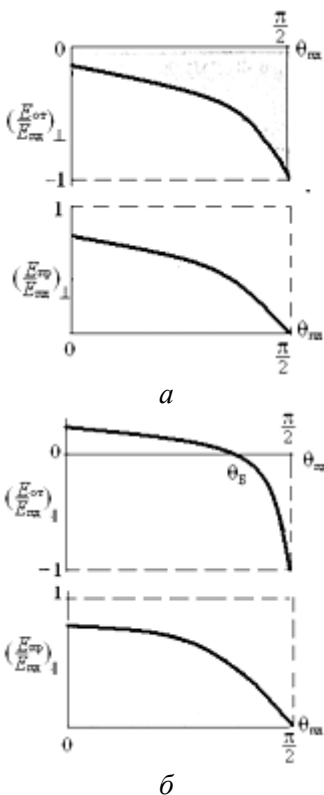


Рис. 65.

среди волн образуется разность фаз, и на *длине замещения* вторичная волна замещает первичную. При угле Брюстера, когда угол между преломленной и отраженной волнами должен был бы составить 90° электроны среды, порождающие преломленную волну, колеблются вдоль линии, параллельной направлению, в котором должна распространяться отраженная волна. Вдоль линии своих колебаний (ось диполя) электромагнитная волна не излучается, и отраженная волна отсутствует, что доказывает поперечность электромагнитных волн.

На графике Френеля (рис. 65 б) при $\theta_{\text{пад}} < \theta_B$ отношение $\left(\frac{E_{\text{пад}}}{E_{\text{от}}}\right)_{//}$ – положительно, а при $\theta_{\text{пад}} > \theta_B$ отрицательно, т.е. при переходе через угол Брюстера фаза отраженной волны скачком меняется на π .

В падающей под углом θ_B волне лежащая в плоскости падения компонент вектора $\vec{E}_{\text{пад}}$ не отражается, и отраженную волну составляет компонент напряженности электрического поля, перпендикулярный плоскости падения, т.е. отраженный свет полностью поляризован.

Механизм поляризации света.

Входящая в диэлектрическую среду световая волна возбуждает колебание диполей, которые излучают вторичную волну. В момент излучения она имеет ту же фазу колебаний, что и первичная волна, но вследствие неодинаковых фазовых скоростей распространения в

Интерференция света

Интенсивность при сложении световых волн. Две плоские монохроматические бегущие волны с одинаковой частотой, распространяющиеся в одном и том же направлении, в результате сложения дают плоскую монохромическую волну той же частоты, распространяющуюся в том же направлении.

Если две слагаемые волны имеют разные частоты, но направление распространения одинаковое, то результат сложения – *биения* с частотой $\Omega = \omega_0 - \omega_1$. При одинаковых частотах, но с противоположным направлением распространения результатом сложения будет *стоячая волна*. В обоих случаях – волна не плоская.

Интерференцией называют изменение средней плотности потока энергии, обусловленное суперпозицией электромагнитных волн.

Интенсивность суммарной волны при суперпозиции волн определяется соотношением их фаз и поляризованностей. При сложении двух монохроматических волн с разными амплитудами E_{01} и E_{02} и с интенсивностями $I_1 = \frac{1}{2} E_{01}^2$ и $I_2 = \frac{1}{2} E_{02}^2$, получим

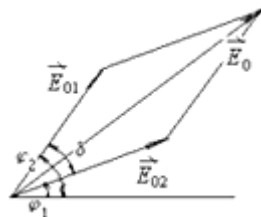


Рис. 66

(рис. 66):

$$I = \frac{1}{2} (E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos\delta) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\delta, \text{ где } \delta = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Ясно, что суммарная интенсивность меняется

- от минимального значения $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ при $\cos\delta = -1$,
- до максимального значения $I_{\max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ при $\cos\delta = 1$.

При суперпозиции двух монохромических волн с одинаковой амплитудой E_0 интенсивность $I = E_0^2(1 + \cos\delta) = 2I_0(1 + \cos\delta)$, где $I_0 = E_0^2/2$ – интенсивность каждой из световых волн.

Примечание. Величина $\cos\delta$ для каждой точки пространства постоянна.

Отражение от параллельных поверхностей. Для осуществления двухлучевой интерференции необходимы две монохроматические волны одной частоты. Пригодные к интерференции волны можно получить при разделении исходной волны двумя способами: делением амплитуды волны (на пластине); делением фронта волны (на щелях). Рассмотрим сначала первый из названных способов.

При распространении света в среде его скорость уменьшается, что при постоянстве частоты требует уменьшения длины волны.

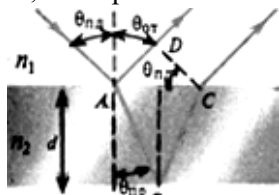


Рис. 67.

Волновое число в среде связано с волновым числом в вакууме соотношением:

$$k_{\text{ср}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср}}} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi n}{cT} = \frac{n2\pi}{\lambda} = nk,$$

где $v = c/n$ – скорость волны в среде, n – абсолютный показатель преломления среды.

Разность фаз, возникающая за счет прохождения геометрического расстояния Δ_{Γ} в среде: $\delta = k_{\text{ср}}\Delta_{\Gamma} = nk\Delta_{\Gamma} = k\Delta$, где $\Delta = n\Delta_{\Gamma}$ – оптическая длина пути.

При показателе преломления среды n_1 и пленки n_2 определим разность оптических путей лучей, отразившихся от поверхностей пленки толщиной d (рис. 67):

$$\Delta = (|AB| + |BC|)n_2 - |AD|n_1, \quad |AB| + |BC| = 2d \frac{1}{\cos\theta_{\text{пр}}}; \quad |AD| = 2d \text{tg}\theta_{\text{пр}} \sin\theta_{\text{пад}}$$

Принимая во внимание закон преломления: $\frac{\sin\theta_{\text{пад}}}{\sin\theta_{\text{пр}}} = \frac{n_2}{n_1}$, получим:

$$\Delta = 2d \left[n_2 \frac{1}{\cos\theta_{\text{пр}}} - \text{tg}\theta_{\text{пр}} \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \sin\theta_{\text{пр}} n_1 \right] = 2dn_2 \cos\theta_{\text{пр}} \quad (86)$$

Формула (86) показывает, что лучи, падающие на пленку под одним и тем же углом, разделяются на два луча и после отражений от верхней и нижней поверхностей приобретают разность хода. При параллельном направлении распространения они могут интерферировать. Максимум интерференции наступает при: $\Delta = m\lambda$, где λ – длина волны в вакууме.

Дифракция света

Принцип Гюйгенса – Френеля (1818г.). Если в данный момент времени известен фронт световой волны, то для определения его положения через промежуток времени Δt каждую точку фронта следует рассматривать точечным источником сферической волны и строить около каждого такого источника сферу радиуса $c\Delta t$. Поверхность, огибающая вторичные сферы волны (рис. 68.), представит фронт волны через промежуток времени Δt (принцип Гюйгенса). Принцип Гюйгенса позволил оценить форму и направление распространения фронта волны, но далее он был дополнен Френелем: точечные источники когерентны, а испускаемые ими вторичные волны интерферируют, что позволяет оценить распределение интенсивности. Утверждение получило название принципа Гюйгенса – Френеля.

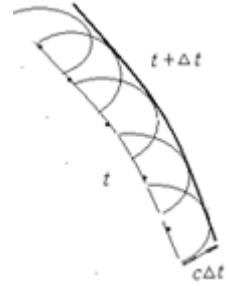


Рис. 68

Ограничения Френеля. Вторым способом получить пригодные для интерференции волны можно делением фронта волны (на щелях). При падении сферической (или плоской) волны на непрозрачный экран с отверстием (рис. 69 а.) найдем распределение интенсивности света за экраном в произвольной точке B (рис. 69 б). Для этого вводятся два предположения в форме ограничений: непрозрачные части экрана не являются источниками вторичных волн, точки волнового фронта в отверстии и вне его одинаковы как источники вторичных волн.

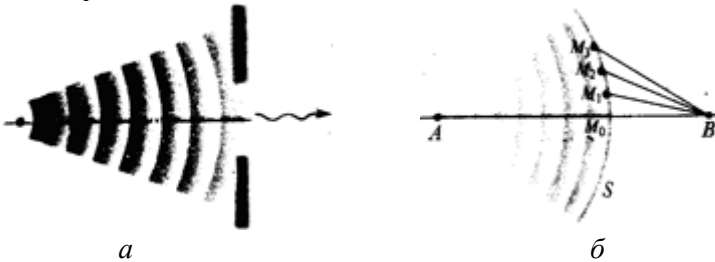


Рис. 69.

Зоны Френеля. Дан источник A сферической волны. Разобьем поверхность S волнового фронта на кольцеобразные зоны так, чтобы расстояние от краев каждой последующей зоны до B отличались на $\lambda/2$. Далее, обозначая границы зон $M_0, M_1, M_2, M_3, \dots$, запишем это условие так: $M_1B - M_0B = \lambda/2$; $M_2B - M_1B = \lambda/2, \dots, M_nB - M_{n-1}B = \lambda/2$ (рис. 69, б.)

Колебания от соседних зон проходят до точки B расстояния, отличные на $\lambda/2$, и, находясь в противофазе при наложении, ослабляют друг друга. Амплитуда результирующего колебания в точке B :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m, \quad (87)$$

где A_1, A_2, \dots, A_m – амплитуды колебаний от 1-й, 2-й, ..., m -й зон.

Для оценки амплитуд колебаний найдем площади зон Френеля. Радиусы зон находятся с помощью построения: r_m – радиусы зон; R – радиус кривизны кривой сферической волны D – точка пересечения фронта с прямой AB ; d_m – расстояния от D до проекции границы m -зоны на прямую AB (рис. 70). Величина радиуса m -зоны:

$$r_m^2 = R^2 - (R - d_m)^2 = \left[l + (m+1) \frac{\lambda}{2} \right]^2 - (l + d_m)^2,$$

откуда с точностью до $(\lambda/2)^2$ имеем: $r_m^2 = \frac{Rl(m+1)\lambda}{R+l}, d_m = \frac{l(m+1)\lambda}{(R+l)2}$.

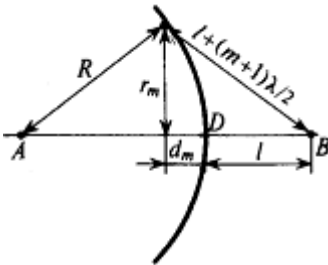


Рис. 70

При $m = 0$ получаем площадь нулевой зоны: $S_0 = \pi r_0^2 = \frac{\pi Rl\lambda}{R+l}$. При $m = 1$

суммарная площадь нулевой и первой зон: $S_{01} = \frac{\pi Rl 2\lambda}{R+l}$. Площадь первой зоны

$$S_1 = S_{01} - S_0 = \frac{\pi Rl\lambda}{R+l}.$$

При не слишком больших m площади всех зон Френеля одинаковы. Интенсивность в направлении точки B падает вследствие роста расстояния от зоны до точки B . Поэтому: $A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots$

Общее число N зон Френеля на полусфере очень велико. Например, $N = \frac{2\pi R^2}{\pi R l \lambda} (R + l) = 8 \cdot 10^5$ при $R = l = 0,1$ м и $\lambda = 0,5$ мкм.

В качестве допустимого приближения будем считать, что амплитуда колебаний A_m от некоторой m -й зоны Френеля равна среднему арифметическому амплитуд примыкающих соседних зон:

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражение (87) можно записать в виде:

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \quad (88)$$

Выражения в скобках равны нулю, а оставшаяся часть амплитуды последней зоны $\pm A_m / 2$ ничтожно мала.

Амплитуда, создаваемая в произвольной точке B сферической волновой поверхности, равна половине амплитуды, создаваемой одной центральной зоной. Это значит, что действие всей волновой поверхности на точку M сводится к действию участка меньше центральной зоны. Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, амплитуда в точке B будет равна A_1 , т.е. в два раза превзойдет амплитуду A (см. (88)). Соответственно интенсивность света в точке B будет в четыре раза больше, чем в отсутствие преград между точками A и B . Следовательно, распространение света от A к B происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень малого канала вдоль AB , т.е. прямолинейно. Так, принцип Гюйгенса – Френеля легитимизировал принципы геометрической оптики и распространения световой энергии по лучам.

Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона. Поместим между источником света S и точкой наблюдения P непрозрачный круглый диск. Диск закроет m зон (рис. 71). Амплитуда в точке P :

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Выражения в стоящие в скобках равны нулю и $A = A_{m+1}/2$.

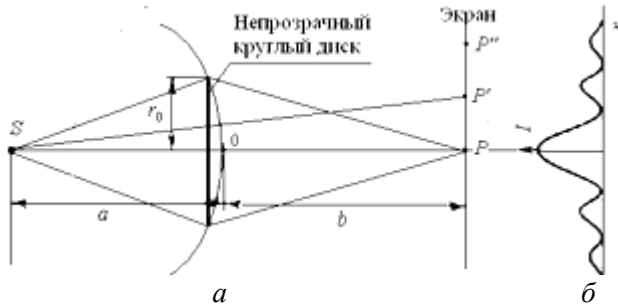


Рис. 71

Освещенность зависит от расстояния от S до P (рис. 71). При небольшом числе m закрытых зон амплитуда $A_{m+1} \rightarrow A_1$. Интенсивность в точке P будет почти такая же, как при отсутствии преграды между источником S и точкой P (см. (88)). Смещая точку P в сторону P' в любом радиальном направлении, диск перекрывает часть $(m + 1)$ -й зоны Френеля, одновременно открывает часть m -й зоны. Это вызовет уменьшение интенсивности. При достижении точки P' интенсивность достигнет минимума. Если сместиться из центра картины еще дальше (к точке P'' , диск перекроет дополнительно часть $(m + 2)$ -й зоны, одновременно открывает часть $(m - 1)$ -й зоны. Интенсивность возрастет и в точке P'' достигнет максимума.

Дифракционная картина принимает вид чередующихся светлых и темных концентрических колец. Экран закрывает некоторое число зон Френеля начиная с нулевой. Но последующие после последней из закрытых зон, создают в точке B освещенность. В центре помещается светлое пятно, называемое *пятном Пуассона*. Волна, как-бы «огинает» непрозрачный экран, проникая в область геометрической тени. Явление огибания волнами препятствий называется *дифракцией*.

При больших размерах непрозрачного экрана диск закрывает много зон Френеля, чередование светлых и темных колец наблюдается только в узкой области на границе геометрической тени. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$, и освещенность в области геометрической тени практически всюду равна нулю.

Дисперсия света

Нормальная и аномальная дисперсия. При распространении некогерентных волн разные составляющие частоты распространяются с разной скоростью. Зависимость скорости распространения электромагнитных волн в диэлектрике от частоты называют *дисперсией*. Дисперсия является следствием зависимости поляризованности атомов от частоты: $\epsilon_{r\omega} = \epsilon_{\omega}(\omega)$, где $\epsilon_{r\omega}$ – относительная диэлектрическая проницаемость, зависящая от частоты. Коэффициент преломления $n_{\omega} \propto \sqrt{\epsilon_{r\omega}}$ и скорость распространения электромагнитных волн зависит от частоты. Графическую зависимость $n_{\omega}(\omega)$ называют *дисперсионной кривой*. Если n_{ω} растет при росте ω , то дисперсию называют *нормальной* (рис. 72 а). При *аномальной дисперсии* вблизи резонансной частоты ω_0 (прил. 11) показатель преломления n_{ω} с ростом частоты ω падает (рис. 72 б).

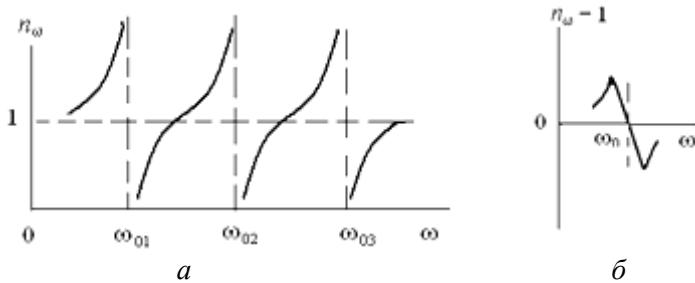


Рис. 72.

При нормальной дисперсии для больших частот $\omega \gg \omega_{01}$ показатель преломления сместится к 1, оставаясь меньше ее (рис. 72 а). Поэтому, для коротковолнового излучения диэлектрик является оптически менее плотной средой, чем вакуум. Может даже наблюдаться полное отражение. Нормальная дисперсия наблюдается во всей прозрачной области; аномальная – только в области поглощения (прил. 10).

6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ И АТОМНОЙ ФИЗИКИ

Тепловое излучение. Квантовая гипотеза Планка

Характеристики теплового излучения. При падении потока излучения Φ_0 на тело (рис. 73), часть $\Phi_{\text{отр}}$ отразится от поверхности тела; часть $\Phi_{\text{прох}}$ пройдет насквозь; часть $\Phi_{\text{погл}}$ поглотится телом. Общий баланс потоков составит: $\Phi_0 = \Phi_{\text{отр}} + \Phi_{\text{погл}} + \Phi_{\text{прох}}$. или

$$1 = \Phi_{\text{отр}}/\Phi_0 + \Phi_{\text{погл}}/\Phi_0 + \Phi_{\text{прох}}/\Phi_0.$$

В форме коэффициентов отражения (ρ), поглощения (a) и прозрачности (D):

$$1 = \rho + a + D.$$

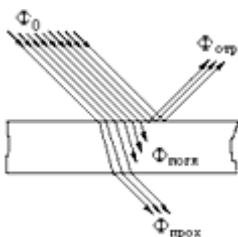


Рис. 73.

Поглощенный поток $\Phi_{\text{погл}}$ переходит в энергию хаотических движений частиц тела, а, далее – в энергию электромагнитного излучения. Свечение тел при нагревании называют *тепловым излучением*. Все другие виды свечения называют люминисценцией.

Энергетическая светимость R_T , Вт/м², как поток энергии с единицы поверхности излучающего тела характеризует энергию электромагнитных волн всех длин ($0 < \lambda < \infty$): $R_T = \int dR_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda$,

где $r_{\lambda,T}$ – испускаемая с единицы поверхности за единицу времени энергия в выделенном интервале длин волн (от λ до $\lambda + d\lambda$). На спектральной характеристике теплового излучения $r_{\lambda,T}(\lambda)$ при температуре T (рис. 74) плотно заштрихованная полоска площадью $dR_T = r_{\lambda,T} d\lambda$ представляет энергию dR_T , излучаемую в интервале $d\lambda$.

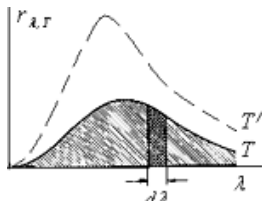


Рис. 74.

Величина R_T определена заштрихованной площадью. Каждое тело при данной температуре характеризуется кривой испускательной способности $r_{\lambda,T}(\lambda)$ и величиной энергетической светимости R_T . С ростом температуры $T' > T$ кривая приподнимается (рис. 74, штрих), площадь под кривой $r_{\lambda,T}(\lambda)$ растет.

Абсолютно черное тело. Равновесное излучение. Объект, который поглощает, но не отражает свет ($a = 1$, $\rho = 0$), представляют полостью в непроницаемых нагретых стенках с одним малым отверстием. Луч, падающий на отверстие, попадает внутрь на стенки полости и испытывает отражение. При каждом акте отражения происходит частичное поглощение стенками энергии луча. После многократного отражения интенсивность выходящего луча практически равна нулю. Отверстие поглощает все падающие на него лучи, представляя *абсолютно черное тело*.

Если же нагревать стенки полости, то они испускают внутрь электромагнитное излучение. После многократных актов испусканий и поглощений электромагнитного излучения стенками полость наполнится волнами разной длины, поляризации и интенсивности, и в ней установится равновесие между испусканием и поглощением. Такое состояние фиксируется «равновесным» излучением из малого отверстия (рис. 75).

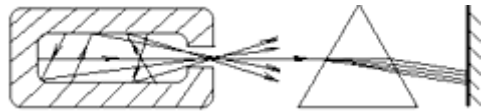


Рис. 75.

Закон Кирхгофа (1859

г.): отношение испускательной и поглощательной способности ($r_{\lambda,T}/a_{\lambda,T}$) для любых тел с одинаковой температурой T и для одной длины волны λ одинаково и не зависит от природы тел. При тепловом равновесии это отношение – универсальная «функция Кирхгофа» $K(\nu, T)$) от частоты (длины волны) и температуры. Излучение, которое тело сильнее поглощает, сильнее им же испускается.

Для абсолютно черного тела $a = 1$, для серых тел $a_{\lambda,T} < 1$, поэтому функция $K(\nu, T) = \frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} = \frac{r_{\lambda,T}^*}{1} = R^*$, т.е. равна испускательной

способности $r_{\lambda,T}^*$ абсолютно черного тела. Тепловое излучение абсолютно черного тела во всех частях спектра $r_{\lambda,T}^*(\lambda)$ интенсивнее, чем серого тела той же температуры $r_{\lambda,T} = a_{\lambda,T} r_{\lambda,T}^* < R^*$.

Закон Стефана – Больцмана (1878 г., 1884 г.): энергетическая светимость абсолютно черного тела: $R_T^* = \sigma T^4$.

Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела.

Формула Рэля – Джинса. Михельсон (1887 г.) впервые применил статистический подход к коллективу элементарных излучателей, которым является нагретое тело. Позже и более строго Рэлей определил число независимых мод стоячих электромагнитных волн в замкнутой полости. Согласно закону о равномерном распределении энергии по степеням свободы каждой независимой волне (моде) он поставил в соответствие степень свободы и среднюю энергию $kT/2$. В итоге получилась формула распределения энергии в спектре абсолютно черного тела:

$$R_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \quad (89)$$

Кривая Рэля зависимости энергетической светимости абсолютно черного тела от длины волны (рис. 76, линия 1) дает правильное значение $R_{\lambda,T}^*$ в области больших длин волн. Но, интегрируя выражение (89) по λ , получаем $R_{\lambda,T}^* \rightarrow \infty$. Энергетическая светимость абсолютно черного тела оказывается бесконечно большой.

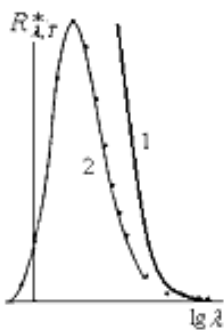


Рис. 76.

Этот абсурдный результат, названный «ультрафиолетовой катастрофой», указывал на наличие в теории Рэля дефектов. Для коротких волн в ультрафиолетовой области и далее энергетическая светимость абсолютно черного тела не возрастает до бесконечности (рис. 76 по кривой 1), а, напротив, убывает до нуля (см. рис. 74).

Формула Вина. Закон смещения Вина.

Вильгельм Вин (1896 г.) согласился с Рэлеем, что каждая мода является носителем энергии, но в отличие от него предположил, что не все моды данной частоты возбуждены, а число возбужденных мод определяется распределением Больцмана $\Delta N/N = e^{-E/(kT)}$. Тогда и если энергия каждой моды с частотой ω пропорциональна частоте излучения $\omega = 2\pi c/\lambda$, получаем:

$$R_{\lambda,T}^* = \frac{\alpha}{\lambda^5} e^{-\frac{\beta}{\lambda T}} \quad (90)$$

Но тогда максимум лучеиспускательной способности (при $dR_{\lambda,T}^*/d\lambda = -\frac{5\alpha}{\lambda^6} \cdot e^{-\frac{\beta}{\lambda T}} + \frac{\alpha}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{\beta}{\lambda T}} \left[-\frac{\beta}{T} \cdot \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) \right] = 0$) определялся со-

отношением $\lambda_{\text{макс}} \cdot T = b$ (закон смещения Вина): с ростом температуры максимум лучеиспускательной способности абсолютно черного тела смещается в сторону коротких длин волн (см. рис. 74 и 76, линия 2). Постоянная закона смещения Вина $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К.

Формула (90) приводила к совпадению с опытом в области коротких волн, но давала уменьшенные значения в области больших λ . (рис. 76), что опять же указывало на дефекты теории.

Квантовая гипотеза и формула Планка. Макс Планк в 1900 г. показал правильное выражение $R_{\lambda,T}^*$, предположив, что *излучение испускается телами не непрерывно, а в виде отдельных порций – квантов с энергией пропорциональной их частоте: $\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$, или $\varepsilon = \hbar\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$, $\hbar = h/2\pi$. Формула Планка для лучеиспускательной способности абсолютно черного тела:*

$$R_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = \frac{\hbar\omega^2}{\lambda^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad (91)$$

В предельном случае длинных волн формула Планка переходит в формулу Рэля (89). При очень больших значениях λ выражение $e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \rightarrow 0$ функцию вида e^x можно разложить в ряд Маклорена (прил. 6), учитывая только линейные члены (линеаризация):

$e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \approx 1 + \frac{hc}{\lambda kT}$. Подставляя результат в уравнение (91) получаем:

$$R_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1} = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}$$

В предельном случае коротких волн формула Планка переходит в формулу Вина (90), т.к. в этом случае $e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \gg 1$ и

$$R_{\lambda,T}^* = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{-\frac{hc}{\lambda kT}}, \text{ где } \alpha = 2\pi hc^2 \text{ и } \beta = hc/k.$$

Сопоставляя формулу (92) с опытом, Планк определил значение постоянной $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с ($\hbar = h/2\pi = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с). Величины размерности постоянной Планка ($[h] = \text{Дж}\cdot\text{с}$) называют «действием», а постоянную Планка – квантом действия.

Квантовые свойства света. Фотоны.

Закономерности фотоэлектрического эффекта. Планк полагал, что излучения энергии порциями $h\nu$ – есть свойство излучающих систем, но само излучение может иметь любую энергию и поглощаться непрерывно в любых количествах. А.Эйнштейн приписал корпускулярные свойства излучению, рассматривая его потоком квантов – фотонов с энергией $\varepsilon = h\nu$. Эту идею он применил к формирующейся тогда теории фотоэффекта.

Фотоэффект был обнаружен Герцем в 1887 г. при исследовании генерации электромагнитных волн. В 1888 г. А.Г. Столетов его описал: явление вызывается преимущественно ультрафиолетовыми лучами; при освещении металлическая пластина теряет только отрицательные заряды с организацией потока отрицательно заряженных частиц; разряжающее действие лучей пропорционально мощности падающего излучения, величина электрического тока пропорциональна интенсивности излучения; моменты начала освещения и разряда одновременны (фотоэффект безынерционен).

По идее Эйнштейна монохроматическое излучение испускается и поглощается целым числом фотонов. При поглощении излучения каждый электрон поглощает один фотон с энергией $h\nu$. Если энергии достаточно, чтобы электрон совершил работу выхода A ($h\nu \geq A$) будет наблюдаться фотоэффект с выходом с поверхности металла электрона с кинетической энергией $mv_{\max}^2/2 = h\nu - A$; и при $h\nu < A$ фотоэффект невозможен.

Эффект Комптона. По предположению Эйнштейна фотона обладает корпускулярными свойствами, т.е. он неделим при любых взаимодействиях. Фотон как целое проходит щели дифракционной решетки, интерферируя сам с собой. Как целое он поглощается фотопластинкой, оставляя точечный след в месте, указываемом волновой теорией. Фотоны, поглощенные в разных точках пластинки, в совокупности создают полную картину интерференции.

В классическом представлении энергия приходящего поля тратится на раскачивание электрона и отдается с испускаемым им излучением. Для достаточно длинных волн, гармонически колеблющийся с частотой ν_0 электрон станет испускать во все стороны (рассеивать) излучение с собственной частотой, т.е. с обретенной им частотой ν_0 первичного излучения. Но в области коротких волн А. Комптон получил иные результаты (1923 г.): при рассеянии рентгеновского излучения электронами вещества частота рассеянного излучения менялась в зависимости от угла рассеяния. В рассеянных лучах с излучением исходной длины волны λ_0 содержались и лучи большей длины волны λ .

Пусть рассеяние света состоит в поглощении электроном фотона с энергией $h\nu_0$ и мгновенном испускании рассеянного фотона с энергией $h\nu$. При взаимодействии электрона атома с рентгеновским фотоном электрон можно рассматривать свободным, т.к. энергия связи внешних электронов в атоме ($1 - 10$ эВ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией рентгеновского фотона. При поглощении жестких рентгеновских лучей электроны обретают скорости v , близкие к скорости света c , поэтому энергию электрона надо рассчитывать по формулам теории относительности. С учетом этого и принимая предположение Эйнштейна о корпускулярных свойствах фотона, Комптон описал акт взаимодействия фотона и электрона посредством закона сохранения энергии и импульса (в двух проекциях). Решение системы трех указанных уравнений привело к результату, полностью подтверждающему результаты его опытов:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{h}{m_0 c} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \text{ и } \Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c} 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\lambda \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \lambda(1 - \cos\varphi) ..$$

Длина волны рассеянного излучения зависит от угла рассеяния и может быть больше исходной. Изменение $\Delta\lambda$ при рассеянии не зависит от длины волны λ_0 падающего излучения.

Для рассеяния электронами комптоновская длина волны электрона $\Lambda = \frac{h}{m_0 c} = 0,0243 \text{ \AA}$. При прямом отражении фотона электроном ($\varphi = \pi$) величина $\Delta\lambda$ максимальна: $\Delta\lambda_{\max} = 2\Lambda = 0,0486 \text{ \AA}$.

Исследования Комптона подтвердили правильность квантовой гипотезы Эйнштейна, и кванты перестали быть гипотетическими частицами.

Ядерная модель атома

Модель атома Резерфорда. К началу XX в. движение неделимых частиц (атомов) понималось как механическое перемещение. Изменение химического состава веществ трактовалось взаимным замещением при переходах атомов от одних молекулярных соединений к другим. И вот при электрическом разряде в газе были обнаружены отрицательно заряженные частицы, названные электронами. Установили, что электроны покидают атомы, которые при этом становятся положительно заряженными ионами. Так в 1909 г. опытно было доказано, что α -частицы – дважды ионизованные атомы гелия. Стало очевидным, что нейтральные атомы – это системы электрически заряженных частиц, и что во всех атомах имеются «одинаковые» электроны. На наличие структуры атомов указывали и линейчатые спектры Бальмера и Лаймана: атомы способны испускать и поглощать электромагнитные волны характерных для каждого элемента частот. Измерения удельного заряда (q/m) электронов и ионов показали, что масса электрона в тысячи раз меньше массы атомов, и положительный заряд оказался связанным с основной массой атома. Его распределение внутри атома не было известно, и Д.Д. Томсон (1910 г.) предложил «модель» атома, как сферу с равномерно распределенной положительно заряженной материей, в которой движутся отрицательно заряженные электроны.

Гейгер и Марсден исследовали рассеяние α -частиц в металлической фольге Φ (золотой, платиновой, медной, серебряной) (рис. 77) толщиной 4 мкм. Преимущество α -частиц как инструмента в исследовании структуры атома – в их высокой монохроматичности (все α -частицы, вылетающие из атомов данного сорта, имеют практически одну и ту же скорость) и большой массе (больше массы электрона в 7296 раз). Поэтому по их рассеянию в веществе можно было судить о распределении положительно заряженной материи в атоме.

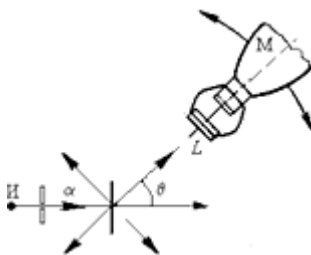


Рис. 77..

Тонкий пучок α -частиц от источника И после прохождения фольги рассеивался. Рассеянные α -частицы регистрировались по кратковременным вспышкам люминесценции (сцинтилляциям) на покрытом флуоресцирующим веществом L малом экране, укрепленном на объективе микроскопа M . Микроскоп поворачивался для фиксации частиц, рассеянных под разными углами к направлению первичного пучка. Почти все α -частицы отклонялись после прохождения фольги на небольшой угол $\theta = 2 - 3^\circ$. На угол, превышающий 90° , рассеивалась одна из $2 \cdot 10^4$ частиц, но некоторые отклонялись и на 180° !

Если отклонение α -частицы объяснять электрическим отталкиванием от положительного заряда по закону Кулона, то это означало бы, что положительно заряженные массы в атоме занимают ничтожно малый объем. Резерфорд предположил, что отклонение на большой угол происходит в результате однократного взаимодействия α -частицы с положительным зарядом, связанным с большой массой в объеме, очень малом по сравнению с объемом атома. На этом основании он предложил «ядерную» модель атома, по которой в центре находится положительно заряженное «ядро» с массой почти равной массе атома. Вокруг ядра движутся легкие электроны. Так как кулоновские силы убывают с расстоянием по тому же закону, что и силы тяготения (как $1/r^2$), то атом подобен солнечной планетарной системе. Так как атомы нейтральны, то при заряде ядра Z/e вокруг ядра должно двигаться Z электронов.

Планетарная модель Резерфорда также имела дефекты. Так как любому значению радиуса орбиты r соответствует определенная скорость v и энергия E электрона на данной орбите, то при бесчисленном множестве возможных орбит на различных расстояниях от ядра величины r , v и E могут меняться непрерывно. Тогда при орбитальных переходах может испускаться любая порция энергии, и спектры атомов должны быть не линейчатыми, а непрерывными.

Механически устойчивая модель Резерфорда оказалась неустойчивой и с точки зрения законов классической электродинамики. Электроны, движущиеся по круговым орбитам, обладают нормальным ускорением. При радиусе орбиты $r = 1 \text{ \AA}$ ускорение составит 10^{22} м/с^2 . При таких ускорениях электроны должны интенсивно излучать электромагнитные волны, быстро терять энергию, приближаясь к ядру. Такой атом не может существовать более 1 мкс.

Постулаты Бора. В попытке разобраться в особенностях устойчивых атомов Нильс Бор применил квантовую теорию Эйнштейна для атома, исходя из опытного факта: атомы, как элементарные излучатели, отдают излучение в виде порций $\varepsilon = h\nu$. Набор возможных значений ε_i (или ν_i) образует не непрерывную последовательность, но дискретный ряд. Отсюда следовал вывод, что возможные состояния атома образуют дискретную последовательность, и энергии атома в этих состояниях образуют дискретный ряд $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$. Находясь в одном из таких, «разрешенных» состояний, атом не испускает и не поглощает излучения, и его энергия не меняется. Изменение состояния (энергии) атома может происходить скачком от одного состояния к другому. Бор постулировал связь между возможными значениями энергии атома и частотами испускаемого (или поглощаемого) им излучения: $h\nu_{ik} = E_k - E_i$.

На разрешенных круговых орбитах атома водорода момент импульса электрона mvr должен быть равен целому числу $\hbar = h/2\pi$, что позволило Бору записать второй постулат в форме условия для разрешенных состояний атома для модели Резерфорда:

$$mvr = n\hbar \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (92)$$

Сохранение лишь тех орбит, которые удовлетворяют условию (92), не могло быть объяснено в рамках классической механики, а возможность устойчивого движения заряженной корпускулы по

круговой орбите (с ускорением без излучения) исключалось законами электродинамики. Требовалось опытное подтверждение дискретности энергии атомов.

Опыт Франка – Герца. Столкновение атома с электроном может быть неупругим с ростом внутренней энергии атома за счет кинетической энергии сталкивающихся частиц. Если относительная скорость частиц после столкновения меньше, чем до него, то такие удары называют ударами первого рода. Если внутренняя энергия атома до удара не является минимальной (атом возбужден), то при столкновении с электроном атом может не только сохранить или увеличить, но и уменьшить внутреннюю энергию. Такие удары называют ударами второго рода.

Пусть атомы одноатомного газа могут находиться на энергетических уровнях: E_1, E_2, E_3, \dots . Энергия теплового движения недостаточна для возбуждения атомов: $3kT/2 \ll E_2 - E_1$, и атомы находятся в невозбужденном состоянии с минимальной энергией E_1 .

Если в такой газ впускается пучок электронов с одинаковой энергией $\varepsilon < E_2 - E_1$, то при их столкновениях с атомами удары и первого, и второго рода исключаются, так как при соударении атом не меняет состояния. Масса атома превышает массу электрона в тысячи раз, поэтому при упругом соударении электрона с атомом скорость атома практически не меняется и кинетическая энергия электрона остается неизменной. Значит, если энергетический спектр атомов дискретен, то при энергии электронов $\varepsilon < E_2 - E_1$ соударения электронов с атомами могут изменить лишь направление движения электронов, но не энергию.

Как только кинетическая энергия электронов ε превысит $E_2 - E_1$ становятся возможными удары первого рода. При этом кинетическая энергия атома практически не изменится, а внутренняя растёт на величину $E_2 - E_1$. Энергия электрона ε уменьшится на эту же величину и станет $\varepsilon' = \varepsilon - (E_2 - E_1)$. Если $\varepsilon < 2(E_2 - E_1)$, дальнейшая потеря энергии электронами невозможна. Если $\varepsilon > 2(E_2 - E_1)$, то электрон может испытать два неупругих соударения и т. д.

Дискретность значений энергии атома была доказана прямыми опытами Франка и Герца по схеме, приведенной на рис. 78.

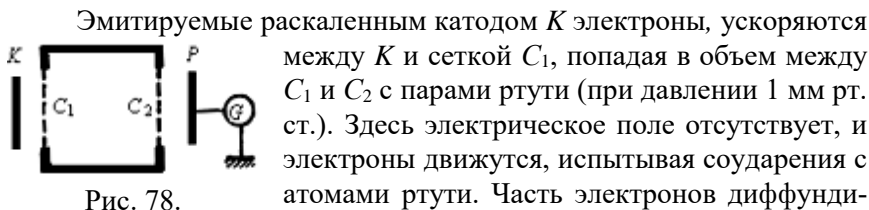


Рис. 78.

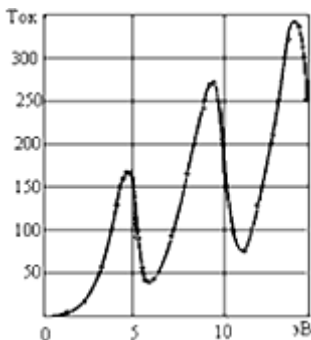


Рис. 79.

На графике зависимости тока с гальванометра от начальной энергии электронов ϵ (эВ) пики кривой тока отвечают энергии электронов, кратной 4,9 эВ (рис. 79) и равной энергии возбуждения ($E_2 - E_1$) атомов ртути. На «провалах» электроны отдают порцию энергии атомам ртути, теряют энергию и не могут преодолеть задерживающий потенциал на сетке C_2 .

На графике зависимости тока с гальванометра от начальной энергии электронов ϵ (эВ) пики кривой тока отвечают энергии электронов, кратной 4,9 эВ (рис. 79) и равной энергии возбуждения ($E_2 - E_1$) атомов ртути. На «провалах» электроны отдают порцию энергии атомам ртути, теряют энергию и не могут преодолеть задерживающий потенциал на сетке C_2 .

преодолеть задерживающий потенциал на сетке C_2 .

7. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Волновые свойства микрочастиц

Гипотеза де Бройля. Связь импульса фотона с длиной волны:

$$p = m_{\phi}c = \frac{m_{\phi}c^2}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \quad (\text{или } \lambda = \frac{h}{p})$$

Де Бройль (1924 г.) распро-

странил для электронов, сопоставив движению электрона с импульсом $\vec{p} = m_e \vec{v}$ волновой процесс, и «прописал» электрону длину вол-

$$\text{ны } \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v}.$$

В ускоряющих полях электронных приборов с заданным напряжением $U = 1 \div 10^4$ В масса покоя электрона m_{0e} практически

не меняется. Кинетическая энергия, приобретаемая электроном в ускоряющем поле: $m_0e v^2/2 = eU$, а скорость $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0e}}$. Используя

соотношение (12), получаем:

$$\lambda = \frac{h}{m_0e} \sqrt{\frac{m_0e}{2eU}} = \frac{h}{\sqrt{2em_0eU}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} U}} = \frac{12,3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{U}}, \text{ м,}$$

т.е. в пределах $U = 1 \div 10^4$ В соответствующие длины волн электронов находятся в диапазоне длин волн рентгеновских лучей ($10 \div 0,1 \text{ \AA}$).

Опыты Джермера и Дэвисона (1927 г.). Волновые свойства электронного пучка не заметны при характерном размере $l \approx 0,1$ м электронно-лучевой трубки, но на естественной дифракционной (кристаллической) решетке с постоянной $\sim \lambda$ они вполне отчетливы. Так в опытах Джермера и Дэвисона монохроматические электроны подавались на поверхность кристалла никеля. Соединенный с гальванометром приемник электронов перемещался, улавливая рассеиваемые от кристалла электроны. При энергии электронов в 54 эВ получался острый максимум для угла отражения $\theta = 50^\circ$, что отвечало по формуле Вульфа – Брэгга длине волны $1,67 \text{ \AA}$. Тот же результат давало уравнение $\lambda = \frac{12,3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{U}} = 1,67 \text{ \AA}$, что подтвердило

гипотезу де Бройля.

Так как длина волны де Бройля обратно пропорциональна массе, то для крупных частиц она столь мала, что ее проявление не реализуемо, а волновые свойства таких частиц не заметны.

Принцип неопределенностей. Соотношение неопределенностей. Принцип причинности в классической механике: действующая на материальную точку постоянная сила определяет импульс, предопределяющий координату в последовательные промежутки времени. Материальная точка, обладая одновременно определенными значениями координаты x и импульса p_x , образует предсказуемую траекторию движения.

Монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси Ox , описывается волновой функцией

$$\psi(x, t) = A \sin\left(2\pi \frac{vt - x}{\lambda}\right),$$

где $\lambda = \text{const}$, v – скорость распространения.

Монохроматической волне отвечает определенное значение импульса $p = h/\lambda$ частицы. Это значит, монохроматическая волна характеризуется $\Delta x \rightarrow \infty$ и $\Delta p = 0$, и такой волновой объект имеет неограниченную область локализации при определенном импульсе.

Локализовать в интервале Δx волновую функцию можно лишь в представлении суперпозиции разных монохроматических волн (рис. 80 а) с результатом их сложения – *волновым пакетом* (рис. 80 б). Такая локализация приведет к росту неопределенности понятия длины волны λ и импульса p .

Чем более широкий интервал $\Delta \lambda$ длин интерферирующих волн, входит в пакет и представляет волну, тем в более узком интервале Δx она локализована. Увеличение определенности в локализации волны связано с одновременным возрастанием неопределенности импульса. В пределе получаем бесконечно узкий волновой пакет: $\Delta x = 0$, $\Delta p \rightarrow \infty$. При полной неопределенности импульса траектория электрона – приближенное понятие.

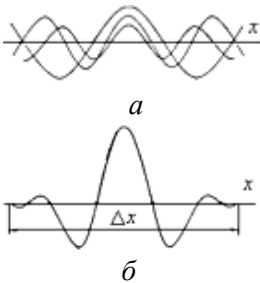


Рис. 80.

В. Гейзенберг обнаружил, что условия, благоприятные для измерения положения, затрудняют нахождение импульса, и наоборот. С учетом всех координат «соотношение неопределенностей» Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h \quad (93)$$

Величины Δx , Δy и Δz характеризуют размеры области локализации, а величины Δp_x , Δp_y и Δp_z – спектральный состав волнового пакета.

Волновая функция. Уравнение Шредингера

Волновая функция: свойства и статистический смысл. По принципу причинности для классических объектов понятия координат и импульсов имеют смысл при определенном значении действующей силы на частицу. И в макроскопических электромагнитных полях электронных приборов этот принцип может соблюдаться использованием приближенного понятия траектории электрона. Например, пусть в волновом пакете неопределенность импульса $\Delta p \approx 0,01p$, т.е. электрон локализован в области $\Delta x \approx 100\lambda$. При $v = 10^6$ м/с длина волны электрона $\lambda = h/p \approx 10^{-9}$ м, область локализации $\Delta x \approx 10^{-7}$ м, и по отношению к размеру трубки приближением является: электрон – материальная точка.

При движении электрона в атоме напряженность электрического поля атомного ядра сильно меняется на расстояниях порядка длины волны де Бройля λ . Область локализации электронов составляет весь объем атома, и представление об электроне-корпускуле в атоме бессмысленно. Необходим принцип причинности для ψ -функции, позволяющий рассчитывать $\partial\psi/\partial t$ для любых значений x, y, z и t , а затем по известной ψ -функции определять значения динамических переменных.

Пусть волновой пакет (рис. 81), описывает свободный электрон, а в точках A, B, C, D находятся ионы.

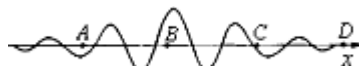


Рис. 81.

Электрон может захватываться ионом с излучением разности энергий свободного электрона и электрона на орбите. В рассматриваемый момент времени в области D электронная волна равна нулю, и захват ионом D исключен. В местах расположения ионов A, B, C электронная волна не равна нулю, указывая на присутствие электрона. Ионы конкурируют за захват электрона с вероятностью, определяемой ψ -функцией.

При дифракции волнового пакета на дифракционной решетке (кристалле) волны с разными λ должны иметь разные направления. Но электрон разделиться не может, и в результате дифракции след электрона на фотопластинке будет обнаружен в одной из точек,

отвечающих значению λ из волнового пакета. Можно указать лишь вероятности того, что электрон продифрагирует с тем или иным значением λ , или p .

Ψ -функция волны де Бройля не позволяет судить о направленности процессов, определяя лишь вероятности их исходов (состояний) по амплитудам волнового пакета. Волновая функция есть максимально полное допустимое описание состояния частицы, но не в физическом, а в информационном поле. Квадрат модуля волновой функции $|\psi|^2$ толкуется как плотность вероятности обнаружения электрона, а $|\psi|^2 dV$ физически толкуется как вероятность обнаружения действия электрона в элементе dV . Если частица существует – она достоверно обнаружится с вероятностью равной единице, и условие нормировки для ψ -функции: $\int |\psi|^2 dV = 1$.

Стационарное и нестационарное уравнение Шредингера.

Для описания распространения волны в однородной среде служит

уравнение Д'Аламбера $\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$. При гармонической зависимости $\Phi(\vec{r}, t)$ от времени решением этого уравнения является $\Phi(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$.

Подставив это решение в волновое уравнение, получим форму уравнения Гельмгольца, описывающее волны постоянной частоты в однородных средах и вакууме: $\nabla^2 \Phi(\vec{r}) + k^2 \Phi(\vec{r}) = 0$, где $k = \omega/v = 2\pi/(vT) = 2\pi/\lambda$.

Применим это уравнение для описания волн де Бройля, характеризующих волновые свойства корпускул при описании их движения в потенциальных полях, когда их полная энергия: $E = K + U = \text{const}$, где кинетическая энергия $K = p^2/(2m)$ и U – потенциальная энергия корпускулы. С учетом соотношения де Бройля имеем: $k^2 = (2m/\hbar^2)(E - U)$. Подставим это выражение в уравнение Гельмгольца и получим: $\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + (2m/\hbar^2)(E - U)\Psi(\vec{r}) = 0$, как стационарное уравнение Шредингера, и оно же в развернутом виде:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + U(x, y, z) \right] \Psi = \Psi E \quad (94)$$

Уравнение (94) имеет решение для непрерывной однозначной и конечной во всех точках функции $\psi(r)$ лишь при *собственных* значениях E .

Для определения по известной ψ -функции величины или вероятности обнаружения значения динамической переменной, этой переменной сопоставляется математическая операция над ψ -функцией.

Пусть частица свободно движется вдоль оси x с точно определенным импульсом $p_x = p$. Это значит, что она не локализована в пространстве и описывается монохроматической волной с фазой $\varphi = 2\pi(vt - x/\lambda)$ или с учетом $E = hv$ и $p = h/\lambda$:

$$\varphi = \frac{2\pi}{h}(Et - px) = \frac{1}{\hbar}(Et - px).$$

Комплексная ψ -функция имеет вид:

$$\psi = a(\cos\varphi - i\sin\varphi) = ae^{-i\varphi} = ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} \quad (95)$$

Продифференцируем ψ -функцию (20) по времени:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i}{\hbar}Eae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-px)} = \frac{1}{i\hbar}E\psi, \text{ и } i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi.$$

Тогда нестационарное уравнение Шредингера

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + U(x, y, z) \right] \psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (96)$$

позволяет найти в заданном внешнем поле изменение с течением времени $\partial\psi/\partial t$ волновой функции $\psi(x, y, z, t)$ частицы.

Частица в потенциальной яме. Потенциальная энергия электрона внутри бруска металла постоянна, и ее можно назначить $U_{\text{внутр}} = 0$. Для преодоления двойного электрического слоя на границах нужно затратить работу выхода A . Поэтому потенциальная энергия электрона вне металла $U_{\text{внешн}} = A > 0$. В рамках одномерной задачи направим ось x из центра бруска (начало координат) перпендикулярно его границам длиной l (рис. 82). Пока кинетическая энергия электрона в металле пренебрежимо меньше высоты стенок «потенциальной ямы» ($E_{\text{кин}} \ll A$) электронные волны будут испы-

тывать на границах полное внутреннее отражение. В этом приближении рассмотрим одномерный «ящик» с энергетически бесконечно высокими стенками ($A \rightarrow \infty$). Внутри ящика $\psi \neq 0$, а на границе и за его пределами электрон не может быть обнаружен ($\psi = 0$).

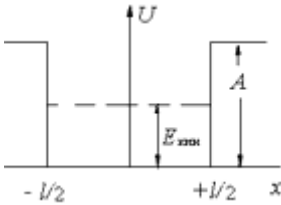


Рис. 82.

При столкновении со стенкой «ящика» импульс меняет знак на обратный. Вероятности обоих значений импульса $\pm \vec{p}$ одинаковы, и ψ -функция электрона – становится суперпозицией двух плоских волн типа $\psi = \psi_1 \pm \psi_2$. Эта функция описывает стационарное состояние, в котором распределение вероятности обнаружения электрона в разных участках внутри ящика $|\psi|^2$ остается неизменным с течением времени. На стенках ящика $\psi = 0$, и эти точки – узлы стоячей волны. Значит, на длине l ящика должно укладываться целое число ($n = 1, 2, 3, \dots$) полувольт, т.е. $l = n\lambda_n/2$, или $\lambda_n = 2l/n$. Жирными линиями показаны три волны состояний ψ -функции с $n = 1, n = 2$ и $n = 3$ (рис. 83); тонкими – показана плотность вероятности $|\psi|^2$ обнаружения электрона в разных точках ящика.

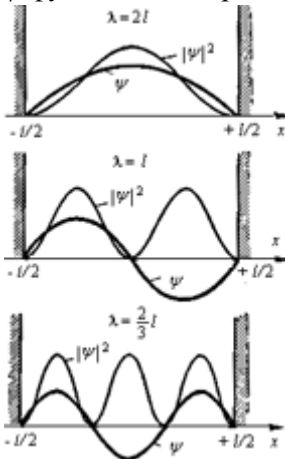


Рис. 83.

При $\psi = a \cos\left(\frac{px}{\hbar}\right)$ вероятность

обнаружения существующей частицы в потенциальной яме равна: $\int |\psi|^2 dV = 1$, а в одномерном ящике: $\int |\psi|^2 dx = 1$, где x меняется в пределах от $-l/2$ до $+l/2$. Подставим форму ψ -функции в уравнение условия нормировки:

$$a^2 \int_{-l/2}^{l/2} \cos^2\left(\frac{px}{\hbar}\right) dx = 1 \quad (97)$$

Решим (97) относительно a : $\int_{-l/2}^{l/2} \cos^2\left(\frac{px}{\hbar}\right) dx = \frac{1}{a^2}$.

Для этого решим интеграл слева:

$$\int_{-l/2}^{l/2} \cos^2\left(\frac{px}{\hbar}\right) dx = \frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \left[1 - \cos\left(\frac{2px}{\hbar}\right)\right] dx = \frac{l}{2} - \frac{\hbar}{2p} \sin\left(\frac{pl}{\hbar}\right) = \frac{l}{2},$$

так как $\sin \frac{pl}{\hbar} = \sin \frac{2\pi l}{\lambda} = \sin \pi n \equiv 0$. Тогда $1/a^2 = l/2$ и $a = \sqrt{2/l}$.

Ψ -функция примет вид: $\psi = \sqrt{2/l} \cdot \cos\left(\frac{px}{\hbar}\right)$, или $\psi = \sqrt{2/l} \cdot \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right)$.

Каждой длине волны λ_n отвечает значение импульса

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = n \frac{h}{2l} \text{ и полная энергия } E_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8ml^2}. \text{ Числа } n \text{ назы-}$$

вают «квантовыми» - определяющими номер уровня энергии.

Теория Бора для водородоподобных атомов

Магнитомеханическое (гиромеханическое) соотношение.

Атому водорода H соответствует $Z = 1$. Значение $Z = 2$ соответствует однократно ионизованному иону гелия He^+ , значение $Z = 3$ - дважды ионизованному атому лития Li^{2+} и т.д. Такие атомы (ионы) с одним электроном называют водородоподобными атомами.

Рассмотрим движение электрона с зарядом $-e$ в поле ядра с зарядом $+Ze$. Масса ядра значительно больше массы электрона, и ядро принимается неподвижным. Размеры ядра ($10^{-14} - 10^{-15}$ м) много меньше размеров атома (10^{-10} м), и ядро в системе атома принимается точечным зарядом $+Ze$, создающим вокруг себя электрическое поле с потенциалом ϕ поля на расстоянии r : $\phi = kZe/r$. Тогда потенциальная энергия электрона на расстоянии r от ядра и с учетом $U(\infty) = 0$:

$$U(r) = -e\phi = -\frac{kZe^2}{r} \quad (98)$$

Заменим пространственную электронную волну линейной, принимая за область локализации электрона окружность радиуса r с центром в ядре. По разрешенной стационарной орбите с круговой скоростью v движется волна де Бройля (рис. 84 пунктир). Неизменной стационарной волне с постоянной во времени амплитудой отвечает неизменное распределение заряда, и потому электрическое

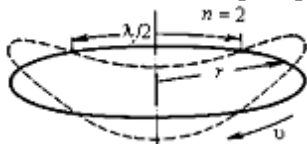


Рис. 84.

поле постоянно. Движение электрона по орбите аналогично вращению заряженного обруча, задавая постоянный микроскопический электрический ток I и постоянное магнитное поле. В таком представлении электрон создает в про-

странстве постоянное электромагнитное поле и не может излучать.

Устойчивое волновое движение на кольцевой струне с соединенными концами возможно, если вдоль струны укладывается целое число ($n = 1, 2, \dots$) волн $n\lambda$. В стационарном состоянии длина

волны λ должна укладываться n раз на орбите: $2\pi r = n \frac{h}{mv}$, и

$mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$, что тождественно второму постулату Бора

(см.(92)). «Вращающийся заряженный обруч» обладает механическим моментом импульса с проекцией на ось вращения

$L_{\text{мех}} = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$ и постоянным магнитным моментом,

направленным противоположно (заряд электрона отрицательный):

$$p_m = IS = \frac{q}{t} \pi r^2 = \frac{e2\pi r}{t} \cdot \frac{r}{2} = \frac{e\upsilon r}{2} = \frac{e}{2m} L_{\text{мех}} = n\hbar \frac{e}{2m} = n\mu_B, \quad (99)$$

кратным элементарному ($n = 1$) магнитному моменту – «магнетону

Бора»: $\mu_B = \hbar \frac{e}{2m} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А}\cdot\text{м}^2$.

Магнитомеханическое соотношение для электрона: $\frac{p_m}{L_{\text{мех}}} = -\frac{e}{2m}$.

Решение уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода. Решения нестационарного уравнения Шредингера представим в виде: $\psi(\vec{r}; t) = \psi(t) \cdot \psi(\vec{r}) = ce^{-\frac{i}{\hbar}(Et-pr)} = ae^{-\frac{i}{\hbar}Et} \cdot be^{-\frac{i}{\hbar}(-pr)}$.

Представленная модель движения и локализации электрона в атоме водорода удовлетворяет решению $\psi(r) = be^{-\frac{i}{\hbar}(-pr)}$ стационарного уравнения Шредингера. Подставим это решение в уравнение (94):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(be^{\frac{i}{\hbar}pr} \cdot \frac{i^2 p^2}{\hbar^2} \right) - \frac{kZe^2}{r} be^{\frac{i}{\hbar}pr} = Ebe^{\frac{i}{\hbar}pr} \text{ и получим:}$$

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{kZe^2}{r} = E.$$

Квантование энергии электрона в атоме водорода. «Заряженный обруч» представляет эквипотенциальную поверхность, что позволяет воспользоваться вторым законом динамики. При стационарном движении по окружности центробежная сила mv^2/r должна быть равна силе Кулона: kZe^2/r^2 . Тогда: $Ze^2/r^2 = mv^2/r$, или

$$\frac{kZe^2}{r} = mv^2 \tag{100}$$

Решая совместно (93) и (100): $kZe^2/r = n^2\hbar^2/(m^2r^2)$, и получаем:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{kmZe^2} = \frac{n^2 \cdot (1,054 \cdot 10^{-34})^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2} = n^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м,}$$

где r – есть функция n , принимающего значения 1, 2, 3, ..., и формирующего дискретный ряд «разрешенных» орбит. Радиус первой ($n = 1$) наименьшей орбиты (радиус Бора): $r_n = 0,529 \text{ \AA}$. Тогда диаметр атома водорода $d_H = 2r_n \approx 1 \text{ \AA}$.

В уравнении (100) правая часть – удвоенная кинетическая энергия ($2K$) электрона, левая часть представляет собой потенциальную энергию электрона $U(r)$ с обратным знаком (см. (98)). Тогда: $-U = 2K$, или $K = (-1/2)U$, и полная энергия электрона: $E = K + U = (-1/2)U + U = (1/2)U$, или $E = -kZe^2/2r$. Но радиусы r разре-

шенных орбит, образуют дискретную последовательность $r_n = n^2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-10}$ м, поэтому и значения энергий электрона (приведенной массы m^*), образуют дискретный ряд:

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -\frac{k^2 m^* Z^2 e^4}{2n^2 \hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{k^2 m^* e^4}{2\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} 21,65 \cdot 10^{-19} \quad \text{Дж},$$

или

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \cdot 13,53 \text{ эВ} \quad (101)$$

При выбранной нормировке потенциальной энергии $U(\infty) = 0$ низшему значению полной энергии электрона отвечает орбита с минимальным радиусом r_1 невозбужденного стационарного состояния атома. С ростом n и переходом электрона на дальние орбиты энергия растет. Энергия возбуждения: $E_2 - E_1 = (1 - 1/4)13,53 = 10,15$ эВ. Но при $n \rightarrow \infty$ получаем состояние бесконечного удаления электрона от ядра ($r_n \rightarrow \infty$).

Энергия, необходимая для удаления электрона от атома с первой орбиты водорода ($Z = 1$) на бесконечность: $E_\infty - E_1 = Z^2 \cdot 13,53$ эВ представляет энергию ионизации невозбужденного атома (рис. 85).



Рис. 85.

Дискретность спектра энергий атома – следствие волновых свойств связанных электронов. При приближении к бесконечно удаленной орбите с $E_\infty = 0$, отдельные значения располагаются все гуще. Далее следует непрерывный спектр положительных энергий свободного электрона, т.к. свободный электрон может иметь любое положительное значение кинетической энергии.

Примечание. При комнатной температуре средняя кинетическая энергия движения частиц $-(3/2)kT \approx 0,04$ эВ, что много меньше энергии возбуждения водорода, и допускает представление атомов в виде упругих шариков, совершающих упругие соударения без изменений внутренней энергии атома.

Спектр атома водорода. На схеме энергетических уровней электронов в атоме водорода (рис. 85) частоты излучения, возникающего при переходе электрона на основной, невозбужденный уровень E_1 с других, более высоких, образуют первую серию частот в спектре испускания. Переходы на следующий уровень E_2 порождают вторую серию и т. д. В общем виде: $h\nu_{n,k} = E_k - E_n$, где индексы n и k – соответственно номер серии и номер уровня, с которого совершил переход электрон при испускании фотона.

Значения частот первой серии:

$$\nu_{1,2} = \frac{E_2 - E_1}{h}, \quad \nu_{1,3} = \frac{E_3 - E_1}{h}, \dots, \quad \nu_{1,k} = \frac{E_k - E_1}{h}$$

$$\text{При } k > n : \nu_{1,k} - \nu_{1,n} = \frac{E_k - E_1}{h} - \frac{E_n - E_1}{h} = \frac{E_k - E_n}{h} = \nu_{n,k}$$

Разность двух частот первой серии дает частоту одной из последующих серий: вычитая из ν_{12} последовательно ν_{13} , ν_{14} , ..., получаем частоты второй серии; вычитая из ν_{13} частоты ν_{14} , ν_{16} , ..., получаем третью серию и т. д. Эта закономерность представляет комбинационный принцип Ритца.

Подставляя значения E_i из (101), получаем:

$$\nu_{n,k} = \frac{mk^2Z^2e^4}{4\pi\hbar^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \text{ где постоянная Ридберга}$$

$$R = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}, \text{ или } R/c = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}.$$

При $n = 1$ и $k = 2, 3, \dots$ получаем частоты $\nu_{1,2}$, $\nu_{1,3}$, ..., отвечающие переходу электрона второго, третьего, и т.д. слоев орбит на орбиту первого слоя:

$$\nu_{1,2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)R = \frac{3}{4}R, \quad \nu_{1,3} = \left(1 - \frac{1}{9}\right)R = \frac{8}{9}R, \quad \dots, \quad \nu_{1,\infty} = \left(1 - \frac{1}{\infty}\right)R = R.$$

Все линии серии Лаймана лежат в ультрафиолетовой части спектра, первые четыре линии второй бальмеровской серии лежат в видимой области спектра, остальные – в ультрафиолетовой области. Частоты третьей, четвертой, пятой и иных серий лежат в инфракрасной области (см. рис. 85).

Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Одномерный ротатор – частица массой m , вращающаяся со скоростью v по окружности радиуса r имеет энергию $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{L^2}{2J}$, где момент инерции ротатора (и обруча) $I = mr^2$. При квантовом рассмотрении: $E_l = l^2 \frac{\hbar^2}{2J}$, и с учетом состояния $l = 0$ для пространственного ротатора: $E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2JI} = \frac{L^2}{2J}$. При подстановке в формулу $J = mr_n^2$ значения r_n из (93), получим:

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m} \left(\frac{mv}{n\hbar}\right)^2 = \frac{mv_n^2}{2} \frac{l(l+1)}{n^2}$$

Кинетическая энергия вращения E_l не может превышать суммарную кинетическую энергию электрона на орбите, поэтому $l(l+1)/n^2 \leq 1$ и квантовое число l не может быть больше $(n-1)$. Состояния с $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ создают слой орбит при каждом данном n . Квантовое число l характеризует величину момента импульса электрона L . На нижнем энергетическом уровне $n = 1$ и $l = 0$, и электрон не имеет ни механического, ни магнитного орбитального момента.

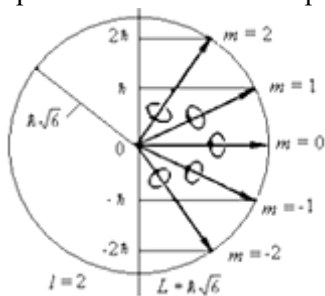


Рис. 86

Электронная волна $\psi_{n,l,m}$ задана значениями квантовых чисел n, l . Но если атом попадает во внешнее магнитное поле, то энергия E_l меняется, и каждому l соответствует $2l+1$ значений ориентаций орбиты, обозначаемых магнитным квантовым числом $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Тогда, каждому радиусу (n) удовлетворяет группа орбит разной степени эллиптичности (l) и ориентации (m).

Для $l = 2$ (рис. 86) показаны разные ориентации орбиты по вектору момента импульса L относительно оси z : значения L – жирными стрелками, кружками около них – ориентации соответствующих орбит, проекции $L_z = m\hbar$ на заданное направление.

В теории Бора главное квантовое число n характеризует радиус орбиты и энергию электрона, орбитальное (азимутальное) (l) – степень вытянутости орбиты и момент импульса электрона L , магнитное (m) – ориентацию нормали к плоскости орбиты и вектор магнитного момента p_m .

Опыты Эйнштейна – де Хааса и Барнетта. Вращающееся «электронное облако» любого слоя с нечетным числом электронов предопределяет магнитомеханические явления: намагничивание магнетика приводит к его вращению, вращение – к намагничиванию. Явления были предсказаны Эйнштейном и доказаны де Хаасом и Барнеттом.

Тонкий железный стержень подвешивали на упругой нити внутри соленоида. Для усиления эффекта соленоид запитывали переменным током с частотой, равной собственной частоте механических колебаний стержня на нити. Амплитуду колебаний наблюдали по смещению светового луча от зеркала на нити (рис. 87).

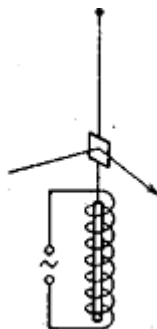


Рис. 87.

Суммарные механический и магнитный моменты электронов любого магнетика равны нулю из-за хаотической ориентации моментов. Но если магнетик намагнитить, то магнитные моменты электронов установятся по направлению поля, а механические моменты – в противоположном направлении. Стержень обретет ненулевой момент импульса, переходя во вращение. Изменение вектора намагниченности ожидается приводит к изменению направления вращения.

Барнетт измерял намагничение при вращении железного стержня.

В обоих случаях магнитомеханическое отношение оказалось равным $-e/m$, т.е. знак заряда носителей, создающих молекулярные токи, совпал со знаком заряда электрона, но с превышением магнитомеханического отношения в два раза. Эти результаты можно было объяснить, только в предположении, что электроны имеют собственные механические и магнитные моменты (Гаудсмит и Уленбек, 1925 г.). Штерн и Герлах проверили эту гипотезу уже в 1926 г.

Опыты Штерна – Герлаха. Из отверстия электропечи с изучаемым веществом выделялся с помощью диафрагм тонкий пучок атомов и осаждался в вакууме на холодной пластине одинаково тонким штриховым следом и при отсутствии, и при наличии однородного магнитного поля. В однородном магнитном поле на движущийся магнитный диполь действует момент сил с нулевой результирующей силой. Поэтому диполь ориентируется по полю, но без изменения траектории движения.

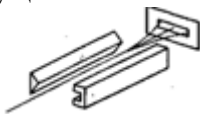


Рис. 88.

В сильной магнитной неоднородности на полюсы диполя действуют разные силы, результирующая сила не равна нулю и траектория движения определена направлением дипольного момента. Реализация сильной магнитной неоднородности в области размера атома (1 \AA) удалась в поле магнитов с полюсными наконечниками (рис. 88).

Напомним, что в помещенном в нестационарное магнитное поле проводящем контуре возникает электродвижущая сила: $\mathcal{E} = -\text{Scos}\alpha \partial B / \partial t$. Домножив части равенства на $I \partial t / \partial x$, получим вдоль оси x градиент потенциальной энергии, равный силе $-F$. На «электронные контуры» атомов действует сила

$$F = p_m \frac{dB}{dx} \cos\alpha, \text{ величина и знак кото-}$$

рой зависят от угла $\alpha = \left(\vec{p}_m, \vec{B} \right)$. При



Рис. 89.

хаотическом распределении векторов $\vec{p}_{m,i}$ атомов в пучке значения α меняются от 0 до π . Потому и предполагалось, что узкий пучок атомов после прохождения между полюсами выделит на экране сплошной растянутый след с краями в рамках ориентаций $0 < \alpha < \pi$ магнитных моментов. Но опыты дали симметричные штрих-следы (рис. 89), числом равным числу возможных значений проекций магнитного момента на направление магнитного поля (см. рис. 86).

Спектральные дублеты получали и ранее – для спектров поглощения при прохождении потока излучения с непрерывным спектром через газ. Атомы газа поглощали излучение характерных частот, и их относительная интенсивность в спектре падала. На соответствующих местах спектра энергии возникали пустые «темные» линии. Но для щелочных металлов ряд линий спектра расщеплялся с образованием спектральных дублетов. В обоих случаях расщепление штрих-следа объясняется двумя противоположными ориентациями собственного магнитного момента валентного электрона.

В применении квантовой механики вращающееся тело может наклоняться под углами, кратными \hbar (пространственное квантование). Электрон обладает собственным механическим L_s , магнитным p_{ms} моментами и магнитомеханическим отношением: $-e/m$.

Спин электрона. Спиновое квантовое число. Собственный момент импульса электрона: $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, где s – спиновое квантовое число, \hbar – единица момента импульса. Число проекций механического момента на ось z равно $2s + 1$. Расщепление спектральных линий на два подуровня с помощью спина требует $2s + 1 = 2$, откуда $s = 1/2$. Иными словами, собственный механический момент электрона имеет единственное значение:

$$L_s = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Его проекция на ось z не превышает величину и может принимать два значения: $L_{sz} = \pm\hbar/2 = s\hbar$.

Спиновое квантовое число s характеризует ориентацию собственных моментов электрона. Собственный магнитный момент

электрона: $\mu_s = -\frac{e}{m_e}L_s = -\mu_B\sqrt{3}$, а его проекция на ось z :

$\mu_{sz} = \mp\mu_B$. Механический и магнитный моменты электрона противоположно направлены.

Правило отбора. Спиновый момент импульса фотона (\hbar) больше вдвое спинового момента импульса электрона и на выделенное направление имеет проекции $\pm\hbar$. Испуская или поглощая фотон, атом меняет момент импульса на величину \hbar спина фотона. Это изменение момента атома нивелируется изменением азиму-

тального квантового числа сдвигом на единицу $l' = l \pm 1$, предопределяя переход электрона и названное правилом отбора. Переходы с излучением (поглощением) при соблюдении правила отбора для l называют разрешенными, иные – запрещенными.

Принцип Паули. Многоэлектронные атомы. Каждое l принимает значения от 0 до $n - 1$, и каждое значение l обеспечивает $2l + 1$ уровней магнитного квантового числа m . Общее число «орбит» N_n с разными значениями l или m , при заданном n :

$$N_n = \sum_{l=0}^{l=n-1} (2l + 1) = \frac{1 + [2(n - 1) + 1]}{2} n = n^2,$$

а с учетом спина s : $N_n = 2n^2$.

Принцип Паули: *никакие два электрона в атоме не могут быть одновременно в одном и том же состоянии и, потому, не могут обладать одинаковыми значениями всех четырех квантовых чисел.*

В соответствии с этим запретом каждый из уровней при заданном n расслаивается на слой близких по значениям энергии орбит, которым даны буквенные обозначения оболочек и орбит (табл. 4): K ($n = 1$), L ($n = 2$), M ($n = 3$), N ($n = 4$), O ($n = 5$), P ($n = 6$), Q ($n = 7$); в s -состоянии находится s -электрон ($l = 0$), в p -состоянии – p -электрон ($l = 1$), в d -состоянии – d -электрон ($l = 2$), в f - и в g -состоянии – f - и g -электроны ($l = 3$ и $l = 4$).

Таблица. 4. Обозначение состояний с разными значениями l

Оболочка (слой орбит)	n	$l = 0$	1	2	3	4	Максимальное число электронов $2n^2$
		s	p	d	f	g	
K	1	2					2
L	2	2	6				8
M	3	2	6	10			18
N	4	2	6	10	14		32
O	5	2	6	10	14	18	50

Вынужденное излучение. Лазеры

Спонтанное и индуцированное излучение. Спонтанные (самопроизвольные) переходы электронов с высоких уровней на низкие сопровождаются спонтанным испусканием фотонов с вероятностью, определяемой свойствами атомов. Вынужденные переходы с низких – на высокие уровни обусловлены поглощением фотонов веществом с вероятностью, определяемой свойствами атомов и интенсивностью падающего излучения. Для достижения равновесного состояния между излучением и веществом вероятность вынужденных переходов с излучением должна быть равна вероятности вынужденных переходов с поглощением фотонов, т.е. вынужденные переходы должны быть равновероятны в обоих направлениях. Тогда приходится допустить и «испускаемые» переходы, и их нарастающую вероятность при росте интенсивности вынуждающего излучения. Излучение при таких переходах назвали вынужденным индуцированным.

Назначим поглотителями и излучателями световых квантов атомы атомарного газа. Пусть для энергетических уровней 1 и 2 атома переход $1 \rightarrow 2$ происходит только при поглощении фотона падающего излучения; переход $2 \rightarrow 1$ происходит спонтанно и индуцировано при воздействии падающего излучения с излучением фотона. Если пренебречь спонтанным излучением, то равновесие между излучением и газом возможно при равном числе $N_2 = N_1$ атомов в состояниях 1 и 2. Учет спонтанного излучения увеличит вероятность переходов $2 \rightarrow 1$, и равновесие сдвинется к $N_1 > N_2$.

При термодинамическом равновесии распределение атомов по разным энергетическим состояниям задано законом Больцмана:

$N_i \propto e^{-\frac{E_i}{kT}}$, и заселенность уровня (число атомов в данном состоянии) с увеличением энергии состояния уменьшается, а из $\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$ при $E_2 > E_1$, следует обязательство $N_1 > N_2$ при лю-

бой температуре. Это указывает, что в системе атомов поглощение

падающей световой волны преобладает над вынужденным излучением. Начальная интенсивность I_0 пучка монохроматического света по мере прохождения через слой вещества толщиной l уменьшается по закону Бугера: $I(l) = I_0 e^{-k_\lambda l}$, где показатель поглощения k_λ зависит только от длины волны и не зависит от интенсивности или ее изменения. При спонтанном излучении фотон имеет произвольное направление вектора импульса, т.е. такие кванты в поток не возвращаются. Это и является причиной уменьшения плотности (интенсивности) потока пучка.

При индуцированных переходах $2 \rightarrow 1$ направление распространения и частота вынужденного излучения совпадают с направлением распространения и частотой вызвавшего переход вынуждающего излучения. Вынужденное и вынуждающее излучения оказываются строго когерентными, что придает атомным системам качество квантовых усилителей.

Создание инверсной заселенности уровней. Индуцированное излучение может вызвать усиление направленного потока излучения при условии $N_2 > N_1$, т.е. чем больше будет число индуцированных переходов $2 \rightarrow 1$ (пропорциональное N_2) и чем меньше будет «поглощательных переходов» $1 \rightarrow 2$ (пропорциональное N_1). Иными словами, нужно сделать так, чтобы в состоянии с большей энергией E_2 находилось большее число атомов, чем в состоянии с меньшей энергией E_1 .

Большая плотность потока энергии может перевести систему атомов в неравновесное состояние и заставить сравняться заселенности ($N_2 = N_1$), но не сможет создать инверсную заселенность. Для этого нужна активная среда – среда, способная откликнуться на плотность потока энергии созданием инверсной заселенности.

В простой трехуровневой схеме активной среды распределение заселенностей равновесного состояния (рис. 90 а) качественно меняется при переходе в неравновесное состояние (рис. 90 б). При воздействии на систему излучения большой мощности с частотой накачки $\nu_n = (E_2 - E_0)/h$ заселенности уровней E_2 и E_0 практически сравниваются. Пусть время жизни атомов на уровне E_2 очень мало и они спонтанно переходят на уровень E_1 , время жизни на котором

достаточно для их накопления. Так и создается инверсная заселенность между уровнями E_1 и E_0 (рис. 90 б). Переход используется для усиления света с частотой $\nu = (E_1 - E_0)/h$.

Принцип действия лазеров. В первом лазере Меймана рабочим телом был цилиндрический стержень из розового рубина диаметром 1 см и длиной 5 см. По составу

рубин – это окись алюминия Al_2O_3 , в которой некоторые атомы алюминия замещены ионами хрома (Cr^{3+}). Строго параллельные торцы стержня представляли зеркала – отполированные и покрытые слоем серебра: один – непрозрачным слоем, другой – пропускающим до 8% упавшей энергии.

Рубин освещался импульсной ксеноновой лампой, работающей в широкой полосе частот. При накачке, или процессе сообщения рабочему телу энергии для перевода атомов в возбужденное состояние, большинство ионов хрома переводится в возбужденное состояние. Затем последовательно возбужденные ионы отдают часть своей энергии кристаллической решетке, переходят в метастабильное состояние со средним временем жизни (~ 1 мс) примерно в 10^5 раз превосходя время жизни в возбужденном состоянии. Далее, ионы переходят в основное состояние, излучая фотон с $\lambda = 6943 \text{ \AA}$.

На схеме уровней иона хрома Cr^{3+} (рис. 91) уровень 3 представляет полосу, образованную группой близко расположенных уровней. Возбуждение

ионов за счет накачки изображено стрелкой W_{13} . Время жизни уровня 3 очень мало ($\sim 10^{-8}$ с). В течение этого времени некоторые ионы перейдут спонтанно из полосы 3 на основной уровень 1 (показаны стрелкой A_{31}). Но вероятность перехода по стрелке S_{32} , значительно больше, и большинство ионов уйдет на метастабильный

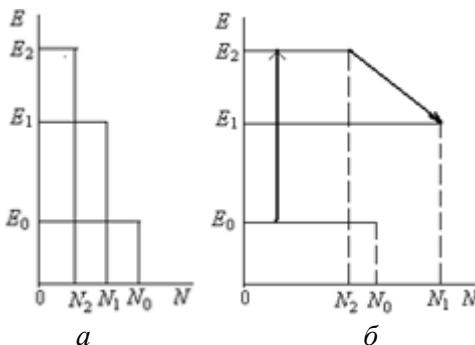


Рис. 90.

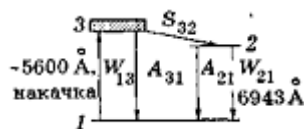


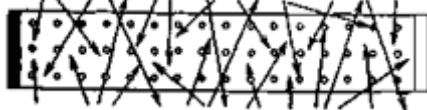
Рис. 91.

уровень 2. При достаточной мощности накачки число ионов хрома на уровне 2, становится больше числа ионов на уровне 1. Возникает инверсия заселенностей уровней 1 и 2.

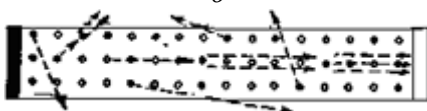
Стрелка A_{21} изображает спонтанный переход с метастабильного уровня на основной. Излученный при этом фотон вызывает вынужденное испускание других фотонов (переход W_{21}), которые в свою очередь вызовут вынужденное испускание последующих с результирующим формированием каскада фотонов. Напомним, что фотоны, возникающие при вынужденном излучении, летят в том же направлении, что и падающие фотоны. Фотоны, направление движения которых образуют малые углы с осью кристаллического стержня, испытывают многократные отражения от



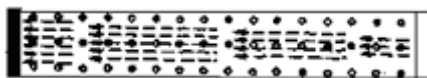
a



б



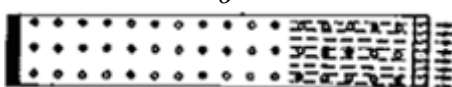
в



г



д



е

Рис. 92.

торцов образца. Их путь в кристалле такой большой, что в направлении оси генерируется каскад фотонов.

До начала импульса ионы хрома находятся в основном состоянии (черные кружки на рис. 92 *a*). Свет накачки (сплошные стрелки на рис. 92 *б*) переводит большинство ионов в возбужденное состояние (светлые кружки). Каскад начинает развиваться, когда возбужденные ионы спонтанно излучают фотоны (штриховые стрелки на рис. 92 *в*) в направлении, параллельном оси кристалла. Фотоны, испущенные спонтанно в иных направлениях, выходят из кристалла через боковую поверхность (рис. 92 *е*).

Фотоны размножаются за счет вынужденного излучения. Этот процесс развивается (рис. 92 *з, д*), так как фотоны многократно проходят вдоль кристалла, отражаясь от его торцов. При каждом отражении от частично прозрачного торца небольшая доля (8 %) светового пучка выходит из кристалла (рис. 92 *е*) вспышкой лазерного излучения – ряда импульсов в течение микросекунд.

Рассмотрим газовый лазер на смеси атомов гелия и неона с непрерывным режимом работы (Джаван, 1961). На рис. 93 показаны первые возбужденные уровни He и Ne. У гелия два уровня $2s$ (отвечающие двум различным взаимным ориентациям спинов электронов). Эти уровни не могут быть возбуждены оптически, так как переход $1s \rightarrow 2s$ с поглощением фотона – запрещен. Возбуждение достигается при газовом разряде, за счет неупругих соударений с электронами (удары первого рода показаны вертикальными пунктирными стрелками). Состояния $2s$ – метастабильные, так как переходы $2s \rightarrow 1s$ с излучением фотона запрещены. У неона состояния $4s$ и $5s$ очень близки к указанным состояниям $2s$ гелия.

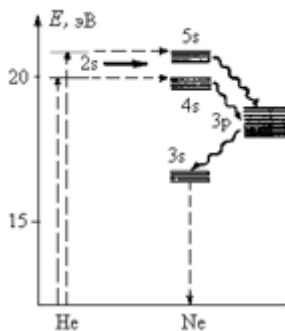


Рис. 93.

Поскольку передача энергии при столкновении для гелия в $2s$ -состоянии – единственный способ отдачи энергии, то эта энергия передается атомам неона, переходящим в состояния $4s$ и $5s$ (рис. 93 жирная стрелка). Из этих состояний разрешены переходы с излучением в состояния $3p$. Разрешены оптически и следующие переходы с $3p$ на нижние s -уровни. Так как на уровнях $4s$ время жизни $\sim 10^{-6}$ с, на уровнях $3p$ время жизни $\sim 10^{-8}$ с, то в газовом разряде, при непрерывной подкачке энергии для пополнения уровней $4s$ и $5s$, создается стационарная инверсная населенность уровней Ne – $4s$, $5s$ и $3p$. Используются переходы $5s \rightarrow 3p$ – видимое излучение (на рис. 93 верхняя волнистая стрелка) и $4s \rightarrow 3p$ – инфракрасное излучение (средняя волнистая стрелка). Переходы $3p \rightarrow 3s$ (нижняя волнистая стрелка) существенны лишь постольку, поскольку они «очищают» уровни $3p$.

Для того чтобы индуцированное излучение значительно превышало «ненужное» спонтанное излучение, необходимо добиться высокой плотности усиливаемого излучения в веществе. Для этого каждый фотон вынуждается к прохождению вещества лазера в среднем не один, а несколько раз. Газ заключен в длинную трубку, замкнутую по торцам зеркалами. Газовый разряд поддерживается высокочастотным генератором. Одно из зеркал полупрозрачное и пропускает от процента до долей процента, отражая остальной поток обратно. В результате каждый фотон, прежде чем он успевает «прорваться» сквозь полупрозрачное зеркало, проходит вещество несколько раз.

По мере увеличения плотности движущихся вдоль оси лазера квантов число индуцированных переходов и появление новых квантов нарастают лавинообразно. Такой рост плотности излучения возможен лишь в первые моменты: часть излучения уходит сквозь полупрозрачное зеркало, населенность уровня N_2 уменьшается, а N_1 — возрастает, замедляя развитие процесса. При работе на непрерывном режиме устанавливается баланс, при котором убыль населенности уровня 2 непрерывно пополняется за счет соударений с атомами гелия, возбужденными до метастабильного состояния в газовом разряде.

Индуцированное излучение представляют результатом резонансной раскачки электрона электрическим полем проходящего фотона. Это и объясняет когерентность проходящего и излучаемого с его помощью фотонов. А так как фотон проходит между зеркалами несколько раз, необходимо, чтобы фаза его при прохождении той же точки пространства (где находится «раскачиваемый» электрон) изменилась на величину, меньшую λ , иначе раскачка сменится торможением.

Лазеры характеризуются строгой монохроматичностью ($\Delta\lambda \sim 0,1 \text{ \AA}$).

8. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Теплоемкость кристаллов. Фононы

Классическая теория теплоемкости. В кристаллическом твердом теле, атомы в узлах кристаллической решетки колеблются около положений равновесия в трех ортогональных направлениях, представляя независимо по каждому из них линейный осциллятор. Каждый осциллятор имеет энергию колебания kT , состоящую из кинетической $kT/2$ и потенциальной $kT/2$ энергий. Таким образом, тело, состоящее из n атомов, вследствие теплового движения обладает энергией $U = 3nkT$ и постоянной теплоемкостью: $C_V = (\partial U/\partial T)_V = 3nk$.

Для моля вещества $n = N_A$, и $nk = R$. Тогда молярная теплоемкость равна $3R$ и не зависит от температуры, что является содержанием закона Дюлонга и Пти.

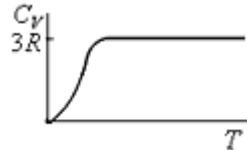


Рис. 94.

Экспериментальная зависимость теплоемкости неметаллических твердых тел от температуры, у которых единственной энергией, связанной с тепловым движением, является энергия колебаний атомов в узлах кристаллической решетки, представлена на рис. 94. При приближении температуры к 0К теплоемкость стремится к нулю по степенному закону $C_V \sim T^3$. У металлических тел имеются свободные электроны, которые также участвуют в тепловом движении и дают вклад в теплоемкость. К теплоемкости за счет колебаний кристаллической решетки добавляется теплоемкость за счет свободных электронов металла. Однако этот вклад невелик, поскольку в тепловом движении участвует лишь небольшая доля электронов, энергии которых лежат вблизи энергии поверхности Ферми (см. далее). Решеточная теплоемкость убывает $\sim T^3$, а электронная $\sim T$, поэтому с понижением температуры ее роль нарастает и при низкой температуре электронная теплоемкость превалирует.

Квантовая теория теплоемкости и модель Эйнштейна. Для объяснения зависимости теплоемкости от температуры Эйнштейн (1907 г.) предложил дискретный характер энергий осцилляторов.

Элементарную порцию энергии E линейного осциллятора свяжем с частотой его колебаний соотношением связи энергии фотона с частотой: $E = \hbar\omega$. Тогда возможные энергии осциллятора $E_n = E_0 + nE$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) представляются с учетом его минимальной энергии E_0 .

Вероятность состояния осциллятора с энергией E_n определяется формулой Больцмана

$$P_n = A \exp[-E_n / (kT)] = A \exp[-(E_0 + nE) / (kT)] \quad (102)$$

где постоянная A , определяется условием нормировки $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ и

$$A = \frac{1}{\exp[-E_0 / (kT)] \sum_{n=0}^{\infty} \exp[-nE / (kT)]}$$

Вычислим среднюю энергию осциллятора:

$$\langle E \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} E_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} (E_0 + nE) P_n = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} P_n + E \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = E_0 + E \sum_{n=0}^{\infty} n A \exp[-(E_0 + nE) / (kT)],$$

$$\langle E \rangle = E_0 + EA \exp[-E_0 / (kT)] \sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-nE / (kT)]$$

$$\langle E \rangle = E_0 + \frac{E \sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-nE / (kT)]}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-nE / (kT)]} \quad (103)$$

Рассмотрим числитель и знаменатель дроби в уравнении (103) раздельно. К знаменателю применим формулу суммы убывающей (т.к. $\exp(-E/kT) < 1$) геометрической прогрессии (прил. 12):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-nE / (kT)] = \frac{e^{-\frac{E}{kT}n} - 1}{e^{-\frac{E}{kT}} - 1} = \frac{1}{1 - \exp[-E / (kT)]} \quad (104)$$

Перепишем (104) в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp[-nE / (kT)] = \{1 - \exp[-E / (kT)]\}^{-1}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по E , получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \exp[-nE/(kT)] = \frac{\frac{E}{kT} e^{-\frac{E}{kT}}}{\left(e^{-\frac{E}{kT}} - 1\right)^2} \quad (105)$$

При подстановке (104) и (105), выражение (103) переписывается

$$\langle E \rangle = E_0 + \frac{E}{\exp[E/(kT)] - 1} \quad (106)$$

Для энергии колебаний одного моля осцилляторов получим

$$U = 3N_A \langle E \rangle = 3N_A E_0 + \frac{3N_A E}{\exp[E/kT] - 1} \text{ и формулу Эйнштейна теплоемкости:}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3N_A k \left(\frac{E}{kT}\right)^2 \frac{\exp[E/(kT)]}{\{\exp[E/(kT)] - 1\}^2} \quad (107)$$

«Элементарная порция энергии» E зависит от свойств вещества и характеризуется соотношением $k\Theta_E = E$, где Θ_E – температура Эйнштейна. Перепишем формулу (107) в новых обозначениях:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 3R \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\Theta_E/T)}{[\exp(\Theta_E/T) - 1]^2}$$

При большой температуре ($T \rightarrow \infty$) отношение $\Theta_E/T \rightarrow 0$. Около этой точки линейные члены разложения экспоненциальной функции в ряд Маклорена (прил. 2): $e^x \approx 1 + x$. Тогда

$$C_V \approx 3R \left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp(\Theta_E/T)}{\left(\frac{\Theta_E}{T}\right)^2} \text{ и}$$

$C_V \rightarrow 3R \exp(0) \rightarrow 3R$. При $T \rightarrow 0$ К экспоненциальный множитель стремится к нулю значительно быстрее, чем степенной множитель – к бесконечности, поэтому: $C_V = 3R \left(\frac{E}{kT}\right)^2 \exp[-E/(kT)] \rightarrow 0$.

Формула (107) при приближении к 0 К, предсказывая экспоненциальное уменьшение теплоемкости $C_V \sim \exp[-E/(kT)]$, а эксперимент дает степенное уменьшение $C_V \sim T^3$. Кроме этого принимает

ся, что твердое тело есть совокупность независимых линейных осцилляторов, т.е. движения атомов в твердом теле считаются независимыми друг от друга. Но это заведомо неверно, так как удержание атомов около положений равновесия – результат коллективного взаимодействия атомов.

Теория теплоемкости Дебая. Фононы. Чтобы проанализировать теплоемкость вблизи 0К, необходимо найти энергии, которые может иметь система атомов вблизи 0К. Пусть некоторый атом в результате сообщения ему энергии извне выдвинулся из положения равновесия. Этот атом взаимодействует с соседними атомами, которые его отталкивают в положение равновесия, и выталкиваются сами из положений равновесия. Коллективное движение атомов, при котором смещение атома передается соседнему, затем следующему и т.д., есть не что иное, как звуковая волна в твердом теле, а элементарные возбуждения – звуковые колебания.

Система атомов представляется совокупностью связанных осцилляторов, а любое движение такой системы – суперпозицией нормальных (главных) колебаний или нормальных мод. Каждая из нормальных мод характеризуется энергией $E_i = \hbar\omega_i$. Если в твердом теле возбуждено n колебаний данной моды, то полная энергия этих n колебаний $E_{in} = n\hbar\omega_i$. Вероятностную связь данной моды с полной энергией E_{in} описывает распределение Больцмана:

$$P_n = A \exp[-E_{in} / (kT)] = A \exp[-n\hbar\omega / (kT)] .$$

Алгоритм определения средней энергии, приходящейся на данную моду аналогичен формальному алгоритму (103 – 106):

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp[\hbar\omega / (kT)] - 1} , \quad (108)$$

но теперь носителем энергии является нормальная мода колебаний системы, которая рассматривается как квазичастица – фонон.

Теория теплоемкости Дебая основывается на расчете числа длинноволновых мод звуковых колебаний твердого тела, поскольку частоты колебаний вблизи температуры 0К должны быть малыми, соответствуя малым энергиям возбуждения.

Выведем волновое уравнение для продольных волн, распространяющихся вдоль оси X . Рассмотрим простой случай изотропно-

го твердого тела, когда вычисление числа мод для каждой поляризации одинаково.

Возьмем тонкий цилиндр с площадью основания S и высотой Δx . Обозначим: $\rho(x, t)$ – плотность вещества, а $p(x, t)$ – давление, которое в нем возникает в результате изменения плотности; $u(x, t)$ – скорость колебаний частиц вещества вдоль оси X . Напишем уравнение сохранения массы в объеме в форме определения и в форме уравнения неразрывности.

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad \text{и} \quad \frac{dm}{dt} = \int_{S'} \rho u dS' \quad \text{или} \quad \frac{dm}{dt} = \int_V \text{div}(\rho u) dV,$$

где S' – площадь поверхности, стягивающей объем V .

Сопоставляя формы записи и с учетом выбранного направления вдоль оси X , получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (109)$$

Сила, действующая на массу в рассматриваемом объеме и в том же направлении, обуславливается разностью давлений p на стенки цилиндра. Значит, уравнение Ньютона $dp_x/dt = F_x$ примет вид:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = S [p(x) - p(x + \Delta x)] \quad \text{или} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{или}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (110)$$

Изменения плотности и давления в среде следует считать малыми:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad (111)$$

где ρ_0 и p_0 – постоянные плотность и давление в среде при отсутствии волны; ρ' и p' – изменения плотности и давления, связанные с волной.

Дальнейшие вычисления проводятся с сохранением величин первого порядка малости по ρ' и p' . Подставляя (111) в уравнения (109) и (110) и сохраняя лишь линейные по ρ' и p' члены, получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (112)$$

Уравнений (112) недостаточно для определения трех неизвестных величин ρ' , p' , u . Добавим уравнение состояния, связываю-

щее давление и плотность: $p' = p'(\rho')$ и $\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial \rho'} \frac{\partial \rho'}{\partial x}$, где в заданном направлении $\frac{\partial p'}{\partial \rho} = v^2$.

Примечание: $\frac{\partial p'}{\partial \rho} = v^2$, т.к. левая часть равна RT/M , а

$\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$ по трем ортогональным направлениям. В выбранном направлении $\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}$. Как будет видно из дальнейшего, v является скоростью распространения волн.

Перепишем уравнения (112) с подстановкой $\frac{\partial p'}{\partial \rho} = v^2$:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} + v^2 \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (113)$$

Продифференцировав первое из уравнений (113) по t , а второе по x и вычитая первое уравнение из второго, находим

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (114)$$

Дифференцируя первое из уравнений (113) по x , а второе по t и вычитая одно из другого, получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (115)$$

Решением уравнений (114) и (115) является любая функция $f(t - x/v)$, поэтому они описывают волну, распространяющуюся вдоль оси X со скоростью v распространения фронта волны. Фронт волны задается условием $t - x/v = \text{const}$, из которого следует, что $dx/dt = v$.

Решение уравнений (114) и (115) будем искать в виде

$$p' = \rho_0 \exp[i(\omega t - kx)] \quad \text{и} \quad u = u_0 \exp[i(\omega t - kx)] \quad (116)$$

Подставляя (116) в (113), получаем уравнения определения ρ_0 и u_0 : $-i\omega\rho_0 + ik\rho_0 u_0 = 0$ и $ikv^2\rho_0 - i\omega\rho_0 u_0 = 0$

Эта однородная система имеет ненулевые решения для ρ_0 и u_0 , если определитель коэффициентов уравнений равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} i\omega & ik\rho_0 \\ ikv^2 & -i\omega\rho_0 \end{vmatrix} = \omega^2 - k^2v^2\rho_0 = 0. \text{ Откуда:} \\ \omega = \pm vk \quad (117)$$

Дисперсионное соотношение (117) позволяет определить частоты (энергии) мод по их волновым числам.

Возьмем тело в виде куба объемом L^3 и поместим начало координат в одну из вершин. В теле конечного размера возникают стоячие волны. Рассмотрим плоские стоячие волны по оси X . Для стационарных решений вида $A\sin kx$ или $B\cos kx$ необходимо положить $A = 0$, а на k наложить условие $kL = n\pi$ при $n = 1, 2, \dots$. Оно определяет дискретный набор волновых чисел, при которых возможно существование стоячих волн. Аналогичные формулы находятся и для других осей координат. Получаем наборы волновых чисел, каждому из которых соответствует стоячая волна, представляющая моду колебаний:

$$\begin{aligned} k_x &= \pi n_x / L \quad (n_x = 1, 2, \dots), \\ k_y &= \pi n_y / L \quad (n_y = 1, 2, \dots), \\ k_z &= \pi n_z / L \quad (n_z = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

Числа n_x, n_y, n_z пробегает все возможные значения независимо. Подсчет числа мод сводится к определению числа разных троек (n_x, n_y, n_z) , или, к подсчету числа точек, декартовы координаты которых равны (n_x, n_y, n_z) . Число этих точек в объеме с длинами сторон $\Delta n_x, \Delta n_y$ и Δn_z равно $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$. Значит, число мод, соответствующее этим числам,

$$dN = \Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z = (L^3 / \pi^3) dk_x dk_y dk_z \quad (118)$$

где $\Delta n_x = (L/\pi)dk_x$ и т.д. В правой части (61) написаны дифференциалы dk_x, dk_y, dk_z , т.к. $L \gg \lambda$.

Для подсчета dN удобнее перейти к сферическим координатам пространства волновых чисел k_x, k_y, k_z , принимая во внимание, что они имеют положительное значение (в части $1/8$ сферы). Это означает, что в (61) надо положить $dk_x dk_y dk_z = (4\pi/8)k^2 dk$. В резуль-

тате для числа мод в интервале волновых чисел от k до $k + dk$ из (118) получаем $dN = \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3} k^2 dk$.

Из (117) следует, что $k^2 dk = (1/v^3) \omega^2 d\omega$. Тогда число мод с частотой колебаний между ω и $\omega + d\omega$: $dN = \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3 v^3} \omega^2 d\omega$.

Формула справедлива для каждой из поперечных мод. Обозначив скорости продольной и поперечной мод соответственно $v_{пр}$ и $v_{пн}$ и полагая, что в изотропном случае скорости поперечных мод одинаковы, то:

$$dN = \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{v_{пр}^3} + \frac{2}{v_{пн}^3} \right) \omega^2 d\omega = \frac{12\pi L^3}{(2\pi)^3 \langle v \rangle^3} \omega^2 d\omega, \quad (119)$$

при $\frac{1}{v_{пр}^3} + \frac{2}{v_{пн}^3} = \frac{3}{\langle v \rangle^3}$, где $\langle v \rangle$ - средняя скорость звука.

Полная энергия всех мод колебаний с учетом (108) и (119):

$$U = \int_0^\infty \langle E \rangle dN = \frac{12\pi L^3}{(2\pi)^3 \langle v \rangle^3} \int_0^\infty \frac{\hbar \omega \omega^2 d\omega}{e^{kT} - 1}.$$

После замены переменной $\xi = \hbar \omega / kT$ и простых преобразований имеем:

$$U = \frac{12\pi L^3 \hbar}{(2\pi)^3 \langle v \rangle^3} \left(\frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}, \quad (120)$$

где табличный интеграл равен $\pi^4/15$. Это позволяет определить зависимость теплоемкости $C_V(T)$: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V} \propto T^3$.

Полученную на основе дисперсионного соотношения формулу (119) применим для частотного диапазона $0 - \omega_{\max}$, где ω_{\max} определим из равенства полного числа мод максимальному числу

МОД

$3N_A$:

$$3N_A = \int_0^{N_{\text{макс}}} dN = \frac{12\pi L^3}{(2\pi)^3 \langle v \rangle^3} \int_0^{\omega_{\text{макс}}} \omega^2 d\omega = \frac{4\pi L^3 \omega_{\text{макс}}^3}{(2\pi)^3 \langle v \rangle^3},$$

откуда $\frac{3N_A}{\omega_{\text{макс}}^3} = \frac{L^3}{2\pi^2 \langle v \rangle^3}$, где максимальную частоту ($\omega_{\text{макс}} = \omega_D$)

выражают через температуру Дебая Θ_D : $\hbar\omega_{\text{макс}} = k\Theta_D$. После замен в формуле (120) и простых преобразований:

$$U = 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \frac{\Theta_D}{T} \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1}.$$

При $T \gg \Theta_D$ величина $\xi \rightarrow 0$, и $e^\xi \approx 1 + \xi$, поэтому формула примет вид

$$U = 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \xi^2 d\xi = 3RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \left(\frac{\Theta_D}{T} \right)^3 = 3RT,$$

а $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 3R$ в соответствии с законом Дюлонга и Пти.

$$\text{При } T \ll \Theta_D: \quad U = 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 d\xi}{e^\xi - 1} = 9RT \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3 \frac{\pi^4}{15}.$$

Тогда теплоемкость в расчетной форме:

$C_V = 233R(T/\Theta_D)^3$. Свойства материалов учитываются значением

температуры Дебая Θ_D , а кривая теплоемкости – функции отношения T/Θ_D является универсальной (рис. 95). Обычно температура Дебая лежит в пределах от 100 до 1000 К: для меди она равна 340 К, а для алмаза – около 2000 К.

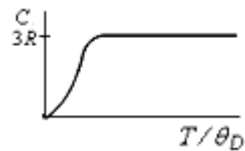


Рис. 95.

Элементы квантовой статистики

Квантовые статистики. Бозоны и фермионы. Вспомним, что число микросостояний различных частиц подчиняется распределению Максвелла-Больцмана (см. с. 47). Случаи неразличимых частиц, когда при обмене их местами физическая ситуация не меняется, рассматриваются моделями Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна.

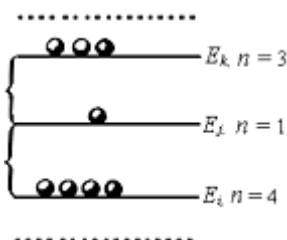


Рис. 96.

Пусть имеется большое число n частиц, каждая из которых может иметь дискретный набор равновероятных значений энергии E_i . Обозначим число частиц n_i с энергией E_i (рис. 96).

Полная энергия E всех частиц и общее число n частиц постоянны:

$$E = \sum_i n_i E_i = \text{const} \quad (121)$$

$$n = \sum_i n_i = \text{const} \quad (122)$$

Из теории размещений (прил. 13) известно число способов, которыми можно выбрать n_i разных частиц из n разных частиц:

$$\Gamma_i = \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!} \quad (123)$$

Необходимо найти число способов, которыми частицы могут быть распределены по E_i энергиям. Полное число Γ независимых микросостояний, реализующих распределение частиц по энергиям E_i , равно произведению числа микросостояний (123), в которых n_i

частиц находятся на уровне с энергией E_i : $\Gamma = \prod_i \Gamma_i = \prod_i \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!}$,

где i пробегает значения, соответствующие всем доступным для частиц энергиям. Но энергия не единственная характеристика, и неразличимые частицы каждой данной энергии могут находиться, а потому и распределяться по разным квантовым состояниям. В итоге образуется распределение по энергиям.

Распределение Ферми – Дирака. Представим разные энергетические уровни большими ящиками, а разные квантовые состояния в пределах одной и той же энергии – малыми ящиками внутри больших (рис. 97). Число больших ящиков равно числу i уровней энергии E_i , а число малых ящиков в большом i -м ящике обозначим g_i . Частицы в форме неразличимых шаров размещаются по малым ящикам. В модели Ферми – Дирака в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы, поэтому в каждый малый ящик можно поместить лишь один шар. В каждом большом ящике может находиться n_i шаров, при $n_i \leq g_i$. Число способов размещения n_i неразличимых шаров по g_i местам: $\Gamma_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$. В каждом

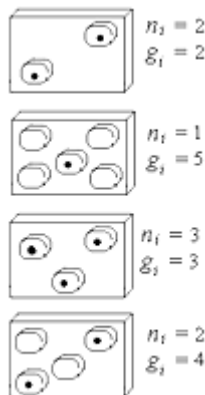


Рис. 97.

из больших ящиков микросостояния независимы, и не играет роли, какие из n частиц находятся в каком-то ящике. Поэтому полное число состояний в совокупности всех больших ящиков равно произведению числа микросостояний в отдельных больших ящиках: $\Gamma = \prod_i \Gamma_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$, где i в произведении учитывает все большие ящики.

Наиболее вероятное равновесное состояние требует максимума числа Γ . При анализе удобно исследовать не Γ , а $\ln \Gamma$. Тогда:

$$\ln \Gamma = \sum_i \ln \Gamma_i = \sum_i \ln \left[\frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \right].$$

Экстремум находится методом неопределенных множителей Лагранжа, учитывающих краевые условия (см. (121) и (122)). Зависимость Γ от этих условий неизвестна, поэтому вводятся множители $(-\beta)$ и $(-\alpha)$ в равенства (121) и (122). Вариации около экстремальной точки и постоянных значений должны быть равны нулю. Получаем:

$$\delta \ln \Gamma = \sum_i \delta \ln \Gamma_i = \sum_i \frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} \delta n_i = 0, \quad -\beta \delta E = \sum_i (-\beta E_i \delta n_i) = 0,$$

$$-\alpha \delta n = \sum_i (-\alpha \delta n_i) = 0.$$

Очевидно, что $\delta \ln \Gamma - \beta \delta E - \alpha \delta n = \sum_i [(\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} - \beta E_i - \alpha) \delta n_i] = 0$

и $\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} - \beta E_i - \alpha = 0$, где $\Gamma_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$.

С помощью приближения Стирлинга (прил. 14) имеем:

$$\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} = \frac{\partial}{\partial n_i} \left[\ln \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \right] = \frac{\partial}{\partial n_i} [\ln g_i! - \ln n_i! - \ln (g_i - n_i)!] = -\frac{\partial}{\partial n_i} [\ln n_i! + \ln (g_i - n_i)!]$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} = -\frac{\partial}{\partial n_i} [n_i \ln n_i - n_i + (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) - (g_i - n_i)],$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} = -[\ln n_i + 1 - 1 + (-1) \ln (g_i - n_i) + \frac{(g_i - n_i)}{(g_i - n_i)} (-1) + 1], \text{ или:}$$

$$\frac{\partial \ln \Gamma_i}{\partial n_i} = \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - 1 \right).$$

. Тогда с учетом независимости вариаций δn_i получаем:

$$\ln \left(\frac{g_i}{n_i} - 1 \right) - \beta E_i - \alpha = 0 \quad (124)$$

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta E_i) + 1} \quad (125)$$

где n_i/g_i – число частиц с энергией E_i , приходящихся на одно квантовое состояние. Формула (125) называется *распределением Ферми – Дирака*.

«Конкуренция» между частицами при занятии состояний высока и характерна для фермионов – частиц с полуцелым спином.

Распределение Бозе – Эйнштейна. Используем модель больших и малых ящиков и шаров, но теперь *в каждом квантовом состоянии может находиться произвольное число неразличимых частиц*. Частица может занять состояние независимо от того, заня-

то оно другими частицами или свободно, что характерно для бозонов – частиц с целым спином.

Распределение шаров n_i по малым ящикам g_i проведем, представляя все малые ящики g_i и шары n_i т $n_i + g_i$ различимыми предметами. Берем любое конкретное распределение $n_i + g_i$ предметов. В ящик g_i помещаем все шары n_i , которые в этом распределении расположены между ним и следующим за ним ящиком. В последний в данном распределении ящик помещаем все шары, которые расположены после него, плюс все шары, которые в начале этого распределения расположены перед первым ящиком. Ясно, что таким способом мы все шары n_i поместим в ящики g_i , а, перебрав всевозможные распределения, проведем всевозможные способы распределения шаров n_i по ящикам g_i , считая шары и ящики различимыми предметами и принимая, что порядок следования предметов существен. Число таких распределений равно $(n_i + g_i)$. Для распределения неразличимых шаров порядок ящиков несуществен, поэтому Γ_i различных распределений n_i шаров по g_i ящикам определяется в форме $\Gamma_i = \frac{(n_i + g_i)!}{n_i!g_i!}$.

$$\text{Общее число микросостояний: } \Gamma = \prod_i \Gamma_i = \prod_i \frac{(n_i + g_i)!}{n_i!g_i!}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны вышеприведенным при выводе формул (124) и (125), но с иным результатом:

$$\ln\left(\frac{g_i}{n_i} + 1\right) - \beta E_i - \alpha = 0 \text{ и}$$

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta E_i) - 1}. \quad (126)$$

Формула (126) называется *распределением Бозе – Эйнштейна*.

Если число состояний много больше числа частиц ($n_i/g_i \ll 1$), то в знаменателе правой части распределений (125 и 126) можно пренебречь единицей и при $A = e^{-\alpha}$ получаем общую формулу $n_i = A g_i e^{-\beta E_i}$ распределений Ферми – Дирака, Бозе – Эйнштейна и Максвелла – Больцмана.

Электронный газ. Уровень и энергия Ферми. Число свободных электронов в металлах близко к соотношению: 1 электрон/атом. Они слабо взаимодействуют в объеме металла и движутся без существенного ограничения направлений импульсов. Совокупность таких электронов называют *электронным газом*.

Перепишем распределение (125) в форме:

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{1}{\exp[(E_i - \mu)/kT] + 1}.$$

Здесь $\mu = -\alpha kT$ и при $E_i < \mu$ и $T \rightarrow 0$ получим $\exp[(E_i - \mu)/kT] \rightarrow 0$ и $n_i/g_i \rightarrow 1$, т.е. в каждом квантовом состоянии с энергией меньше μ будет находиться по одной частице. При $E_i > \mu$ и при $T \rightarrow 0$, получим $\exp[(E_i - \mu)/kT] \rightarrow \infty$ и $n_i/g_i \rightarrow 0$, т.е.

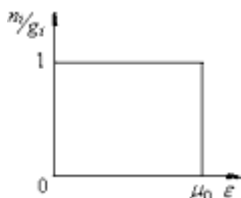


Рис. 98.

такие квантовые состояния свободны. Вид распределения Ферми – Дирака при $T \rightarrow 0$ показан на рис. 98. Такое распределение требует минимальной полной энергии при соблюдении принципа Паули. Это означает, что электроны заполняют квантовые состояния с самого нижнего энергетического уровня, последовательно занимая квантовые состояния: по одному – на

состояние. Последний электрон занимает уровень с максимальной энергией – уровень Ферми с энергией Ферми (μ), при которой $E_i = \mu$ и распределение Ферми – Дирака принимает значение $1/2$.

Зонная теория

Обменное взаимодействие. Волновая функция внешних электронов атома при увеличении расстояния от центра атома убывает монотонно быстро. При сближении атомов электронные облака внешних электронов деформируются и частично перекрываются, образуя область пространства «смешанной плотности заряда», в которой обе ψ -функции отличны от нуля (рис. 99 б). При перекрытии волновых функций электронов возникают добавочные силы и энергии: при параллельных спинах – силы отталкивания при положительной добавочной (сверх кулоновской) энергии взаимодей-

ствия (обменной энергии); при антипараллельных спинах – силы притяжения при отрицательной обменной энергии. В направлении убыли энергии электроны стремятся занимать состояния попарно с противоположными спинами. Именно поэтому, химически активными («валентными») являются не имеющие парных по спину электроны (не насыщенные по спину).

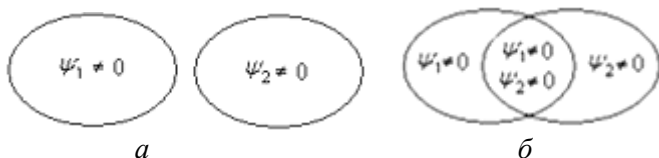


Рис. 99.

Два атома лития могут образовать молекулу, объединяя электроны L -слоя в одну оболочку. Но K -оболочки будут отталкиваться, т.к. оба электрона описываются одинаковыми квантовыми числами (n, l, m), и оболочка насыщена по спину. По этой же причине атомы гелия не соединяются ни друг с другом, ни с другими атомами.

Энергетические зоны в кристаллах. Обозначим через E_0 энергию электронных конфигураций в двух независимых атомах. При сближении атомов, в зависимости от взаимной ориентации спинов, дополнительная обменная энергия может иметь разные знаки, поэтому уровень E_0 расщепляется на два (рис. 100).

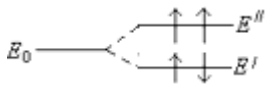


Рис. 100.

Для пояснения рассмотрим механическую аналогию упругой натянутой закрепленной по концам струны с напаянным посередине шариком массой m (рис. 101 а). При смещении шарика на малое расстояние x он будет совершать гармонические колебания с собственной частотой ν_0 .

На такой же струне на тех же расстояниях поместим два одинаковых шарика той же массы m . Система из двух связанных шариков может совершать два типа независимых колебаний с разными частотами: симметричное колебание, когда оба шарика движутся одинаково (рис. 101 б), и антисимметричное колебание (рис. 101 в). Наименьшей частотой обладает симметричное колебание.

Колебания системы из n одинаковых шариков на струне расщепляются на n типов собственных колебаний с вариационным рядом частот, по порядку величин близким к частоте собственных колебаний ν_0 .

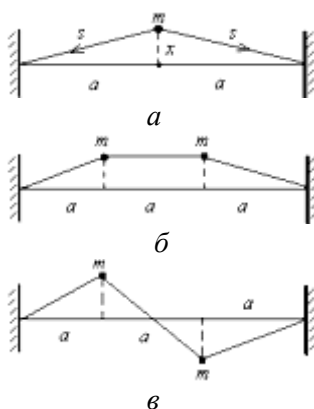


Рис. 101.

При сближении атомов водорода внешние электроны образуют систему с единой (системной) волновой функцией, удовлетворяющей принципу запрета Паули. При объединении n одинаковых атомов в молекулу или кристалл происходит расщепление энергетических уровней на группы (энергетические зоны) из n близких уровней (см. рис. 100).

Атом Li имеет K -оболочку из двух s -электронов и один s -электрон на внешней L -оболочке, которая содержит несколько возможных разных состояний (s и p). При образовании молекулы Li_2 эти состояния (энергетические вакансии) соответственно объединяются. Число объединяющихся s -состояний в каждом атоме равно двум (с учетом ориентации спина). Значит, при образовании Li_2 возникают две энергетические зоны s и p , энергетические уровни которых расщепляются на два подуровня (рис. 102). Каждый из подуровней может заполняться двумя электронами с антипараллельными спинами. В молекуле лития Li_2 в общей электронной оболочке заняты лишь два s -состояния из четырех возможных состояний нижней зоны, а p -уровни полностью свободны (как у одиночных атомов).

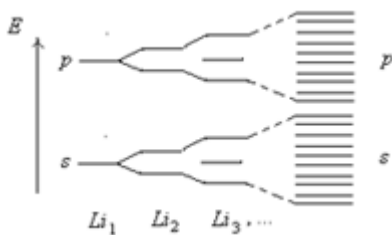


Рис. 102.

При соединении трех атомов три их валентных электрона сольются в одну электронную оболочку, близкие уровни которой, как и в случае двух атомов, будут заполнены имеющимися электронами лишь частично (см. рис. 102). То же произойдет при

дальнейшем увеличении числа атомов в цепочке и, далее, при со-

единении таких цепочек в единую трехмерную решетку. Средняя энергия связи атома лития в молекуле составляет 0,56 эВ, а в кристалле металлического лития в три раза больше из-за взаимодействия с соседними атомами. Любой кусок металла можно рассматривать как гигантскую молекулу с нелокализованными связями, т.к. электроны обладают подвижностью во всей толще металла.

Упорядоченно расположенные в узлах кристаллической решетки ядра атомов по модели Кронига-Пенни создают для движущихся электронов кристалла упорядоченную систему потенциальных ям (рис. 103). При наличии N потенциальных ям каждый энергетический

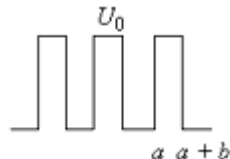


Рис.103.

уровень электрона расщепляется на N подуровней (энергетических вакансий). Если атом находится в кристалле, содержащем N атомов, каждое квантовое состояние изолированного атома расщепляется на N квантовых состояний. Тогда каждый энергетический уровень (изолированного атома) превращается в зону энергетических уровней кристалла. С учетом ориентировки спина в N квантовых состояниях зоны могут находиться не более $2N$ электронов (рис. 104).

Классификация твердых тел на проводники и диэлектрики. Самая высоко лежащая из полностью заполненных электронами зон называется основной (валентной). Следующая зона проводимости может быть частично заполненной электронами, или не содержать их совсем. Валентной зоной кристаллической решетки натрия (рис. 104) является $2p$ -зона. Она полностью заполнена. На уровне $3s$ у натрия имеется один электрон. В $3s$ -зоне кристалла натрия может быть $3N$ электронов, если N – число атомов натрия в кристалле. Но число электронов в этой зоне равно N , и она не полностью заполнена. Значит, это зона проводимости.

Пусть зона проводимости не содержит ни одного



Рис. 104.

электрона. Подействуем внешним электрическим полем на электроны основной зоны и других нижних зон, все энергетические уровни которых заполнены электронами. Принцип Паули запрещает электрону перейти в занятое другим электроном квантовое состояние, и, несмотря на наличие электрического поля, переходы электронов в основной зоне отсутствуют, никакой асимметрии распределения скоростей электрона не возникает и не возникает электрического тока. Единственная остающаяся возможность – переходы электронов с уровней основной зоны на уровни зоны проводимости. Но если разность энергий ΔW между зоной проводимости и основной зоны значительна (см. рис. 105), такой переход в не очень



Рис. 105

сильных электрических полях невозможен. Внешнее электрическое поле не вызывает появления электрического тока. Диэлектриками являются кристаллы, у которых отсутствуют электроны в зоне проводимости. Электропроводимость идеальных диэлектриков в не очень сильных полях близка к нулю

($10^{-12} \div 10^{-20}$ (Ом·м)⁻¹).

Пусть зона проводимости частично заполнена. Под влиянием внешнего электрического поля электроны зоны проводимости имеют возможность переходить на другие уровни той же зоны, так как расстояние между разными подуровнями одной и той же зоны мало. При этих переходах образуется преимущественное направление ориентации импульсов электронов, соответствующая появлению электрического тока. Проводники – кристаллы, у которых в зоне проводимости имеются электроны.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимости. Полупроводниками называют кристаллы, величина проводимости которых лежит в интервале ($10^4 \div 10^{-7}$) (Ом·м)⁻¹ между проводимостью проводников и диэлектриков.

Пусть энергетический интервал ΔW между дном зоны проводимости и верхом основной зоны невелик (см. рис. 105), а в зоне проводимости электроны отсутствуют. Этот кристалл должен быть

диэлектриком. Однако ввиду малости энергетического интервала между зонами часть электронов под влиянием теплового движения и перераспределения энергии может быть переведена из основной зоны в зону проводимости, и рассматриваемый кристалл поведет себя как проводник. Проводники, у которых электропроводность определяется таким механизмом, называют естественными полупроводниками (германий, кремний). Электропроводность будет тем больше, чем больше электронов переведено в зону проводимости. Это число растет с температурой, и электропроводность естественных полупроводников возрастает с температурой.

В результате перевода электронов в зону проводимости на их местах в основной зоне появляются незаполненные вакансии («дырки»). Электроны в пределах основной зоны обретают возможность перераспределять импульсы. Поэтому при наличии внешнего электрического поля возникает асимметрия распределения импульсов электронов в основной зоне и электрический ток. Перераспределение электронов в основной зоне сопровождается соответствующим перераспределением дырок, как положительно заряженных частиц и с возникновением дырочной проводимости. Естественные полупроводники обладают собственной электронной и дырочной проводимостью.

В реальной решетке кристалла всегда имеются локальные дефекты: отсутствие ионов или атомов в некоторых узлах решетки; наличие лишних атомов между узлами решетки; некоторые узлы решетки заняты атомами иного вещества (примеси). Пространственная периодичность распределения потенциала нарушается вблизи каждого дефекта, вследствие чего изменяется состояние электронов. В областях отсутствия дефектов энергии группируются в зоны идеального кристалла, и соответствующие состояния электронов называют зонными состояниями. В области, близкой к дефекту, распределение вероятностей локализовано вблизи дефекта в очень малой области пространства: электроны не в состоянии покинуть эту область своей локализации. Такого рода состояния называют локальными. Локальные уровни энергии $W_{\text{лок}}$ лежат в области запрещенных для идеального кристалла значений энергии – между энергетическими зонами идеального кристалла (рис. 106).

Число локальных уровней равно числу дефектов кристалла. При этом общее число состояний не изменяется, т.е. сумма числа зонных и локальных состояний равна числу состояний идеального кристалла. Поэтому локальные состояния как бы отщепляются от какой-либо зоны и могут быть или занятыми электронами, или свободными. В обоих случаях эти локальные уровни определяют возникновение электропроводности. При низких температурах преобладает примесная проводимость. При повышении температуры



Рис. 106.

концентрация примесных носителей тока быстро достигает насыщения. При высоких температурах преобладает собственная проводимость, обусловленная переходом электронов непосредственно из валентной зоны в зону проводимости.

Пусть локальные уровни вместе с соответствующими электронами отщепились от основной зоны и находятся между основной зоной и зоной проводимости. Энергетические расстояния между дном зоны проводимости и локальными уровнями меньше, чем расстояние между дном зоны проводимости и верхом основной зоны. С таких донорных локальных уровней электронам легче перейти в зону проводимости. Соответствующий кристалл ведет себя как *n*-полупроводник с электронным током зоны проводимости.

Если локальные уровни отщепились от пустой зоны проводимости диэлектрика, то они свободны. Однако расстояние между локальными и верхними уровнями основной зоны меньше, чем расстояние между нижними уровнями зоны проводимости и верхними уровнями основной зоны, что делает возможными переходы электронов из основной зоны на локальные акцепторные уровни с образованием в основной зоне дырок. Эти дырки обуславливают проводимость кристалла за счет перераспределения импульсов электронов (и дырок) в основной зоне. Такой кристалл обладает дырочной проводимостью. Электронные полупроводники, в которых ток осуществляется движением дырок, называют *p*-полупроводниками.

Полупроводниковые диоды. В системе контакта двух металлов с разной энергией Ферми, происходит изменение относительного расположения энергетических зон. При неравновесном состоянии поток электронов устремится от металла с более высоким уровнем Ферми к металлу с более низким уровнем Ферми: от металла 2 к металлу 1 (рис. 107 а). Перераспределение электронов прекратится, когда уровни Ферми сравняются. В металле 2 будет нехватка электронов, а в металле 1 – избыток; возникнет разность потенциалов (рис. 107 б). Если контактный слой создавать на границе раздела полупроводников с разным типом проводимости, то эффект усилится. Границу между электронной и дырочной областями называют электронно-дырочным *n-p*-переходом.

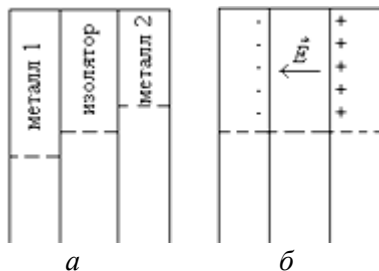


Рис. 107.

Электроны стремятся диффундировать из электронной области в дырочную, а дырки – из дырочной области в электронную. В

результате этой диффузии дырочная область заряжается отрицательно, а электронная – положительно (рис. 108). Электронно-дырочный переход обретает внутреннюю разность потенциалов и является полупроводниковым выпрямителем (диодом).

Вольтамперная характеристика полупроводникового диода (рис. 109) показывает, что ток насыщения $I_{\text{нас}}$ достигается при внешнем поле, совпадающем с внутренним полем электронно-дырочного перехода. В этом случае высота потенциального барьера между электронной и дырочной областями увеличивается, и поток электронов, проникающих через потенциальный барьер из электронной области в дырочную, уменьшается. Уже при внешнем потенциале нескольких десятых вольта поток электронов из электронной области в дырочную практически прекращается. Поток электронов из дырочной области в электронную область практически не меняется, так как для него отсутствует потенциальный барьер. Всякий электрон, оказывающийся в результате теплового движения вблизи запирающего слоя, увлекается им в электронную область.

9. ОСНОВЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА

Радиоактивность

Альфа-, бета- и гамма-излучение. Изучая люминесценцию веществ, А. Беккерель в 1896 г. обнаружил, что соли урана излучают и без предварительного их освещения. Излучение оказалось большой проникающей силы, способной воздействовать на завернутую в черную бумагу фотопластинку. Проведя разделение компонент урановой руды в 1898 г. Мария Склодовская-Кюри и Пьер Кюри установили, что кроме урана излучают и имеющиеся в нем примеси. Были выделены два элемента (радий и полоний), излучающие в миллионы раз интенсивнее, чем сам уран. В магнитном поле Резерфорд разделил радиоактивные излучения на три компонента, получившие названия: α (положительно заряженных), β (отрицательно заряженных) и γ (нейтральных) лучей:

При ударе об экран из сернистого цинка α -частица вызывает «сцинтилляцию». Фиксируя их (ΔN) в единицу времени, определили число α -частиц, испускаемых одним граммом радия в выделенном телесном угле $\Delta\omega$:
$$a = \frac{\Delta N}{\Delta t} \frac{4\pi}{\Delta\omega} \approx 3,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}.$$

Измерение суммарного заряда, приходящего на экран за 1 с позволило определить его отношение с их количеством, определив заряд одной α -частицы как положительный, равный по величине двум зарядам электрона. По отклонению α -частиц в магнитном поле определили отношение заряда к массе. Рассчитанная масса α -частицы оказалась равна массе ядра атома гелия.

В воздухе при нормальных условиях испускаемые радием α -частицы создают около $1,3 \cdot 10^5$ пар ионов. Средняя энергия, теряемая α -частицей за каждый акт ионизации, составляет 33 эВ. В веществе, α -частица растрчивает энергию и пройдя пробег R , останавливается, захватывает два электрона, превращаясь в атом гелия. Величина R обратно пропорциональна числу встречных атомов (плотности вещества), и для полной остановки α -частиц достаточно на их пути поставить металлическую фольгу толщиной до 0,1 мм.

Измерения удельного заряда показали, что β -частицы являются электронами больших скоростей (до $0,999c$). При прохождении через вещество β -частицы рассеиваются на значительные углы, обретая извилистые траектории. Благодаря большой скорости β -частица пролетает мимо атома вещества за время в 10 – 15 раз более короткое, чем α -частица той же энергии. При сокращении времени взаимодействия со встречными атомами уменьшается вероятность ионизации. Поэтому число пар ионов, образуемых β -частицей на единице пути в воздухе, в сотни раз меньше удельной ионизации от α -частиц, а толщина слоя проникновения в десятки раз превышает пробег α -частиц.

Отсутствие отклонения в магнитном поле и огромная проникающая способность γ -лучей, задерживаемых лишь сантиметровыми толщинами свинца, указывало на аналогию с рентгеновскими. Однако, при дифракции γ -лучей на кристаллических решетках их длина волны оказалась порядка 1 пм, т.е. в десятки раз меньше, чем у жестких рентгеновских лучей.

Законы радиоактивного распада. Энергия α -, β -частиц и γ -фотонов достигает 10 МэВ, превышая в 10^6 раз энергии связи внешних электронов (6 – 10 эВ) и химических превращений (2 – 5 эВ), и поэтому не может быть связана со структурой электронных оболочек. Покидая ядро, α -, β - и γ -частицы являются продуктами его радиоактивного превращения. Поскольку α - и β -частицы заряжены, то при их вылете меняются заряд и атомный номер ядра. Ядро обретает качество иного химического элемента. При α -распаде «материнское» ядро X испускает α -частицу, превращаясь в «дочернее» ядро элемента Y . С учетом сохранения заряда и массы реакция записывается в форме: $X_Z^A \rightarrow Y_{Z-2}^{A-4} + \alpha_2^4$. Дочерний элемент Y имеет атомный номер на две единицы меньше, и сдвинут относительно X на две клетки влево по таблице Менделеева.

Уравнение β -распада: $X_Z^A \rightarrow Y_{Z+1}^A + e_{-1}^0$. При испускании электрона заряд и номер (Z) дочернего элемента Y увеличиваются на единицу, и он сдвигается относительно X на одну клетку вправо по таблице Менделеева с сохранением массового числа A .

Радиоактивность – самопроизвольное превращение одних атомных ядер в другие, сопровождаемое испусканием элементарных частиц. Естественный процесс радиоактивного распада ядер протекает самопроизвольно с постоянной скоростью, характеризуемой периодом полураспада T , в течение которого половина наличных ядер испытывает радиоактивный распад. Например, период полураспада полония равен 140 дням. Значит, от 1 г полония через 140 дней останется 0,5 г. От 0,5 г полония останется половина (0,25 г) ровно через 140 дней. Через 560 дней от исходного грамма останется 1/16 г полония, которые абсолютно ничем не отличаются от 1/16 г исходного грамма полония. Тогда при неизменности свойств радиоактивных ядер во времени число распадающихся ядер пропорционально числу наличных.

Обозначим число ядер данного типа в момент t через $N(t)$. Убыль ядер dN за время dt пропорциональна числу наличных ядер N , т.е.:

$$-dN = \lambda N dt \quad (127)$$

где постоянная величина λ названа постоянной распада.

Перепишем уравнение (127) в виде $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$ и проинтегрируем обе части $\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$ с решением $\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$ или

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (128)$$

где N_0 – начальное число распадающихся атомов, т.е. N при $t = 0$.

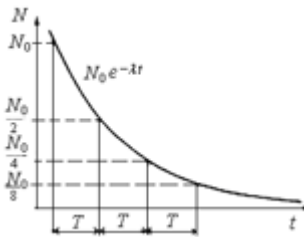


Рис. 110.

Число $N(t)$ распадающихся ядер данного сорта убывает со временем по экспоненциальному закону (рис. 110). Число распадов в единицу времени называется активностью препарата:

$$A = -dN / dt = \lambda N \quad (129)$$

Единица активности 1 Кюри = $3,7 \cdot 10^{10}$ распад/с и определена активностью 1 г радия без учета продуктов его распада. Из (128) и

(129) следует, что активность препарата убывает со временем соответственно убыли числа не распавшихся ядер.

Найдем связь постоянной распада λ с периодом полураспада T . Из N_0 наличных ядер через время T остается половина, следовательно: $N(T) = N_0 e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} N_0$, и $e^{-\lambda T} = \frac{1}{2}$, или:

$$T = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda} \quad (130)$$

Характеристикой скорости распада является среднее время жизни τ . Количество ядер, испытывающих превращение за промежуток времени от t до $t + dt$ определится модулем выражения (127): $dN(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$. Если время жизни каждого из этих ядер равно t , то сумма времен жизни всех изменившихся ядер получается интегрированием выражения $t dN(t)$. Среднее время жизни радиоактивного ядра $t dN(t)/N_0$. Проинтегрировав по всем t (от 0 до ∞), получим:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} t \lambda N_0 e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda$$

Интеграл берется по частям при замене переменной $x = \lambda t$ (прил. 15). Тогда величина λ равна вероятности распада одного ядра за единицу времени. Уравнение (128) примет вид $N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, а если в него ввести T , то $N = N_0 2^{-\frac{t}{T}}$. Отсюда с учетом (130) следует: $T = \ln 2 \cdot \tau \approx 0,693 \cdot \tau$.

Обозначим для материнских ядер X_1 постоянную распада λ_1 ; дочерних $X_2 - \lambda_2$. Согласно уравнению (72) убыль первых за dt будет определяться $-dN_1 = \lambda_1 N_1 dt$ и будет в точности равна прибыли дочерних ядер X_2 . Обозначая прибыль ядер элемента X_2 через $d^{(+)}N_2$, имеем: $d^{(+)}N_2 = \lambda_1 N_1 dt$. С другой стороны, дочерние сами будут распадаться, причем убыль $d^{(-)}N_2$ определяется постоянной распада λ_2 и $d^{(-)}N_2 = \lambda_2 N_2 dt$. Равновесие наступит, когда прибыль и убыль сравня-

ются, т. е. когда будет иметь место соотношение $d^{(+)}N_2 = d^{(-)}N_2$, т.е. $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2$.

Если элемент X_2 в свою очередь распадается, порождая элемент X_3 , элемент $X_3 \rightarrow X_4$ и т. д., то равновесное соотношение между числами ядер N_1, N_2, N_3, \dots определится аналогично: $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2, \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3, \lambda_3 N_3 = \lambda_4 N_4, \dots$, то есть когда $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3 = \dots = \lambda_k N_k$.

При равновесии активности $A_i = \lambda_i N_i$ всех исходных и промежуточных продуктов одинаковы, а общая активность препарата равна активности исходного продукта, умноженной на число наличных звеньев. Конечным продуктом цепочки радиоактивных превращений является устойчивый изотоп, содержание которого нарастает по мере распада исходного радиоактивного элемента.

Ядерные реакции

Модель атомного ядра. Нейтрино. Проникнуть внутрь ядра позволили α -частицы. Резерфорд в 1919 г. впервые осуществил искусственное превращение ядер азота, бомбардируя их α -частицами с энергией 7,58 МэВ. При поглощении α -частиц ядрами атомов азота, возникали атомы изотопа кислорода и быстрые протоны с энергией 6 МэВ.

При обстреле бериллия α -частицами было зафиксировано новое сильно проникающее излучение. Чэдвик назвал незаряженных частицы с массой близкой к массе протонов нейтронами. Нейтроны не имеют электрического заряда и электрически не взаимодействуют ни с электронной оболочкой встречных атомов, ни с атомными ядрами, что и обусловило и высокую проникающую способность, и возможность их содержания в ядрах. Д.Д. Иваненко и Е.Н. Гапон высказали гипотезу, что ядра атомов состоят только из протонов и нейтронов. По этой модели число нуклонов A , число протонов Z , а число нейтронов $N = (A - Z)$, и изотопы отличаются числом нейтронов в ядре. Такая протонно-нейтронная модель ядра могла быть принята, если б смогла объяснить изменение состава ядра при β -распаде.

Все три частицы (нейтрон, протон и электрон) обладают одинаковыми по величине спиновыми моментами, равными $\hbar/2$. При превращении нейтрона со спином $\hbar/2$ в две частицы (протон и электрон) суммарный момент последних может равняться либо \hbar (если их спины параллельны), либо нулю (если они антипараллельны). Чтобы выполнялся закон сохранения момента количества движения, В. Паули предположил, что кроме электрона при β -распаде вылетает третья незаряженная частица очень малой массы со спином $\hbar/2$, названная позже нейтрино.

Превращение протона в нейтрон по реакции $p_1^1 \rightarrow n_0^1 + e_{+1}^0 + \nu_0^0$, где ν_0^0 – нейтрино, позитрон e_{+1}^0 – частица с массой покоя электрона, спином $\hbar/2$ и несущая положительный электрический заряд $+e$.

Ядерные силы. Масса и энергия связи. Измерения масс ядер, проведенные отклонением пучков ионов в магнитном поле, показали, что масса ядер M_Z^A всегда меньше сумме масс всех составляющих их частиц. Если бы протоны и нейтроны не взаимодействовали, масса ядра должна была бы равняться: $M_0 = Zm_{0p} + (A - Z)m_{0n} = Am_{0n} - Z(m_{0n} - m_{0p})$.

Устойчивость ядер указывает, что между нуклонами действуют короткодействующие силы сильного взаимодействия, вне зависимости от того, обладают частицы электрическим зарядом или нет. Для расщепления ядра на составляющие нуклоны нужно увеличить его массу, компенсируя дефект массы ядра $\Delta M = M_0 - M_Z^A > 0$, а, следовательно, и энергию связи на величину $\Delta E = \Delta Mc^2$. При соединении нуклонов в ядро энергия ΔE выделяется в виде квантов излучения, уносящих с собой массу ΔM .

При превращении атомных ядер энергия связи, приходящаяся в среднем на один нуклон, меняется. Это означает, что возможно получение атомной энергии за счет двух типов превращений: при синтезе легких ядер и при делении тяжелых ядер.

Ядерные реакции. Ружейный патрон обладает запасом энергии, но может находиться в равновесии сколь угодно долго. Чтобы произвести выстрел, необходимо произвести работу, нарушающую

это равновесие (удар бойка о капсуль). Аналогична ситуация с тяжелым ядром. Оно претерпит деление, если нарушить его равновесие. Минимальную энергию, необходимую для деления ядра, называют энергией активации. Часть энергии идет на «нагревание» ядра – сообщение отдельным нуклонам добавочной энергии внутренних движений, другая часть идет на возбуждение степеней свободы, отвечающих коллективному движению частиц ядра, приводящему к его деформации. При деформации половинки ядра удаляются друг от друга, попадают в область кулоновского взаимодействия и отделяются, разлетаясь с огромными скоростями.

Известно, что процентное содержание нейтронов в устойчивых ядрах падает с уменьшением A . Но получившиеся при делении ядра, имеют содержание нейтронов, отвечающее исходному значению A . Следовательно, при новом примерно вдвое меньшем массовом числе, они перегружены нейтронами и выбрасывают («испаряют») по 1 – 2 нейтрона.

Цепная реакция деления ядер. Приблизившийся к ядру нейтрон, притягивается к нему ядерными силами. Произведенная этими силами работа, равна энергии связи нейтрона в ядре (около 7 МэВ). Если энергия активации образовавшегося ядра меньше этой величины (энергии связи поглотившегося нейтрона), то ее достаточно для деления ядра.

С ростом числа нуклонов в ядре (с ростом A) энергия связи убывает медленно, а энергия активации – быстро, поэтому ядра с необходимыми для деления свойствами существуют. Для практического использования необходимо, чтобы они были устойчивы, т.е. с большим периодом полураспада, например: U_{92}^{235} , Pu_{94}^{239} , U_{92}^{233} . При их делении источник нейтронов не требуется. Раз начавшаяся реакция может продолжаться до тех пор, пока делящиеся ядра генерируют поток нейтронов. Нейтроны, выделяющиеся при делении первых ядер, делят другие, отдающие большее число нейтронов, часть которых вызывает деление следующих, образуя *цепную реакцию*.

Уравнение баланса нейтронов. Пусть дано общее число нейтронов N в объеме V к моменту времени t , $(f + 1)$ – число нейтронов, выбрасываемых в среднем одним разделившимся ядром, τ –

среднее время от возникновения нового нейтрона до его последующего поглощения. На каждом звене цепи задается число образующихся fN ответвлений, а fN/τ – число новых нейтронов, возникающих в объеме в единицу времени.

Пусть число g образующихся нейтронов, поглощаемых неделяющимися ядрами примесей в ядерном горючем или ядрами накапливающихся продуктов деления. Число нейтронов, затрачиваемых на процессы обрыва цепей за ту же единицу времени, будет gN/τ .

Часть нейтронов выходит за время τ из объема V со скоростью $N/\tau = ND/D\tau = uN/D$, где u – средняя скорость ухода нейтронов, D – характерный линейный размер объема V (объема ядерного горючего).

Тогда, уравнение баланса нейтронов в объеме V примет вид:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{fN}{\tau} - \frac{gN}{\tau} - \frac{uN}{D} = \frac{f - g - \frac{u\tau}{D}}{\tau} N = \frac{K}{\tau} N. \quad (131)$$

Если величина $K = f - g - u\tau/D$ отрицательна, то вероятность разветвления (f) меньше вероятности обрыва цепей в объеме (g) и ухода нейтронов через поверхность ($u\tau/D$). Интегрируем уравнение

(131) и получаем: $N(t) = N_0 e^{-\frac{|K|}{\tau} t}$, т. е. число нейтронов, первоначально находившихся в объеме, непрерывно уменьшается, и цепная реакция затухает (рис. 111, кривая I). Скорость процесса убывает вдвое за время $T = \frac{\tau}{|K|} \ln 2 \approx \frac{0,693\tau}{|K|}$.

При $g > f$ цепная реакция не может поддерживаться при любых D . Если $g < f$, то условия затухания зависят только от D . Действительно, $K < 0$ при $\frac{u\tau}{D} > f - g$ и $D < \frac{u\tau}{f - g}$. Ве-

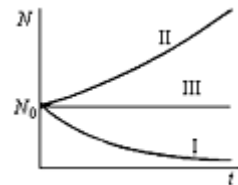


Рис. 111.

личина критического размера $D_K = u\tau/(f - g)$ зависит от свойств ядерного горючего, примесей и геометрической формы, т.е. от опущенных при анализе факторов, характеризующих отношение поверхности к объему. Если $D < D_K$, то цепная реакция затухает.

Время затухания растёт при $D \rightarrow D_K$:

$$T = \frac{\ln 2\tau}{\frac{v\tau}{D} - (f - g)} \approx \frac{0,7D\tau}{(f - g)(D_K - D)}$$

Если размер куска ядерного горючего превысит D_K , то $K > 0$ и

интегрирование уравнения (131) даёт зависимость $N(t) = N_0 e^{\frac{K}{\tau}t}$.

Количество нейтронов N и число производимых ими за единицу времени реакций деления экспоненциально растёт (см. рис. 111, кривая II). Время ускорения реакции вдвое:

$$T \approx \frac{0,7\tau}{K} = \frac{0,7D\tau}{(f - g)(D - D_K)}$$

и сколь мало ни будет начальное число нейтронов N_0 , начавшаяся цепная реакция будет неуправляемой. Именно такая реакция использована в атомных бомбах.

В ядерных реакторах в части управления, цепная реакция возможна, если число реакций деления в единицу времени поддерживать постоянным (см. рис. 111, кривая III, $K = 0$).

Реакция синтеза атомных ядер. Термоядерная реакция – реакция синтеза атомных ядер. При образовании ядра гелия из двух дейтронов выделяется энергия 24 МэВ. Для слияния дейтронов необходимо их сближение до расстояния $r \sim 3 \cdot 10^{-15}$ м, на котором потенциальная энергия взаимодействия (работа сближения) составит: $U = kq^2/r = 7,7 \cdot 10^{-14}$ Дж, или $4,8 \cdot 10^5$ эВ. Если работа производится двумя сталкивающимися дейтронами, то кинетическая энергия каждого должна составлять половину этой величины: $7,7 \cdot 10^{-14}/2 = 3kT/2$, или $T \approx 2 \cdot 10^9$ К. Для водородной бомбы необходима температура несколько миллиардов градусов.

Легче всего идёт реакция: $H_1^3 + H_1^2 \rightarrow He_2^4 + n_0^1 + 17,5$ МэВ.

Поэтому заряд водородной бомбы представляет смесь тяжелых изотопов водорода – дейтерия и трития. Высокая температура для эффективного протекания реакции, достигается взрывами обычных атомных бомб (взрывателей).

10. ОСНОВЫ ФИЗИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Виды взаимодействий. Взаимодействие между нуклонами называют сильным. Не центральные (из-за спина частиц) ядерные силы действуют лишь на расстояниях порядка 10^{-15} м.

Электромагнитное взаимодействие меньше сильного на два порядка. С расстоянием оно меняется медленнее, как $1/r^2$.

Взаимодействия с участием нейтрино названы «слабыми». Они слабее сильных в 10^{14} раз при том же радиусе действия.

Гравитационное взаимодействие слабее сильного в 10^{38} раз. С расстоянием гравитационные силы убывают столь же медленно, как и электромагнитные, так что их радиус действия также бесконечен.

Для реакции требуется время: при сильном взаимодействии – $\sim 10^{-23}$ с, при электромагнитном – $\sim 10^{-21}$ с, при слабом – $\sim 10^{-9}$ с.

Частицы и античастицы. В 1928 г. английский физик П.А. Дирак показал вид уравнения микрочастицы, удовлетворяющего требованиям теории относительности и описывающего квантовомеханическое поведение свободного релятивистского электрона во внешних полях. При решении уравнения Дирака выяснилось, что наряду с решениями, отвечающими положительной полной энергии свободной частицы

$E = +\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,

меняющейся в пределах $m_0 c^2 \leq E \leq +\infty$, имеются решения с отрицательной

энергией $E = -\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$,

меняющейся в пределах $-\infty \leq E \leq -m_0 c^2$ (см. рис. 112). Но свободные электроны с отрицательной энергией никогда не наблюдались. Уменьшение энергии может происходить только до $+m_0 c^2$. Дальнейшее уменьшение может

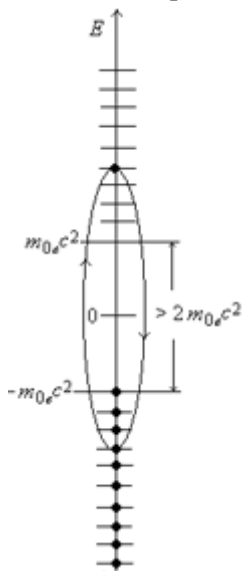


Рис. 112.

произойти только скачком, на величину, не меньшую $2m_0c^2$ (от $+m_0c^2$ до $-m_0c^2$, что для электрона составляет 1,024 МэВ).

В интерпретации Дирака: изменение знака энергии свободного электрона обусловлено изменением знака его массы покоя m_0e , а вектор скорости частицы с отрицательной массой покоя и вектор ее импульса противоположны. Дирак объяснял это так. Электроны подчиняются запрету Паули – в каждом состоянии может находиться только один электрон. Пусть состояния, отвечающие отрицательным энергиям свободных электронов, заняты (рис. 51). Отнесем такое распределение электронов к каждой точке пространства (вакууму). Это означает, что в каждой точке пространства должна быть бесконечно большая плотность электронов с отрицательной массой покоя, а значит, и бесконечно большой отрицательный электрический заряд. Согласно Дираку, вакуум означает не отсутствие электронов, но такое их распределение, при котором все состояния с положительной собственной энергией – вакантны, а состояния с отрицательной собственной энергией – заняты.

Если в результате взаимодействия один из вакуумных электронов получит энергию, превышающую $2m_0c^2$ (см. рис. 112), то он перейдет в состояние с положительной энергией, и после перехода появится:

- 1) один обычный электрон с положительной энергией;
- 2) неоднородность в распределении «вакуумных» электронов, так как одно из мест окажется вакантным, и «дырка» станет наблюдаемой. Отсутствие отрицательной массы проявится наличием равной ей по величине положительной массы. Отсутствие отрицательного заряда будет эквивалентно наличию положительного заряда такой же величины. Следовательно, «дырка» в распределении вакуумных электронов обретает свойства частицы с положительной массой покоя, равной массе покоя электрона, но с обратным по знаку зарядом (открыт и подтвержден экспериментально К. Андерсоном, 1932 г.)

Процесс, при котором один из вакуумных электронов переходит в обычное состояние, означает возникновение пары электрон-позитрон. При энергии каждой частицы m_0c^2 , для образования пары необходима энергия, не меньше $2m_0c^2$. Такая энергия должна быть

затрачена, по Дираку, для «подъема» вакуумного электрона (рис. 51, стрелка слева). При обратном переходе (рис. 51, стрелка справа) обычный электрон замещает дырку в распределении вакуумных электронов и «исчезает» (как наблюдаемая частица), а вместе с ним исчезает и неоднородность в распределении вакуумных электронов – дырка, т. е. позитрон. Этот процесс наблюдается как аннигиляция пары с выделением энергии $>2m_0c^2$ (см. рис. 112). При отсутствии других частиц эта энергия отдается в виде двух или трех фотонов (в зависимости от относительного направления спинов частиц).

Космические лучи. Космические лучи как поток частиц большой энергии (от 10^9 до 10^{18} эВ на частицу), приходящих на Землю были обнаружены по вызываемой ими ионизации сухого воздуха.

Исходным источником космических частиц являются взрывы звезд, при которых светимость в течение нескольких десятков часов возрастает в $10^5 - 10^7$ раз, убывая до начального уровня за годы. С гигантскими облаками межзвездного газа связано слабое магнитное поле. Отклоняясь в этом поле, электроны испускают тормозное излучение малой частоты – радиоизлучение постепенно теряют энергию. В этих же условиях протоны и тяжелые ядра, обладая большой массой, энергии на тормозное излучение практически не теряют, а даже постепенно ускоряются (Э. Ферми). Быстрые протоны, ядра гелия и в небольшом числе более тяжелые ядра определены первичной компонентой космических лучей.

Частицы первичной компоненты испытывают столкновения с ядрами атомов атмосферы на высоте в десятки километров. Ядро, претерпевшее удар, мгновенно испаряется. Быстрые протоны, нейтроны, а иногда и более тяжелые осколки, разлетаются ненаправленно. Заряженные частицы оставляют жирные следы, образующие характерную фигуру «звезды» (рис. 113). Даже в малом телесном углу в направлении движения первичной частицы видны следы нескольких «новорожденных» частиц – π -мезонов (пионов). Это – кванты ядерного поля, излучаемые при ускорении ядерных частиц – носителей ядерного заряда, наподобие того, как фотоны – кванты электромагнит-

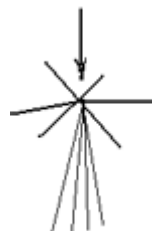


Рис. 113.

ного поля – излучаются при ускорении частиц, несущих электрический заряд. Различие в том, что масса покоя фотона равна нулю, поэтому фотоны могут обладать любой, сколь угодно малой энергией. Масса же покоя пиона превышает массу покоя электрона в 270 раз, так что для рождения пиона нужна энергия более 140 МэВ.

Превращения и классификация элементарных частиц.

Все пионы, как электрически заряженные, π^+ и π^- (частица и античастица), так и нейтральные π^0 , имеют нулевой спин и «сильно» взаимодействуют с нуклонами – захватываются ядрами. Вероятность захвата пиона возрастает с уменьшением его энергии и зависит от знака его электрического заряда. Так π^- -мезоны притягиваются ядрами и на излете поглощаются. В самом ядре квант ядерного поля как частица не существует (как не существует фотон в электронной оболочке поглотившего его атома). Его энергия распределяется между частицами ядра.

Медленные π^+ -мезоны не имеют возможности подойти к ядру близко. Потерявший энергию на ионизацию и на излете потерявший возможность поглотиться ядром π^+ -мезон распадается на две частицы: мюон μ и мюонное нейтрино (ν_μ). Если π^- -мезон не поглотится ядром, то его ожидает та же участь. Так как π^+ - и π^- -мезоны соотносятся как частица и античастица, то π^- -мезон распадается на μ^- и $\bar{\nu}_\mu$.

Мюон и мюонное нейтрино вместе с электроном и электронным нейтрино образуют группу фермионов – лептонов со спином $\hbar/2$.

Частицы, образующиеся в результате ударов космических частиц, составляют вторичное космическое излучение. Мюоны представляют его «жесткую» часть, проникая под землю и под воду на сотни метров.

Электроны, позитроны и фотоны составляют мягкую компоненту вторичного космического излучения, генерируемую γ -квантами больших энергий, образующихся при распаде π^0 -мезонов. Распадается π^0 -мезона на два γ -кванта или на γ -квант и электрон-позитронную пару.

Кварки. Идея о том, что сильно взаимодействующие частицы состоят из нескольких частиц того же «сорта» перестала быть популярной. Нарастающее число элементарных частиц породило сомнения в их элементарности. Появилась гипотеза, что все частицы построены из трех фундаментальных частиц «кварков» – носителей этих зарядов. В модели трех кварков (Гелл-Манн и Цвейг, 1964), обозначаемых буквами: *u* (*up*), *d* (*down*) и *s* (*strange*), этим частицам приписывают дробные квантовые числа, в частности электрический заряд, равный $+2/3$, $-1/3$ и $-1/3$.

Мезоны образуются из пары кварк-антикварк, а барионы – из трех кварков. Однако, связанные состояния из трех кварков типа *uuu*, *ddd*, *sss* противоречат принципу Паули, т.к. спин кварков одинаков и равен $1/2$, а в одной системе не может быть не только трех, но даже и двух кварков с одинаковым набором квантовых чисел. Поэтому было введено понятие цвета кварков, понимая под этим, что каждый кварк может существовать в трех «окрашенных» формах: желтой, синей и красной. Антикварк принимается окрашенным в дополнительный цвет, дающий вместе с цветом кварка «нулевой» белый цвет. Частицы переносчики взаимодействия (цвета) между кварками названы глюонами (англ. *glue* – клей), удерживающие в результате обменного взаимодействия кварки вместе.

На данный момент модель кварков включает шесть сортов (ароматов) (*u*, *d*, *s*, *c*, *b*, *t*), каждый из которых существует в трех цветовых разновидностях. «Очарованный» *c*-кварк (англ. *charmed*) имеет квантовое число *C* – очарования. В состав «неочарованных» частиц (мезонов и барионов) *c*-кварк не входит. Для описания ипсилон-частицы, открытой в 1976 г., пришлось ввести *b*-кварк (англ. *bottom* – нижний, или *beauty* – прелестный). Эти кварки описывают свойства частиц с массами 3 – 11 ГэВ. Последний и самый массивный *t*-кварк (англ. *truth* – истинный).

Заключение

Учебное пособие создано на базе авторских конспектов лекций и учебных пособий трехсеместрового (51 – 54 лекции) теоретического материала по курсу общей физики, предназначенного для самостоятельной подготовки студентов к рейтингам и экзаменам (прил. 16).

В соответствии с требованиями общеобразовательного стандарта и рабочей программы в части теоретического материала по курсу общей физики по профилям подготовки студентов Института информационных технологий и радиоэлектроники ВлГУ учебное пособие сокращено до двухсеместрового для инженерно-технических направлений бакалавриата. Именно в связи с названными направлениями бакалавриата сокращению в большей мере подверглись первые две части курса: механика и молекулярная физика. Кроме этого отделы и параграфы, отмеченные () в общем случае не входят в курс общей физики, но могут быть рекомендованы к представлению на факультативных или дополнительных занятиях. Знания дополнительного материала всегда приветствуется и должным образом оценивается в течение учебного года на лабораторных и практических занятиях.*

Библиографический список не претендует на полноту охвата вопросов и не содержит всех первоисточников, но приведенные в списке работы имеют обширную библиографию, где можно найти необходимые первоисточники.

Автор благодарит рецензентов и членов методической комиссии кафедры «Общей и прикладной физики» за ценные рекомендации, но при этом все обращают внимание, что курс физики для инженерно-технических направлений бакалавриата по объему и содержанию на 2020 год стал соответственно меньше и беднее курса физики медицинских вузов в 70-х годах прошлого века.

Приложения

Приложение I

Векторное произведение. Векторным произведением $\vec{A} \times \vec{B}$ векторов \vec{A} и \vec{B} называется вектор $\vec{D} = \vec{A} \times \vec{B}$. Этот вектор (рис. П1) перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы \vec{A} и \vec{B} , и направлен в ту сторону, в которую будет двигаться винт с правой нарезкой, установленный в точке пересечения начал векторов, если его головку вращать в том же направлении, в каком необходимо поворачивать первый в произведении вектор \vec{A} по кратчайшему пути (правило правого винта) для совпадения с вектором \vec{B} . Иначе говоря, векторы \vec{A} , \vec{B} и \vec{D} взаимно ортогональны и относительно друг друга ориентированы так же, как и положительные направления осей X , Y , Z правосторонней системы координат. По модулю вектор \vec{D} равен произведению модулей векторов и синуса угла между ними:

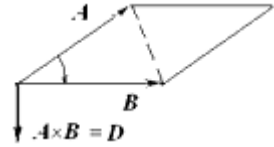


Рис. П1.

$$|\vec{D}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \left(\widehat{\vec{A}, \vec{B}} \right).$$

Угол между векторами \vec{A} и \vec{B} отсчитывается от первого сомножителя ко второму по кратчайшему расстоянию, т. е. угол меньше или равен π , вследствие чего синус не может быть отрицательным. Модуль векторного произведения $|\vec{D}|$ равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах.

В книге автором принят следующий подход к обозначению векторов: на рисунках векторные физические величины обозначены жирным курсивным шрифтом (\mathbf{A} и \mathbf{B}) и указаны около графических обозначений – стрелок (см. как на рис. П.1), а в тексте векторные физические величины обозначены обычным курсивным шрифтом с указанием стрелки сверху обозначения величины (\vec{A} и \vec{B}).

Приложение 2

Метод ансамблей. Метод ансамблей (Гиббс Джозайя Уиллард 1839 – 1903 г.) представляет лишь один из статистических методов изучения систем частиц газа.

Сосуд с заключенными в нем частицами называют *статистической системой*. Совокупность одинаковых статистических систем называют *статистическим ансамблем*. Под термином «одинаковых» подразумеваются одинаковые: объем сосудов, число частиц, сами частицы.

Статистический ансамбль – собрание большого числа взаимодействующих между собой систем, каждая из которых удовлетворяет тем же условиям, что и рассматриваемая система.

Статистическая независимость: два случая статистически независимы, если осуществление одного из них не зависит от осуществления или неосуществления другого.

Постулируется, что $P_A = \tilde{P}_t$ и называется *эргодической гипотезой* и тогда $\langle x^2 \rangle_A = \langle x^2 \rangle_t$, и среднее по ансамблю (среднее статистическое) равно среднему по времени. Доказательств этой гипотезы нет, и она является одним из основополагающих допущений статистической физики (Л. Больцман, 1871 г.).

Приложение 3

Таблица ПЗ. Температуры Реомюра, Фаренгейта, Цельсия и Кельвина

Температурная шкала	Единица шкалы	Принятая авторами		Формулы связи между шкалой $t^{\circ}\text{C}$ и иными шкалами
		температура таяния льда	Температура кипения воды	
Реомюра	1°R	0°R	80°R	$1^{\circ}\text{R} = 1,25^{\circ}\text{C}$
Фаренгейта	1°F	32°F	212°F	$t = 5(t_{\text{Ф}} - 32^{\circ}\text{F})/9$
Цельсия	1°C	0°C	100°C	-
Кельвина	1K	273 K	373 K	$T = t + 273$

Примечание. Числовые значения температур таяния льда и кипения воды были приняты авторами шкал по собственным усмотрениям и обоснованиям. Так были заданы масштабные единицы измерений по назначенным интервалам температурных шкал.

Переход от декартовых координат к полярным. Переходим от прямоугольных координат к полярным координатам r и φ (рис. П4.1). Изменим обозначение $dxdy$ элемента площади на: $dxdy=rdrd\varphi$ при модуле радиуса $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. За элемент площади при фиксированном r можно взять площадь $2\pi r dr$ кольца радиусом r и шириной dr .

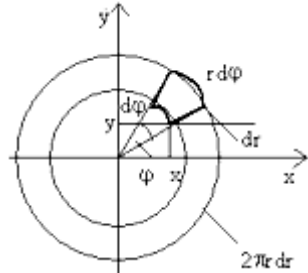


Рис. П4.1.

Переход от декартовых координат к сферическим (рис. П4.2.). Если положение в пространстве характеризовать случайными величинами r , φ и θ , связанными с x , y , z формулами сферических координат, то: $x = r \sin \theta \cdot \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \cdot \sin \varphi$; $z = r \cdot \cos \theta$.

Элемент объема, определяющий вероятность: $dxdydz = r^2 \cdot \sin \theta \cdot dr d\varphi d\theta$.

Если распределение в пространстве не зависит от углов φ и θ , проинтегрируем по углам:

$$dV(r) = r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr$$

Этот же результат получится, если за элемент объема взять шаровой слой радиусом r и толщиной dr , т.е. $4\pi r^2 dr$.

Итак, элемент пространства dr в случае изотропной величины можно заменить шаровым слоем $4\pi r^2 dr$. Тогда вероятность найти случайную величину в таком пространстве на расстоянии r от начала координат, несмотря на равномерное распределение по осям величин x, y, z будет квадратичной функцией r : $dP(r) = \text{const} \cdot 4\pi r^2 dr$.

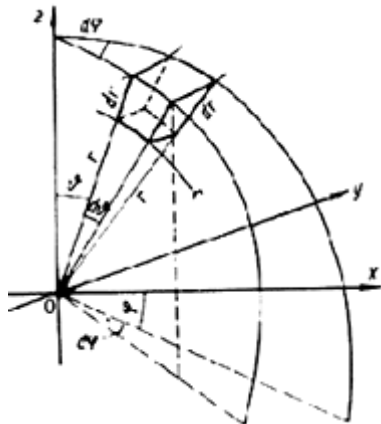


Рис. П4.2.

Характерные скорости молекул при Максвелловском распределении. Для сравнения движения молекул газа в разных случаях вводятся характерные для распределения Максвелла скорости.

1. Максимальное число молекул $dN(v)$ приходится на скорость, соответствующую максимуму кривой распределения $f(v)$. Эту скорость называют *наивероятнейшей* (наиболее вероятной).

Чтобы найти ее значение, необходимо найти значение v при котором кривая $f(v)$ проходит через максимум. Для экстремальных значений $f(v)$ производная этой функции должна быть равна нулю:

$$\frac{df(v)}{dv} = \frac{d}{dv} \left(4\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^2 e^{-\alpha v^2} \right) = 8\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v e^{-\alpha v^2} - 8\sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}} v^3 \alpha e^{-\alpha v^2} = 0$$

Уравнение имеет три корня: $v_1 = 0$; $v_2 = \infty$; $v_3 = 1/\sqrt{\alpha}$.

Из графика рис. 21 видно, что максимуму соответствует только значение v_3 . Обозначим $v_g = v_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ или $v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Максвелловское распределение скоростей записывается одинаково для любых газов и температур при использовании относительной скорости $a = \frac{v}{v_g}$: $dN(a) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} a^2 e^{-a^2} da$, где $a = \frac{v}{v_g}$.

2. Средняя квадратичная скорость определяется как средний квадрат скорости: $\langle v^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{3m}{4\alpha} \cdot \frac{m}{2} = \frac{3}{2\alpha}$.

И окончательно: $v_{ср.кв.} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$.

3. Средняя скорость максвелловского распределения:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha v^2} v^3 dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{v_g^3} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v^2}{v_g^2}} v^3 dv = \frac{2v_g}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} a e^{-a^2} da$$

Интеграл $\int_0^{\infty} a e^{-a} da$ в указанных пределах стремится к единице, и:

$$\langle v \rangle = \frac{2v_0}{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Соотношение между характерными скоростями:

$$v_0 : \langle v \rangle : \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 1:1,13:1,22.$$

Приложение 6

Степенные ряды Тейлора и Маклорена. Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называют степенной ряд вида:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

. Разложение функции $f(x)$ в ряд по степеням при $x_0 = 0$ (ряд Маклорена):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)^2}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Линеаризация функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 означает выбор первых двух слагаемых в правых частях формул.

Пример. 1. Применение разложения в ряд Маклорена к кинематике материальной точки, перемещающейся вдоль оси Ox при $t_0 = 0$:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}t + \frac{x''(t_0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}t^n,$$

или с учетом трех слагаемых и в принятых обозначениях получаем

$$\text{уравнение равнопеременного движения: } x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В линейном приближении получаем уравнение равномерного движения: $x(t) = x_0 + v_0 t$.

2. Известно, что функция e^x разлагается в ряд Маклорена при всех значениях x , тогда и при $(e^x)^y = e^{xy}$, получаем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

Приложение 7

В качестве решения уравнений (76 – 77) назначаем $Qe^{(\alpha+i\omega)t}$. Простая подстановка решения дает одинаковый результат с полученным в контексте. Например, пусть решением для уравнения динамики заряда (77) будет $Q = Q_0 e^{(\alpha+i\omega)t}$. Тогда подставляя его в уравнение 77, получим:

$$Q = Q_0 e^{(\alpha+i\omega)t} \cdot (\alpha + i\omega)^2 + \frac{R}{L} \cdot Q_0 e^{(\alpha+i\omega)t} \cdot (\alpha + i\omega) + \frac{1}{LC} \cdot Q_0 e^{(\alpha+i\omega)t} = 0,$$

$$\text{или } Q = (\alpha + i\omega)^2 + \frac{R}{L} \cdot (\alpha + i\omega) + \frac{1}{LC} = 0.$$

После несложных преобразований получаем действительную и комплексную части решения: $\alpha^2 - \omega^2 + \frac{R}{L} \cdot \alpha + \frac{1}{LC} = 0,$
 $2\alpha i\omega + i\omega \frac{R}{L} = 0.$

Из комплексной части решения получаем: $\alpha = -\frac{R}{2L}$ и, далее,

$$\text{подстановкой в действительную часть: } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Приложение 8

К определению импеданса. Задана некоторая комплексная величина $z = x + iy$. Представим ее графически в системе координат (Re, Im), где вещественная (Re) часть x откладывается по горизонтальной оси, а мнимая (Im) – по вертикальной оси. Модули вещественной и мнимой частей комплексной величины определены: $x = \rho \cos \gamma, \quad y = \rho \sin \gamma.$ Модуль комплексного числа

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \text{ Угол } \gamma = \arctg(y/x)$$

К определению ротора вектора. Посредством действия оператора Гамильтона на вектор функцию ротора представим в форме:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \vec{E} &\equiv \nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times (E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) = \\
 &= \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{i} \times \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{i} \times \vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{i} \times \vec{k} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{j} \times \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \vec{j} \times \vec{j} + \\
 &+ \frac{\partial E_z}{\partial y} \vec{j} \times \vec{k} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{k} \times \vec{i} + \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{k} \times \vec{j} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \vec{k} \times \vec{k} = \\
 &= \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} \times \vec{i} = 0, & \vec{j} \times \vec{j} = 0, & \vec{k} \times \vec{k} = 0, \\ \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\ \vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, & \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j}, & \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{i} \\ \vec{i} \end{array} \right| \\
 &= \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \vec{k} = \\
 &= \operatorname{rot}_x \vec{E} + \operatorname{rot}_y \vec{E} + \operatorname{rot}_z \vec{E}.
 \end{aligned}$$

Это же равносильно форме записи матрицы:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} \text{ с аналогичным решением (см. выше).}$$

Приложение 10

Таблица П10. Границы диапазонов по длинам электромагнитных волн и энергиям квантов.

Диапазон волн	Границы диапазонов	
	по длинам (λ) волн (нм)	по энергии (ϵ) квантов (МэВ)
Гамма излучение	0,0012	1,0
Рентгеновское	0,0012 – 12	1,0 – 100 эВ
Ультрафиолетовое	12 – 380	3,2 – 100 эВ
Видимый свет	380 – 760	1,6 – 3,2 эВ
Инфракрасное	760 – 1000000	$1,2 \cdot 10^{-3}$ – 1,6 эВ
Радиоволны	1 мм	$1,2 \cdot 10^{-3}$ эВ

Приложение 11

Окраска тел. Наличие резонансных частот ω_0 обуславливает возникновение окраски тел в результате селективного поглощения. Это может происходить в толще вещества и в поверхностном слое. Приведем три правила:

1. Если частота ω_0 находится в ультрафиолетовой области, то в видимой части спектра нет селективного поглощения света, и вещество является почти бесцветным и прозрачным (стекло).

2. Когда собственные частоты ω_0 попадают в видимую часть спектра, соответствующие участки видимой части спектра поглощаются и вещество оказывается окрашенным в дополнительный цвет;

3. При отражении света от поверхности наиболее интенсивно отражается те участки спектра, которые при прохождении толщины вещества наиболее сильно поглощаются.

Приложение 12

Геометрическая прогрессия. По формуле для геометрической прогрессии: $a = a_1 q^{i-1}$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Сумма ряда геометрической прогрессии: $s = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Если $q < 0$, то прогрессия

убывающая. Для бесконечного ряда убывающей геометрической прогрессии $q_n \rightarrow 0$ и $s = a_1 \frac{-1}{q-1} = a_1 \frac{1}{1-q} = a_1(1-q)^{-1}$.

Приложение 13

Теория размещений. Пример. В театре с n стульями можно разместить n разных людей. Одного человека можно разместить n способами, второго – $(n-1)$ способами, третьего – $(n-2)$ способами и т.д. Общее число комбинаций размещений составит $n(n-1)(n-2)(n-3) \dots = n!$. Заполним один ряд из n_i стульев и повторим размещение числа $(n-n_i)$ людей. Число способов комбинаций составит $n!/[n_i!(n-n_i)!]$, т.е. без учета числа комбинаций размещений $(n_i!)$ в выбранном i -том ряду.

Приложение 14

Формула Стирлинга. Дано: $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$ при $n = 1, 2, \dots, n$. Тогда при $\Delta n \ll n$ (шаг $\Delta n = 1$), можно записать формулу приближения Стирлинга: $\ln n! = \sum_n \ln n \Delta n \approx \int_1^n \ln n dn = n \ln n - n$.

Приложение 15

К вычислению постоянной времени радиоактивного распада:

$$\tau = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} \frac{x}{\lambda} e^{-x} d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left. \begin{matrix} d(x e^{-x}) = e^{-x} dx - x e^{-x} dx; \\ x e^{-x} dx = e^{-x} dx - d(x e^{-x}) \end{matrix} \right|_* =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left[\int_0^{\infty} e^{-x} dx - \int_0^{\infty} d(x e^{-x}) \right] = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{e^x} \Big|_0^{\infty} - \frac{x}{e^x} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\lambda} (0 + 1 - 0 + 0) = \frac{1}{\lambda}.$$

Принятое обозначение $=*|..|_* =$ использовано для проведения промежуточных подготовительных процедур применения интегрирования по частям.

Экзаменационные вопросы I семестра обучения

Вопрос 1. (Рейтинг 2. Коллоквиум № 1)

1. Кинематика. Системы отсчета. Связь между кинематическими параметрами. Типы движения. Степени свободы.
2. Принцип относительности Галилея. Первый, второй, третий законы Ньютона. Центр масс.
3. Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Центробежная и кориолисова силы инерции. Маятник Фуко.
4. Твердое тело. Система материальных точек. Момент силы. Момент импульса. Уравнение моментов. Уравнения движения.
5. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Штейнера.
6. Однородность и изотропность пространства. Однородность времени. Изолированная и замкнутая системы. Законы сохранения импульса и момента импульса.
7. Работа, мощность, энергия. Кинетическая энергия. Закон сохранения энергии в механике.
8. Консервативные и диссипативные силы и системы. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике.
9. Связь между потенциальной энергией и силой. Градиент.
10. Идеальная и вязкая жидкости. Основные уравнения равновесия и движения жидкостей. Гидростатика несжимаемой жидкости: закон Паскаля, жидкость в поле тяжести.
11. Кинематическое описание движения жидкости. Линия тока, трубка тока, стационарное и нестационарное движения. Уравнение неразрывности.
12. Уравнение Бернулли. Вязкость. Формула Ньютона.
13. Прямолинейное движение жидкостей по гладким трубам. Формула Пуазейля.
14. Основные параметры гидродинамической системы. Критерии подобия. Законы гидродинамического подобия.
15. Потенциальные и вихревые движения. Операции циркуляции и ротора. Подъемная сила.
16. Теорема и формула Жуковского. Эффект Магнуса

Вопрос 2. (Рейтинг 3. Коллоквиум № 2)

1. Основные положения молекулярно-кинетической теории вещества. Модель идеального газа. Методы изучения систем многих частиц.

2. Статистический метод. Основные понятия теории вероятности: вероятность, плотность вероятности, математическое ожидание, дисперсия, функция распределения вероятностей.

3. Макроскопическое и микроскопическое состояния системы. Изолированная, замкнутая, полуоткрытая и открытая системы. Микропереходы и флуктуации. Постулат равновероятности. Закон равномерного распределения энергии. Пространственная ячейка. Фазовые точка, пространство, ячейка.

4. Распределение молекул в пространстве скоростей. Гипотеза Максвелла. Распределение Гаусса.

5. Функция Максвелла.

6. Физический смысл функции Максвелла. Характерные скорости молекул.

7. Поток молекул. Давление газа на стенку. Уравнения равновесного состояния идеального газа.

8. Распределение Больцмана. Барометрическая формула.

9. Термодинамический процесс. Равновесные и неравновесные состояния. Обратимость и необратимость термодинамического процесса. Неравновесные состояния.

10. Первое начало термодинамики. Термодинамический процесс. Работа, теплота, внутренняя энергия. Равновесные и неравновесные состояния. Обратимость и необратимость термодинамического процесса.

11. Теплоемкость. Энтальпия. Формула Майера. Теплоемкость идеального газа. Недостаточность классической теории теплоемкостей.

12. Политропный процесс. Изопротессы. Работа, совершаемая при изопротессах.

13. Энтропия. Второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса. Циклический процесс. Второе начало термодинамики в формулировках Кельвина и Клаузиуса.

14. Второе начало термодинамики в формулировках Больцмана, Бриллюэна и Пригожина. Связанная энергия. Термодинамические потенциалы.

15. Элементы теории столкновений. Эффективное сечение. Средняя длина свободного пробега. Время релаксации.

16. Процессы переноса. Общее уравнение переноса. Теплопроводность. Вязкость. Самодиффузия.

17. Реальные газы. Изотермы реального газа и жидкости. Силы Ван-дер-Ваальса.

18. Электростатика. Предмет изучения. Закон Кулона.

19. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Операция ротор вектора. Скалярный потенциал. Потенциал поля точечного заряда.

20. Диэлектрики. Электрическое поле в диэлектриках. Вектор поляризации. Молекулярная картина поляризации. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле.

21. Скалярный поток вектора. Электростатическая теорема Гаусса. Объемная плотность зарядов.

22. Операция дивергенция. Теорема Остроградского-Гаусса. Объемная плотность связанных зарядов.

23. Поверхностная плотность зарядов. Электрическое смещение. Электростатическая теорема Гаусса при наличии диэлектриков.

24. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные плоскости, заряженные коаксиальные цилиндры.

25. Применение теоремы Гаусса к вычислению электростатических полей: две заряженные концентрические сферы, шар.

26. Условия на границе двух диэлектриков.

Экзаменационные вопросы II семестра обучения

Вопрос 1. (Рейтинг 2. Коллоквиум № 1)

1. Электрическое поле проводников. Конденсаторы. Электроемкость. Постоянный электрический ток.
2. Дифференциальная форма закона Ома. Дифференциальная форма закона Джоуля-Ленца. Понятие о сегнетоэлектриках.
3. Магнитное поле в вакууме. Силы взаимодействия параллельных проводников с током. Магнитная индукция. Сила Лоренца. Сила Ампера.
4. Закон Био-Савара. Закон полного тока. Магнитное поле бесконечно длинного прямолинейного проводника с током.
5. Магнитное поле в веществе. Магнетики. Диа-, пара-, ферромагнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Магнитные проницаемость и восприимчивость.
6. Условия на границе двух магнетиков
7. Электромагнитная индукция. Явление самоиндукции.
8. Теорема Стокса. Первое уравнение Максвелла.
9. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла.
10. Уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.
11. Электромагнитные колебания в идеальном контуре. Добротность.
12. Электромагнитные колебания в контуре RLC .
13. Переменный ток в RLC -контуре. Резонанс напряжений.
14. Электромагнитные волны. Энергия и плотность потока энергии. Вектор Пойтинга. Уравнение Д'Аламбера. Волновой вектор.
15. Плоская электромагнитная волна. Уравнения Максвелла в символической форме.
16. . Параметры и свойства плоской электромагнитной волны. Электромагнитная природа света. Время разрешения. Когерентность.

Вопрос 2. (Рейтинг 3. Коллоквиум № 2).

1. Геометрическая оптика. Приближения геометрической оптики. Принцип Гюйгенса. Законы отражения и преломления. Принцип Ферма.

2. Поляризация электромагнитной волны. Явление Брюстера. Монохроматический и хаотический свет.

3. Интерференция света. Оптическая длина пути. Отражение от параллельных поверхностей.

4. Дифракция света. Принцип Гюйгенса – Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля.

5. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона.

6. Дисперсия. Нормальная и аномальная дисперсия.

7. Тепловое излучение. Равновесное излучение. Характеристики теплового излучения. Абсолютно черное тело. Закон Кирхгофа. Закон Стефана-Больцмана

8. Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Подход Михельсона. Формула Рэлея-Джинса. Ультрафиолетовая катастрофа. Формула Вина и закон смещения Вина.

9. Квантовая гипотеза и формула Планка. Внешний фотоэлектрический эффект и его законы. Фотоны. Эффект Комптона.

10. Модель атома Резерфорда. Постулаты Бора.

11. Удары первого и второго рода. Опыт Франка – Герца.

12. Атом водорода. Комбинационный принцип Ритца.

13. Гипотеза де Бройля. Экспериментальное подтверждение волновых свойств микрочастиц.

14. Соотношение неопределенностей.

15. Волновая функция: свойства и статистический смысл.

16. Стационарное и нестационарное уравнение Шредингера. .

17. Частица в потенциальной яме.

18. Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода.

19. Спектр атома водорода. Орбитальный и магнитный момент электрона.

20. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа.

21. Опыты Эйнштейна – де Хааса и Барнетта.

22. Опыт Штерна и Герлаха. Спиновое квантовое число.

23. Правило отбора. Принцип запрета Паули.

24. Поглощение, спонтанное и индуцированное излучение.
25. Создание инверсной заселенности. Лазеры.
26. Зонная теория. Обменное взаимодействие и природа химической связи. Энергетические зоны в кристаллах. Распределение электронов по энергетическим зонам.
27. Классификация твердых тел на металлы, полупроводники и диэлектрики.
28. Собственная и примесная проводимости полупроводников. Контакт двух металлов. P-n переход. Полупроводниковые диоды.
29. Модель атомного ядра. Нейтрино.
30. Виды взаимодействий. Теория Дирака по интерпретации вакуума. Частицы и античастицы.

Дополнительные сложные вопросы (*) для самостоятельного изучения и разбора с преподавателем (для студентов, претендующих на итоговую оценку «отлично»)

1. *Классическая теория теплоемкости. Закон Дюлонга и Пти. Квантовая теория теплоемкости Эйнштейна. Температура Эйнштейна.
2. *Модель Дебая. Элементарные возбуждения. Фононы. Дисперсионное соотношение.
3. *Теория теплоемкости Дебая. Число мод. Температура Дебая.
4. *Распределения Ферми – Дирака.
5. *Уровень и энергия Ферми.
6. *Распределения Бозе – Эйнштейна.
7. *Радиоактивность. Альфа-, бета- и гамма-излучение. Законы радиоактивного распада.
8. *Ядерные силы. Масса и энергия связи ядра. Ядерные реакции.
9. *Реакция деления ядер. Цепная реакция деления. Реакция синтеза атомных ядер.
10. *Космические лучи. Превращения и классификация элементарных частиц. *Кварки.

Библиографический список

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М.: Наука, ГРФМЛ. 1969. 736 с
2. Зисман, Г.А. Курс общей физики. В 3-х т. Т. 3. Оптика. Физика атомов и молекул. Физика атомного ядра и микрочастиц. Изд-е четвертое, стереотипное / Г.А. Зисман, О.М. Тодес. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 496 с.
3. Кузнецов, А.А. Физика. Механика. Молекулярная физика: конспект лекций / Владим. Гос. ун-т; Владимир: Ред. издат. комплекс ВлГУ. 2005. 96 с
4. Кузнецов, А.А. Физика: Механика. Молекулярная физика. Электричество и магнетизм. Электромагнитные колебания и волны. Оптика: учеб. пособие/ А.А. Кузнецов. – Владимир: Изд-во ВлГУ. 2013. 160 с.
5. Кузнецов, А.А. Физика. Основные понятия квантовой оптики и атомной физики. Основы квантовой механики, физики твердого тела, атомного ядра и элементарных частиц: учеб. пособие/ А.А. Кузнецов. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2017. 100 с.
6. Мандельштам, Л. И. Лекции по теории колебаний / Л. И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972. 470 с.
7. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности: учеб. пособие для физ. спец. Вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1986. 320 с
8. Матвеев, А. Н. Молекулярная физика: учеб. пособие для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1987. 360 с
9. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм: учеб. пособие для физ. спец. вузов / А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1986. 480 с
10. Матвеев, А. Н. Оптика: учеб. пособие для физ. спец. вузов./ А. Н. Матвеев. – М.: Высш. шк., 1985. 351 с
11. Матвеев, А. Н. Атомная физика: учеб. пособие для студентов вузов/ А.Н. Матвеев. – М.: Высш. шк. 1989. 439 с
12. Мигдал, А.Б. Квантовая физика и Нильс Бор. Новое в жизни, науке, технике. Сер. «Физика», № 3 / А.Б. Мигдал. – М.: Знание. 1987. 64 с.

13. Поль, Р. В. Механика, акустика и учение о теплоте / Р. В. Поль / пер. с нем. – М.: Наука, ГРФМЛ. 1971. 480 с
14. Ремизов, А.Н. Медицинская и биологическая физика: учеб. для мед. спец. вузов / А.Н. Ремизов. – М.: Высш. шк., 1996. 608 с.
15. Савельев, И. В. Курс общей физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика: учеб. пособие / И. В. Савельев.– М.: Наука. ГРФМЛ. 1982. 432 с
16. Савельев, И. В. Курс общей физики: учебное пособие. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учеб. пособие / И. В. Савельев. – Т. 2. – М.: Наука, ГРФМЛ. 1988. 496 с
17. Савельев, И.В. Курс общей физики. Учебное пособие для вузов. В 5 кн. Кн.5. Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц / И. В. Савельев. – М.: Издательство АСТ, 2001. 361 с.
18. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Механика: учеб. пособие для вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 1. – М.: Наука. ГРФМЛ. 1989. 576 с.
19. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика: учеб. пособие для вузов / Д. В. Сивухин. – Т. 2. – М.: Наука, ГРФМЛ. 1990. 592 с.
20. Фейман, Р. Феймановские лекции по физике. Современная наука о природе. Законы механики. Пространство. Время. Движение / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 1 – 2. – М.: Мир, 1976. 440 с
21. Фейман, Р. Феймановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 5. – М.: Мир, 1977. 302 с
22. Фейман, Р. Феймановские лекции по физике. Физика сплошных сред. / Р. Фейман, Р. Лейтон, М. Сэндс / пер. с англ. – Т. 7. – М.: Мир, 1977. 288 с
23. Юкава, Х. Лекции по физике: пер. с яп./ предисловие акад. М.А. Маркова / Х. Юкава. – М.: Энергоиздат. 1981. 128 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i>	3
1. Механика	5
Кинематика поступательного и вращательного движени- ний материальной точки и твердого тела.	5
Предмет и объект изучения. Система отсчета. Скорость и ускорение. Кинематика твердого тела. Принцип относительности Галилея.	
Динамика поступательного движения.	9
К понятию силы. Измерение силы. Законы Ньютона. Об инерци- альных и неинерциальных системах отсчета. Центробежная и ко- риолисова силы инерции. Уравнение моментов.	
Механика твердого тела	14
Уравнения движения твердого тела. Центр масс. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Формула Штейнера.	
Законы сохранения	16
Закон сохранения импульса. Закон сохранения момента импульса. Работа, мощность, энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Потенци- альная энергия. Закон сохранения механической энергии. Связь между по- тенциальной энергией и силой.	
Механика жидкости и газа	20
Механика сплошной среды. Основные уравнения равновесия и дви- жения жидкостей. Гидростатика несжимаемой жидкости. Кинемати- ческое описание движения жидкости. К теореме о неразрывности струи. Уравнение Бернулли. Вязкость. Стационарное течение жид- кости в прямолинейной трубе. Формула Пуазейля. Элементы теории гидродинамического подобия. Потенциальные и вихревые движе- ния. Теорема Жуковского. Подъемная сила. Эффект Магнуса.	
2. Молекулярная физика	32
Основные положения. Динамический метод. Статистический ме- тод. Термодинамический метод.	
Статистический метод	34
Основные понятия теории вероятности. Микроскопическое состоя- ние системы. Фазовое пространство. Фазовая точка. Фазовая ячейка. Постулат равновероятности. Макроскопическое состояние системы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Распреде- ление Максвелла. Характерные скорости распределения Максвелла. Давление газа на стенку. Распределение Больцмана. Барометриче- ская формула. Распределение Максвелла – Больцмана.	

Термодинамический метод.	48
Определения термодинамики равновесных состояний. Первое начало термодинамики. О равновесных и неравновесных состояниях. Теплоемкость. Соотношение между теплоемкостями идеального газа. Формула Майера. Теплоемкость идеального газа. Процессы в идеальных газах. Энтропия идеального газа. Циклические процессы. Трактовки второго начала термодинамики. Коэффициент полезного действия. Вычисление КПД цикла Карно с помощью энтропии. Термодинамические потенциалы. Подход И.Р. Пригожина. Энтропия и энергия.	
Элементы физической кинетики.	63
Элементы теории столкновений. Процессы переноса. Общее уравнение переноса. Теплопроводимость. Вязкость. Самодиффузия.	
Реальные газы.	67
Жидкое и газообразное состояния. Изотермы реального газа и жидкости. Фазовые переходы. Уравнение Ван-дер-Ваальса.	
3. Электричество и магнетизм.	71
Электростатика.	71
Предмет изучения. Закон Кулона. Работа в электрическом поле. Потенциальность кулоновского поля. Ротор вектора. Градиент потенциальной функции. Скалярный потенциал.	
Электрическое поле в диэлектриках.	74
Диэлектрики. Механизмы поляризации. Влияние поляризации на электрическое поле. Электростатическая теорема Гаусса. Скалярный поток векторного поля. Дивергенция векторного поля. Связанные заряды. Формула Пуассона и условие Лапласа. Диэлектрическое смещение. Условия на границе диэлектриков. Вычисление полей с помощью теоремы Гаусса.	
Электрическое поле проводников.	86
Заряженный проводник. Проводник во внешнем электрическом поле. Полый проводник во внешнем поле.	
Постоянный электрический ток.	87
Плотность тока. Дифференциальные формы законов Ома и Джоуля – Ленца. Механизм существования постоянного тока. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей. Сегнетоэлектрики.	
Магнитное поле в вакууме.	90
Магнитная сила. Взаимодействие параллельных проводников с током. Сила Лоренца. Сила Ампера. Закон Био-Савара. Закон полного тока.	

Магнитное поле в веществе	93
Магнетики. Намагниченность. Напряженность магнитного поля. Условия на границе двух магнетиков.	
Электромагнитная индукция	96
Закон электромагнитной индукции. Явление самоиндукции.	
Уравнения Максвелла	98
Ротор векторной функции. Формула Стокса. Первое уравнение Максвелла. Закон сохранения заряда. Связь между магнитным полем и движущимися зарядами. Система уравнений Максвелла. Ток смещения.	
4. Электромагнитные колебания и волны	102
Электромагнитные колебания	102
Электромагнитные колебания в <i>RLC</i> -контуре. Идеальный колебательный контур. Переменный ток.	
Электромагнитные волны	110
Волновое уравнение. Плоская электромагнитная волна. Электромагнитная природа света. Время разрешения. Когерентность.	
5. Оптика	115
Геометрическая оптика	115
Законы отражения и преломления. Принцип Ферма.	
Поляризация света	117
Закон Брюстера. Механизм поляризации света.	
Интерференция света	119
Интенсивность при сложении световых волн. Отражение от параллельных поверхностей.	
Дифракция света	121
Принцип Гюйгенса-Френеля. Ограничения Френеля. Зоны Френеля. Дифракция от круглого диска. Пятно Пуассона.	
Дисперсия света	125
Нормальная и аномальная дисперсия.	
6. Основные понятия квантовой оптики и атомной физики	126
Тепловое излучение. Квантовая гипотеза Планка	126
Характеристики теплового излучения. Абсолютно черное тело. Равновесное излучение. Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела. Формула Рэлея-Джинса. Формула Вина. Закон смещения Вина. Квантовая гипотеза и формула Планка	
Квантовые свойства света. Фотоны	130
Закономерности фотоэлектрического эффекта. Эффект Комптона.	

Ядерная модель атома	132
Модель атома Резерфорда. Постулаты Бора. Опыт Франка – Герца.	
7. Элементы квантовой механики	136
Волновые свойства микрочастиц	136
Гипотеза де Бройля. Опыты Джермера и Дэвисона Принцип неопределенностей. Соотношение неопределенностей	
Волновая функция. Уравнение Шредингера	138
Волновая функция: свойства и статистический смысл. Стационарное и нестационарное уравнение Шредингера. Частица в потенциальной яме.	
Теория Бора для водородоподобных атомов	143
Магнетомеханическое (гиромангнитное) соотношение. Решение уравнения Шредингера для электрона в атоме водорода. Квантование энергии электрона в атоме водорода. Спектр атома водорода. Главное, орбитальное и магнитное квантовые числа. Опыты Эйнштейна – де Хааса и Барнетта. Опыты Штерна – Герлаха. Спин электрона. Спиновое квантовое число. Правило отбора. Принцип Паули. Многоэлектронные атомы.	
Вынужденное излучение. Лазеры	153
Спонтанное и индуцированное излучение. Создание инверсной заселенности уровней. Принцип действия лазеров.	
8. Основные понятия физики твердого тела	156
Теплоемкость кристаллов. Фононы	156
Классическая теория теплоемкости. Квантовая теория теплоемкости и модель Эйнштейна. Теория теплоемкости Дебая. Фононы.	
Элементы квантовой статистики	168
Квантовые статистики. Бозоны и фермионы. Распределение Ферми – Дирака. Распределение Бозе – Эйнштейна. Электронный газ. Уровень и энергия Ферми.	
Зонная теория	172
Обменное взаимодействие. Энергетические зоны в кристаллах. Классификация твердых тел на проводники и диэлектрики. Полупроводники. Собственная и примесная проводимости. Полупроводниковые диоды.	
9. Основы физики атомного ядра	180
Радиоактивность	180
Альфа-, бета- и гамма-излучение. Законы радиоактивного распада.	

Ядерные реакции	184
Модель атомного ядра. Нейтрино. Ядерные силы. Масса и энергия связи. Ядерные реакции. Цепная реакция деления ядер. Уравнение баланса нейтронов. Реакция синтеза атомных ядер.	
10. Основы физики элементарных частиц	189
Виды взаимодействий. Частицы и античастицы. Космические лучи. Превращения и классификация элементарных частиц. Кварки.	
Заключение	194
Приложения (1 – 16)	195
Библиографический список	210

Учебное издание

КУЗНЕЦОВ Артемий Артемьевич

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Для инженерно-технических направлений бакалавриата

Учебное пособие

Компьютерная вёрстка А. А. Кузнецов

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 17.09.2019

Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 12,56. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.

имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
600000, Владимир, ул. Горького, 87.