

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. П. ЛЕГАЕВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Учебное пособие



Владимир 2019

УДК 681.2
ББК 30.10
Л38

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ
зав. кафедрой радиотехники и радиосистем
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
О. Р. Никитин

Кандидат технических наук, доцент
зам. начальника отдела измерительной техники
ЗАО «Автоматика плюс»
В. М. Дерябин

Легаев, В. П.

Л38 Преобразование измерительных сигналов : учеб. пособие /
В. П. Легаев ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. –
Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 151 с.
ISBN 978-5-9984-0924-0

Рассмотрены основы теории информации, вопросы кодирования и декодирования, модуляции и демодуляции, восприятия, передачи, обработки и представления информации.

Рассчитано на студентов высших учебных заведений старших курсов, обучающихся по направлениям подготовки 12.03.01, 12.04.01 – Приборостроение, 27.03.04 – Управление в технических системах, 27.03.02 – Управление качеством, и может быть использовано инженерно-техническими работниками различных областей промышленности.

Табл. 8. Ил. 57. Библиогр.: 7 назв.

УДК 681.2
ББК 30.10

ISBN 978-5-9984-0924-0

© ВлГУ, 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии рассмотрены основы теории информации, дано представление о шумах как о случайных процессах, рассмотрены виды носителей сигналов, спектры и помехоустойчивость модулированных сигналов, дискретизация информации по уровню и времени и др.

При написании учебного пособия автор стремился излагать материал таким образом, чтобы он оптимально усваивался студентами на лекционных занятиях. Принятая методика predeterminedena многолетним опытом преподавания автором одноименного курса во Владимирском государственном университете.

Материалом пособия могут воспользоваться специалисты различных областей промышленности.

Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ШУМАХ КАК О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ

Поскольку основные физические процессы, для исследования которых используются методы обработки сигналов и методы корреляционного анализа, являются случайными, рассмотрим здесь представления о случайных процессах (они не так уж просты, как могут показаться с первого взгляда). Существует множество физических процессов, для которых зависимость наблюдаемых величин от внешних условий устанавливается с помощью легко обнаруживаемых законов. Например, напряжение на выходе линейного фильтра может быть представлено в виде функции параметров фильтра и эволюции входной величины, причем значение напряжения на выходе» вычисленное на основе этой функции, будет тем более точным» чем точнее известны параметры фильтра и эволюция входной величины.

Движение частицы под действием некоторых сил можно легко вычислить и полностью «предсказать», если известны начальные условия и «движущие силы».

Однако, существуют такие процессы (и они многочисленны), для которых наблюдаемые величины не могут быть выражены через начальные условия и «движущие силы» с помощью простых законов.

Рассмотрим, например, шум в электрическом контуре. Если мы попытаемся связать мгновенную величину напряжения шума с движением электронов (явлением, которое порождает этот шум), то сразу же столкнемся с проблемой, неразрешимой в настоящее время и теоретически (из-за соотношения неопределенности, например), и практически (из-за огромного числа одновременно решаемых уравнений). Если же мы хотим количественно оценить шум, то будем вынуждены характеризовать его величинами, отличающимися от мгновенных значений напряжения. Этими величинами являются статистические характеристики шума.

Рассмотрим другой пример случайного процесса – игру в кости. Теоретически можно «предсказать» результат бросания игральных ко-

стей, но для этого необходимо знать полный набор физических и геометрических характеристик игральных костей и поверхности, на которую их бросают, начальные условия бросания и т. д. Если бы все эти исходные данные можно было легко измерить, а вычисления достаточно быстро выполнить, то в игре не было бы элемента Случайности. Возможно, что в сравнительно недалеком будущем исключение случайности в этой игре станет реальностью. Именно невозможность на практике получить все исходные данные и на их основе вычислить простым способом конечное состояние системы заставляют нас рассматривать результат бросания игральных костей как случайный процесс.

Аналогичная ситуация возникает в термодинамике при рассмотрении поведения газа, заключенного в оболочку. Газ состоит из огромного числа элементарных частиц, движущихся за счет взаимных столкновений. Движение каждой частицы теоретически может быть определено, если известны начальные положения и скорости всех частиц. В настоящее время получить такой объем исходной информации о частицах газа практически нельзя, но, если бы мы даже и располагали этой информацией, ее дальнейшее использование невозможно, так как полученная система уравнений оказывается чрезвычайно сложной.

Итак, процессы, точные законы которых не могут быть использованы для их описания, мы вынуждены рассматривать как случайные. Следовательно, название «случайный» носит в определенном смысле временный характер, поскольку процесс перестает быть случайным, как только для его описания можно использовать точные законы, которым он подчиняется.

Теория случайных функций дает нам мощное средство для исследования явлений, точные законы которых не могут быть использованы непосредственно, путем изучения результата действия точных законов. Такие явления встречаются во всех областях науки: метеорологии, медицине, экономике, биологии и т. д.

Рассмотрим речь – процесс, существенно отличающийся от предыдущих. Образование звуковых волн, с помощью которых передается речь, является процессом сложным и не подчиняется простым законам, что придает ему характер случайного. Но слово «случайный» здесь может принимать и другое значение, поскольку речь предназначена для передачи информации. Начиная фразу, говорящий полностью знает, что он скажет в дальнейшем. Поэтому продолжение фразы не является случайным для говорящего. Слушатель же не знает, что будет произнесено говорящим, он не может «предвидеть» фраз говорящего, кроме окончания некоторых слов. Для слушателя фразы, произносимые говорящим, носят характер случайного.

Отметим, что эта невозможность предсказания непосредственно связана с определением информации. Сообщение, которое могло бы быть полностью предсказуемо адресатом, не дало бы последнему никакой информации и считалось бы шумом. Следовательно, сообщение будет сигналом или шумом для адресата в зависимости от того, может или не может адресат извлечь из сообщения информацию. Из этого следует, что физически чрезвычайно трудно отличить шум от сигнала. Важно заранее определить, как будет извлекаться информация из сообщения, а это зависит от выбранного кода, с помощью которого передается информация от отправителя к адресату.

Таким образом, всякий сигнал при определенных обстоятельствах может быть рассмотрен как случайный, в то же время шум может содержать много информации.

В заключение рассмотрим еще один пример. Ток ионизационной камеры, помещенной в активную зону ядерного реактора, позволяет измерять уровень мощности реактора. Точное измерение осложняется тем, что на ток, определяемый уровнем мощности реактора, накладываются флуктуации. В этом случае непрерывный уровень тока есть сигнал, а флуктуации тока являются шумом, который и порождает ошибки в измерениях. Если же исследовать только флуктуации тока ионизационной камеры, то можно извлечь очень полезную информацию о динамических характеристиках реактора, например вычислить

модуль передаточной функции. В этом случае флюктуации представляют собой источник, богатый информацией, т. е. будут выполнять роль сигнала.

Итак, можно сказать, что сигнал отличается от шума наличием полезной информации, шум же содержит лишь такую информацию, которая нас не интересует, по крайней мере, в настоящий момент. Поэтому перед каждым измерением и обработкой сигнала необходимо ответить на вопрос: что будет приниматься в качестве сигнала, а что в качестве шума?

Определим, что будем понимать в дальнейшем под случайным процессом или случайной функцией (хотя в математике эти два понятия различаются). Назовем процесс случайным, если невозможна его полностью идентичная повторная реализация. Согласно этому определению, периодический и переходный процессы (например, импульсный отклик фильтра) не являются случайными, а шум усилителя относится к случайным процессам.

На практике трудно четко разделить процессы на случайные и неслучайные (детерминированные). Например, на импульсный отклик усилителя и на выходной сигнал генератора часто накладываются шумы. Поэтому теоретики попытались использовать ранее разработанные методы исследования случайных процессов для изучения детерминированных процессов. Оказалось, что методы и техника обработки сигналов применимы как к случайным процессам, так и к неслучайным.

Контрольные вопросы

1. Какие процессы можно рассматривать как случайные?
2. Чем отличается шум от сигнала?
3. В каких случаях шум и сигнал могут меняться местами?
4. Как разделить процессы на случайные и неслучайные (детерминированные)?

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Существуют два способа описания произвольного сигнала. Первый способ основан на математическом представлении сигнала в виде $y=f(t)$, где независимая переменная t – время. Математическое представление сигнала по второму способу имеет вид $Y=F(\nu)$, где независимая переменная ν – частота (размерность ν обратна размерности t). Эти два представления сигнала связаны друг с другом преобразованием Фурье. Следовательно, использование методов обработки сигнала требует знания свойств преобразования Фурье.

Вводимое здесь преобразование Фурье над функциями времени может быть применено и для функций других переменных. Например, если независимая переменная – длина, то переменной, аналогичной частоте, будет величина, обратно пропорциональная длине и т.д.

2.1. Преобразование Фурье периодических функций

Если $x(t)$ – периодическая функция от t с периодом T , то ее можно представить в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T} nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T} nt \right)$$

или

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2\pi \nu_0 nt + b_n \sin 2\pi \nu_0 nt \right)$$

Где $\nu_0 = \frac{1}{T}$

Коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \qquad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos 2\pi \nu_0 n t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin 2\pi \nu_0 n t dt$$

Если принять:

$$X(nv_0) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$X(nv_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-\pi jnv_0 t} dt$$

Спектральная функция $X(nv_0)$ (в общем случае комплексная) может быть представлен в виде спектра амплитуд

$$|X(nv_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (2.7)$$

Или спектра фаз

$$\varphi(nv_0) = \operatorname{arctg} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right) \quad (2.8)$$

Справедливы также формулы

$$\bar{X}(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X(nv_0)| e^{-j\varphi(nv_0)} \delta(v - nv_0) \quad (2.9)$$

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi jnv_0 t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\sigma) e^{-2\pi jv_0 n\sigma} d\sigma \quad (2.10)$$

Отрицательные значения n введены с целью упрощения записи формул. Если $x(t)$ – вещественная функция, то $a_{-n} = a_n$ и $b_{-n} = -b_n$.

Важно отметить, что спектр периодической функции с периодом T дискретен и минимальное расстояние между точками спектра на оси

частот равно $\nu_0=1/T$. Следовательно, спектр состоит из частот, кратных $\nu_0=1/T$.

2.2. Преобразование Фурье непериодических функций

Непериодическую функцию можно рассматривать как предел периодической функции с периодом T при $T \rightarrow \infty$. Тогда частотный интервал $\nu_0=1/T$ стремится к нулю и спектр становится непрерывным:

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi j\nu t} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma) e^{-2\pi j\nu\sigma} d\sigma \quad (2.11)$$

$$\bar{X}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi j\nu t} dt \quad (2.12)$$

Функция $\bar{X}(\nu)$ называется фурье-образом функции $\bar{x}(t)$. Обычно используют символическую запись

$$\bar{x}(t) \leftrightarrow \bar{X}(\nu) \quad (2.13)$$

В общем случае функция $\bar{X}(\nu)$ – комплексная и ее действительная и мнимая части вычисляются по формулам

$$Re[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi\nu t dt \quad (2.14)$$

$$-Im[X(\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi\nu t dt \quad (2.15)$$

Спектр амплитуд и фаз записывается соответственно в виде

$$|X(\nu)| = \sqrt{\{Re[X(\nu)]\}^2 + \{Im[X(\nu)]\}^2} \quad (2.16)$$

$$\varphi(\nu) = \arctg(Im[X(\nu)]/Re[X(\nu)]) \quad (2.17)$$

2.3. Преобразование Фурье физических функций

Функции, используемые в физике, известны лишь на ограниченном интервале $(0, T)$. Для их до определения на всю временную ось используют два способа. По первому способу функцию полагают равные нулю вне интервала $(0, T)$ (рис. 2.1)

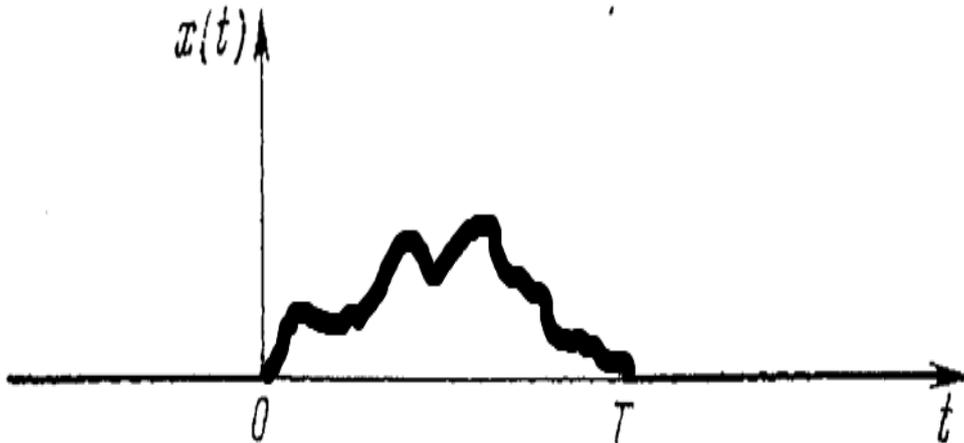


Рис. 2.1. Функции используемые в физике

Если функция действительно равна нулю вне $(0, T)$, то в этом случае можно вычислить спектр с любой заданной точностью.

Второй способ основан на игнорировании поведения функции вне интервала $(0, T)$ (рис. 2.2). Так как функция задана только на интервале $(0, T)$, то ее фурье-образ определен только для дискретных значений частот, разделенных промежутками длиной $1/T$ или кратными $1/T$ (так же как и для периодических функций). Этот случай аналогичен случаю задания функции $x(t)$ лишь для n дискретных значе-

ний аргумента с промежутками между ними длиной T_e (частота квантования сигнала $F_e=1/T_e$). Докажем, что при таком задании функции невозможно получить более $n/2$ точек спектра.

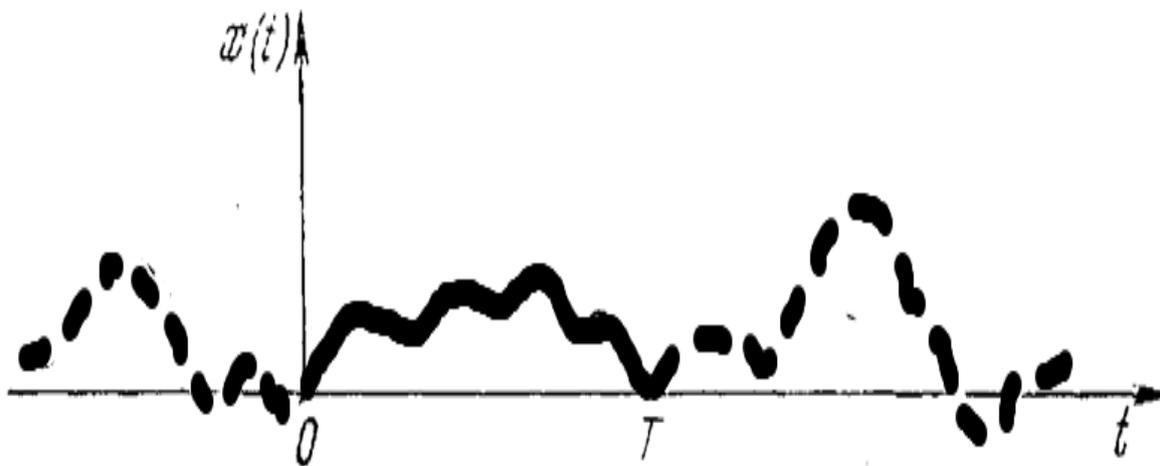


Рис. 2.2. Обобщенный вид функции вне интервала $(0, T)$

Действительно, длина области определения функции равна $T=nT_e$. Поэтому величина разрешения по ν составляет $\Delta\nu=1/(nT_e)$. Обозначим через B длину интервала спектра заданной функции. Тогда $F_e \geq 2B$ (гл. 7)

Имеем

$$F_e = 1/T_e = 2\alpha B, \quad \alpha \geq 1$$

$$\text{Отсюда } \Delta\nu = 1/(nT_e) = 2\alpha B/n.$$

Поэтому максимальное число точек спектра равно $B/\Delta\nu = n/2\alpha = n/2$, если $\alpha = 1$. Итак, вся информация о функции содержится в этих $n/2$ в точках спектра, совокупность которых образует фурье-образ периодической функции с периодом T , полученной путем периодического продолжения с периодом T исходной функции вне интервала $(0, T)$.

Если вычислять $kn/2$ точек спектра (k - натуральное число), то расстояние между двумя соседними точками спектра будет в k раз меньше и, следовательно, период продолжения исходной функции будет в k раз больше . Новая периодическая функция с периодом kT совпадает с исходной функцией $x(t)$ на интервале $(0, T)$ и равна 0 между T

и kT . При неограниченном увеличении k дискретный спектр этой функции стремится к непрерывному спектру функции, рассмотренному выше.

2.4. Физический смысл преобразования Фурье

Физический смысл преобразования Фурье можно понять с помощью рис. 2.3.

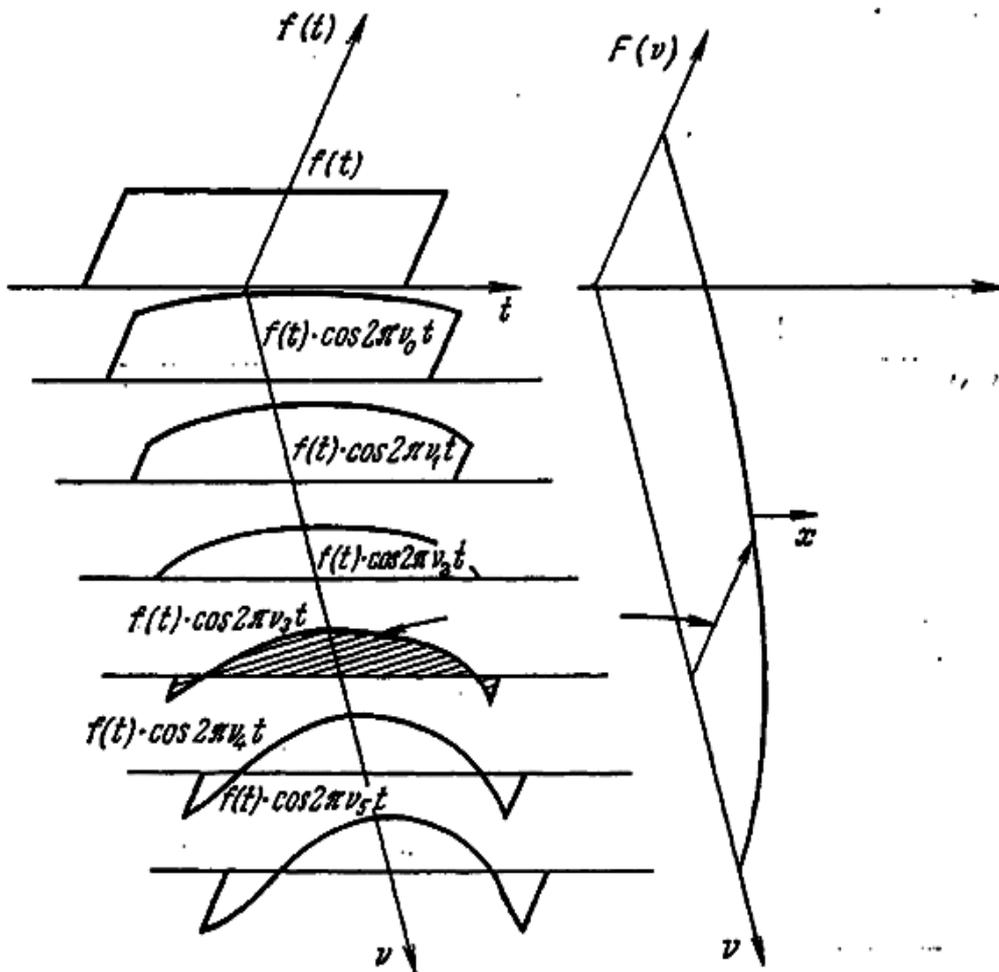


Рис. 2.3. Физический смысл преобразования Фурье

Функции $X(\nu)$ и $x(t)$ (выражение 2.12)) описывают в различной форме один и тот же физический процесс. Если рассматривается функция $x(t)$, то состояние системы изучается на плоскости

амплитуда- время. При рассмотрении же функции $X(\nu)$ состояние системы изучается на плоскости – амплитуда-частота.

Для вычисления $X(\nu)$ при фиксированном значении $\nu = \nu_i$ необходимо подсчитать вклад всей функции $x(t)$, соответствующий частоте ν_i . Это означает, что производится неограниченно точная фильтрация. Такая фильтрация физически нереализуема (разд.5.4). Следовательно, функция $X(\nu)$ не может быть известна с неограниченно точной локализацией независимой переменной ν на оси частот.

Аналогично, если восстанавливается функция $x(t)$ по известной $X(\nu)$, то необходимо знать весь спектр, в том числе и для бесконечно больших частот. Из формул (2.11) и (2.12) следует, что это также соответствует неограниченно точной фильтрации.

Итак, для вычисления точного значения $x(t)$ в фиксированный момент времени t необходимо располагать неограниченной частотной полосой. Мы сталкиваемся здесь с одной из форм общего принципа неопределенности – познание окружающего мира возможно лишь в условиях «неточного» его описания.

2.5. Условия существования преобразования Фурье

Известно, что для существования преобразования Фурье функции $f(t)$ достаточно выполнение следующих трех условий:

- 1) $f(t)$ – абсолютно интегрируема на $(-\infty; \infty)$;
- 2) $f(t)$ – ограничена при $t \in (-\infty; \infty)$;
- 3) число точек разрыва, максимума и минимума функции $f(t)$ конечно.

Выполнение этих трех условий не является необходимым для существования прямого и обратного преобразования Фурье.

Можно доказать, что если $f(t)$ квадратично суммируема ($f(t) \in L_2(-\infty; \infty)$), то для $f(t)$ существует прямое и обратное преобразование Фурье. Квадратичная суммируемость функции $f(t)$ означает, что $f(t)$ и $F(\nu)$ соответствуют сигналу с ограниченной энергией. Поскольку любой физический процесс регистрируется на конечном промежутке времени, последнее условие всегда выполнено.

2.6. Некоторые свойства преобразования Фурье

1. Линейность. Преобразование Фурье – линейная операция (рис. 2.4), т.е

$$af(t) + bg(t) \leftrightarrow aF(v) + bG(v) \quad (2.18)$$

где $f(t) \leftrightarrow F(v), g(t) \leftrightarrow G(v)$; a, b – любые постоянные числа.

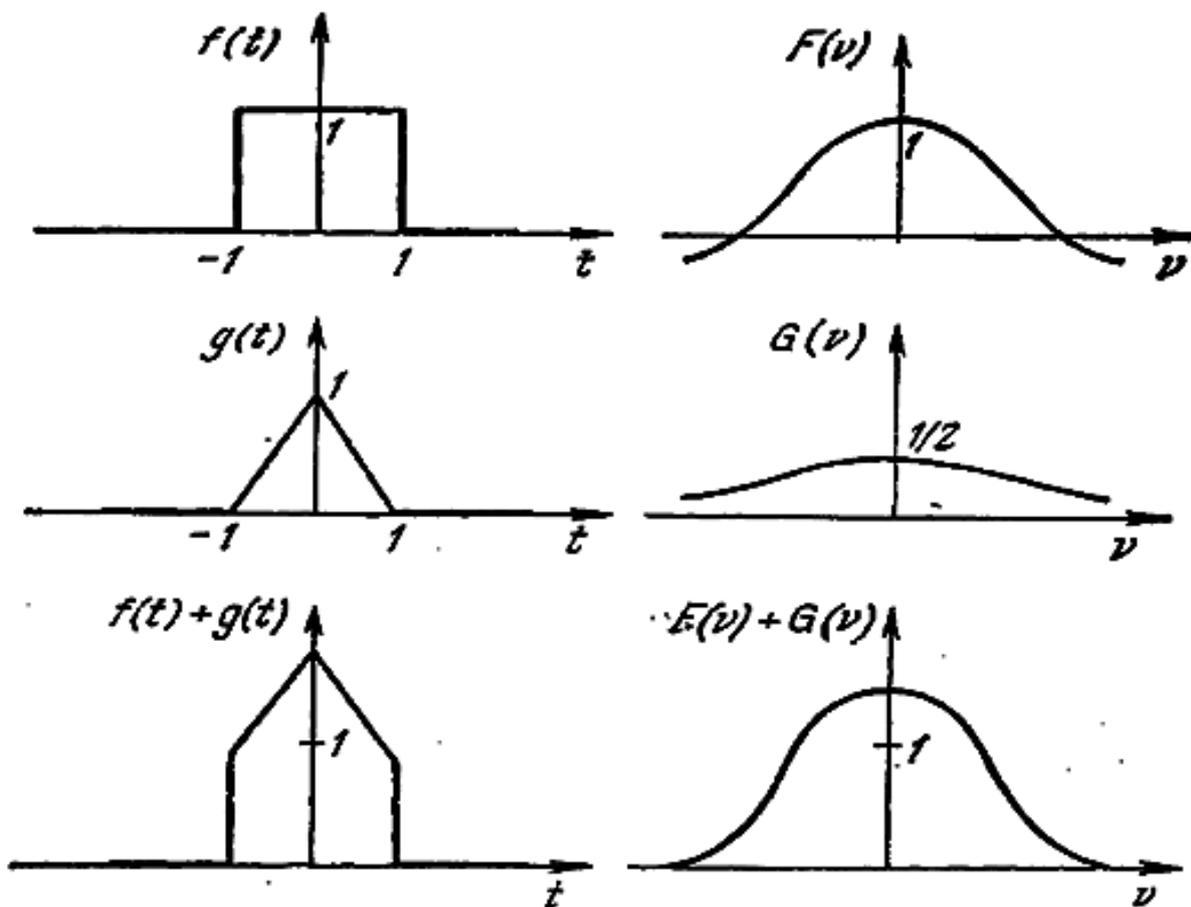


Рис. 2.4. Иллюстрация свойства линейности

2. Четность. Свойства четности преобразования Фурье сведены в следующую табл. 2.1.

Таблица 2.1

Функция $x(t)$	Функция $X(\nu)$
Вещественная и четная	Вещественная и четная
Вещественная и нечетная	Мнимая и нечетная
Мнимая и четная	Мнимая и четная
Мнимая и нечетная	Вещественная и нечетная
Комплексная и четная	Комплексная и четная
Комплексная и нечетная	Комплексная и нечетная
Произвольная действительная	→ { Действительная часть четная Мнимая часть нечетная
Произвольная мнимая	→ { Мнимая часть четная Действительная часть нечетная
Действительная часть четная } Мнимая часть нечетная }	Вещественная
Действительная часть нечетная } Мнимая часть четная }	Мнимая

3. Подобие. Если $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$, то

$$f(at) \leftrightarrow 1/(|a|) F(\nu/a) \quad (2.20)$$

Из выражения (2.20) следует, что увеличение масштаба времени приводит к уменьшению масштаба по оси частот, и наоборот. На рис. 2.5 приведено несколько примеров, иллюстрирующих свойство подобия.

Может быть известна с неограниченно точной локализацией независимой переменной ν на оси частот.

Аналогично, если восстанавливается функция $x(t)$ по известной $X(\nu)$, то необходимо знать весь спектр, в том числе и для бесконечно больших частот. Это соответствует неограниченно точной фильтрации.

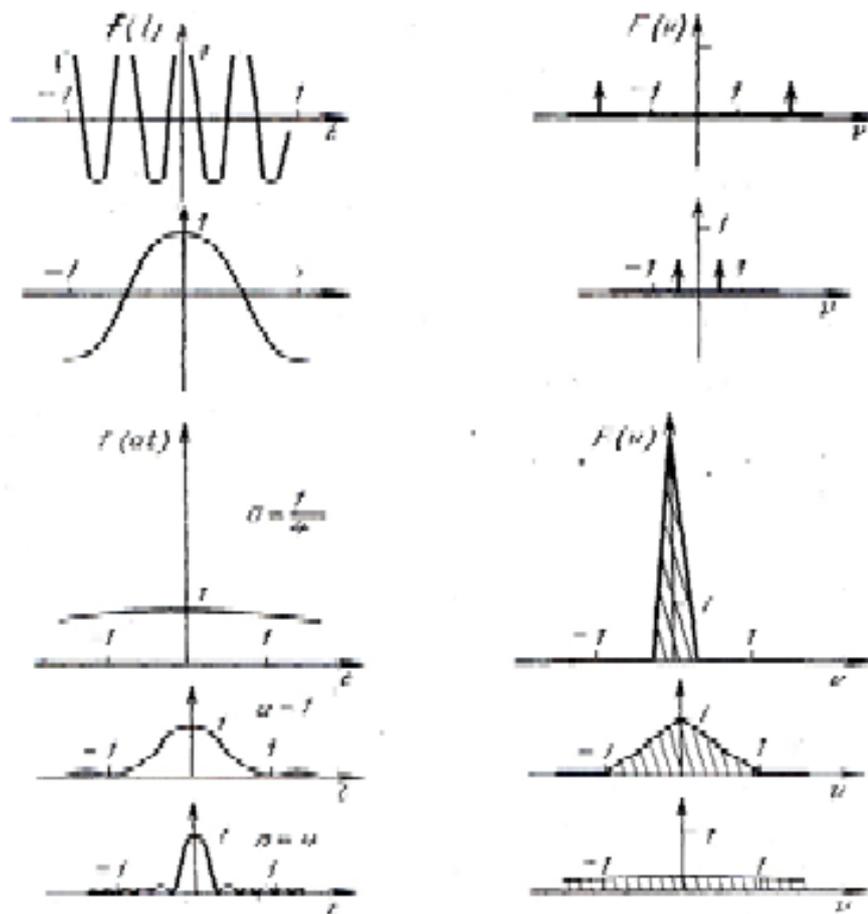


Рис. 2.5. Иллюстрация свойства подобия

Итак, для вычисления точного значения $x(t)$ в фиксированный момент времени t необходимо располагать неограниченной частотной полосой. Мы сталкиваемся здесь с одной из форм общего принципа.

4.Смещение. Если $f(t) \leftrightarrow F(\nu)$, то

$$f(t - a) \leftrightarrow e^{-2\pi j a \nu} F(\nu) \quad (2.21)$$

$$f(t - a) \leftrightarrow F(\nu) \cos 2\pi a \nu - j F(\nu) \sin 2\pi a \nu \quad (2.21a)$$

Из выражения (2.21) следует, что фурье-образы функций $f(t)$ и $f(t - a)$ имеют одинаковый модуль, а смещение на величину «а» приводит лишь к дополнительному вращению фазы на величину $2\pi a\nu$.

На рис. 2.6 приведен пример смещения для функции $\cos t$, фурье-образ которой представляет собой совокупность двух импульсов Дирака.

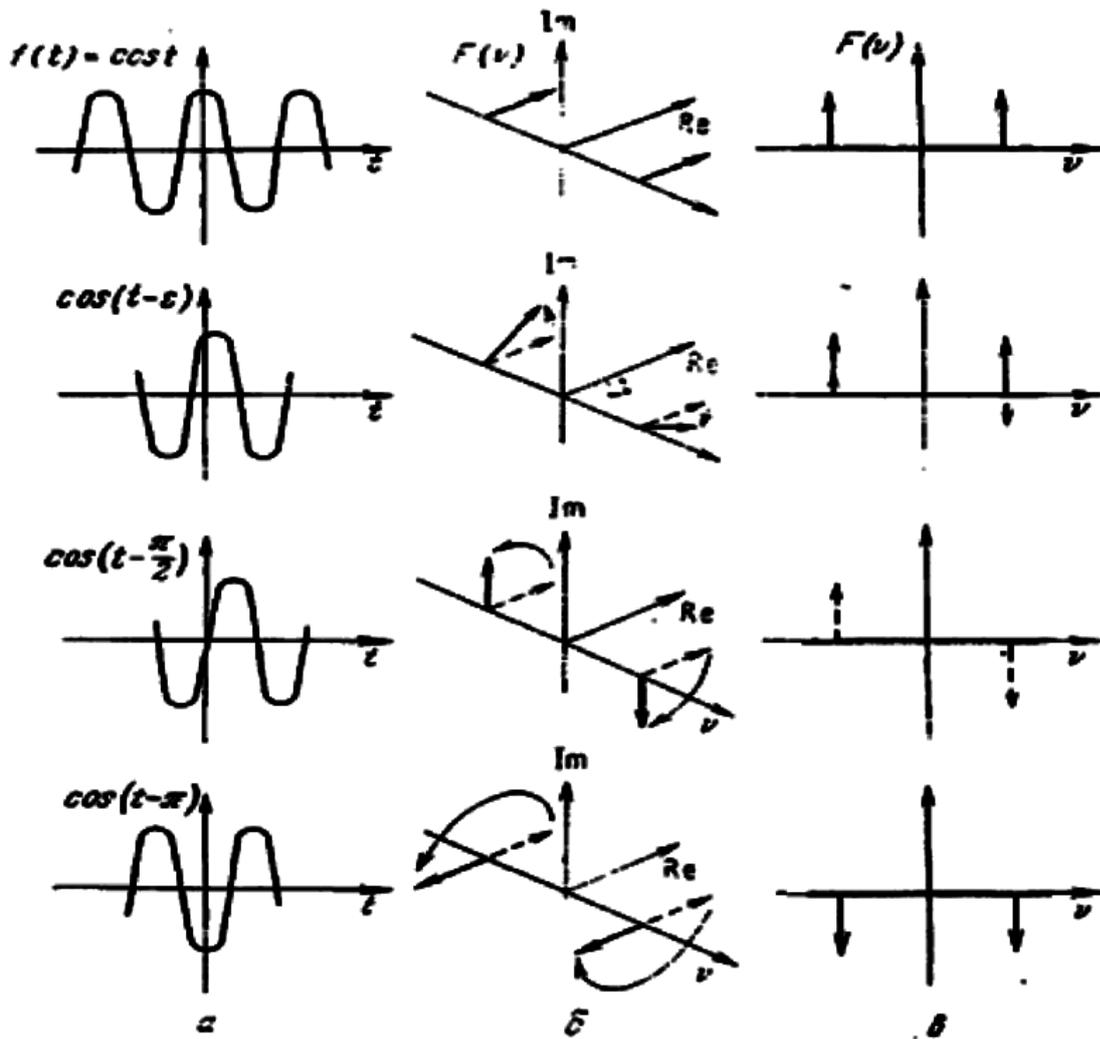


Рис. 2.6. Примеры смещения для функции $\cos t$: а – графики функции $\cos t$; б – трехмерное представление фурье-образов функции $\cos t$; в – двумерное представление фурье-образов функции $\cos t$ (сплошные линии – вещественные части, штриховые – мнимые части)

Малое смещение аргумента по отношению к величине области, где физическая функция отлична от нуля, вызывает небольшую деформацию действительной и мнимой частей фурье-образа.

На рис. 2.7 рассмотрен случай функции sint/t , фурье-образ которой селектирующее окно. Свойство смещения обратимо, т. е. $F(\nu - a) \leftrightarrow f(t)e^{2\pi jat}$.

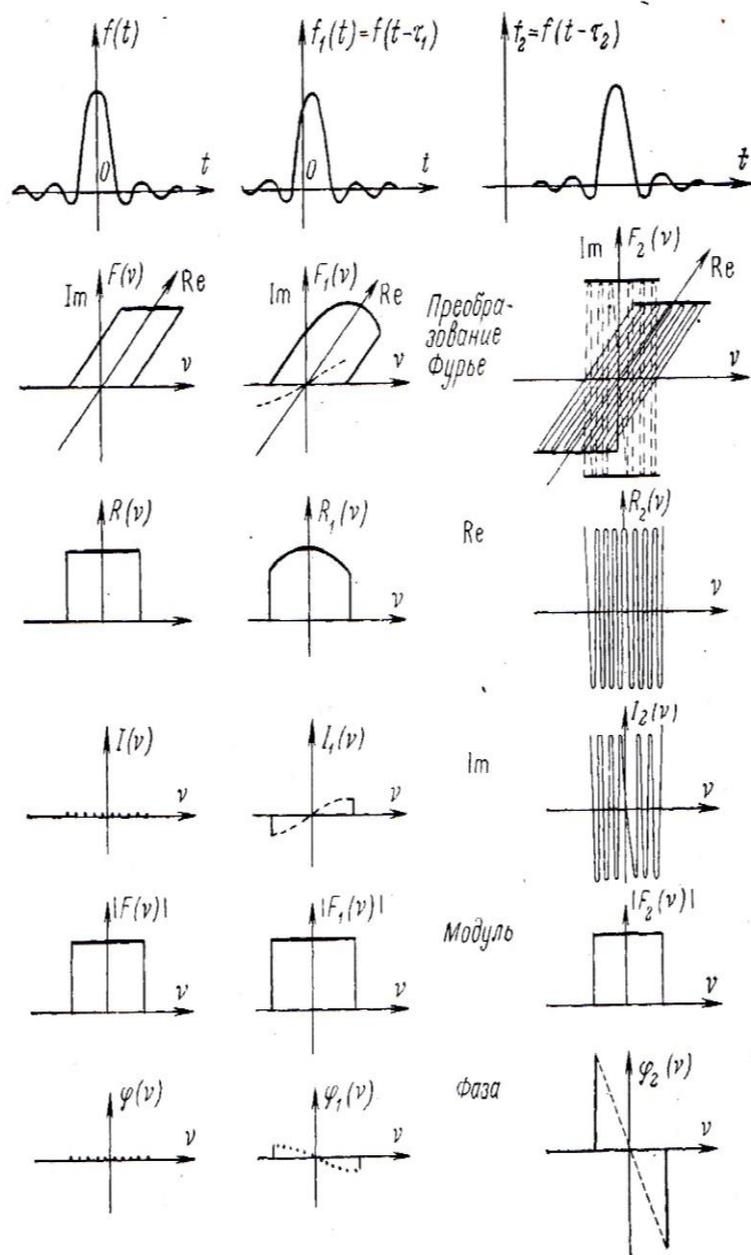


Рис. 2.7. Влияние малого и большого смещения аргумента на фурье-образ

Покажем в качестве примера, как с помощью свойства смещения можно выразить фурье-образ функции $\cos t$ через обобщенную функцию Дирака, для которой фурье-образ есть постоянная величина (рис. 2.8, а).

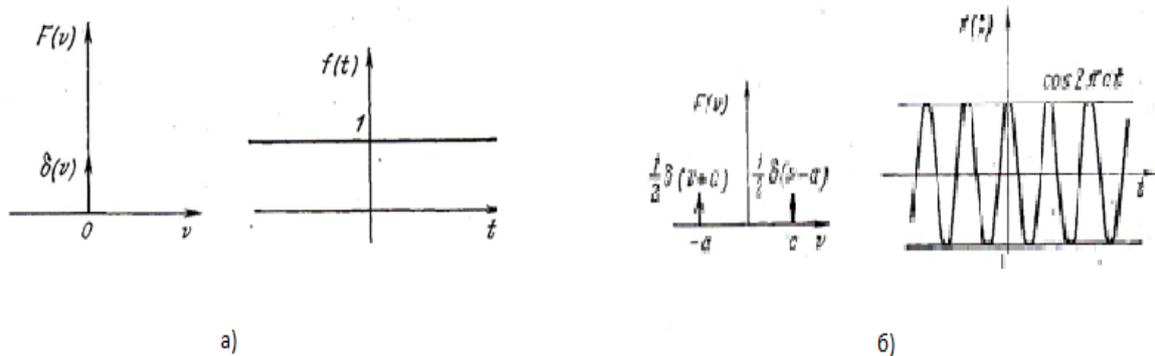


Рис. 2.8. Свойство смещение

Имеем

$$(1/2)\delta(v - a) \leftrightarrow (1/2)e^{-2\pi jat},$$

$$(1/2)\delta(v + a) \leftrightarrow (1/2)e^{2\pi jat}$$

Отсюда (рис. 2.8, б)

$$(1/2)[\delta(v - a) + \delta(v + a)] \leftrightarrow \cos 2\pi at$$

5. Производная. Если $x(t) \leftrightarrow X(v)$, то

$$d^n x(t)/dt^n \leftrightarrow (2\pi jv)^n X(v) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Важный частный случай (рис. 2.9). Селектирующая функция (прямоугольная функция). В качестве другого примера рассмотрим селектирующую функцию $\Pi_T(t)$, определяемую равенством

$$\Pi_T(t) \leftrightarrow \begin{cases} 1, t \in [-T, T] \\ 0, t \notin [-T, T] \end{cases}$$

Имеем

$$\Pi_T(t) \leftrightarrow 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T}$$

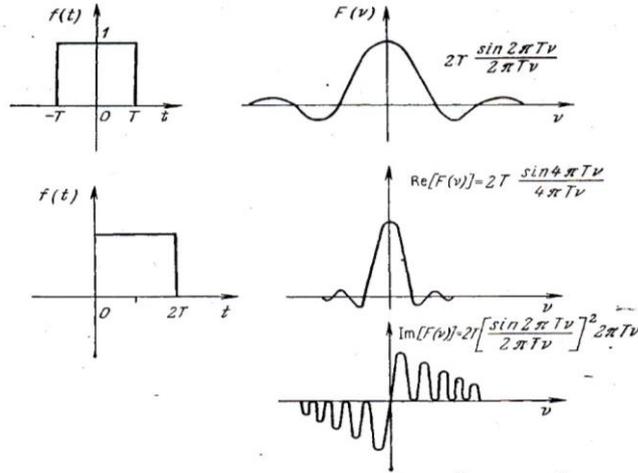


Рис. 2.9. Спектральная функция. Частный случай

Функция $\Pi_T(t)$ физически нереализуема, так как ее область определения содержит отрицательные значения времени. Если осуществить смещение времени на величину T , то получаем физически реализуемую функцию $\Pi_T(t-T)$, фурье-образ которой дается формулой

$$\Pi_T(t-T) \leftrightarrow 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} e^{-2\pi j\nu T} = 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} [\cos 2\pi\nu T - j \sin 2\pi\nu T]$$

Действительная и мнимая части, модуль и фаза фурье-образа функции $\Pi_T(t-T)$ записываются соответственно в виде

$$2T \frac{\sin 4\pi\nu T}{4\pi\nu T}, \quad -2T \left(\frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} \right)^2 2\pi\nu T, \quad 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T}, \quad -2\pi\nu T.$$

Другие важные частные случаи. Формула Пуассона. Если $x(t) \leftrightarrow X(\nu)$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n).$$

Обобщенная функция Дирака. Известно, что функция $\delta(t)$ представляющая центрированный относительно $t=0$ мгновенный импульс единичной площади, имеет фурье-образ, равный 1.

Отсюда

$$\delta(t - t_0) \leftrightarrow e^{-2\pi j\nu t_0}$$

Гребневая функция Дирака, или функция $\text{Ш}_T(t)$. По определению $\text{Ш}_T(t)$ – периодическая функция с периодом T вида

$$\text{Ш}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (2.23)$$

Справедливы также формулы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-2\pi j \frac{t}{T} n\right) \quad (2.24)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(v - \frac{k}{T}\right) \quad (2.25)$$

Соотношение (2.25) можно записать в виде

$$\text{Ш}_T(t) \leftrightarrow (1/T) \text{Ш}_{1/T}(v) \quad (2.26)$$

Формулу (2.26) часто называют формулой Пуассона.

2.7. Несколько функций и их фурье-образы

На схемах (1-18) рис. 2.10 даны примеры функций и их фурье-образов. Сплошными линиями показаны вещественные части, штриховыми- мнимые части.

2.8. Частный случай вещественных сигналов

Пусть $X(v) = \text{Re}[X(v)] + j\text{Im}[X(v)]$ – фурье-образ вещественной функции $x(t)$. Тогда

$$\text{Re}[X(-v)] = \text{Re}[X(v)], \text{Im}[X(-v)] = -\text{Im}[X(v)] \quad (2.27)$$

Из выражения (2.27) следует, что для вещественной функции $x(t)$ достаточно рассмотреть функцию $X(v)$ только для положительных значений v . Согласно выражению (2.27), действительная часть фурье-образа $X(v)$ продолжается на отрицательные значения v четным образом, а мнимая часть- нечетным. Поэтому большинство фурье-

преобразователей (устройств, реализующих преобразование Фурье) работают только с положительными значениями ν .

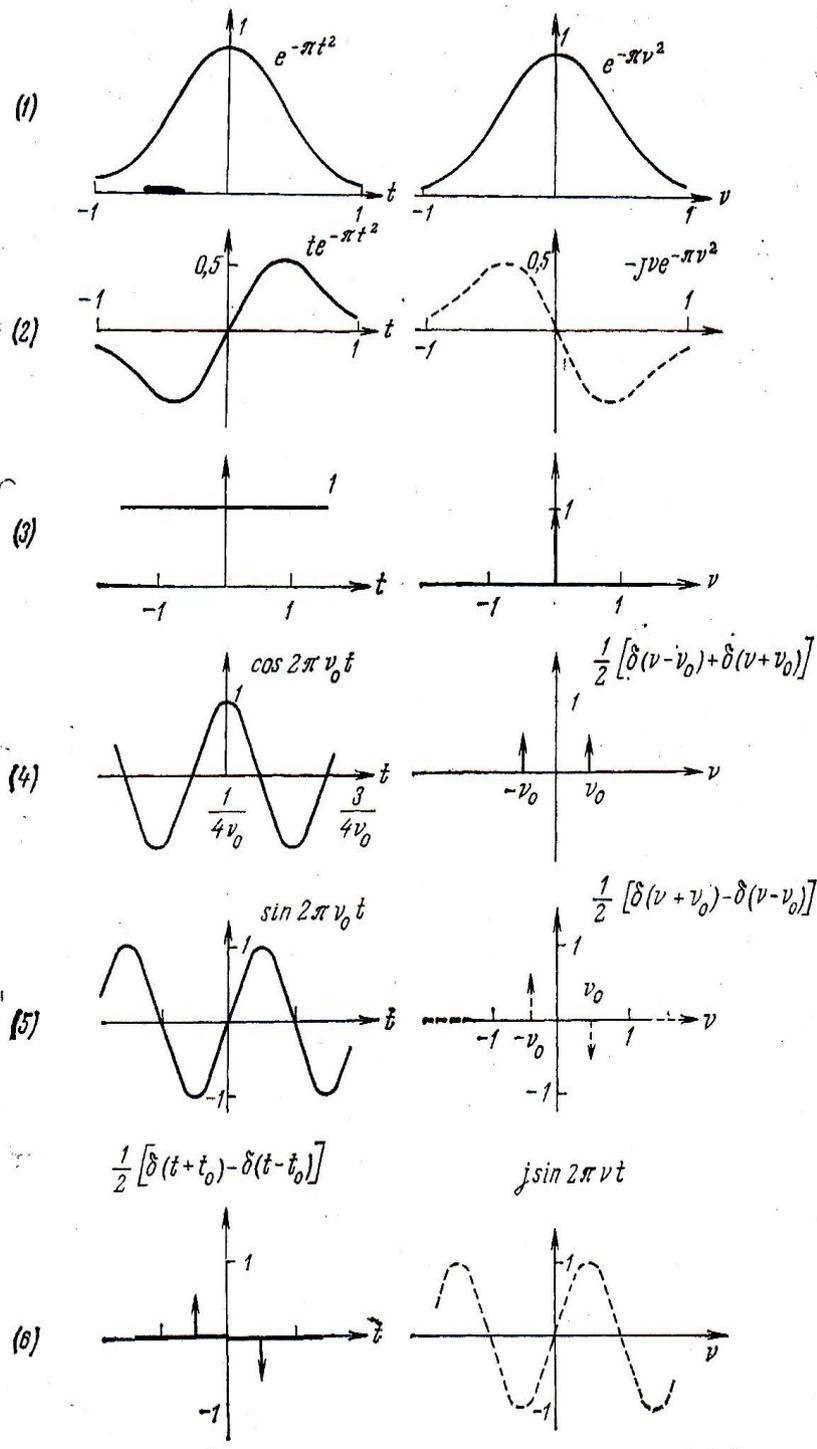


Рис. 2.10. Примеры функций и их Фурье-образов (начало)

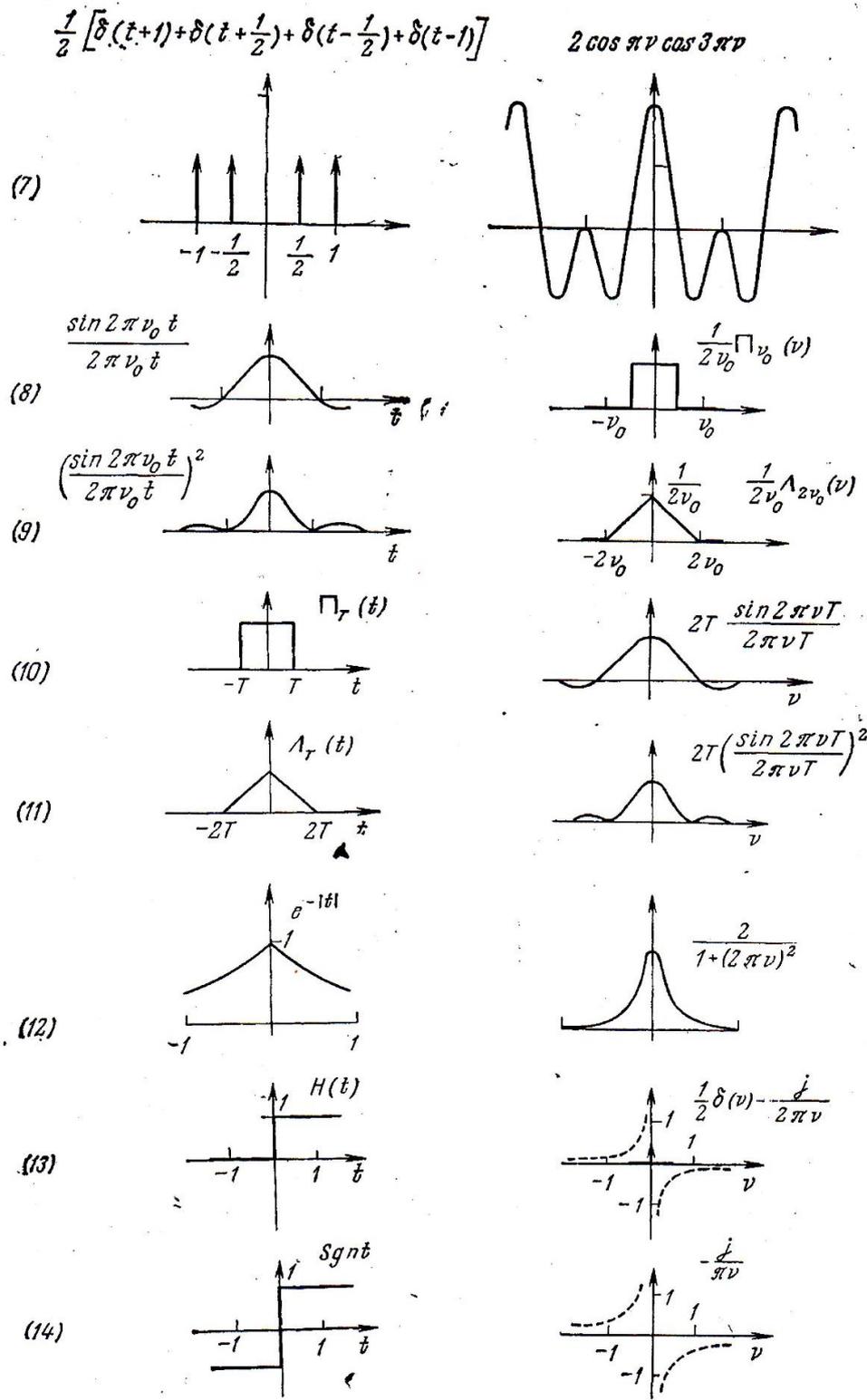


Рис. 2.10. Примеры функций и их Фурье-образов (продолжение)

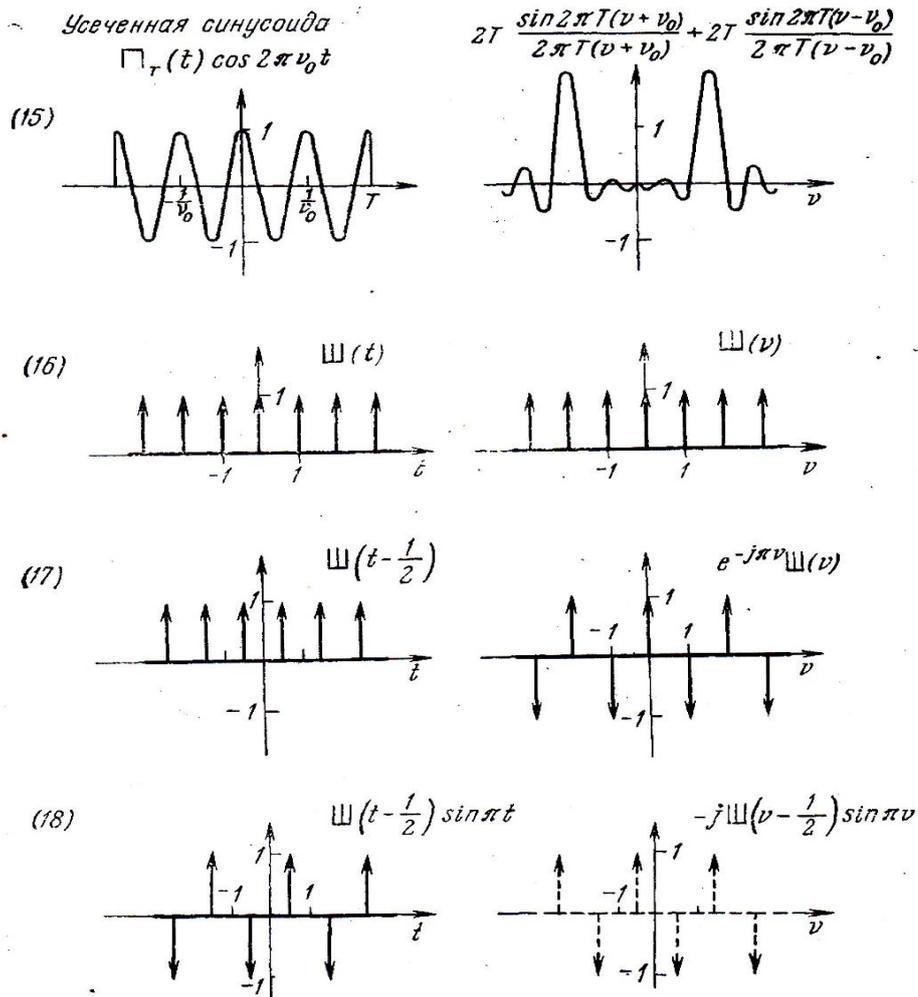


Рис. 2.10. Примеры функций и их Фурье-образов (окончание)

2.9. Отрицательные частоты

Фурье – образ любой функции определен для всех значений ν (положительных и отрицательных). Нелегко объяснить физический смысл отрицательных частот. Действительно, проведенное выше нами исследование предполагало, что частоты могут быть разных знаков. В то же время все классические спектральные анализаторы и фурье-преобразователи вычисляют спектр и фурье-образы только для положительных частот. Может показаться, что в этом заключено противоречие, но на самом деле его нет. Когда некоторое устройство вычисляет фурье-образ физической функции, оно оперирует с вещественными функциями (полученными при измерениях), без мнимых составляю-

щих. Используя затем соотношение (2.27), можно определить фурье-образ для отрицательных частот. Неучет фурье-образа, соответствующей отрицательным частотам, может привести к большим погрешностям. Рассмотрим, например, фурье-образ функции

$$x(t) = \sin 2\pi\nu_0 t * \Pi_t(t)$$

Фурье-преобразователь вычисляет часть фурье-образа, соответствующую положительным частотам:

$$\frac{1}{2} \delta(\nu - \nu_0) * 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} = T \frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{2\pi T(\nu - \nu_0)}$$

Часть, соответствующая отрицательным частотам, имеет вид

$$-\frac{1}{2} \delta(\nu + \nu_0) * 2T \frac{\sin 2\pi\nu T}{2\pi\nu T} = -T \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{2\pi T(\nu + \nu_0)}$$

Поэтому фурье-образ принимает форму

$$jT \left[\frac{\sin 2\pi T(\nu - \nu_0)}{2\pi T(\nu - \nu_0)} - \frac{\sin 2\pi T(\nu + \nu_0)}{2\pi T(\nu + \nu_0)} \right]$$

Легко проверить, что для фурье-образа справедливо равенство

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) d\nu$$

Для вычисления фурье-образа комплексной функции (этот случай имеет место при использовании обратного преобразования Фурье) приходится последовательно вычислять мнимую и действительную части, применяя формулы (2.27).

2.10. Почему выбрано преобразование Фурье

Почему для частотного представления сигналов было выбрано преобразование Фурье, т.е. разложение по синусам и косинусам? Может быть, лучше производить разложение по сигналам другой формы,

например прямоугольной? Ответ на эти вопросы прост: разложение по синусам и косинусам было выбрано потому, что синусы и косинусы – собственные функции линейного фильтра, т.е. эти функции не изменяют своей формы при прохождении через линейный фильтр.

Контрольные вопросы

1. Какие существуют способы внесения произвольного сигнала?
2. Каким образом можно представить периодическую функцию с помощью преобразования Фурье?
3. Опишите непериодическую функцию преобразованием Фурье.
4. Определите физический смысл преобразования Фурье.
5. Перечислите свойства преобразования Фурье.
6. Почему для частного представления сигналов выбрано преобразование Фурье?

Глава 3. МОЩНОСТЬ

3.1. Временная мощность

Мгновенная мощность сигнала. Рассмотрим произвольный комплексный сигнал $x(t)=a(t)+jb(t)$, где $a(t)$, $b(t)$ – вещественные функции. Мгновенная мощность сигнала $p(t)$ определяется равенством

$$p(t) = a(t) + b(t) = [a(t) + jb(t)][a(t) - jb(t)] = x(t)x^*(t) \quad (3.1)$$

Знак « $*$ » – означает комплексно сопряженную функцию.

Средняя мощность на промежутке длиной T подсчитывается по формуле

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x^*(t) dt \quad (3.2)$$

Если функция $x(t)$ вещественна (случай физических сигналов), то

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 dt \quad (3.3)$$

Энергия сигнала равна интегралу от мощности по всему промежутку существования сигнала. Если мощность рассматривается как функция времени (рис. 3.1), то ее называют временной мощностью или просто мощностью.

Мощность может быть представлена также как функция частоты. В этом случае она называется частотной мощностью (рис. 3.2) или спектральной мощностью. Спектральную мощность часто называют спектральной плотностью или спектром.



Рис. 3.1 Временная мощность сигнала

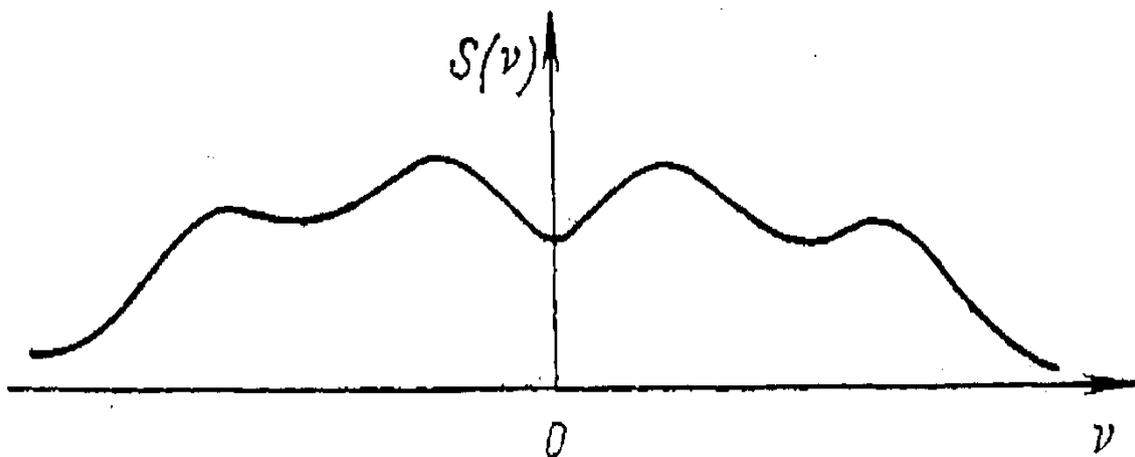


Рис. 3.2. Спектральная мощность сигнала

Названия «временная мощность» и «частотная мощность» хотя, к сожалению, и используется редко, но более правильно отражают соотношение между временным и частотным представлениями сигнала по сравнению с распространенными названиями «мощность» (в случае временного представления) и «спектральная плотность» (в случае частотного представления).

Отметим также, что, подобно частотной мощности, временная мощность является плотностью. Действительно, любое измерение энергии, если мощность конечна, производится на интервале ненулевой длины (Δt или $\Delta \nu$). Поэтому измеряются не $p(t)$ или $S(\nu)$, а величины

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} p(t) dt \quad \text{или} \quad \frac{1}{\Delta v} \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} S(v) dv$$

Энергия сигнала на интервале длиной Δt в окрестности t_0 вычисляется по формуле

$$E(t_0, \Delta t) = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} p(t) dt = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} |x(t)|^2 dt \quad (3.4)$$

Полная энергия сигнала дается выражением

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (3.5)$$

Пусть два произвольных в общем случае комплексных сигнала $x(t)$, $y(t)$ взаимодействуют друг с другом. Тогда мощность взаимодействия равна

$$p_{xy}(t) = x(t)y^*(t) \quad (3.6)$$

$$p_{yx}(t) = x^*(t)y(t) \quad (3.7)$$

Функции $P_{xy}(t)$ и $P_{yx}(t)$ связаны соотношением

$$p_{xy}(t) = p_{yx}^*(t) \quad (3.8)$$

Если оба сигнала вещественны, то

$$p_{xy}(t) = p_{yx}(t) = x(t)y(t)$$

Аналогично определяется средняя мощность на интервале T :

$$p_{xy}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)y^*(t) dt \quad (3.9)$$

$$p_{yx}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)y(t)dt \quad (3.10)$$

Имеем

$$p_{xy}(t_0, T) = P_{yx}^*(t_0, T) \quad (3.11)$$

Энергия взаимодействия на интервале Δt в окрестности точки t_0 дается равенством

$$E_{xy}(t_0, \Delta t) = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} p_{xy}(t)dt = \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} x(t)y^*(t)dt \quad (3.12)$$

$$E_{yx}(t_0, \Delta t) = E_{xy}^*(t_0, \Delta t) \quad (3.12a)$$

Полная энергия взаимодействия двух сигналов вычисляется по формулам

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \quad (3.13)$$

$$E_{yx} = E_{xy}^* \quad (3.13a)$$

В случае неограниченного промежутка времени средняя мощность взаимодействия двух сигналов может быть определена с помощью предела

$$P_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t)dt \quad (3.14)$$

Аналогичная формула применяется и для вычисления средней мощности одного сигнала.

Можно показать, что в случае неограниченного промежутка времени единственным корректным определением средней мощности взаимодействия является определение по формуле (3.14).

Если оба сигнала вещественны, то

$$P(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 dt \quad (3.15)$$

$$P_{xy}(t_0, T) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)y(t)dt \quad (3.16)$$

$$P_{xy} = P_{yx} \quad (3.17)$$

Пусть, по крайней мере, один из сигналов $x(t)$, $y(t)$ является переходным, т.е. равен нулю вне некоторого конечного интервала t_0, t_1 . В этом случае среднюю мощность определить нельзя, так как, согласно выражению (3.14), она стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Энергия же для этого случая вычисляется по формуле

$$E_{xy} = \int_{t_0}^{t_1} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt \quad (3.18)$$

3.2. Частотная мощность. Спектральная плотность мощности. Спектр мощности

Мощность сигнала может быть рассмотрена также как функция частоты. При таком рассмотрении ее обозначают $S_{xx}(\nu)$.

Энергия сигнала в полосе частот $\Delta\nu$ в окрестности ν_0 равна

$$P_x(\nu_0, \Delta\nu) = \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} S_{xx}(\nu) d\nu \quad (3.19)$$

Если $X(\nu)$ – фурье-образ функции $x(t)$, то

$$S_{xx}(\nu) = |X(\nu)|^2 \quad (3.20)$$

Из последнего выражения следует, что функция $S_{xx}(v)$ – вещественна и неотрицательна. Полная энергия сигнала вычисляется по формуле

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(v) dv \quad (3.21)$$

Используя равенство (3.20), получаем

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(v)|^2 dv \quad (3.22)$$

Обозначим через $S_{xy}(v)$ спектральную мощность взаимодействия двух сигналов $x(t)$ и $y(t)$. Функция $S_{xy}(v)$ – может принимать комплексные значения, даже если $x(t)$, $y(t)$ вещественны. Энергия взаимодействия в полосе частот Δv в окрестности v_0 дается равенством

$$E_{xy}(v_0, \Delta v) = \int_{v_0 - \frac{\Delta v}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta v}{2}} S_{xy}(v) dv \quad (3.23)$$

Полная энергия взаимодействия равна

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(v) dv \quad (3.24)$$

Выше были введены две временные мощности взаимодействия. Аналогично существуют две спектральные плотности взаимодействия, которые сопряжены друг с другом

$$S_{xy}(v) = S_{yx}^*(v) \quad (3.25)$$

Пусть $X(v)$ и $Y(v)$ - фурье-образы функций $x(t)$ и $y(t)$. Тогда

$$S_{xy}(v) = X(v)Y^*(v) \quad (3.26)$$

Из выражения (3.24) получаем

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} X(v)Y^*(v)dv \quad (3.27)$$

Если даже оба сигнала вещественны, функция $S_{xy}(v)$ будет комплексной (напомним, что $p_{xy}(t)$ в этом случае вещественна), причем действительная часть $Re[S_{xy}(v)]$ – четная функция, а мнимая часть $Im[S_{xy}(v)]$ – нечетная функция (рис. 3.3, 3.4)

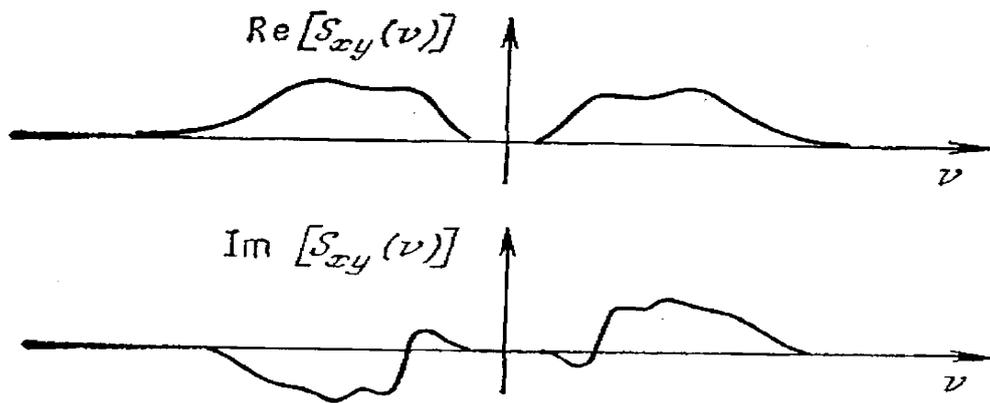


Рис. 3.3. Спектр мощности для четной функции

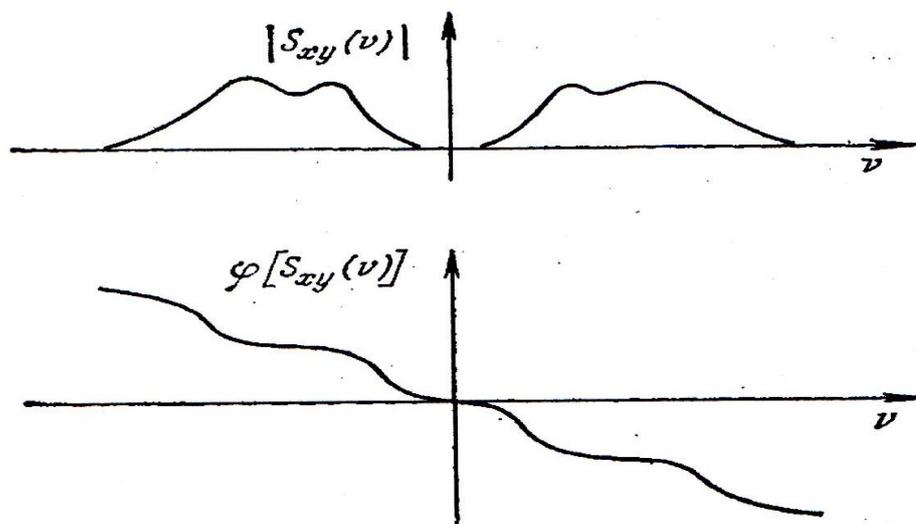


Рис. 3.4. Спектр мощности для нечетной функции

Поэтому величина интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(v)dv = 2 \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[S_{xy}(v)]dv$$

- вещественное число.

3.3. Общее определение спектральной мощности

Из теоремы Винера- Хинчина разд. [6] следует, что спектральная плотность равна фурье-образу корреляционной функции:

$$S_{xx}(v) = TF[C_{xx}(\tau)] \quad (3.28)$$

$$S_{xy}(v) = TF[C_{xy}(\tau)] \quad (3.29)$$

Последние две формулы справедливы в общем случае. Если существуют фурье-образы $X(v)$ и $Y(v)$, то выражения (3.28) и (3.29) эквивалентны соответственно выражениям (3.20) и (3.26). Пусть сигналы имеют конечную энергию. Тогда корреляционные функции определяются равенствами разд. [6]

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)x^*(t - \tau)dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Если энергия сигналов бесконечна, корреляционные функции даются формулами

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x^*(t - \tau)dt$$

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y^*(t - \tau)dt$$

Следовательно, для сигналов конечной энергии величины $S(v)$ является спектральной плотностью энергии, а для сигналов бесконечной энергии $S(v)$ – спектральная функция мощности.

3.4. Общие понятия и определения. Кодирование информации.

Общая схема системы передачи информации кодирования информации

Рассматриваемые ниже общие принципы кодирования информации справедливы как для системы, основная функция которых- передача информации во времени (системы хранения информации). В последних линиях связи кажется среда, в которой хранится информация.

Под *кодированием* в широком смысле слова подразумевается представление сообщений в форме, удобной для передачи по данному каналу. Обратная операция называется *декодированием*. Рассмотрим общую схему системы передачи информации, представленную на рис. 3.5.

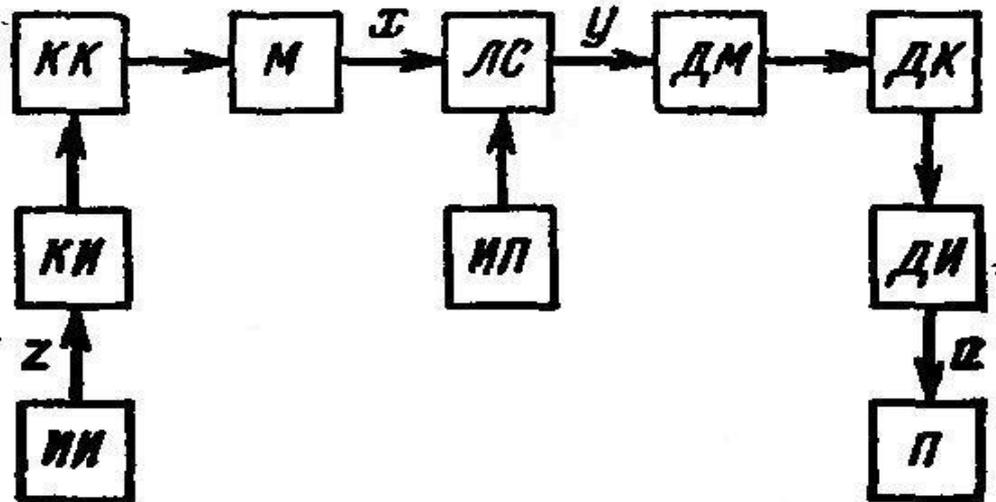


Рис. 3.5. Общую схему системы передачи информации

Сообщению z на выходе источника информации ИИ нам необходимо поставить в соответствие определенный сигнал. Поскольку чис-

ло возможных сообщений при неограниченном увеличении времени стремится к бесконечности, а за достаточно большой промежуток времени весьма велико, то, ясно. Что создать для каждого сообщения свой сигнал практически невозможно.

Однако учитывая, что дискретные сообщения складываются из букв, а непрерывные также можно представить последовательностью цифр в каждый момент отсчета, имеется возможность обойтись конечным числом образцовых сигналов, соответствующих отдельным буквам алфавита источника.

При большом объеме алфавита часто прибегают к представлению букв в другом алфавите с меньшим числом букв, которые мы будем называть символами. Для обозначения этой операции используется тот же термин кодирования, понимаемый теперь в узком смысле. Поскольку алфавит символов меньше алфавита букв, то каждой букве соответствует некоторая последовательность символов, которую мы назовем кодовой комбинацией. Число символов в кодовой комбинации называется её значностью.

В процессе преобразования букв сообщения в сигналы может преследоваться цель. Первая из них заключается в том, чтобы преобразовать информацию в такую систему символов, чтобы она обеспечивала простоту и надежность аппаратурной реализации информационных устройств и их эффективность. Это требование означает простоту аппаратуры различения отдельных символов, минимальное время при передаче или минимальный объем запоминающего устройства при хранении, простоту выполнения в этой системе арифметических и логических действий. Статистические свойства источника сообщения и помех в канале связи при этом не принимаются во внимание. Техническая реализация процесса кодирования в таком простейшем виде при непрерывном входном сигнале осуществляется аналоговыми преобразователями.

В своих основных теоремах Шеннон обосновал эффективность введения в тракт кодирующих, а следовательно, и декодирующих устройств, цель которых состоит в согласовании свойств источника сообщений со свойствами канала связи.

Одно из них (кодер источника КИ) имеет целью обеспечить такое кодирование, при котором путем устранения избыточности существенно снижается среднее число символов, требующихся на букву

сообщения. При отсутствии помех это непосредственно дает выигрыш во времени передачи или в объеме запоминающего устройства, т.е. Повышает эффективность системы. Поэтому такое кодирование получило название эффективного или оптимального.

При наличии помех в канале оно позволяет преобразовать входную информацию в последовательность символов, наилучшим образом (в смысле максимального сжатия) подготовленную для дальнейшего преобразования.

Второе кодирующее устройство (кодер канала КК) преследует цель обеспечить заданную достоверность при передаче или хранении информации путем дополнительного внесения избыточности, но уже по простым алгоритмам и с учетом интенсивности и статистических закономерностей помехи в канале связи. Такое кодирование получило название помехоустойчивого.

Целесообразность устранения избыточности сообщения методами эффективного кодирования с последующим перекодированием помехоустойчивым кодом обусловлена тем, что избыточность источника сообщения в большинстве случаев не согласована со статистическими закономерностями помехи в канале связи и поэтому не может быть полностью использована для повышения достоверности принимаемого сообщения, тогда как обычно можно подобрать подходящий помехоустойчивый код. Кроме того, избыточность источника сообщений часто является следствием весьма сложных вероятных зависимостей и позволяет обнаруживать и исправлять ошибки только после декодирования всего сообщения, пользуясь сложнейшими алгоритмами и интуицией. Итак, выбор кодирующих и декодирующих устройств зависит от статистических свойств источника сообщений, а также уровня и характера помех в канале связи. Если избыточность источника сообщения и помехи в канале связи практически отсутствуют, то введение как кодера источника, так и кодера канала нецелесообразно. Когда избыточность источника высока, а помехи весьма малы, целесообразно введение кодера источника. Когда избыточность источника мала, а помехи велики, целесообразно введение кодера канала.

При большой избыточности в высоком уровне помех целесообразно введение обоих дополнительных кодирующих (и декодирующих) устройств. После кодера канала КК кодирующий сигнал поступает в устройство кодирования символов сигналами – модулятор М.

Получаемый на выходе модулятор сигнал x подготовлен к передаче по конкретной линии связи ЛС (либо к хранению в некотором запоминающем устройстве).

В линии связи на сигнал накладываются помехи (поступающие из условно показанного на схеме рис. 3.1 источника помех ИП), так, что в устройство декодирования сигналов в символы – демодулятор ДМ – из канала связи приходит сигнал, искаженный шумом, который обозначен на схеме y . Устройство декодирования помехоустойчивого кода – декодер канала ДК – и устройство декодирования сообщений – декодер источника ДИ – выдают декодированное сообщение получателю П (человеку или машине).

3.5. Кодирование как процесс выражения информации в цифровом виде

Большинство кодов, используемых при кодировании информации без учета статистических свойств источника и помехи в канале связи, основано на системах счисления.

Любому дискретному сообщению или букве можно приписать какой-то порядковый номер. Измерение аналоговой величины, выражающееся в сравнении её с образцовыми мерами, также приводит к численному представлению информации. Передача или хранение сообщений при этом сводится к передаче или хранению чисел. Числа можно выразить в какой-либо системе счисления (см. также 1-1).

Сравним системы счисления и построенные на их основе коды с позиций применения в системах передачи, хранения и преобразования информации. Общеизвестным в настоящее время является позиционный принцип образования системы счисления. Значение каждого символа (цифры) зависит от его положения - i - позиции в ряду символов, представляющих число. Единица каждого следующего разряда больше единицы предыдущего разряда в m раз, где m – основание системы счисления. Полное число получаем, суммируя значение по разрядам

$$Q = \sum_{i=1}^l a_i m^{i-1} = a_l m^{l-1} + a_{l-1} m^{l-2} + \dots + a_2 m^1 + a_1 m^0$$

где i – номер разряда данного числа; l – количество разрядов; a_i – множитель, принимающий любые целочисленные значения в пределах

от 0 до $m - 1$ и показывающий, сколько единиц i -го разряда содержится в числе.

Чем больше основание системы счисления, тем меньше число разрядов требуется для представления данного числа, а следовательно, и меньше время для его передачи.

Однако с ростом основания существенно повышается требование к линии связи и аппаратуре создания и распознавания сигналов, соответствующих различным символам. Логические элементы вычислительных устройств в этом случае должны иметь большее число устойчивых состояний. Учитывая оба обстоятельства, целесообразно выбрать систему, обеспечивающую минимум произведения количества различных символов m на количество разрядов l для выражения любого числа. Найдем этот минимум по графику рис. 3.6, где показана связь между величинами m и l при воспроизведении определенного достаточно большого числа Q ($Q=60000$).

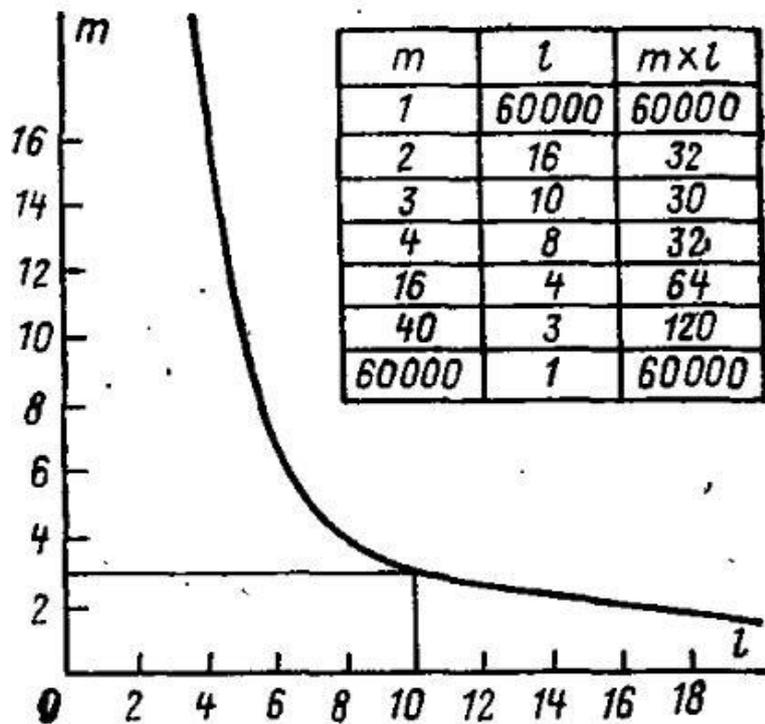


Рис. 3.6. Зависимость количества разрядов в числе от основания системы счисления

Из графика следует, что наиболее эффективной системой является троичная. Незначительно уступает ей двоичная и четверичная.

Системы с основанием 10 и большее существенно менее эффективны. Сравнивая эти системы с точки зрения удобства, физической реализации соответствующих им логических элементов и простоты выполнения в них арифметических и логических действий, предпочтение необходимо отдать двоичной системе. Действительно, логические элементы, соответствующие этой системе, должны иметь всего два устойчивых состояния. Задача различения сигналов сводится в этом случае к задаче обнаружения (есть импульс или нет импульса), что значительно проще.

Арифметические и логические действия также наиболее просто осуществляются в двоичной системе. В табл. 3.1 сложения, вычитания и умножения входит всего по четыре равенства:

Таблица 3.1

правила сложения	правила вычитания	правила умножения
$0+0=0$	$0-0=0$	$0*0=0$
$0+1=1$	$1-0=1$	$0*1=0$
$1+0=1$	$1-1=0$	$1*0=0$
$1+1=10$	$10-1=1$	$1*1=1$

Наиболее распространенная при кодировании и декодировании логическая операция – это сложение по модулю. В двоичной системе она также наиболее проста и определяется равенствами:

$0 \oplus 0 = 0$	$1 \oplus 1 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$	$1 \oplus 0 = 1$

Алгоритм перевода числа из двоичной системы в привычную человеку десятичную систему несложен. Пересчет начинается со старшего разряда. Если в следующем разряде стоит ноль, то цифра предыдущего разряда удваивается. Если же в следующем разряде стоит единица, то после удвоения предыдущего разряда результат увеличивается на единицу.

Найдем, например, десятичный эквивалент двоичного числа 1001. После первой единицы слева стоит 0. Удваиваем эту единицу. Получаем число 2. Цифрой следующего младшего разряда также является 0. Удваиваем число 2, получаем 4. В самом младшем стоит число 4 и, прибавляя 1, окончательно получаем 9.

Итак, для передачи и проведения логических и арифметических операций наиболее целесообразен двоичный код. Однако он неудобен при вводе и выводе информации, так как трудно оперировать с непривычными двоичными числами. Кроме того, запись таких чисел на бумаге оказывается слишком громоздкой. Поэтому, помимо двоичной, получили распространение системы, которые с одной стороны легко сводятся как к двоичной, так и к десятичной системам, а с другой стороны – дают более компактную запись.

К таким системам относятся восьмеричная, шестнадцатеричная и двоично-десятеричная.

В восьмеричной системе для записи всех возможных чисел используется восемь цифр от 0 до 7 включительно. Перевод чисел из восьмеричной в двоичную систему крайне прост и сводится к замене каждой восьмеричной цифры равным ей трехразрядным числом.

Например, для восьмеричного числа 745 получаем:

$$\begin{array}{ccc} 7 & 4 & 5 \\ 111 & 100 & 101 \end{array}$$

Поскольку в восьмеричной системе числа выражаются короче, чем в двоичной, она широко используется как вспомогательная система при программировании.

Чтобы сохранить преимущества двоичной системы и удобство десятичной системы, используют двоично-десятеричные коды. В такой коде каждая цифра десятичного числа записывается в виде четырехразрядного двоичного числа (тетрады). С помощью четырех разрядов можно образовать 16 различных комбинаций, из которых любые 10 могут составить двоично-десятичный код.

Наиболее целесообразным является код 8-4-2-1. (табл. 3.2). Этот код относится к числу взвешенных кодов. Цифры в названии кода означают вес единиц в соответствующих двоичных разрядах.

Таблица 3.2

Число в десятичном разряде	Двоично-логический код с весами 8-4-2-1	Двоично-десятичный код с весами 5-1-2-1	Двоично-десятичный код с весами 2-4-2-1
0	0000 0000	0000 0000	0000 0000
1	0000 0001	0000 0001	0000 0001
2	0000 0010	0000 0010	0000 0010
3	0000 0011	0000 0011	0000 0011
4	0000 0100	0000 0111	0000 0100
5	0000 0101	0000 1000	0000 1011
6	0000 0110	0000 1001	0000 1100
7	0000 0111	0000 1010	0000 1101
8	0000 1000	0000 1011	0000 1110
9	0000 1001	0000 1111	0000 1111
10	0001 0000	0001 0000	0001 0000

Этот двоично-десятичный код обычно используется как промежуточный при введении в вычислительную машину данных, представленных в десятичном коде.

Два других двоично-десятичных кода с весами 5-1-2-1 и 2-4-2-1, которые широко используются при поразрядном уравнивании в цифровых измерительных приборах.

Среди кодов, отходящих от систем счисления, большее практическое значение имеют также коды, у которых при переходе от одного числа к другому изменение происходит только в одном разряде. Наибольшее распространение получил код Грея, часто называемый циклическим или рефлексно-двоичным. Код Грея используется в технике аналого-кодowego преобразования, где он позволяет свести к единице младшего разряда ошибку неоднозначности при считывании. Комбинации кода Грея, соответствие десятичным числам от 0 до 15, приведены в табл. 3.2.

Правила перевода числа из кода Грея в двоичный код сводится к следующему: первая единица со стороны старших разрядов остается без изменения, последующие цифры (0 и 1) остаются без изменения, если число единиц, предшествующих четно, и инвертируется, если число единиц нечетно.

Выразим одно из чисел Грея, например, 1010 в обычном двоичном коде. Первая единица слева переписывается. Следующая цифра будет единицей, так как в этом разряде кода Грея стоит 0 и впереди только одна 1.

Далее необходимо записать ноль, так как в следующем разряде исходного числа стоит 1 и впереди снова имеется только одна единица. Поскольку перед последней цифрой числа в коде Грея стоит две единицы, то она должна остаться неизменной, т.е. 0. Таким образом, числу 1010 в коде Грея соответствует обычное двоичное число 1100.

3.6. Технические средства представления информации в цифровой форме. Разновидности преобразователей

Устройства, позволяющие заменять непрерывную последовательность значений аналоговой величины конечным числом дискретных значений и представлять их в заданном коде, получили название аналого-кодовых преобразователей. Кодовые эквиваленты аналоговой величины могут быть представлены комбинациями состояний оптических, электромеханических, электронных и других элементов, а также параллельными или последовательными во времени комбинациями электрических импульсов.

В случае необходимости обработки информации посредством цифровых вычислительных машин, как правило, используются представления в двоичном коде.

Аналого-кодовые преобразователи являются основными блоками в комбинированных вычислительных машинах, в которых информация выражается в двух различных видах: аналоговом и цифровом. Поскольку цифровые вычислительные машины выполняют элементарную операцию за время в несколько десятков миллисекунд, то предназначенные для них аналого-кодовые преобразователи должны работать с такой же скоростью.

В аналого-кодовых преобразователях, которые должны выдавать кодовые эквиваленты на систему цифровой индикации или на регистрирующее устройство, непосредственно используемые человеком, целесообразно применять представления в десятичном коде.

Аналого-кодовые преобразователи можно классифицировать по многим существенным признакам. Важнейшими из них являются принцип работы измерительной части преобразователя и принцип получения цифрового эквивалента.

По принципу получения цифрового эквивалента всё разнообразие существующих преобразователей может быть разбито на три основные группы: преобразователи считывания, преобразователи последовательного счета и преобразователи поразрядного уравнивания.

Принцип работы измерительной части преобразователя во многом определяет его точность, быстродействия и быстроту схемы. В связи с этим преобразователи первых двух групп разобьем на подгруппы в соответствии с тремя методами измерительных преобразований: прямым, развертывающим и следящим (рис. 3.7, а также гл. 5)

Аналоговой величиной, поступающей на вход преобразователя, может быть напряжение, угол поворота вал. Рассмотрим согласно нашей классификации примеры наиболее распространенных преобразователей «напряжение – код». В некоторых из них напряжение предварительно преобразуется во временной интервал или в угол поворота вала. Это позволит нам одновременно получить представление и о преобразователях.

Аналоговой величиной, поступающей на вход преобразователя, может быть напряжение, угол поворота вала, время и т. д. Рассмотрим согласно нашей классификации примеры наиболее распространенных преобразователей «напряжение – код». В некоторых из них напряжение предварительно преобразуется во временной интервал или в угол поворота вала. Это позволит нам одновременно получить представление и о преобразователях.

технические средства представления информации в цифровом виде



Рис. 3.7. Классификация основных типов аналого-кодовых преобразователей

На рис. 3.8 приведена схема декодирующего устройства для циклического кода с образующим многочленом $g(x) = x^3 + x^2 + 1$.

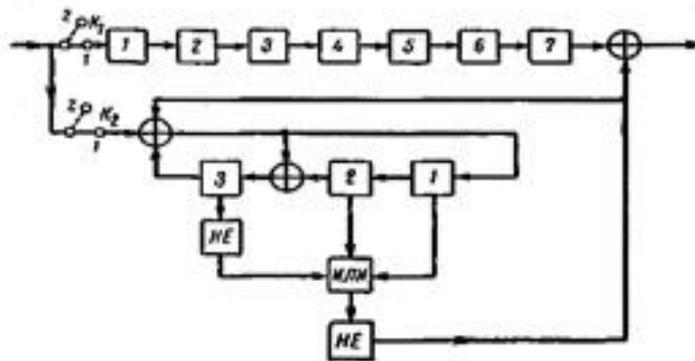


Рис. 3.8. Схема декодирующего устройства для циклического кода

В табл. 3.3 шаг за шагом представлен процесс исправления ошибки для случаев, когда сформированная в табл. 3.3 кодовая комбинация поступила на вход декодирующего устройства с искаженным символом в четвертом разряде.

Таблица 3.3

№ такта	Вход	Состояние ячеек кодирующего регистра			Выход
		3	2	1	
1	1	1	0	1	
2	0	1	1	1	
3	0	0	1	1	
4	0	1	1	0	
5	0	0	0	1	
6	1	1	1	1	
7	1	1	1	0	
8	0	0	0	1	1
9	0	0	1	0	01
10	0	1	0	0	001
11	0	0	0	0	1001
12	0	0	0	0	01001
13	0	0	0	0	101001
14	0	0	0	0	1101001

При увеличении числа не исправляемых независимых ошибок сложность дешифратора существенно возрастает. Поэтому рассмотренный способ декодирования применяется в основном для кодов, исправляющих одиночные ошибки и пачки ошибок.

Корректирующие коды как метод повышения достоверности используются не только при передаче и хранении, но и при логических и арифметических преобразованиях информации.

Контрольные вопросы

1. Понятие мощности сигнала.
2. Определение временной и частотной мощности.
3. Что такое спектральная плотность?
4. Как определить полную энергию взаимодействия двух сигналов?
5. Определите спектральную мощность взаимодействия двух сигналов.
6. Значения полной энергии, подсчитанные из временного и частотного представлений сигнала, совпадают по величине или нет?
7. Представьте общую схему системы передачи информации.
8. Постройте оптимальную зависимость количества разрядов в числе от основания системы счисления.
9. Представьте основные типы аналого-кодовых преобразователей.

Глава 4. МОДУЛЯЦИЯ

4.1. Модуляция носителей информации

Нанесение информации на носители достигается определенным изменением параметров некоторых физических процессов, состояний, соединений, комбинаций, элементов.

Чаще всего материализация информации осуществляется изменением параметров физических процессов – колебаний или импульсных последовательностей. Подобные операции называются модуляцией. Обратные операции восстановления величин, вызывающих изменение параметров при модуляции, называется демодуляцией. Теории модуляции и демодуляции еще называют теорией сигналов.

Для того, чтобы сигнал содержал информацию, он должен принципиально быть случайным. При описании сигнала некоторым количеством параметров часть из них может быть детерминированной т. е. Известной заранее, а часть случайной, т. е. Несущей информацию.

4.2. Виды носителей и сигналов

Сигналом называются физические процессы, параметры которых содержат информацию. В телефонной связи при помощи электрических сигналов передаются звуки разговора, в фототелеграфии – тексты и чертежи, в телевидении – изображения. Назначение сигналов заключается в том, чтобы в каком-либо физическом процессе отобразить события, величины и функции. Для образования сигналов используются постоянные состояния (рис. 4.1, *а*), колебания (рис. 4.1, *б*) или импульсы (рис. 4.1, *в*) любой физической природы, которые рассматриваются как носители информации. В исходном состоянии эти носители представляют собой как бы чистую поверхность, подготовленную к нанесению необходимых данных – модуляции. Последняя заключается в том, что изменяется какой-либо один или несколько (сложная модуляция) параметров носителя в соответствии с передава-

емой информацией. Эти параметры будем называть информационными. Если обозначить параметры носителя через a_1, \dots, a_n , то носитель как функция времени может быть представлен в виде

$$u_n = g(a_1, \dots, a_n, t)$$

Первый вид носителя $u_n(t)$ – постоянное состояние (рис. 4.1, а), например параметр: это величина напряжения. Модуляция в данном случае сходится к такому изменению напряжения, чтобы оно в определенном масштабе представляло передаваемые данные. При этом может изменяться и полярность напряжения. Второй вид носителя – колебание (рис. 4.1, б); например переменное напряжение содержит три таких параметра: амплитуду U , фазу φ , частоты ω .

модуляция носителей информации

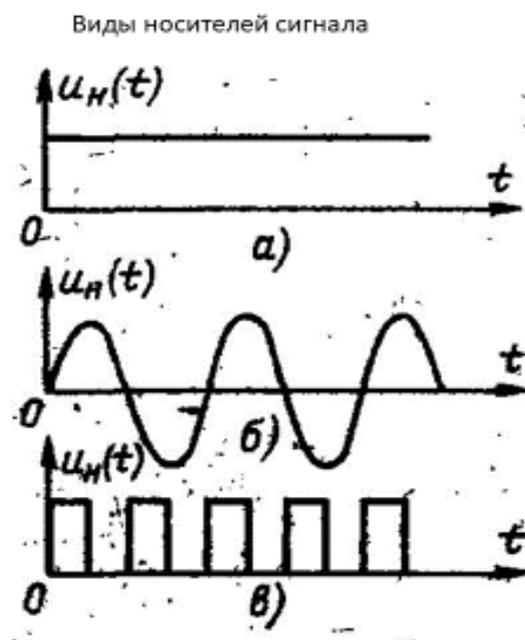


Рис. 4.1. Виды носителей информации

Третий вид носителя – последовательность импульсов (рис. 4.1, в) представляет еще большие возможности. Здесь параметрами модуляции могут быть: амплитуда импульсов U , фаза импульсов φ , частота импульсов f , длительность импульсов или пауз τ , число импульсов n и комбинация импульсов и пауз, определяющая код k . В последнем случае имеет место так называемая кодо-импульсная модуляция.

Перечень основных видов модуляции с их названиями и обозначениями

Носитель первого типа (рис. 4.1, *a*)

ПМ – прямая модуляция.

Изменение постоянного напряжения или тока избегают называть модуляцией, хотя последняя характеризует придание размера вообще.

Носитель второго типа (рис. 4.1, *б*)

АМ – амплитудная модуляция

ЧМ – частотная модуляция

ФМ – фазовая модуляция

Частотную и фазовую модуляцию иногда совместно называют угловой модуляцией.

Носитель третьего типа (рис. 4.1, *в*)

АИМ – амплитудно-импульсная модуляция

ЧИМ – частотно-импульсная модуляция

ВИМ – время-импульсная модуляция

ШИМ – широтно-импульсная модуляция

ФИЗ – фазо-импульсная модуляция

СИМ – счетно-импульсная модуляция

КИМ – кодо-импульсная модуляция

ШИМ и ФИМ являются частными случаями ВИМ;

КИМ нельзя рассматривать как отдельный вид модуляции, хотя этот термин и получил широкое распространение;

При КИМ используется любой вид модуляции носителя, параметры которого отображают кодовые величины;

СИМ является частным случаем КИМ.

Типичные сигналы, различающиеся видами модуляции, показаны на рис. 4.2 для случаев равномерного возрастания отображаемой величины $x(t)$.

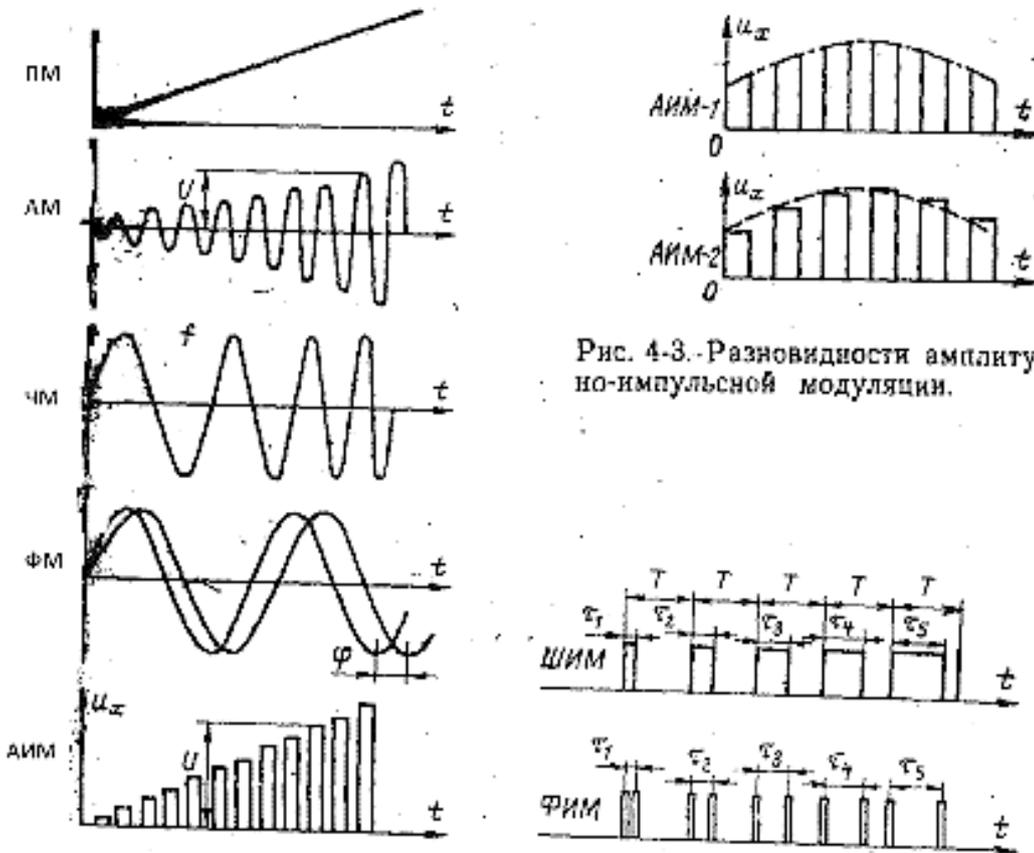
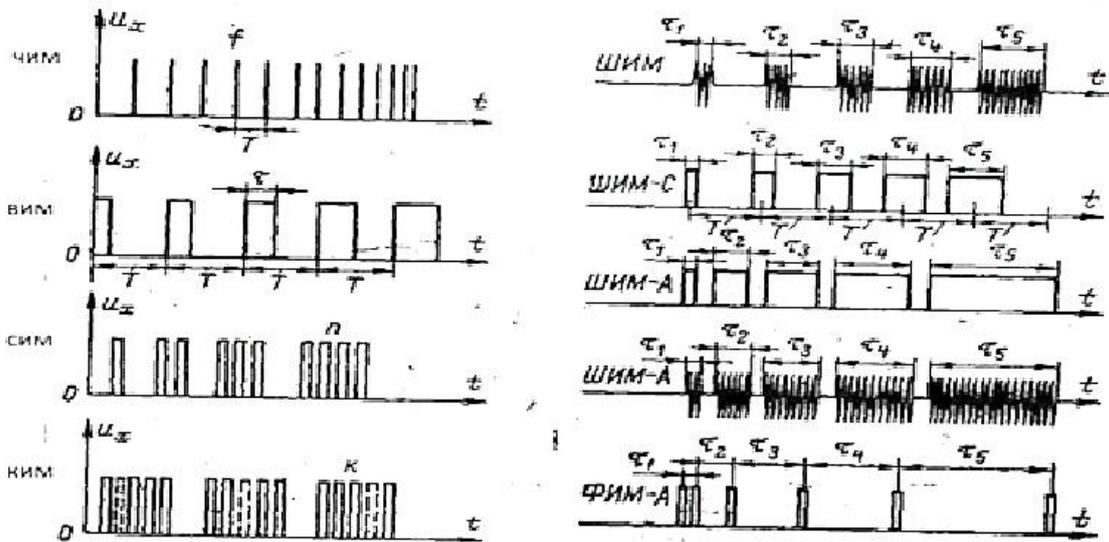


Рис. 4.3. Разновидности амплитудно-импульсной модуляции.

Рис. 4.2. Виды модуляции

Как видно СИМ и КИМ связаны с квантованием по уровню непрерывной величины x . АИМ, ВИМ, ФИМ и КИМ неизбежно приводят к дискретности отсчетов по времени. Другие виды модуляции

принципиально сохраняют непрерывную структуру информации. АИМ имеет две разновидности: АИМ-1, при котором участки импульсов (амплитуды) повторяют форму модулированной функции (огibaющей); АИМ-2, при которой амплитуда в пределах элементарного импульса остается неизменной, определяемой значением модулирующей функции в начале импульса.

ВИМ выполняется в нескольких вариантах. Информационным параметром сигналов ШИМ служит ширина импульсов или пауз, а сигналов ФИМ – расстояние между первым (опорным) и вторым (информационным) импульсами каждого периода. Следует обратить внимание на отличительные особенности симметричной модуляции ШИМ-С и циклических – ШИМ-А и ФИМ-А. Последние наиболее экономичны, так как в них практически отсутствуют неиспользуемые промежутки времени. Значащие интервалы вплотную прилегают один к другому, а короткие импульсы или паузы размечают границы.

Все импульсные сигналы могут иметь высокочастотное заполнение – сигнала несущей частоты. Для подчеркивания этого обстоятельства применяют двойные обозначения видов модуляции, например, АИМ-ЧМ, КИМ-ФМ и т. д., где второй вид модуляции относится к сигналам несущей частоты.

4.3. Модуляция и кодирование

Место модуляции в системах передачи дискретной информации было показано схемой рис. 3.1 (модулятор М). В том случае, когда параметр модуляции является не аналоговой величиной, а цифровой, т. е, кодом, модуляцию следует рассматривать как образование из чистых процессов (носителей) физических эквивалентов знаков, пригодных для дальнейшей переработки информации и передачи её на расстояние.

КИМ сочетает любой вид импульсной модуляции с кодированием по какой-либо системе. Предельным является случай, при котором кодирование происходит по «бесконечной» системе, когда цифровой сигнал переходит в аналоговый.

При этом любое значение измеряемой величины без квантования передается соразмерным значением амплитуды, частоты, фазы или длительности. Параметр модуляции изменяется плавно, принимая

бесконечное множество значений в заданных пределах. При кодировании по единичной системе параметр модуляции может иметь только одно значение, легко отличимое от состояния отсутствия сигнала. В общем же случае количество используемых значений параметра модуляции должно быть равно основанию h кода.

Связь между модуляцией и кодированием наглядно иллюстрируется табл. 4.1, где для знаков кодирования по «бесконечной», десятичной, двоичной и единичной системам использованы прямая, амплитудная, фазовая, частотная, амплитудно-импульсная, фазо-импульсная, частотно-импульсная и широтно-импульсная модуляции. В табл. 4.1 даны только наборы сигнальных элементов, соответствующие кодовым алфавитам, но не законченное строение сигналов.

Таблица 4.1

Модуляция	Кодирование			
	Бесконечная система $h \rightarrow \infty$	Десятичная система $h=10$	Двоичная система $h=2$	Единичная система $h=1$
Амплитудная (АМ)				
Прямая (ПМ) и амплитудно-импульсная (АИМ)				
Фазовая (ФМ)				
Фазо-импульсная (ФИМ)				
Частотная (ЧМ)				
Частотно-импульсная (ЧИМ)				
Широтно-импульсная (ШИМ)				

4.4. Детерминированные и случайные сигналы

Часто представляет интерес изучение детерминированных характеристик сигнала, и тогда можно условно говорить о детерминированном сигнале. Так, например, если сигналом служит импульс зара-

нее известной формы и величины, то неизвестным заранее параметром является время его прихода; при этом о самом импульсе можно говорить, как о детерминированном сигнале. При длительном существовании сигнала определенной формы также может рассматриваться на определенном интервале как детерминированный.

Случайный сигнал представляет собой модулированный носитель, у которого параметры $\Delta a_i(t)$ являются случайными функциями времени. Случайный сигнал, у которого лишь небольшое число переменных параметров a_i носит случайный характер, называют квазидетерминированным. В данной главе, когда речь идет о случайных сигналах, рассматриваются лишь сигналы, пропорциональные информационной случайной функции $x(t)$.

4.5. Временная и спектральная формы описания сигнала

Временная форма представления сигнала, то есть описание его изменения или изменения параметров модуляции в функции времени, позволяет легко определить такие важные характеристики, как энергия, мощность и длительность сигнала. Однако существуют другие адекватные формы описания сигнала, лучше отображающие другие параметры. Например, представление в виде ряда Котельникова дает возможность выделить некоррелированные интервалы.

Важнейшими характеристиками сигнала является его частотные свойства. Для их исследования используется частотное представление функции в виде спектра, представляющего собой преобразование Фурье временной формы.

В процессе переработки и передачи сигнала эта характеристика играет особую роль, так как определяет параметры используемой аппаратуры.

При рассмотрении спектров основных видов сигналов главное внимание уделяется определению их ширины, поскольку в основном этот фактор используется для согласования сигнала с аппаратурой обработки информации (каналом): для исключения потери информации ширина спектра не должна превышать полосы пропускания канала.

Для периодического сигнала $u_x(t)$ спектр определяется соотношениями:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_x(t) e^{-jk\Omega t} dt; \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_x(t) dt;$$

Таким образом спектр функции является дискретным. Его ширина $\Delta\omega$ определяется полосой положительных частот ω , на которой $|A_k(j\omega)|$ имеет значимую величину. Вследствие сопряженности комплексных амплитуд их модули равны между собой:

$$|A_k| = |A_{-k}|$$

Поэтому для представления спектра достаточно изобразить только положительную полосу частот (рис.4.3, а). Дискретный спектр не обязательно означает периодичность функции $u_x(t)$.

Последнее имеет место лишь в случае, когда расстояние между спектральными линиями $|A_k|$ кратны основной частоте Ω . При невыполнении этого условия спектр описывает так называемую почти периодическую функцию. Примером такой функции может служить спектр амплитудно-модулированного сигнала с гармонической модулирующей функцией, частота которой несоизмерима с частотой несущей (см. 4.3).

Для непериодического сигнала, определяемого на бесконечном интервале времени, преобразования Фурье имеют вид:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$U_x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

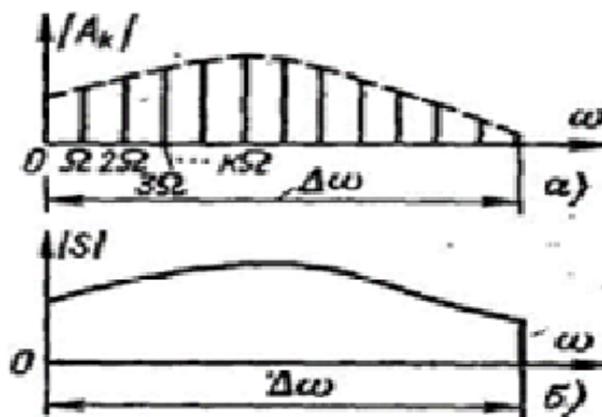


Рис. 4.3. а – спектр периодического сигнала, б – спектр непериодического сигнала

Из сравнения (4.3) и (4.2) видно, что роль спектральной комплексной составляющей сигнала на частоте ω выполняет бесконечно малая величина

$$dA = \frac{1}{\pi} s(j\omega) d\omega$$

В связи с этим в случае непериодических функций рассматривается не спектр сигнала, а его производная по $\omega S(j\omega)$, носящая название спектральной плотности, или, как в случае периодического сигнала, комплексного спектра; её модуль $|S(j\omega)|$ также называют спектром. Спектр непериодического сигнала имеет непрерывный характер (рис. 4.3, б). Ширина его $\Delta\omega$ определяется так же, как и для дискретного сигнала.

4.6. Спектры сигналов с носителем в виде постоянного состояния

Невозмущенный носитель (процесс) в виде постоянного состояния (напряжения или тока) может быть представлен временной (t), частотной (ω) или векторной (W) диаграммами (рис. 4.4, а):

t -диаграмма описывает состояние процесса во времени;

ω -диаграмма дает частотное представление процесса;

W -диаграмма изображает вектор напряжения или тока на комплексной плоскости $W(s, j\sigma)$, где s и σ – соответственно действительная и мнимая составляющие синусоидального сигнала, записанного в комплексной форме. Векторная форма представления удобна тем, что позволяет легко получить как временную, так и частотную форму процесса, однако она неудобна в тех случаях, когда число постоянных частот (несущих или информационных) больше, чем 2-3. В данном случае все диаграммы имеют простейший вид, так как формула процесса есть $u_n = U_0$ – вектор лежит на оси проекций, а процесс содержит только нулевую частоту $\omega_0 = 0$.

Прямая модуляция

Тот же носитель возмущаемым чувствительным элементом подвергается изменениям и становится сигналом, переносящим информацию $x(t)$. Если модулирующая функция $\Delta u(t)$ представляет собой единственную гармонику частоты Ω , то информационный параметр (амплитуда) носителя содержит это колебание и постоянную составляющую U_0 :

$$U_x(t) = U_0 + \Delta U_m \cos \Omega t$$

t, ω и W – диаграммы имеют вид, изображенный на рис. 4.5, б.

Подразумевается, что за время периода $2\pi/\Omega$ вектор Δu_m на W -диаграмме вращается против часовой стрелки с угловой скоростью Ω и проекция его на ось s дает косинусоидальную составляющую в разные моменты времени. В процессе имеются две дискретные частоты: $\omega=0$ и $\omega=\Omega$. Ширина спектра такого сигнала составляет Ω (от 0 до Ω).

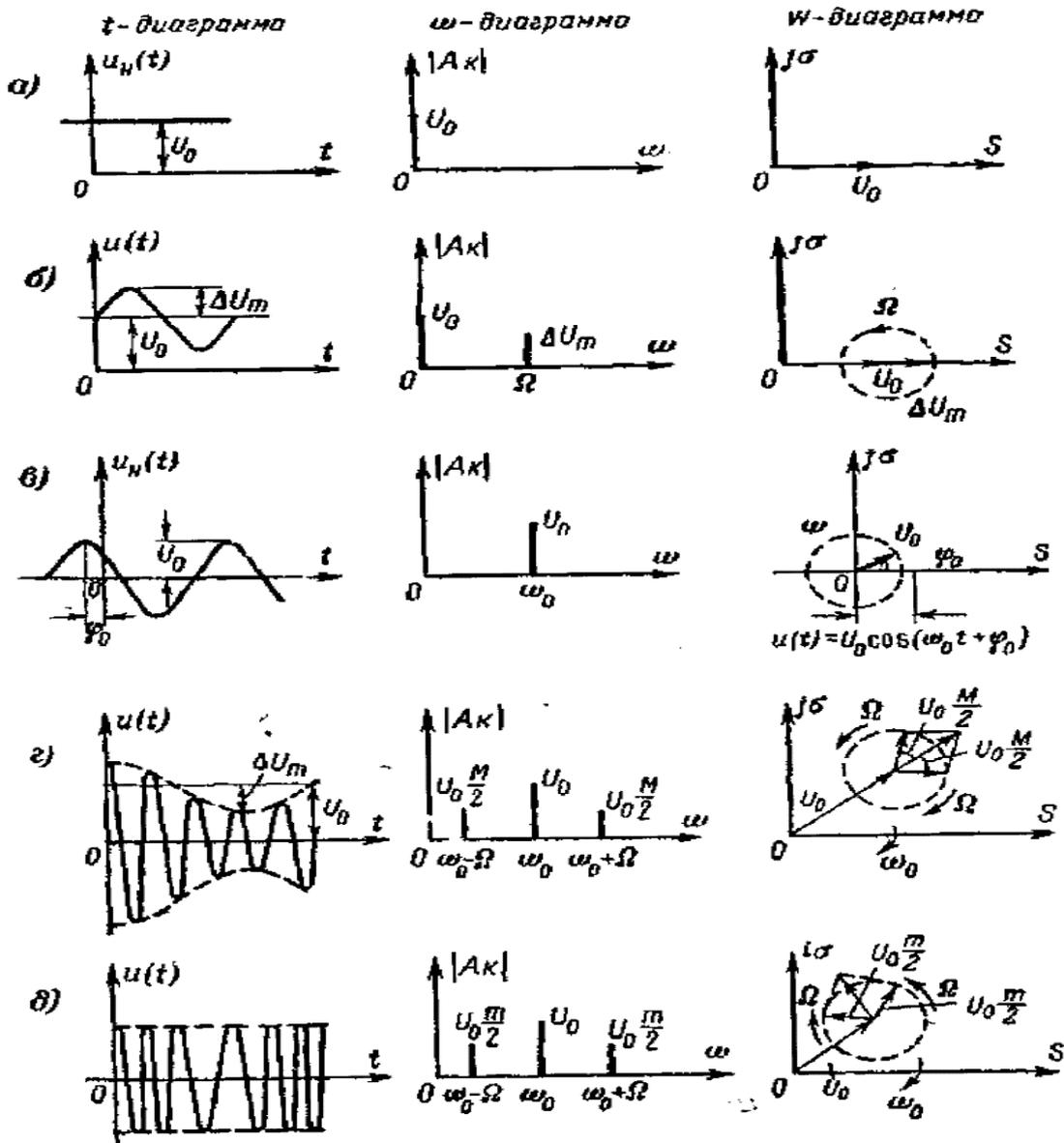


Рис. 4.5. Временная, частотная и векторная формы представления сигналов: а – невозмущенный носитель в виде постоянного сигнала; б – сигнал с прямой модуляцией; в – невозмущенный гармонический носитель; г – амплитудно-модулированный сигнал; д – сигнал с угловой модуляцией

4.7. Спектры сигналов с гармоническим носителем

Невозмущенный гармонический носитель

$$U_x(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

в виде t , ω и W диаграмм изображен на рис.4.5,в, где φ_0 – начальная фаза колебаний. Постоянная составляющая отсутствует.

Амплитудная модуляция

АМ-сигнал в общем виде описывается выражением

$$u_x(t) = [U_0 + \Delta u(t)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Информацию переносит компонента $\Delta u(t) = Kx(t)$.

Если $\Delta u(t)$ представлена суммой гармонических колебаний, то

$$u_x(t) = U_0 \left[1 + \sum_{k=1}^n M_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \right] \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

где M_k – частичные или парциальные коэффициенты модуляции, представляющие отношения амплитуд высших гармоник к основной; Ω_k и Φ_k – частоты и фазы составляющих $\Delta u(t)$. Общий коэффициент модуляции M есть наибольшее симметричное относительное отклонение $\pm \Delta U_m$ амплитуды носителя от временного значения U_0 :

$$M = \Delta U_m / U_0.$$

если $\Delta u(t)$ представлено одним низкочастотным синусоидальным колебанием частоты Ω , то

$$\Delta u_x(t) = U_0 [1 + M_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k)] \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

или

$$\Delta u_x(t) = U_0 \{ [\cos(\omega_0 t + \varphi_0)] + M_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \}.$$

разлагая произведение косинусов

$$\cos(\Omega_k t + \Phi_k) \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = 1/2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Omega_k t + \Phi_k) + 1/2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \Omega_k t - \Phi_k),$$

получаем

$$u_x(t) = U_0 \{ \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + M/2 \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 + \Phi] + M/2 \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi_0 - \Phi] \}$$

Этим выявляются частотные составляющие ω_0 , $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$. Последняя формула позволяет построить t, ω и W диаграммы (рис. 4.6, з). На W -диаграмме вектор U_0 изображен неподвижным, а система координат – вращающаяся по часовой стрелке. Дополнительные составляющие вращаются в разные стороны со скоростью Ω относительно векторы U_0 .

Более сложные модулирующие сигналы функции $\Delta u(t)$ раскладываются в ряд и анализируются аналогично. При этом на ω -диаграмме появляются дополнительные линии, на W -диаграмме дополнительные векторы с иной частотой вращения. Полная ширина полосы частот сигнала получается равной двойной ширине спектра модулирующей функции $\Delta u(t)$.

Частотная и фазовая модуляции

При изменении частоты всегда меняется фаза колебаний, а при изменении фазы меняется частота. Этим определяется общий характер частотной (ЧМ) и фазовой (ФМ) модуляций. Иногда их объединяют под общим названием угловой модуляции. ЧМ осуществляется прямым воздействием датчика на генератор для изменения частоты его колебаний, хотя при переходах меняется и фаза. При ФМ датчик воздействует на выходную цепь генератора, изменяя фазу несущего колебания, однако при переходах от одной фазы к другой меняется частота колебаний. Особенно наглядно это видно (рис.4.6) при скачкообразных изменениях $\omega=f(x)$ и $\varphi=f(x)$.

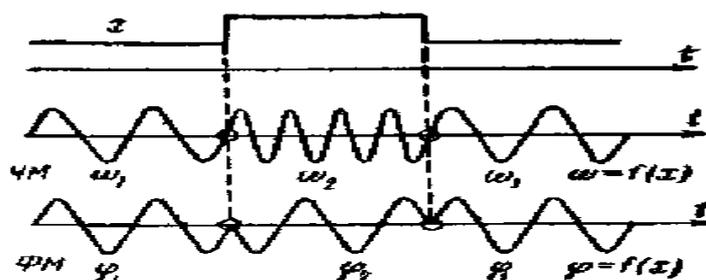


Рис. 4.6. Модуляция при скачкообразном изменении информационной функции

Здесь уместно напомнить некоторые соотношения для угловой частоты колебания ω , частоты в периодах f , периода колебания T и полной фазы колебания φ :

$$\Omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}; \quad \omega(e) = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varphi(t) = \int_0^t \omega dt$$

Из последних соотношений видно, что частоту можно оценивать по скорости изменения фазы, а полную фазу (угол) – по интегральному значению угловой частоты. Учитывая это обстоятельство, выражение для сигнала при произвольном изменении полной фазы можно записать в виде $u_x = U_0 \cos \varphi(t) = U_0 \cos \int_0^t \omega(t) dt$.

При частотной модуляции частота носителя (процесса) отклоняется на $\Delta\omega(t)$ от средней частоты ω_0 в соответствии с информационной функцией $x(t)$

Пусть модулирующая функция

$$\Delta\omega(t) = \Delta\omega_m \cos(\Omega t + \Phi).$$

Тогда угловая частота $\omega(t)$ носителя должна изменяться по закону

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m \cos(\Omega t + \Phi).$$

Если теперь использовать носитель в виде стабильного по амплитуде переменного напряжения

$$u_x = U_0 \cos \varphi(t) = U_0 \cos \int_0^t \omega(t) dt,$$

то представляя $\omega(t)$ из вышеприведенной формулы, получаем:

$$U_x = U_0 \cos \varphi(t) = U_0 \cos \int_0^t [\omega_0 + \Delta\omega_m \cos(\Omega t + \Phi)] dt = U_0 \cos[\omega_0 t + \Delta\omega_m \int_0^t \cos(\Omega t + \Phi) dt] = U_0 \cos[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \sin(\Omega t + \Phi) + \varphi_0].$$

Максимальное отклонение $\Delta\omega(t)$ от ω_0 называется девиацией частоты, а отношение $\Delta\omega_m/\Omega = m$ – индексом модуляции. Используя последнее, перепишем:

$$u_x(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \sin(\Omega t + \Phi + \varphi_0)]$$

В случае более сложной модулирующей функции, представленной, например, рядом из косинусоидальных функций, частотно-модулированный сигнал будет описываться выражением

$$u_x(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \sum_{k=1}^n m_k \sin(\Omega t + \Phi_k) + \varphi_0].$$

Здесь $m_k = \omega_k / \Omega_k$ – частичные или парциальные индексы модуляции, которые зависят от амплитуд и частот соответствующих гармоник.

При фазовой модуляции осуществляется сдвиг фазы носителя (процесса) на $\Delta\varphi(t)$ от средней фазы φ_0 .

Если информация по-прежнему передается элементарной косинусоидальной функцией, то

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi_m \cos(\Omega t + \Phi)$$

и фаза носителя изменяется по закону

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi_m \cos(\Omega t + \Phi).$$

Следовательно, сигнал описывается выражением

$$u_x(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_m \cos(\Omega t + \Phi)].$$

В случае фазовой модуляции также можно воспользоваться индексом модуляции, учитывая, что изменение частоты в пределах угла $\pm \Delta\varphi_m = \pm \Delta\omega_k / \Omega_k$

Таким образом, индекс модуляции при ФМ равен девиации фазы

$$m = \Delta\varphi_m$$

соответственно девиация частоты

$$\Delta\omega_m = m\Omega = \Delta\varphi_m \Omega$$

Текущее изменение фазы при ФМ

$$\Delta\varphi_m = \Delta\varphi_m \cos(\Omega_t + \Phi) = m \cos(\Omega_t + \Phi)$$

Полученное выше выражение для сигнала приобретает вид:

$$u_x(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \cos(\Omega t + \Phi) + \varphi_0]$$

Если информация передается суммой косинусоидальных функций, то ФМ-сигнал соответственно усложняется:

$$u_x(t) = U_0 \cos \left[\omega_0 t + \sum_{k=1}^n m_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k) + \varphi_0 \right],$$

где $m_k = \Delta\varphi_k$ – частичные или парциальные индексы модуляции, зависящие только от амплитуд гармоник.

Как показывают вышеперечисленные уравнения, при элементарной информационной функции $x(t) = x_m \cos \Omega t$ или $x(t) = x_m \sin \Omega t$ и постоянной частоте Ω сигналы ЧМ и ФМ трудно различимы. Однако в случае ЧМ в сигнал $u_x(t)$ входит интеграл информационной функции $(1/\Omega) \sin \Omega t$ или $(-1/\Omega) \cos \Omega t$, а в случае ФМ – сама функция $\cos \Omega t$ или $\sin \Omega t$. Множитель $1/\pi$ учитывается при выборе модуляторов и демодуляторов. При сложной информационной функции в виде суммы элементарных гармоник при изменяющейся частоте Ω элементарной функции различие между ЧМ и ФМ выявляется в полной мере. Рассмотрим графики $\Delta\omega_m(\Omega)$ и $\Delta\varphi_m \Omega$ для случаев ЧМ (рис.4.7,а) и ФМ (рис.4.7,б). Амплитуда информационной функции предполагается неизменной ($x_k = const$), поэтому $\Delta\omega_m(\Omega)$ при ЧМ и $\Delta\varphi_m \Omega$ при ФМ представлены горизонтальными линиями (они не зависят от частоты Ω).

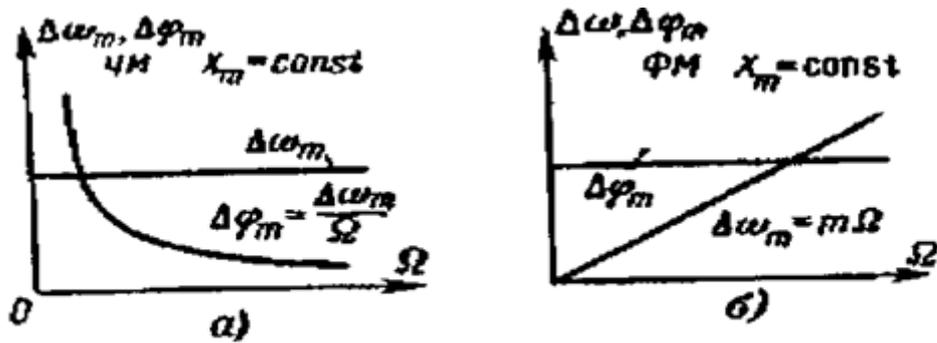


Рис. 4.7. Особенности частотно- и фазо-модулированных сигналов
 а – случай частотной модуляции; б – случай фазовой модуляции

При ЧМ девиация фазы $\Delta\varphi_m = \Delta\omega_m/\Omega$ убывает с увеличением частоты Ω информационной функции. При ФМ девиация частоты носителя $\Delta\omega_m = m\Omega = \Delta\varphi_m\Omega$ пропорциональна частоте информационной функции.

Для рассмотренного случая $m \ll 1$ на рис.4.5, д построены ω , t , W – диаграммы. Ω -диаграмма имеет одинаковый вид для ЧМ и ФМ и при малом m не отличается от АМ, W -диаграмма для ЧМ отличается лишь направлением вектора нижней боковой частоты.

На W -диаграмме вектор несущей U_0 зафиксирован, система координат вращается со скоростью ω_0 , а векторы $U_0 \times m/2$ составляющих боковых частот $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ вращаются в противоположные стороны со скоростями Ω и вызывают качания равнодействующей в пределах угла $\omega_{\max} = m$ в обе стороны от среднего положения. Длина результирующей в действительности не изменяется, так как колебания совершаются по дуге (построение выполнено по приближенным соотношениям).

4.8. Спектры сигналов с импульсным носителем

Спектры одиночных импульсов

Прежде чем перейти к спектрам сигналов с импульсной модуляцией, предварительно рассмотрим спектры одиночных импульсов различной формы. Их определение производится подстановкой аналитического описания импульса в формулу интеграла Фурье.

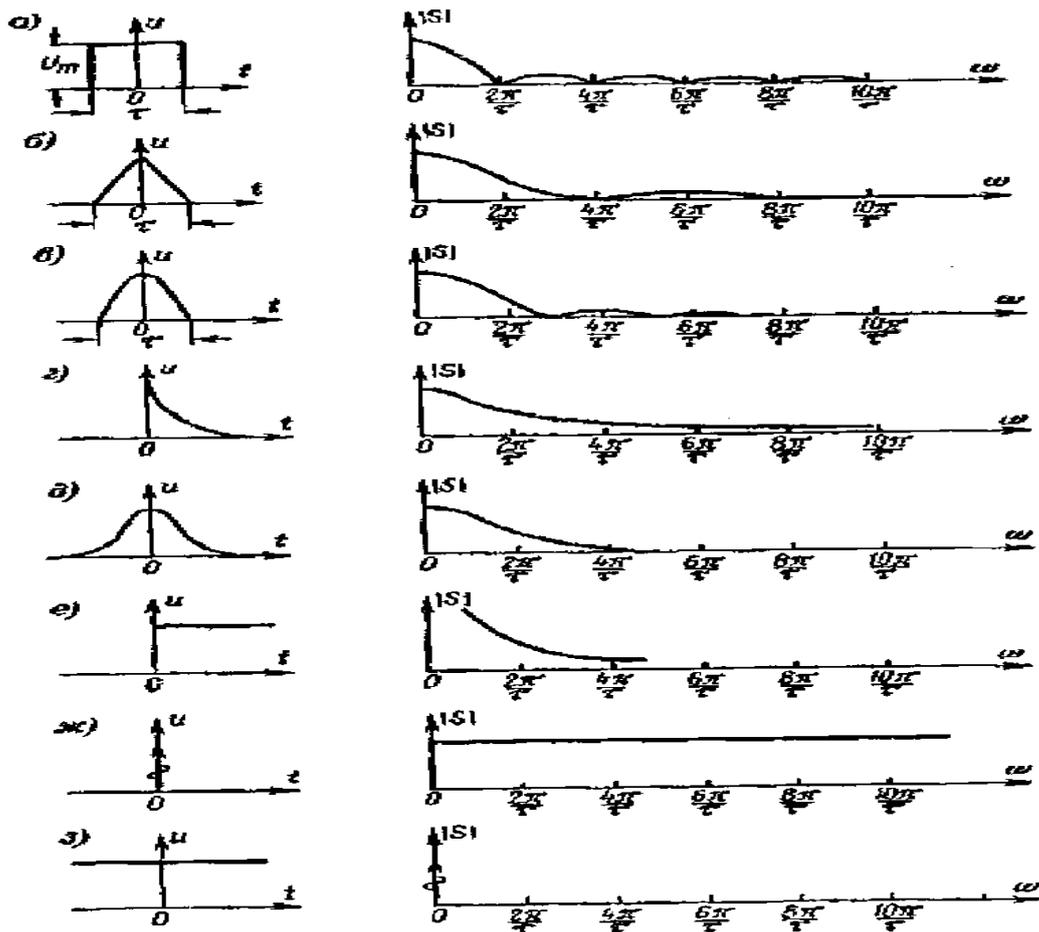


Рис. 4.8. Спектры импульсных сигналов различной формы: а – прямоугольный импульс; б – треугольный импульс; в – косинусоидальный импульс; г – экспоненциальный импульс; д – колокольный импульс; е – скачок; ж – дельта-функция; з – постоянная величина

Так для прямоугольного импульса рис.4.8, а имеем:

$$S(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} U_m e^{-i\omega t} dt = \frac{U_m}{j\omega} e^{i\omega t/2} - \frac{U_m}{j\omega} e^{-i\omega t/2} = \frac{2U_m}{\omega} \sin \frac{\omega\tau}{2}$$

Модуль этой функции

$$|S(j\omega)| = \frac{2U_m}{\omega} \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right|$$

При изменении положения импульса на временной оси выражение для $S(j\omega)$ будет отличаться лишь аргументом, сохраняя модуль неизменным.

Характер спектров для других часто встречающихся форм импульсов – треугольного, косинусоидального, экспоненциального, ко-

локольного и скачкообразного – изображен на рис. 4.8, б – е. На рис. 4.8, ж, з изображены предельные случаи спектров дельта-функции и постоянной величины 1. Из диаграмм видно, что их спектры обладают бесконечном протяженностью, имея тенденцию к затуханию (кроме дельта-функции, обладающей равномерным спектром) с увеличением частоты ω . Форма спектра, степень и характер его затухания существенно зависят от формы импульса и его длительности. Следовательно, форма и ширина импульса влияют на действительную ширину спектра. Амплитуда же сигнала на ширину спектра не влияет, она определяет лишь масштаб $S(j\omega)$ по оси ординат.

Рассмотрим в связи с этим связь ширины спектра с шириной импульса произвольной формы. Увеличение длительности импульса τ в «а» раз эквивалентно уменьшению во столько же раз аргумента временной функции $u_x(t/a)$. Спектр полученного импульса:

$$S_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x\left(\frac{1}{a}t\right) e^{-i\omega t} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} u_x\left(\frac{1}{a}t\right) e^{-i(\omega a)t/a} d\left(\frac{1}{a}t\right) = a \int_{-\infty}^{\infty} u_x(t') e^{-i\omega t'} dt.$$

где $t' = t/a$ или $S_a(j\omega) = aS(ja\omega)$

Отсюда следует, что спектр расширенного в a раз импульса во столько же раз уже спектра исходного сигнала.

Масштабный множитель a перед $S_a(j\omega)$ на характер и ширину спектра влияния не оказывает. Он лишь увеличивает все амплитуды гармонических составляющих в a раз. Его наличие вызвано изменением в a раз площади первоначального импульса при расширении. Рассматриваемый одиночный импульс и его спектр в общем случае затухают лишь при бесконечно больших величинах аргументов. Однако если в соответствии с каким-либо критерием ширину импульса τ и ширину спектра $\Delta\omega$ ограничить некоторыми значениями аргументов, то согласно полученному выше соотношению имеет место закономерность

$$\tau\Delta\omega = \lambda \text{ или } \tau\Delta f = \mu,$$

где λ и μ – постоянные значения, зависящие только от формы импульса. В качестве такого критерия часто используется энергетический критерий, согласно которому интервалы τ и $\Delta\omega$ выбираются так, чтобы энергия отсеченных частей функции $u_x(t)$ и $S(j\omega)$ была пренебрежимо малой по сравнению с энергией функции внутри интервалов. Для определения правильных значений τ и $\Delta\omega$ должны быть известны

зависимости между значимой долей энергии импульса и аргументами t и ω .

Удельная мгновенная мощность сигнала $u_x(t)$, то есть мощность, выделяющаяся на единичном сопротивлении равна $u_x^2(t)$, а полная удельная энергия составляет:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

Полагая значимую долю энергии равной $E_0 = KE$ (коэффициент $K < 1$, но достаточно близкий к единице, задается произвольно, практическую ширину импульса τ можно определить из соотношения:

$$E_0 = \int_0^{\tau} u^2(t) dt = K \int_0^{\infty} u^2(t) dt$$

Для нахождения по этому же критерию практической ширины спектра воспользуемся равенством Персиваля, связывающим энергию сигнала с энергией спектра.

Величина $\frac{1}{\pi} |S(j\omega)|^2$ есть энергия, приходящая на полосу частот $d\omega$. Поэтому функция $S_a(j\omega) = |S(j\omega)|^2$ выражает спектральную плотность энергии. Практическая ширина спектра $\Delta\omega$ определяется из равенства:

$$E_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Delta\omega} |S(j\omega)|^2 d\omega = \frac{K}{\pi} \int_0^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega$$

Используя данный критерий, можно подсчитать величину λ для любой формы импульсов. Для изображенных на рис.4-8 импульсов пропорциональная ей константа $\mu = \lambda/2\pi$ лежит в пределах от 0,22 (для колокольного импульса) до 1,13 (для экспоненциального импульса) [5]. Для ориентировочных оценок при любой форме импульсов обычно принимают $\mu = 1$. Величина λ характеризует экономичность сигнала. Наиболее экономичным с этой точки зрения является колокольный импульс, который требует наименьшей полосы частот $\Delta\omega$ при заданной длительности τ .

Спектры импульсных носителей

Комплексные амплитуды дискретного спектра могут быть получены из непрерывного спектра при дискретных значениях аргумента $\omega = k\Omega$.

$$A_k = \frac{2}{T} S(jk\Omega), k=1,2,3,\dots;$$

$$A_0 = \frac{1}{T} S(0).$$

Другими словами, для импульсов одинаковой формы решетчатая функция $(T/2) \cdot A_k(j\omega)$, $\omega = k\Omega$ вписывается в непрерывную $S(j\omega)$. Постоянная составляющая A_0 при этом имеет вдвое меньшее значение.

Это обстоятельство на рис. 4.9, где спектры одиночного импульса и последовательности импульсов той же формы изображены на диаграммах «а» и «б», совмещены (диаграмма в).

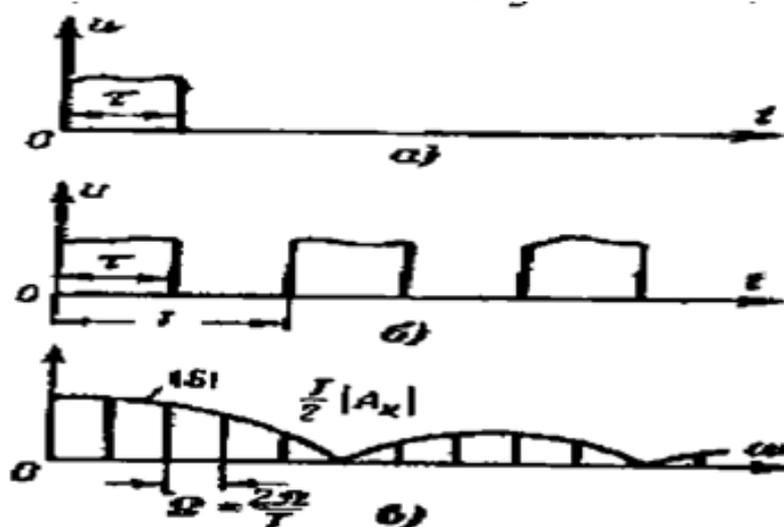


Рис. 4.9. Связь спектров одиночного импульса и периодической последовательности импульсов: а – одиночный импульс; б – периодическая последовательность импульсов; в – спектры одиночного импульса и периодической последовательности импульсов

Расстояние между составляющими дискретного спектра равно основной частоте носителя $\Omega = 2\pi/T$. Отсюда следует, что изменение периода следования импульсов T приводит к изменению плотности дискретных составляющих, а изменение скважности T/τ при неизменном периоде (то есть изменение τ) вызывает сужение или расширение огибающей с сохранением её формы, оставляя неизменным расстояние между линиями дискретного спектра. При достаточно большой плотности этих линий, когда между узлами размещается по крайней мере несколько гармонических составляющих, что имеет место при

$T \gg \tau$, ширину спектра $\Delta\omega$ импульсного носителя можно считать практически такой же, как и для одиночного импульса. С приближением τ к T эти спектры могут оказаться различными по ширине.

На рис. 4.10 изображены деформации спектра импульсного носителя при изменении T (диаграммы а) и τ (диаграммы б) для импульсов прямоугольной формы. Цифрами 0,1,2... обозначены соответствующие гармоники дискретного спектра. В предельном случае $\tau=T$ в спектре остается одна линия на частоте $\omega=0$; остальные линии оказываются в узлах и их амплитуды равны нулю.

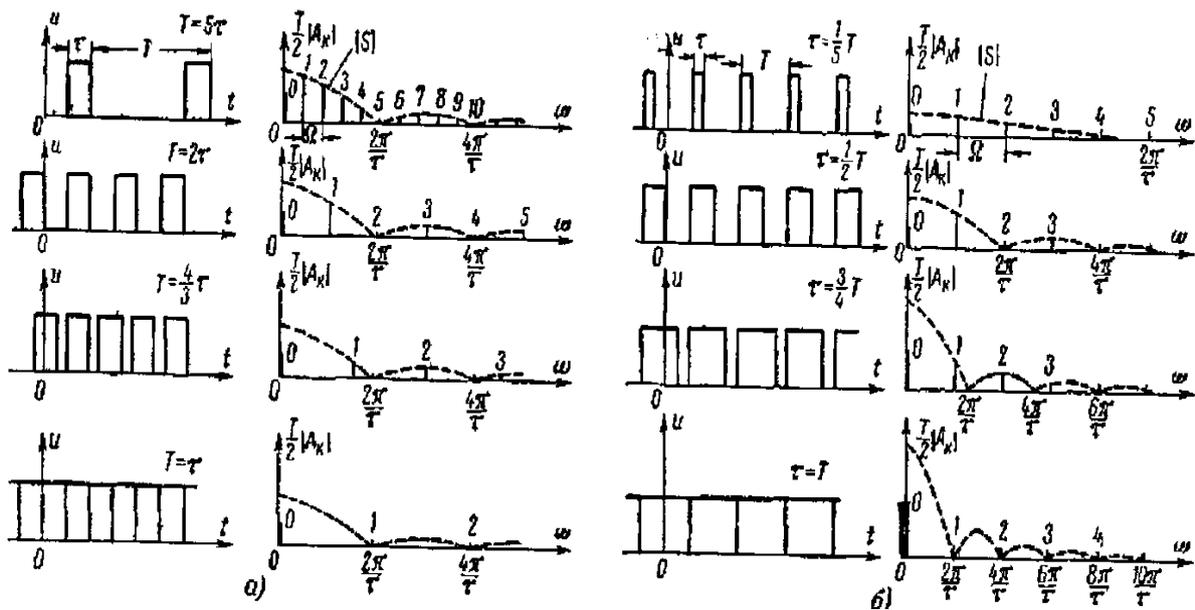


Рис. 4.10. Изменение характера спектра при изменении параметров импульсных последовательностей: а – изменение спектра при изменении периода следования импульсов; б – изменение спектра при изменении длительности импульсов

При измененной амплитуде импульсов согласно соотношению (4.9); огибающая дискретного спектра увеличивается пропорционально увеличению площади импульсов, что видно на рис. 4.10, б.

Следует отметить, что периодические последовательности импульсов в чистом виде в природе не существуют, поскольку любая последовательность имеет начало и конец. Степень приближения зависит от числа импульсов в последовательности. Поэтому для строгого описания импульсного носителя последний должен рассматриваться как одиночный импульс, представляющий собой пакет элементарных импульсов определенной формы. Такой сигнал имеет непрерывный

спектр. Однако по мере накопления числа n импульсов в последовательности её спектр дробится и деформируется таким образом, что все более приближается к решетчатому. Эта деформация показана на примере импульсов прямоугольной (видеоимпульс) и синусоидальной (радиоимпульс) формы (рис. 4.11, а, б). Составляющие на частотах дискретного спектра сужаются и быстро растут. Остальные составляющие подавляются.

Такое представление спектра в виде функции времени $S(\omega, t)$ (или как в данном случае числа импульсов) в процессе формирования сигнала носит название текущего спектра.

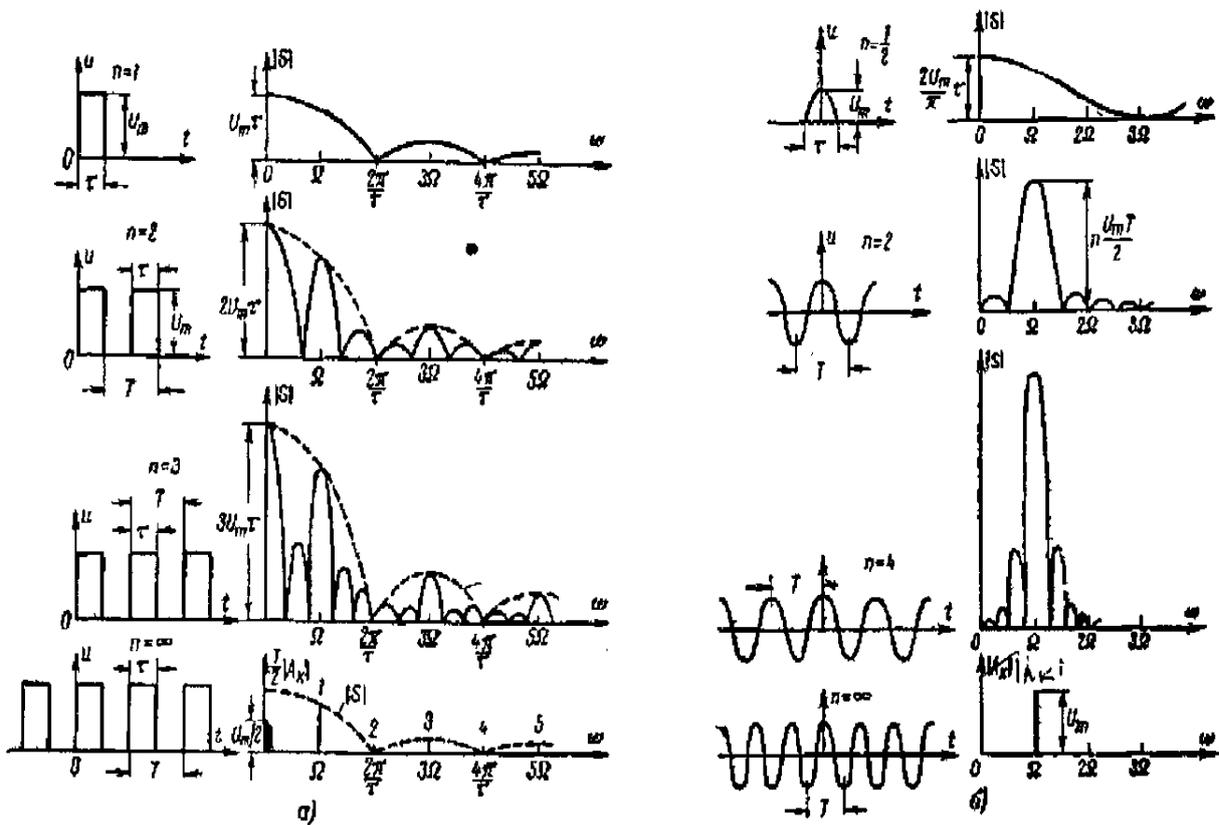


Рис. 4.11. Изменение спектра конечной последовательности импульсов при возрастании их числа: а – изменение спектра видеоимпульсов; б – изменение спектра радиоимпульсов

Из рис. 4.11 видно, что для импульсного носителя ограниченной длительности при условии $T \gg \tau$ ширина спектра остается практически такой же, как в случае одиночного импульса.

Спектры сигналов с импульсной модуляцией

Импульсный носитель согласно (4.2) описывается рядом Фурье

$$u_m(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{jk\omega_0 t}$$

Информационные параметра носителя – амплитуда импульсов U_0 частота ω_0 (или период следования импульсов $T_0=2\pi/\omega_0$ и ширина импульсов τ_0 входят в выражение для гармоник A_k . Характер изменения параметров определяет вид импульсной модуляции. Покажем, как меняется спектр при амплитудно-импульсной модуляции типа АИМ. Для любой формы импульсов формулу носителя можно представить в виде:

$$U_H(t) = 1/2 U_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{jk\omega_0 t}$$

где $A'_k = A_k/U_0$.

При АИМ изменение амплитуды происходит по закону. При этом разложение модулированного носителя получает вид:

$$u_x(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

При этом разложение модулированного носителя имеет вид:

$$u_x(t) = \frac{1}{2} [U_0 + \Delta u(t)] \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{jk\omega_0 t}$$

В простейшем случае, когда модулирующая функция содержит одну гармоническую составляющую:

$$\Delta u(t) = \Delta U_m \cos(\Omega t + \Phi)$$

Или то же самое:

$$\Delta u(t) = \frac{1}{2} \Delta U_m [e^{j(\Omega t + \Phi)} + e^{-j(\Omega t + \Phi)}]$$

Получаем:

$$u_m(t) = \frac{1}{2} U_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{4} \Delta U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{j[(k\omega_0 + \Omega)t + \Phi]} + \frac{1}{4} \Delta U_m \sum_{k=-\infty}^{\infty} A'_k e^{j[(k\omega_0 - \Omega)t - \Phi]}$$

Отсюда видно, что кроме основных линий, содержащихся в спектре носителя (первое слагаемое), имеются дополнительные линии меньших размеров, расположенные на частотах $k\omega_0 \pm \Omega$, то есть по обе стороны от основных расстояний $\pm \Omega$ (рис. 4.12)



Рис.4.12. Спектр АИМ-сигнала

При более сложной модулирующей функции $\Delta u(t)$ по обе стороны от каждой основной линии располагается полоса дополнительных составляющих, число которых определяется полосой частот модулирующей функции.

При время-импульсной и частотно-импульсной модуляции – даже при элементарной модулирующей функции с одной гармоникой вокруг каждой линии спектра носителя располагается бесконечно большое число дополнительных гармоник, которые, однако, быстро убывают.

Из сказанного следует важный вывод: несмотря на то, что характер модуляции носителя изменяется и зависит от вида модуляции, его ширина практически остается такой же, как и для отдельного импульса. Она определяется главным образом шириной этого импульса и может быть оценена величиной

$$\Delta\omega = \lambda/\tau = 2\pi\mu/\tau,$$

где μ – постоянная, зависящая от формы импульса и имеющая порядок единицы.

4.9. Спектры случайных сигналов

Случайный сигнал в отличие от детерминированного нельзя охарактеризовать спектральной плотностью его реализации, так как амплитуды и фазы всех его спектральных составляющих имели бы случайный характер. Однако для стационарных случайных сигналов неизменными во времени остаются моменты распределений. Поэтому в качестве детерминированного частотного аналога используется функция $S_{xx}(\omega)$ являющаяся преобразованием Фурье от корреляционной функции $B_{xx}(\tau)$ случайного сигнала $u_x(t)$:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Разложив $e^{j\omega\tau}$ по формуле Эйлера, получим:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{+\infty} B_{xx}(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

Так как $B_{xx}(\tau)$ есть четная функция, $B_{xx}(\tau)\cos\omega\tau$ так же является четной, а $B_{xx}(\tau)\sin\omega\tau$ – нечетной функцией τ . Поэтому второе слагаемое равно нулю, а в первом можно изменить пределы интегрирования:

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

Отсюда видно, что $S_{xx}(\omega)$ есть действительная и четная функция аргумента ω . Физический смысл проявляется, если рассмотреть обратное преобразование Фурье:

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Или в силу четности $S_{xx}(\omega)$

$$B_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Положив $\tau = 0$, получим:

$$B_{xx}(0) = D_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega$$

где через D_x обозначена дисперсия.

Но

$$D_x = M[X^2(t)] = P_x$$

есть средняя мощность случайного сигнала. Следовательно, элементарная составляющая

$$dP_x = \frac{1}{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega$$

представляет собой долю средней мощности, приходящуюся на диапазон частот $d\omega$. Другими словами, бесконечно малая величина dP_x характеризует среднюю мощность элементарного колебания

$$dA = dA_m \sin(\omega t + \varphi)$$

со случайной амплитудой dA_m и фазой φ . При фиксированной амплитуде dA_m мощность колебания составляет:

$$dP'_x = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dA_m \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{2} dA_m^2$$

средняя мощность колебания со случайной амплитудой:

$$dP_x = \overline{dP'_x}$$

где черта над символом означает усреднение по времени. Величина dP'_x является случайной, однако средняя элементарная мощность не случайна:

$$dP_x = \frac{1}{2} \overline{dA_m^2} = \frac{1}{\pi} S_{xx}(\omega) d\omega$$

Таким образом, функция $S_{xx}(\omega)$ описывает распределение средней мощности по частотам, в связи с чем она носит название энергетического спектра или спектральной плотности мощности случайного сигнала.

На рис. 4.13 показан характер корреляционной функции (рис. 4.13, б) и энергетического спектра (рис. 4.13, в) для случайных сигналов, реализации которых изображены на рис. 4.13, а. Случайные функции u_{x1} и u_{x2} при одинаковых математических ожиданиях m_x и дисперсиях $D_{x1} = D_{x2} = D_x$ характеризуются различной степенью связи в соседних сечениях. При сильной статической связи корреляционная функция $B_{xx}(\tau)$ затухает медленнее, а соответствующая ей кривая энергетического спектра $S_{xx}(\omega)$ спадает быстрее.

Функции u_{x3} и u_{x4} представляют предельные случаи полностью коррелированного $u_x(t) = a = const$, то есть детерминированного и совершенно некоррелированного сигнала, называемого «белым шумом». В первом случае $B_{xx}(\tau) = a^2$, а $S_{xx}(\omega)$ выражается в дельта-функцию на нулевой частоте с площадью, равной πa^2 . Во втором случае $B_{xx}(\tau)$ выражается в дельта-функцию, а энергетический спектр $S_{xx}(\omega)$ имеет равномерный характер и неограниченную полосу. Это обусловило и название процесса «белый шум», что имеет аналогию в оптике в виде белого света с равномерным и неограниченным спектром интенсивности.

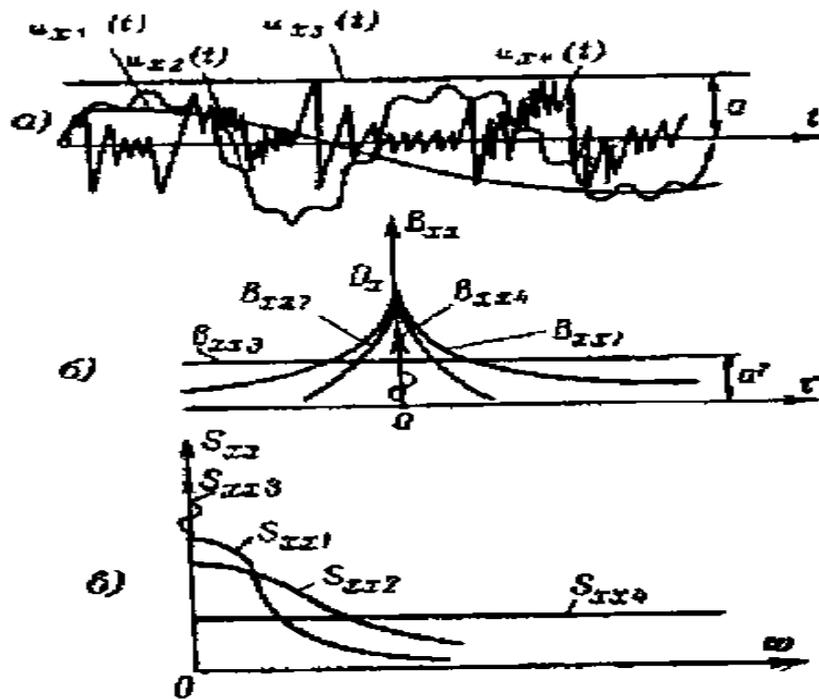


Рис. 4.13. Характеристики случайных сигналов: а – реализации случайных сигналов; б – функции корреляции случайных сигналов; в – энергетические спектры случайных сигналов

Однако следует отметить, что изображенные характеристики описывают идеальный «белый шум», который принципиально не может существовать. Действительно, его мощность, определяемая площадью под функцией $S_{xx}(\omega)$, должна быть бесконечно большой, что никогда не имеет места. Поэтому обычно пользуются практическим приближением, при котором энергетический спектр равномерен в широком, но конечном диапазоне частот. Сигнал с такой спектральной плотностью называется реальным «белым шумом». Его корреляционная функция в точке $\tau=0$ имеет конечное значение, но быстро затухает с изменением τ . Аналогично изложенному для частотного описания системы двух случайных стационарных и стационарно связанных сигналов $u_x(t)$ и $u_y(t)$ используется преобразование Фурье от взаимно корреляционной функции $B_{xy}(\tau)$:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} dt$$

которое носит название взаимной спектральной плотности.

4.10. Помехоустойчивость модулированных сигналов

В процессе практического использования модулированных сигналов огромное значение имеет учет их помехозащищенности, которая существенно зависит от выбранного вида модуляции.

Паразитная модуляция

Воздействие помехи на носитель приводит к паразитной модуляции его параметров. При этом модуляции подвергаются все информационные параметры. В результате сложный сигнал:

$$u_y = g[a_1 + \delta a_1(t), \dots, a_n + \delta a_n(t), t]$$

в котором модулирующие функции $\delta a_1(t)$ обусловлены влиянием помехи $u_\xi(t)$.

Покажем это на примере действия простейшей аддитивной гармонической помехи

$$U_\xi = U_0 \cos \omega t$$

на носитель в виде колебания

$$u_\xi = U_0 \cos \omega_0 t$$

с параметрами U_0 и ω_0 [5] Выражение для носителя с наложенной на него помехой имеет вид суммы:

$$u_n + u_\xi = U_0 \cos \omega_0 t + U_{\xi m} \cos \omega t$$

На рис. 4.14 изображена W-диаграмма $U_\xi + U_n$. Поскольку вектор U_n вращается против часовой стрелки с угловой частотой ω , то при его фиксации система координат $(S, j\sigma)$ станет вращаться по часовой стрелке со скоростью ω_0 , а вектор U_ξ – со скоростью $\omega_0 - \omega$. Проекция вектора U_ξ на вектор U_n порождает амплитудную модуляцию. Эта проекция равна

$$U_0 + U_{\xi m} \cos(\omega_0 - \omega)t$$

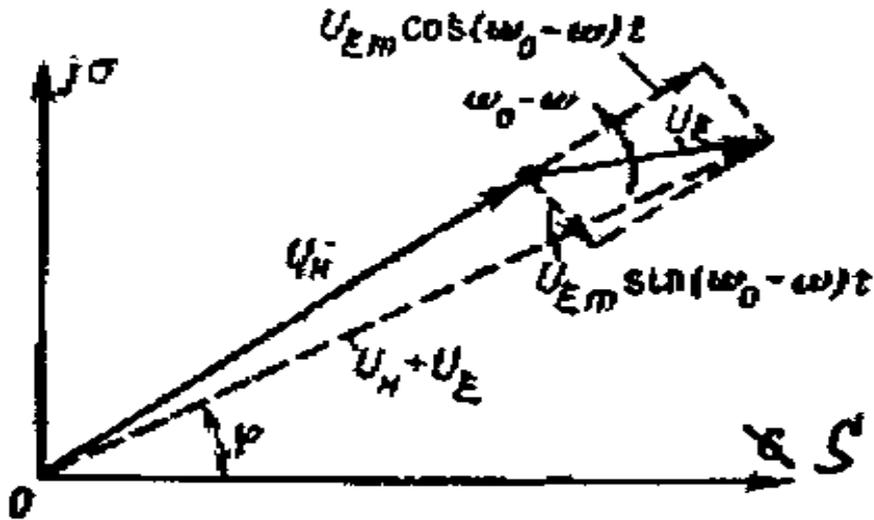


Рис. 4.14. Векторная диаграмма гармонического носителя с наложенной помехой

Изменение угла $\Delta\varphi(t)$ приводит к частотной модуляции. Угол:

$$\Delta\varphi \approx \tan \Delta\varphi = \frac{U_{\xi m} \sin(\omega_0 - \omega)t}{U_0 + U_{\xi m} \cos(\omega_0 - \omega)t}$$

При $U_{\xi m} \leq U_0$

$$\Delta\varphi \approx \left(\frac{U_{\xi m}}{U_0}\right) \sin(\omega_0 - \omega)t$$

Закон изменения фазы результирующего вектора $U_n + U_{\xi}$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \left(\frac{U_{\xi m}}{U_0}\right) \sin(\omega_0 - \omega)t$$

Или

$$\varphi(t) = \int_0^t \left[\omega_0 + \left(\frac{U_{\xi m}}{U_0}\right) (\omega_0 - \omega) \cos(\omega_0 - \omega)t \right] dt$$

Таким образом, результирующий сигнал можно представить в виде:

$$u_y = [U_0 + U_{\xi m} \cos(\omega_0 - \omega)t] \times \cos \int_0^t \left[\omega_0 + \frac{U_{\xi m} (\omega_0 - \omega) \cos(\omega_0 - \omega)t}{U_0} \right] dt = [U_0 + \delta U(t)] \cos \int_0^t [\omega_0 + \delta\omega(t)] dt$$

где $\delta U(t) = U_{\xi m} \cos(\omega_0 - \omega)t$ изменение амплитуды исходного колебания, порождающее АМ;

$$\delta\omega(t) = \frac{U_{\xi m}(\omega_0 - \omega)}{U_0} \cos(\omega_0 - \omega)t \quad ; \quad - \quad \text{девиация частоты при ЧМ.}$$

Последнее выражение можно переписать в форме:

$$u_y = U_0 [1 + M \cos(\omega_0 - \omega)t] \times \cos \int_0^t [\omega_0 + \delta\omega_m \cos(\omega_0 - \omega)t] dt$$

где $M = U_{\xi m} / U_0$ – глубина АМ; $\delta\omega_m(t) = (U_{\xi m} / U_0)(\omega_0 - \omega)$ – девиация частоты при ЧМ.

Следовательно, помеха вызывает как АМ, так и ЧМ, то есть воздействует на оба информационных параметра U_0 и ω_0 . Очевидно, что более сложный аддитивный сигнал также вызывает паразитную модуляцию обоих параметров. К таким же последствиям приводят и другие виды помех.

Помехоустойчивость

В процессе паразитной модуляции помеха оказывает различное влияние на разные параметры носителя. Это позволяет путем выбора для передачи полезной информации таких параметров, которые наименее подвержены воздействию помехи, повысить помехоустойчивость сигнала. При демодуляции независимо от природы выбранного параметра a_1 полезная $\Delta a_i(t)$ и вредная $\delta a_i(t)$ модулирующие составляющие могут быть приведены к сигналу единого типа, например, в виде интенсивности. Это позволяет сравнивать различные виды модуляции по соотношению $\Delta a_i(t)$ и $\delta a_i(t)$. Интенсивность помехи характеризуется мощностью $P_{\xi i}$, которая при нулевом среднем числе равна дисперсии $D_{\xi i}$:

$$P_{\xi i} = |\delta a_i(t)|^2 = D_{\xi i}$$

Соответственно, интенсивность полезного сигнала определяет его средняя мощность

$$P_{\chi i} = [\Delta a_i(t)]^2$$

Помехоустойчивость модуляции по i -му параметру оценивается отношением этих мощностей

$$P_i = P_{xi}/P_{\epsilon i}$$

Это отношение для различных параметров a_i оказывается различным. Из двух видов модуляции, связанных с параметрами a_i и a_j , более помехоустойчивым можно считать тот, для которого это отношение больше. Сигналы с большим отношением ρ_i обладают большими информационными возможностями.

Используя данный критерий, проведем сравнение по помехоустойчивости двух видов модуляции – амплитудной и частотной, с носителем в виде колебания $u_n = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

Носитель имеет три информационных параметра: $a_1=U_0$, $a_2=\omega_0$, $a_3=\varphi_0$. При АМ и ЧМ начальная фаза φ_0 информации не несет, поэтому в дальнейшем будем полагать $\varphi_0 = 0$. Модулированный сигнал при АМ и ЧМ описывается соответственно функциями

$$u_x(t) = [U_0 + \Delta u(t)] \cos \omega_0 t$$

и

$$u_x(t) = U_0 \cos \int_0^t [\omega_0 + \Delta \omega(t)] dt$$

Определим ρ_i при модуляции синусоидальным колебанием

$$x(t) = x_m \sin \Omega t$$

в предположении наличия аддитивной помехи типа реального «белого шума», имеющего равномерный энергетический спектр S_ϵ в полосе 2Ω (от $\omega_0 - \Omega$ до $\omega_0 + \Omega$), т.е. в пределах ширины спектра, модулированного по амплитуде полезного сигнала. Модулирующая составляющая при АМ

$$\Delta a_i(t) = \Delta u(t) = Kx(t) = \Delta U_m \sin \Omega t$$

$$\text{Где } \Delta U_m = Kx_m$$

Ее средняя мощность

$$P_{xa} = [\Delta u(t)]^2 = [\Delta U_m \sin \Omega t]^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (\Delta U_m)^2 \sin^2 \Omega t dt = \frac{(\Delta U_m)^2}{2},$$

где $T = 2\pi/\Omega$

Отношение сигнала к помехе имеет наибольшее значение в случае стопроцентной модуляции, при которой $\Delta U_m = U_0$ и, следовательно

$$P_{xa} = \frac{U_0^2}{2}$$

Средняя мощность помехи равна:

$$P_{\xi a} = D_\xi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_{\xi\xi}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi\Omega} S_{\xi\xi} d\omega = \frac{2}{\pi} S_{\xi\xi} \Omega$$

Помехоустойчивость при амплитудной модуляции

$$P_a = \frac{P_{xa}}{P_{\xi a}} = \frac{\pi U^2}{4\Omega S_{\xi\xi}}$$

Для частотной модуляции имеем:

$$\Delta a_2(t) = \Delta \omega(t) = Kx(t) = \Delta \omega_m \sin \Omega t$$

где $\Delta \omega_m = Kx_m$

Средняя мощность частотного сигнала равна:

$$P_{xa} = [\Delta \omega(t)]^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} (\Delta \omega_m)^2 \sin^2 \Omega t dt = \frac{(\Delta \omega_m)^2}{2}$$

Определим теперь среднюю мощность $P_{\zeta\omega}$ помехи при частотной модуляции.

В предыдущем параграфе указывалось, что случайную помеху $u_\xi(t)$ можно рассматривать как бесконечную сумму бесконечно малых гармоник со случайной амплитудой dA_m и фазой, но с детермированной величиной средней мощности. Однако, как было показано в начале параграфа, гармоническое колебание с частотой ω и амплитудой dA_m при наложении на носитель приводит к модуляции последнего с модулирующей функцией

$$\delta \omega(t) = \left(\frac{dA_m}{U_0} \right) (\omega_0 - \omega) \cos(\omega_0 - \omega)t$$

Средняя мощность этой функции представляет собой элементарную составляющую $dP_{\xi\omega}$, приходящую на диапазон частот $d\omega$:

$$dP_{\xi\omega} = \overline{\delta\omega(t)^2} = \frac{1}{2} \frac{\overline{dA^2}}{U^2} (\omega_0 - \omega)^2$$

Учитывая, что

$$\frac{\overline{dA^2}}{2} = \frac{1}{\pi} S_{\xi\xi}(\omega) d\omega$$

элемент мощности модулирующей функции можно представить в виде

$$dP_{\xi\omega} = \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{U^2} \frac{1}{\pi} S_{\xi\xi}(\omega) d\omega$$

По условию энергетический спектр помехи равномерен в диапазоне от $\omega_0 - \Omega$ до $\omega_0 + \Omega$ и равен нулю вне этого диапазона. Поэтому

$$dP_{\xi\omega} = \frac{1}{\pi} S_{\xi\xi} \frac{1}{U^2} \int_{\omega_0 - \Omega}^{\omega_0 + \Omega} (\omega_0 - \omega)^2 d\omega$$

Сделав замену переменных $\omega_1 = \omega_0 - \omega$

Получим

$$P_{\xi\omega} \frac{2}{\pi} S_{\xi\xi} \frac{1}{U^2} \int_0^{\Omega} \omega^2 d\omega_1 = \frac{2}{3} \frac{S_{\xi\xi}}{\pi U^2} \Omega^3$$

Помехоустойчивость при частотной модуляции

$$\rho_{\omega} = \frac{P_{x\omega}}{P_{\varepsilon\omega}} = \frac{3\pi U_0^2}{4\Omega^3} \frac{\Delta\omega_m^2}{S_{\varepsilon\varepsilon}}$$

Сравнивая ρ_{ω} с ρ_a , получаем:

$$\rho_{\omega} = 3 \left(\frac{\Delta\omega_m}{\Omega} \right)^2 \rho_a = 3m^2 \rho_a$$

где $m = \Delta\omega/\Omega$ – индекс частотной модуляции.

Из полученного соотношения следует, что помехоустойчивость частотной модуляции намного превышает помехоустойчивость амплитудной модуляции (в $3m^2$ раз).

Аналогично обстоит дело и с импульсными сигналами. Фазоимпульсная модуляция, например, обладает большей помехоустойчи-

востью, чем широтно–импульсная, а широтно-импульсная имеет большую помехоустойчивость по сравнению с амплитудно-импульсной [5].

Контрольные вопросы

1. Перечислите виды носителей информации.
2. Какие виды модуляции вы знаете?
3. Представьте разновидности амплитудно-импульсной модуляции.
4. Какие разновидности время-импульсной модуляции?
5. Представьте спектры периодических и непериодических сигналов.
6. Представьте невозмущенный носитель в виде постоянного состояния во временной, частотной и векторной диаграммах.
7. Представьте выражение, описывающее амплитудно-импульсный сигнал.
8. Опишите процесс модуляции при скачкообразном изменении информационной функции.
9. Представьте графики частотно- и фазомодулированных сигналов и их особенности.
10. Какие спектры импульсных сигналов вы знаете?
11. Какой из импульсных сигналов самый?
12. Какова связь спектров одиночного импульса и периодической последовательности импульсов?
13. Что такое спектральная плотность мощности случайного сигнала?
14. Представьте характеристики случайных сигналов: а) реализации случайных сигналов; б) функции корреляции случайных сигналов; в) энергетические спектры случайных сигналов.
15. Как оценить помехоустойчивость модуляции по i -му параметру?
16. Насколько превышает помехоустойчивость частотной модуляции помехоустойчивость амплитудной модуляции?

Глава 5. ФИЛЬТРАЦИЯ

5.1. Временная фильтрация

В общем случае временная фильтрация определяется как операция прерывания или ослабления сигнала (рис. 5.1).

Прерыватель, вмонтированный в громкоговоритель радиоприемника, и потенциометрический аттенюатор, регулирующий мощность звука, являются фильтрами.

Фильтрация сигнала $x(t)$ с помощью фильтра сводится к нахождению произведения $x(t)f(t)$. Фурье-образ $X(\nu)$ сигнала $x(t)$ после временной фильтрации изменится.

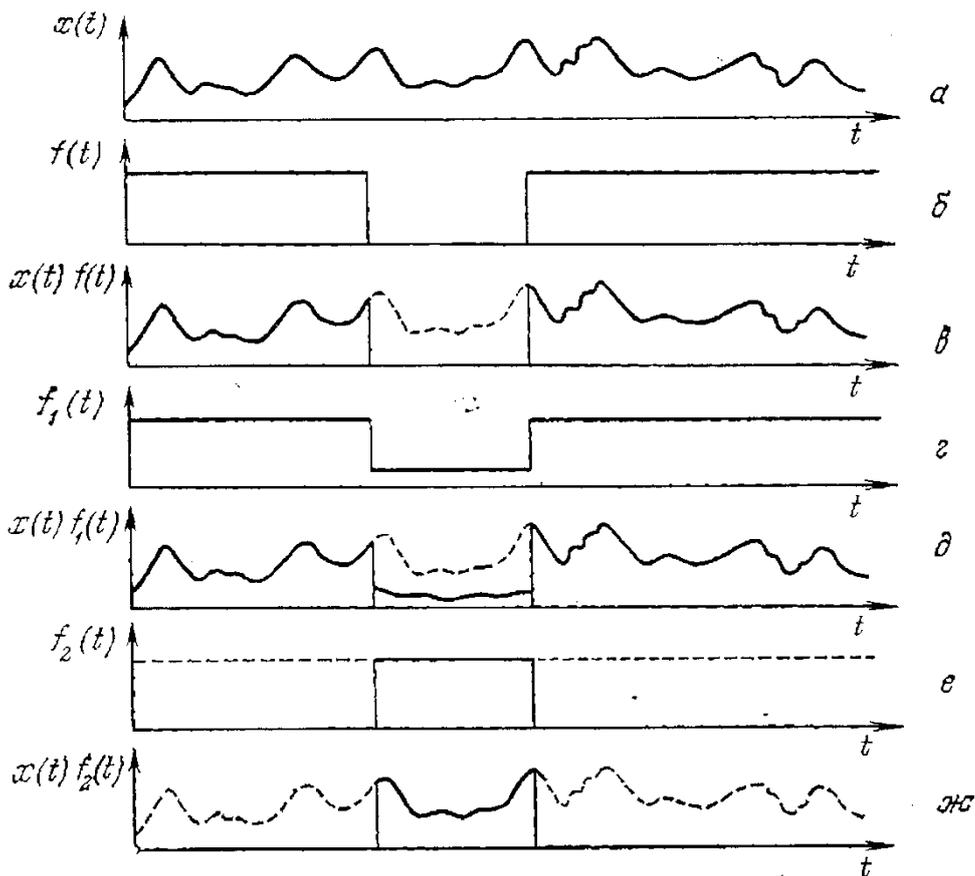


Рис. 5.1. Представление временной фильтрации: а – временной сигнал $x(t)$; б – временной фильтр $f(t)$, обрезающий сигнал в интервале $[t-t_0] < T$; в – результирующий сигнал $x(t)f(t)$ после фильтрации сигнала, обрезанный на интервале $[t-t_0] < T$; г – фильтр f_1 , осуществляющий ослабление сигнала на интервале $[t-t_0] < T$; д – результирующий сигнал после фильтрации $x(t)f_1(t)$; е – фильтр f_2 пропускающий без искажения сигнал на интервале $[t-t_0] < T$ и обрезающий сигнал вне этого интервала; ж – результирующий сигнал $x(t)f_2(t)$ после прохождения фильтра f_2

Для нахождения фурье-образа результирующего сигнала достаточно использовать теорему Планшереля. Имеем:

$$x(t)f(t) \leftrightarrow X(\nu) * F(\nu)$$

Рассмотрим прямоугольный фильтр $f(t)$, подобный фильтру (рис. 5.1, е).

Фурье-образ $F(\nu)$ функции $f(t)$ имеет вид:

$$F(\nu) = 2T \frac{\sin 2\pi T \nu}{2\pi T \nu} [\cos 2\pi t_0 \nu - j \sin 2\pi t_0 \nu] \quad (5.1)$$

Чтобы найти образ результирующего фурье-сигнала, необходимо подсчитать свертку функций $F(\nu)$ и $X(\nu)$. Если период T достаточно большой, то эффект фильтрации будет мал, а функция $F(\nu)$ будет подобна импульсу Дирака.

Итак, обрезание некоторого временного участка сигнала $x(t)$ приводит к изменению спектра сигнала (рис. 5.2).

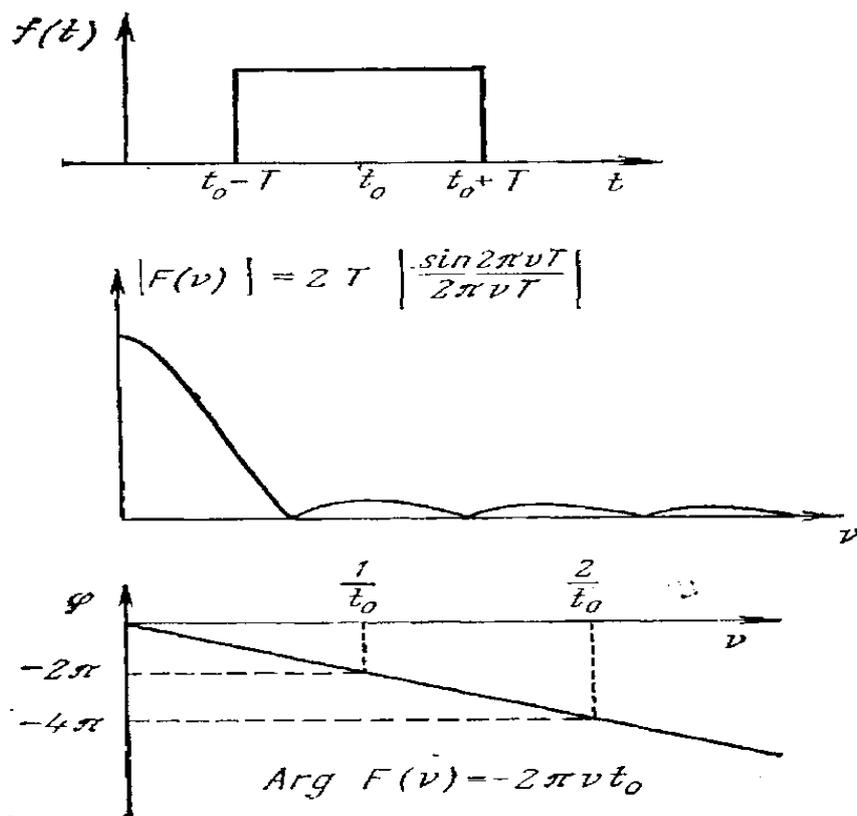


Рис. 5.2. Использование временного фильтра приводит к изменению спектра сигнала

Можно утверждать, что временной фильтр является временным множителем (рис. 5.3)

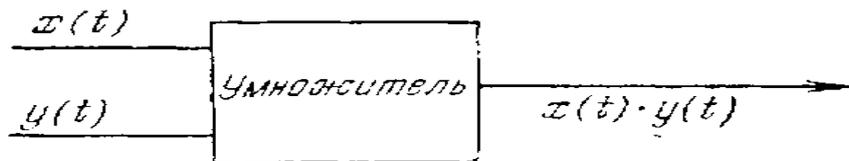


Рис. 5.3. Иллюстрация временного умножителя

5.2. Частотная фильтрация («линейная фильтрация» в смысле Блан – Лапьера)

Операция фильтрации, которую мы применяем к временному представлению сигнала, может быть использована и для частичного представления.

На рис. 5.4, а представлен график функции $X(\nu)$ и результат частотной фильтрации типа «обрезания полосы» (обрезаются частоты интервала $|\nu - \nu_0| < \Delta\nu$).

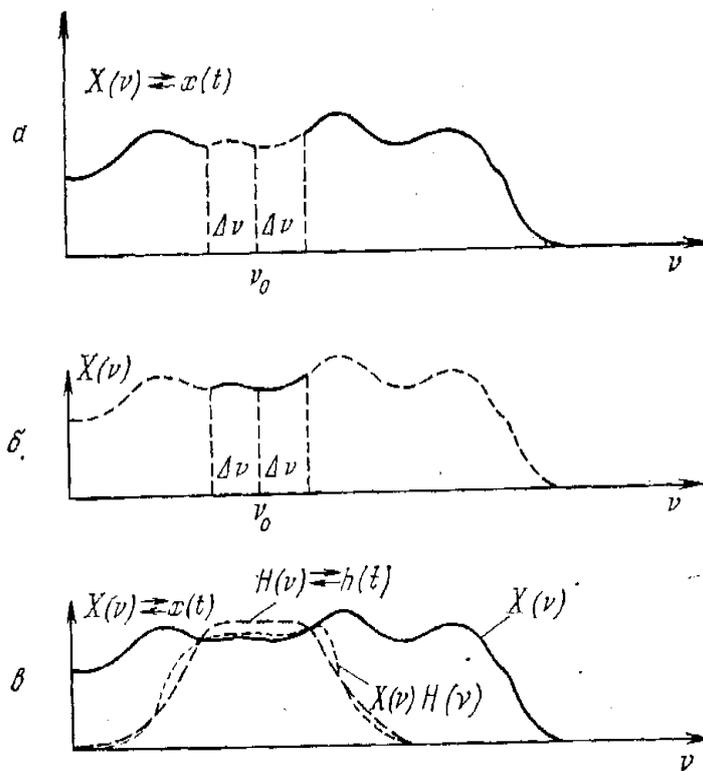


Рис. 5.4. Результат частотной фильтрации

Результат частотной фильтрации типа «пропускание полосы» показан на рис. 5.4, б (пропускаются только частоты интервала $|v-v_0| < \Delta v$). Наконец, на рис. 5.4, в дан пример произвольной частотной фильтрации, при которой сигнал $X(v)$ проходит через фильтр $H(v)$, что сводится к произведению $X(v)H(v)$. Однако нахождение произведения $X(v)H(v)$ не может быть реализовано при временном представлении сигнала, поскольку датчики регистрируют функцию $x(t)$. В этом случае, используя теорему Планшереля, можно перейти от произведения изображений к свертке оригиналов (рис. 5.5).

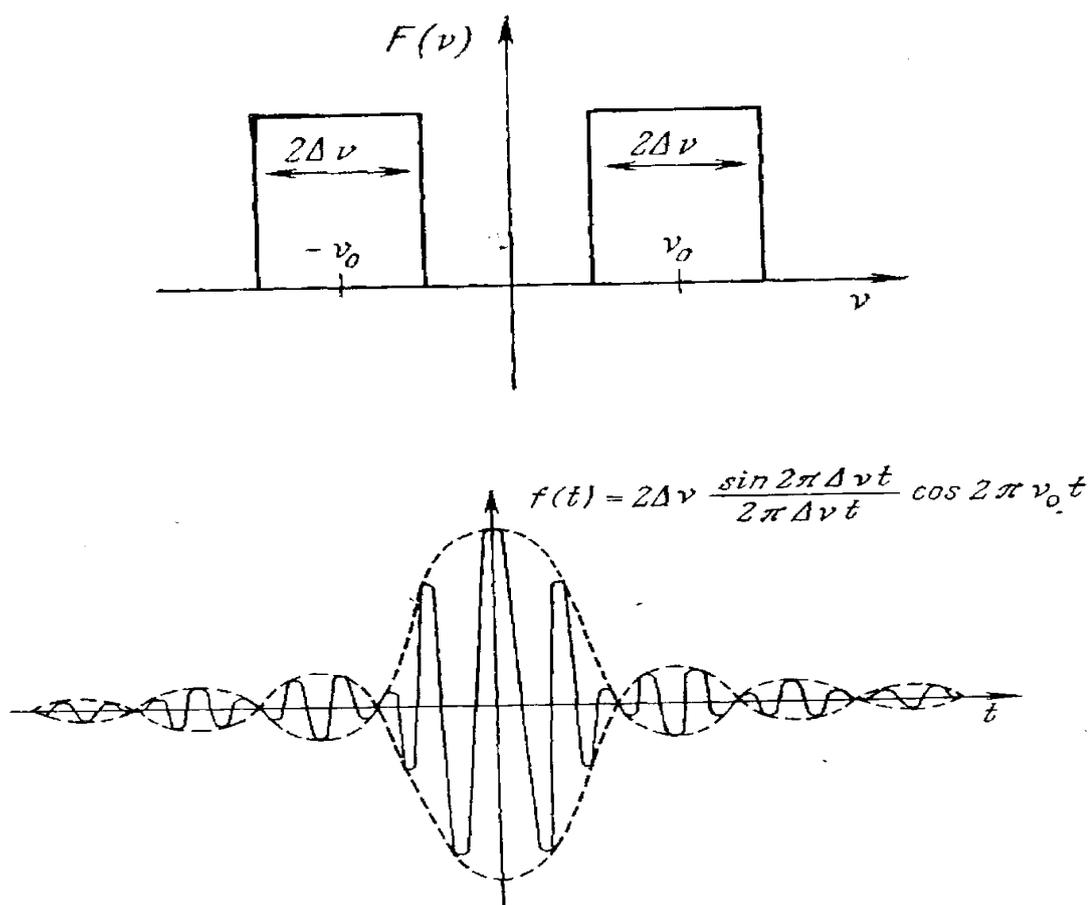


Рис. 5.5. Переход от произведения изображений к свертке оригиналов

Имеем:

$$X_F(v) = X(v)H(v) \quad (5.2)$$

$$x_F(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.3)$$

где $X_F(\nu)$ – фурье-образ сигнала после частотной фильтрации $X(\nu)$.

Примечание. Такой фильтр нельзя реализовать [6], поскольку импульсный отклик существует для $t < 0$. Для того, чтобы фильтр можно было реализовать, необходимо осуществлять временное смещение, то есть произвести фазовый сдвиг функции $F(\nu)$.

Следовательно, для реализации фильтрации необходимо пропустить сигнал $x(t)$ через линейную систему с импульсным откликом $h(t) \leftrightarrow H(\nu)$.

Тогда на выходе системы будем иметь результирующий сигнал:

$$s(t) = \int_0^t x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (5.4)$$

причем $S(\nu) = X(\nu)H(\nu)$.

5.3. Физически реализуемые линейные фильтры частоты

Невозможно создать такой фильтр, импульсный отклик которого был бы отличен от нуля для $t < 0$. Следовательно, любая физическая система имеет импульсный отклик $h(t)$, удовлетворяющий равенству

$$h(t) = 0 \quad (5.5)$$

для $t < 0$ (рис. 5.8)

Имеем

$$h(t) \leftrightarrow H(\nu) = \text{Re}(\nu) + j\text{Im}(\nu) = |H(\nu)|e^{-j\varphi(\nu)} \quad (5.6)$$

где $\varphi(\nu)$ – не равна тождественно нулю.

Пусть $e(t)$ и $s(t)$ – соответственно входной и выходной сигналы для фильтра и $e(t) \leftrightarrow E(\nu)$ и $s(t) \leftrightarrow S(\nu)$.

Из равенства

$$S(\nu) = E(\nu)H(\nu) = E(\nu)|H(\nu)|e^{-j\varphi(\nu)} \quad (5.7)$$

следует, что любой реализуемый фильтр осуществляет сдвиг фазы.

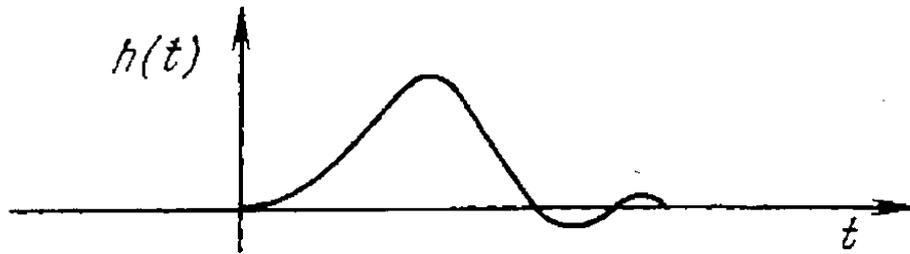


Рис. 5.6. Физически реализуемый фильтр частоты

5.4. Идеальный фильтр

Каким быть должен быть фильтр, не осуществляющий сдвига фаз? Фурье-образ импульсного отклика такого фильтра должен быть вещественным. Из свойств четности преобразования

Фурье следует, что импульсный отклик фильтра должен быть четной функцией, то есть симметричен относительно оси $t = 0$ (рис. 5.8). Очевидно, что физическая реализация такого фильтра невозможна.

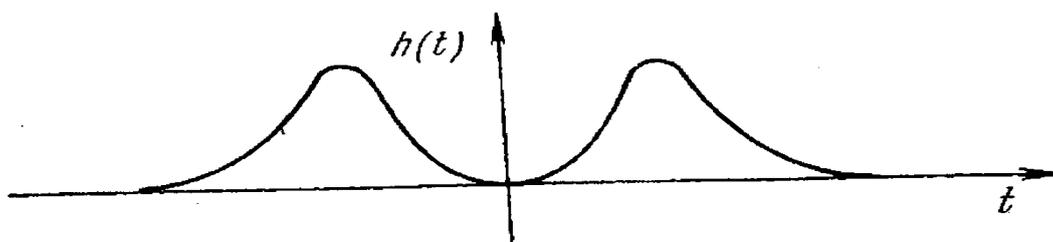


Рис. 5.7. Идеальный фильтр

5.5. Фильтры с линейным сдвигом фаз

Рассмотрим нереализуемый фильтр без сдвига фаз, импульсный отклик которого $h_1(t)$ – симметричная функция относительно оси $t=0$. Предположим, что $h_1(t)$ отлична от нуля только на промежутке $(-\theta_0, +\theta_0)$. Рассмотрим затем фильтр, импульсный отклик которого $h(t)$ получен из $h_1(t)$ с помощью параллельного переноса (рис. 5.9). Имеем $h(t)=h_1(t-\theta_0)$,

$$H(\nu)=H_1(\nu)e^{-2\pi j\nu\theta}$$

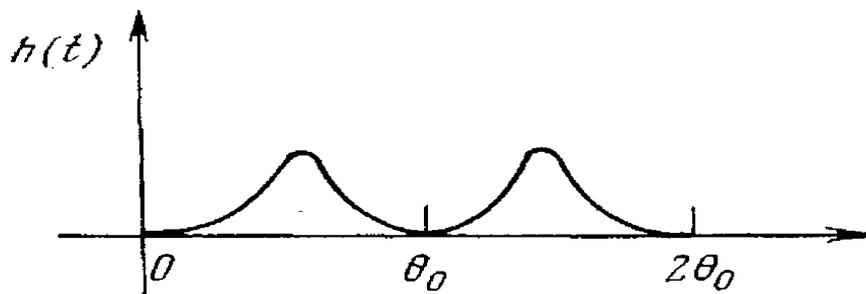


Рис. 5.8. Фильтр с линейным сдвигом фаз

Из вещественности и четности функции $h_1(t)$ следует вещественность и четность функции $H_1(\nu)$. Следовательно, сдвиг фазы для $H(\nu)$ равен $\varphi(\nu)=2\pi\nu\theta_0$, то есть линеен относительно частоты ν . Линейный относительно частоты сдвиг фаз не вызывает деформацию сигнала, поскольку в этом случае для каждой гармоники производится сдвиг фазы на угол, пропорциональный частоте. Поэтому все гармоники подвергаются постоянному запаздыванию, не зависящему от частоты. Итак, линейному сдвигу фаз при частотном представлении сигнала соответствует запаздывание при временном представлении сигнала.

5.6. Узкополосные фильтры

Характеристика узкополосного фильтра $A(\nu)$ типа «пропускающие полосы» показана на рис. 5.9.

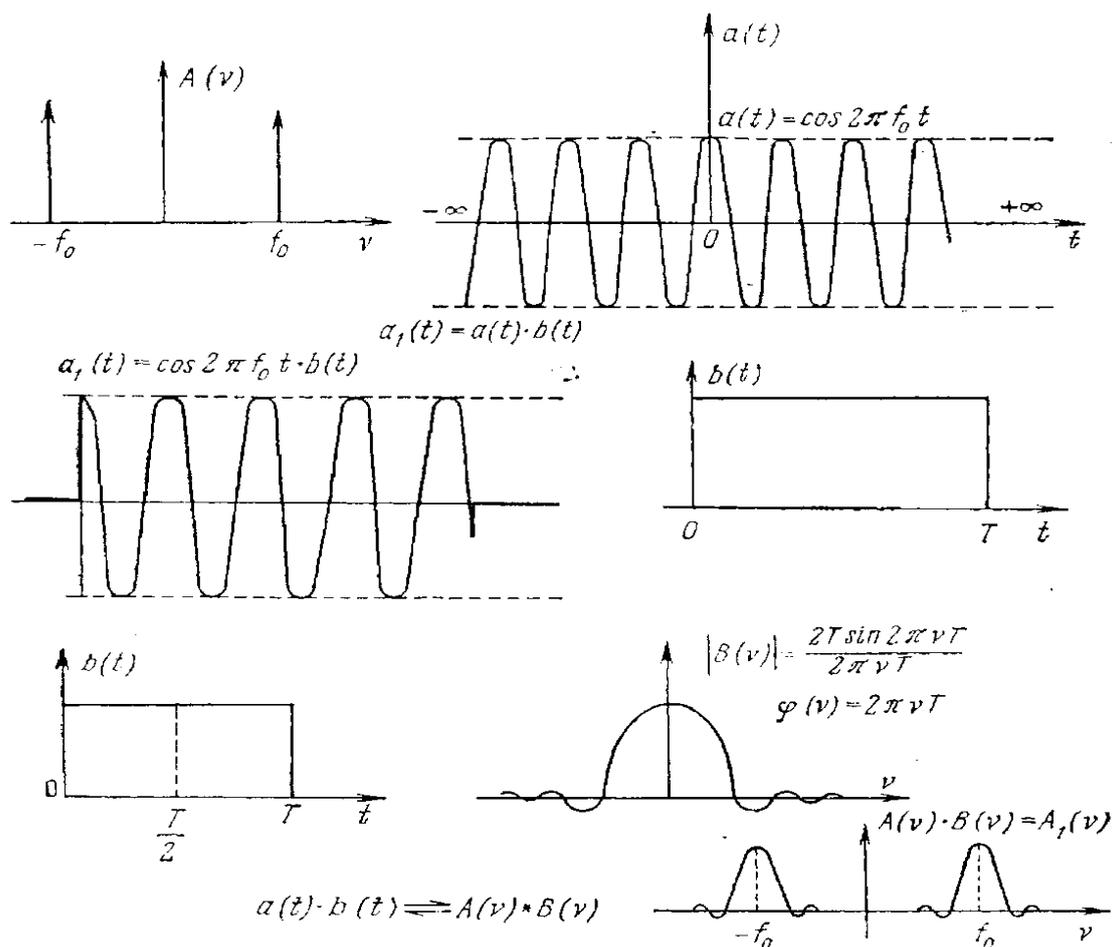


Рис. 5.9. Характеристика узкополосного фильтра

Для нахождения сигнала на выходе такого фильтра необходимо вычислить свёртку входного сигнала $e(t)$ с оригиналом $a(t)$:

$$A(v) \leftrightarrow a(t) = \cos 2\pi f_0 t. \quad (5.8)$$

Но свёртка $a(t) * e(t)$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ не существует. Введем функцию

$$a_1(t) = a(t)b(t). \quad (5.9)$$

На рис. 5.9 представлен также график функции $b(t)$. Имеем

$$e(t) \leftrightarrow E(v), \quad a(t) \leftrightarrow A(v) \quad (5.10)$$

$$e(t) * a_1(t) \leftrightarrow E(\nu) A_1(\nu) \quad (5.11)$$

$$A_1(\nu) = A(\nu) * B(\nu) \quad (5.12)$$

Отсюда получаем

$$S(\nu) = E(\nu) [A(\nu) * B(\nu)] \quad (5.13)$$

Из графического представления функции $A_1(\nu)$ (рис.5.9) видно, что спектральные линии функции $A(\nu)$ трансформируются в фигуры конечной ширины. Из этого следует, что невозможно сконструировать физический фильтр, осуществляющий пропускание только одной фиксированной частоты.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения: временная фильтрация и частотная фильтрация.
2. Какие фильтры частоты физически реализуемы?
3. Дайте понятие идеального фильтра.
4. Фильтры с линейным сдвигом фаз.
5. Характеристика узкополосного фильтра типа «пропускание полосы».

Глава 6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ

В этой главе рассматриваются основные методы дискретизации информационных комплексов по уровню (по обобщенной шкале измерения X) и во времени (по обобщенной шкале времени T).

6.1. Квантование по уровню

Непрерывные сигналы в системе обобщенных координат X , T описываются непрерывными функциями $x(t)$.

Переход от аналогового представления сигнала к цифровому, который дает в ряде случаев значительные преимущества при передаче, хранении и обработке информации, связан с его дискретизацией по уровню X и по времени T . Кроме того, дискретизация по времени позволяет использовать одни и те же устройства (каналы связи, устройства обработки информации) для большого числа различных сигналов.

Преобразование непрерывного информационного множества аналоговых сигналов в дискретное называется *дискретизацией*, или *квантованием по уровню*.

Квантование по уровню широко используется в системах связи, телеметрии, при автоматическом управлении, контроле, обработке данных с помощью ЦВМ и т. д. При квантовании по уровню диапазон возможных изменений функции – интервал (a, b) – разбивается на n интервалов квантования:

$$\Delta_{X_i} = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \text{ с границами } x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b.$$

В результате квантования любое из значений x , принадлежащее интервалу (x_{i-1}, x_i) , округляется до некоторой величины $\bar{x}_i = i\Delta_x$,

$$\bar{x}_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Величины $\bar{x}_i, i = 1, 2, \dots, n$ носят название *уровней квантования*. При квантовании по уровню производится отображение всевозможных значений величины x на дискретную область, состоящую из величин \bar{x}_i – уровней квантования.

Замена истинных значений функций x соответствующими дискретными значениями – уровнями квантования \bar{x}_i , вносит ошибку, или шум, квантования

$$\xi(x) = \bar{x}_i - x.$$

Частный случай квантования по уровню – равномерное, при котором интервалы (шаги) квантования одинаковы:

$$\Delta_x = \Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1} = \frac{b - a}{n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Оценим ошибку квантования, начав с критерия наибольшего отклонения:

$$\sup_x \xi(x) = \sup_x |X - \bar{x}_i|.$$

При заданном n наибольшая ошибка квантования $\sup|\xi(x)|$ минимальна, если $\Delta_{x_i} = \Delta_x = const$ уровень квантования \bar{x}_i выбираются в середине интервала:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}).$$

В этом случае наибольшая ошибка квантования равна: $\sup|\xi(x)| = 0,5\Delta_x$.

На рис. 6.1, а показана функциональная связь непрерывной величины с дискретной, полученной на выходе устройства квантования, а на рис. 6.1, б – зависимость ошибки квантования от непрерывной величины x .

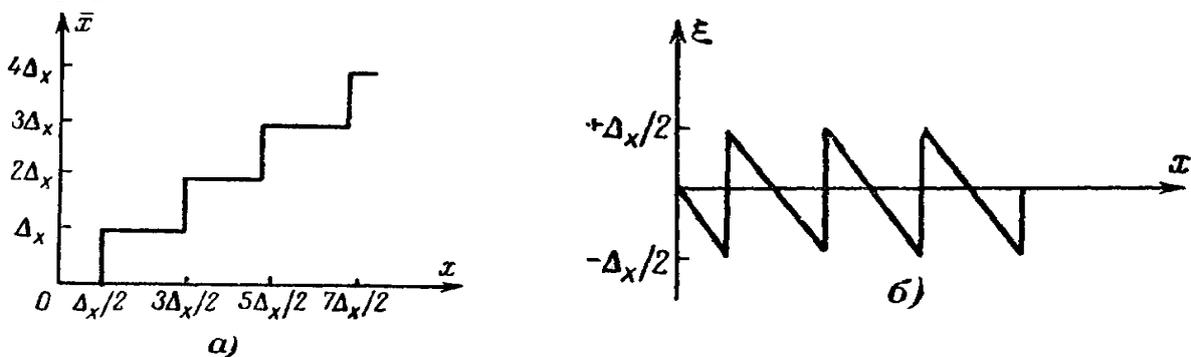


Рис. 6.1. Квантование по уровню: а – функциональная зависимость квантованной величины от непрерывной; б – зависимость шума квантования от квантуемой величины

Рассмотрим статистические характеристики шума квантования. Ошибка равномерного квантования равна:

$$\xi(x) = i\Delta_x - x,$$

причем

$$\Delta_x \left(i - \frac{1}{2} \right) \leq x \leq \Delta_x \left(i + \frac{1}{2} \right),$$

где Δ_x – удвоенное наибольшее значение ошибки квантования.

При неограниченной шкале квантования ($a = -\infty, b = \infty$) представленная на рис. 6.1 зависимость ошибки квантования от квантуемой величины оказывается периодической функцией и может быть разложена в гармонический ряд:

$$\xi(x) = \frac{\Delta_x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{2\pi k}{\Delta_x} x$$

Поскольку шум квантования, обозначаемый, когда он рассматривается как случайная величина, через $\Xi(x)$, функционально связан с непрерывной случайной величиной x , то его статистические характеристики будут зависеть от статистических характеристик этой величины. Определим математическое ожидание шума квантования:

$$M[\Xi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \Xi(x) dx = \frac{\Delta_x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \sin \frac{2\pi k}{\Delta_x} x dx,$$

где $\omega(x)$ – плотность распределения величины X .

Из формулы следует, что $M[\Xi(x)] = 0$, если математическое ожидание непрерывной величины $x - M[x]$ совпадает с серединой или границами интервала квантования, а плотность ее распределения $\omega(x)$ является четной функцией относительно математического ожидания. Если же такого совпадения нет, то математическое ожидание $M[x]$ близко к нулю, когда среднеквадратичное отклонение процесса велико по сравнению с шагом квантования Δ_x :

$$\sigma = \sqrt{D[x]} \gg \Delta_x.$$

Например, при нормальном распределении непрерывной величины с плотностью распределения

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-M[x])^2}{2\sigma^2}},$$

математическое ожидание ошибки равно:

$$\begin{aligned} M[\Xi(x)] &= \frac{\Delta_x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-M[x])^2}{2\sigma^2}} \sin \frac{2\pi k}{\Delta_x} x dx = \\ &= \frac{\Delta_x}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{2\pi k}{\Delta_x} \alpha e^{-2\left(\frac{\pi k}{\Delta_x} \sigma\right)^2}, \end{aligned}$$

где α – погрешность дискретности при квантовании величины, равной математическому ожиданию: $-\Delta_x/2 \leq \alpha \leq \Delta_x/2$.

Оценим $M[\Xi(x)]$. Так как значение экспоненты в формуле убывает с увеличением k , то

$$M[\Xi(x)] < e^{-2(\frac{\pi\sigma}{\Delta_X})^2} \left| \frac{\Delta_X}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{2\pi k}{\Delta_X} \alpha \right| = |a| e^{-2(\frac{\pi\sigma}{\Delta_X})^2}.$$

Очевидно, что при $\Delta_X \ll \sigma$, что имеет место при достаточно большом числе уровней квантования (малом интервале квантования Δ_X), математическое ожидание ошибки $M[\Xi(x)]$ можно практически считать равным нулю.

Определим дисперсию шума квантования:

$$D[\Xi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \Xi^2(x) dx = \frac{\Delta_X^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{k-l} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) \times \\ \times \sin \frac{2\pi k}{\Delta_X} x \sin \frac{2\pi l}{\Delta_X} x dx.$$

Заменяя интеграл суммы в предыдущей формуле суммой интегралов, можем записать:

$$D[\Xi(x)] = \frac{\Delta_X^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{kl} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega(x = \\ \Delta_X(i + \frac{1}{2})) \\ = i\Delta_X) \int_{\Delta_X(i - \frac{1}{2})}^{\Delta_X(i + \frac{1}{2})} \sin \frac{2\pi k}{\Delta_X} x \sin \frac{2\pi l}{\Delta_X} x dx.$$

В силу нечетности функции выражение для дисперсии шума примет вид:

$$D[\Xi(x)] = \frac{\Delta_X^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega(x = i\Delta_X) \Delta_X = \frac{\Delta_X^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

поскольку

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} \omega(x = i\Delta_X) \Delta_X = 1.$$

Сумма ряда $1/k^2$ равна $\pi^2/6$. Таким образом, в окончательном виде дисперсия ошибки шума квантования при большом числе уровней квантования практически не зависит от распределения непрерывной величины x и равна:

$$D[\Xi(x)] = \Delta_X^2/12.$$

Поскольку, как правило, величина шага квантования достаточно мала ($\Delta_x \ll \sigma = \sqrt{D[x]}$), плотность вероятности непрерывной величины x в интервале Δ_x можно считать равномерной.

Полученная выше дисперсия $\Delta_x^2/12$ действительно соответствует равномерному закону распределения в интервале от $-\Delta_x/2$ до $+\Delta_x/2$.

Среднеквадратичная ошибка квантования, равная

$$\sigma_\xi = \Delta_x / (2\sqrt{3}),$$

в $\sqrt{3}$ раз меньше максимальной ошибки.

Полученные выводы справедливы лишь для равномерного квантования. С точки зрения уменьшения среднеквадратичной ошибки выгоднее неравномерное квантование, причем выигрыш тем значительнее, чем более плотность распределения непрерывной величины отличается от равномерной. Тогда для более вероятных значений сигнала шаг квантования выбирается меньшим, а для менее вероятных – большим.

6.2. Дискретизация по времени и восстановление непрерывных функций

При дискретизации по времени непрерывная по аргументу функция $x(t)$ преобразуется в функцию $x(t^*)$ дискретного аргумента t^* или отображается конечным числом некоторых величин (например, коэффициентов разложения).

В простейшем случае переход от функции непрерывного аргумента к функции дискретного аргумента может быть выполнен путем взятия отсчетов функции в определенные дискретные моменты времени $t_k, k = 1, 2, \dots$. В результате функция $x(t)$ заменяется совокупностью мгновенных значений $x(t_k)$. По этим мгновенным значениям $x(t_k)$ можно восстановить исходную функцию с заданной точностью.

Функцию, полученную в результате восстановления по отсчетам $x(t_k)$, будем называть воспроизводящей и обозначать через $y(t)$.

Воспроизводящая функция $y(t)$ строится как взвешенная сумма некоторого ряда функций $f_i(t - t_k)$:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i [x(t_k), x(t_{k-1}) \dots] f_i(t - t_k),$$

причем коэффициенты разложения a_i зависят от отсчетов $x(t_k)$, $x(t_{k-1})$...

При обработке параметрической информации дискретизация по времени должна производиться так, чтобы по отсчетным значениям функции $x(t_k)$ (или коэффициентам разложения) можно было получить воспроизводящую функцию $y(t)$, которая с заданной точностью отображает исходную функцию $x(t)$.

При дискретизации приходится решать вопрос о том, как часто необходимо производить отсчеты функции, т. е. каков должен быть шаг дискретизации $\Delta_T = t_k - t_{k-1}$.

При малых величинах Δ_T количество отсчетов функции на отрезке обработки $[0, T]$ будет большим и точность воспроизведения – высокой. При больших Δ_T количество отсчетов уменьшится, но при этом точность воспроизведения снижается. Обычно задается допустимая погрешность воспроизведения исходной функции. Оптимальной является такая дискретизация, которая обеспечивает представление исходной функции с заданной точностью минимальным количеством отсчетов $x(t_k)$. В этом случае все отсчеты существенны для восстановления исходной функции. В случае неоптимальной дискретизации, кроме существенных, производятся и избыточные отсчеты.

Эти отсчеты не нужны для восстановления исходной функции с заданной точностью. Наличие избыточной информации нежелательно при передаче информации, так как канал связи занимает на более длительное время, чем необходимо, или требуются каналы с большей пропускной способностью. При хранении избыточной информации увеличивается необходимый объем памяти, увеличивается время поиска и считывания записанных данных. Ввод избыточной информации в ЦВМ при обработке данных отрицательно сказывается на скорости обработки. В связи с этим возникла проблема сокращения избыточной параметрической информации.

Устранение этой избыточной для потребителя информации может производиться в процессе дискретизации по времени сообщений, так что дискретизацию по времени можно рассматривать

не только как операцию преобразования непрерывного сообщения в дискретное, но и как один из методов устранения избыточной для потребителя информации.

Методы дискретизации, и восстановления непрерывных функций различаются по следующим основным признакам:

1) регулярность отсчетов;

2) критерий выбора отсчетов и оценка точности воспроизведения;

3) способ воспроизведения;

4) вид воспроизводящих функций.

На рис. 6.2 приведена классификация в соответствии с перечисленными признаками.

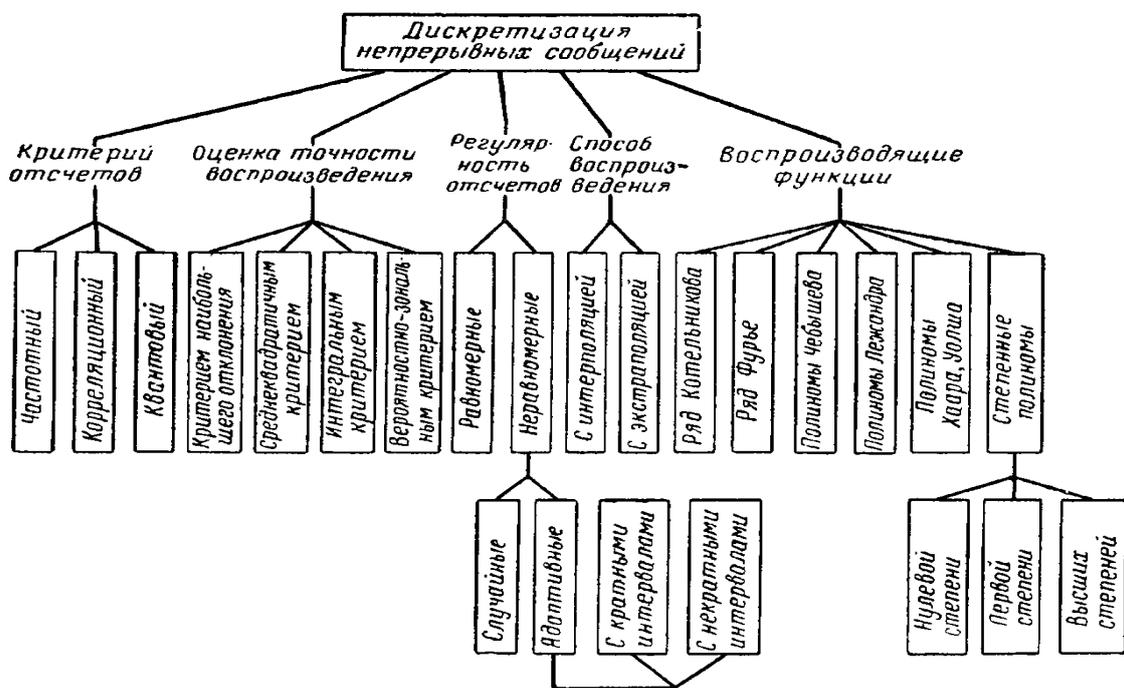


Рис. 6.2. Классификация методов дискретизации

Регулярность отсчетов

Регулярность размещения отсчетов по оси T во многом предопределяет степень устранения избыточности и сложность устройств дискретизации и восстановления.

В соответствии с этим признаком можно выделить две основные группы методов: равномерную и неравномерную дискретизацию.

При равномерной дискретизации функции $x(t)$ на всем рассматриваемом диапазоне D_T изменения аргумента интервал между отсчетами неизменен ($\Delta_T = const$). Величина этого интервала (шаг равномерной дискретизации) Δ_T выбирается на основе априорных сведений о характеристиках сигнала.

При неравномерной дискретизации интервал между отсчетами изменяется по случайному закону или с учетом изменения характеристик сообщения (адаптивная дискретизация).

В зависимости от возможности изменения интервала между отсчетами τ_j при адаптивной дискретизации выделим две группы методов:

1) интервал $\tau_j = i\Delta_T, i = 1, 2, 3, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$ – дискретная величина;

2) интервал $\tau_j, \tau_{\min} \leq \tau_j \leq \tau_{\max}$ – непрерывная величина.

Назовем в первом случае метод адаптивной дискретизации методом с кратными интервалами, во втором случае – с некратными интервалами.

Методы равномерной дискретизации характеризуются простым алгоритмом, при этом нет необходимости регистрировать время отсчетов, но из-за несоответствия интервала между отсчетами характеристикам дискретизируемого сообщения при отклонении последних от априорных возможна значительная избыточность отсчетов.

Методы адаптивной дискретизации характеризуются более сложными алгоритмами и устройствами дискретизации и восстановления, но позволяют значительно сокращать число избыточных отсчетов, что существенно для больших потоков информации.

Критерии отбора отсчетов и оценка точности воспроизведения

Качество способа дискретизации, согласно которому отбираются отсчеты или коэффициенты разложения функции, оценивают по той ошибке, с которой удастся воспроизвести исходную функцию.

Группа критериев отбора отсчетов относится к таким моделям сигнала и таким способам его воспроизведения, что ошибку

воспроизведения удастся обратить в нуль или близкое к нулю значение. К таким критериям относятся:

1) частотный критерий В. А. Котельникова [5], при котором интервалы между отсчетами выбираются с учетом частотного спектра дискретизируемого сигнала;

2) корреляционный критерий отсчетов, предложенный Н. А. Железновым [5] и устанавливающий связь интервалов между отсчетами с интервалом корреляции сигнала. Этот критерий предполагает применение специального фильтра, при помощи которого удастся выполнить безошибочное восстановление дискретизированной функции за бесконечно большой интервал времени. В тех случаях, когда не предусмотрено применение фильтра, обращающего в нуль ошибку воспроизведения, требования к интервалу между отсчетами формулируются исходя из той или иной характеристики ошибки;

3) Ф. Е. Темников [5] предложил для детерминированной модели сигнала квантовый критерий отсчетов, указывающий зависимость интервалов между отсчетами от величины ступени квантования по уровню и крутизны (первой производной) сигнала. Подробнее эти критерии рассматриваются ниже.

В последнее время разрабатывают устройства, в которых интервал между отсчетами выбирается автоматически в зависимости от значений той или иной характеристики ошибки воспроизведения, которая в этом случае играет роль критерия.

По такому критерию оценивается отклонение воспроизводимой функции $y(t)$ от исходного сигнала $x(t)$ на каждом из интервалов дискретизации τ_j .

Чаще других для этих целей применяют следующие критерии:

1) критерий наибольшего отклонения

$$\varepsilon_j(t) = \sup |x_j(t) - y_j(t)|;$$

2) среднеквадратичный

$$\bar{\varepsilon}_j^2(t) = \frac{1}{\tau_j} \int_{t_{0(j-1)}}^{t_{0j}} [x_j(t) - y_j(t)]^2 dt, \quad t \in [t_{0(j-1)}, t_{0j}];$$

3) интегральный

$$\bar{\varepsilon}_j(t) = \int_{t_{0(j-1)}}^{t_{0j}} |x_j(t) - y_j(t)| dt, \quad t \in [t_{0(j-1)}, t_{0j}];$$

4) вероятностно-зональный

$$p[x_j(t) \in S_i] = 1 - p[x_j(t) \in \bar{S}_i],$$

где $p[x_j(t) \in S_i]$ – вероятность выхода значения $x(t)$ из зоны S_i на интервале τ_j .

Заметим, что только критерий наибольшего отклонения обеспечивает возможность регистрации и индикации любых изменений функции, включая кратковременные выбросы.

Если величину интервала дискретизации τ_j подбирать с учетом заданной ошибки, то эта величина зависит от того, насколько удачно выбрана приближающая функция.

Для равномерного приближения согласно теореме Чебышева [5] обобщенный многочлен $P_j(t)$ является многочленом наилучшего приближения функции $x(t)$ на интервале $\tau_j = [t_{0j}, t_{(n+1)j}]$, если существуют такие $n + 2$ точки

$$t_{0j} < t_{1j} < \dots < t_{(n+1)j},$$

в которых разность $x(t_{ij}) - P(t_{ij})$ равна

$$(-1)^a \max |x_j(t) - P_j(t)|,$$

причем показатель степени α равен $+1$ или -1 , $i = 0, 1, \dots, n + 1$, $j = 0, 1, 2, \dots$

В случае ненаилучших приближений число таких точек, где разность $x_j(t) - P_j(t)$ принимает максимальное значение и соблюдается условие чередования знака этой разности, естественно, меньше, чем $n + 2$.

Обозначим через λ максимальное число точек на интервале дискретизации τ_j , выбираемых из условия, что разность $x_j(t) - P_j(t)$ принимает максимально допустимое значение при чередовании ее знака, и будем называть λ показателем качества приближения.

При использовании в качестве приближающих алгебраических многочленов $P_n(t)$ степени n в случае наилучшего приближения на интервале τ_j имеем $\lambda_{\max} = n + 2$.

Аналогично можно оценить качество интегрального и среднеквадратичного приближения. Эффективность устранения избыточности при дискретизации повышается с увеличением показателя закладываемого при проектировании в алгоритм дискретизации.

Способ воспроизведения

Выделим два способа воспроизведения исходного сигнала: 1) воспроизведение с экстраполяцией; 2) воспроизведение с интерполяцией.

В соответствии с этим признаком методы дискретизации разделены на два класса: экстраполяционные и интерполяционные.

Методы дискретизации с экстраполяцией воспроизводящих функций не требуют задержки сигналов в пределах интервала дискретности. Следовательно, они могут использоваться в системах, работающих в реальном масштабе времени (например – в управляющих системах). Дискретизация с интерполяцией требует задержки сигналов на интервал интерполяции.

Воспроизводящие функции

Подбор воспроизводящих функций $y(t)$, которые при минимальном числе членов ряда разложения обеспечивали бы необходимую точность воспроизведения, в общем случае связан с определенными трудностями.

Априорные сведения о сигналах, подлежащих дискретизации, как правило, весьма ограничены. Поэтому выбор типа воспроизводящих функций в основном определяется требованиями ограничения сложности устройств дискретизации и восстановления сигналов. В классификационной таблице (рис. 6.2) перечислены основные типы функций, применяемых в качестве воспроизводящих.

Требованию простоты нахождения коэффициентов разложения прежде всего отвечают степенные алгебраические полиномы [5]. Наиболее полно из этого класса функций исследовано применение полиномов нулевой и первой степени.

В последнее время появился ряд работ, где для восстановления применяются ортогональные системы функций Чебышева и Лежандра. Использование в качестве воспроизводящих ортогональных систем функций, т. е. таких, для которых $\int x_i(t)x_k(t)dt = 0$ при $i \neq k$, в ряде случаев оказывается целесообразным, так как для такой системы относительно просто вычисляются коэффициенты разложения и вычисление их включает операцию интегрирования сигнала, что положительно сказывается на помехоустойчивости алгоритма дискретизации. Заметим, что лишь при наличии значительной априорной информации о сигналах может решаться задача оптимального выбора конкретного узкого класса воспроизводящих функций. Так, например, если известно, что сигналы являются периодическими, то поиск следует направить в класс гармонических функций.

6.3. Теорема Котельникова

Если непрерывная функция $x(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле (ограничена, кусочно-непрерывна и имеет конечное число экстремумов) и ее спектр ограничен некоторой частотой ω_c , то существует такой максимальный интервал Δ_T между отсчетами, при котором имеется возможность безошибочно восстановить дискретизируемую функцию $x(t)$ по дискретным отсчетам. Этот максимальный интервал равен:

$$\Delta_T = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}.$$

Для доказательства рассмотрим выражения прямого и обратного преобразования Фурье непрерывной функции $x(t)$:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (6.1)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.2)$$

Полагаем, что спектр функции ограничен частотой ω_m :

$$S(j\omega) \neq 0 \text{ при } -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m;$$

$$S(j\omega) = 0 \text{ при } |\omega| > \omega_m.$$

Следовательно, в выражении (6.2) можно ограничить пределы интегрирования значениями ω_m и $-\omega_m$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.3)$$

Рассмотрим комплексный спектр функции $x(t)$. Поскольку он задан лишь на интервале $(-\omega_m, \omega_m)$, его можно разложить в комплексный ряд Фурье:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\pi k \omega / \omega_m}, \quad (6.4)$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} S(j\omega) e^{-j\pi k \omega / \omega_m} d\omega. \quad (6.5)$$

Сравнивая выражения (6.3) и (6.5), замечаем, что они совпадают с точностью до постоянного множителя, если принять $t = -k\Delta_T$.

Следовательно,

$$c_k = \frac{\pi}{\omega_m} x(-k\Delta_T).$$

Подставляя это соотношение в формулу (6.4), будем иметь:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} x(-k\Delta_T) e^{j\pi k \omega / \omega_m}. \quad (6.6)$$

Подставим выражение (6.6) в формулу (6.3), изменив знак при k на том основании, что суммирование производится по всем положительным и отрицательным значениям k . Кроме того, учитывая сходимость ряда и интеграла Фурье, производим перестановку операций суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega t} d\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} x(-k\Delta_T) e^{j\pi k\omega/\omega_m} = \\ &= \frac{1}{2\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta_T) \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta_T)} d\omega. \end{aligned} \quad (6.7)$$

После вычисления интеграла

$$\int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta_T)} d\omega = \frac{1}{j(t-k\Delta_T)} e^{j\omega(t-k\Delta_T)} \Big|_{-\omega_m}^{\omega_m} = \frac{2 \sin \omega_m(t-k\Delta_T)}{t-k\Delta_T}$$

и подстановки в (6.7) в окончательном виде получаем выражение, называемое рядом Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta_T) \frac{\sin[\omega_m(t-k\Delta_T)]}{\omega_m(t-k\Delta_T)}. \quad (6.8)$$

Как видно из этого выражения, непрерывная функция представляется суммой произведений, один из двух сомножителей которых есть значение непрерывной функции в точке отсчета, а другой является некоторой функцией времени и называется функцией отсчетов (рис. 6.3):

$$y(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - \pi k/\omega_m)]}{\omega_m(t - \pi k/\omega_m)}$$

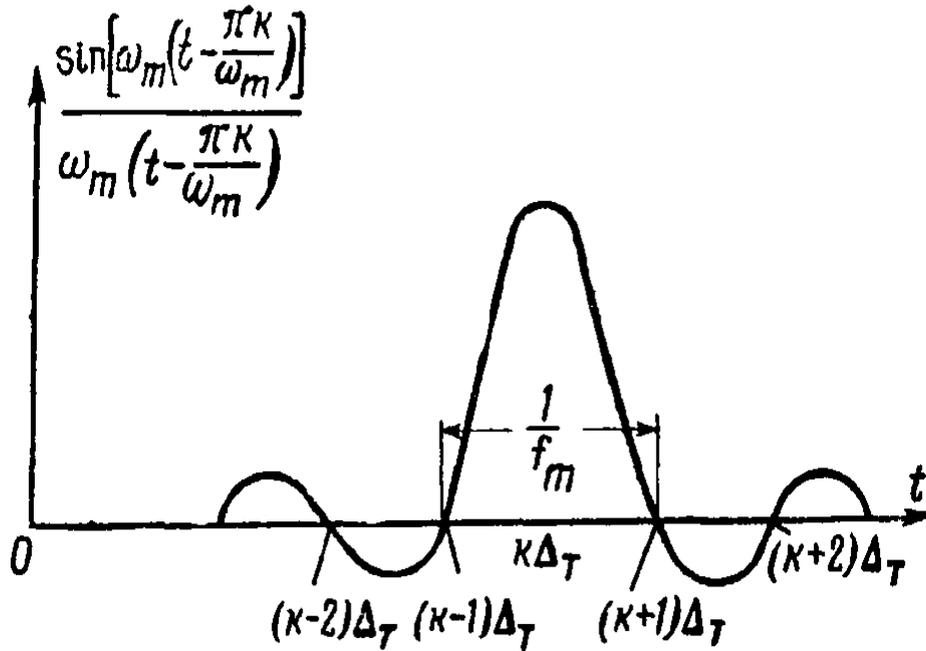


Рис. 6.3. Функция отсчетов

Свойства функции отсчетов:

- 1) в момент времени $t = k\Delta_T$ она достигает своего наибольшего значения, равного единице (рис. 6.3);
- 2) в моменты времени, кратные Δ_T ($t = (k \pm l)\Delta_T$), где l – любое целое число), функция отсчетов обращается в нуль;
- 3) функции отсчетов ортогональны на бесконечно большом интервале времени.

Функция отсчетов представляет собой реакцию идеального фильтра нижних частот на единичную импульсную функцию.

Таким образом, непрерывная функция $x(t)$ может быть представлена своими отсчетами $x(k\Delta_T)$. Для восстановления функции $x(t)$ необходимо подать на вход фильтра с верхней границей пропускания ω_c последовательность идеально узких импульсов с амплитудой, соответствующей значениям непрерывной функции в точках отсчета и следующих друг за другом с периодом Δ_T .

Время реакции фильтра возрастает с увеличением крутизны среза на граничной частоте. Для идеального фильтра крутизна среза

бесконечно велика, поэтому такой фильтр должен обладать бесконечно большим запаздыванием реакции.

На рис. 6.4 показана некоторая функция $x(t)$ с ограниченным спектром и отдельные слагаемые ряда (6.8) с максимальными ординатами $x(k\Delta_T)$, причем в точке $t = k\Delta_T$ k -я составляющая равна $x(k\Delta_T)$, а все остальные равны нулю. Сложение всех составляющих дает исходную функцию $x(t)$.

Теорема Котельникова сыграла большую роль в технике передачи и приема информации.

Наряду с частотным представлением сигналов (разложение в ряд Фурье, использование спектральных функций) стали применять временное представление (разложение во временной ряд), которое явилось основой для развития геометрических методов исследования сигналов.

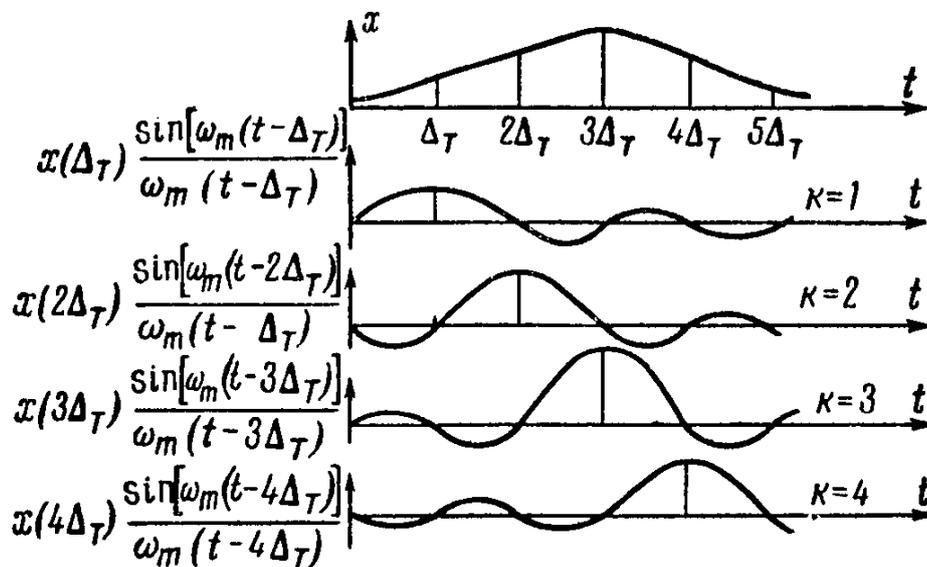


Рис. 6.4. Представление непрерывной функции с помощью функций отсчетов

В основе этих методов лежит представление непрерывного сигнала в виде вектора в n -мерном пространстве с координатами, соответствующими отсчетным значениям непрерывной функции. Новое представление непрерывного сигнала позволило значительно упростить решение задач, касающихся преобразований сигналов в линейных электрических цепях, так как при этом основные аналитические операции сводятся к алгебраическим. Это же

представление легло в основу теории потенциальной помехоустойчивости сигналов [5].

Особое значение теоремы Котельникова состоит в том, что она позволила заменить исследование передачи непрерывных сообщений более простыми задачами исследования передачи дискретных сообщений.

В последние годы при изучении свойств сигналов на первый план стали выдвигать их способность быть носителем сообщения. Сообщения по своей природе относятся к случайным явлениям, и, таким образом, сигнал может служить переносчиком сообщения лишь в том случае, если представляющая его непрерывная функция недетермирована, случайна. Между тем теорема Котельникова является точной лишь для функций с ограниченным спектром.

Случайные функции с ограниченным спектром относятся к классу вырожденных, или сингулярных. Для таких функций по прошлым их значениям с помощью системы линейного прогнозирования могут быть предсказаны ее будущие значения в любые последующие моменты времени со среднеквадратичной ошибкой, как угодно мало отличающейся от нуля.

В свете сказанного становится очевидным, что теорема Котельникова, строго говоря, несправедлива для сигналов, являющихся носителями сообщений.

Кроме того, реальные сигналы, являющиеся носителями информации, имеют начало и конец, т. е. непрерывные функции, описывающие такие сигналы, имеют конечную длительность. Но такие функции не могут иметь ограниченный спектр. Таким образом, для сигналов конечной длительности теорема Котельникова неприменима.

На практике использование теоремы Котельникова также наталкивается на ряд трудностей.

В первую очередь следует отметить, что представление непрерывной функции в виде дискретных отсчетов через промежуток времени $\Delta_T = \frac{1}{2f_m}$ не позволяет воспроизводить процесс, развивающийся во времени.

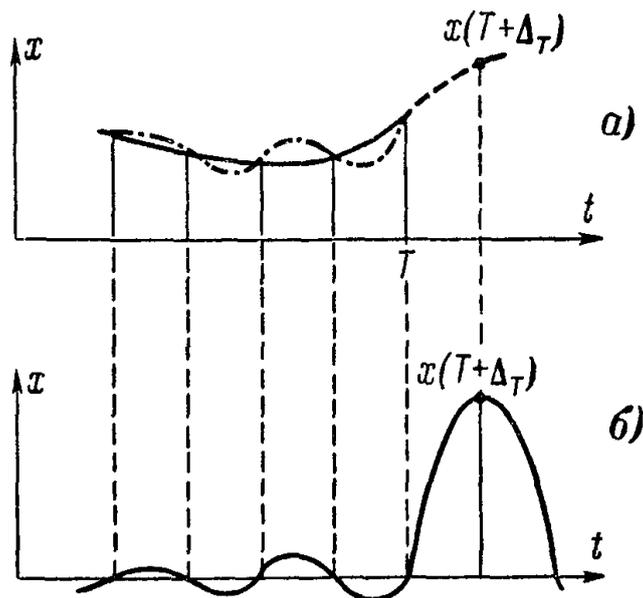


Рис. 6.5. Изменение восстановленной функции при дополнительных отсчетах

Пусть, например, на интервале T непрерывная функция времени восстанавливается по своим $N = 2fT$ отсчетам (рис. 6.5). Если теперь вне интервала получен хотя бы один дополнительный отсчет, то при восстановлении изменяется вся непрерывная функция на всем предшествующем интервале T (за исключением отсчетных значений). Таким образом, получение новых данных изменяет непрерывную функцию в «прошлом».

Получение функции отсчетов сопряжено с использованием фильтра нижних частот, причем функция воспроизводится тем точнее, чем ближе используемый фильтр к идеальному.

Однако, как указывалось, увеличение крутизны среза такого фильтра ведет к увеличению задержки в получении сигналов на выходе, т. е. приводит к значительному запаздыванию при восстановлении сигнала.

Наконец, для реальных сигналов граничная частота среза f_m является неопределенным параметром, для выбора которого не существует достаточно обоснованных критериев.

Приведенные замечания свидетельствуют, что применение теоремы Котельникова вызывает определенные трудности в том случае, когда она рассматривается как точное утверждение.

Практически, однако, идеально точное воспроизведение функции никогда не требуется, необходимо лишь воспроизведение с определенной, фиксированной точностью.

Поэтому теорему Котельникова можно рассматривать как приближенную для функций с неограниченным спектром.

В работе [5] приводятся оценки погрешности представления функции с неограниченным спектром рядом Котельникова (6.8). Показано, что непрерывную функцию времени, удовлетворяющую условиям Дирихле и имеющую неограниченный спектр, можно представить в виде трех слагаемых

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t),$$

где

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta_T) \frac{\sin[2\pi f_m(t - k\Delta_T)]}{2\pi f_m(t - k\Delta_T)}.$$

Значение граничной частоты f_m выбирается при этом произвольно, а период дискретности Δ_T равен. Слагаемое $x_1(t)$ не содержит частот выше f_m , спектр функции $x_2(t)$ не ограничен, а спектр функции $x_3(t)$ содержит составляющие с частотами выше f_m . Если значение f_m выбрано так, что при частотах выше f_m спектральная плотность функции $x(t)$ мала, то слагаемые $x_2(t)$ и $x_3(t)$ малы по сравнению с $x_1(t)$ и можно записать:

$$x(t) \approx x_1(t).$$

При этом отклонение $x_1(t)$ от функции $x(t)$ оценивается выражением

$$E_m \leq \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - x_1(t)]^2 dt \leq (3 + q)E_m,$$

где E_m – энергия, заключенная в высокочастотной части спектра, т. е. в полосе частот выше f_m ; q – число, определяющее характер убывания модуля спектральной функции в высокочастотной части спектра. Если убывание происходит достаточно быстро, то q – малая величина. При этом энергия ошибки заключена между E_m и $3E_m$.

Погрешность восстановления функции с неограниченным спектром рядом Котельникова (6.8), оцениваемая относительной величиной среднеквадратической ошибки, определяется неравенством

$$\sqrt{\frac{E_m}{E}} \leq \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - x_1(t)]^2 dt}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt}} \leq 1,73 \sqrt{\frac{E_m}{E}},$$

где E – полная энергия спектра.

Дальнейшее развитие теории дискретизации непрерывных сигналов связано с работами Н. А. Железнова.

6.4. Принцип дискретизации Железнова

Та же задача определения максимального интервала Δ_T между отсчетами решена Н. А. Железновым для случайного сигнала.

Отличительные свойства непрерывного сигнала в этой модели следующие:

- 1) спектр сигнала сплошной и отличен от нуля на всей оси частот $-\infty < f < +\infty$;
- 2) сигнал имеет конечную длительность;
- 3) рассматриваются сигналы, которые могут быть представлены как стационарными, так и нестационарными случайными функциями;
- 4) функция корреляции сигналов равна нулю вне интервала τ_0 .

Длительность сигнала T должна быть много больше интервала корреляции τ_0 : $T \gg \tau_0$.

Неограниченность спектра сигнала и его конечная длительность являются большими преимуществами этой модели: она в большей степени отвечает свойствам реальных сигналов, чем модель В. А. Котельникова.

Единственным ограничением в этой модели является ограничение функции корреляции, которая имеет вид, показанный на рис. 6.6:

$$B_{xx}(\tau) = \begin{cases} B_{xx}(\tau), & \tau \leq \tau_0 \\ 0, & \tau > \tau_0. \end{cases}$$

Это означает, что соседние значения непрерывной функции $x(t_1)$ и $x(t_2)$ (рис. 6.7), отсчитанные через промежуток времени больший, чем τ_0 , могут считаться независимыми.

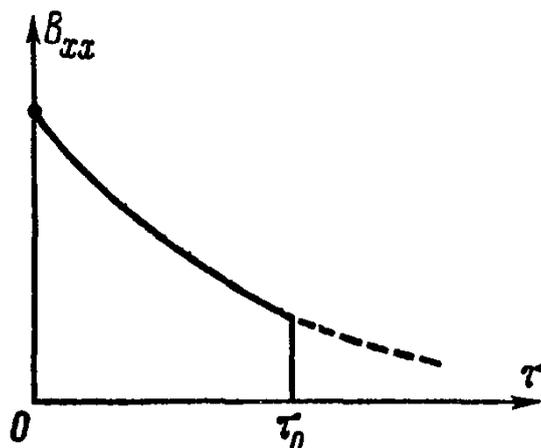


Рис. 6.6. Корреляционная функция и интервал корреляции сигнала

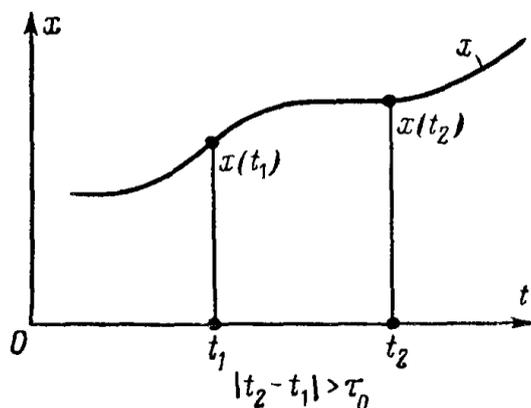


Рис. 6.7. Некоррелированные отсчеты непрерывной функции

Для стационарных случайных сигналов, обладающих перечисленными выше свойствами, Н. А. Железновым было показано, что они могут быть предсказаны системой линейного прогнозирования со среднеквадратичной ошибкой $\overline{\varepsilon^2}$, как угодно мало отличающейся от нуля, лишь в промежутке времени, равном интервалу корреляции τ_0 .

Таким образом, для непрерывного сигнала конечной длительности T (при условии, что $T \gg \tau_0$ число некоррелированных отсчетов не превышает величины N :

$$N = T/\tau_0.$$

Следовательно, дискретизация непрерывной функции с интервалом τ_0 обеспечивает возможность безошибочного восстановления значений непрерывной функции внутри интервалов τ_0 с помощью системы линейного прогнозирования.

Покажем, как определяется интервал корреляции для реальных сигналов.

Для определения интервала корреляции вводится понятие эффективной полосы частот сигнала, определяемой по его спектральной плотности $S_{xx}(\omega)$:

$$S_{xx} \Delta\omega_{\text{эфф}} = \frac{1}{S_{xx \text{ макс}}} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega,$$

где $S_{xx \text{ макс}}$ – наибольшее значение спектральной плотности сигнала; $\Delta\omega_{\text{эфф}} = 2\pi\Delta f_{\text{эфф}}$ – эффективная полоса частот сигнала.

Графически эффективная полоса частот представляет собой основание прямоугольника с высотой $S_{xx \text{ макс}}$ и площадью, равной площади, ограниченной кривой спектральной плотности сигнала и осями координат (рис. 6.8).

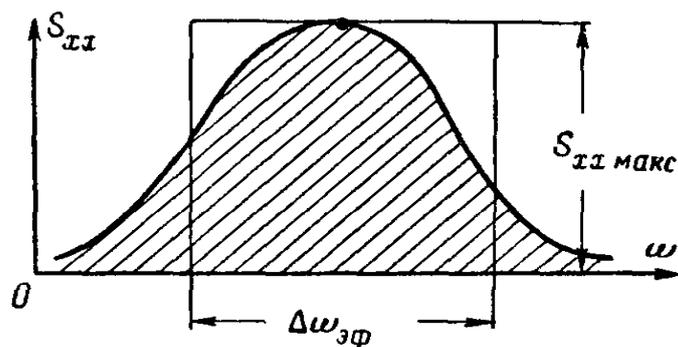


Рис. 6.8. К определению эффективной полосы частот по спектральной плотности сигнала

Выше рассматривалось применение принципа дискретизации Железнова для стационарных случайных сигналов. Однако он может быть распространен и на нестационарные сигналы. Для произвольных нестационарных случайных сигналов функция корреляции зависит от времени. Для этих сигналов вводится понятие текущего интервала корреляции $\tau_0(t)$, причем справедливо также соотношение

$$\tau_0 = \frac{1}{2\Delta f_{\text{эфф}}(t)},$$

где $\Delta f_{\text{эфф}}(t)$ – эффективная полоса частот мгновенной спектральной плотности с точностью до постоянного множителя.

Естественно, что некоррелированные отсчеты для нестационарной случайной функции располагаются неравномерно по оси времени.

Вводя понятие о средних характеристиках нестационарного сигнала, Н. А. Железнов доказывает, что произвольным нестационарным сигналам могут быть поставлены в соответствие квазистационарные сигналы, у которых среднее значение, взятое по множеству реализаций, спектральная плотность и корреляционная функция совпадают с соответствующими характеристиками нестационарных сигналов.

У квазистационарных сигналов интервал корреляций $\tau_{0\text{ ср}}$ не зависит от времени. Для таких сигналов утверждается, что непрерывные квазистационарные сигналы с неограниченным спектром могут быть представлены своими отсчетами через интервалы Δ_T с точностью, сколь угодно близкой к предельной точности, если $\Delta_T \leq \tau_{0\text{ ср}}$ и $T \gg \tau_{0\text{ ср}}$.

Предельная точность воспроизведения зависит от структуры корреляционной функции и отношения .

6.5. Выбор периода дискретизации по критерию наибольшего отклонения

Найдем максимально допустимую величину интервала между отсчетами (шаг, или период, дискретизации), принимая в качестве воспроизводящих функций степенные многочлены Лагранжа.

Многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов t_i на отрезке $[t_0, t_n]$ может быть записан в следующем виде [5,6]:

$$L_n(t) = L_n[t_0 + \chi\Delta_{Tn}] = (-1)^n \frac{\chi(\chi-1)\dots(\chi-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{C_n^i \chi(t_i)}{\chi-i},$$

где

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_i - t_{i-1} = \Delta_{Tn}.$$

Погрешность воспроизведения исходной непрерывной функции $x(t)$ с ограниченными производными многочленом Лагранжа $L_n(t)$ определяется остаточным членом

$$R_n(t) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \Delta_{Tn}^{n+1} |\chi(\chi-1) \dots (\chi-n)|, \quad (6.9)$$

где M_{n+1} – модуль максимального значения $(n+1)$ -й производной функции $x(t)$.

Шаг равномерной дискретизации нужно выбрать таким, чтобы по отсчетам функции $x(t_i)$ можно было бы восстановить исходную функцию $x(t)$ многочленом Лагранжа $L_n(t)$ с погрешностью

$$R_n(t) \leq \varepsilon_0, \quad (6.10)$$

где ε_0 – допустимая погрешность дискретизации по времени.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся способы дискретизации с восстановлением при помощи многочленов нулевой и первой степени.

Нулевая степень воспроизводящего многочлена (ступенчатая аппроксимация)

В этом случае остаточный член (6.9) имеет вид:

$$R_0(t) \leq M_1 \Delta_{T_0} \chi. \quad (6.11)$$

Очевидно, что максимальное значение $R_0(t)$ принимает при $\chi = 1$. С учетом (6.10) и (6.11) шаг равномерной дискретизации

$$\Delta_{T_0} \leq \varepsilon_0 / M_1. \quad (6.12)$$

Воспроизводящая функция $y(t) = L_0(t)$ для j -го интервала дискретизации $[t_{0j}, t_{0(j+1)}]$ ($j = 0, 1, 2 \dots$) при восстановлении с экстраполяцией имеет вид (рис. 6.9, а):

$$y_j(t) = x(t_{0j}), \quad (6.13)$$

а при восстановлении с интерполяцией

$$y_j(t) = x(t_{0(j+1)}), \quad (6.14)$$

Показатель качества приближения на каждом из интервалов дискретизации Δ_{T_0} , выбранных в соответствии с (6.12), может достигать величины $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

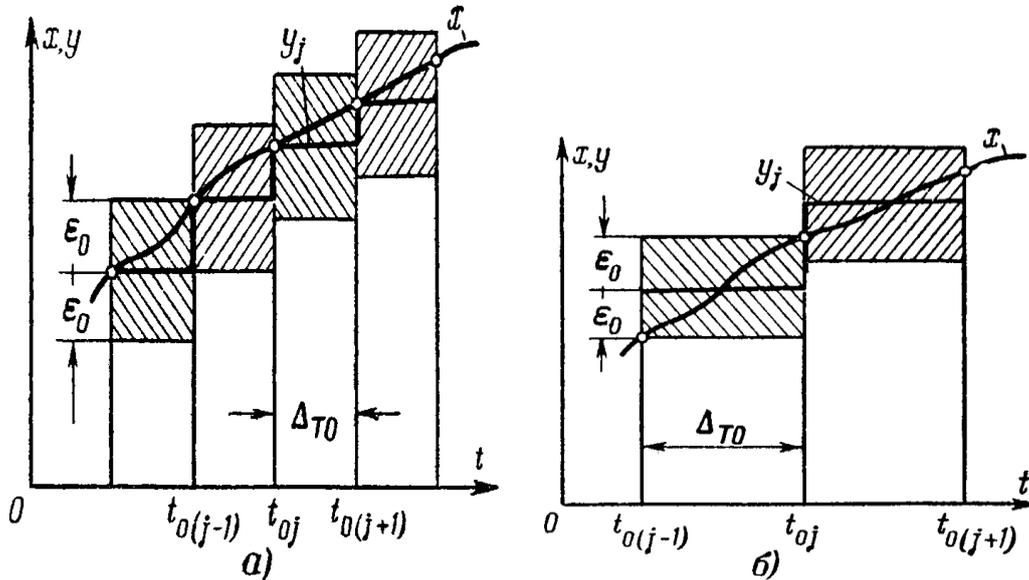


Рис. 6.9. Ступенчатая аппроксимация сигнала при различных значениях показателя качества приближения: а – $\lambda_{\text{макс}} = 1$; б – $\lambda_{\text{макс}} = 2$.

При воспроизводящих функциях вида

$$y_j(t) = \frac{[x(t_{0j}) + x(t_{0(j+1)})]}{2} \quad (6.15)$$

(см. рис. 6.9, б) шаг равномерной дискретизации может быть увеличен в 2 раза без увеличения погрешности

$$\Delta'_{T_0} \leq 2\epsilon_0/M_1 \quad (6.16)$$

Очевидно, что этот случай в пределе соответствует наилучшему приближению ($\lambda_{\text{макс}} = 2$) функции $x(t)$ на интервале Δ'_{T_0} полиномом нулевой степени (6.15).

Первая степень воспроизводящего многочлена (линейная аппроксимация)

Анализ формулы (6.9) показывает, что остаточный член $R_1(t)$ принимает максимальное значение при $\chi = 1/2$.

С учетом этого положения и формул (6.9) и (6.10), найдем допустимый шаг равномерной дискретизации

$$\Delta_{T_1} \leq \sqrt{8 \varepsilon_0 / M_2} \quad (6.17)$$

После некоторого преобразования воспроизводящая функция может быть представлена на j -м интервале дискретизации, величина которого соответствует (6.17) в виде

$$y_j(t) = x(t_{0j}) + [x(t_{0(j+1)}) - x(t_{0j})] (t - t_{0j}) / \Delta_{T_1} \quad (6.18)$$

где $t_{0j} \leq t \leq t_{0(j+1)}$.

Рис. 6.10 иллюстрирует рассматриваемый случай равномерной дискретизации.

Показатель качества приближения на каждом из интервалов $[t_{0j}, t_{0(j+1)}]$ ($j = 0, 1, 2 \dots$) может достигать максимально возможной величины $\lambda_{\max} = 1$.

При повышении качества приближения шаг равномерной дискретизации увеличивается (табл. 6.1).

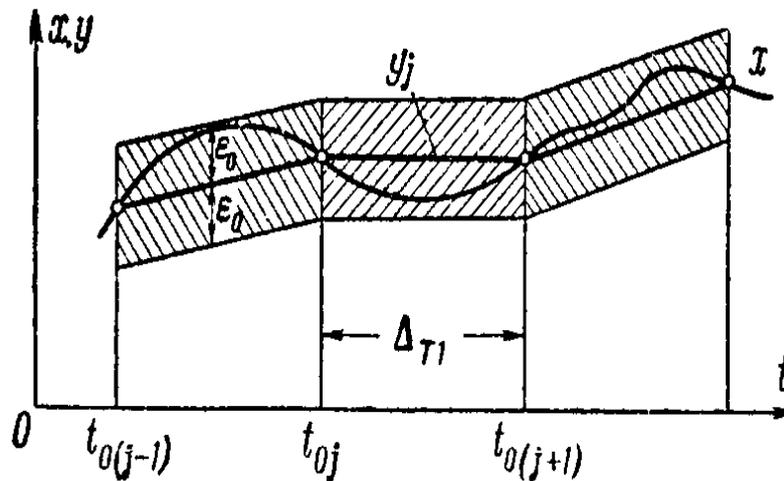


Рис. 6.10. Линейная аппроксимация сигнала

Шаг равномерной дискретизации для многочленов $L_n(t)$ степени $n \geq 2$ находится по формулам (6.9) и (6.10). Результаты вычислений для Δ_{T_n} и $\tau_n n \leq 4$ приведены в табл. 6.1. Шаги дискретизации Δ_{T_n} , Δ'_{T_n} и Δ''_{T_n} в табл. 6.1 соответствуют показателям качества приближений $\lambda_{\max} = 1$, $\lambda_{\max} = 2$ и $\lambda_{\max} = 3$.

Таблица 6.1

Степень n многочлена $L_n(t)$	Показатель качества приближения по Чебышеву λ	Максимальное значение шага равномерной дискретизации Δ_{T_n}	Интервал интерполяции τ_n
0	1	ε_0/M_1	Δ_{T_0}
	2	$2\varepsilon_0/M_1$	Δ_{T_0}
1	1	$\sqrt{8\varepsilon_0/M_2}$	Δ_{T_1}
	2	$3,4\sqrt{\varepsilon_0/M_2}$	Δ'_{T_1}
	3	$4\sqrt{\varepsilon_0/M_2}$	Δ''_{T_1}
2	1	$\sqrt[3]{15,6\varepsilon_0/M_3}$	$2\Delta_{T_2}$
3	1	$\sqrt[4]{24\varepsilon_0/M_4}$	$3\Delta_{T_3}$
4	1	$\sqrt[5]{33\varepsilon_0/M_5}$	$4\Delta_{T_4}$

В заключение данного параграфа оценим выигрыш в увеличении шага равномерной дискретизации Δ_{T_n} (уменьшение частоты опроса) при увеличении степени воспроизводящего многочлена $L_n(t)$, используя неравенство [5]:

$$M_{n+1} \leq \omega_m^{n+1} |x(t)_{\max}| \quad (6.19)$$

Введем коэффициент $\rho_n = \Delta_{T_n}/\Delta_{T_0}$, характеризующий изменение величины шага Δ_{T_n} по сравнению с шагом Δ_{T_0} при $n = 0$.

Коэффициенты ρ_n найдем для шагов Δ_{T_n} , выбранных в соответствии с данными табл. 6.1 при $\lambda_{\max} = 1$ и с учетом (6.19):

$$\rho_1 \leq 2,83/\sqrt{\gamma_0}; \quad (6.20)$$

$$\rho_2 \leq 2,5/\sqrt[3]{\gamma_0^2}; \quad (6.21)$$

$$\rho_3 \leq 2,22/\sqrt[4]{\gamma_0^3}; \quad (6.22)$$

$$\rho_4 \leq 2,5/\sqrt[5]{\gamma_0^4}; \quad (6.23)$$

где γ_0 – допустимая относительная погрешность дискретизации.

На основе формул (6.20) – (6.23) можно найти зависимость

$$\rho_n = \psi(\gamma_0).$$

Некоторые значения $\rho_n = \psi(\gamma_0)$ приведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2

ρ_n	γ_0						
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
ρ_1	6,35	8,95	12,7	20	28,3	40	89,5
ρ_2	7,32	11,6	18,4	34	53,9	85,2	250
ρ_3	6,54	12,5	20	36,7	67	118	395
ρ_4	7,35	12,75	22,2	46,3	80,5	140	504

Анализ зависимости $\rho_n = \psi(\gamma_0)$ показывает, что существенное снижение избыточности отсчетов для дискретизации с шагом Δ_{T_n} , $n \geq 2$ получается при малых значениях допустимой относительной погрешности $\gamma_0 \leq 0,01$.

В зоне больших значений γ_0 эффективность равномерной дискретизации с шагом Δ_{T_1} (линейная аппроксимация) близка к эффективности дискретизации с шагом Δ_{T_n} при $n \geq 2$.

Следует заметить, что лишь при дискретизации с шагом Δ_{T_0} по (6.12) воспроизведение функции $L_n(t)$ возможно без задержки, в остальных случаях вводится задержка, равная интервалу интерполяции τ_n (см. табл. 6.2).

6.6. Выбор периода дискретизации по критерию среднеквадратичного отклонения

Предположим, что принята равномерная дискретизация, а точность воспроизведения оценивается среднеквадратичным отклонением в узловых точках. Выберем в качестве узловых точек такие, для которых среднеквадратичное отклонение будет наибольшим, гарантируя таким образом, что при оценке точности в любых других узловых точках среднеквадратичное отклонение будет меньше.

Предполагая, как и ранее, что дискретизации подлежит стационарная случайная функция времени, а продолжительность непрерывной функции значительно превосходит интервал дискретизации, определим среднеквадратичную ошибку воспроизведения как

$$\overline{\varepsilon^2} = M\{[y(t_i) - x(t_i)]^2\}.$$

При ступенчатой аппроксимации воспроизводящая функция может быть записана в следующем виде:

$$y(t_i) = x(t_i - \Delta_T),$$

где Δ_T – интервал дискретизации. Таким образом,

$$\overline{\varepsilon^2} = M\{[x(t_i - \Delta_T) - x(t_i)]^2\}.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $M[x^2(t_i)] = M[x^2(t_i - \Delta_T)] = B_{xx}(0)$, а $M[x^2(t_i)] = M[x^2(t_i - \Delta_T)] = B_{xx}(\Delta_T)$, где $B_{xx}(\tau)$ – корреляционная функция дискретизируемого сигнала $x(t)$. Вследствие четности $B_{xx}(\tau)$ получим:

$$\overline{\varepsilon^2} = 2[B_{xx}(0) - B_{xx}(\Delta_T)]$$

или

$$B_{xx}(\Delta_T) = B_{xx}(0) - \frac{\overline{\varepsilon^2}}{2}.$$

Таким образом, если известна корреляционная функция и задано максимально возможное значение среднеквадратического отклонения $\overline{\varepsilon^2}$, интервал дискретизации можно определить по соотношению

$$\Delta_T = B_{xx}^{-1} \left[B_{xx}(0) - \frac{\overline{\varepsilon^2}}{2} \right],$$

где символом B_{xx}^{-1} обозначена функция, обратная корреляционной.

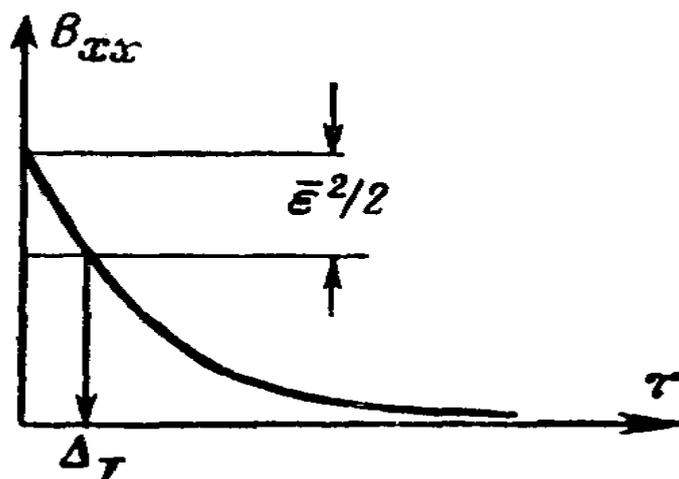


Рис. 6.11. Определение интервала дискретизации по корреляционной функции сигнала

Определение интервала дискретизации в том случае, когда корреляционная функция задана графически, показано на рис. 6.11. Если предварительные данные о непрерывном процессе отсутствуют (корреляционная функция неизвестна), то для определения интервала дискретизации может быть использован прием, описанный в [5]. По некоторой реализации задается интервал дискретизации Δ_T^* и находится среднеквадратичное отклонение

$$\overline{\varepsilon_1^{*2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{x[t + (i+1)\Delta_T^*] - x(t - i\Delta_T^*)\}^2.$$

Далее определяется среднеквадратичное отклонение на том же отрезке при вдвое большем интервале дискретизации

$$\overline{\varepsilon_1^{*2}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{x[t + (i+2)\Delta_T^*] - x(t - i\Delta_T^*)\}^2.$$

Точно таким же образом определяются $\overline{\varepsilon_3^{*2}}, \overline{\varepsilon_4^{*2}}, \dots, \overline{\varepsilon_m^{*2}}$ — среднеквадратичные отклонения при интервалах дискретизации $3\Delta_T^*, 4\Delta_T^*, \dots, m\Delta_T^*$.

Строится график зависимости $\overline{\varepsilon_k^{*2}}$ от величины интервала дискретизации $k\Delta_T^*$.

Построенная зависимость стремится к пределу $\overline{\varepsilon_{\infty}^2}$, соответствующему дисперсии непрерывной функции. Таково будет среднеквадратичное отклонение при выборе интервала дискретизации, превосходящего интервал корреляции (значения двух соседних отсчетов при этом статистически независимы). По допустимой величине среднеквадратичного отклонения $\overline{\varepsilon_0^2}$ находим по графику допустимый (рис. 6.12).

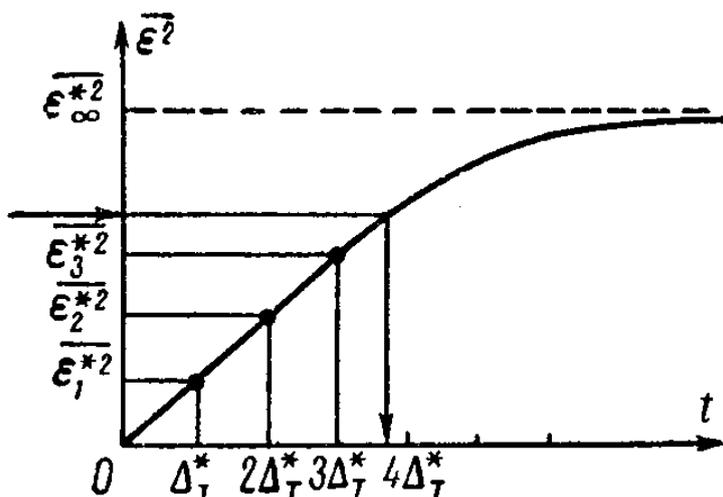


Рис. 6.12. Определение интервала дискретизации по среднеквадратической ошибке

При линейной аппроксимации воспроизводящая функция внутри интервала дискретизации выражается как

$$y(t') = x(t_i) + [x(t_{i+1}) - x(t_i)] \frac{t' - t_i}{t_{i+1} - t_i},$$

где $t_i \leq t' \leq t_{i+1}$

Обозначим:

$$\frac{t' - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{t' - t_i}{\Delta_T} = \chi.$$

Тогда

$$y(t') = x(t_i) + [x(t_{i+1}) - x(t_i)]\chi = x(t_i)[1 - \chi] + \chi x(t_{i+1}).$$

Среднеквадратичная ошибка воспроизведения равна:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= M[x(t') - y(t')] = M\{[x(t') - x(t_i)[1 - \chi] + \chi x(t_{i+1})]^2\} = \\ &= M\{[x(t')]^2 + [x^2(t_i)(1 - \chi)^2] + \chi^2[x^2(t_{i+1})] - \\ &- 2x(t')x(t_i)(1 - \chi) - 2\chi x(t')x(t_{i+1}) + 2\chi(1 - \chi)x(t_{i+1})x(t_i)\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M\{[x(t)]^2\} = B(0)$, а $M\{x(t')x(t_i)\} = B(t' - t_i) = B(\tau)$, получаем:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} &= B(0) + (1 - \chi)^2 B(0) + \chi^2 B(0) - 2(1 - \chi)B(\tau) - \\ &- 2\chi B(\Delta_T - \tau) + 2\chi(1 - \chi)B(\Delta_T) = B(0)[1 + (1 - \chi)^2 + \\ &+ \chi^2 - 2(1 - \chi)r(\tau) - 2\chi r(\Delta_T - \tau) + 2\chi(1 - \chi)r(\Delta_T)], \end{aligned}$$

где $r(\Delta_T) = B(\Delta_T)/B(0)$ – нормированная корреляционная функция.

Можно показать, что среднеквадратичная погрешность максимальна, если узловые точки выбрать в середине интервала, т. е.

$$\chi = \frac{t' - t_i}{t_{i+1} - t_i} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае среднеквадратичное отклонение $\overline{\varepsilon_{\max}^2}$ равно:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{\max}^2} &= B(0) \left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - r\left(\frac{\Delta_T}{2}\right) - r\left(\frac{\Delta_T}{2}\right) + \frac{1}{2}r(\Delta_T) \right] = \\ &= B(0) \left[1,5 - 2r\left(\frac{\Delta_T}{2}\right) + 0,5r(\Delta_T) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для заданного значения среднеквадратичного отклонения $\overline{\varepsilon_0^2}$ выбранная величина интервала дискретизации Δ_T должна подчиняться соотношению

$$\overline{\varepsilon_0^2} \geq 1,5B(0) - 2B\left(\frac{\Delta_T}{2}\right) + 0,5B(\Delta_T).$$

6.7. Адаптивная дискретизация

Общие принципы адаптивной дискретизации рассмотрены в [5,6]. На каждом интервале дискретизации τ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) находится некоторая функция $y_j(t)$ выбранного типа и порядка (степени) в предположении, что она лучшим образом (для группы с показателем качества λ_{\max}) будет приближать функцию $x(t)$ на интервале τ_j . Указанное условие проверяется и, если необходимо и возможно, находится новая функция, наилучшим способом воспроизводящая

функцию $x(t)$. На интервале дискретизации τ_j непрерывно проверяется близость исходной и воспроизводящей функции в соответствии с принятым критерием оценки погрешности воспроизведения. Погрешность воспроизведения $\varepsilon(t)$ сравнивается с максимально допустимым значением ε_0 и в момент равенства $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ фиксируется конец интервала дискретизации τ_j .

На интервале τ_j регистрируются отсчеты значений функции $x_j(t)$ или некоторые характеристики функции $y_j(t)$ (например, коэффициенты разложения), по которым можно восстановить исходную функцию с погрешностью, не превышающей допустимую. Кроме того, регистрируется величина интервала дискретизации.

Как отмечалось, при классификации методов дискретизации можно выделить две группы методов адаптивной дискретизации: дискретизацию с некратными интервалами и дискретизацию с кратными интервалами. Ниже рассматриваются эти группы методов.

Рассмотрим принцип адаптивной дискретизации с некратными интервалами и воспроизводящими степенными многочленами при оценке верности воспроизведения по наибольшему отклонению.

Нулевая степень воспроизводящего многочлена

Рассмотрим три способа дискретизации с различным качеством приближения.

1. Ф. Е. Темниковым [5] введен квантовый критерий отсчетов. Аналитическое выражение квантового критерия может быть получено при аппроксимации функции $x(t)$ отрезками полиномов нулевой степени (прямых), проходящими через точки пересечения функции $x(t)$ с семейством линий квантования, построенных с соблюдением соотношения

$$\Delta_T = \frac{\Delta_X}{x'(t)|_{\Delta_T}}, \quad (6.24)$$

где $x'(t)|_{\Delta_T}$ – первая производная сообщения на интервале Δ_T ; Δ_X – шаг квантования.

На рис. 6.13 приведен пример адаптивной дискретизации сообщения на основе квантового критерия отсчетов.

Как видно из рис. 6.13, конец интервала (точнее отрезка) дискретизации $[t_{0j}, t_{0(j+1)}]$ (длительностью τ_j) фиксируется при равенстве

$$|\Delta x_j(t)| = |x_j(t) - x(t_{0j})| = \begin{cases} 0 \\ \varepsilon_0 \end{cases}. \quad (6.25)$$

В этот момент производится отсчет сообщения $x(t_{0(j+1)})$ и далее вновь проверяется соотношение (6.25).

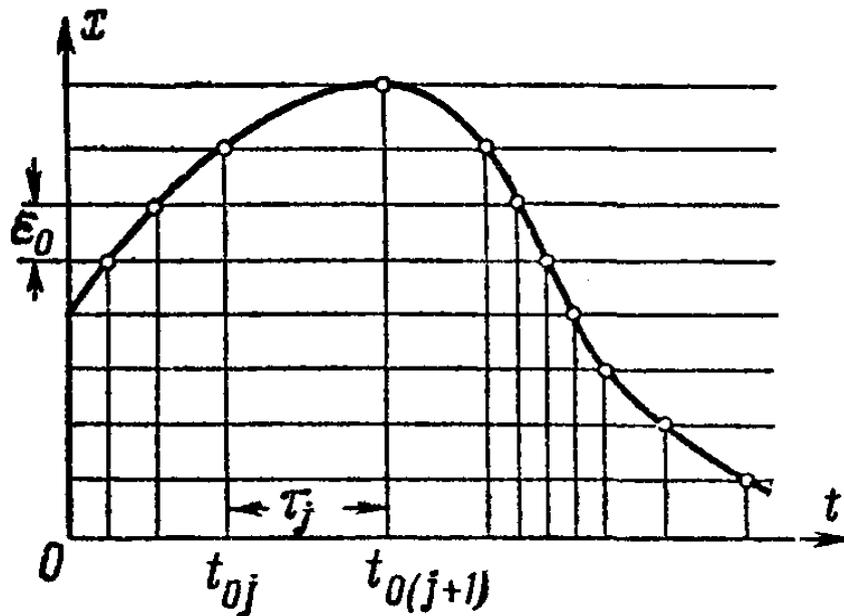


Рис. 6.13. Адаптивная дискретизация на основе квантового критерия отсчетов

В процессе дискретизации осуществляется отсчет значений $x(t_{0j})$ и t_{0j} (или τ_j). По этим отсчетам восстанавливается исходная функция.

Воспроизводящая функция

$$y_j(t) = x(t_{0j}). \quad (6.26)$$

Качество приближения данного способа характеризуется значением показателя $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

2. Пусть воспроизводящая функция $y_j(t)$ на интервале дискретизации $[t_{0j}, t_{0(j+1)}]$ совпадает со значением исходной функции в начальной точке t_{0j} интервала:

$$y_j(t) = x(t_{0j}).$$

В устройстве дискретизации на каждом из интервалов τ_j вычисляется разность $\Delta x_j(t) = x_j(t) - x(t_{0j})$, модуль которой сравнивается с допустимой погрешностью ε_0 . Конец интервала дискретизации τ_j фиксируется при равенстве

$$|\Delta x_j(t)| = \varepsilon_0.$$

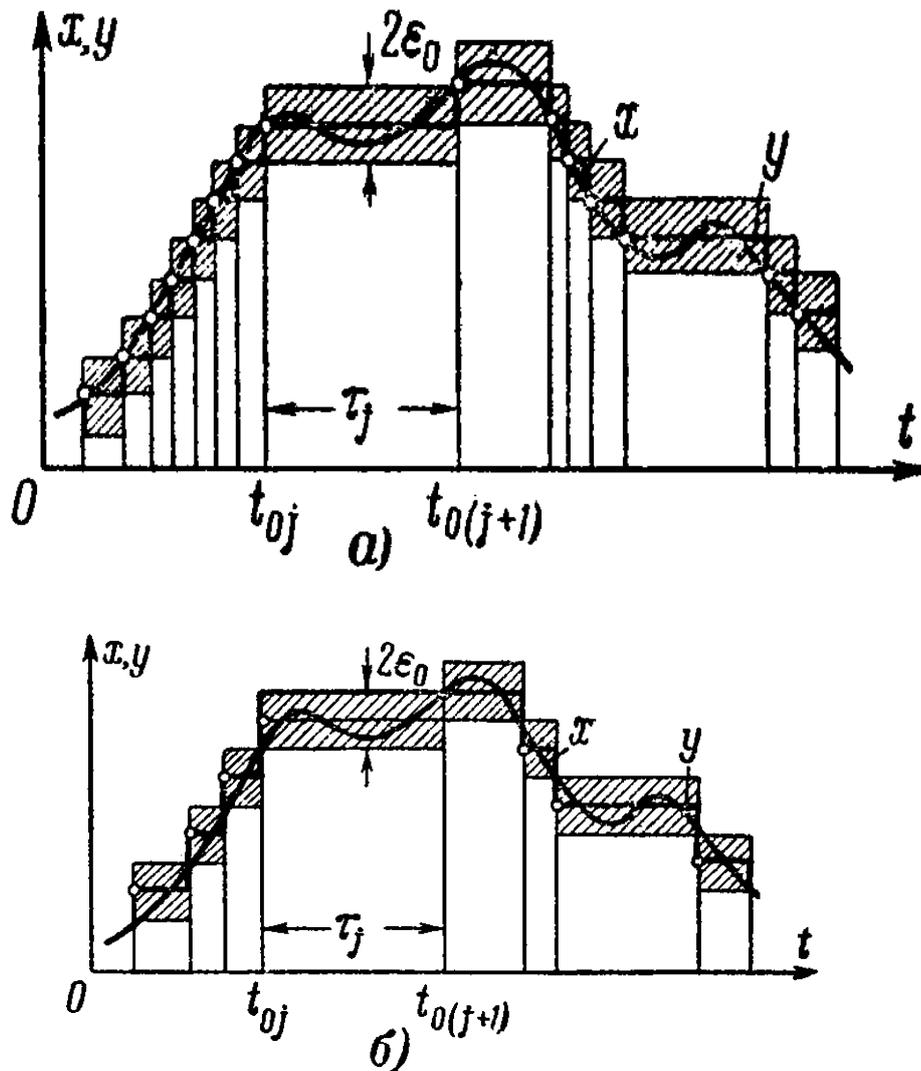


Рис. 6.14. Адаптивная дискретизация сигнала с воспроизводящими функциями нулевой степени: а – при $\lambda_{\text{макс}} = 1$; б – при $\lambda_{\text{макс}} = 2$

На рис. 6.14, а приведен пример дискретизации сообщения $x(t)$ в соответствии с этим алгоритмом.

Максимально возможное значение показателя качества приближения для данного алгоритма $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

3. Пусть воспроизводящая функция $y_j(t)$ на интервале дискретизации $[t_{0j}, t_{0(j+1)})$ имеет вид:

$$y_j(t) = x(t_{0j}) + \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \pm \varepsilon_0 \\ 0 \end{cases}.$$

В устройстве дискретизации на каждом из интервалов определяется разность $\Delta x_j(t) = x_j(t) - x(t_{0j})$, проверяется постоянство знака этой разности, записывается в ячейку памяти знак разности $\text{sign} \Delta x_{j1}(t)$ при равенстве в первый раз величин $\Delta x_j(t)$ и ε_0 , проводится сравнение $|\Delta x_j(t)|$ с величинами $0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0$.

Восстановление исходного сигнала производится (рис.6.14,б) по значениям функции $x(t_{0j})$ и знаку приращения.

Воспроизводящая функция имеет вид:

$$y_j(t) = x(t_{0j}) + \varepsilon, \quad (6.27)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} \pm \varepsilon_0 \text{ при } \text{sign} \Delta x_{j1}(t) = \pm 1, \\ 0 \text{ при } \text{sign} \Delta x_{j1}(t) = \text{var в зоне } x(t_{0j}) \pm \varepsilon_0. \end{cases} \quad (6.28)$$

Качество приближения для данного способа дискретизации характеризуется значением показателя $\lambda_{\text{макс}} \leq 2$.

Первая степень воспроизводящего многочлена

Рассмотрим несколько способов адаптивной дискретизации, различающихся качеством приближения, а следовательно, сложностью алгоритмов и устройств дискретизации и восстановления:

1. Как и в случае многочлена нулевой степени, уравнения воспроизводящих функций найдем, разлагая сообщение в начальных точках t_{0j} интервалов τ_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) в ряд Тейлора первого порядка:

$$y_j(t) = x(t_{0j}) + x'(t_{0j})t. \quad (6.29)$$

В устройстве дискретизации на каждом из интервалов генерируется приближающая прямая (6.29) и непрерывно вычисляется разность $\Delta x_j(t) = x_j(t) - y_j(t)$. Конец интервала дискретизации определяется равенством

$$|\Delta x_j(t)| = \varepsilon_0.$$

Восстановление сообщения на интервале τ_j производится с учетом значений сообщения и его первых производных в начальных точках интервалов в соответствии с формулой (6.29).

Качество приближения характеризуется значением показателя $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

На рис. 6.15 приведен пример, иллюстрирующий этот способ дискретизации.

Следует заметить, что нахождение воспроизводящей функции связано с дифференцированием сообщения. При наличии высокочастотных помех, наложенных на сообщение, эффективность алгоритмов дискретизации, включающих операции дифференцирования, снижается. В таких случаях может оказаться выгодным способ дискретизации, при котором исключена операция дифференцирования.

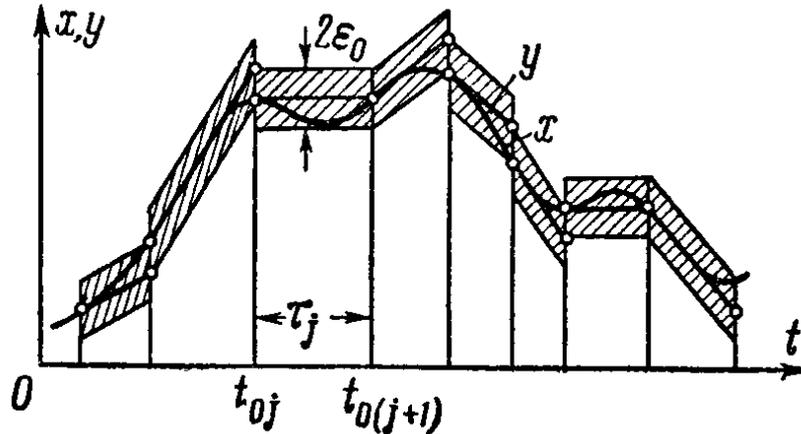


Рис. 6.15. Адаптивная дискретизация с воспроизводящими функциями первой степени

2. Интерполяционно-экстраполяционная адаптивная дискретизация.

В тех случаях, когда известен модуль максимального значения $(n + 1)$ -й производной M_{n+1} сообщения $x(t)$, воспроизводящую функцию $y(t)$ можно определить как интерполирующую по $(n + 1)$ отсчетным точкам на начальной части интервала τ_j .

На остальной части интервала воспроизводящая функция находится путем экстраполяции найденной. На этом участке определяется разность $|\Delta x_j(t)| = |x_j(t) - y_j(t)|$, которая сравнивается с допустимой погрешностью ε_0 .

Для многочлена степени $n = 1$ допустимая величина отрезка, на котором погрешность не превысит ε_0 в соответствии с (6.17)

$$\Delta_{T_1} \leq \sqrt{8\varepsilon_0/M_2}.$$

В устройстве дискретизации в начальной точке t_{0j} интервала τ_j и точке $t_{0j} + \Delta_{T_1}$ осуществляется отсчет значений сообщения. По этим данным находятся коэффициенты

$$a_j = x(t_{0j});$$

$$b_j = \frac{x(t_{0j} + \Delta_{T_1}) - x(t_{0j})}{\Delta_{T_1}}$$

Уравнения $y_j(t) = a_j + b_j t$.

Функция $y_j(t)$ экстраполируется на остальную часть интервала τ_j .

Описанный способ дискретизации иллюстрируется рис. 6.16.

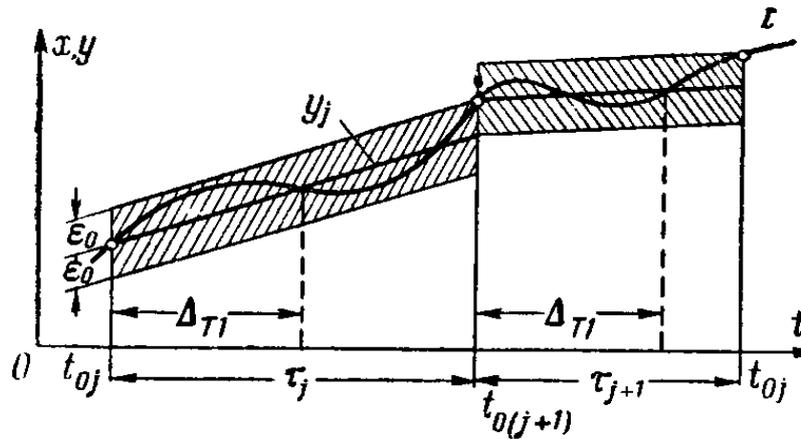


Рис. 6.16. Интерполяционно-экстраполяционная адаптивная дискретизация

Качество приближения характеризуется значением показателя $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

Повышение качества приближения сопряжено со значительным усложнением алгоритма дискретизации. В [5,6] рассматриваются алгоритмы с лучшим качеством приближения по сравнению с рассмотренным выше алгоритмом.

При равномерной дискретизации интервал между отсчетами является постоянной величиной, что существенно упрощает дискретизацию и восстановление сообщения. Адаптивная дискретизация эффективнее равномерной, но неравномерность отсчетов приводит к необходимости их датирования. Адаптивная дискретизация с кратными интервалами является в некоторой степени компромиссным решением.

Алгоритмы кратно-адаптивной дискретизации отличаются от алгоритмов адаптивной дискретизации с некратными интервалами тем, что конец интервала дискретизации длительностью τ_j фиксируется лишь в моменты $t_{0j} + i\Delta_{Tn}, i = 0, 1, 2 \dots$

Очевидно, что выполнение логических условий, указывающих на окончание интервала τ_j , может происходить в момент

$$t_{(i-1)j} < t < t_{ij}.$$

В качестве последней точки интервала τ_j в этом случае могут быть приняты точки $t_{(i-1)j}$ или t_{ij} . Выбор в качестве последней точки $t_{(i-1)j}$ интервала τ_j влечет за собой введение задержки сообщений в устройстве дискретизации на интервал τ_j и ограничивает длину следующего интервала дискретизации τ_{j+1} величиной Δ_{Tn} .

С целью упрощения алгоритма, а следовательно, и устройств дискретизации будем принимать за конечную точку интервала τ_j точку $t_{ij} = t_{0(j+1)}$ и восстановление проводить с учетом этого обстоятельства.

Рассмотрим принцип кратно-адаптивной дискретизации при воспроизводящих многочленах нулевой степени. В качестве исходного интервала возможен выбор интервала (6.12) или интервала (6.16).

В зависимости от качества приближения выделим два способа дискретизации с исходным интервалом (6.12):

1. Алгоритм дискретизации совпадает с применяемым во втором способе для $n = 0$, но отсчеты значений сообщения осуществляются лишь в моменты $t_{0j} + i\Delta_{T0}$. Воспроизводящая функция $y_j(t)$ на интервале τ_j :

при $i = 1$

$$y_j(t) = x(t_{0j}), \quad (6.30)$$

а при $i \geq 2$ (рис. 6.17, а)

$$y_j(t) = \begin{cases} x(t_{0j}), & t_{0j} \leq t \leq t_{0j+1} - \Delta_{T0}, \\ x(t_{0(j+1)}), & t_{0(j+1)} - \Delta_{T0} \leq t \leq t_{0(j+1)}. \end{cases} \quad (6.31)$$

Наилучшее приближение при данном способе дискретизации достигается при $\lambda_{\text{макс}} = 1$.

2. Дискретизация проводится как в третьем способе при $n = 0$, но отсчеты и выдача данных производятся лишь в моменты t_{ij} (рис. 6.17, б). Воспроизводящая функция при $i = 1$ ($\tau_j = \Delta_{T0}$) совпадает с (6.30), а при $i > 2$ имеет вид:

$$y_j(t) = \begin{cases} x(t_{0j}) + \varepsilon, & t_{0j} \leq t \leq t_{0(j+1)} - \Delta_{T0}, \\ x(t_{0(j+1)}), & t_{0(j+1)} - \Delta_{T0} \leq t \leq t_{0(j+1)}. \end{cases}$$

где $\varepsilon = \begin{cases} \pm \varepsilon_0 \\ 0 \end{cases}$ в соответствии с (6.28).

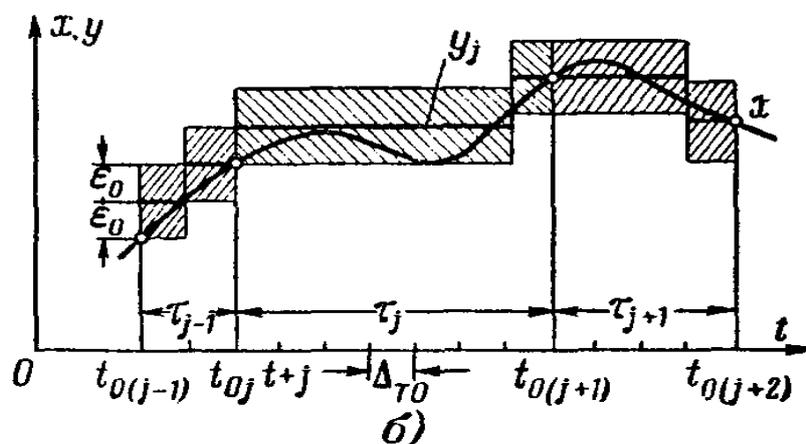
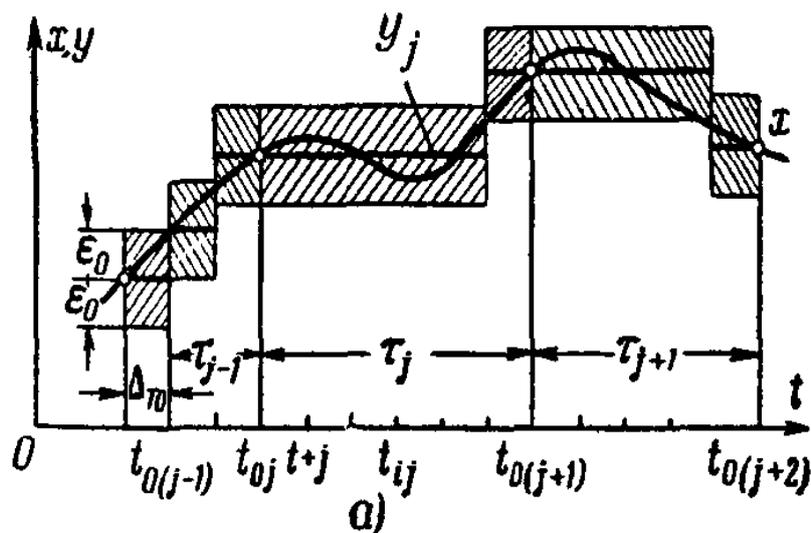


Рис. 6.17. Кратно-адаптивная дискретизация.
а — при $\lambda_{\text{макс}} = 1$; б — при $\lambda_{\text{макс}} = 2$.

Лучшему приближению для рассмотренного способа соответствует значение показателя $\lambda_{\text{макс}} = 2$.

При выборе в качестве исходного интервала величины Δ'_{T_0} алгоритмы дискретизации вторым и третьим способами при $n = 0$ совпадают, но несколько меняются алгоритмы восстановления.

В заключение отметим, что первый из приведенных алгоритмов кратно-адаптивной дискретизации сходен с разностно-дискретным преобразованием, названным в [5] $\lambda\Delta$ -преобразованием.

Контрольные вопросы

1. Какие основные методы дискретизации информационных комплексов?
2. Что такое квантование по уровню?
3. Какая среднеквадратичная ошибка квантования для равномерного квантования?
4. Представьте классификацию методов дискретизации.
5. Какие способы воспроизведения исходного сигнала вы знаете?
6. Для каких случаев используется теорема Котельникова для воспроизведения функции?
7. Какими свойствами должен обладать непрерывный сигнал для использования принципа дискретизации Железнова?
8. Каким должен быть допустимый шаг при использовании равномерной дискретизации?
9. Как выбрать интервал дискретизации для известной корреляционной функции, если задано максимально возможное значение среднеквадратичного отклонения?
10. Перечислите способы адаптивной дискретизации с различным качеством приближения.

Глава 7. ВОСПРИЯТИЕ, ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ

7.1. Основные формы, понятия и представление информации

Восприятием называется процесс целенаправленного извлечения и анализа информации о каком-либо объекте или процессе.

Простейшим видом восприятия является различение двух противоположных состояний «да» и «нет» (двухальтернативные ситуации).

Более сложным видом восприятия является измерение, т.е. определение значений некоторых наблюдаемых величин в статике или в их изменении во времени, или пространстве.

Далее следуют еще более сложные процессы поиска, анализа, оценки обстановки, предсказание событий и состояний, распознавание объектов, фактов, ситуаций, состояний, образов и понятий.

Систематизируя наиболее важные виды восприятия информации, их можно расположить в таком порядке:

- 1) первичное восприятие информации и измерение величин;
- 2) анализ;
- 3) обнаружение и распознавание;
- 4) прогнозирование ситуаций.

Эти процессы можно разделить на их составляющие. Так, например, в первичном восприятии можно выделить задачи поиска, локализации, избирания информации; анализ, охватывая процессы, явления, поля, вещества, может иметь характер дисперсионного, корреляционного, регрессионного, спектрального, анализа распределений и т. п.; к обнаружению и распознаванию относятся различение элементарных событий (контроль), распознавание состояний объектов (диагностика), проверка объектов, распознавание образов.

В различных способах восприятия есть много общих сторон. В частности, следует отметить единство методов обнаружения, измерения и распознавания, когда процедура в основном сводится к

установлению некоторых эталонов, получению внешней информации и к сравнению информации с эталоном, причем результат сравнения оценивается на основании какого-либо критерия. Вместе с тем в теории и практике восприятия получают применение разнообразные практические и теоретические приемы: аналитические, статистические, логические, эвристические и другие.

7.2. Операционная схема процедуры восприятия

Задача восприятия имеет две стороны. Первая состоит в нахождении параметров, содержащих информацию, и признаков состояния источника информации, т. е. в построении информационного портрета. Эта часть задачи решается на основании изучения свойств источника информации и установления связей информационных параметров с его состояниями. Вторая сторона задачи заключается в определении настоящего, прошлого и будущего состояния источника информации. Она решается рядом последовательных функциональных операций.

Первой операцией в большинстве случаев служит измерительное преобразование, цель которого состоит в представлении величин параметров в некоторой унифицированной форме, более удобной для дальнейшей обработки. Такой удобной формой является угловое или линейное перемещение α_x и время T_x между двумя импульсами, унифицированный электрический или пневматический сигнал сравнительно высокого уровня. Особенно удобно представление параметров в угловой и временной формах, которые позволяют отображать весьма большие величины с высокой точностью, что оказывается невозможным для сигналов интенсивности, всегда имеющих ограниченную амплитуду.

Вторая операция зависит от цели восприятия. Простейшее определение состояния производится логическим распознающим устройством, более глубокие свойства источника, например, статистические, выявляются анализатором, для предсказания

поведения источника используется экстраполятор, учитывающий результаты временного, статистического и других видов анализа.

Определение состояния не всегда можно или целесообразно производить за один шаг. Часто более экономичным и эффективным оказывается целенаправленное возбуждение источника информации по частям путем подачи на него стимулирующих (управляющих) воздействий и проведение последовательной серии экспериментов.

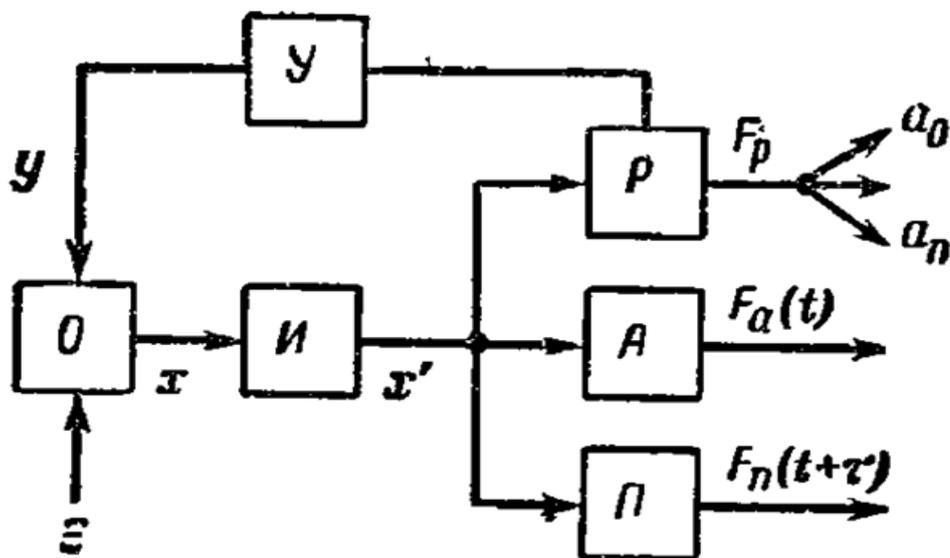


Рис. 7.1. Операционная схема процедуры восприятия

Указанные представлены на обобщенной схеме процедур восприятия (рис. 7.1), где через x обозначен вектор параметров источника информации (объекта восприятия O), через x' -вектор параметров, полученных в процессе измерительного преобразования, через y -вектор стимулирующих сигналов и через ε -вектор помех, И-измерительный, Р-распознающий, А-анализирующий, П-прогнозирующий и У-управляющие блоки. Выходным параметром устройства воспроизведения может явиться: отображение вектора состояний $F_p \equiv (a_0, \dots, a_n)$, обобщенная характеристика $F_a(t)$, полученная в процессе анализа, или обобщенная прогнозирующая характеристика $F_n(t + \tau)$, где $\tau > 0$ – время прогноза.

7.3. Обработка информации

В общем случае под обработкой информации понимают такой процесс преобразования информации, выраженной в знаке или сигнале, в результате которого содержание ее станет максимально подготовленным для реализации следующего этапа, которым может быть представление информации получателю – человеку для принятия решения или управляющее воздействие.

Часто используемый термин «переработка информации» представляет собой более широкое понятие. Переработка информации – логическое, аналитико-синтетическое или эвристическое преобразование информации человеком или некоторыми видами сложных информационно-логических систем, связанное с обобщением, выработкой суждений, умозаключений, понятий, образов и другими формами высшей нервной деятельности. Более узкое понятие обработки информации можно рассматривать как формализованную часть процесса познания, осуществляемого человеком, или процесса управления.

Обработка и переработка информации – более высокие ступени познания, чем простое восприятие и, тем более ощущение. Познание ограничено невозможностью иметь в нашем распоряжении огромную, собственно говоря, бесконечную массу данных об изучаемом объекте и необходимостью выбора из этого разнообразия каких-то существенных зависимостей. В отличие от других информационных процессов при обработке и переработке мы воспринимаем, истолковываем и познаем лишь кое-что из огромной сложности разнообразия объективной реальности, с помощью выбора подходящих вариантов, упрощений и абстракций совершается определенное ограничение этого разнообразия, выявляется общее и существенное, позволяющее нам или управляющему устройству принимать решение в каждой конкретной ситуации. Количество информации в процессе обработки, как правило, уменьшается, зато ценность и содержательность ее возрастает.

Большинство задач обработки может быть решено при помощи устройств, принципиальная структура которых показана, в виде функциональной схемы на рис. 7.2.

Приведенная схема устройства обработки представляет собой конечный автомат, осуществляющий последовательное преобразование входных сигналов x_i , из некоторого множества X (входной алфавит) в выходные сигналы y_i из множества Y (выходной алфавит) с использованием некоторого множества S внутренних состояний автомата [5]. Устройства обработки реализуются схемно в виде «жесткой структуры» или на вычислительных машинах с помощью программ, которые являются записями алгоритмов решения задач в некоторой специальной форме.

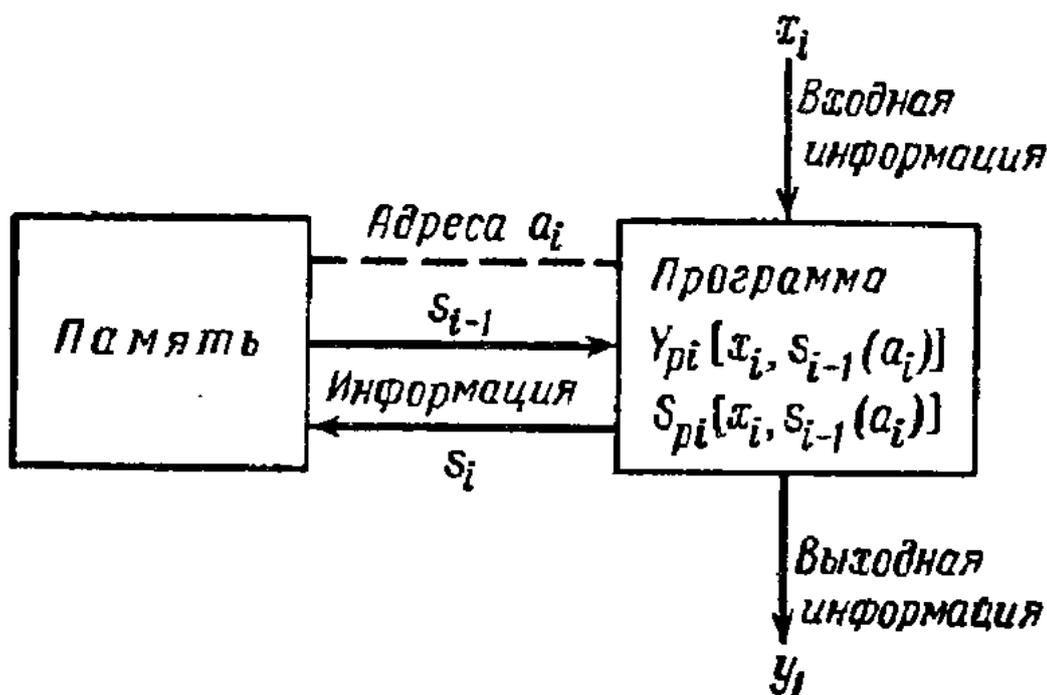


Рис. 7.2. Функциональная схема устройства обработки информации

На вход устройства обработки поступают последовательности массивов входных данных

$$x_i = \{a_i; p_i; x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \dots\} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Каждый массив x_i содержит:

1) адресную часть a_i , указывающую ячейку памяти, содержимое которой $S(a_i)$ необходимо для обработки x_i ;

2) номер программы p_i , который дает возможность определить, по какой из хранящихся в памяти программ должен обрабатываться входной массив x_i ;

3) множество основных элементов $x_i^{(k)}$, наиболее полно и точно характеризующих входную информацию в массиве x_i .

В результате обработки в самом общем случае получаются два новых массива:

массив выходных данных

$$y_i = Y_{p_i}[x_i, s_{i-1}(a_i)] \quad (7.2)$$

и новый массив в памяти

$$s_i(a_i) = S_{p_i}[x_i, s_{i-1}(a_i)] \quad (7.3)$$

Причем $s_i(a_i)$ — содержимое ячейки памяти a_i после обработки, $s_{i-1}(a_i)$ — то же перед обработкой i -го входного массива, $s_i(a_i)$ состоит в свою очередь из отдельных элементов

$$s(a_i) = \{s^{(0)}(a_i), s^{(1)}(a_i) \dots\}. \quad (7.4)$$

Массив выходных данных также содержит множество отдельных элементов результатов обработки:

$$y_i = \{y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)} \dots\}. \quad (7.5)$$

Приведенная схема может характеризовать функциональную структуру устройств обработки информации в различных сферах применения. Элементами входных и выходных массивов могут быть результаты измерений всевозможных параметров (или одного параметра, представленного в виде отсчетов, произведенных через определенные интервалы времени), отдельные реквизиты и показатели (в экономической информации), семантические множители и коды до-

кументов (в документалистике). Количество отдельных элементов определяется конкретной задачей и возможностями применяемых технических средств.

В качестве функции выходов Y_{pi} и функции переходов S_{pi} могут выступать различные математические и логические функции и операторы: функциональные преобразователи, операторы идентификации, упорядочения, сортировки и др. В общем случае схема представляет собой рекуррентную структуру обработки данных: результат обработки i -го массива зависит от результатов обработки предшествующего $(i-1)$ -го массива.

Если в системе содержимое памяти не меняется в результате обработки и входные массивы обрабатываются независимо друг от друга - это соответствует отсутствию операций, описываемых выражением (7.3). В других частных случаях, если имеет место только накопление в памяти входных информационных массивов или выдача накопленных выходных массивов соответственно, отсутствуют операции, описываемые выражениями (7.2) или (7.1). Примерами могут служить системы, в которых используются статистические методы обработки результатов экспериментов, информационно-поисковые или информационно-логистические системы.

Количество отдельных программ (подпрограмм) p_i может быть различным в зависимости от конкретной области применения и возможностей используемых устройств обработки.

7.4. Представление информации

Под представлением информации в общем случае понимается преобразование ее в форму, удобную для восприятия и переработки человеком. Для этой цели информация отображается в виде наглядных и легко воспринимаемых сигналов и символов, формируемых с учетом психофизических и психофизиологических возможностей человека.

Известно [Л.5], что человек, воспринимающий сигналы с помощью своих органов чувств, около 80% всей информации получает через зрительный канал. Поэтому в процессе передачи информации

человеку в системах контроля основную роль играет ее визуальное представление. Слуховой и осязательный каналы используются только как вспомогательные для предупредительной и аварийной сигнализации.

7.5. Основные формы элементарного представления информации

В настоящее время используют три способа представления оперативной информации о состоянии объектов контроля и управления, а именно сигнализация, индикация и регистрация.

Под сигнализацией понимается сообщение оператору о факте перехода величины из одной области в другую, причем этот переход выясняется в результате выполнения операций контроля. При сигнализации имеется возможность использовать наряду со зрительным слуховой и осязательный каналы, характеризующиеся меньшей пороговой чувствительностью к изменению сигнала. При визуальной сигнализации основным средством представления является сигнальная лампа, осуществляющая дискретное световое воздействие на зрительные анализаторы человека. Значительно реже применяются электромеханические и механические элементы: бленкеры, флажки, семафоры, клапаны, затворы. Для звуковой (акустической) сигнализации используют сирену, звонок или голос, предварительно записанный и воспроизводимый в нужный момент. Через осязательный (тактильный) канал сигналы передаются с помощью механических и вибрационных воздействий.

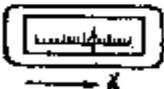
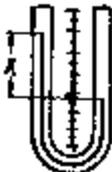
Однако наряду с результатом контроля оператору в большинстве случаев для управления объектом желательно располагать также результатом измерения текущих значений контролируемых величин. Представление результатов измерения называется индикацией. Эта форма представления воздействует главным образом на зрительный канал.

Индикация может быть осуществлена как в аналоговой, так и в цифровой форме. Аналоговые индикаторы представляют информацию в виде изменения некоторых физических величин, например угловых и линейных перемещений, расстояния между двумя точками, интен-

сивности свечения, звука, механических воздействий и т. д. К этому классу относятся всякого рода указательные шкальные приборы, а также индикаторы с яркостной, акустической и прочими шкалами. Наиболее характерные современные способы и средства аналоговой индикации иллюстрируются табл. 7.1.

Таблица 7.1

Технические средства аналоговой индикации

Метод индикации	Общий вид индикатора	Отсчетный инструмент	Назначение
Угловое перемещение механического или светового указателя		Шкала изменения величины	Индикация величины с ошибкой, сравнимой с одним делением (квантом) шкалы
Линейное перемещение механического, жидкостного, светового или электроннолучевого указателя		То же	То же
Дифференциальное перемещение жидкостного столба		» »	Индикация разности между измеряемой и известной величинам с ошибкой, сравнимой с делением шкалы
Изменение площади свечения		Поверхность свечения	Приближенная индикация величины
Пространственное перемещение символического указателя		Угол и расстояние относительно координатных плоскостей	Индикация положения
Двумерная индикация на экране электроннолучевой трубки		Шкалы изменения величин X и их размещения на шкале N экрана	Приближенная индикация совокупности величин

Цифровые индикаторы представляют значение величины символами. Их можно классифицировать по способу воспроизведения цифр, основанию системы счисления, а также по функциональным и конструктивным признакам [Л.5]. Основные способы воспроизведения цифр (рис. 7.3, *а, б*) и фигурный (рис. 7.3, *в, г*). По первому способу знак синтезируется из отдельных точек или отрезков, различные сочетания которых определяют конфигурацию символа. Точечный способ воспроизведения (рис. 7.3, *а*) реализуется различными цифросинтезирующими устройствами с лампами накаливания, а также электроннолучевыми индикаторами, создающими точечные растры с модуляцией яркости точек. Фрагментный синтез знаков (рис. 7.3, *б*) из отдельных отрезков (сегментов) осуществляется главным образом электролюминесцентными индикаторами с 7 – 8 сегментами при воспроизведении цифр и 10 – 14 при воспроизведении букв и специальных знаков. Фрагментный синтез реализуется и электроннолучевыми индикаторами путем формирования по заданной программе или с помощью кривых Лиссажу определенной траектории луча, включающей контуры всех представляемых знаков, и высвечивания на экране отдельных ее участков.

Фигурный способ воспроизведения цифр предполагает использование заранее подготовленных фигур (рис. 7.3, *в*) либо вычерчивание символа в момент его отображения на экране (рис. 7.3, *г*).

Третья форма представления информации – регистрация предназначается для записи в некоторой символической форме отдельных факторов, величин и явлений с целью их документирования и накопления на некотором материальном носителе. Регистрация в большинстве случаев сопровождает процесс индикации и по окончании его позволяет в нужный момент представить накопленную информацию в форме графиков, кодов, физических состояний.

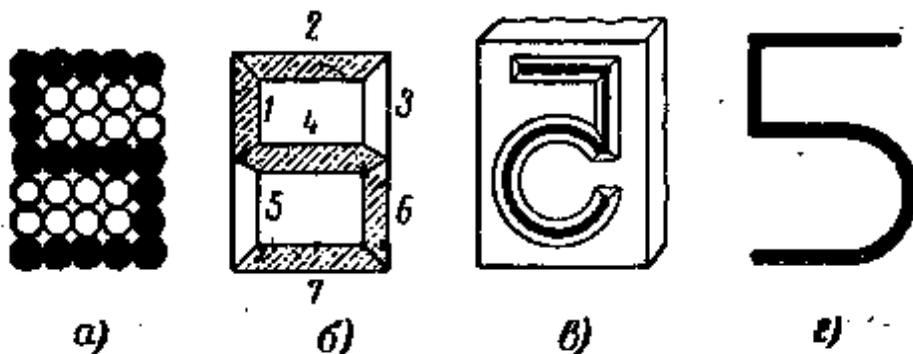


Рис. 7.4. Способы воспроизведения цифр: а – мозаичный точечный; б – мозаичный фрагментный; в – фигурный с подготовленными символами; г – фигурный с вычерчиваемыми символами

Символы, применяемые при регистрации, разделяются на две основные группы-аналоговые и цифровые; аналоговые символы можно разделить на геометрические и физические.

Геометрические символы отображают значение какого-либо фактора геометрическим положением точки или условного знака, расстоянием между точками, длиной отрезка и т.д. Подобная форма регистрации широко используется в различных самопишущих приборах (вольтметрах, амперметрах, гальванометрах, автоматических мостах, потенциометрах и др.), записывающих в процессе индикации непрерывный или дискретный график изменения параметра X во времени T или пространстве N . В качестве материала носителя в этих случаях, как правило, используется обычная бумага, а регистрирующими органами служат держатели с графитами, чернильные перья, печатающие и копирующие стержни.

Наиболее многочисленную и интересную группу составляют методы регистрации изменением состояния вещества носителя. В этих случаях регистрация может быть осуществлена как геометрическими, так и физическими символами. Последние отображают значение параметров физическим состоянием носителя, в роли которого выступают электротермическая, электрохимическая и светочувствительная бумага, а также ферромагнитные диэлектрические люминесцирующие слои, наносимые на некоторую основу. При этом механи-

ческие регистрирующие органы уступают место электрическим, магнитным, электронным и оптическим.

Регистрация физическими символами является одним из основных средств для ввода и хранения информации в оперативных и долговременных запоминающих устройствах ЦВМ. Для этих целей наибольшее распространение получил метод электромагнитной регистрации, связанный с изменением величины магнитной индукции участков или элементов ферромагнитного носителя. Регистрирующим органом в этом случае является электромагнитная записывающая головка, создающая намагничивающий или размагничивающий поток, пропорциональный величине регистрируемого сигнала. Метод характеризуется высокой скоростью, точностью, стабильностью и относительной простотой, однако он не дает возможности непосредственно представлять результаты записей человеку.

Для визуального представления информации физическими символами используют эффекты, связанные либо с интенсивностью окраски поверхности носителя (топография), либо со степенью почернения светочувствительного материала (фотография), либо с интенсивностью свечения люминесцентного вещества (люминография). При этом наряду с ранее отмеченными формами регистрации возможно комплексное представление данных в виде некоторых наглядных образов.

Особые принципы лежат в основе устройств цифровой регистрации, записывающих и представляющих информацию в виде цифр, букв, условных знаков и их комбинаций. Общеизвестным техническим средством такой регистрации являются электромеханические печатающие устройства с цифровыми штангами, итифтами, барабанами и колесами [Л.5]. Последние применяются, например, при автоматической регистрации в многоточечных мостах и потенциометрах. Однако в целях повышения быстродействия применяют и немеханические, бесконтактные устройства цифрочечатания, использующие профилированные в форме регистрируемого знака электрические и магнитные поля, световые, электронные и тепловые потоки, создаю-

щие на соответствующем символическое изображение, видимое или скрытое, подлежащее последующему проявлению. Так, например, феррографический способ [Л.5] основан на воздействии на носитель магнитного или электромагнитного поля заданной конфигурации. В результате на носителе создается скрытое магнитное изображение знака, проявляемое порошковыми составами из ферромагнитных материалов. В соответствии с физической природой процесса различают электростатические, магнитотрафические, ксерографические, фотографические, электрохимические, электротермические, электронные и электроискровые методы цифрорпечатания.

Рассмотренные формы элементарного представления контролируемых величин в процессах сигнализации, индикации и регистрации предназначены для отображения текущих значений и состояний контролируемых величин. Однако в условиях управления сложными технологическими процессами и большими системами перед одним оператором может концентрироваться огромное количество различных приборов, представляющих в той или иной форме отдельные величины и состояния, характеризующие объект. В результате создается громоздкая и состояния объекта, трудно воспринимаемая и перерабатываемая человеком, особенно если для восприятия и переработки отводится ограниченный интервал времени. Облегчение деятельности оператора при комплексном представлении требует организации так называемых информационных моделей, под которыми понимается [Л.5] организованная некоторым образом совокупность средств отображения текущих и априорных данных о состоянии объекта и внешней среды. Наблюдая за информационной моделью, оператор имеет возможность своевременно диагностировать и оценивать текущую ситуацию, принимать решения об лежащих воздействиях, прогнозировать поведение объекта.

Эффективная информационная модель должна быть компактной, объединяющей отдельные средства сигнализации, индикации и регистрации в единую информационную систему, представляющую в удобной для оператора форме конкретную обстановку с существен-

ными ее деталями. К последним относятся: многообразие существующих взаимосвязей между контролируемыми величинами, отношение сигналов к объекту и целевым функциям, значимостью параметров и их связей в решении той или иной оперативной задачи. Необходимая полнота представления данных о состоянии объекта должна обязательно согласоваться с психофизиологическими возможностями оператора [Л.5] по восприятию и переработке информации.

Контрольные вопросы

1. Виды восприятия информации.
2. Операционная схема процедуры восприятия.
3. Понятия обработки и переработки информации.
4. Приведите функциональную схему устройства обработки информации.
5. Понятие представления информации.
6. Способы представления оперативной информации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии подробно рассмотрены общая система передачи информации, расчет мощности сигнала, кодирование и модуляция носителей информации, помехоустойчивость моделированных сигналов, их дискретизация по уровню и времени, временная и спектральная формы описания сигнала, обобщенное понятие фильтрации и т. д.

Издание позволит обучающимся ознакомиться со средствами, служащими для восприятия, подготовки, передачи, переработки, хранения и представления измерительной информации. Система представления информации может быть в виде информационной модели, осуществляющей прямую связь человека-оператора с объектом управления, либо в виде другой системы представления информации.

Автор надеется, что учебное пособие окажется полезным для студентов и инженерно-технических работников различных отраслей промышленности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Порфирьев Л. Ф. Основы теории преобразования сигналов в оптико-электронных системах. – СПб. : Лань, 2013. – 388 с.
2. Авдеева Д. К. Преобразование измерительных сигналов. – Томск : Изд-во Томск. политехн. ун-т, 2011. – 128 с.
3. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Преобразование измерительных сигналов» / Владим. гос. ун-т ; сост. В. П. Легаев. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2009. – 87 с.
4. Зиновьев А. Л., Филиппов Л. И. Введение в теорию сигналов и цепей. – М. : Высш. шк., 1986. – 252 с.
5. Темников Ф. Е., Афонин В. А., Дмитриев В. И. Теоретические основы информационной техники. – М. : Энергия, 1971. – 424 с.
6. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях : в 2 т. : пер. с фр. – М. : Мир, 1983. – Т. 1. – 312 с.
7. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях : в 2 т. : пер. с фр. – М. : Мир, 1983. – Т. 2. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ШУМАХ КАК О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ	4
Контрольные вопросы	7
Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ.....	8
2.1. Преобразование Фурье периодических функций.....	8
2.2. Преобразование Фурье непериодических функций.....	10
2.3. Преобразование Фурье физических функций	11
2.4. Физический смысл преобразования Фурье.....	13
2.5. Условия существования преобразования Фурье	14
2.6. Некоторые свойства преобразования Фурье	15
2.7. Несколько функций и их фурье-образы	22
2.8. Частный случай вещественных сигналов.....	22
2.9. Отрицательные частоты	25
2.10. Почему выбрано преобразование Фурье.....	26
Контрольные вопросы	27
Глава 3. МОЩНОСТЬ.....	28
3.1. Временная мощность.....	28
3.2. Частотная мощность. Спектральная плотность мощности. Спектр мощности	32
3.3. Общее определение спектральной мощности	35
3.4. Общие понятия и определения. Кодирование информации. Общая схема системы передачи информации кодирования информации	36
3.5. Кодирование как процесс выражения информации в цифровом виде.....	39
3.6. Технические средства представления информации в цифровой форме. Разновидности преобразователей.....	44
Контрольные вопросы	47

Глава 4. МОДУЛЯЦИЯ.....	48
4.1. Модуляция носителей информации.....	48
4.2. Виды носителей и сигналов.....	48
4.3. Модуляция и кодирование.....	52
4.4. Детерминированные и случайные сигналы.....	53
4.5. Временная и спектральная формы описания сигнала.....	54
4.6. Спектры сигналов с носителем в виде постоянного состояния.....	56
4.7. Спектры сигналов с гармоническим носителем.....	58
4.8. Спектры сигналов с импульсным носителем.....	62
4.9. Спектры случайных сигналов.....	70
4.10. Помехоустойчивость модулированных сигналов.....	74
Контрольные вопросы.....	80
 Глава 5. ФИЛЬТРАЦИЯ.....	 81
5.1. Временная фильтрация.....	81
5.2. Частотная фильтрация («линейная фильтрация» в смысле Блан – Лапьера).....	83
5.3. Физически реализуемые линейные фильтры частоты.....	85
5.4. Идеальный фильтр.....	86
5.5. Фильтры с линейным сдвигом фаз.....	87
5.6. Узкополосные фильтры.....	87
Контрольные вопросы.....	89
 Глава 6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ИНФОРМАЦИИ.....	 90
6.1. Квантование по уровню.....	90
6.2. Дискретизация по времени и восстановление непрерывных функций.....	94
6.3. Теорема Котельникова.....	101
6.4. Принцип дискретизации Железнова.....	109
6.5. Выбор периода дискретизации по критерию наибольшего отклонения.....	112
6.6. Выбор периода дискретизации по критерию среднеквадратичного отклонения.....	118
6.7. Адаптивная дискретизация.....	121
Контрольные вопросы.....	131

Глава 7. ВОСПРИЯТИЕ, ОБРАБОТКА И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ	132
7.1. Основные формы, понятия и представление информации	132
7.2. Операционная схема процедуры восприятия	133
7.3. Обработка информации.....	135
7.4. Представление информации	138
7.5. Основные формы элементарного представления и информации	139
Контрольные вопросы	145
 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	 146
 БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	 147

Учебное издание

ЛЕГАЕВ Владимир Павлович

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

Издается в авторской редакции

Учебное пособие

Подписано в печать 14.11.19.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,84. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.