Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА   О. В. ОРЕШКИНА

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2019

УДК 517
ББК 22.161
К78

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент Департамента и анализа данных, финансовых технологий
и принятия решений Финансового университета
при Правительстве Российской Федерации (г. Москва)
М. Б. Хрипунова

Кандидат физико-математических наук
доцент кафедры информатики и информационных технологий
в образовании Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

К78 **Крашенинникова, О. В.** Введение в математический анализ. Производная и ее приложения : учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова, О. В. Орешкина ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 104 с. – ISBN 978-5-9984-1058-1.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты по следующим разделам высшей математики: введение в математический анализ, производная и ее приложения.

Предназначено для студентов очной формы обучения по программам технических специальностей вузов.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 15. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-1058-1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов-бакалавров очной формы обучения по программам технических специальностей, которые изучают высшую математику в течение первых двух семестров. Материал пособия соответствует программе первого семестра и включает разделы: введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Книга содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемым разделам, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты, включающие 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей их защитой во время рейтинговой недели). В приложении приведены основные формулы, необходимые для решения задач.

Обозначения и терминология, используемые в пособии, являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что настоящая книга ни в коей мере не призвана заменить более подробные курсы высшей математики, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с ней предполагает параллельное изучение соответствующих разделов курса математики по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. ЛОГИЧЕСКАЯ СИМВОЛИКА. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. ТОЧНЫЕ ГРАНИ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Для сокращенной записи разного рода формулировок и утверждений удобно пользоваться логическими символами. Их использование в математических текстах уже давно стало обычным. Перечислим наиболее употребительные из них: $\vee$ – дизъюнкция, $\wedge$ – конъюнкция, $\Rightarrow$ – импликация, $\Leftrightarrow$ – равносильность, $\forall$ – квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования. Поясним теперь их смысл. Пусть P и Q – какие-либо высказывания, т. е. некоторые суждения о тех или иных, например, математических объектах, которые могут оказаться как истинными, так и ложными. С помощью перечисленных выше символов можно образовывать новые высказывания: $P \vee Q$ означает P или Q, $P \wedge Q$ – P и Q, $P \Rightarrow Q$ – из P следует Q, $P \Leftrightarrow Q$ – P равносильно Q.

На рубеже XIX и XX столетий в трудах немецких математиков Г. Кантора, а затем Ф. Хаусдорфа была создана теория множеств, которая легла в основу современной математики и, в частности, математического анализа. Понятие множества является первоначальным и потому неопределяемым.

Под **множеством** понимается некоторый набор предметов произвольной природы. Множества обозначают прописными буквами $A, B, \ldots,$ предметы, из которых состоит множество, называются его элементами и обозначаются $a, b, \ldots$. Например, $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ – множество однозначных чисел.

Запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A. Запись $a \notin A$ означает, что a не принадлежит A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Если все элементы, из которых состоит множество A, входят и в множество B ($a \in A \Rightarrow a \in B$), то A называется подмножеством множества B и в этом случае пишут $A \subset B$. По определению $\varnothing \subset A$, каково бы ни было A.

Два множества A и B считаются равными, если состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств: $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству $B : A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$.

Аналогично определяется объединение и пересечение любого, в том числе и бесконечного числа множеств.

Изучение математического анализа мы начнем с построения множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. В курсе элементарной математики, изучаемом в школе, последовательно появляются:

множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел $\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел $\boldsymbol{Q} = \left\{\dfrac{m}{n}, \quad m, n \in \mathrm{Z}, n \neq 0\right\}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Во множестве $\boldsymbol{Q}$ определены алгебраические операции "$+$" и "$\cdot$" вместе с обратными им операциями вычитания и деления за исключением деления на нуль. Они подчиняются известным законам. Множество $\boldsymbol{Q}$ упорядочено отношением $\leq$. Рациональные числа удобно изображать точками числовой прямой (оси). Рациональные точки расположены на числовой оси всюду плотно, т. е. каковы бы ни были рациональные числа r_1 и r_2, найдется рациональное число $r \in (r_1, r_2)$, например, $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ – середина отрезка $[r_1, r_2]$. Несмотря на это, рациональных чисел недостаточно для того, чтобы снабдить каждую точку числовой прямой рациональным числом, иначе говоря, снабдить каждый отрезок рациональной длиной. Рассмотрим квадрат со стороной 1. Его диагональ $\sqrt{2}$. Пусть $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}, \quad m, n \in \boldsymbol{N}$, причем дробь несократима. Тогда $2 = \dfrac{m^2}{n^2}$, $2n^2 = m^2 \Rightarrow m^2 -$ четное, т. е. $m -$ четное, $m = 2k$. Поэтому $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 -$ четное, т. е. $n -$четное, что противоречит тому, что дробь $\dfrac{m}{n}$ несократима. Таким образом, $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$.

Поэтому возникает необходимость пополнения множества $\boldsymbol{Q}$ новыми числами. Из курса элементарной математики известно, что всякое рациональное число можно представить десятичной дробью, конечной либо бесконечной, но обязательно периодической. Так, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$ и т. д.

Определение. **Действительным числом** называется произвольная бесконечная десятичная дробь, т. е. $x = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ (где из двух знаков "$\pm$" берется один).

Множество действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Если дробь из $\boldsymbol{R}$ периодична, то будем считать ее представлением рационального числа. Тем самым $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. Непериодическую дробь будем называть иррациональным числом. Таково, например, число $x = 0{,}1010010001\ldots$

Пусть A – ограниченное сверху (снизу) числовое множество, т. е. существует число M (m) такое, что для любого $x \in A \Rightarrow x \le M$ ($x \ge m$). Это число M (m) называется верхней (нижней) гранью множества A.

Конечно, любое ограниченное сверху (снизу) множество A имеет бесконечно много верхних (нижних) граней, например $M + 1$ ($m - 1$).

Множество называется ограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Определение. Наименьшая из всех верхних граней числового множества A называется точной верхней гранью этого множества и обозначается $\sup A$ (от латинского слова supremum).

Определение. Наибольшая из всех нижних граней числового множества A называется точной нижней гранью этого множества и обозначается $\inf A$ (от латинского слова infimum).

Равенство $\sup A = M$ означает:

1. $\forall x \in A \Rightarrow x \le M$ (M – верхняя грань);
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A$ такой, что $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ (число, меньшее M, уже не является верхней гранью).

Равенство $\inf A = m$ означает:

3. $\forall x \in A \Rightarrow x \ge m$ (m – нижняя грань);
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in A$ такой, что $x_\varepsilon < m + \varepsilon$ (число, большее m, уже не является нижней гранью).

Замечание. Пусть во множестве A существует наибольший элемент $x_0 \in A$, т. е. $\forall x \in A \Rightarrow x \le x_0$. Тогда $\sup A = x_0$.

<u>Пример.</u> Дано множество $A=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;\frac{1}{n};\ldots\right\}$. Найти $\sup A$ и $\inf A$.

Решение. Так как во множестве A существует наибольший элемент, равный 1, то $\sup A = 1$. Докажем, что $\inf A = 0$. Действительно:

1. $\frac{1}{n}>0 \quad \forall n$,

2. $\forall \varepsilon>0 \quad \exists n$ такой, что $\frac{1}{n}<\varepsilon$, т. е. $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема. (о точной верхней (нижней) грани). Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество действительных чисел имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Множество $\boldsymbol{R}$ можно расширить, добавив к нему символы $-\infty$ и $+\infty$, называемые несобственными числами. Условимся считать, что эти числа противоположны друг другу, т. е. $-(-\infty)=+\infty$, $-(+\infty)=-\infty$ и что для любого $x\in \boldsymbol{R}$: $-\infty<x<+\infty$. Если множество $A\subset \boldsymbol{R}$ не ограничено сверху, то естественно считать, что $sup\ A=+\infty$. Аналогично, если множество $A\subset \boldsymbol{R}$ не ограничено снизу, то естественно считать, что $\inf A=-\infty$.

2. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному правилу действительное число x_n, то множество занумерованных действительных чисел $x_1, x_{2,} \ldots x_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью** и обозначается $\{x_n\}$. x_n называется общим членом последовательности.

Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}=\left\{\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4}\ \ldots;\ \frac{n}{n+1};\ \ldots\right\}$.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists N$, зависящий от ε такой, что $\forall n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Для рассмотренных примеров $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

Числовая последовательность называется сходящейся, если имеет предел, и расходящейся в противном случае.

Пример. Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Доказательство. $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N\Rightarrow\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Последнее неравенство равносильно $\left|\dfrac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon$ или $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Отсюда $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$. В качестве искомого номера N можно взять $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]-1$, где $[x]-$ целая часть числа x, не превосходящая x.

Теорема 2.1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$, $a\neq b$. По определению предела имеем: $\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_1\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_2\Rightarrow|y_n-a|<\varepsilon$. Пусть $a<b$. Выберем $N=\max(N_1,N_2)$, $\varepsilon=\dfrac{|b-a|}{2}$ и пусть $n>N$. Тогда $|a-b|=|a-x_n+x_n-b|\leq|a-x_n|+|x_n-b|<\dfrac{|b-a|}{2}+\dfrac{|b-a|}{2}=|b-a|$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Сходящаяся последовательность будет ограниченной, т. е. существует число $M>0$ такое, что $|x_n|\leq M$ для всех номеров n.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, т. е. по определению предела $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N\Rightarrow|x_n-a|<\varepsilon$.

Возьмем $\varepsilon=1$, тогда $\exists N$ такой, что $\forall n>N\Rightarrow|x_n-a|<1$. Из последнего неравенства следует $|x_n|=|x_n-a+a|\leq|x_n-a|+|a|<1+|a|$ при $n=N+1,\ N+2,\ldots$

Выберем $M=\max\left(|x_1|,|x_2|,\ldots|x_n|,1+|a|\right)$. Тогда $|x_n|\leq M$ для всех номеров n.

Теорема доказана.

Теорема 2.3. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их сумма, произведение и частное имеют пределы, причем

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \pm y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad k = \mathrm{const}$.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, т. е. по определению предела

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \text{ такой, что } \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \text{ такой, что } \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем $N = \max\left(N_1, N_2\right)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow \left|\left(x_n + y_n\right) - (a+b)\right| \leq$ $\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$.

2. Из теоремы 2.2 следует, что $|x_n| \leq M$, $|y_n| \leq M \ \forall n$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, т. е. по определению предела

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_1(\varepsilon) \text{ такой, что } \forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N_2(\varepsilon) \text{ такой, что } \forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Выберем $N = \max\left(N_1, N_2\right)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow |x_n y_n - ab| =$

$$= |x_n y_n - ay_n + ay_n - ab| \leq \left|y_n\left(x_n - a\right)\right| + \left|a\left(y_n - b\right)\right| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + |a|\frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Примеры

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^2 - 3x + 5}{5x^2 + 4x} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x}} = \dfrac{2}{5}$.

Правило: чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, нужно и числитель и знаменатель разделить на высшую степень n в знаменателе.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x+5}{5x^2+4x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}}=0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+5}{5x+4}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-3+5x}{5+\dfrac{4}{x}}=\infty$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+2n\right)^3+\left(3-2n\right)^3}{\left(3n+1\right)^2+\left(n-1\right)^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+6n+12n^2+8n^3+27-54n+36n^2-8n^3}{9n^2+6n+1+n^2-2n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{48n^2-48n+39}{10n^2+4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{48-\dfrac{48}{n}+\dfrac{39}{n^2}}{10+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}}=4{,}8.$$

В последнем примере использованы формулы сокращенного умножения:

$\left(a\pm b\right)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

$\left(a\pm b\right)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$.

Предельный переход в неравенствах. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними

Теорема 2.4. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и $x_n\le y_n$, начиная с некоторого номера, то $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$. Нужно доказать, что $a\le b$. Предположим противное. Пусть $a>b$. По определению предела имеем:

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_1\Rightarrow\left|x_n-a\right|<\varepsilon$, $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$.

$\forall\varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n>N_2\Rightarrow\left|y_n-b\right|<\varepsilon$, $b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon$.

Выберем $N = \max(N_1, N_2)$, $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$. Тогда $y_n < b + \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$, а $x_n > a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2}$. Отсюда $y_n < \dfrac{a+b}{2} < x_n$. Получили противоречие. Следовательно, $x_n \le y_n$. Теорема доказана.

Следствие. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $x_n \le b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le b$, если $x_n \ge b$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge b$, если $|x_n| \le b$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| \le b$.

Теорема 2.5. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и $x_n \le z_n \le y_n$, начиная с некоторого номера, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. По определению предела имеем:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_2(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > N_2 \Rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$.

Пусть $x_n \le z_n \le y_n$ при $n > N_3$. Выберем $N = \max(N_1, N_2, N_3)$, тогда $\forall n > N \Rightarrow$ $a - \varepsilon < x_n \le z_n \le y_n < a + \varepsilon$, т. е. $|z_n - a| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Теорема доказана.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Например, последовательности $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ бесконечно малые.

Свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 2.6. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ бесконечно малые, то последовательности $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\{k \cdot x_n\}$ будут бесконечно малыми. Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно малая, а $\{y_n\}$ ограниченная, то $\{x_n \cdot y_n\}$ будет бесконечно малая.

Например, последовательность $\left\{\dfrac{\sin n}{n}\right\}$ будет бесконечно малой, так как последовательность $\{\sin n\}$ ограниченная, а последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ бесконечно малая.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Например, последовательности $\left\{(-1)^n n\right\}$, $\left\{2^n\right\}$ бесконечно большие.

Теорема 2.7. Если последовательность $\{x_n\}$бесконечно малая и $x_n \neq 0$, то последовательность $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ будет бесконечно большой. Если последовательность $\{y_n\}$ бесконечно большая, то $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ бесконечно малая.

Монотонные последовательности. Число *e*

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

невозрастающей, если $x_{n+1} \leq x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

неубывающей, если $x_{n+1} \geq x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

убывающей, если $x_{n+1} < x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$;

возрастающей, если $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \boldsymbol{N}$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, убывающие и возрастающие последовательности – *строго монотонными.*

Теорема Вейерштрасса. Всякая неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Всякая невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Выпишем несколько первых членов этой последовательности: $x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$, $x_3 = \dfrac{64}{27} \approx 2{,}37, \ldots$.

Теорема 2.8. Последовательность $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Следуя Эйлеру, предел этой последовательности обозначают e, т. е. $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Известно, что $e = 2{,}718281828459045\ldots$. Постоянную e называют неперовым числом, или числом Д. Непера.

Пример. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+5}{13n-10}\right)^{n-3}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n-10+15}{13n-10}\right)^{n-3}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{13n-10}{13n-10}+\frac{15}{13n-10}\right)^{n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{15}{13n-10}\right)^{n-3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n-45}{13n-10}}=e^{\frac{15}{13}}.$$

3. ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть X и Y – какие-либо непустые множества.

Определение. **Функцией** называется правило, по которому каждому элементу $x\in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y\in Y$.

Пишут: $y=f(x)$ или $f: X\to Y$. Множество X называется областью определения функции, $x-$ независимая переменная, или аргумент, $y=f(x)$ – значение функции. Множество $f\left(X\right)$ называется множеством значений функции. Если $f\left(X\right)=Y$, то отображение $f: X\to Y$ называется сюръективным. Отображение $f: X\to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1,\ x_2\in X$, $x_1\ne x_2 \Rightarrow f(x_1)\ne f(x_2)$. В этом случае можно определить обратную функцию $f^{-1}: Y\to X$, $f^{-1}(y)=x\in X$ такому, что $f(x)=y$.

В зависимости от природы множеств X и Y функции присваивают то или иное название. Если Y – числовое множество, то функцию называют числовой, или скалярной. Если к тому же и X – числовое множество, то функцию называют числовой функцией одной переменной. Если $X\subset \boldsymbol{R}$, а Y – множество всех векторов на плоскости или в пространстве, то функцию называют вектор-функцией скалярного аргумента. Числовую последовательность можно рассматривать как функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения в $\boldsymbol{R}$.

Способы задания функции:

1. Аналитический (с помощью одной или нескольких формул).

Например, $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

Множество значений независимой переменной *x*, при которых формула имеет смысл, называется естественной областью определения. По умолчанию всегда будем считать, что функция рассматривается на всей естественной области определения.

2. Словесный.

Например, функция Дирихле $y = \begin{cases} 0, & x - \text{иррационально}, \\ 1, & x - \text{рационально}. \end{cases}$

3. Табличный.

4. Графический.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $\{(x, f(x)) : x \in X\}$. График обладает свойством: любая прямая, параллельная оси *Oy*, пересекает график не более чем в одной точке.

Определение. Пусть $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. **Сложной функцией** функций f и g (композицией) называется функция $g \circ f$, определяемая правилом $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X$.

Перечислим так называемые основные элементарные функции: степенная функция $x^{\alpha} (\alpha \ne 0)$, показательная функция a^x $(a > 0, a \ne 1)$, логарифмическая функция $\log_a x \, (a > 0, a \ne 1)$, тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Определение. **Элементарной функцией** называется функция, которая выражается через основные элементарные функции с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Определение. Окрестностью точки $a \in \boldsymbol{R}$ называется любой конечный интервал $(\alpha; \beta)$, содержащий точку *a*. Произвольную окрестность точки *a* будем обозначать $O(a)$. Если задано число $\varepsilon > 0$, то под ε-окрестностью $O_{\varepsilon}(a)$ точки *a* будем понимать интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки *a* за исключением, быть может, самой точки *a*. Такую окрестность называют проколотой.

Определение. Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Рассматриваются также односторонние пределы функции – правый и левый пределы.

Определение. Число b называется **правым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Определение. Число b называется **левым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

Теорема 3.1. (Сведение предела функции к пределу последовательности). Для того чтобы $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to a, \quad x_n \neq a$ выполнялось $f(x_n) \to b, \quad n \to \infty$.

Для предела функции в точке справедливы теоремы, аналогичные теоремам о пределах последовательности.

Теорема 3.2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, то он единственный.

Теорема 3.3. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$, то:

1. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = b \pm d$;

2. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) g(x) \right) = bd$, в частности, $\lim\limits_{x \to a} \left(cf(x) \right) = cb$, где $c = \mathrm{const}$;

3. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{d}, \quad d \neq 0$.

Теорема 3.4. (Предел сложной функции). Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$, причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеем $g(x) \neq y_0$ и пусть $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = b$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = b$.

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Решение. Подставим -1 вместо x, получим и в числителе, и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, нужно и числитель, и знаменатель разложить на множители и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{x^2(x+2)-(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решение. Подставим 8 вместо x, получим и в числителе, и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, нужно числитель умножить на сопряженное выражение, а знаменатель на неполный квадрат суммы и применить формулы сокращенного умножения

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

$$(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)=a^3\pm b^3.$$

Тогда получим

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt{9+2x}-5\right)\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt{9+2x}+5\right)(x-8)}=\lim_{x\to 8}\frac{(2x-16)\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)}{\left(\sqrt{9+16}+5\right)(x-8)}=$$

$$=\frac{2(4+4+4)}{10}=\frac{12}{5}.$$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Теорема 4.1. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$ и существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, то $b \le d$.

Следствие. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \le A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le A$.

Теорема 4.2. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) \le \phi(x) \le g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b$.

Теорема 4.3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $b > 0\ (b < 0)$. Тогда найдется проколотая окрестность точки a, в которой $f(x) > 0\ (f(x) < 0)$.

С помощью теоремы 4.2 установим важное предельное соотношение, которое обычно называют первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Сначала докажем, что для любого $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $x \ne 0$ имеет место неравенство

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \qquad (1)$$

Пусть x – длина дуги AB, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что $S_{\Delta AOB} < S_{\text{сект } AOB} < S_{\Delta AOC}$ (рис. 1). Но $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\sin x$, $S_{\text{сект } AOB} = \frac{1}{2}x$, $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Таким образом, при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеем $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Отсюда, разделив на x, получим $\frac{\sin x}{x} < 1$ и $\cos x < \frac{\sin x}{x}$. Таким образом, неравенство (1) верно для всех $0 < x < \frac{\pi}{2}$. При $x = \frac{\pi}{2}$ равенство (1) верно, а так как все функции в этом неравенстве четные, то оно верно и для всех $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.

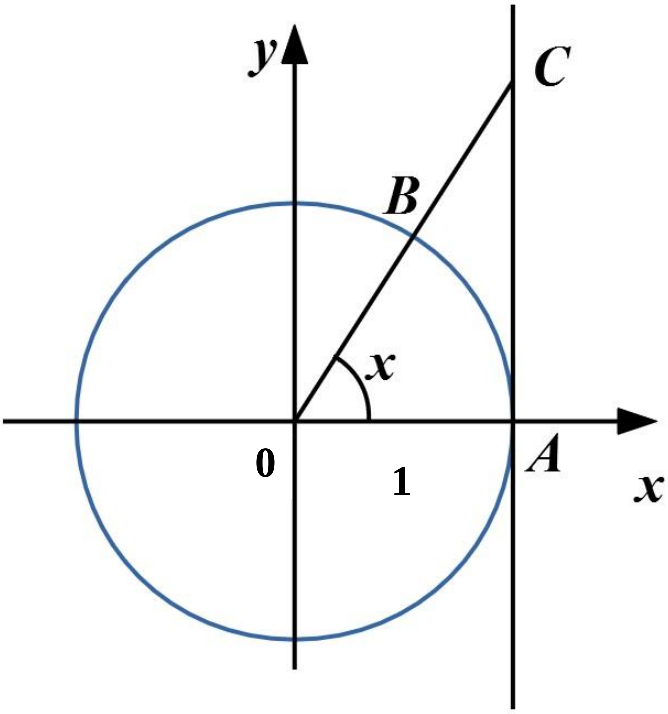

Рис. 1

Из неравенства (1) вытекают полезные неравенства:

$$|\sin x| \le |x| \quad \forall x \in \boldsymbol{R}, \; |x| \le |\mathrm{tg}\, x| \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

За исключением $x = 0$ эти неравенства строгие.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |\cos x - 1| < \varepsilon.$$

$$|\cos x - 1| = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} = 2\left|\sin \frac{x}{2}\right| \cdot \left|\sin \frac{x}{2}\right| \le 2\frac{|x|}{2} < \delta = \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $x \to 0$ в неравенстве (1), получим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Теорема доказана.

Из первого замечательного предела вытекают соотношения:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = 1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{4}4}=\dfrac{1}{2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\begin{bmatrix} x=\sin y \\ y\to 0 \end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\begin{bmatrix} x=\operatorname{tg} y \\ y\to 0 \end{bmatrix}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}=1$.

Другим важным примером применения теоремы 4.2 и теоремы о пределе сложной функции является второй замечательный предел. Как было доказано ранее $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$. Рассмотрим теперь предел соответствующей функции $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x\to+\infty$ и докажем, что он равен тому же числу *e*. Заметим, что замена *n* на *x* отнюдь не очевидна, поскольку меняется характер переменной: $n\in\boldsymbol{N}$, в то время как *x* принимает всевозможные действительные положительные значения. Так, например, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi n=0$ просто потому, что $\sin\pi n=0$ $\forall n\in\boldsymbol{N}$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\pi x$ не существует.

Положим $[x]=n$. Если $x\to+\infty$, то $n\to\infty$. Далее $n\le x<n+1$ и при $x\ge 1$ $\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{n}$; $\dfrac{1}{n+1}+1<\dfrac{1}{x}+1\le\dfrac{1}{n}+1$;

$$\left(\frac{1}{n+1}+1\right)^n<\left(\frac{1}{x}+1\right)^x\le\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+1\right)^n=e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+1\right)^{n+1}=e$, то по теореме 4.2 получим, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)^x=e$.

Рассмотрим теперь предел этой функции при $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{|x|}\right)^{-|x|}=\begin{bmatrix}|x|=y\\ y\to+\infty\end{bmatrix}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)=e.$$

Оба предельных соотношения можно объединить в одно и записать $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$. Замена $\frac{1}{x}=y$ преобразует его к виду $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$ или

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \qquad (2)$$

Это и есть второй замечательный предел.

Из соотношения (2) вытекают следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\begin{bmatrix}e^{x}-1=y\\ x=\ln(1+y)\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\cdot\ln a}\ln a=\ln a.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha;$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Замечание. Здесь мы пользовались свойством непрерывности логарифмической и показательной функций.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\cos x-1\right)\left(\cos x-1\right)}{x^2\left(\cos x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}4}=-\frac{1}{2}.$$

Определение. Определенная в некоторой проколотой окрестности точки *a* функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** в точке *a*, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 4.4. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке *a*, то в этой точке функции $k\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ также будут бесконечно малыми.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке *a*, $\beta(x)$ ограниченная, то $\alpha(x)\beta(x)$ будет бесконечно малой в точке *a*.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке *a*.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, в этом случае пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

При сравнении бесконечно малых функций часто употребляют символ *o* (*o* малое). Если $\alpha(x)$ представляет бесконечно малую в точке *a* функцию более высокого порядка, чем бесконечно малая в этой же точке функция $\beta(x)$, то это записывают условно следующим образом: $\alpha(x)=o\left(\beta(x)\right)$. Теперь определение эквивалентных бесконечно малых функций можно сформулировать таким образом.

Определение. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми в точке *a*, если $\alpha(x)=\beta(x)+o\big(\beta(x)\big)$.

Исходя из замечательных пределов и следствий из них получаем следующую таблицу эквивалентностей при $x\to 0$:

1. $\sin x \sim x$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$;
3. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
4. $\arcsin x \sim x$;
5. $\operatorname{arctg} x \sim x$;
6. $e^x-1 \sim x$;
7. $a^x-1 \sim x\ln a$;
8. $\ln(1+x) \sim x$;
9. $(1+x)^\alpha-1 \sim \alpha x$.

Согласно сформулированному определению бесконечно малых функций можно записать следующие равенства при $x\to 0$:

1. $\sin x = x+o(x)$;
2. $\operatorname{tg} x = x+o(x)$;
3. $1-\cos x = \dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$;
4. $\arcsin x = x+o(x)$;
5. $\operatorname{arctg} x = x+o(x)$;
6. $e^x-1 = x+o(x)$;
7. $a^x-1 = x\ln a+o(x)$;
8. $\ln(1+x) = x+o(x)$;
9. $(1+x)^\alpha-1 = \alpha x+o(x)$.

Теорема 4.5. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции в точке a, причем $\alpha(x)\sim\beta(x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}$.

Эта теорема дает право при вычислении предела одночлена, т. е. произведения или частного, заменять сомножители или числитель со знаменателем эквивалентными функциями. Самая распространенная ошибка при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего выражения, эквивалентной функцией (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{\sin 3x\cdot \operatorname{tg} 2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{3x\cdot 2x}=\dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x}{2\sqrt{2x+1}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x}{2\left((1+2x)^{\frac{1}{2}}-1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3x}{2\dfrac{1}{2}2x}=-\dfrac{3}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos 2x-\sin^2 2x}{x^4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos 2x)^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^4}{x^4}=4$, но ошибочно

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(1-\cos 2x)-\sin^2 2x}{x^4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 2x^2-4x^2}{x^4}=0.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\operatorname{tg} 5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)+5x+o(x)}{-\dfrac{1}{2}x^2+1+o\left(x^2\right)-\dfrac{1}{5}x-1+o(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{2}+o\left(x\right)+5+o(1)}{-\dfrac{1}{2}x+o\left(x\right)-\dfrac{1}{5}+o(1)}=-25.$$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\ln\cos x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+\cos x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos x-1}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{-\frac{x^2}{2}}}=e^{-2}$.

5. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right)$.

Согласно определению предела это означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f(x_0) \right| < \varepsilon$.

Примеры.

1. $y = \sin x$ непрерывна, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| \sin x - \sin x_0 \right| =$

$$= 2\left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \le \left| x - x_0 \right| < \delta = \varepsilon .$$

2. $y = x$ непрерывна, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Заданная на множестве D функция $f(x)$ называется непрерывной на нем, если она непрерывна по этому множеству в любой его точке. Совокупность всех непрерывных на множестве D функций будем обозначать $C(D)$.

Теорема 5.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0) \neq 0 \right)$.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $h = g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f\left(x_0\right)$. Тогда сложная функция $g\left(f(x) \right)$ непрерывна в точке x_0.

Примеры.

1. Так как $y = x$ непрерывна при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, то непрерывна функция $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ непрерывна как сложная функция.

Определение. Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется разрывной в точке x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Мы будем называть точками разрыва функции точки, в которых функция не определена, но которые являются предельными точками области определения, т. е. точки, в любой окрестности которых есть хотя бы одна точка из области определения, отличная от данной.

Рассмотрим возможные типы точек разрыва функции.

1. Устранимая точка разрыва.

Определение. Точка x_0 называется **устранимой точкой разрыва** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ существует, но функция $f(x)$ либо не определена в точке x_0, либо $f(x_0) \neq a$ (рис. 2).

Например, функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Эту функцию легко сделать непрерывной, положив $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

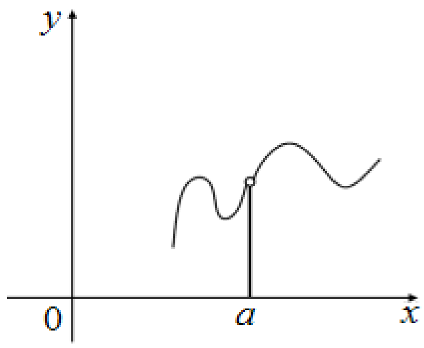

Рис. 2

В общем случае этот разрыв можно устранить, положив значение функции $f(x)$ в точке x_0 равным ее предельному значению $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ a, & x = x_0. \end{cases}$

2. Точка разрыва первого рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, но они не равны между собой, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

Например, функция $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, а $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ (рис. 3). Функция в точке разрыва первого рода делает скачок, величина скачка равна $\left| \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) \right|$.

3. Точка разрыва второго рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Например, $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (рис. 4).

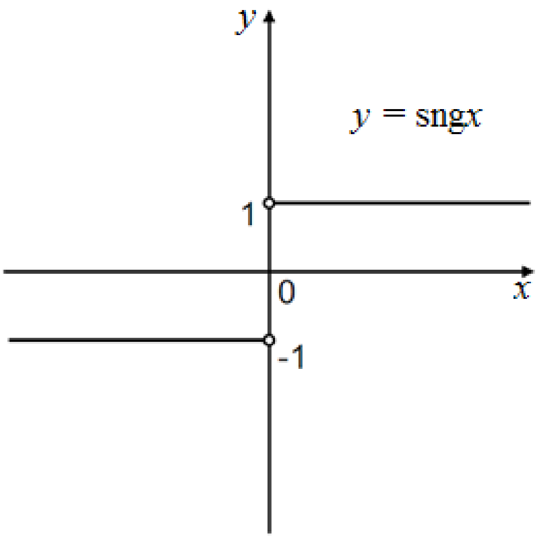

Рис. 3

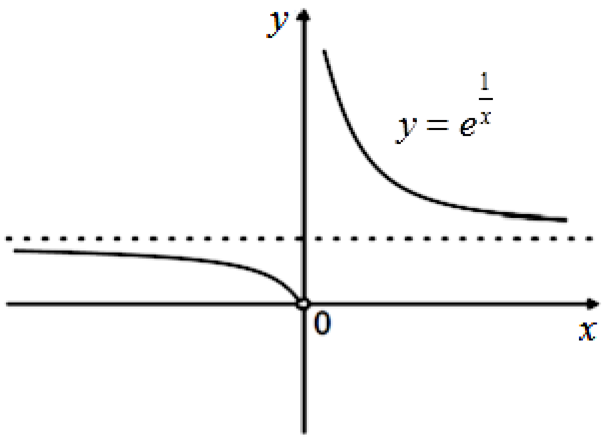

Рис. 4

Пример. Исследовать точки разрыва функции $y = \dfrac{x}{\sin x}$ и построить схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

Решение. Функция не определена в точках, в которых $\sin x = 0$, т. е. $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим сначала точку $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, то $x = 0$ – устранимая точка разрыва. Теперь рассмотрим точки $x = 2\pi n$,

$n \in \boldsymbol{Z},\ \ n \neq 0$. Так как $\lim\limits_{x \to 2\pi n+} \dfrac{x}{\sin x} = +\infty,\ \ \lim\limits_{x \to 2\pi n-} \dfrac{x}{\sin x} = -\infty,$ то точки $x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ n \neq 0$ будут точками разрыва второго рода. Аналогично для точек $x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z},\ \ n \neq 0$ имеем $\lim\limits_{x \to (\pi + 2\pi n)+} \dfrac{x}{\sin x} = -\infty,$ $\lim\limits_{x \to (\pi + 2\pi n)-} \dfrac{x}{\sin x} = +\infty.$ Следовательно, точки $x = \pi + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z},\ \ n \neq 0$ также являются точками разрыва второго рода. График функции $y = \dfrac{x}{\sin x}$ приведен на рис. 5.

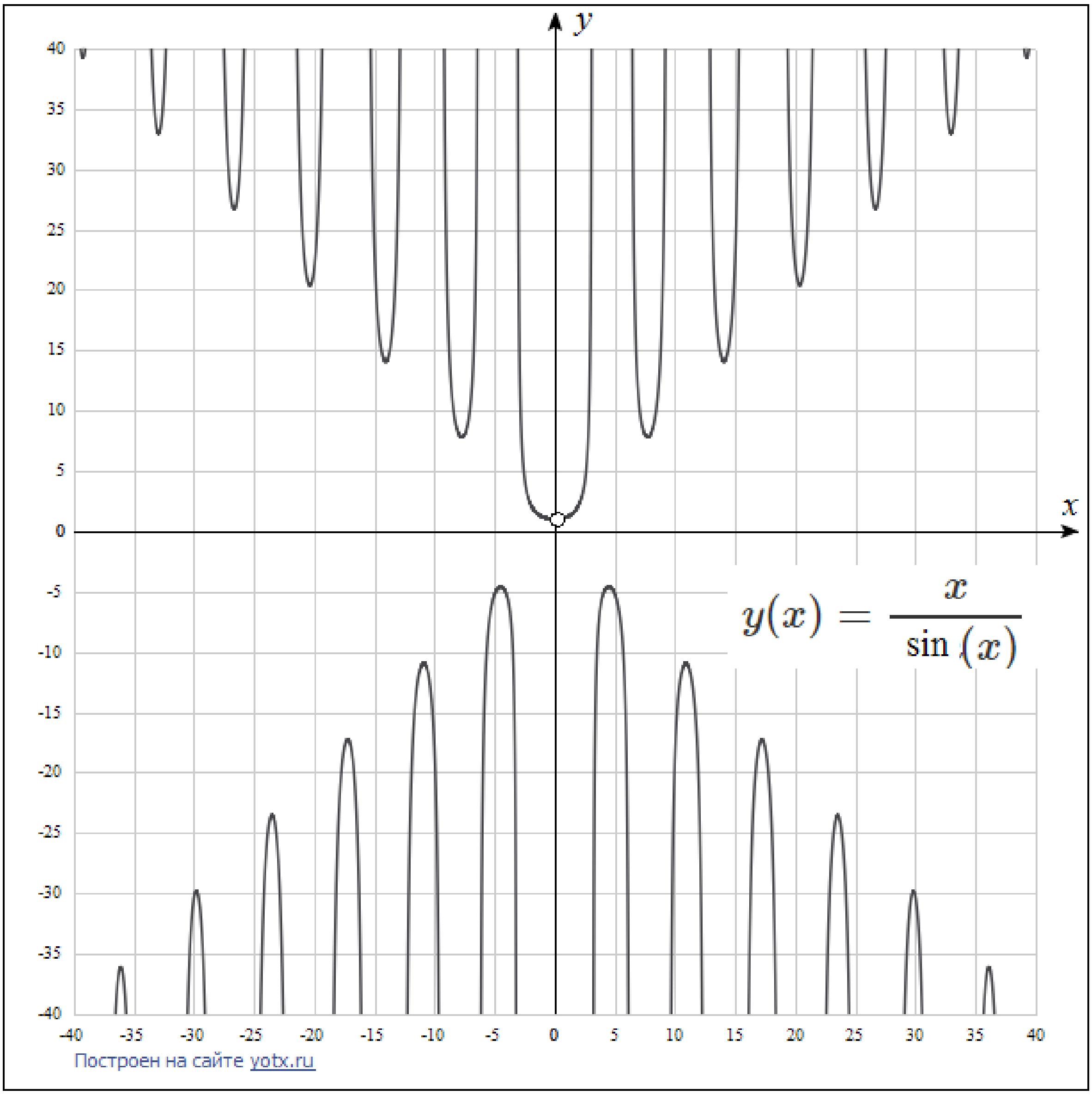

Рис. 5

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Сформулируем теоремы, выражающие основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Первая теорема Больцано – Коши (об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает разные по знаку значения, т. е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой функция обращается в нуль $f(c) = 0$.

Первая теорема Больцано – Коши лежит в основе метода приближенного вычисления корней уравнения вида $f(x) = 0$ с непрерывной левой частью, который получил название *метода половинного деления*. Пусть нам удалось найти отрезок $[a, b]$ такой, что $f(a)f(b) < 0$. Тогда на этом отрезке содержится хотя бы один корень уравнения. Если отрезок $[a, b]$ содержит ровно один корень (например, если функция $f(x)$ монотонна на $[a, b]$), то разделим $[a, b]$ пополам и из двух половинок выберем ту, на концах которой $f(x)$ принимает значения разных знаков. Для этого достаточно определить знак $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Понятно, что искомый корень содержится на выбранном отрезке. Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим содержащий искомый корень отрезок, длина которого равна $\frac{b-a}{2^n}$. Как только она станет меньше наперед заданной точности, вычисления заканчивают. За приближенное значение корня с заданной точностью можно взять середину последнего отрезка.

Пример. Методом половинного деления локализовать с точностью до 0,1 какой-либо корень уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = -3x + 1$, находим, что единственный корень находится на отрезке [0,1]. Разделим этот отрезок пополам и найдем знак функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ в точке 0 и точке $\frac{1}{2}$: $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8} < 0$. Следовательно, искомый корень лежит на отрезке [0; 0,5]. Разбиваем этот отрезок пополам точкой 0,25 и находим знак $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{64}-\frac{3}{4}+1=\frac{17}{64}>0$. Поэтому искомый корень лежит на отрезке [0,25; 0,5]. Разбиваем его пополам точкой 0,375 и находим $f\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{27}{512}-\frac{9}{8}+1=-\frac{37}{512}<0$. Значит, искомый корень лежит на отрезке [0,25; 0,375].

Вторая теорема Больцано – Коши (о промежуточном значении непрерывной функции).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a)=A,\ f(b)=B$. Пусть далее $C-$ любое число, заключенное между A и B. Тогда найдется точка $c\in[a,b]$ такая, что $f(c)=C$.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда она ограничена на этом отрезке, т. е. существует число $M>0$ такое, что $|f(x)|\le M\ \ \forall x\in[a,b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своего наибольшего и наименьшего значений).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, тогда она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

6. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке (a,b). Фиксируем любое значение $x_0\in(a,b)$ и пусть $x\in(a,b)$. Тогда $x-x_0=\Delta x$ называется приращением аргумента. Приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$, где $A-$ число, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$.

Например, если $y = x^2$, то $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$. Следовательно, в этом случае $A = 2x_0$, $\varepsilon(\Delta x) = \Delta x$.

Рассмотрим в данной фиксированной точке x_0 отношение приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (3)$$

Отношение (3) называется разностным отношением. Так как значение x_0 фиксировано, то разностное отношение представляет собой функцию аргумента Δx.

Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0 называется предел разностного отношения (3) при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует). Производную обозначают

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

<u>Пример 1.</u> $y = C$, $\Delta y = C - C = 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, следовательно, $(C)' = 0$.

<u>Пример 2.</u> $y = \sin x$ в любой точке x.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$, следовательно, $(\sin x)' = \cos x$.

Теорема 6.1. Для того чтобы функция была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела производную.

Доказательство. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Это означает, что $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, где $A -$ число, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = A$, т. е. производная существует и $f'(x_0) = A$. Пусть существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon(\Delta x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = 0$, т. е. $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$. Теорема доказана.

Первое слагаемое в последнем равенстве является при $\Delta x \to 0$ главной линейной частью приращения функции и называется **дифференциалом функции.** Дифференциал обозначается $df(x_0)$, таким образом, $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$. Символ Δx заменяется символом dx, который называется дифференциалом независимой переменной *x*. Под дифференциалом независимой переменной *x* можно понимать любое (не зависящее от *x*) число. Договоримся в дальнейшем брать это число равным приращению Δx независимой переменной. Это позволяет переписать формулу для дифференциала в виде $dy = f'(x)dx$.

Теорема 6.2. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Отсюда $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. функция непрерывна в точке x_0. Теорема доказана.

Замечание. Непрерывная функция не всегда дифференцируема. Для функции $y = |x|$ имеем $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|0 + \Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции

Теорема 6.3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в этой точке дифференцируемы также и функции $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ (при условии $v(x) \neq 0$), причем справедливы формулы:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'.$

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

Следствие. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \mathrm{const}$.

Доказательство.

1. $$\big(u(x)+v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)+v'(x).$$

2. $$\big(u(x)v(x)\big)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} v(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} u(x) =$$
$$= u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

3. Сначала докажем, что $\left(\dfrac{1}{v(x)}\right)' = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$. Действительно,

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{v(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)-v(x+\Delta x)}{\Delta x v(x+\Delta x)v(x)} = \frac{-v'(x)}{v^2(x)},$$ тогда

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)} = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Теорема доказана.

Теорема 6.4. (Дифференцирование сложной функции). Если функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $\big(f(g(x_0))\big)' = f'(y_0)g'(x_0)$.

Рассмотрим функцию $z = f(y)$. Тогда дифференциал $dz = f'(y)dy$. Если $z = f(g(x))$, то $dz = f'\big(g'(x)\big)g'(x)dx$. Но $g'(x)dx = dy$, тогда $dz = f'(y)dy$. Таким образом, дифференциал имеет одну и ту же форму, если y – независимая переменная и если y – есть функция от другой переменной.

Теорема 6.5. (Дифференцирование обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 строго монотонна и непрерывна. Пусть, кроме того, $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$. Тогда существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, дифференцируемая в этой точке и

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(\varphi(y_0))}. \qquad (4)$$

Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha -$ угол наклона касательной с положительным направлением оси Ox. Производная обратной функции $\varphi'(y_0) = \operatorname{tg}\beta$, где $\beta -$ угол наклона той же касательной с положительным направлением оси Oy. Так как $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то формула (4) выражает очевидный факт: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

Производные основных элементарных функций

1. $(c)' = 0$.

2. $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$.

3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

5. $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

6. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$.

7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$.

9. $(\sin x)' = \cos x$.

10. $(\cos x)' = -\sin x$.

11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

18. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$.

20. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Докажем некоторые из этих формул:

2. $$\left(x^{n}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = x^n \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^n - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}}\frac{1}{x} = n\cdot x^{n-1}.$$

5. $$\left(e^{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x} - e^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x}\left(e^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = e^{x}.$$

6. $$\left(a^{x}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}\cdot\ln a = a^{x}\ln a.$$

7. $$(\ln x)' = \left.\frac{1}{\left(e^{y}\right)'}\right|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

8. $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

10. $$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

11. $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

12. $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = \dfrac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

13. $(\arcsin x)' = \left.\dfrac{1}{(\sin y)'}\right|_{y=\arcsin x} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $(\arccos x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

15. $(\operatorname{arctg} x)' = \left.\dfrac{1}{\operatorname{tg} y}\right|_{y=\operatorname{arctg} x} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

16. $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arccg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

17. $(\operatorname{ch} x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.

18. $(\operatorname{sh} x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$.

19. $(\operatorname{th} x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

Замечание. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции табличные формулы можно переписать, например: $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$, $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} u'$ и т. п. Здесь $u = u(x)-$ произвольная дифференцируемая функция.

<u>Пример 1.</u> Найти производную функции $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования суммы и частного, а также с учетом того, что $\sin\sqrt{3} - \text{const}$, имеем

$$y' = \left(\sin\sqrt{3}\right)' + \left(\frac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}\right)' = \frac{1}{3}\frac{\left(\sin^2 2x\right)'\cos 4x - (\cos 4x)'\sin^2 2x}{\cos^2 4x} =$$

$$=\frac{2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot 2\cdot\cos 4x+\sin 4x\cdot 4\cdot\sin^2 2x}{3\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x+4\sin 4x\cdot\sin^2 2x}{3\cos^2 4x}=\frac{2\sin 4x\left(\cos 4x+2\sin^2 2x\right)}{3\cos^2 4x}=$$

$$=\frac{2\sin 4x\left(\cos 4x+1-\cos 4x\right)}{3\cos^2 4x}=\frac{2\sin 4x}{3\cos^2 4x}.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y=\left(2x^2+3x-1\right)e^{4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем

$$y'=\left(2x^2+3x-1\right)'e^{4x}+\left(2x^2+3x-1\right)\left(e^{4x}\right)'=\left(4x+3\right)e^{4x}+\left(2x^2+3x-1\right)4e^{4x}=$$

$=e^{4x}\left(8x^2+16x-1\right)$. Тогда дифференциал функции равен $dy=e^{4x}\left(8x^2+16x-1\right)dx$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке равно $f\left(x_0+\Delta x\right)-f(x_0)=f'\left(x_0\right)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, справедливо приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, т. е. $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f(x_0)+f'\left(x_0\right)\Delta x$.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{101}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$. Положим $x_0=100$, $\Delta x=1$. Тогда $y(x_0)=\sqrt{100}=10$, $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{100}}=0,05$. Следовательно, $\sqrt{101}\approx 10+0,05\cdot 1=10,05$.

Логарифмическая производная

Пусть функция $y=f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке *x*. Тогда в этой точке существует $\ln y=\ln f(x)$ и можно вычислить производную этой функции в данной точке *x*: $\frac{y'}{y}=\left(\ln f(x)\right)'$. Величина, определяемая этой формулой, называется логарифмической производной функции $y=f(x)$ в данной точке *x*.

Вычислим логарифмическую производную показательно-степенной функции $y = u(x)^{v(x)}$. Эта функция определена и непрерывна при всех x, для которых $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и $u(x) > 0$. Потребуем, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ были дифференцируемы для рассматриваемых значений x. Тогда $\ln y = \ln u(x)^{v(x)}$, $\ln y = v(x)\ln u(x)$,
$\dfrac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $y' = \left(v'(x)\ln u(x) + v(x)\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)u(x)^{v(x)}$.

Пример. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Прологарифмируем функцию $\ln y = \ln x^x$, $\ln y = x\ln x$. Теперь дифференцируем обе части:

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot \ln x + x\frac{1}{x},\; y' = \left(\ln x + 1\right)x^x.$$

7. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛА. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть на плоскости дана кривая, $M_0 -$ некоторая точка кривой. Пусть M – близкая к M_0 точка на кривой. Прямую M_0M называют секущей. Если точку M неограниченно приближать к точке M_0 по кривой, то секущая будет поворачиваться вокруг M_0.

Касательной к кривой в точке M_0 называют прямую, проходящую через точку M_0, если она является предельным положением секущей, когда $M \to M_0$.

Пусть в некоторой системе координат xOy кривая служит графиком функции $y = f(x)$, $x_0 -$ абсцисса точки M_0, $x = x_0 + \Delta x -$ абсцисса точки M. При $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$ точка M стремится к точке M_0. Слова «прямая (T) является предельным положением секущей (S)» будем понимать в том смысле, что угловой коэффициент k_s прямой (S) стремится к угловому коэффициенту k прямой (T) при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0} k_s = k$. Так как $k_s = \mathrm{tg}\,\varphi$, $k = \mathrm{tg}\,\beta$, то это равносильно тому, что

$\lim\limits_{x\to x_0} \beta = \varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 6).

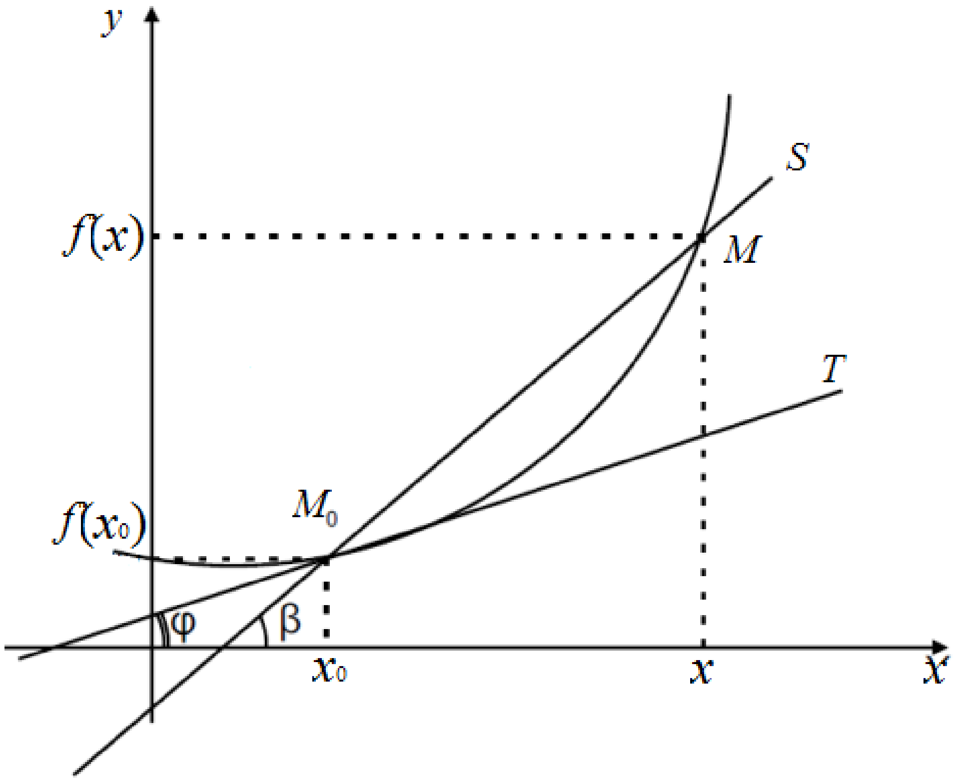

Рис. 6

Поскольку

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \tag{5}$$

то окончательно приходим к определению: невертикальная прямая (T) с угловым коэффициентом k, проходящая через точку $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ есть **касательная к графику функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. В этом и состоит геометрический смысл производной функции в точке.

Таким образом, уравнение касательной $y = f'(x_0)x + b$. Так как $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ принадлежит касательной, то $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Следовательно, уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\left(x - x_0\right). \tag{6}$$

Таким образом, теорема доказана.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует касательная к графику функции, которая задается уравнением (5). Если же предел в уравнении (5) равен $+\infty$ или $-\infty$, то касательной по определению будем считать проходящую через точку $M_0\left(x_0, f(x_0)\right)$ вертикальную прямую $x = x_0$.

Определение. **Нормалью** к кривой в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку, перпендикулярная касательной. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$. Поэтому уравнение

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\left(x - x_0\right) \tag{7}$$

при условии, что $f'(x_0) \neq 0$, есть уравнение нормали в точке x_0. Если же $f'(x_0) = 0$, то нормалью будет вертикальная прямая $x = x_0$.

Физический смысл производной

Пусть функция $y = s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда разностное отношение $\dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{\text{ср}}$ определяет среднюю скорость точки за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. А $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = v_{\text{мгн}}$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени t.

<u>Пример 1.</u> Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение. $y\left(x_0\right) = 14\sqrt{1} - 15\sqrt[3]{1} + 2 = 1$,

$$y' = 14\left(\sqrt{x}\right)' - 15\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (2)' = \frac{14}{2\sqrt{x}} - 15\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{\sqrt{x}} - 5x^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'\left(x_0\right) = \frac{7}{\sqrt{1}} - 5 \cdot 1^{-\frac{2}{3}} = 2.$$

Согласно (6) уравнение касательной $y = 1 + 2\left(x - 1\right)$, $y = 2x - 1$.

Согласно (7) уравнение нормали $y = 1 - \frac{1}{2}\left(x - 1\right)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Пример 2. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=-\frac{1}{2x}$ в точке с абсциссой $x_0=-1$

Решение. $y(x_0)=\frac{1}{2}$, $y'=\frac{1}{2x^2}$, $y'(x_0)=\frac{1}{2}$. Согласно (6) уравнение касательной $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x+1)$, $y=\frac{1}{2}x+1$. Эта прямая пересекает ось Ox в точке $(-2;\ 0)$, а ось Oy в точке $(0;\ 1)$. Следовательно, она отсекает от осей координат прямоугольный треугольник с катетами 2 и 1. Площадь такого треугольника равна половине произведения катетов, т. е. $s=\frac{1}{2}1\cdot 2=1$.

Пример 3. Точка движется по оси Ox по закону $x=3t^2+t+5$ от нулевого момента до момента $t=7$. Найти: а) среднюю скорость на данном промежутке времени; б) момент времени в промежутке [0; 7], в котором мгновенная скорость была бы равна средней.

Решение: а) средняя скорость на данном промежутке времени равна $v_{\text{ср}}=\frac{x(7)-x(0)}{7}=\frac{154}{7}=22$; б) найдем производную данной функции $x'=6t+1$. Следовательно, мгновенная скорость равна средней в момент, когда $6t+1=22$, $t=3{,}5$.

8. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ЛЕЙБНИЦА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Тогда производная $f'(x)$ представляет собой функцию, определенную на (a,b). Может случиться, что эта функция $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке $x\in(a,b)$. Тогда эта производная называется **второй производной**, или **производной второго порядка** функции $f(x)$ в точке x и обозначается $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ или $\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и всех последующих порядков: $f'''(x) = \left(f''(x)\right)', \ldots f^{(m)}(x) = \left(f^{(m-1)}(x)\right)'$. Штрихи для обозначения производных выше третьего порядка не применяют. Используют либо римские цифры, либо арабские в скобках. Удобно считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$. Функцию, имеющую на данном множестве конечную производную порядка *n*, называют *n* раз дифференцируемой на этом множестве.

Физический смысл второй производной

Пусть функция $y = s(t)$ описывает закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда $s'(t) = v(t)$ определяет мгновенную скорость точки в момент времени *t*. Разностное отношение $\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a_{\text{ср}}$ определяет среднее ускорение точки за промежуток времени от *t* до $t + \Delta t$. А $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = a_{\text{мгн}}$ определяет мгновенное ускорение точки в момент времени *t*.

Производные *n*-го порядка некоторых функций

1. $y = x^{\alpha} \left(x > 0, \alpha \in R\right)$,

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots,$ $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1), \cdot \ldots, \cdot(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}$.

2. $y = a^x \left(a > 0, a \neq 1\right)$,

$y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a, \ldots,$ $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

В частности, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

3. $y = \ln x$,

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2},\ y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3},\ y^{(4)} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}, \ldots, y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

4. $y = \sin x$,

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \ldots,$$

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5. $y=\cos x$,

$$y^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример. Найти производную n-го порядка функции $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Решение. $y'=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y''=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$, $y'''=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$, …,

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Формула Лейбница для *n*-й производной произведения двух функций

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n-е производные, тогда справедлива формула

$$(u\cdot v)^{(n)}=u^{(n)}\cdot v+n\cdot u^{(n-1)}\cdot v'+\frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}\cdot v''+\ldots+$$
$$+\frac{n!}{k!(n-k)!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}+\ldots+n\cdot u'\cdot v^{(n-1)}+u\cdot v^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}, \qquad (8)$$

где $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$, $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, которые могут быть найдены с помощью треугольника Паскаля:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
…………………

Пример. По формуле Лейбница найти производную пятого порядка функции $y=\left(x^2+3x+1\right)e^{2x}$.

Решение. По формуле (8) имеем

$$(u\cdot v)^{(5)}=u^{(5)}\cdot v+5\cdot u^{(4)}\cdot v'+10u'''\cdot v''+10u''\cdot v'''+5u'\cdot v^{(4)}+u\cdot v^{(5)}.$$

Положим $u(x)=x^2+3x+1$, тогда $u'=2x+3$, $u''=2$, $u'''=u^{(4)}=u^{(5)}=0$, $v(x)=e^{2x}$, тогда $v'=2e^{2x}$, $v''=4e^{2x}$, $v'''=8e^{2x}$, $v^{(4)}=16e^{2x}$, $v^{(5)}=32e^{2x}$.

Подставим найденные производные, получим

$$(y)^{(5)} = 10\cdot 2\cdot 8e^{2x} + 5(2x+3)16e^{2x} + \left(x^2+3x+1\right)32e^{2x} =$$

$$= 16e^{2x}\left(2x^2+6x+2+10x+15+10\right) = 16e^{2x}\left(2x^2+16x+27\right).$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда существует ее дифференциал $dy = f'(x)dx$, который является функцией двух переменных: точки x и величины dx. Зафиксируем значение приращения аргумента $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал можно рассматривать как функцию от x, заданную на том же интервале (a, b). Если она дифференцируема, то ее дифференциал имеет вид

$$d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)dx = f''(x)\Delta x\, dx.$$

Если и в этом случае значение Δx взять равным dx, то получим $d(dy) = f''(x)\, dx^2$. Это выражение называется **вторым дифференциалом**, или **дифференциалом второго порядка**, и обозначается d^2y, т. е. $d^2y = f''(x)\, dx^2$. Аналогично определим дифференциал третьего порядка $d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)\right)dx^2 = f'''(x)\Delta x\, dx^2 = f'''(x)\, dx^3$, …, дифференциал *n*-го порядка $d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n$. В силу такого определения можно записать $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Для дифференциалов первого порядка мы доказали свойство инвариантности формы, т. е. их форма не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией от другой переменной. Убедимся, что для дифференциалов более высокого порядка это свойство не выполняется. Если x независимая переменная, то второй дифференциал

$$d^2y = f''(x)\, dx^2. \qquad (9)$$

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = f\left(\varphi(t)\right)$. Тогда $dy = f'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$,

$$d^2y = d\left(f'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\right)dt = \left(f'\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\right)'dt^2 =$$

$$= f''\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\varphi'(t)dt^2 + f'\left(\varphi(t)\right)\varphi''(t)dt^2 = f''\left(\varphi(t)\right)\left(\varphi'(t)dt\right)^2 +$$

$$+ f'\left(\varphi(t)\right)\varphi''(t)dt^2 = f''\left(\varphi(t)\right)\left(dx\right)^2 + f'\left(\varphi(t)\right)d^2x = f''\left(x\right)\left(dx\right)^2 + f'\left(x\right)d^2x.$$

Последняя формула отличается от (9) наличием в ней дополнительного и, вообще говоря, не равного нулю члена $f'\left(x\right)d^2x$.

9. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ И НЕЯВНО

Рассмотрим еще один способ задания функции. Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta. \tag{10}$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, тогда, выразив из первого уравнения системы (10) t через x и подставив во второе, получим $y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$. Если вторая функция имеет обратную, то, разрешив второе уравнение относительно $t = \psi^{-1}(y)$ и подставив в первое, получим $x = \varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)$. Система (10), в которой одна из функций имеет обратную, задает некоторую функцию y от x или x от y. Такой способ задания функции называется **параметрическим**.

Например,

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty.$$

Выразив из первого уравнения $t = \sqrt{x}$ и подставив во второе, получим $y = \sin\sqrt{x}$. Любую обычную функцию $y = f(x)$ можно считать заданной параметрически, если положить $x = t$, $y = f(t)$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по переменной t в рассматриваемой области изменения этой переменной. Кроме того, функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию в окрестности рассматриваемой точки $t = \varphi^{-1}(x)$. Поставим задачу о вычислении производных y по x. Будем обозначать их y'_x, $y''_{xx}, \ldots$ В силу инвариантности формы первого дифференциала можем записать $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, где $dy = \psi'(t)dt$, $dx = \varphi'(t)dt$. При этом берем dy и dx в одной и той же точке t для одного и того же dt. Тогда получаем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

$$y''_{xx} = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{\varphi'(t)} = \frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

<u>Пример.</u> Найти первую и вторую производную функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Кривая, определяемая этими уравнениями, называется **циклоидой**.

Решение.

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2\pi n,\, n \in Z),$$

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2} a \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

Функция *y* есть **неявная функция** от *x*, если она задана уравнением $f(x, y) = 0$, не разрешенным относительно *y*. Например, $e^{xy} - x - y = 0$, $\sqrt[x]{y} - \sqrt[y]{x} = 0$. Чтобы найти производную y'_x, дифференцируют обе части равенства по *x*, помня, что *y* есть функция от *x*, а затем разрешают полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от *x* и *y*: $y'_x = \varphi(x,\, y)$. Вторую производную от неявной функции находят, дифференцируя функцию $\varphi(x,\, y)$ по *x*, помня, что *y* есть функция от *x*: $y'' = F\left(x,\, y,\, y'_x\right)$. Заменяя здесь y'_x через $\varphi(x,\, y)$, получают выражение второй производной через *x* и *y*: $y'' = F\left(x,\, y,\, \varphi(x, y)\right)$.

<u>Пример.</u> Найти первую производную функции, заданной неявно $e^{xy} - x - y = 0$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства по *x*, помня, что *y* есть функция от *x*:

$$e^{xy}\left(y + x \cdot y'\right) - 1 - y' = 0,$$

$$e^{xy} x \cdot y' - y' = 1 - y e^{xy},$$

$$y'\left(e^{xy} x - 1\right) = 1 - y e^{xy},$$

$$y' = \frac{1 - y e^{xy}}{e^{xy} x - 1}.$$

10. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление представляет собой универсальный инструмент исследования поведения функции. Особенно близко к дифференциальному исчислению подошел П. Ферма (первая половина XVII в.), который предложил правило отыскания экстремумов функций, по существу, равносильное известному из школьного курса. Как общий метод дифференциальное (и интегральное) исчисление было разработано в конце XVII века в трудах И. Ньютона и Г. Лейбница. Символика, предложенная Лейбницем, которую дополнил А. Лежандр, применяется и сейчас.

Определение. Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $y = f(x)$. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если найдется некоторая окрестность этой точки, в которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ ($f(x) < f(x_0)$при $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).

Теорема 10.1. (Достаточное условие возрастания или убывания функции). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в точке x_0.

Доказательство. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Пусть $f'(x_0) > 0$. По определению предела имеем $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$. Последнее неравенство равносильно $f'(x_0) - \varepsilon < \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$. Тогда $\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > \dfrac{f'(x_0)}{2} > 0$, т. е. $f(x) - f(x_0)$ и $x - x_0$ должны иметь одинаковый знак. Если

$x_0-\delta<x<x_0$, то $x-x_0<0$, следовательно, $f(x)-f(x_0)<0$. Если $x_0<x<x_0+\delta$, то $x-x_0>0$, следовательно, $f(x)-f(x_0)>0$.

Теорема доказана.

Замечание. Положительность (отрицательность) производной $f'(x_0)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $y=f(x)$ в точке x_0. В качестве примера укажем на функцию $y=x^3$, которая возрастает в точке $x=0$ и тем не менее имеет в этой точке производную $f'(0)=0$.

Определение. Точка x_0 называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство

$$f(x)\le f(x_0)\left(f(x)\ge f(x_0)\right). \qquad (*)$$

Если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)\left(f(x)>f(x_0)\right)$, то x_0 называется **точкой строго локального максимума (минимума).**

Точки максимума или минимума функции называются точками экстремума. Неравенства (*) можно перевести на язык приращений и представить в виде $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)\le 0 \quad (\ge 0)$. В случае строгого экстремума эти неравенства строгие при $\Delta x\ne 0$.

Теорема Ферма. (Необходимое условие экстремума). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0, то она не может в этой точке ни возрастать, ни убывать, поскольку тогда в некоторой проколотой окрестности этой точки $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}>0$ ($\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}<0$ соответственно). Но тогда неравенства $f'(x_0)>0 \quad \left(f'(x_0)<0\right)$ невозможны. Остается принять $f'(x_0)=0$. Теорема доказана. Точки, в которых $f'(x)=0$, называются **стационарными**.

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: если в точке x_0 кривой $y = f(x)$, которой соответствует локальный экстремум функции $y = f(x)$, существует касательная, то она параллельна оси Ox (рис. 7).

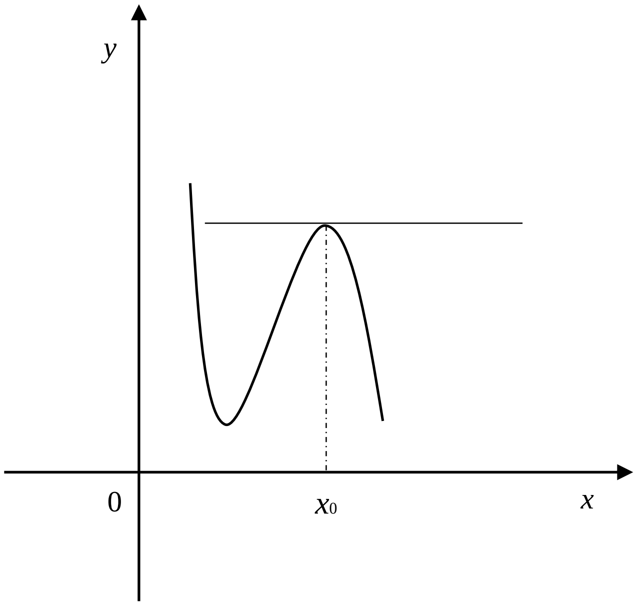

Рис. 7

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема хотя бы на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает своего наибольшего M и наименьшего m значений на этом отрезке, т. е. $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M$. Возможны два случая:

1. $m = M$, тогда $f(x) = \text{const}$ и, следовательно, $f'(x) = 0 \ \forall\ x \in [a, b]$.

2. $m < M$. В этом случае, так как $f(a) = f(b)$, можно утверждать, что либо m, либо M достигается функцией в некоторой внутренней точке $c \in [a,b]$. Но тогда функция $y = f(x)$ имеет в точке c локальный экстремум. Поскольку $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, то по теореме Ферма $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

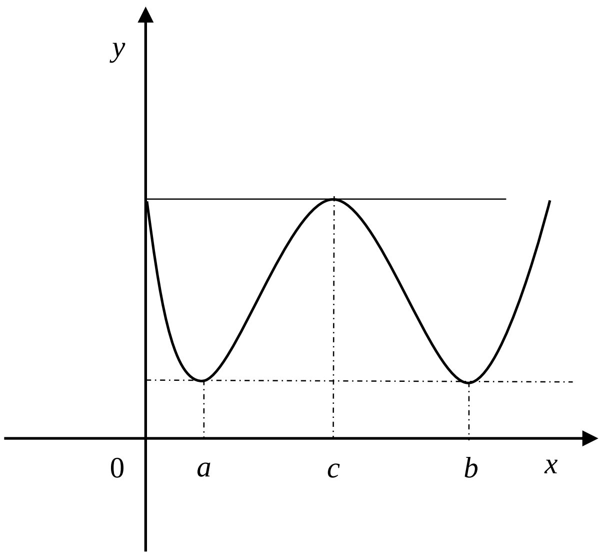

Рис. 8

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox (рис. 8).

Следующая теорема считается важнейшей среди всех теорем дифференциального исчисления.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Убедимся, что она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля:

– она непрерывна на отрезке $[a, b]$ как разность непрерывных функций $y = f(x)$ и линейной функции;

– дифференцируема на интервале (a, b), ее производная $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Кроме того, $F(a) = 0$, $F(b) = 0$, т. е. значения на концах совпадают.

Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, т. е. $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Теорема доказана.

Формула (11) называется формулой Лагранжа, или формулой конечных приращений. Число $c \in (a, b)$ можно представить в виде $c = a + \theta(b - a)$, где $\theta \in (0, 1)$. Тогда формулу (11) можно переписать в виде $f(b) - f(a) = f'\big(a + \theta(b - a)\big)(b - a)$.

Зафиксируем любое $x \in (a, b)$, зададим приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда, записывая формулу Лагранжа для отрезка $[x, x + \Delta x]$, будем иметь $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = f'\big(x + \theta\Delta x\big)\Delta x$, где $\theta \in (0, 1)$.

Для выяснения геометрического смысла теоремы Лагранжа заметим, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\varphi$ есть угловой коэффициент секущей, проходящей через точки $(a,\ f(a))$ и $(b,\ f(b))$, а $f'(c) = \operatorname{tg}\varphi$ есть угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c,\ f(c))$.

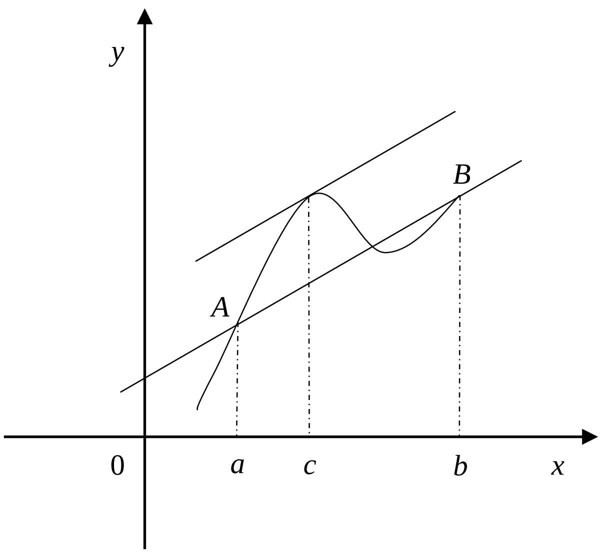

Рис. 9

Формула Лагранжа (11) означает, что на кривой $y = f(x)$ между точками a и b найдется точка c, касательная в которой параллельна секущей AB (рис. 9).

Замечание. Мы получили теорему Лагранжа как следствие теоремы Ролля. Заметим вместе с тем, что сама теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа при $f(a) = f(b)$.

Некоторые следствия из теоремы Лагранжа

Теорема 10.2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$. Тогда $f(x) = \text{const} = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $f'(x) = g'(x)$, то $f(x) = g(x) + C$.

В качестве еще одного следствия теоремы Лагранжа рассмотрим вопрос об условиях, обеспечивающих неубывание (невозрастание) функции на данном интервале.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Неубывающие или невозрастающие функции называются монотонными, а возрастающие или убывающие – строго монотонными.

Теорема 10.3. Для того чтобы функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0 \left(f'(x) \leq 0 \right)$ на интервале (a, b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b). Условие неубывания эквивалентно тому, что $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Тогда, переходя к пределу в этом неравенстве, получим $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Пусть $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$. Возьмем $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Функция $f(x)$ дифференцируема, а значит, и непрерывна на $[x_1,\, x_2]$. Поэтому к $f(x)$ можно применить на $[x_1,\, x_2]$ теорему Лагранжа, в результате чего получим $f(x_2) - f(x_1) = f'\left(c\right)(x_2 - x_1)$. По условию $f'(c) \geq 0$, $x_2 - x_1 > 0$, следовательно, $f(x_2) \geq f(x_1)$. Теорема доказана.

Теорема 10.4. Если $f'(x) > 0 \left(f'(x) < 0 \right)$ на интервале (a, b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b).

Доказательство. Возьмем $\forall x_1,\, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'\left(c\right)(x_2 - x_1) > 0$, поэтому $f(x_2) > f(x_1)$. Теорема доказана.

Теорема 10.5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$. Тогда для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) \geq 0 \left(f'(x_0) \leq 0 \right)$ на интервале (a, b) и не обращалась тождественно в нуль ни на каком отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a, b]$. Из теоремы 10.3 следует, что $f'(x) \geq 0$. Если бы $f'(x) = 0$ на каком-то отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, то $f(x)$ была бы постоянной на этом отрезке. Это противоречит условию строгого возрастания функции.

Пусть $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in (a, b)$, следовательно, функция $f(x)$ не убывает на (a, b) по теореме 10.3, т. е. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Возьмем $\forall x : x_1 \leq x \leq x_2$. Тогда $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Если бы

$f(x_1) = f(x_2)$, то для $\forall x \in [x_1,\ x_2]$ $f(x_1) = \text{const} = f(x_1) = f(x_2)$, следовательно, ее производная на этом отрезке $f'(x) = 0$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ во всех точках этого интервала за исключением конечного числа точек, в которых $f'(x) = 0$, то $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на нем.

Например, рассмотрим функцию $y = x + \sin x$, ее производная $y' = 1 + \cos x \geq 0$ $\forall x \in \boldsymbol{R}$, $y' = 0$ при $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Следовательно, по следствию 10.5 функция строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что $g(a) \neq g(b)$. Если это не так, то для функции $g(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля, а следовательно, нашлась бы точка c, в которой $g'(c) = 0$. Но это противоречит условию теоремы. Итак, $g(a) \neq g(b)$, и мы имеем право рассмотреть следующую вспомогательную функцию: $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$. Проверим для этой функции выполнение условий теоремы Ролля. Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как разность непрерывных функций, дифференцируема на интервале (a, b). Кроме того, очевидно, что $F(a) = F(b) = 0$. Таким образом, условия теоремы Ролля выполнены, следовательно, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. В силу того что $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$, будем иметь $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$. Учитывая, что $g'(c) \neq 0$, получаем требуемую формулу $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Теорема доказана.

Замечание. Формула Лагранжа является частным случаем теоремы Коши при $g(x)=x$.

Теорема 10.6. (Первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

– определены на некотором интервале $(a-\delta,\ a+\delta)$ и дифференцируемы на нем за исключением, быть может, точки $x=a$;

– $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;

– $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Можно считать, что предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\dfrac{g(x)}{f(x)}$. Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$, полагая $f(a)=g(a)=0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке $x=a$. Так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, то по определению предела имеем $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x: 0<|x-a|<\delta\Rightarrow\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-l\right|<\varepsilon$. Возьмем любое x из проколотой δ-окрестности точки a и применим теорему Коши, получим $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-l\right|=\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}-l\right|=\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-l\right|<\varepsilon$, где $c\in(a,x)$. Таким образом, по определению предела имеем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции, то правило Лопиталя можно применять повторно. При этом получим $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Замечание 2. Первое правило Лопиталя легко переносится на случай, когда $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$. Сформулируем теорему для случая, когда $x\to+\infty$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ и $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,+\infty)$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Доказательство. Сделаем замену переменной $x=\dfrac{1}{t}$. Если $x\to+\infty$, то $t\to 0+$. Функции $f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{t}\right)$ определены и дифференцируемы на интервале $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to0+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Пример.</u> Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{6x}=$ $=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$.

Теорема 10.7. (Второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

– определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки $x=a$;

– $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

– $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

<u>Пример.</u> Вычислить предел по правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Раскрытие неопределенностей других видов

Кроме рассмотренных выше неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$, часто встречаются неопределенности следующих видов: $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (0^0), (∞^0).

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=(0\cdot\infty)=$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ или } \lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)1/g(x)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$,

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^{g(x)}=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to a}e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)},$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\ln\big(f(x)\big)=(\infty\cdot 0).$$

Аналогично раскрываются неопределенности видов (0^0) и (∞^0).

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\left(-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)}=-2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=\left(0^0\right)=\lim\limits_{x\to 0+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+}x\cdot\ln x}.$

Вычислим отдельно $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x\cdot\ln x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1/x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+}x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+}x^x=e^0=1.$

11. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. РАЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ФОРМУЛЕ МАКЛОРЕНА

Теорема. (Формула Тейлора). Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки a, x – любое значение аргумента из указанной окрестности, p – произвольное положительное число. Тогда между точками a и x найдется точка ξ такая, что справедлива формула

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x),\quad (12)$$

где

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{\left(x-\xi\right)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).\quad (13)$$

Доказательство. Пусть $f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$

$+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f_n(x,a)$. Тогда (12) можно переписать в виде

$$R_{n+1}(x)=f(x)-f_n(x,\ a).\quad (14)$$

Теорема будет доказана, если мы установим, что $R_{n+1}(x)$ определяется формулой (13).

Фиксируем любое значение x из окрестности, указанной в формулировке теоремы. Ради определенности будем считать, что $x > a$. Рассмотрим на отрезке $[a, x]$ вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x) - f_n(x, t) - (x-t)^p Q(x), \tag{15}$$

где

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}. \tag{16}$$

Подробнее $\varphi(t)$ можно записать в виде

$$\varphi(t) = f(x) - f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) +$$

$$+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x). \tag{17}$$

Покажем, что $\varphi(t)$ удовлетворяет на отрезке $[a, x]$ всем условиям теоремы Ролля. Из формулы (17) и условий, наложенных на $f(x)$, очевидно, что $\varphi(t)$ непрерывна на отрезке $[a, x]$ и дифференцируема на (a, x), так как $f(t)$ и ее производные до порядка n непрерывны на $[a, x]$, а $f^{(n+1)}(t)$ существует и конечна на нем. Убедимся, что $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$. Полагая в (15) $t = a$ и принимая во внимание (16), будем иметь

$$\varphi(a) = f(x) - f_n(x,a) - (x-a)^p Q(x) = f(x) - f_n(x,a) - R_{n+1}(x).$$

Отсюда на основании (14) получим $\varphi(a) = 0$. Равенство $\varphi(x) = 0$ сразу вытекает из формулы (17). Итак, для функции $\varphi(t)$ на отрезке $[a, x]$ выполнены все условия теоремы Ролля, следовательно, внутри $[a, x]$ найдется точка ξ такая, что $\varphi'(\xi) = 0$. Найдем $\varphi'(t)$. Дифференцируя равенство (17), будем иметь

$$\varphi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - f''(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1} -$$

$$-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Легко видеть, что все члены в правой части последнего равенства, за исключением последних двух, взаимно уничтожаются.

Таким образом,

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Полагая здесь $t = \xi$ и учитывая, что $\varphi'(\xi) = 0$, получим $Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$. Сопоставляя это равенство с (16), окончательно будем иметь $R_{n+1}(x) = Q(x)(x-a)^p = \frac{(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}(\xi)$. Теорема доказана.

Замечание. $R_{n+1}(x)$ называется остаточным членом в общей форме или в форме Шлемильха – Роша.

Найдем разложение по формуле Тейлора простейшей функции – алгебраического многочлена n-й степени $f(x) = a_0x^n + {}$ $+a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Так как $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, то и остаточный член $R_{n+1}(x) \equiv 0$, и формула Тейлора принимает вид $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + {} + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Здесь в качестве a можно взять любую точку бесконечной прямой. Таким образом, формула Тейлора позволяет представить любой многочлен $f(x)$ в виде многочлена по степеням $(x-a)$, где a – любое действительное число.

Пусть теперь $f(x)$ – произвольная функция, удовлетворяющая условиям теоремы Тейлора.

Многочлен $f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$ $= f_n(x,\ a)$ называется многочленом Тейлора функции $f(x)$. Дифференцируя $f_n(x,\ a)$ по x и полагая затем $x = a$, получим следующие равенства: $f_n(a,\ a) = f(a)$, $f_n'(a,\ a) = f'(a)$, …, $f_n^{(n)}(a,\ a) = f^{(n)}(a)$. Таким образом, многочлен Тейлора для произвольной функции $f(x)$ обладает следующим свойством: он сам и его производные до порядка n включительно равны в точке $x = a$ соответственно $f(x)$ и ее производным до порядка n.

Различные формы остаточного члена. Формула Маклорена

Преобразуем формулу (13) для остаточного члена. Так как точка ξ лежит между точками *a* и *x*, то найдется такое число $\theta \in (0,1)$, что $\xi - a = \theta(x-a)$, $\xi = a + \theta(x-a)$, $x - \xi = (1-\theta)(x-a)$. Таким образом, формула (13) может быть переписана в виде

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}\left(1-\theta\right)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right). \qquad (18)$$

Рассмотрим теперь два важных частных случая формулы (18):

1) если $p = n + 1$, то получаем остаточный член в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right); \qquad (19)$$

2) если $p = 1$, то получаем остаточный член в форме Коши

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}\left(1-\theta\right)^{n}}{n!} f^{(n+1)}\left(a+\theta(x-a)\right). \qquad (20)$$

Первая форма остаточного члена (19) наиболее употребительна в приложениях. Так как формы Лагранжа и Коши отвечают разным значениям *p*, а θ зависит от *p*, то значения θ в формулах (19) и (20) являются, вообще говоря, различными. Обе формы остаточного члена используются в тех случаях, когда требуется при тех или иных фиксированных значениях *x*, отличных от *a*, приближенно вычислить функцию $f(x)$.

Принято называть **формулой Маклорена** формулу Тейлора с центром в точке $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член имеет вид

1) в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left(\theta x\right), \quad \theta \in (0,1); \qquad (21)$$

2) в форме Коши $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}\left(1-\theta\right)^{n}}{n!} f^{(n+1)}\left(\theta x\right), \quad \theta \in (0,1);$

3) в форме Пеано $R_{n+1}(x) = o\left(x^n\right)$.

Оценка остаточного члена для произвольной функции

Оценим для произвольной функции $f(x)$ остаточный член в формуле Маклорена, взятый в форме Лагранжа. Предположим, что рассматриваемая функция $f(x)$ обладает свойством: существует число M такое, что для всех n и для всех x из рассматриваемой окрестности точки $x = 0$ справедливо неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$. Отсюда вытекает, что $\left|f^{(n)}(\theta x)\right| \le M$, поэтому из формулы (21) следует, что

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\theta x)\right| \le M\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (22)$$

При любом фиксированном x $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Отсюда вытекает, что, выбирая достаточно большой номер n, мы можем сделать правую часть выражения (22) сколь угодно малой. Это дает возможность применять формулу Маклорена для приближенного вычисления значений функций, обладающих указанным свойством с любой наперед заданной точностью. Приведем примеры таких функций:

1. $f(x) = e^x$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Совокупность всех производных этой функции ограничена на любом отрезке $[-r;\ r]$, $r > 0$ числом $M = e^r$.

2. $f(x) = \sin x$ или $f(x) = \cos x$. Совокупность всех производных каждой из этих функций ограничена всюду числом $M = 1$.

Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

1. Показательная функция $f(x) = e^x$.

Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1 \quad \forall n$, то формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$, $\theta \in (0,1)$.

На любом отрезке $[-r;r]$, $r>0$, в силу того что $\left|e^{\theta x}\right|<e^r$, получаем следующую оценку $\left|R_{n+1}(x)\right|<\dfrac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$.

2. Функция $f(x)=\sin x$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\sin\dfrac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k, & n=2k+1,\end{cases}$ формула Маклорена имеет вид

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\theta x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)=$$

$$=(-1)^n\cos\theta x\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

На любом отрезке $[-r;\ r]$ $r>0$ для остаточного члена справедлива оценка $\left|R_{2n+1}(x)\right|<\dfrac{r^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

3. Функция $f(x)=\cos x$.

Поскольку $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, $f^{(n)}(0)=\cos\dfrac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ (-1)^k, & n=2k,\end{cases}$ формула Маклорена имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+2}(x),$$

где $R_{2n+2}(x)=\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\theta x)=\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\left(\theta x+\dfrac{(2n+2)\pi}{2}\right)=$

$=(-1)^{n+1}\cos\theta x\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $\left|R_{2n+2}(x)\right|<\dfrac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

4. Функция $f(x)=\ln(1+x)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2},\ldots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Тогда $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

Поэтому формула Маклорена имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Остаточный член на этот раз запишем и оценим в форме Лагранжа и в форме Коши:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (в форме Лагранжа),} \qquad (23)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)}{(1+\theta x)^{n+1}} \text{ (в форме Коши).}$$

Для оценки $R_{n+1}(x)$ для значений $0 \le x \le 1$ удобнее исходить из остаточного члена в форме Лагранжа. Переходя в формуле (23) к модулям, получим $\forall x \in [0,1] \Rightarrow |R_{n+1}(x)| < \dfrac{1}{n+1}$. Отсюда очевидно, что для всех $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$. Оценим теперь остаточный член для отрицательных значений $x \in [-r,\ 0]$, где $0 < r < 1$. Для этого будем исходить из остаточного члена в форме Коши. Перепишем этот остаточный член в виде

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{x^{n+1}}{1+\theta x}. \qquad (24)$$

Принимая во внимание, что для рассматриваемых значений x имеем $\dfrac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, переходя в равенстве (24) к модулям, будем иметь $|R_{n+1}(x)| < \dfrac{r^{n+1}}{1-r}$. Так как $0 < r < 1$, то эта оценка позволяет утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

5. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}$.

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$.

Формула Маклорена имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1},\ 0<\theta<1.$$

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$. В частном случае, когда $\alpha=n\in\boldsymbol{N}$, $R_{n+1}(x)=0$ и мы получаем формулу бинома Ньютона $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+x^n$.

<u>Пример.</u> Разложить функцию $f(x)=\ln(1+2x-8x^2)$ в ряд Маклорена.

Решение. Найдем корни квадратного трехчлена $1+2x-8x^2$ и разложим его на множители: $D=4+32=36$, $x_1=\frac{-2+6}{-16}=-\frac{1}{4}$, $x_2=\frac{-2-6}{-16}=\frac{1}{2}$. Тогда $1+2x-8x^2=-8\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=(1-2x)(1+4x)$, $f(x)=\ln(1-2x)+\ln(1+4x)$. Воспользуемся разложением функции $\ln(1+t)=t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+\ldots$ Полагая в этой формуле сначала $t=-2x$, а затем $t=4x$, окончательно получим

$$f(x)=-2x-\frac{4x^2}{2}-\frac{8x^3}{3}-\ldots-\frac{2^nx^n}{n}-\ldots+4x-\frac{16x^2}{2}+\frac{64x^3}{3}-\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{4^nx^n}{n}+\ldots=2x-10x^2+\frac{56x^3}{3}-\ldots+\frac{\left((-1)^{n-1}4^n-2^n\right)x^n}{n}+\ldots$$

Использование формулы Маклорена для асимптотических оценок элементарных функций и вычисления пределов

Формулу или оценку, характеризующую поведение функции $f(x)$ при $x\to a$, называют асимптотической. Такие оценки немедленно вытекают из формулы Маклорена, если взять в этой формуле остаточный член в форме Пеано:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right);$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n +$$

$$+o\left(x^n\right).$$

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3!} + o(x)\right) = -\frac{1}{6};$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} + o(1)\right) = \frac{1}{12}.$$

12. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Сформулируем несколько достаточных условий достижения функцией локального экстремума в заданной точке.

Теорема 12.1. (Первое достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т. е. $f'(x_0) = 0$). Тогда: 1) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка строго локального максимума; 2) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то x_0 – точка строго локального минимума; 3) если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство. По теореме Лагранжа имеем $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$, где точка c находится на интервале с концами x_0 и x.

Если $x > x_0$, то $c > x_0$ и, значит, $f'(c) < 0$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$. Если $x < x_0$, то $c < x_0$, значит, $f'(c) > 0$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$. Доказательство пункта 2) проводится аналогично. Если $f'(x) > 0$ справа и слева от точки x_0, то $f'(c)(x - x_0) < 0$ слева и $f'(c)(x - x_0) > 0$ справа. Отсюда имеем $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ при $x_1 < x_0 < x_2$. Случай $f'(x) < 0$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 12.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то x_0 – точка строго локального максимума (локального минимума). Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 12.1, так как там мы нигде не использовали существование производной $f'(x)$ в точке x_0.

Пример. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Ее производная равна $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Она нигде не обращается в нуль и не определена в точке $x = 0$, в которой имеет разрыв второго рода. При $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$, следовательно, $x = 0$ – точка локального минимума.

Теорема 12.3. (Второе достаточное условие экстремума). Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда: 1) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строго локального минимума; 2) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строго локального максимума.

Доказательство. Если $f''(x_0) > 0$, то $f'(x)$ возрастает в точке x_0, т. е. $f'(x)$ меняет знак с "–" на "+", поэтому x_0 – точка строго локального минимума. Если $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке x_0, т. е. $f'(x)$ меняет знак с "+" на "–", поэтому x_0 – точка строго локального максимума. Теорема доказана.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$, проходящая через любую точку $M\left(x, f(x)\right)$ этого графика $(a < x < b)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy.

Определение. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**выпуклой вверх**) на (a, b), если график этой функции расположен не ниже (не выше) касательной, проведенной к графику в любой точке этого интервала.

На рис. 10 изображен график функции, выпуклой вниз, на рис. 11 – график функции, выпуклой вверх.

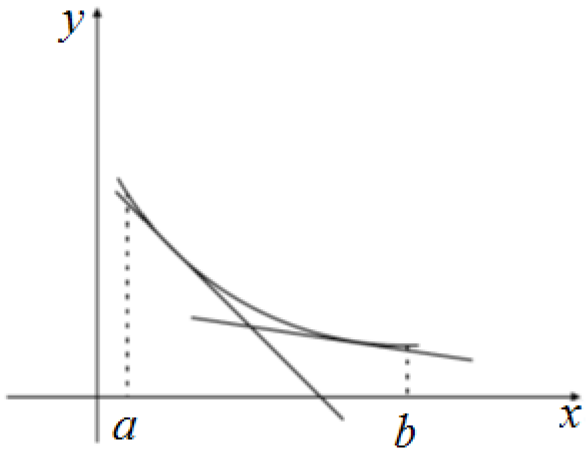

Рис. 10

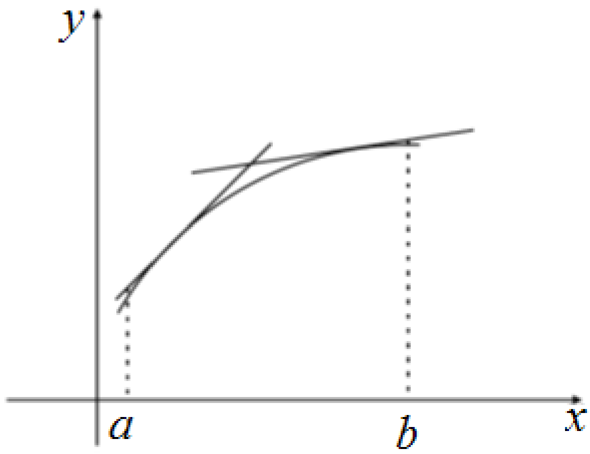

Рис. 11

Теорема 12.4. Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную и $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ для всех $x \in (a, b)$, то функция выпукла вниз (выпукла вверх) на этом интервале.

Доказательство. Рассмотрим случай $f''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Возьмем любую точку $x_0 \in (a, b)$ и проведем касательную к графику функции в точке $\left(x_0, f(x_0)\right)$. Ее уравнение имеет вид

$$y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{25}$$

Требуется доказать, что график функции лежит не ниже касательной, проведенной в этой точке. Разложим $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора, полагая в этой формуле $n = 1$, получим

$$y_{\text{кр}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \tag{26}$$

где остаточный член взят в форме Лагранжа, а ξ заключено между x_0 и x. Сопоставляя формулы (25) и (26), будем иметь $y_{\text{кр}} - y_{\text{кас}} = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$. Так как по условию $f''(x) \ge 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $\dfrac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \ge 0$, т. е. $y_{\text{кр}} \ge y_{\text{кас}}$. Теорема доказана.

Теорема 12.5. Пусть функция $f''(x)$ непрерывна и положительна (отрицательна) в точке x_0. Тогда существует окрестность этой точки, в которой функция $f(x)$ выпукла вниз (выпукла вверх).

Пример. Исследовать на выпуклость функцию $f(x) = \ln x$.

Решение. Функция определена при $x > 0$. Производная первого порядка $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ на $(0, +\infty)$, следовательно, функция возрастает на всей области определения. Производная второго порядка $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ на $(0, +\infty)$, следовательно, функция выпукла вверх на всей области определения.

Определение. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба дифференцируемой функции $y = f(x)$, если существует проколотая окрестность этой точки такая, что график функции имеет в левой и правой полуокрестностях разные направления выпуклости.

Теорема 12.6. (Необходимое условие точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0 и x_0 − точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 12.7. (Первое достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и $f''(x)$ имеет в ней разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$. Тогда если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, то x_0 − точка перегиба.

Теорема 12.8. (Второе достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \ne 0$. Тогда x_0 − точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ на плоскости xOy называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Например, график функции $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ (рис. 12). Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших значениях x.

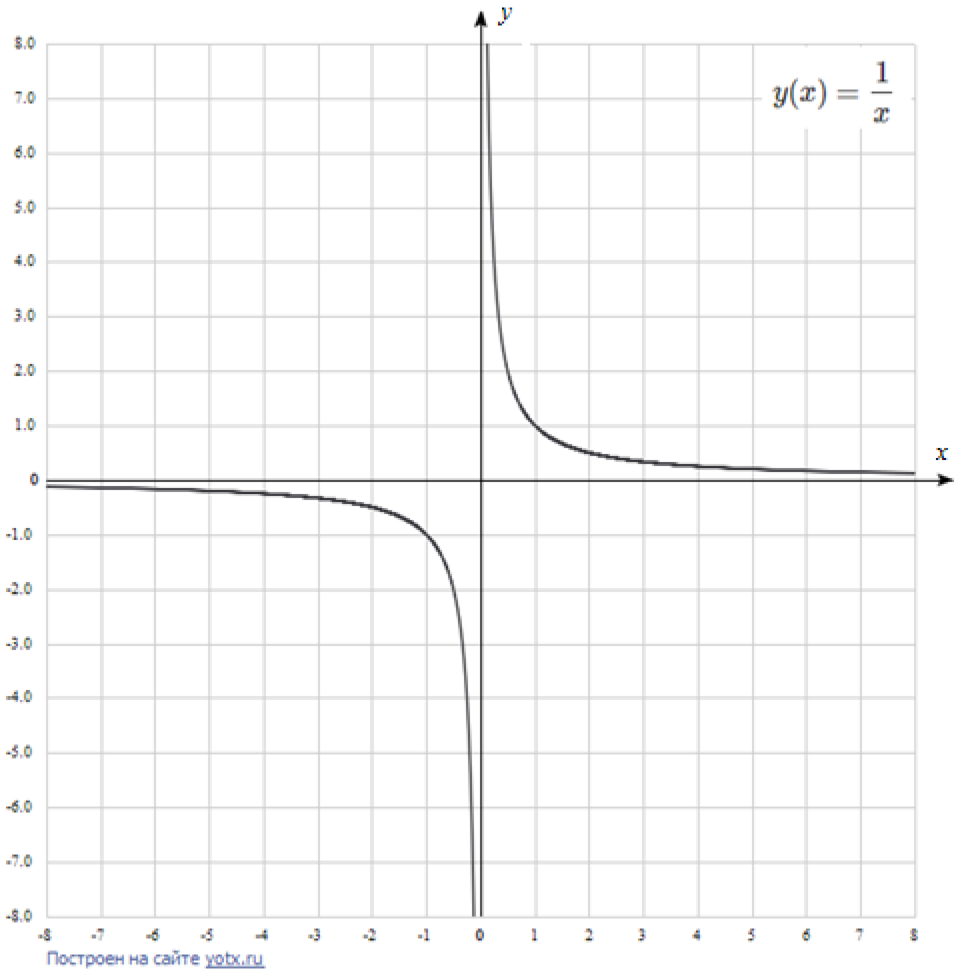

Рис. 12

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 12.9. Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ графика функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) = b$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$. При $k = 0$ $y = b -$ горизонтальная асимптота, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Область определения функции.
2. Исследование на четность, нечетность.
3. Точки пересечения с осями координат.
4. Исследование на монотонность и точки экстремума.
5. Исследование на выпуклость и точки перегиба.
6. Нахождение вертикальных, наклонных асимптот.
7. График функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{3x^2 - 6x}{x-1}$.

1. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Функция общего вида, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$; $y = 0$ при $3x^2 - 6x = 0$, $3x(x-2) = 0$, т. е. при $x = 0$ или $x = 2$. График функции проходит через точки $(0; 0)$ и $(2; 0)$.

4. $$y' = \frac{(6x-6)(x-1) - \left(3x^2 - 6x\right)}{(x-1)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 6 - 3x^2 + 6x}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 - 6x + 6}{(x-1)^2} = \frac{3\left(x^2 - 2x + 2\right)}{(x-1)^2},$$ $y' = 0$ при $x^2 - 2x + 2 = 0$, $D = 4 - 8 = -4 < 0$,

т. е. производная в нуль не обращается, поэтому точек экстремума нет. Так как $y' > 0$ на всей области определения, то функция монотонно возрастает на $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

5. $y'' = 3\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-\left(x^2-2x+2\right)2(x-1)}{(x-1)^4} = 6\dfrac{(x-1)^2-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^3} =$

$= \dfrac{-6}{(x-1)^3}$, $y'' \neq 0$, следовательно, точек перегиба нет. y'' не определена в точке $x=1$. Если $x<1$, то $y''>0$, следовательно, функция выпукла вниз на $(-\infty; 1)$. Если $x>1$, то $y''<0$, следовательно, функция выпукла вверх на $(1; +\infty)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1} = -\infty$, следовательно, $x=1-$ вертикальная асимптота.

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+6}{x^2-x} = 3$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1} - 3x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-6x+6-3x^2+3x}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+6}{x-1} = -3$, следовательно, $y = 3x-3$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

7. График функции (рис. 13).

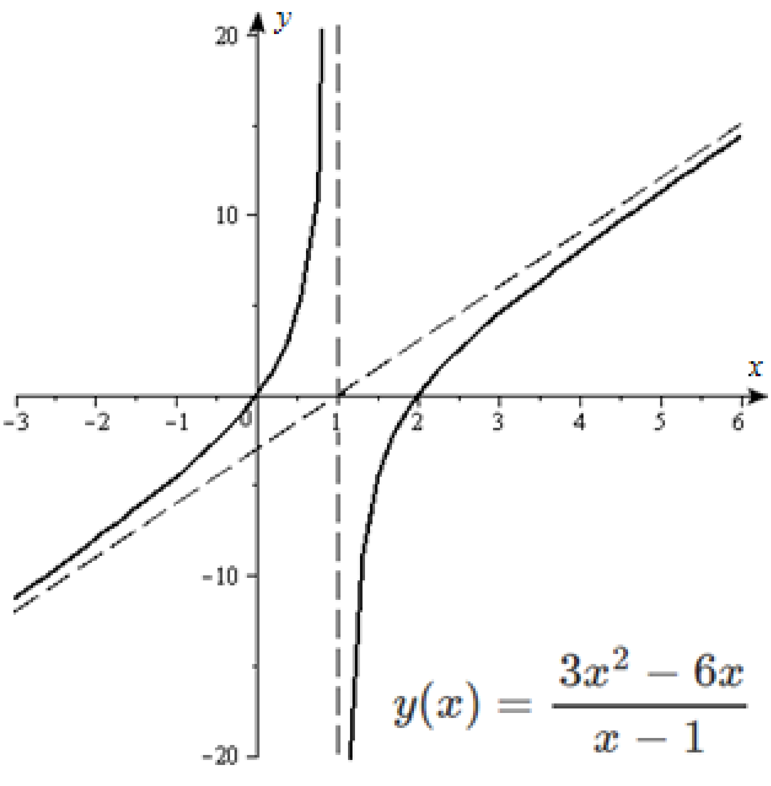

Рис. 13

13. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a, b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса функция $y = f(x)$ достигает в некоторой точке отрезка $[a, b]$ своего наибольшего (наименьшего) значения. Наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a, b]$ (тогда оно совпадает с одним из локальных максимумов (минимумов) функции $y = f(x)$), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Отсюда вытекает правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке:

1) найти производную;

2) найти точки локального экстремума и выбрать среди них те, которые принадлежат $[a, b]$;

3) вычислить значения функции в этих точках и в граничных точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее значения.

<u>Пример 1.</u> Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15$ на отрезке $\left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. $y' = \dfrac{-8}{x^3} - 8$, $\dfrac{-8}{x^3} - 8 = 0$, $\dfrac{-8}{x^3} = 8$, $x^3 = -1$, $x = -1 \in \left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$.

y' не определена в $x = 0 \notin \left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Вычисляем $y(-2) = \dfrac{4}{4} + 16 - 15 = 2$, $y(-2) = \dfrac{4}{4} + 16 - 15 = 2$,

$y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=4\cdot 4+4-15=5$, следовательно, $\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x)=y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=5$,

$\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x)=y(-1)=-6$ (рис. 14).

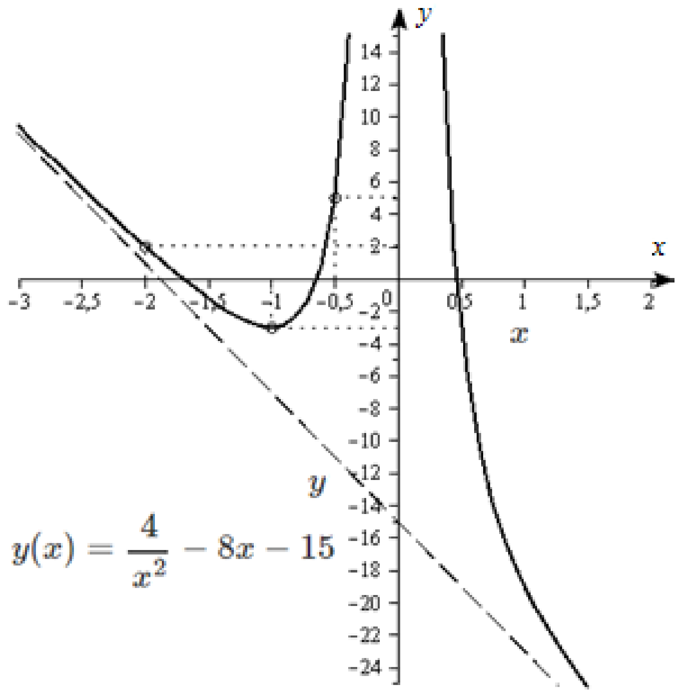

Рис. 14

<u>Пример 2</u> (задача ЕГЭ). Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе суммарно трудятся x^2 часов в неделю, тогда за эту неделю они произведут x единиц товара, а на втором заводе суммарно трудятся y^2 часов в неделю, тогда за эту неделю они произведут y единиц товара. По условию $500x^2+300y^2=1\,200\,000$.

Требуется найти максимум функции $f = x + y$. Выразим из первого уравнения y через x, получим $y = \sqrt{\frac{12000 - 5x^2}{3}}$. Подставим в выражение функции f, тогда $f = x + \sqrt{\frac{12000 - 5x^2}{3}}$. Найдем производную функции $f' = 1 - \frac{5x}{\sqrt{3}\sqrt{12000 - 5x^2}}$. $f' = 0$ при $\sqrt{3}\sqrt{12000 - 5x^2} = 5x$, $3(12000 - 5x^2) = 25x^2$, $36000 = 40x^2$, $900 = x^2$, $x = \pm 30$, но $x = -30$ не удовлетворяет условию задачи. Проверяем знак производной: $f' > 0$ при $x < 30$ и $f' < 0$ при $x > 30$, следовательно, $x = 30$ – точка локального максимума функции. Тогда $y = \sqrt{2500} = 50$ и максимальное количество единиц товара равно 80.

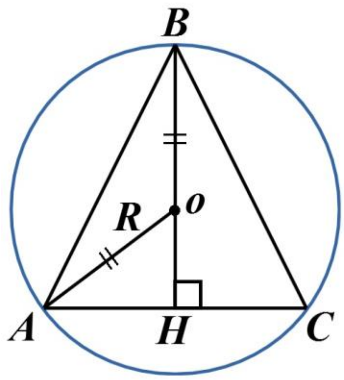

Рис. 15

<u>Пример 3.</u> Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом *R* (рис. 15).

Решение. Пусть высота конуса равна *h*. Тогда $OH = h - R$. По теореме Пифагора из ΔAOH: $AH^2 = r^2 = R^2 - (h - R)^2 = 2Rh - h^2$. Тогда объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh - h^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(2Rh^2 - h^3\right)$. Найдем производную этой функции: $V' = \frac{1}{3}\pi\left(4Rh - 3h^2\right)$. Нули производной $V' = 0$ при $4Rh - 3h^2 = 0$, $h(4R - 3h) = 0$, $h = 0$ не удовлетворяет условию задачи, $h = \frac{4R}{3}$. Проверяем знак производной: $V' > 0$ при $h < \frac{4R}{3}$ и $V' < 0$ при $h > \frac{4R}{3}$, следовательно, $h = \frac{4R}{3}$ – точка локального максимума функции.

Ответ: $h = \frac{4R}{3}$.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 1

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+3}=2$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n-1}{2n+4}=\frac{7}{2}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-4n}{2n+3}=-2$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n}{2n+5}=-\frac{3}{2}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3-2n}=-2$
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{4-5n}=-\frac{2}{5}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n}{4n+1}=-\frac{1}{4}$
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n}{5-n}=3$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-5n}{2n+1}=-\frac{5}{2}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+5}=\frac{1}{2}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{3n^2+4}=-\frac{1}{3}$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-4}{n^2+3}=2$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2n^2+1}=\frac{3}{2}$
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{1-2n^2}=-\frac{1}{2}$
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{2n^2-1}=2$
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{5-4n^2}=-\frac{1}{4}$
18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n^2}{n^2+5}=-1$
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^2}{2n^2+5}=4$
20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{3-2n^2}=\frac{1}{2}$
21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3+1}=2$
22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3+2}=3$
23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2n^3-4}=\frac{1}{2}$
24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5-4n}{2n+7}=-2$
25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{2n+3}=3$
26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n}{2n+3}=-\frac{1}{2}$
27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-8n}{2n+1}=-4$
28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+n}{2n-1}=\frac{1}{2}$
29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5n}{n-3}=5$
30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{10n-3}=\frac{1}{2}$

2. Вычислить предел последовательности.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3-n)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(4-n)^2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+2)^2+(2n+1)^2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+2)^2+(n+1)^3}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2+(n-4)^2}{(4-n)^2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n-1)^2}{(n+6)^3-(n-6)^3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n}{(4n+1)^2+(n-1)^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^2+(3n-1)^2}{(n+4)^3-(n-4)^3}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2+(n-2)^2}{(n+6)^3-n^3}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+1)^2+(n-2)^2}{(n+2)^3-n^3}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(2n-1)^2}{(n+1)^3-n^3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(3n-1)^2}{(n+5)^3-n^3}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+1)^2+(n-1)^2}{n^3-(n-1)^3}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n+1)^3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2+(n-1)^2}{n^3-(n+2)^3}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n-6)^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n-6)^3}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2-(n-2)^2}{n^3-(n+3)^3}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n}{(n-2)^2+(2n+1)^3}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(3n-4)^2}{(5-n)^2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-5)^2-(n-4)^2}{(6-n)^2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2+(n-4)^2}{(4-n)^2}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-7)^2-(n+1)^2}{(n-1)^2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+7)^2-(n-2)^2}{(4n-1)^2}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-7)^2-(2n+1)^2}{(3n-1)^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-5)^2-(4n+1)^2}{(3n+1)^2}$

3. Вычислить предел последовательности.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$

4. Вычислить предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)\left(x+1\right)}{x^4+4x^2-5}$

2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^2+3x+2\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(2x^2-x-1\right)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\left(x^2+2x-3\right)^2}{x^3+4x^2+3x}$

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^3-2x-1\right)^2}{x^4+2x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(1+x\right)^3-\left(3x+1\right)}{x+x^5}$

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$

16. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

18. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

19. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$

20. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{\left(x^2-x-2\right)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$

23. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

24. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

26. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

27. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$

29. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

30. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$

5. Вычислить предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{7+2x}-5}{\sqrt{x}-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{2+x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{\sqrt{12-x}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{7+x}-2}{\sqrt[3]{x-5}+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{4+2x}-6}{\sqrt{x}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6+2x}-2}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{6+x}-1}{\sqrt[3]{x-3}+2}$

11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7-x}-3}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

12. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{8+x}-1}{\sqrt[3]{x-1}+2}$

13. $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{\sqrt{10+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}+2}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x-8}-2}$

16. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$

17. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10+x}-3}{\sqrt[3]{x}+1}$

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt[3]{x-26}+3}$

22. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{2x-1}-7}{\sqrt{x}-5}$

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7+3x}-1}{\sqrt[3]{2x+3}+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{20+x}-5}{\sqrt[3]{x-4}-1}$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

27. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{9+x}-1}{\sqrt[3]{x}+2}$

28. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{6+x}-4}{\sqrt[3]{x-2}-2}$

29. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{\sqrt{5+x}-4}{\sqrt[3]{x-3}-2}$

30. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt[3]{x+2}-3}$

6. Вычислить предел функции, используя таблицу эквивалентностей.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg} 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg} 2\pi x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 2\pi x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin \pi x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot\operatorname{tg} 5x}{\arcsin 2x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\sin x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg} x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{\ln(1+2x)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{3x}-1}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{x^4}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\ln(x+1)}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$

7. Вычислить предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2}{\operatorname{tg}3x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}4x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^x\right)^{\frac{1}{\ln(1+4x)}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg}3x)^{\frac{1}{1\sqrt{1+x-1}}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\operatorname{ctg}x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin 4x\right)^{\frac{1}{\ln(1-3x)}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\ln(1-3x^2)}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+8x\right)^{\frac{1}{4^x-1}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1-4x^2)}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^x\right)^{\frac{1}{\sin 5x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\arcsin^2 x\right)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 4x}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-6x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\arcsin 2x\right)^{\frac{2}{e^{4x}-1}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{\operatorname{arctg}^2 3x}}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\cdot\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\arcsin^2 2x}}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}5x}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{\ln(1+3x)}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^x\right)^{\frac{1}{\sqrt{1+2x}-1}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{1-\cos 4x}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{2x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}4x}}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-6x^2\right)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\arcsin 5x^2\right)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x^2)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}^2 2x}}$

8. Исследовать точки разрыва функции и построить схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

1. $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

2. $y=2^{\frac{1}{x}}$

3. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$

4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

5. $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

6. $y = \dfrac{5^x - 1}{x}$

7. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

8. $y = \dfrac{x^2 - 25}{x-5}$

9. $y = 5^{\frac{1}{x+3}}$

10. $y = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$

11. $y = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

12. $y = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3 - x^2, & x > 1 \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} 2x+5, & x < -1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \ge -1 \end{cases}$

14. $y = \begin{cases} -x, & x \le -1 \\ \dfrac{2}{x-1}, & x > -1 \end{cases}$

15. $y = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$

16. $y = 3^{\frac{1}{x}} - 1$

17. $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$

18. $y = \dfrac{2^x - 1}{x}$

19. $y = \dfrac{|x|}{x}$

20. $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

21. $y = \dfrac{x}{x-4}$

22. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 5}$

23. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

24. $y = \dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

25. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

26. $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & x \le 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$

27. $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x \le 1 \\ 4 - 2x, & 1 < x < 2{,}5 \\ 2x - 7, & x \ge 2{,}5 \end{cases}$

28. $y = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ (x-1)^2, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & x > 2{,}5 \end{cases}$

29. $y = \dfrac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$

30. $y = \dfrac{4}{x^2 - 2x + 1}$

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ № 2
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Найти производную функции.

1. $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$
2. $y=\cos\ln 2-\dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 6x}$
3. $y=\operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x}$
4. $y=\operatorname{ctg}\sqrt[3]{5}-\dfrac{\cos^2 4x}{8\sin 8x}$
5. $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$
6. $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$
7. $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$
8. $y=\operatorname{ctg}2-\dfrac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$
9. $y=\operatorname{ctg}\cos 2+\dfrac{\sin^2 6x}{6\cos 12x}$
10. $y=\sqrt[3]{\operatorname{ctg}2}-\dfrac{\cos^2 10x}{20\sin 20x}$
11. $y=\dfrac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 10x}{10\cos 20x}$
12. $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos^2 12x}{24\sin 24x}$
13. $y=8\sin\operatorname{ctg}3+\dfrac{\sin^2 5x}{5\cos 10x}$
14. $y=\dfrac{\cos\operatorname{ctg}3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$
15. $y=\dfrac{\cos\operatorname{tg}3\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$
16. $y=\dfrac{\sin\operatorname{tg}7\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$
17. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sin 3\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$
18. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$
19. $y=\dfrac{\operatorname{tg}\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19s\cos 38x}$
20. $y=\operatorname{ctg}\cos 5-\dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$
21. $y=\sqrt{\operatorname{tg}4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$
22. $y=\cos\ln 13-\dfrac{\cos^2 22x}{44\sin 44x}$
23. $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$
24. $y=\operatorname{ctg}\sin\dfrac{1}{13}-\dfrac{\cos^2 24x}{48\sin 48x}$
25. $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$
26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\dfrac{\cos^2 26x}{52\sin 52x}$
27. $y=\sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$
28. $y=\sin\sqrt[3]{\operatorname{tg}2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$
29. $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$
30. $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$

2. Найти дифференциал функции.

1. $y=\left(2x^2+3x-1\right)e^{4x}$
2. $y=\left(-x^2+4x-2\right)e^{2x}$
3. $y=\left(3x^3-4x+5\right)e^{x}$
4. $y=\left(x^4-2x^2+7\right)e^{3x}$
5. $y=\left(-x^2+3x\right)e^{5x}$
6. $y=\left(2x^3+3x^2-1\right)e^{2x}$
7. $y=\left(10x^2+3x\right)e^{7x}$
8. $y=\left(4x^2-3x+5\right)e^{3x}$
9. $y=\left(2x^4+3x^3-1\right)e^{2x}$
10. $y=\left(2x^2+3x+1\right)e^{5x}$
11. $y=\left(4x^2-3x+4\right)e^{6x}$
12. $y=\left(2x^3+3x^2-1\right)e^{3x}$
13. $y=\left(x^2-3x-9\right)e^{3x}$
14. $y=\left(10x^2-3x+8\right)e^{9x}$
15. $y=\left(7x^2-3x+6\right)e^{2x}$
16. $y=\left(2x^2+4x-6\right)e^{x/2}$
17. $y=\left(2x^4+3x^3-1\right)e^{2x}$
18. $y=\left(2x^2+3x\right)e^{5x}$
19. $y=\left(x^2+8x-2\right)e^{x/2}$
20. $y=\left(-x^2+5x-8\right)e^{3x}$
21. $y=\left(x^3+3x^2-1\right)e^{5x}$
22. $y=\left(8x^2+4x-1\right)e^{3x}$
23. $y=\left(5x^2-7x-1\right)e^{6x}$
24. $y=\left(-8x^2+3x-6\right)e^{2x}$
25. $y=\left(5x^2+3x-7\right)e^{8x}$
26. $y=\left(4x^2+3x+9\right)e^{5x}$
27. $y=\left(-3x^2+3x-1\right)e^{6x}$
28. $y=\left(6x^2+3x-8\right)e^{4x}$
29. $y=\left(x^2+5x-7\right)e^{2x}$
30. $y=\left(5x^2+7x-9\right)e^{4x}$

3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала.

1. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7,76$
2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$; $x=1,012$
3. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$; $x=0,98$
4. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=27,54$
5. $y=\arcsin x$; $x=0,08$
6. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$; $x=0,97$
7. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=27,54$
8. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7,64$
9. $y=\sqrt{4x-1}$; $x=2,56$
10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$; $x=1,016$
11. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8,36$
12. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x=4,16$
13. $y=x^7$; $x=2,002$
14. $y=\sqrt{4x-3}$; $x=1,78$

15. $y=\sqrt{x^2+x+3}$; $x=1{,}97$

16. $y=x^{11}$; $x=1{,}021$

17. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=1{,}21$

18. $y=x^{21}$; $x=0{,}998$

19. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $x=1{,}03$

20. $y=x^6$; $x=2{,}01$

21. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8{,}24$

22. $y=x^7$; $x=1{,}996$

23. $y=\sqrt{x^3}$; $x=0{,}98$

24. $y=x^5$; $x=2{,}997$

25. $y=\sqrt[5]{x^2}$; $x=1{,}03$

26. $y=x^4$; $x=3{,}998$

27. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$; $x=0{,}01$

28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$; $x=0{,}01$

29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; $x=1{,}02$

30. $y=\sqrt{x^2+5}$; $x=1{,}58$

4. Найти производную функции.

1. $y=(x+1)^{\operatorname{arctg} x}$
2. $y=(\sin x)^x$
3. $y=(x+5)^{\arcsin x}$
4. $y=(x+7)^{e^x}$
5. $y=(\cos x)^{\operatorname{tg} x}$
6. $y=(x-1)^{\operatorname{ctg} x}$
7. $y=(x^2+3)^{\sin x}$
8. $y=(x+5)^{\cos x}$
9. $y=(x^4+3)^{\ln x}$
10. $y=(x+1)^{3^x}$
11. $y=(x^2+4)^{\sqrt{x}}$
12. $y=(x^2+1)^{\arcsin x}$
13. $y=(x+9)^{\arccos x}$
14. $y=(x+8)^{\operatorname{arctg} x}$
15. $y=(x+6)^{\operatorname{arcctg} x}$
16. $y=(x)^{e^x}$
17. $y=(x+2)^{5^x}$
18. $y=(x+3)^{x^4}$
19. $y=(x+8)^{x/2}$
20. $y=(x+5)^{3x}$
21. $y=(x+3)^{\log_5 x}$
22. $y=(x+4)^{x+4}$
23. $y=(x)^{x^2}$
24. $y=(x^2+3)^{2x}$
25. $y=(x+7)^{8x}$
26. $y=(4x+3)^{5x}$
27. $y=(3x-1)^{x^3}$
28. $y=(3x-8)^{x^4}$
29. $y=(5x-7)^{x^2}$
30. $y=(7x-9)^{x^7}$.

5. Найти производную функции, заданной параметрически.

1. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \frac{t^3+1}{t^2-1}, \\ y = \frac{1}{t^2-1} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2\operatorname{tg} t, \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin 2t} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \operatorname{arctg} t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \frac{t}{2} \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t) \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t, \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3 + 2\ln t}{t} \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \sqrt{t-2}, \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3-1}, \\ y = \ln t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t \end{cases}$

6. Найти производную y'_x функции $y(x)$, заданной неявно.

1. $e^{x+y} = xy$
2. $y = 1 + xe^y$
3. $e^{2xy} = x^2 + y^2$
4. $x\sin y - y\sin x = 0$
5. $e^x - e^y = y - x$
6. $x + y = e^{x-y}$
7. $x^3 + y^3 = 3xy$
8. $x + y = e^{x+y}$
9. $ye^x + e^y = 0$
10. $x + y = e^{x-y}$
11. $\ln(x+y) = x + y$
12. $x^4 + y^4 = 4xy$
13. $x\cos y - y\sin x = 0$
14. $x^y = y^x$
15. $x^4 + y^4 = x^2y^2$
16. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 0$
17. $x\sin y - y\cos x = 0$
18. $\ln(x-y) = x - y$
19. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$
20. $e^y = x^2y$
21. $\operatorname{arctg} y = x + y$
22. $\cos(x+y) = x + y$
23. $\sin(x+y) = x + y$
24. $y\ln x - x\ln y = x + y$
25. $\cos(xy) = y$
26. $\sin(xy) = y$
27. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$
28. $x^2 + y^2 = 2xy$
29. $e^{x-y} = xy$
30. $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

7. По формуле Лейбница найти производную указанного порядка.

1. $y = \left(2x^2 + 3x - 1\right)\sin x$, $y''' = ?$
2. $y = \left(-x^2 + 2\right)\cos x$, $y^{(4)} = ?$
3. $y = \left(4x + 5\right)\ln x$, $y''' = ?$
4. $y = \left(2x^2 + 7\right)e^{2x}$, $y^{(4)} = ?$
5. $y = \left(-x + 3\right)\cos 5x$, $y''' = ?$
6. $y = \left(3x^2 - 1\right)\ln x$, $y''' = ?$
7. $y = \left(10x^2 + 3x\right)2^x$, $y^{(4)} = ?$
8. $y = \left(3x + 5\right)3^x$, $y''' = ?$
9. $y = \left(3x^3 - 1\right)\sin 2x$, $y^{(4)} = ?$
10. $y = \left(3x + 1\right)e^{5x}$, $y^{(4)} = ?$
11. $y = \left(2x^2 + 6\right)e^{x/2}$, $y^{(4)} = ?$
12. $y = \left(3x^3 - 1\right)e^{2x}$, $y^{(4)} = ?$
13. $y = \left(2x^2 + 3x\right)e^{5x}$, $y^{(4)} = ?$
14. $y = \left(x^2 + 2\right)\cos x$, $y^{(4)} = ?$
15. $y = \left(-x^2 + 8\right)e^{3x}$, $y^{(4)} = ?$
16. $y = \left(3x^2 - 1\right)\ln x$, $y''' = ?$
17. $y = \left(8x^2 + 1\right)e^{3x}$, $y^{(4)} = ?$
18. $y = \left(5x^2 - 1\right)4^x$, $y''' = ?$
19. $y = \left(-8x^2 + 6\right)2^x$, $y^{(4)} = ?$
20. $y = \left(3x - 7\right)e^{2x}$, $y^{(5)} = ?$

21. $y=(3x+4)2^x$, $y'''=?$

22. $y=(3x^2-1)e^{3x}$, $y^{(4)}=?$

23. $y=(3x-9)4^x$, $y^{(4)}=?$

24. $y=(10x^2+8)\sin x$, $y'''=?$

25. $y=(7x^2+6)e^{2x}$, $y^{(4)}=?$

26. $y=(3x+9)e^{3x}$, $y^{(5)}=?$

27. $y=(5x-1)3^x$, $y^{(4)}=?$

28. $y=(6x+3)4^x$, $y^{(4)}=?$

29. $y=(5x-7)e^{2x}$, $y^{(5)}=?$

30. $y=(7x-9)e^{4x}$, $y^{(4)}=?$

8. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке.

1. $y=(4x-x^2)/4$; 2
2. $y=x-x^3$; –1
3. $y=x+\sqrt{x^3}$; 1
4. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 4;
5. $y=2x^2-3x+1$; 1
6. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 64
7. $y=2x^2+3$; –1
8. $y=x^2-4x$; 1
9. $y=\dfrac{x^5-1}{x^4+1}$; 1
10. $y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})$; 1
11. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; –2
12. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$; 1
13. $y=\dfrac{1+3x^2}{3+x^2}$; 1
14. $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$; 1
15. $y=\dfrac{x^2}{10}+3$; 2
16. $y=2x^2+3x-1$; –2
17. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$; 4
18. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$; –8
19. $y=8\sqrt[4]{x}-70$; 16
20. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$; 3
21. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$; 2
22. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}$; 1
23. $y=2x+\dfrac{1}{x}$; 1
24. $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^2}$; 1
25. $y=\dfrac{1}{3x+2}$; 2
26. $y=\dfrac{1}{3}(x^2-3x+3)$; 3
27. $y=-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x})$; 1
28. $y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2$; 1
29. $y=\dfrac{1}{3}(3x-2x^3)$; 1
30. $y=\dfrac{1}{4}(x^2-2x-3)$; 4

9. Найти площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

1. $y=-\dfrac{1}{2x}$, $x_0=-1$
2. $y=-\dfrac{2}{x}$, $x_0=-3$
3. $y=\dfrac{3}{x}$, $x_0=5$
4. $y=\dfrac{4}{x}$, $x_0=1$
5. $y=\dfrac{5}{x}$, $x_0=2$
6. $y=\dfrac{6}{x}$, $x_0=2$
7. $y=\dfrac{7}{x}$, $x_0=3$
8. $y=\dfrac{8}{x}$, $x_0=2$
9. $y=\dfrac{9}{x}$, $x_0=3$
10. $y=\dfrac{5}{x}$, $x_0=-1$
11. $y=-\dfrac{6}{x}$, $x_0=3$
12. $y=-\dfrac{2}{x}$, $x_0=-2$
13. $y=-\dfrac{8}{x}$, $x_0=-3$
14. $y=-\dfrac{4}{x}$, $x_0=2$
15. $y=\dfrac{7}{x}$, $x_0=-2$
16. $y=\dfrac{8}{x}$, $x_0=-1$
17. $y=-\dfrac{7}{x}$, $x_0=1$
18. $y=\dfrac{3}{x}$, $x_0=-2$
19. $y=\dfrac{4}{x}$, $x_0\ x_0=3$
20. $y=\dfrac{5}{x}$, $x_0=1$
21. $y=\dfrac{9}{x}$, $x_0=2$
22. $y=\dfrac{2}{x}$, $x_0=2$
23. $y=\dfrac{6}{x}$, $x_0=1$
24. $y=\dfrac{10}{x}$, $x_0=1$
25. $y=\dfrac{5}{x}$, $x_0=-5$
26. $y=-\dfrac{7}{x}$, $x_0=1$
27. $y=\dfrac{4}{x}$, $x_0=-2$
28. $y=\dfrac{3}{x}$, $x_0=4$
29. $y=-\dfrac{5}{x}$, $x_0=3$
30. $y=\dfrac{7}{2x}$, $x_0=-4$

10. Вычислить предел по правилу Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1}{\cos x+\dfrac{x^2}{2}-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{atctg} x-\sin x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\operatorname{atctg} 3x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\operatorname{arctg} x+x^3}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\operatorname{arctg} x-x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg} 2x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin 2x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg} x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg} 2x-7x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 2x+\operatorname{tg} x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin 2x-\operatorname{tg} x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^3}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x-\sin x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg} x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg} x-\operatorname{arctg} x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg} x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg} 2x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin 2x-\operatorname{tg} x}$

11. Разложить функцию по формуле Маклорена.

1. $y=\ln\left(1-x-6x^2\right)$

2. $y=\ln\left(1+x-6x^2\right)$

3. $y=\ln\left(1-x-12x^2\right)$

4. $y=\ln\left(1-x-20x^2\right)$

5. $y=\ln\left(1+x-2x^2\right)$

6. $y=\ln\left(1+4x-5x^2\right)$

7. $y=\ln\left(1+3x-4x^2\right)$

8. $y=\left(2-e^x\right)^2$

9. $y=2x\cos^2\dfrac{x}{2}-x$

10. $y=(x-1)\sin 5x$

11. $y=2x\sin^2\dfrac{x}{2}-x$

12. $y=\dfrac{\sin 2x}{x}-\cos 2x$

13. $y=\dfrac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$

14. $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$

15. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$

16. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$

17. $y=\left(3+e^{-x}\right)^2$

18. $y=\left(1+e^{2x}\right)^2$

19. $y=\dfrac{\operatorname{sh}2x}{x}-2$

20. $y=\dfrac{\operatorname{ch}3x-1}{x^2}$

21. $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}-2$

22. $y=(x-1)\operatorname{sh}x$

23. $y=(x-1)\operatorname{ch}x$

24. $y=x^2\cdot\sqrt{4-3x}$

25. $y=x\cdot\sqrt[3]{27-2x}$

26. $y=\sqrt[4]{16-5x}$

27. $y=\sqrt[3]{8-3x}$

28. $y=\sqrt[4]{256-5x}$

29. $y=\ln\left(1+x-12x^2\right)$

30. $y=\ln\left(1+6x-7x^2\right)$

12. Провести полное исследование и построить график функции.

1. $y=\dfrac{3x^2-6x}{x-1}$

2. $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$

3. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

5. $y=\dfrac{4x-8}{(x-1)^2}$

6. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

7. $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

8. $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

9. $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

10. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

11. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3}$

12. $y=\dfrac{x^2+8}{(x+2)^2}$

13. $y=\sqrt{4x^2+7}$

14. $y=(x-1)\,e^{1-x}$

15. $y=\dfrac{x^2-8}{(x-1)^2}$

16. $y=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$

17. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

18. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

19. $y=\dfrac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$

20. $y=\dfrac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$

21. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

22. $y=(x-1)^2e^x$

23. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $y=\dfrac{18x-3x^2}{(x-3)^2}$

25. $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$

26. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

27. $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$

28. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

29. $y=\dfrac{(2x+1)x}{(x+3)(1-x)}$

30. $y=(3x+5)e^{3x-2}$

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16,\quad [1;\,4]$

2. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2},\quad [1;\,4]$

3. $y = 2\sqrt{x} - x,\quad [0;\,4]$

4. $y = x - 4\sqrt{x} + 5,\quad [1;\,9]$

5. $y = \dfrac{10}{1+x^2},\quad [0;\,3]$

6. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59,\quad [2;\,4]$

7. $y = \dfrac{4x}{4+x^2},\quad [-4;\,2]$

8. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8,\quad [-4;\,-1]$

9. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2,\quad [1;\,5]$

10. $y = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15,\quad \left[\dfrac{1}{2};\,2\right]$

11. $y = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15,\quad \left[-2;\,-\dfrac{1}{2}\right]$

12. $y = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - 3x + 1,\quad [1;\,9]$

13. $y = x + \dfrac{36}{x},\quad [1;\,9]$

14. $y = \dfrac{x^2+25}{x},\quad [-10;\,-1]$

15. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8,\quad [-1;\,7]$

16. $y = (x+4)^2(x+3) - 6,\quad [-5;\,-3{,}5]$

17. $y = x^3 - 6x^2,\quad [-4;\,3]$

18. $y = 6x - x\sqrt{x} + 1,\quad [9;\,25]$

19. $y = 4 + x + \dfrac{4}{x},\quad [-4;\,-1]$

20. $y = 3x^5 - 20x^3 - 54,\quad [-4;\,-1]$

21. $y = (x+3)^2(x+5) - 1,\quad [-4;\,-1]$

22. $y = (x-2)^2(x-4) + 5,\quad [1;\,3]$

23. $y = x^5 - 5x^3 - 20x,\quad [-6;\,1]$

24. $y = 3x - 2x\sqrt{x},\quad [0;\,4]$

25. $y = x\sqrt{x} - 3x + 1,\quad [1;\,9]$

26. $y = \dfrac{x^2+25}{x},\quad [1;\,10]$

27. $y = -\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1,\quad [1;\,9]$

28. $y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}},\quad [0;\,4]$

29. $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1,\quad [1;\,9]$

30. $y = 5 + 9x - \dfrac{x^3}{3},\quad [-3;\,3]$

14. Решить задачу.

1. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день работы на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

2. Леонид является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые приборы, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно $4t^3$ часов в неделю, то за эту неделю они производят t приборов; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^3 часов в неделю, они производят t приборов.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Леонид платит рабочему 1 тыс. руб. Необходимо, чтобы за неделю суммарно производилось 20 приборов. Какую наименьшую сумму придется тратить владельцу заводов еженедельно на оплату труда рабочих?

3. Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 руб., а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 руб. Антон готов выделять 900 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

4. Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 руб., а на заводе, расположенном во втором городе, – 200 руб. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

5. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 руб. Григорий готов выделять 5 000 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

6. Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 200 руб., а на заводе, расположенном во втором городе, – 300 руб. Вадим готов выделять 1 200 000 руб. в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

7. Строительство нового завода стоит 115 млн руб. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 9$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $p – (0{,}5x^2 + x + 9)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

8. Строительство нового завода стоит 122 млн руб. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 – 2x + 10$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $p – 0{,}5x^2 – 2x + 10$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 4 года?

9. Строительство нового завода стоит 78 млн руб. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + 2x + 6$ млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в миллионах рублей) за один год составит $p - 0{,}5x^2 + 2x + 6$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 3 года?

10. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ млн руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в миллионах рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн руб.?

11. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн руб. в год. При цене p тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в миллионах рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн руб.?

12. Два велосипедиста равномерно движутся по взаимно перпендикулярным дорогам по направлению к перекрестку этих дорог. Один из них движется со скоростью 40 км/ч и находится на расстоянии 5 км от перекрестка, второй движется со скоростью 30 км/ч и находится на расстоянии 3 км от перекрестка. Через сколько минут расстояние между велосипедистами станет наименьшим? Каково будет это наименьшее расстояние.

13. Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью v км/ч. После того как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение v, при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

14. В бассейн проведены три трубы. Первая труба наливает 30 $м^3$ воды в час. Вторая труба наливает в час на $3V$ $м^3$ меньше, чем первая ($0 < V < 10$), а третья наливает в час на $10V$ $м^3$ больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 30 % бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,7 бассейна. При каком значении V бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

15. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

16. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

17. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

19. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 30 м^2 и номера «люкс» площадью 40 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 940 м^2. Предприниматель может определить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 4000 руб. в стуки, а номер «люкс» – 5000 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

20. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 м^2 и номера «люкс» площадью 45 м^2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 м^2. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 руб. в сутки, а номер «люкс» – 4000 руб. в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

21. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 га. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу – по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

22. В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

23. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом – 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

24. Первичная информация разделяется по серверам № 1 и № 2 и обрабатывается на них. С сервера № 1 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера № 2 при объеме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 < t < 55$. Каков наибольший общий объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гбайт?

25. В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,2 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

26. В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

27. В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 ч в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

28. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 см^3, причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность была наименьшей?

29. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

30. Какова должна быть высота конуса, вписанного в шар радиусом R, для того чтобы его боковая поверхность была наибольшей?

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

1. Множества, операции над множествами.
2. Натуральные, целые и рациональные числа. Иррациональность $\sqrt{2}$. Определение действительного числа.
3. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.
4. Предел суммы, произведения и частного двух сходящихся последовательностей. Предельный переход в неравенствах.
5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, их свойства и связь между ними.
6. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e.
7. Функции. Основные понятия. Способы задания. Композиция функций. Элементарные функции.
8. Предел функции в точке. Сведение предела функции к пределу последовательности. Предел сложной функции.
9. Предельный переход в неравенствах. Первый замечательный предел и следствия из него.
10. Второй замечательный предел и следствия из него.
11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, связь между ними. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентностей.
12. Односторонние пределы. Непрерывность функции в точке: эквивалентные определения.
13. Непрерывность суммы, произведения частного и сложной функции.
14. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.
15. Теорема об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции. Метод половинного деления.
16. Теорема о промежуточном значении непрерывной функции.
17. Теорема об ограниченности непрерывной на отрезке функции.
18. Теорема о достижении непрерывной на отрезке функции своего наибольшего и наименьшего значений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Производная и дифференциал функции. Связь между ними. Непрерывность дифференцируемой функции.
2. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной . Уравнение нормали.
3. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного (с доказательством).
4. Дифференцирование сложной функции.
5. Производная обратной функции. Логарифмическая производная.
6. Таблица производных основных элементарных функций (с доказательством).
7. Производные высших порядков. *n*-е производные функций x^{α}, a^x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$.
8. Формула Лейбница *n*-й производной произведения двух функций.
9. Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков.
10. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.
11. Достаточное условие возрастания или убывания функции. Теорема Ферма.
12. Теорема Ролля.
13. Теорема Лагранжа.
14. Следствия из теоремы Лагранжа: необходимые и достаточные условия постоянства и монотонности функции.
15. Теорема Коши.
16. Первое и второе правила Лопиталя. Раскрытие неопределенностей других видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.
17. Достаточные условия экстремума функции.
18. Выпуклость графика функции.
19. Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия точек перегиба.
20. Асимптоты графика функции.
21. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-практическое пособие отражает долголетний опыт работы кафедры алгебры и геометрии ВлГУ со студентами очной формы обучения техническим специальностям.

Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в книге большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты первого курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьезной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных областях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтенгольц, Г. М. Основы математического анализа. В 2 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – 448 с. – ISBN 978-5-8114-0190.

2. Ильин, В. А. Основы математического анализа. В 2 ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Поздняк. – М. : Физматлит, 2014. – 648 с. – ISBN 978-5-9221-0902-4.

3. Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-8334-X.

4. Валиков, К. В. Лекции по математическому анализу. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / К. В. Валиков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2004. – 200 с. – ISBN 5-89368-479-6.

5. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу : пособие для ун-тов и пед. вузов. В 2 ч. Ч. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2001. – 725 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-4294-5.

6. Кузнецов, Л. А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие. – 3-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) – ISBN 5-8114-0574-X.

7. Дубровин, Н. И. Задачник по математике. 1-й семестр / Н. И. Дубровин, А. Ю. Тухтамирзаев ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2011. – 67 с. – ISBN 978-5-9984-0159-9.

8. РЕШУ ЕГЭ: Математика ЕГЭ [Электронный ресурс]. – URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 13.03.2018).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

ФОРМУЛЫ (c, n = const – постоянные)				ПРАВИЛА
Элементарные функции		Сложные функции		
$f(x)$	$f'(x)$	$f(u)$	$f'(u)$	Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
c	0			
x	1			
x^n	$n\,x^{n-1}$	u^n	$n\,u^{n-1} \cdot u'$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$	Производная суммы/разности $(u \pm v)' = u' \pm v'$
$\dfrac{1}{x} = x^{-1}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{u} = u^{-1}$	$-\dfrac{1}{u^2}u'$	
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$	
a^x ($a>0$)	$a^x \cdot \ln a$	a^u ($a>0$)	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln u$	$\dfrac{1}{u}u'$	Производная произведения $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a u$	$\dfrac{1}{u \cdot \ln a}u'$	
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$	Производная частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u}u'$	
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin u$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	Производная сложной функции $y = f\big(g(x)\big)$, $u = g(x)$, $y' = f'_u\big(g'_x(x)\big)$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} u$	$\dfrac{1}{1+u^2}u'$	
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\dfrac{1}{1+u^2}u'$	

Функция, заданная параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Логарифмическое дифференцирование (функция в степени функции)

$$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u \Rightarrow (\ln y)' = (v \cdot \ln u)' \Rightarrow y' = y(v' \cdot \ln u + v \cdot u'/u)$$

Уравнение касательной:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$$

Уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{(x - x_0)}{y_0'}$$

Угловой коэффициент, тангенс угла наклона: $y'_x = \operatorname{tg}\varphi = k$

Дифференциалы функции: $dy = y'_x\,dx$, $dy^2 = y''_{xx}\,dx^2$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна
ОРЕШКИНА Ольга Владимировна

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-практическое пособие

Редактор А. П. Володина

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректор О. В. Балашова

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой, А. Н. Герасина

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 02.12.19.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,05. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.