Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

В.Е. КУПРИЯНОВ Э.Ф. КАСАТКИНА

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

В двух частях

Часть 2

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ. ПОГРЕШНОСТИ И ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Владимир 2005

УДК 621.317
ББК 30.10
К92

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор
Владимирского Государственного Университета,
С.Г. Драгомиров

Кандидат технических наук, доцент
исполнительный директор Владимирского Регионального Отделения
Академии Проблем Качества,
В.Н. Романов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Куприянов В.Е. Общая теория измерений: в 2 ч. Ч. 2. Методы измерений. Математические модели. Погрешности и обработка результатов измерений: учеб. пособие / В.Е. Куприянов, Э.Ф. Касаткина; Владим. гос. ун-т; Владимир : Ред.издат. комплекс ВлГУ, 2005. – 148 с.ISBN 5-89368-558-X.

В 1-й части рассмотрены основные термины и определения общей теории измерений, основное уравнение измерения, типы шкал измерений, общие понятия систем физических величин, основные системы физических величин и их единиц, эталонная база Российской федерации, разновидности и правила оформления поверочных схем, примеры решения задач по получению производных единиц измерения системы СИ и по результатам измерения физических величин в различных системах единиц.

Во 2-й части рассмотрены методы измерений, математические модели измеряемых величин и средств измерений, основные погрешности измерений, математическая обработка результатов измерений, практическое решение задач по нахождению погрешностей. Материал базируется на действующей нормативно-технической документации и рекомендациях международных организаций в области метрологии.

Гл. 1, 2 написаны к.т.н., доцентом В.Е. Куприяновым , гл. 3, 4 написаны к.т.н., доцентом Касаткиной Э.Ф.

Предназначено для студентов специальностей 072000 «Стандартизация и сертификация», 340100 «Управление качеством» и 190800 «Метрология и метрологическое обеспечение». Может быть полезно студентам других специальностей, а также инженерно-техническим работникам специальностей, связанных с измерениями.

Ил. 41. Табл. 12. Библиогр.: 14 назв. УДК 621.317
ББК 30.10

ISBN 5-89368-558-X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-технический прогресс, происходящий в настоящее время во всех областях науки и техники, во многом базируется на результатах измерений различных физических и нефизических величин, которым предшествует огромная, кропотливая предварительная работа людей различных специальностей. Это объясняется тем, что без опережающего развития теории и практики измерений как единственного способа получения количественной информации о величинах, характеризующих те или иные явления и процессы, невозможен прогресс практически во всех отраслях науки и техники.

С помощью результатов измерений, как результата процесса познания, человечество познаёт окружающий мир и на основании их стремится создать более благоприятные условия своей жизни. В результате этого человечество несёт значительные людские, материальные, финансовые, временные затраты на планирование, постановку, проведение и обработку результатов измерений. Так, на основании данных приведенных в [1], примерно 15% общественного труда затрачивается на проведение измерений, при этом от 3 до 6 % валового национального продукта передовых индустриальных стран тратится на измерения и связанные с ними операции. Поэтому важность и значимость измерений трудно как переоценить, так и недооценить.

Известно, что важнейшей задачей, возникающей в процессе измерений, является обеспечение единства измерений и достоверности их результатов. Сотрудничество Российской Федерации с зарубежными странами требует взаимного доверия к измерительной информации, полученной с помощью общепринятых способов, методов и средств измерений. При этом первостепенное значение имеет высокая точность и достоверность результатов измерений, единообразие принципов и способов оценки точности этих результатов, а также условий проведения измерений.

Накопленный к настоящему времени человечеством опыт проведения всех этапов проведения измерений позволил выработать ему для теории и практики измерений специальную терминологию; сформулировать основные понятия теории измерений; разработать различные системы физических величин и на их основе выработать единую международную систему единиц (систему СИ); сформулировать постулаты свойств физических величин; классифицировать и описать существующие к настоящему времени шкалы измерений, эталоны единиц физических величин, методы и средства измерений; разработать общие методики по обработке результатов измерений; общие методы моделирования измеряемых величин, измерительных сигналов и средств измерений, а также ряд других положений, которые легли в основу изучения учебной дисциплины «Общая теория измерений» значительного количества учебных заведений нашей страны.

Опыт проведения лекционных, практических и лабораторных занятий по ряду технических и специальных измерительных учебных дисциплин, в том числе и по дисциплине «Общая теория измерений», позволил авторам систематизировать и подготовить материал учебного пособия в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта для специальностей 072000 «Стандартизация и сертификация» и 190800 «Метрология и метрологическое обеспечение», утверждённого в 1995 году. Учебное пособие состоит из двух частей и предназначено для студентов специальностей 072000 «Стандартизация и сертификация», 340100 «Управление качеством» и 190800 «Метрология и метрологическое обеспечение». Оно может быть полезно студентам других специальностей, а также инженерно-техническим работникам специальностей, связанных с измерениями физических величин.

Авторы весьма признательны профессору *Драгомирову С.Г. и* доценту *Романову В. Н*, сделавшим много ценных предложений и замечаний, которые были учтены при подготовке книги к изданию.

1. ПОНЯТИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ИЗМЕРЕНИЙ, МЕТОДОВ И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Понятие и классификация видов измерений

В связи с тем, что измерения, являясь процессом нахождения значения физической величины опытным путём с помощью специальных технических средств, имеют различные формы проявления, а это, естественно, объясняется значительным множеством необходимых для измерения физических и нефизических величин, различным характером их проявления во времени, различными точностными требованиями и т.д., то их классификация производится по различным признакам. При этом следует иметь ввиду, что именно эти признаки и позволяют *классифицировать* ***все измерения*** *на* ***виды***, перечень которых постоянно растёт.

К настоящему времени можно выделить следующие ***признаки, по которым классифицируются измерения на виды и соответствующие им виды измерений:***

по числу измерений **-** *однократные*, это измерения физической величины (ФВ) выполняемые только один раз, и *многократные*, это измерения одной и той же ФВ выполняемые путём проведения ряда однократных измерений;

по условиям измерений **–** *равноточные*, это многократные измерения ФВ выполненные одним и тем же экспериментатором наблюдений с одинаковой тщательностью, в одних и тех же условиях, при помощи одного и того же средства измерения, и *неравноточные*, это многократные измерения ФВ выполненные при нарушении, хотя бы одного из условий равноточного измерения;

по точности оценки погрешности измерения **–** *высшей точности (прецизионные)*, это высокоточные измерения, связанные с созданием эталонов и измерением физических констант; *технические измерения*, это измерения в которых погрешность результата измерения определяется характеристиками средств измерений, регламентированными условиями измерений, и оценивается до проведения измерений; *лабораторные (контрольно-поверочные)*, это измерения, в которых погрешность не должна превышать некоторых заранее заданных значений (данные измерения в свою очередь, в зависимости от степени точности оценивания погрешности результата измерения подразделяются на *лабораторные (контрольно-поверочные) с точным оцениванием погрешности* и на *лабораторные (контрольно-поверочные) с приближённым оцениванием погрешности*;

по характеру изменения измеряемой величины во времени – *статические,* это измерения при которых значение ФВ считается неизменным на протяжении всего времени использования средства измерения в измерительном процессе; *динамические,* это измерения, в которых выходной сигнал средства измерения изменяется во времени по определённой функциональной зависимости, в соответствии с законом изменения во времени измеряемой величины;

по способу представления результатов измерений – *абсолютные,* это измерения в которых результат измерения представляется непосредственно в единицах измеряемой ФВ; *относительные* – это измерения, в которых результат ФВ представляется в относительной безразмерной единице (например, во внесистемной единице – децибел); *допусковые* - это измерения, в которых результат измерения определяют не численным значением измеряемой ФВ (контролируемого параметра), а путём выяснения, выходит ли эта ФВ (этот параметр) за предельные (допустимые) значения (параметры) или находится между двумя этими допустимыми значениями (параметрами);

по способу связи с объектом измерения – *контактные,* это измерения в которых объект и средство измерения находятся в непосредственном контакте друг с другом через твёрдое материальное вещество (например, через металл); *бесконтактные* - в которых измерительный сигнал между объектом и средством измерения проходит через газообразную или жидкую среду (например, через атмосферу и воду).

по способу преобразования измеряемой величины и форме представления результата измерения – *аналоговые (непрерывные),* это измерения, в которых средство измерения производит непрерывное преобразование измеряемой величины, результатом измерения является перемещение указателя средства измерения относительно шкалы, а заключение о численном значении измеряемой величины принимает оператор (наблюдатель), отмечая положение указателя относительно отметок шкалы средства измерения; *цифровые (дискретные)* - это измерения, при которых производится сравнение измеряемой ФВ с дискретным рядом образцовых значений этой ФВ, воспроизводимых в средстве измерения автоматически.

Однако наибольшее распространение в метрологии получила классификация измерений на виды *по такому признаку, как* ***способ получения результата измерения.*** Согласно этого признака, все измерения делятся на *прямые* и *косвенные*. Разновидностями последних в свою очередь являются *совместные* и *совокупные измерения.*

Прямым называется измерение, когда искомое значение физической величины находится непосредственно из опытных данных. Следует отметить, что часто под прямыми измерениями понимаются такие измерения, при которых не производится промежуточных преобразований. Это, например: измерение напряжения и силы тока известными электроизмерительными приборами — вольтметрами и амперметрами; измерение массы тела весами с помощью набора гирь; измерение температуры с помощью термометра и т.д. Математически прямые измерения можно охарактеризовать элементарной формулой:

$$A = x, \tag{1.1}$$

где x — значение величины, найденное путем ее измерения и называемое *результатам измерения.*

Косвенным называется измерение, при котором искомое значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям. Косвенные измерения можно охарактеризовать следующей формулой (уравнением измерения):

$$A = f(x_1, x_2, \dots, x_m), \tag{1.2}$$

где $x_1, x_2, \dots, x_m$ — результаты прямых измерений величин, связанные функциональной зависимостью с искомым значением измеряемой величины A.

Примерами косвенных измерений могут служить следующие измерения: измерение активного сопротивления с помощью амперметра и вольтметра (путём измерения силы тока протекающего через сопротивление и падения напряжения на нём); измерение массы жидкости в больших ёмкостях (путём измерения уровня и плотности жидкости); измерение плотности цилиндрического бруска (путём измерения его геометрических размеров и массы); определение резонансной частоты колебательного контура по результатам прямых измерений емкости и индуктивности контура и т. д.

К косвенным измерениям относятся те измерения, при которых расчет искомой величины осуществляют вручную или автоматически, но после получения результатов прямых измерений. При этом может быть учтена отдельно погрешность расчета значений.

По виду функциональной зависимости f косвенные измерения делят на линейные и нелинейные. Для *линейных косвенных измерений* математический аппарат статистической обработки полученных результатов разработан детально. *Нелинейные косвенные измерения* отличаются тем, что результаты измерений аргументов подвергаются функциональным преобразованиям.

Совокупными называются проводимые одновременно измерения нескольких *одноименных* величин, при которых их значения находят решением системы уравнений, получаемых при прямых или косвенных измерениях различных сочетаний этих величин.

Например, проведя измерение сопротивлений R_{ab} , R_{ac} , R_{bc} между вершинами соединения типа «треугольник», в котором соединены сопротивления R_1 , R_2 , R_3 (см. Рис.1.1) и, решая систему уравнений типа (1.2) в виде (1.3) можно определить искомые значения сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 методом совокупных измерений:

$$R_{ab} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \;, R_{ac} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \;, R_{bc} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad (1.3)$$

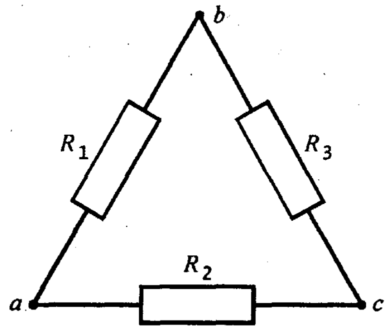


Рис. 1.1. Соединение резисторов типа «треугольник»

Совместными называют проводимые одновременно измерения двух или нескольких *неодноименных* величин для установления зависимости между ними. Как видно из приведенных определений, совокупные и совместные измерения весьма близки друг к другу. В обоих случаях искомые значения находят в результате решения системы уравнений, коэффициенты в которых получены путем прямых измерений. Отличие состоит в том, что при совокупных измерениях одновременно определяют несколько одноименных величин, а при совместных — разноименных.

Наиболее известный пример *совместных измерений* — определение зависимости сопротивления резистора от температуры:

$$R_t = R_{20}\left[1 + a\left(t - 20\right) + b\left(t - 20\right)^2\right], \qquad (1.4)$$

где R_{20} — сопротивление резистора при t = 20° С; α, β — температурные коэффициенты.

Для определения величин R_{20} , α и β вначале измеряют сопротивление R_t резистора при, например, трех различных значениях температуры (t_1, t_2, t_3), а затем составляют систему из трех уравнений, по которой находят параметры R_{20}, α и β:

$$R_{t_1} = R_{20}\left[1 + a\left(t_1 - 20\right) + b\left(t_1 - 20\right)^2\right],$$
$$R_{t_2} = R_{20}\left[1 + a\left(t_2 - 20\right) + b\left(t_2 - 20\right)^2\right], \qquad (1.5)$$
$$R_{t_3} = R_{20}\left[1 + a\left(t_3 - 20\right) + b\left(t_3 - 20\right)^2\right],$$

Косвенные, совместные и совокупные измерения объединяются одним принципиально важным общим свойством: их результаты рассчитываются по известным функциональным зависимостям между измеряемыми величинами и величинами, определяемым путем прямых измерений. Различие между этими видами измерений заключается только в виде функциональной зависимости, используемой при расчетах. При косвенных измерениях эта функциональная зависимость выражается одним уравнением в явном виде (1.3), а при совместных и совокупных — системой неявных уравнений, например системой уравнений(1.5).

Исходя из того, что косвенные, совокупные и совместные виды измерений классифицируемые по признаку – способ получения результата измерения, могут иметь разное соотношение между числом неизвестных параметров (m), входящих в уравнение связи и установленных на основе прямого или косвенного измерения, и числом уравнений (n), которые используются при этом виде измерений, то при классификации измерений по видам применяют ещё один признак, который называется: ***по степени достаточности измерений.*** В соответствии с данным признаком косвенные, совокупные и совместные виды измерения подразделяются на *необходимые (неизбыточные),* это измерения, в которых число «m» неизвестных параметров уравнения связи равно числу этих уравнений «n» т.е. $m = n$, и *избыточные,* в которых число «m» неизвестных параметров уравнения связи меньше числа этих уравнений «n» , т.е. $m < n$.

1.2. Понятие и классификация методов измерений

1.2.1. Понятие метода и принципа измерения

В подразделе 1.1 первой части данного учебного пособия было уже приведено достаточно общее определение ***метода измерений,*** под которым понимают *совокупность приёмов использования принципов и средств измерений.* Однако более полным является следующее определение: ***метод измерения** — это прием или совокупность приемов сравнения измеряемой ФВ с ее единицей в соответствии с реализованным принципом измерения.* При этом необходимо помнить, что ***принцип измерений*** это *совокупность физических принципов, на которых основаны измерения.* Фактически принцип измерения предусматривает использование какого-либо физического явления или эффекта, положенного в основу измерения значения искомой физической величины.

Рассмотрим, например, эффект Холла, положенный в основу измерения скорости вращения (частоты вращения) различных вращающихся механизмов и нашедший в настоящее время широкое применение при технической реализации средств измерения частоты вращения газораспределительного вала двигателей внутреннего сгорания современных автомобилей.

Если взять пластину, изготовленную из полупроводника типа «*n*», (т. е. с электронной проводимостью) и к граням *a* и *b* приложить постоянное напряжение, то в цепи за счет движения свободных электронов полупроводника возникнет ток *I* (см. рис.1.2, а).

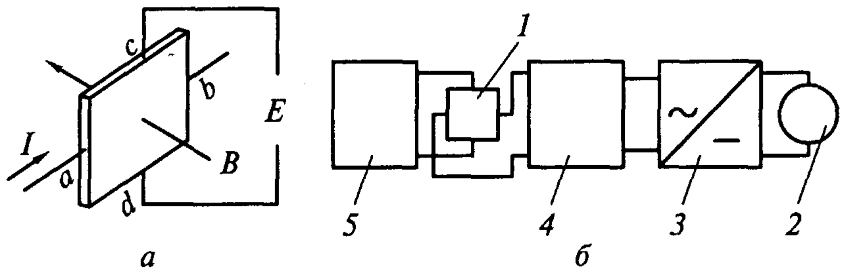


Рис. 1.2. Эффект Холла (а) и измеритель магнитной индукции, основанный на эффекте Холла (б):
1 — датчик Холла; 2 — магнитоэлектрический индикатор; 3 — выпрямитель; 4 — усилитель переменного напряжения; 5 — источник переменного напряжения питания

Если при этом через плоскость полупроводниковой пластины проходит магнитный поток, то он будет стремиться сдвинуть поток электронов в одну из сторон (*c* или *d* в зависимости от знака магнитного потока), что приведет к появлению ЭДС между гранями *c* и *d*. Величина этой ЭДС связана с магнитной индукцией *B* следующим соотношением:

$$E = R_x \frac{I \cdot B}{h} ,$$

где R_x— постоянная Холла, зависящая от материала полупроводника; I — ток в цепи между гранями a и b; B — магнитная индукция; h — толщина полупроводниковой пластины.

Если к пластине приложить переменное напряжение, то и на других гранях также появится переменная ЭДС, так как из-за изменения направления тока в пластине поток электронов в ней будет отклоняться в разные стороны.

Упрощенная схема измерительного прибора предназначенного для измерения магнитной индукции и построенного на основе эффекта Холла, приведена на рис. 1.2, б. Она включает в себя: источник переменного напряжения питания 5 (чаще всего частотой порядка 1000 Гц), датчик Холла 7, усилитель переменного напряжения *4*, выпрямитель *3* и магнитоэлектрический индикатор *2*. Так как толщина полупроводниковой пластины обычно не превышает 1 мм, то с помощью такого прибора можно определять магнитную индукцию в очень узких зазорах электрических машин.

В автомобилях в качестве источника питания переменного напряжения используются импульсы, снимаемые с распределителя зажигания, частота следования которых определяется частотой вращения газораспределительного вала двигателя внутреннего сгорания. Измеренное значение частоты этих импульсов с помощью датчика Холла поступает в бортовой компьютер автомобиля, которое используется, например, для работы автоматической коробки переключения передач автомобиля. Данная коробка автоматически выбирает своё необходимое передаточное число, соответствующее частоте вращения коленчатого вала двигателя (частоте вращения газораспределительного вала).

Рассмотренный пример принципа измерения такой физической величины, как скорость вращения (частота вращения) различных вращающихся механизмов с использованием эффекта Холла, и пример его технической реализации в автомобилях достаточно хорошо подтверждают общее определение метода измерения.

Конкретные методы измерений определяются видом измеряемых величин, их размерами, требуемой точностью результата измерения, быстротой проведения процесса измерения, условиями измерений и рядом других факторов. В принципе измерение любой физической величины можно производить различными (несколькими) методами, которые могут отличаться между собой как особенностями технической, так и методической реализации. Относительно особенностей технической реализации методов измерений можно сказать, что в настоящее время их существует очень большое множество, а вот относительно особенностей методической реализации следует сказать, что все существующие методы измерений поддаются систематизации и обобщению по некоторым общим характерным для них признакам.

1.2.2. Классификация и краткая характеристика методов измерений

В настоящее время, наиболее важными признаками для метрологического анализа измерений, используются следующие ***традиционные признаки классификации методов измерений:***

физический принцип, положенный в основу измерения. По данному признаку все методы измерений подразделяются на: *электрические, магнитные, акустические, оптические, механические и т.д.*;

режим взаимодействия средства и объекта измерений. По данному признаку все методы измерений, как и виды измерений, подразделяются на *статические и динамические;*

вид измерительных сигналов. В соответствии с этим признаком методы измерений, как и виды измерений, подразделяются на *аналоговые и цифровые;*

степень взаимодействия объекта и средства измерения. В соответствии с данным признаком методы измерений, как и виды измерений, подразделяются на *контактные и бесконтактные*.

Однако наиболее разработанной и распространённой в теории измерений и метрологии в целом является классификация методов измерений по такому признаку как ***совокупность приемов использования принципов и средств измерений.*** Данный признак называют также – ***организация сравнения измеряемой величины с мерой***. По этому признаку классификации различают *метод непосредственной оценки и метод сравнения* (рис. 1.3).

Эти устоявшиеся (традиционные) в метрологии названия методов измерений не совсем удачны, так как предусматривают возможность проведения измерения без сравнения. Вероятно, более правильным следует говорить об опосредованном и непосредственном сравнении с мерой. При этом непосредственным и опосредованным сравнение может быть как во времени, так и в отношении физической природы измеряемых величин.

Сущность ***метода непосредственной оценки*** заключается в том, что о численном значении измеряемой величины, при использовании

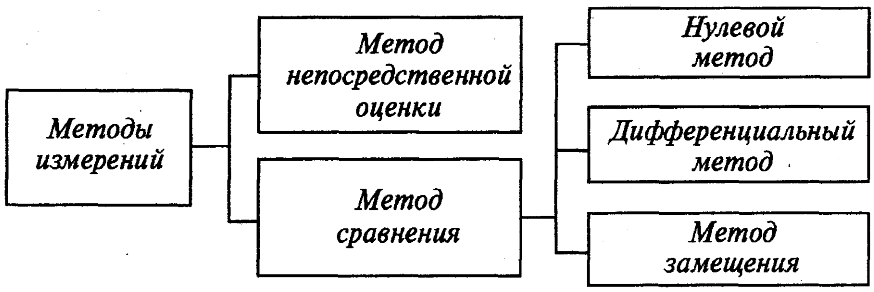


Рис. 1.3. Классификация методов измерений по совокупности приемов использования принципов и средств измерений

данного метода, судят непосредственно по показанию одного (прямые измерения) или нескольких (косвенные измерения) средств измерений, которые заранее проградуированы в единицах измеряемой величины или единицах других величин, от которых она зависит. Быстрота процесса измерения методом непосредственной оценки делает его часто незаменимым для практического использования, хотя этого важное достоинство наряду с его простотой, часто не обеспечивает ему высокую точность измерения ФВ. Несмотря на этот важный недостаток, данный метод является наиболее распространённым и его реализуют значительное большинство средств измерений.

Простейшими примерами метода непосредственной оценки могут служить измерения длины с помощью линейки, массы с помощью пружинных весов, давления с помощью манометра, напряжения электромеханическим вольтметром магнитоэлектрической системы, частоты последовательности импульсов методом дискретного счета (реализуется в электронно-счетном частотомере) и т. д.

Метод сравнения (метод сравнения с мерой) это метод измерений, при котором измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой. Это может быть, например, измерение зазора между деталями с помощью щупа, измерение массы на рычажных весах с помощью гирь, измерение длины с помощью концевых мер, измерение величины напряжения неизвестного источника постоянного тока путем сравнения с ЭДС нормального (эталонного) элемента и т.д. Приборы, реализующие измерение на основе метода сравнения, называют измерительными приборами сравнения. В отличие от приборов непосредственной оценки, более удобных для получения оперативной информации, приборы сравнения обеспечивают большую точность измерений.

Согласно существующей традиционной классификации методов измерений, представленной на рис.1.3, ***метод сравнения (метод сравнения с мерой)*** состоит из *дифференциального, нулевого и метода замещения.* Однако в последнее время в дополнении к этим трём традиционным методам сравнений всё чаще при классификации методов измерений, а точнее методов сравнений, добавляют ещё два метода сравнения с мерой – *метод противопоставления и метод совпадений. Р*ассмотрим сущность всех перечисленных методов сравнения.

Дифференциальный (разностный) метод это метод измерений, при котором измеряемая величина X сравнивается в приборе сравнения с однородной известной величиной воспроизводимой мерой $X_{м}$, незначительно отличающейся от измеряемой величины, и при котором измеряется разность между этими двумя величинами $DX = X - X_{м}$. Таким образом, о значении измеряемой величины при использовании данного метода судят по измеряемой прибором разности $DX = X - X_{м}$ и по известной величине $X_{м}$, воспроизводимой мерой. Можно сказать, что при дифференциальном методе производится неполное уравновешивание измеряемой величины мерой. Исходя из сущности данного метода, естественно следует, что точность этого метода возрастает с уменьшением разности между сравниваемыми величинами ($DX = X - X_{м}$).

Дифференциальный метод сравнения применяют тогда, когда практическое значение имеет отклонение измеряемой величины от некоторого номинального значения. Примерами практической реализации данного метода могут служить: измерения линейных размеров различных деталей (например, длины вала) с помощью концевых мер; измерение массы тел на рычажных весах с помощью гирь; измерение электрического сопротивления с помощью неуравновешенного моста; измерение вольтметром разности двух напряжений, из которых одно известно с большой точностью, а другое представляет собой искомую величину; измерение однородных величин путём сравнения с образцовой мерой в компараторе (средстве сравнения, предназначенном для сличения однородных величин, которое имеет отличное от нуля значение чувствительности).

Кроме того, данный метод очень широко используется в различных поверочных схемах, которые позволяют на основании сравнения поверяемого средства измерения с более точным средством измерений определить погрешность поверяемого средства, соответствие её предъявляемым требованиям и установление в итоге степени пригодности данного средства к дальнейшему применению.

Нулевой метод сравнения это метод измерений, при котором разность между измеряемой величиной X и величиной воспроизводимой мерой $X_м$ в приборе сравнения доводят до нулевого значения ($DX = X - X_м$ *=0)*.. Исходя из данного определения, следует, что данный метод является частным случаем (разновидностью) дифференциального метода, и главное отличие его от дифференциального состоит в том, что результирующий эффект сравнения двух сравниваемых величин в прибое сравнения при использовании нулевого метода доводится до нуля. Измерительный прибор сравнения, применяемый при нулевом методе измерений, имеет высокую точность измерений (малую погрешность измерений), поэтому он имеет и специальное название – нуль-индикатор.

В связи с тем, что при нулевом методе используется высокочувствительный нуль-индикатор, а мера выполняется также с высокой точностью, то при измерениях данным методом считается, что значение измеряемой величины равно значению, которое воспроизводит мера.

Следует заметить, что нулевой метод, в сравнении со всеми другими методами, обладает наибольшей точностью измерений, при этом его реализация может быть достигнута двумя способами, которые позволили классифицировать ***нулевой метод*** *на две разновидности*: ***компенсационный метод и мостовой метод***.

Компенсационный метод это такой метод измерений, при котором действие измеряемой величины компенсируется (уравновешивается) образцовой величиной (образцовой мерой).

Примером компенсационного нулевого метода может служить измерение массы веществ на «аптекарских весах», когда на одном плече этих весов (на одной чашечке) находится взвешиваемое вещество, а на другом плече (на другой чашечке) набор эталонных (образцовых) грузов с очень малой массой минимального из них, при этом результат измерения фиксируется по положению нуль-индикатора, выполненного в виде стрелки, на нулевом штрихе шкалы.

Мостовой метод широко применяется в практике электрических измерений и является таким методом измерений, при котором достигают нулевого значения тока в измерительной диагонали моста, где включён чувствительный индикаторный прибор (обычно нуль-индикатор магнитоэлектрической системы измерительного механизма).

Метод замещения это метод сравнения с мерой, в котором измеряемую величину замещают мерой с известным значением величины.

Сущность метода замещения заключается в поочередном измерении прибором искомой величины и выходного сигнала меры, однородного с измеряемой величиной. По результатам этих измерений вычисляется искомая величина. Поскольку оба измерения производятся одним и тем же прибором в одинаковых внешних условиях, а искомая величина определяется по отношению показаний прибора, погрешность результата измерения уменьшается в значительной мере. Так как погрешность прибора неодинакова в различных точках шкалы, наибольшая точность измерения получается при одинаковых показаниях прибора.

Простейшим примером использования на практике метода замещения может служить измерение массы тела (вещества) с помощью стрелочных весов путём поочерёдного помещения измеряемой массы тела (вещества) и гирь (выполняют функцию известных мер) на одну и ту же чашку весов. Примером применения метода замещения при электрических измерениях может служить измерение большого электрического активного сопротивления путем поочередного измерения силы тока, протекающего через контролируемый и образцовый резисторы. Питание электрической цепи при таких измерениях должно осуществляться от одного и того же источника постоянного тока. Выходное сопротивление источника тока и измерительного прибора — амперметра должно быть очень мало по сравнению с измеряемыми сопротивлениями.

Метод противопоставлений это такой метод сравнения с мерой, при котором измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, одновременно воздействуют на прибор сравнения, с помощью которого устанавливается соотношение между этими величинами.

Примером использования данного метода в неэлектрических измерениях может служить измерение массы веществ на равноплечных весах с помещением измеряемой массы и уравновешивающих её гирь на двух чашках весов.

Метод совпадений это такой метод сравнения с мерой, при котором измеряют разность между искомой величиной и образцовой мерой, используя совпадения отметок шкал или периодических сигналов. Этот метод широко используется в практике неэлектрических измерений. Так, примером может служить измерение длины деталей на промышленном предприятии при помощи штангенциркуля с нониусом, когда наблюдают совпадение отметок на шкалах штангенциркуля и нониуса. Примером же использования данного метода в электрических измерениях может служить измерение частоты вращения тела с помощью стробоскопа, когда положение какой-либо отметки на вращающемся объекте совмещают с отметкой на невращающейся части этого объекта при определённой частоте вспышек стробоскопа.

Подводя итог классификации методов измерений, следует, заметить, что, планируя проведение измерений искомой ФВ, необходимо выбрать такой метод измерения, который по возможности должен иметь минимальную погрешность и способствовать исключению систематических погрешностей или переводу их в разряд случайных.

1.3. Понятие и классификация средств измерений

1.3.1. Понятие, классификация и краткая характеристика элементарных средств измерений

Основным документом законодательной метрологии, определяющим метрологические требования к средствам измерений (СИ - не путать с аббревиатурой международной системой единиц СИ), является Закон Российской Федерации «Об обеспечении единства измерений» (ФЗ № 4871-1 от 27.04.93г.). Современное понятие «средство измерений» введено с 1 января 2001 г. Рекомендацией по межгосударственной стандартизации ПМГ 29-99 «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения».

Средство измерений *— это техническое средство (или их комплекс), предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины, размер которой принимается неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени.*

Данное определение раскрывает метрологическую сущность средств измерения, заключающуюся, во-первых, в умении хранить (или воспроизводить) единицу физической величины и, во-вторых, в поддержании неизменности размера хранимой единицы во времени. Первый признак средства измерения позволяет выполнить собственно измерение, суть которого, как известно, состоит в сравнении измеряемой величины с ее установленной единицей. Второй признак принципиально необходим средству измерения, поскольку при изменении размера хранимой единицы физической величины с помощью данного средства измерения нельзя получить результат измерения с требуемой точностью.

Таким образом, измерять с приемлемой для практики точностью можно только при условии, что средство измерения обеспечивает хранение (или воспроизведение) единицы измеряемой величины практически неизменной как во времени, так и под воздействием влияющих факторов окружающей среды. При этом естественным является, что эту неизменность размера единицы во времени и подверженность ее изменениям под воздействием влияющих факторов в средстве измерения необходимо контролировать. В зависимости от требований к качеству измерений этот контроль происходит с помощью различных, по метрологическим функциям, средств измерений.

Показания средства измерений могут непосредственно восприниматься органами чувств человека (например, зрением при снятии показаний со стрелочного или цифрового приборов), или, если показания средства измерения недоступны восприятию человеком, или если в этом нет необходимости, то показания используются для преобразования либо другими средствами измерений, либо другими техническими средствами, которым необходимы для работы значения измеренной ФВ данным средством измерения.

При создании и изучении средств измерений часто применяют так называемые общие структурные схемы. В этих схемах изображают элементарные средства измерений и отдельные элементы средства измерения в виде символических блоков, соединённых между собой сигналами, характеризующими физические величины. Упомянутое здесь ***понятие элементарного средства измерения*** *предусматривает такое средство измерения, которое предназначено для реализации отдельных операций прямого вида измерений.* ***К элементарным средствам измерений*** относятся *меры, устройства сравнения (компараторы) и измерительные преобразователи.*

Мера *— средство измерений, предназначенное для воспроизведения и (или) хранения физической величины одного или нескольких заданных размеров, значения которых выражены в установленных единицах и известны с необходимой точностью.* В качестве мер, например, используют: гирю – мера массы; температурная лампа – мера температуры; кварцевый автогенератор (точнее частота колебаний кварцевого генератора) — мера частоты электрических колебаний; измерительный резистор — мера электрического сопротивления; измерительный конденсатор — мера электрической емкости.

Различают два типа мер - однозначные и многозначные меры.

Однозначная мера – *мера, воспроизводящая физическую величину одного размера*. Например, гиря, плоскопараллельная концевая мера, измерительный резистор, измерительный конденсатор постоянной емкости, ЭДС нормального элемента.

Многозначная мера – *мера, воспроизводящая ряд одноименных величин различного размера*. Например, набор концевых мер длины, штриховая мерная лента, потенциометр, вариометр индуктивностей, конденсатор переменной емкости.

Операцию воспроизведения величины заданного размера многозначной мерой формально можно представить как преобразование цифрового кода N в заданную физическую величину $X_м$, значение которой основано на единице данной физической величины $[Q]$, т.е. на единице заданного размера.. Поэтому уравнение преобразования меры запишется в виде $X_м = N \cdot [Q]$. Тогда выходным сигналом многозначной меры является квантованная аналоговая величина $X_м$ заданного размера, а входом при этом следует считать числовое значение цифрового кода N (рис. 1.4).

Во всех типах мер, кроме того, различают *наборы мер, магазины мер, установочные и встроенные меры*. ***Набор мер*** *— специально подобранный комплект однотипных элементов, применяемых не только по отдельности, но и в различных сочетаниях для воспроизведения ряда одноименных величин различного размера*. Например, набор концевых мер длины, набор измерительных резисторов или конденсаторов.

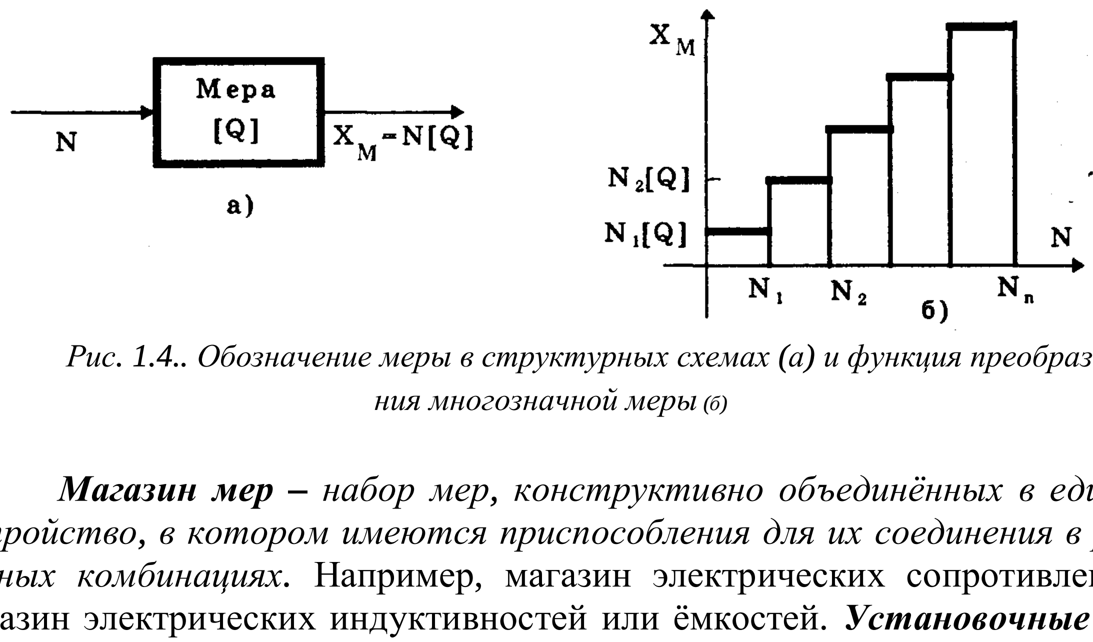


Рис. 1.4.. Обозначение меры в структурных схемах (а) и функция преобразования многозначной меры (б)

Магазин мер – *набор мер, конструктивно объединённых в единое устройство, в котором имеются приспособления для их соединения в различных комбинациях*. Например, магазин электрических сопротивлений, магазин электрических индуктивностей или ёмкостей. ***Установочные меры*** – *автономная однозначная или многозначная мера, специально предна-*

значенная для передачи (установки) своего размера однородной ФВ средству измерения. Например, переносной прецизионный кварцевый автогенератор. ***Встроенные меры –*** *однозначная или многозначная мера, размещённая в средстве измерения, являющаяся его составной частью, и не имеющая возможности быть использованной самостоятельно без данного средства измерения*. Например, калибратор осциллографа (прецизионный генератор импульсов с одной или несколькими группами параметров, используемый при подготовке осциллографа к измерениям амплитудных и временных параметров электрических сигналов).

Устройство сравнения (компаратор) *— это средство измерений, позволяющее сравнивать друг с другом либо значения двух мер однородных величин, либо значение меры со значением однородной ФВ, либо значения двух однородных ФВ*. Примерами компараторов могут служить: рычажные весы, на одну чашку которых устанавливается образцовая гиря, а на другую – поверяемая гиря; тепловое поле; создаваемое термостатом для сравнения показаний термометров; фотореле, включающее (выключающее) уличное электрическое освещение. Во многих относительно простых средствах измерений роль компаратора выполняют органы чувств человека, главным образом зрение, например при сравнении отклонения указателя прибора и числа делений, нанесенных на его шкале.

Наиболее широкое применение в настоящее время компараторы нашли в электрических и электронных средствах измерений, где они выполняются, как правило, в виде специальных микросхем построенных на основе, так называемых, операционных усилителей. Основными отличительными признаками данных усилителей является то, что они принадлежат к усилителям постоянного тока, имеют дифференциальный вход (т.е. два входа), обладают очень высоким коэффициентом усиления (его значение достигает значений порядка 10^6), большим входным (сотни Мом) и малым выходным (десятки Ом – единицы кОм). Именно такие признаки и параметры данных усилителей и позволили их успешно использовать в качестве базовых устройств для построения компараторов.

Структурно компаратор можно представить в виде последовательного соединения вычитающего устройства (ВУ), вырабатывающего сигнал пропорциональный разности поступивших на его входы сигналов ($X_1 - X_2$), и усилителя–ограничителя (УО), выполняющего функцию индикатора знака разности выходного сигнала ВУ (см. рис.1.5).

Выходной сигнал УО, т.е. выходной сигнал компаратора, может принимать лишь два значения: либо он равен положительному потенциалу источника питания постоянного тока (+ $U_п$), когда разность ($X_1 - X_2) > 0$, то есть сигнал соответствует логической единице – «1», либо – отрицательно-

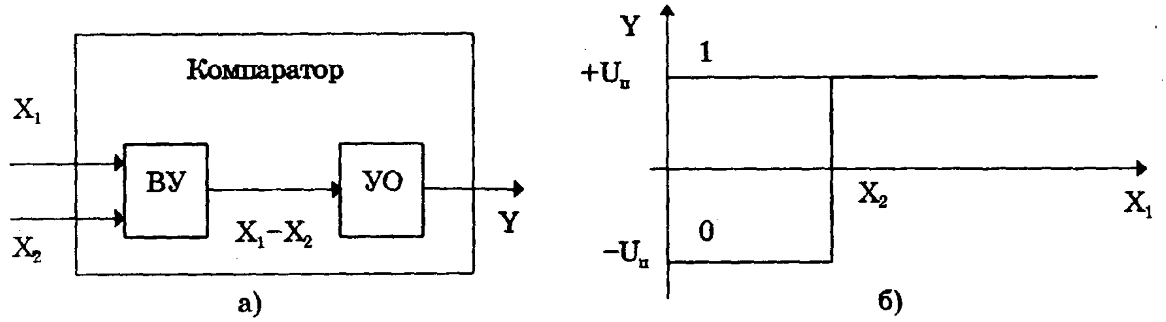


Рис.1.5. Структурная схема компаратора (а) и его функция преобразования (б)

му потенциалу источника питания постоянного тока (- $U_п$), когда разность ($X_1 - X_2$) < 0 (см. рис.1.5 б), то есть сигнал соответствует логическому нулю – «0». Функция преобразования идеального компаратора, представленная на рис.1.5 б, математически может быть представлена уравнением вида:

$$Y = \left[0.5 + 0.5 \cdot sign\left(X_1 - X_2\right)\right] = \begin{cases} +U_п \Rightarrow 1 \;\; при \;\; X_1 > X_2 ; \\ -U_п \Rightarrow 0 \;\; при \;\; X_1 < X_2 . \end{cases} \quad (1.6)$$

Степень совершенства компаратора определяется *минимально возможным порогом чувствительности*, т.е. минимально возможным значением разности ($X_1 - X_2$), на которую он может отреагировать изменением своего устойчивого состояния, а также его *быстродействием*, т.е. временем необходимым компаратору для переключения (перехода) из одного устойчивого состояния (например, из состояния, соответствующего логической единицы – «1») в другое устойчивое состояние (например, в состояние, соответствующее логическому нулю – «0»). У идеального компаратора порог чувствительности и время переключения равны нулю. В реальных компараторах специально вводят порог срабатывания (для исключения так называемого «дребезга контактов»), что приводит к возникновению аддитивной составляющей погрешности, которая суммируется с измеряемой ФВ.

В основе действия любых средств измерений от самого простейшего прибора до сложной автоматической измерительной системы лежат последовательно выполняемые преобразования измеряемой физической величины в сигнал, удобный для передачи и обработки, а также изменения его вида или формы. Набор (совокупность) таких операций определяют исходя из метода измерений той или иной физической величины. Осуществляются эти операции измерительными преобразователями.

Измерительный преобразователь — средство измерений, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, преобразования, обработки и хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем. Измерительные преобразователи (ИП) могут, как входить в состав измерительных приборов, так и применяться самостоятельно. Измерительные преобразователи, которые ГОСТ по сложившейся традиции рассматривает, как самостоятельный класс средств измерений, не могут по своей сути являться хранителем единицы измерения. Зачастую конструктивно обособленные первичные преобразователи называют *датчиками.*

Работа ИП протекает в условиях, когда помимо основного сигнала X, связанного с измеряемой величиной, на него воздействует множество других сигналов Z, являющихся в данном случае помехами. Выходным сигналом ИП служит некая величина $У$ (напряжение, ток и т.д.).Важнейшей характеристикой ИП является функция (уравнение) преобразования, которая описывает статические свойства преобразователя и в общем случае записывается в виде $У= F(X, Z)$. В подавляющем большинстве случаев стремятся иметь линейную функцию преобразования. Функция $Y(X)$ идеального ИП при отсутствии помех описывается уравнением $Y = kX$. Она линейна, безынерционна, стабильна и проходит через начало координат (см. рис.1.6)

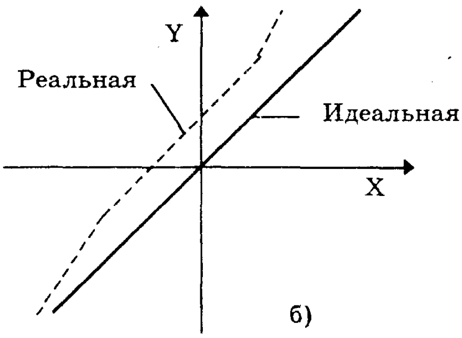


Рис.1.6. Функции преобразования измерительного преобразователя

Реальная передаточная функция преобразования в статическом режиме имеет вид $Y = k(1+\gamma)X+\Delta_0+\Delta[F(X)]$ и может отличаться от идеальной смещением нуля Δ_0 наклоном γ и нелинейной составляющей $\Delta[F\ (X)]$. Такие отклонения реальной передаточной функции ИП приводят к возникновению аддитивной, мультипликативной и нелинейной составляющих погрешности в результат измерений.

Измерительные преобразователи классифицируют по ряду специфических признаков.

По местоположению в измерительной цепи преобразователи делятся на *первичные* и *промежуточные*.

Первичный преобразователь — измерительный преобразователь, к которому подведена измеряемая величина, т.е. является первым в измерительной цепи. Например: термопара в цепи термоэлектрического термометра.

Промежуточный преобразователь располагается в измерительной цепи после первичного преобразователя.

Передающий преобразователь — измерительный преобразователь, служащий для дистанционной передачи сигнала измерительной информации к другим устройствам или системам.

Важной разновидностью преобразователей является *масштабный преобразователь* — измерительный преобразователь, предназначенный для изменения размера величины или измерительного сигнала в заданное число раз. Например: измерительный трансформатор тока, делитель напряжения, измерительный усилитель.

По виду входных и выходных величин измерительные преобразователи делятся на:

аналоговые, преобразующие одну аналоговую величину в другую аналоговую величину;

аналого-цифровые (АЦП), предназначенные для преобразования аналогового измерительного сигнала в цифровой код;

цифроаналоговые (ЦАП), предназначенные для преобразования цифрового кода в аналоговую величину.

По физическим закономерностям, положенным в основу измерения преобразователи подразделяются на:

механические упругие – их функционирование основано на зависимости между механическими силами, воздействующими на ИП, и выходными перемещениями элементов ИП, обусловленных упругими свойствами их материалов (например, мембраны, упругие стержни, сильфоны и т.п.);

электрические и механоэлектрические - их функционирование основано на использовании закона Ома для участка цепи (например, резисторы, реостаты, потенциометры, тензорезисторы и т. п.);

электростатические - их функционирование основано на способности данных ИП изменять электрическую ёмкость или накопленный электрический заряд под действием входной величины (механических сил, давлений, ускорений и т.п.). Примерами могут служить - ёмкостные ИП, пьезоэлектрические преобразователи прямого и обратного пъезоэффекта и т.п.;

электромеханические – принцип действия основан на возникновении механических перемещений подвижных элементов ИП под влиянием электрического тока (например, электромеханические вольтметры, амперметры, ваттметры, стрелочные индикаторы и т. п.);

гальваномагнитные – принцип действия основан на использовании гальваномагнитного эффекта Гаусса (изменение электрического сопротивления) и эффекта Холла (появление ЭДС) под воздействием входного магнитного поля (например, датчик Холла, датчик Гаусса);

электромагнитные – принцип действия основан на использовании электромагнитных явлений (например, трансформаторные, индуктивные, магнитоупругие и т.п. ИП);

тепловые - принцип действия основан на физических закономерностях, имеющих место для некоторых материалов при протекании в них тепловых процессов (например, термопары, терморезисторы, термотранзисторы и т.п.);

электрохимические – принцип действия основан на зависимости электрических параметров электролитической ячейки, заполненной раствором с помещёнными в неё электродами, от состава, концентрации, температуры и других свойств раствора (например, кислотные и щелочные аккумуляторы, гальванические ИП и т.п.);

оптические - принцип действия основан на зависимости параметров потока оптического (светового или теплового) излучения от значения преобразуемой величины (например, твёрдотельные оптоэлектронные и волоконнооптические ИП);

квантовые – принцип действия основан на использовании явления резонансного поглощения энергии высокочастотного электромагнитного поля рабочим веществом, находящимся под воздействием таких преобразуемых величин, как напряжённость постоянного магнитного или электрического поля, давление, температура (например, квантовый ИП на основе ядерного магнитного резонанса, электронного парамагнитного резонанса, эффекта Джозефсона).

По виду входной измеряемой величины измерительные преобразователи подразделяются на *преобразователи электрических и неэлектрических величин*.

По способу формирования выходного сигнала - ИП подразделяются на:

генераторные – обеспечивают непосредственное преобразование изменений входной величины в пропорциональное изменение выходного сигнала без необходимости применения внешних источников энергии;

параметрические – получение выходного энергетического сигнала обеспечивается внешним источником энергии, подключённым к ИП.

По методу преобразования - ИП подразделяются на:

прямого преобразования – ИП состоит из нескольких последовательно соединённых преобразовательных элементов, и преобразование производится в одном, прямом направлении от входной величины X к выходной величине;

уравновешивающего преобразования – ИП использует две цепи преобразовательных элементов: одна цепь прямого преобразования, а другая цепь обратного преобразовательного элемента, создающая уравновешивающий сигнал, который значительно уменьшает погрешность ИП прямого преобразования.

По виду функции преобразования – ИП подразделяются на:

масштабные (линейные) – ИП, предназначенные для изменения входной величины в целое число раз ($Y = k\,X$);

функциональные (нелинейные) – ИП, выходной сигнал которых функционально связан с входной величиной вполне определённой нелинейной зависимостью [$Y = F(X)$].

1.3.2. Обобщённая структурная схема средства измерения

Вначале данного подраздела было сказано, что «при создании и изучении средств измерений часто применяют так называемые общие структурные схемы. В этих схемах изображают элементарные средства измерений и отдельные элементы средства измерения в виде символических блоков, соединённых между собой сигналами, характеризующими физические величины». Ознакомившись с понятием, назначением, принципом действия и классификацией элементарных средств измерений, рассмотрим теперь обобщённую структурную схему средства измерения (СИ), которая отражает состав, взаимодействие и возможные варианты построения любого средства измерения в самом общем виде. Обобщенная структурная схема СИ показана на рис.1.7.

Принцип действия СИ, в соответствии с данной схемой, заключается в следующем. Очевидно, что входным сигналом средства измерения является измерительный сигнал X, один из параметров которого однозначно связан с измеряемой ФВ [$U(t)$]:

$$X = X\{a_0[U(t)], a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots, a_n\}, \tag{1.7}$$

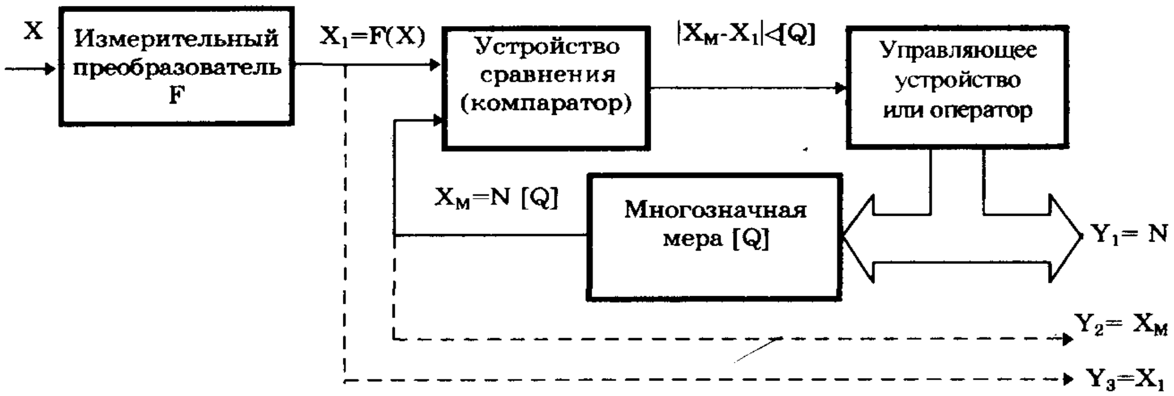


Рис.1.7.. Обобщенная структурная схема средства измерения

где a_0 - информативный параметр входного сигнала; a_1, a_2, a_3, …, a_n – неинформативные параметры входного сигнала.

Следует заметить, что *информативным параметром входного сигнала СИ* является такой его параметр, который функционально связан с измеряемой величиной, используется для передачи значения ФВ или является непосредственно самой измеряемой ФВ. *Под неинформативным параметром входного сигнала СИ* понимается такой его параметр, который не используется для передачи значения измеряемой величины и_сам ею не является.

Входной сигнал *X,* поступив на измерительный преобразователь, преобразуется им в пропорциональный измерительному сигналу сигнал $X_1 = F(X)$. Следует отметить, что в структурной схеме СИ преобразователь может отсутствовать. В этом случае входной сигнал будет подаваться непосредственно на один из входов (согласно схемы – на верхний вход) устройства сравнения (компаратора). Однако в подавляющем большинстве вариантов построения СИ измерительный преобразователь, входит в состав СИ.

Сигнал с выхода измерительного преобразователя поступает на верхний (первый) вход устройства сравнения (компаратора), в то время как на нижний (второй) его вход подается известный (квантованный по уровню, кратный единице измеряемой ФВ [Q]) сигнал с выхода многозначной меры. Роль меры могут выполнять самые разные устройства. Значение выходной величины многозначной меры $X_м$ изменяется в зависимости от значения цифрового кода N, который условно можно считать её входным сигналом. Изменение значения кода N может осуществляться либо оператором (например, при взвешивании на рычажных весах, путем изменения им количества гирь), либо автоматически - по команде управляющего устройства (например, если СИ является электронным устройством, где и компаратор, и многозначная мера выполнены в электронном варианте исполнения). Так как цифровой код N — величина дискретная, то и выходной сигнал меры $X_м$ изменяется ступенями — квантами, кратными единице сравниваемых величин $[Q]$. Например, при измерении температуры обычным бытовым термометром квант равен 1°C, а при использовании медицинского термометра он равен 0,1°C.

Результатом сравнения измеряемой величины X_1 и известной величины $X_м$, проводимого компаратором, как известно, является либо сигнал, соответствующий логическому нулю – «0», при выполнении соотношения вида $|X_M - X_1| < |Q|$, либо сигнал соответствует логической единице – «1», при выполнении соотношения вида $|X_M - X_1| > |Q|$. Именно это значение выходного сигнала компаратора («1» или «0») и даёт информацию управляющему устройству (оператору), о том, производить изменение (увеличение) значения выходного сигнала многозначной меры $X_м$ (выходной сигнал компаратора соответствует логическому нулю - «0») или прекратить изменение выходного сигнала меры $X_м$ (выходной сигнал компаратора соответствует логической единице - «1») и вывести результат измерения, либо на отсчётно-регистрирующее устройство (для оператора), либо передать его далее автоматически для обработки в другие необходимые блоки (устройства, узлы). Таким образом, процесс изменения $X_м$ прекращается при достижении равенства между величинами $X_м$ и X_1 с точностью до кванта $[Q]$.

Исходя из рассмотренного принципа действия СИ по обобщённой схеме и реальной необходимости решения конкретной измерительной задачи, выходным сигналом СИ может служить один из трёх сигналов: Y_1, Y_2, или Y_3. Сигнал $Y_1 = N$ используется в том случае, если он предназначен для непосредственного восприятия человеком. В данном случае значение кода N, является привычным и удобным для восприятия человеком десятичным числом, воспроизводимым на отсчётно регистрирующем приборе (устройстве), например, на шкале электромеханического измерительного прибора, на индикаторном табло цифрового прибора, на шкале рычажных весов, на шкале мерной ленты и тому подобное.

Если же выходной сигнал СИ предназначен для применения в других СИ или для обработки в других устройствах (узлах, приборах), то в качестве него может быть использован любой из трёх сигналов: Y_1, Y_2, или Y_3.

Сигнал Y_1 , в данном случае, представляется, как правило, в виде двоичного цифрового кода, который соответствует кодам используемых последующими за данным СИ цифровыми устройствами. В результате средство измерения должно содержать все четыре блока, входящих в обобщённую структурную схему СИ.

Сигнал Y_2, являясь дискретным и квантованным по уровню, представляет собой эквивалент цифрового кода N . Поэтому этот сигнал может быть использован при построении СИ, предназначенного для воспроизведения ФВ размера с точностью до кванта $[Q]$ многозначной меры, а само СИ может состоять только из одного блока - многозначной меры (например, мерная штриховая линейка для измерения длины тел, предметов).

Сигнал Y_3 , представляет собой измерительное преобразование $X_1 = F(X)$ входного сигнала X. В этом случае СИ использует лишь один блок из обобщённой структурной схемы СИ, а именно измерительный преобразователь, значение измеренной величины которого используется другими следующими за ним средствами измерения (устройствами, узлами). Например, значения выходного напряжения повышающего или понижающего трансформатора напряжения, используемого в качестве измерительного преобразователя, который изменяет только амплитуду входного сигнала (напряжения), могут быть использованы другим СИ – электромеханическим вольтметром, не рассчитанным на измерение малых (больших) амплитуд входного сигнала X средства измерения.

Таким образом, обобщённая структурная схема СИ, показанная на рис.1.7, описывает три возможных варианта построения СИ:

СИ включает в свой состав все четыре блока и вырабатывает сигнал либо Y_1, или в форме доступной и удобной для восприятия органами чувств человека - десятичным числом, или в форме двоичного цифрового кода, который соответствует кодам используемых последующими за данным СИ цифровыми устройствами, либо сигнал Y_2 в форме аналогового дискретного сигнала по уровню, предназначенного для преобразования и использования другими СИ (устройствами, блоками, узлами);

СИ состоит только из измерительного преобразователя, выходной сигнал которого Y_3 и предназначен для использования другими СИ (устройствами, блоками, узлами);

СИ содержит только многозначную меру, выходной сигнал которой Y_2 предназначен либо для построении СИ, воспроизводящих ФВ с точностью до кванта $[Q]$ многозначной меры, либо для использования другими СИ (устройствами, блоками, узлами).

1.3.3. Классификация средств измерений

Используемые в различных областях науки и техники средства измерений, чрезвычайно многообразны. Однако можно выделить некоторые общие признаки, присущие всем СИ независимо от их области применения.

По роли, выполняемой в системе обеспечения единства измерений, *СИ делятся на:*

метрологические, предназначенные для метрологических целей — воспроизведения единицы и (или) ее хранения или передачи размера единицы рабочим СИ;

рабочие, предназначенные для измерений, не связанных с передачей размера единиц.

Метрологических средств измерений по своему составу, в сравнении с составом рабочих СИ, весьма немного. Они, как правило, разрабатываются, производятся и эксплуатируются в специализированных научно-исследовательских центрах. Поэтому подавляющее большинство используемых на практике СИ принадлежат к рабочим СИ.

По уровню автоматизации все СИ делятся на три группы:

неавтоматические – СИ, где все измерительные операции выполняются оператором вручную;

автоматизированные – СИ, производящие в автоматическом режиме как минимум одну (или часть) измерительную операцию, а все остальные операции (или части) выполняются вручную оператором;

автоматические – СИ, производящие в автоматическом режиме все измерительные операции и все операции, связанные с обработкой их результатов, регистрацией, передачей данных или выработкой управляющих сигналов для других СИ (других устройств).

В связи с бурным развитием в настоящее время электроники, наибольшее распространение сейчас получили СИ, работающие в автоматическом или автоматизированном режиме эксплуатации.

По уровню стандартизации все СИ подразделяются на две группы:

стандартизованные - СИ, изготовленные в соответствии с требованиями соответствующего государственного или отраслевого стандарта;

нестандартизованные (уникальные) – СИ, предназначенные для решения специальных измерительных задач, к которым нет необходимости в стандартизации требований. Нестандартизованные средства измерений разрабатываются специализированными научно-исследовательскими организациями и выпускаются единичными экземплярами, при этом они не проходят государственных испытаний, а их характеристики определяются при метрологической аттестации.

Основное количество СИ являются стандартизованными, при этом они серийно выпускаются промышленными предприятиями и в обязательном порядке подвергаются государственным испытаниям.

По отношению к измеряемой физической величине все СИ подразделяются на:

основные — это СИ такой физической величины, значение которой необходимо получить в соответствии с измерительной задачей;

вспомогательные — это СИ такой физической величины, влияние которой на основное средство измерений или объект измерения необходимо учитывать при получении результатов измерений с требуемой точностью.

По реализации процедуры измерения все СИ подразделяются на:

элементарные - это СИ, предназначенные для реализации отдельных операций прямого вида измерений, и включают в себя, ранее рассмотренные: меры, компараторы, измерительные преобразователи;

комплексные - это СИ, которые предназначены для реализации всей процедуры измерения.

К комплексным средствам измерений относятся: *измерительные приборы, измерительные установки и измерительные системы.*

Измерительным прибором – называется средство измерения, предназначенное для выработки определённого вида сигнала измерительной информации в форме, доступной для непосредственного восприятия оператором. Примерами измерительных приборов могут служить: микрометр, штангенциркуль; осциллограф, вольтметр, мультиметр. В связи с тем, что измерительных приборов существует довольно значительное многообразие, особенно по физическому принципу, положенному в основу измерения (механические, электрические, оптические, тепловые, пневматические, радиационные, радиоизмерительные и т.д.), то их принято классифицировать по ряду своих специфических признаков. Так, **например, *все радиоизмерительные приборы,*** по *форме индикации измеряемой величины,* принято делить на показывающие и регистрирующие, а последние в свою очередь разделяют на самопишущие и печатающие.

Показывающий измерительный прибор — устройство, предназначенное только для считывания показаний, например вольтметр.

Регистрирующий измерительный прибор — прибор, в котором предусмотрена регистрация показаний измеряемой величины, например - универсальный осциллограф.

Самопишущий измерительный прибор — регистрирующий прибор, в котором предусмотрена запись показаний в форме диаграммы, например – самопишущий термограф.

Печатающий измерительный прибор — регистрирующий измерительный прибор, в котором предусмотрена печать показаний, как правило, в цифровой форме, например – алфавитно-цифровое печатающее устройство.

По методу преобразования измеряемой величины различают приборы прямого, компенсационного (уравновешивающего) и смешанного преобразования.

По назначению измерительные приборы делятся на амперметры, вольтметры, омметры, частотомеры и т. д.

По структурной схеме можно в самом общем виде разделить на *электромеханические* и *электронные*. К радиоизмерительным приборам относятся только электронные, в состав которых в качестве отсчетного узла могут еще входить электромеханические устройства.

По форме преобразования используемых измерительных сигналов приборы разделяются на аналоговые и цифровые.

Аналоговый измерительный прибор — средство измерения, показания которого являются непрерывной функцией изменения измеряемой величины.

.*Цифровым измерительным прибором* (ЦИП) называется средство измерения, автоматически вырабатывающее дискретные сигналы измерительной информации, показания которого представлены в цифровой форме. ЦИП имеют перед аналоговыми ряд преимуществ.

По принципу действия измерительные приборы делят на ряд классов, перечисленных ниже.

Измерительные приборы прямого действия, в которых предусмотрено одно или несколько преобразований сигнала измерительной информации в одном направлении, т.е. без применения цепей обратной связи; например, амперметры, вольтметры.

Измерительные приборы сравнения, это приборы предназначенные для непосредственного сравнения измеряемой величины с известной величиной; например, электроизмерительный потенциометр.

Интегрирующие измерительные приборы, в которых подводимая величина интегрируется по времени или по другой независимой переменной; например, электрический счетчик энергии.

Суммирующие измерительные приборы, это приборы показания которых функционально связаны с суммой двух или нескольких величин, подводимых к ним по разным каналам; например, ваттметр для измерения суммы мощностей нескольких электрических генераторов.

Кроме измерительных приборов, понятие и классификация которых рассмотрена на примере радиоизмерительных приборов, ***к комплексным СИ, как указывалось ранее,*** относятся *измерительные установки и системы.*

Измерительная установка — совокупность функционально объединенных средств измерений и вспомогательных устройств, предназначенная для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем, и расположенная в одном месте.

Измерительную установку, используемую для испытания каких-либо изделий, называют *испытательным стендом.* Измерительную установку с включенными в нее образцовыми средствами измерений (в частности, эталонами), предназначенную для поверки средств измерений, называют *поверочной установкой* (например, установка для поверки вольтметров). Некоторые большие измерительные установки, используемые в основном для проверки радиотехнических комплексов типа радиолокационных станций (РЛС), называют *измерительными машинами.*

Измерительная система — совокупность средств измерений и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, предназначенная для выработки сигналов измерительной информации в удобной для автоматической обработки форме, ее передачи и использования в различных системах управления. Принято достаточно условно разделять ***измерительные системы*** на *информационно-измерительные системы, измерительно-вычислительные комплексы и компьютерно-измерительные системы.*

Информационно-измерительные системы — это совокупность функционально объединенных средств измерений, средств вычислительной техники и вспомогательных устройств, соединенных между собой каналами связи, предназначенных для выработки сигналов измерительной информации о физических величинах, свойственных данному объекту, в форме, удобной для автоматической обработки, передачи и (или) использования в автоматических системах управления.

Измерительно-вычислительные комплексы представляют собой совокупность средств измерений и компьютеров, объединенных с помощью устройств сопряжения и предназначенных для измерений, научных исследований и расчетов.

Компьютерно-измерительная система (виртуальный прибор) состоит из стандартного или специализированного компьютера со встроенной в него платой (модулем) сбора данных.

Таким образом, по такому наиболее распространённому признаку классификации СИ в теории измерений и метрологии, как - ***роль СИ в процессе измерения и выполняемые им функции,*** классификацию СИ можно представить в виде схемы, изображённой на рис.1.8.

Рис. 1.8. Классификация средств измерений по их роли в процессе измерения и выполняемым функциям

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗМЕРЯЕМЫХ ВЕЛИЧИН И СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Общая теория измерений наряду с изучением вопросов, которые уже рассмотрены в данном учебном пособии и будут рассмотрены в его третьей и четвёртых разделах, занимается также изучением математических моделей всех составляющих участвующих в процессе измерения и тем самым оказывающих непосредственное влияние на результат измерения. К таким составляющим в самом общем виде можно отнести – объект измерения, являющийся источником измеряемой величины; среда, в которой происходит распространение измерительного сигнала от объекта измерения до средства измерения; средство измерения, обеспечивающее получение результата измерения измеряемой величины.

Под математической моделью всех составляющих измерительного процесса принято понимать их описание математическими средствами, очень широкое многообразие, которых к настоящему времени, не позволяет проведения однозначного математического моделирования. Поэтому при изложении материала данного раздела учебного пособия будут приведены лишь некоторые варианты математического описания измеряемых величин и средств измерений.

2.1. Математические модели измеряемых величин

В подразделе 1.1 первой части данного учебного пособия показано, что предметом изучения общей теории измерений, являются физические величины, причем, как правило, измеряемые ФВ, которые могут быть выражены количественно в виде определённого числа установленных единиц измерений. Получение информации о значении измеряемой ФВ производится с помощью ***измерения***, *под которым понимают нахождение значения ФВ опытным путём с помощью специальных технических средств.*

Реальные ФВ, свойственны материальным объектам (процессам, явлениям) и изучаются в естественных (физика, химия, и т.п.) и технических науках. Значения этих реальных ФВ, получаемые в результате измерений, в природе и сферах жизнедеятельности человечества наиболее часто носят случайный характер. Это обусловлено множеством влияющих факторов таких, например, как: природа (источник) происхождения этих ФВ; окружающая среда, оказывающая порой очень существенное влияние на значение ФВ; внешние условия, при которых производится измерение ФВ; несовершенство применяемого метода и методики измерения; несовершенство технической реализации применяемого метода в конкретном средстве измерения; внутренняя нестабильность параметров и характеристик применяемого средства измерения и т.д.

Даже этот небольшой приведенный перечень факторов, оказывающих влияние как на значение самой ФВ, так и на её измеренное значение, говорит о том, что полное математическое описание измеряемых физических величин потребует применения достаточно объёмного и трудоёмкого математического аппарата стационарных и нестационарных случайных процессов, а также аппарата статистических методов анализа.

С целью упрощения математического описания измеряемых ФВ, как правило, в настоящее время в метрологии производят описание (математическое моделирование) не самих ФВ, не сигналов поступающих с объектов измерения (*сигнал* - физический процесс, несущий информацию о состоянии какого-либо объекта измерения), а измерительных сигналов и их вероятностных характеристик. При этом ***под измерительным сигналом*** *понимают материальный носитель информации, представляющий собой некоторый физический процесс, один из параметров которого функционально связан с измеряемой ФВ, т.е. с информативным параметром.*

Поэтому, при рассмотрении вопроса о математическом моделировании измеряемых величин, который практически очень важен и необходим на этапах разработки средств и методик измерений, будем говорить о математическом моделировании измерительных сигналов и их вероятностных характеристик.

2.1.1 Классификация и краткая характеристика измерительных сигналов

Прежде чем перейти непосредственно к математическому моделированию измерительных сигналов и их вероятностных характеристик, следует сказать, что существует значительное многообразие измерительных сигналов, которые принято классифицировать по различным признакам. По причине того, что в настоящее время измерение и обработку любых ФВ стремятся выполнять автоматизированными и автоматическими средствами измерений, так чтобы можно было производить обработку сразу по получению результатов измерений, причём на средствах вычислительной техники, то в метрологии измерительные сигналы являются, в основном, электрическими.

Обобщённая классификация измерительных сигналов по различным признакам представлена на рис.2.1. Признаками такой классификации являются следующие.

По характеру изменения информативного и временного параметров измерительные сигналы подразделяются на аналоговые, дискретные и цифровые.

Аналоговым сигналом называют сигнал физического процесса или явления, который математически можно представить непрерывной или кусочно-непрерывной функцией времени $U(t)$, при этом и функция, и её аргумент t могут принимать любые значения на заданных интервалах, т.е

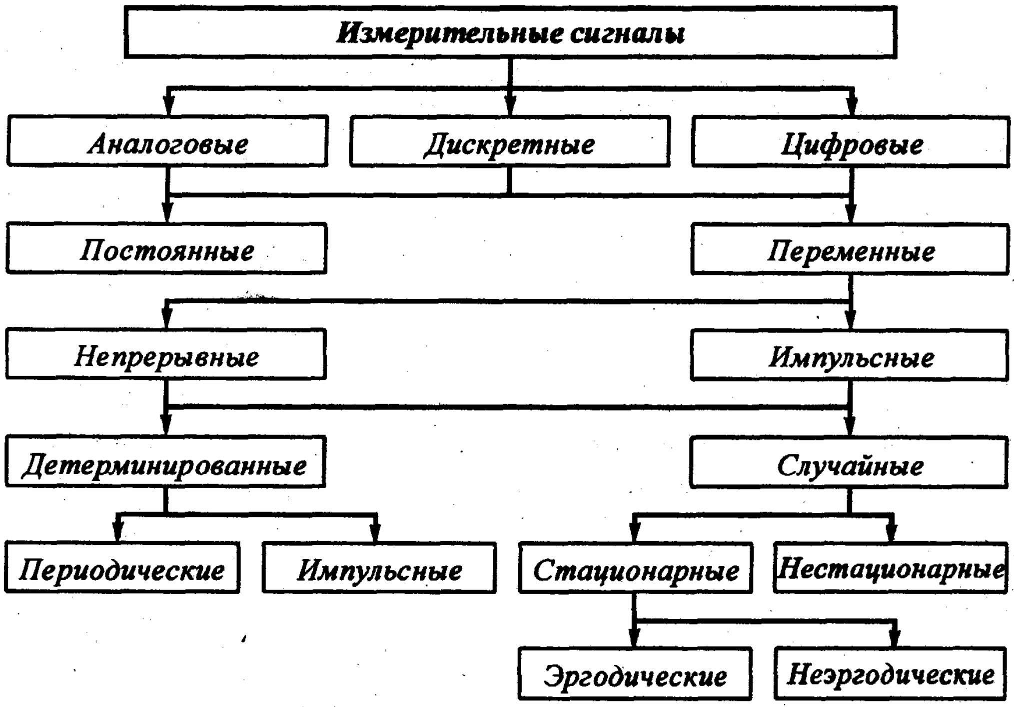


Рис. 2.1. Классификация измерительных сигналов

$U \in (U_{\min}; U_{\max})$ и $t \in (t_{\min}; t_{\max})$. Пример графического представления некоторого варианта аналогового $Y_a(t)$ сигнала представлен на рис. 2.2. а.

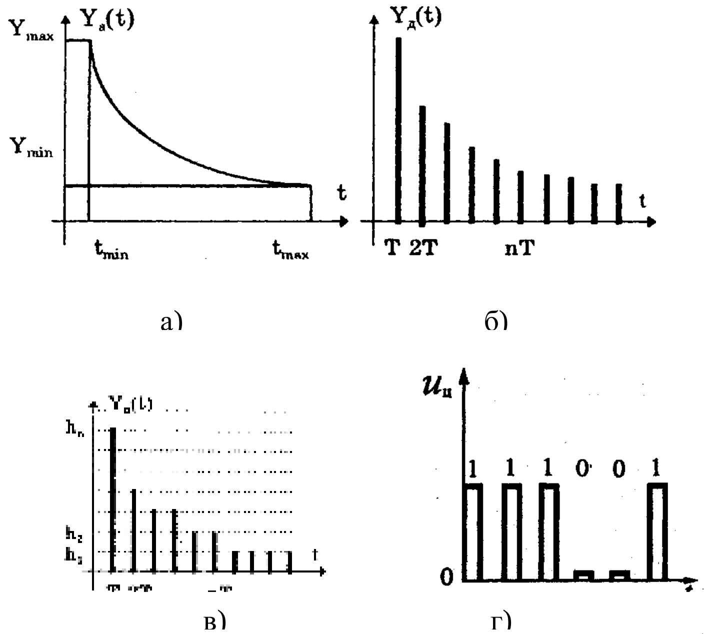


Рис.2.2. Примеры аналогового (а), дискретного по времени (б), дискретного по уровню и времени (в), цифрового измерительных сигналов

Дискретным сигналом называют такой сигнал, который изменяется дискретно или по времени, или по уровню, или по уровню и по времени одновременно. *Дискретный во времени сигнал* (см. рис.2.2.б) может принимать любые значения $U_Д(nT) \in (U_{\min}; U_{\max})$, называемые выборками (отсчётами) в дискретные моменты времени nT, где T = const – интервал (период) дискретизации, а n = 0; 1; 2; … - целое положительное число. *Дискретный по уровню сигнал* может принимать ограниченный ряд дискретных значений $h_i = nq$, кратных кванту q, но в любой момент времени $t \in (t_{\min}; t_{\max})$. *Дискретный по уровню и по времени сигнал* (см. рис.2.2.в) выполняет правило дискретности и по уровню, и по времени одновременно.

Цифровым сигналом называют такой сигнал, который является дискретным сигналом и по уровню, и по времени. Следует заметить, что цифровой сигнал, в общем случае, имеет конечное число дискретных уровней, которые можно пронумеровать целыми числами (см. рис.2.2.в). Однако при практической реализации цифровых средств измерений и других цифровых вычислительных средств чаще всего используют двоичные цифровые электрические сигналы, которые представляют собой дискретные по двум уровням и дискретные по времени сигналы. Высокий (по модулю) уровень потенциала в таких сигналах, как правило, принимают за сигнал соответствующий логической единице - «1» , а низкий (по модулю) уровень – за сигнал соответствующий логическому нулю – «0» (см. рис.2.2.г). Хотя необходимо отметить, что за «0» и «1» реально в СИ могут и принимаются другие уровни сигналов, например, наоборот относительно приведенного примера.

По характеру изменения во времени измерительные сигналы делятся на *постоянные,* амплитуда которых с течением времени не изменяется ($U(t)= A$, где $A = const$) , и *переменные,* мгновенные значения которых меняются во времени [$U(t)=F(t)$].

Переменные сигналы бывают *непрерывными во времени и импульсными.* К *непрерывным* сигналам относятся сигналы, параметры которых изменяются во времени непрерывно. *Импульсный* сигнал — это сигнал с конечной энергией, существенно отличный от нуля в течение ограниченного интервала времени.

По математическому представлению (по степени наличия *априорной информации)* все измерительные сигналы делятся на три основные группы: *детерминированные (регулярные), квазидетерминированные и случайные.*

Детерминированными называют сигналы, мгновенные значения которых в любой момент времени достоверно известны, т. е. предсказуемы с вероятностью, равной единице, а математическая модель не содержит неизвестных параметров. Например, синусоидальный гармонический сигнал имеет математическую модель вида: $u(t) = U_m \sin(wt + j)$. Детерминированными являются сигналы измерительных мер. Например, выходной сигнал генератора гармонического сигнала (рис. 2.3, *а)* характеризуется значениями амплитуды U_m, круговой (циклической) частоты w и начальной фазы j, которые установлены на его органах управления.

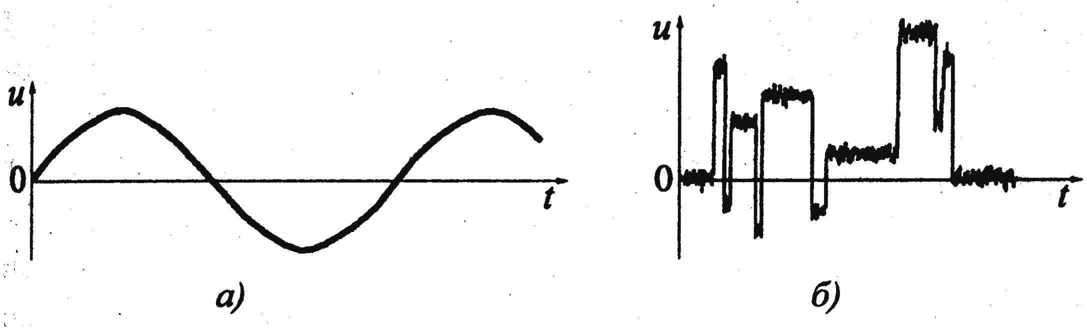


Рис. 2.3. Измерительные сигналы:
а — детерминированный; б — случайный

Квазидетерминированными сигналами называют сигналы с частично известным характером изменения во времени, т.е. с одним или несколькими параметрами. Следует заметить, что значительное большинство измерительных сигналов являются фактически квазидетерминированными.

В зависимости от сложности, применяемых для математического описания, математических зависимостей, *детерминированные и квазидетерминированные сигналы*, часто делят на *элементарные и сложные сигналы.*

К элементарным принято относить такие идеализированные сигналы как *постоянный и гармонический сигналы*, а также *сигналы, описываемые единичной и дельта-функцией.* Понятие и математические модели элементарных измерительных сигналов рассмотрены в подразделе 2.1.3. данного учебного пособия.

К сложным измерительным сигналам принято относить *периодические, импульсные и модулированные сигналы,* понятие и математические модели которых рассмотрены в подразделе 2.1.4. данного учебного пособия.

В зависимости от периодичности повторения мгновенных значений, детерминированные и квазидетерминированные сигналы подразделяют на *периодические и непериодические (импульсные).*

Периодическим называется сигнал, мгновенные значения которого повторяются через постоянный интервал времени (период), т.е. сигнал удовлетворяющий условию: $u(t) = u(t + nT)$, где T - период повторения.

Следует заметить, что *периодические сигналы характеризуются спектром*, которых различают три вида: *комплексный, амплитудный и фазовый*.

Комплексный спектр это комплексная функция $A(kw)$ дискретного аргумента kw, кратного целому числу k значений круговой частоты w периодического сигнала ***u(t)***, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье вида:

$$A(kw) = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} u(t) e^{-jkw\,t} dt, \tag{2.1}$$

Амплитудный спектр это функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала $(|A(kw)|)$ вида:

$$G(kw) = |A(kw)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[A(kw)] + \mathrm{Im}^2[A(kw)]}, \tag{2.2}$$

где ***Re*** и ***Im*** действительная (вещественная) и мнимая составляющие комплексного числа $\dot{A}(kw) = \dot{Z}(t) = \mathrm{Re}(Z) + j\,\mathrm{Im}(Z)$, причём j – мнимая единица.

Фазовый спектр это функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала (угол между радиус-вектором комплексного числа $A(kw)$ и направлением действительной оси ***Re*** в прямоугольной системе координат ***Re***O ***Im***) вида:

$$j\,(\kappa w) = \arg[A(kw)] = arctg \frac{\mathrm{Im}[A(kw)]}{\mathrm{Re}[A(kw)]}, \tag{2.3}$$

Периодические сигналы обладают, так называемым линейчатым (дискретным) спектром, так как он состоит из отдельных линий, высота которых равна (в зависимости от вида спектра) либо амплитуде, либо фазе соответствующих гармоник. Построенная таким образом спектральная диаграмма позволяет тем самым наглядно судить о спектре сигнала. На практике комплексный спектр, как правило, не рассматривают, а применяют лишь амплитудный и фазовый спектры, точнее сказать амплитудно-частотный и фазочастотный спектры. При этом совокупность амплитуд гармонических составляющих носит название *спектра амплитуд*, а фаз – *спектра фаз*. На спектральных диаграммах откладывают текущую частоту, а по оси ординат, как правило, вещественную или амплитуду, или фазу соответствующих гармонических составляющих. На рис.2.4. б), в качестве примера, представлен вещественный амплитудный спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов (см. рис.2.4 а), а на рис.2.4. в – фазовый спектр некоторого периодического сигнала.

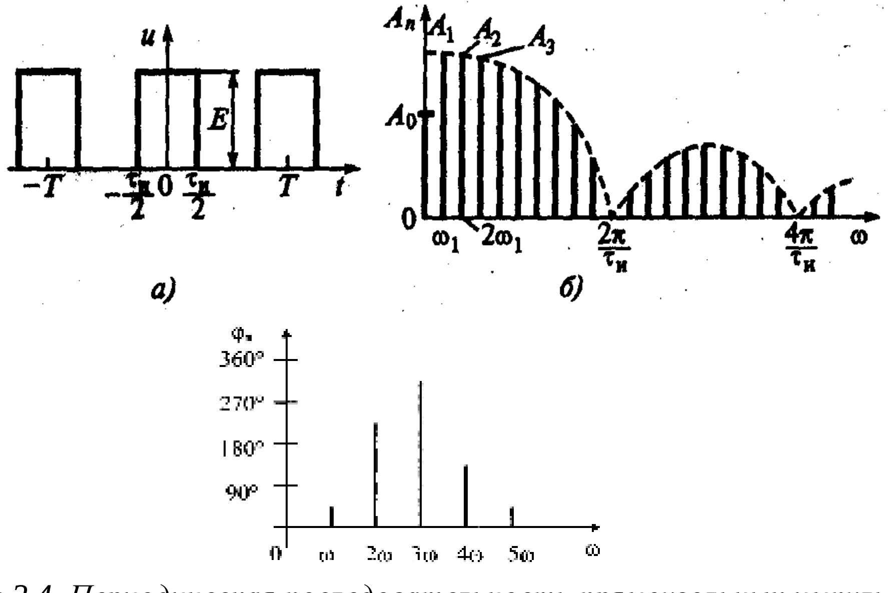


Рис.2.4. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (а) и её вещественный амплитудный спектр (б), фазовый спектр некоторого периодического сигнала (в)

При рассмотрении спектров употреблялось понятие гармонических составляющих, гармоник. *Под гармоникой* понимают гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой равными соответствующим значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента (частоты) этого спектра. Частота первой гармоники равна частоте $f_1 = w_1/(2p) = 1/T$, частота второй гармоники - удвоенной частоте $2f_1$ и.т.д.

Непериодическим (импульсным) называется сигнал мгновенные значения, которого не повторяются через определённый (заданный) постоянный интервал времени (период) или сигнал, отражающий физическую величину на очень небольшом интервале времени.

Случайные сигналы **—** это сигналы, мгновенные значения которых в любые моменты времени не известны и не могут быть предсказаны с вероятностью, равной единице (рис. 2.3, б).

Случайные сигналы делятся на стационарные и нестационарные. *Стационарными* называют случайные сигналы, статистические характеристики которых не изменяются во времени. Остальные случайные сигналы — *нестационарные*. Стационарные и нестационарные случайные сигналы могут быть как *эргодическими*, так и *неэргодическими*.

Для эргодических случайных процессов любая реализация (сигнал отдельного наблюдения) достаточной продолжительности является, как бы «полномочным представителем» всей совокупности реализаций (группы сигналов отдельных наблюдений) этого случайного процесса и имеет постоянные значения его вероятностных характеристик (математическое ожидание и дисперсия), а *для неэргодических* - любая реализация случайного процесса имеет свои вероятностные характеристики, зависящие от номера реализации (номера сигнала отдельного наблюдения) этого процесса.

2.1.2 Математические модели измерительных сигналов

Математическими моделями измерительных сигналов в теории измерений являются модели вида $Y = f(X, A, B, C, ...)$, где Y – основной информативный параметр измерительного сигнала; X – независимый аргумент сигнала; A, B, C - параметры сигнала. В зависимости от типа независимого аргумента X (в качестве аргумента X может выступать либо текущее время t, либо круговая частота w, *либо координата точки в пространстве* z) ***измерительные сигналы*** могут описываться *временными* ($X=t$)*, частотными* ($X=w$)*, или координатными* ($X= z$) *математическими моделями*. Выбор той или иной модели определяется при постановке задачи изучения конкретной физической системы. В большинстве случаев (на практике) используются модели сигналов, зависящие от одного независимого аргумента, при этом, в основном, такими аргументами являются либо текущее время ($X=t$) – временная модель, либо частота ($X=w$) – частотная модель.

Временная модель сигнала использует известные математические функции (например - линейную функцию, функции синуса и косинуса, экспоненциальную и логарифмические функции, и т.д.), которые наиболее часто описывают изменение сигнала во времени. В общем случае эта модель может быть записана в виде $Y = f(t, A, B, C, ...)$, где один или несколько параметров сигнала A, B, C, и т.д. зависят от измеряемой величины. Временная модель измерительного сигнала позволяет определить его важнейшие характеристики – энергию, мощность и длительность.

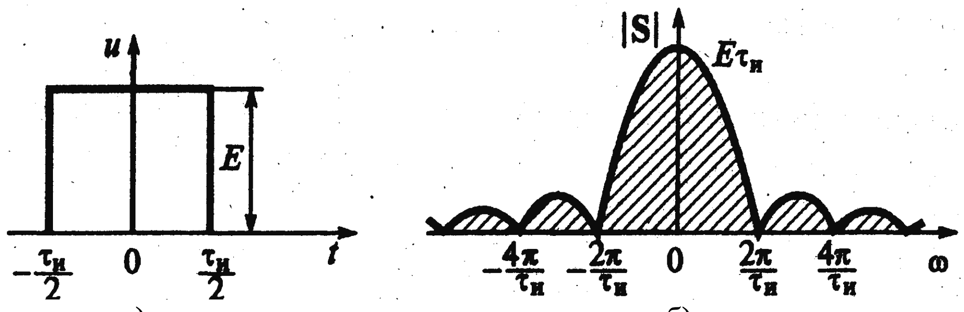
Частотная модель периодического сигнала основывается на использовании преобразования Фурье для сигнала $Y(t)$:

$$Y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(nw\, t + j_n), \qquad (2.4)$$

где A_0 – постоянная составляющая сигнала; A_n, j_n – амплитуда и фаза n – ой гармоники; w - круговая (циклическая) частота сигнала. Множество значений $A_n(w)$ и $j_n(w)$ образуют соответственно амплитудный и фазовый спектры периодического измерительного сигнала (см. например, рис.2.4. б) и в) соответственно). Таким образом, в отличие от временной модели измерительного сигнала, частотная модель периодического сигнала позволяет получить спектральное представление об этом сигнале и оценить его частотный диапазон, т.е. значения граничных частот, между которыми заключены все или основные, имеющие наибольшие амплитуды $A_n(w)$, гармонические составляющие сигнала. Частотный диапазон относится к одной из важнейших характеристик измерительного сигнала, так как именно он определяет необходимую полосу пропускания средства измерения, которое будет принимать этот сигнал.

Следует заметить, что при уменьшении разности между соседними частотами гармонических составляющих дискретного спектра периодического сигнала, т.е. при увеличении периода T, этот дискретный спектр при $T \to \infty$ превратится в непрерывный спектр. Так, для непериодических (импульсных) сигналов, которые отражают значение ФВ лишь на очень небольшом интервале, например, для одиночного прямоугольного импульса (см. рис.2.5. а), спектр амплитуд (модуль его спектральной функции $|S(w)|$) является непрерывным и имеет вид представленный на рис. 2.5. б).

Частотная модель непериодического (импульсного) сигнала $Y(t)$ использует: *спектральную функцию* $S(w)$; *модуль спектральной функции* $|S(w)|$, часто называемый спектром; *аргумент спектральной функции* $\arg S(w)$.



а) б)

Рис.2.5 Одиночный прямоугольный импульс (а) и его спектр амплитуд (б)

Спектральную функцию $S(w)$ определяют с помощью интеграла Фурье вида:

$$S(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)\cdot e^{-jw\,t}dt=|S(w)|e^{-j\arg S(w)}=\mathrm{Re}[S(w)]-j\,\mathrm{Im}[S(w)]. \quad (2.5)$$

В тригонометрической форме записи спектральной функции, как комплексного числа, в данном выражении $\mathrm{Re}[S(w)]$ и $\mathrm{Im}[S(w)]$ - соответственно действительная (вещественная) и мнимая части этой спектральной функции $S(w)$, причём:

$$\mathrm{Re}[S(w)]=\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)\cos(w\,t)dt; \qquad \mathrm{Im}[S(w\,t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)\sin(w\,t)dt. \quad (2.6)$$

Модуль и *аргумент спектральной функции* определяют, используя следующие выражения:

$$|S(w)|=\sqrt{\mathrm{Re}^2[S(w)]+\mathrm{Im}^2[S(w)]}; \quad \arg S(w)=arctg\frac{\mathrm{Im}[S(w)]}{\mathrm{Re}[S(w)]}. \quad (2.7)$$

Спектральную функцию $S(w)$ часто называют комплексным спектром, т.к. она, являясь комплексной величиной, содержит и комплекс информации, как о спектре амплитуд, так и о спектре фаз. При этом модуль спектральной функции $|S(w)|$ есть ни что иное, как спектр амплитуд непериодического сигнала, при чём необходимо отметить, что он (модуль) выражает не непосредственно амплитуду сигнала, а её спектральную плотность.

Используемые при решении задач измерения модели сигналов должны в наибольшей степени отражать существенные свойства изучаемых процессов. Неадекватность модели, описывающей некоторый измерительный сигнал, реальному физическому процессу обусловливает возникновение специфической погрешности. Однако модель сигнала должна быть по возможности простой, содержать минимально необходимое для адекватного описания сигнала количество независимых аргументов и параметров.

Реальные измерительные сигналы всегда наблюдаются в условиях воздействия помех, т. е. представляют собой реализации случайного процесса. При этом под ***помехой*** *понимается сигнал, однородный с измерительным и действующий одновременно с ним.* Присутствие помехи приводит к появлению дополнительной погрешности измерения. В связи с тем, что существует большое разнообразие помех, то их, классифицируют по различным признакам, таким, например как, место возникновения помех, вид включения источника помехи и измерительного сигнала в эквивалентную схему средства измерения, вид частотного спектра помехи, основные свойства помехи и т.д. Однако в значительном числе случаев в моделях измерительных сигналов не отражается наличие случайной компоненты в изучаемом физическом процессе. Такие модели при наличии информации в них только о значениях параметров измерительных сигналов называют *детерминированными.* Детерминированные модели используются в основном лишь для описания образцовых сигналов.

Квазидетерминированной называют модель, в которой значения одного или нескольких параметров априорно неизвестны. Квазидетерминированные модели используются для представления измерительных сигналов, в которых влиянием случайной (шумовой) компоненты можно пренебречь. Примером использования квазидетерминированной модели может служить описание измерительного сигнала в виде гармонического колебания с известной частотой, но с неизвестной амплитудой.

В отличие от квазидетерминированной модели, позволяющей описать закон изменения измерительного сигнала с точностью до неизвестного параметра, *модель случайного сигнала* используют для представления физических процессов, закон изменения которых во времени или в пространстве носит случайный характер. Модель такого сигнала представляет собой описание статистических характеристик случайного процесса путем задания плотности распределения вероятности, корреляционной функции, спектральной плотности энергии и др.

2.1.3. Математические модели элементарных измерительных сигналов

В подразделе 2.1.1. было сказано, что ***к элементарным измерительным сигналам*** относятся: *постоянный во времени сигнал; сигналы, описываемые единичной и дельта-функцией (единичный импульс); гармонический сигнал.* Рассмотрим понятие и математические модели этих сигналов.

Постоянный сигнал — самый простой из элементарных сигналов, описываемый математической моделью вида Y = A, где A — единственный параметр сигнала. Графики временной и частотной моделей постоянного сигнала приведены на рис. 2.6.

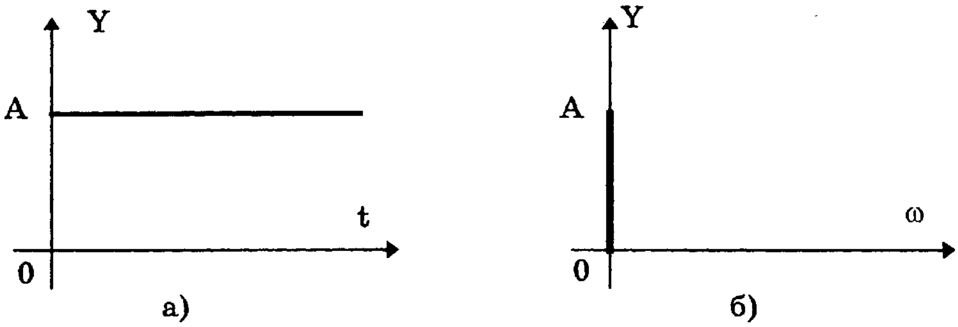


Рис. 2.6. Графики временной (а) и частотной (б) моделей постоянного сигнала

Сигнал, описываемый единичной функцией, является идеализированным сигналом, и он не имеет специального названия. *Единичная функция,* называемая иногда функцией Хевисайда или функцией включения, описывается уравнением

$$1(t - t_0) = s\,(t) = \begin{cases} 0, & при\ t < t_0; \\ 1, & при\ t \geq t_0. \end{cases} \qquad (2.4)$$

Как видно из (2.4) единичная функция имеет один параметр — момент времени t_0 . Ее временная и частотная модели представлены на рис. 2.7 а)

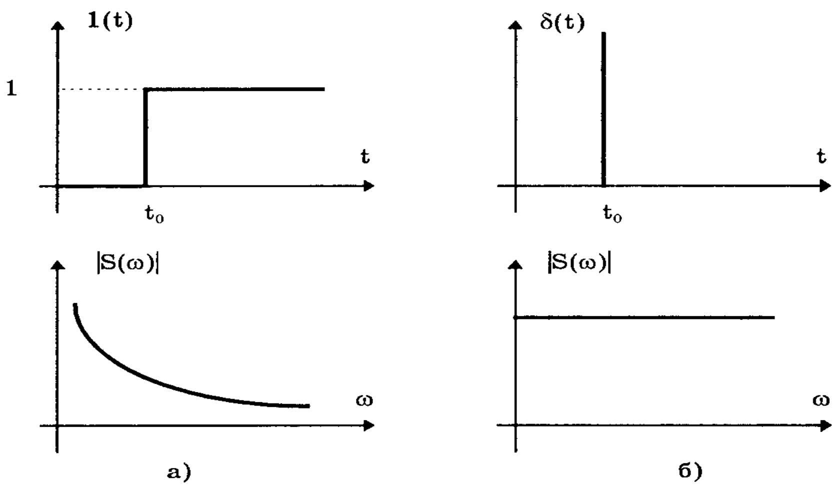


Рис. 2.7. График моделей единичной (а) и дельта-функции (б)

Единичный импульс, *описываемый дельта-функцией* (функцией Дирака), является теоретической моделью бесконечно короткого импульса с бесконечно большой амплитудой, что можно считать идеализацией реально наблюдаемых импульсов конечной длительности и амплитуды. ***Дельта-функция*** описывается математической моделью вида:

$$d(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & при \quad t=t_0\ ;\\ 0\ , & при \quad t\neq t_0\ .\end{cases} \qquad (2.5)$$

Она, как и модель единичной функции, имеет также один параметр — момент времени t_0 и физическую размерность циклической (круговой) частоты – с$^{-1}$. Графики временной и частотной моделей единичного импульса (дельта-функции) представлены на рис.2.6 б), из которых видно, что дельта-функция имеет спектр бесконечной ширины.

Площадь единичного импульса всегда равна единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(t-t_0)dt=1\,. \qquad (2.6)$$

Дельта-функция обладает важнейшим свойством, благодаря которому она получила широкое применение в математике, физике, радио - и измерительной технике. Пусть имеется некоторая непрерывная функция времени $f(t)$. Тогда, согласно формулам (2.5) и (2.6), справедливо соотношение:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot d(t-t_0)dt= f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} d(t-t_0)dt= f(t_0). \qquad (2.7)$$

Выражение (2.7) характеризует фильтрующее свойство (выделяющее, или как его ещё называют, стробирующее – от слова «строб» - короткий прямоугольный импульс) дельта функции, которое используется для представления дискретизованных во времени измерительных сигналов с шагом дискретизации $T=\Delta t$. В частности, если $f(t)= f(t_0)=A$ – постоянный сигнал, значение которого равно 1, то из (2.7) следует выражение (2.6), которое и объясняет название данного сигнала, как единичного сигнала.

Единичная и дельта-функции связаны между собой следующими соотношениями:

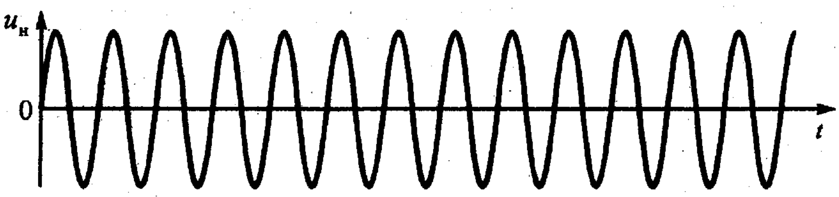
$$1(t - t_0) = \int_0^t d\,(t - t_0)\,dt\,, \qquad d\,(t - t_0) = \frac{d[1(t - t_0)]}{dt}. \qquad (2.7)$$

Гармонический сигнал может описывается математической моделью либо через функцию синуса, либо через функцию косинуса. Поэтому математическая модель данного элементарного сигнала записывается в виде одного из двух следующих выражений:

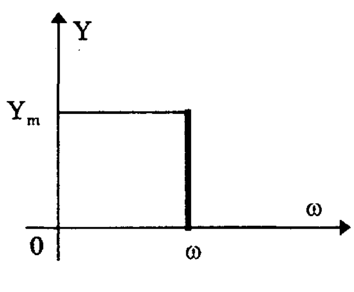
$$Y(t) = Y_m \cdot \sin(wt + j\,) = Y_m \cdot \sin\left(2p\, {t}/{T} + j\,\right), \qquad (2.8)$$

$$Y(t) = Y_m \cdot \cos(w\,t + j\,) = Y_m \cdot \cos\left(2p\, {t}/{T} + j\,\right). \qquad (2.9)$$

Как видно из выражений (2.8) и (2.9), у гармонического сигнала имеется три параметра: амплитуда Y_m; циклическая (круговая) частота w (или линейная частота $f = {1}/{T}$) или период T; начальная фаза (начальный угол сдвига фазы) j. Графики временной и частотной моделей гармонического сигнала представлены на рис.2.8.



а)



б)

Рис.2.8. Временная (а) и частотная модель (б) гармонического сигнала

Гармонический сигнал широко используется в измерительной технике для анализа и синтеза измерительных сигналов.

Все рассмотренные математические модели элементарных измерительных сигналов используются для представления математических моделей сложных квазидетерминированных сигналов, путём, как правило, разложения их в ряд на соответствующие элементарные функции, обладающие известными свойствами.

2.1.4. Математические модели сложных измерительных сигналов

В подразделе 2.1.1. сказано, что к ***сложным измерительным сигналам*** принято относить *периодические, импульсные и модулированные сигналы*. Рассмотрим понятие и математические модели этих сигналов.

Одним из распространённых видов сложных сигналов являются ***периодические*** квазидетерминированные ***сигналы,*** математическая модель которых представляет собой периодическую функцию времени $Y(t) = Y(t \pm kT)$, где T – период сигнала, а k = 1, 2, 3, …Периодические сигналы могут быть представлены путём разложения их в ряд Фурье:

$$Y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2p}{T} \cdot t - j_k \right), \tag{2.10}$$

где фактически производится суммирование элементарных гармонических сигналов.

Другая форма записи ряда Фурье, используя формулу Эйлера, а именно, $e^{jx} = \cos x + j\sin x$, имеет вид:

$$Y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[B_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2p}{T} \cdot t \right) + C_k \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2p}{T} \cdot t \right) \right]. \tag{2.11}$$

Сравнивая выражения (2.10) и (2.11), можно показать, что используемые в этих уравнениях коэффициенты связаны между собой следующим соотношениями:

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}\,; \qquad\qquad j_k = arctg\left({C_k}\Big/{B_k} \right). \tag{2.12}$$

На практике в качестве временной модели для периодических квазидетерминированных сигналов часто используют их среднее значение A_0, определяемое выражением:

$$A_0 = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} Y(t)dt \quad , \tag{2.13}$$

а в качестве частотной модели используют частотный спектр, представляющий собой набор коэффициентов $(A_k, j_k, k = 1,2,...)$, характеризующих амплитуды и фазы элементарных гармонических сигналов, входящих в ряд Фурье периодического сигнала. Значения указанных коэффициентов могут быть получены, используя следующие выражения:

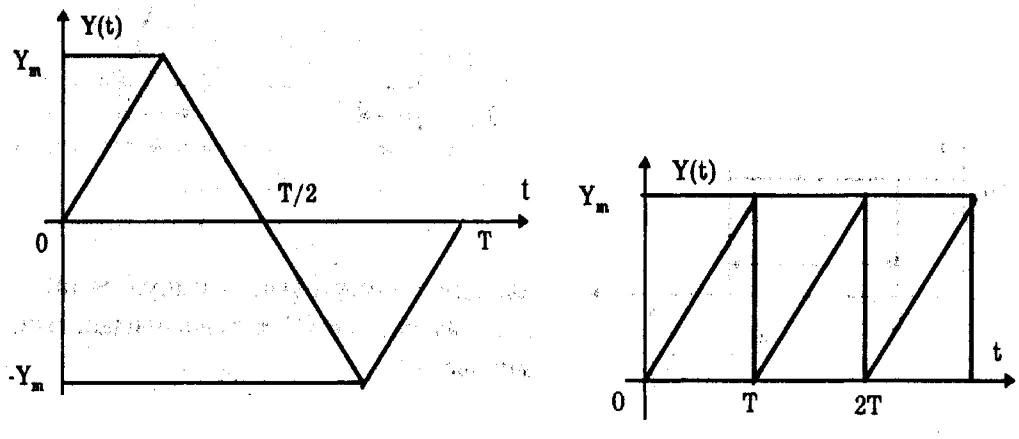
$$B_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} Y(t) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2p\,t}{T} \right) dt\,, \quad C_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} Y(t) \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2p\,t}{T} \right) dt\,. \tag{2.14}$$

$$j_k = arctg\left(\frac{C_k}{B_k} \right). \tag{2.15}$$

Частотный спектр (амплитудный и фазовый спектры) периодического сигнала имеет дискретный характер (см., например, спектры представленные на рис.2.4), при этом, в зависимости от решаемой задачи, в частотной модели периодического квазидетерминированного сигнала может быть любой из трёх его параметров - амплитуда, фаза и частота гармонических составляющих.

В измерительной технике широкое применение нашли такие периодические измерительные сигналы, которые состоят из линейно изменяющихся участков своих амплитуд. Наибольшее распространение получили два из таких сигналов – линейный *знакопеременный периодический сигнал и линейный однополярный (пилообразный) периодический сигнал* (см. рис.2.9. а) и б) соответственно).

Математическая модель знакопеременного периодического сигнала может быть описана системой трёх линейных уравнений вида:



а) б)

Рис. 2.9. Линейный знакопеременный (а) и однополярный линейно изменяющийся (пилообразный) (б) периодические сигналы

$$Y(t) = \begin{cases} 4Y_m t / T, & \text{\textit{при}} \quad 0 \le t \le T/4; \\ 4Y_m (T/4 - t)/T + Y_m, & \text{\textit{при}} \quad T/4 \le t \le 3T/4; \\ 4Y_m (t - 3t)/4 - Y_m, & \text{\textit{при}} \quad 3T/4 \le t \le T. \end{cases} \qquad (2.16)$$

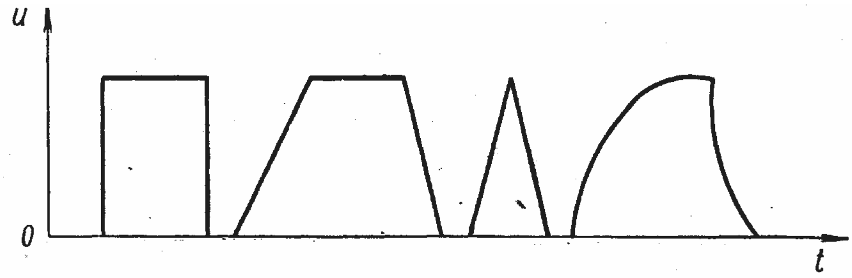
Как видно из данной системы уравнений, на участке ($0 \le t \le T/4$) функция $Y(t)$ ведёт себя, как линейно возрастающая функция (функция, имеющая общий вид $Y = kx$ при $k > 0$) аргумента t с угловым коэффициентом прямой $k = {}^{4Y_m}/_{T}$; на участке ($T/4 \le t \le 3T/4$) эта функция ведет себя линейно убывающей функцией с коэффициентом $k < 0$, причём в точке $(T/2\,; 0)$ функция меняет свой знак с положительного значения на отрицательное значение; на участке ($3T/4 \le t \le T$) функция $Y(t)$ снова ведёт себя (как и на первом участке) возрастающей функцией с коэффициентом $k > 0$. На остальных участках изменения данной функции во времени t т.е. на других временных участках кратных периоду T, данная периодическая функция ведёт себя точно также, как и на трёх участках системы уравнений (2.16).

Однополярный линейно изменяющийся (пилообразный) сигнал имеет более простую математическую модель вида:

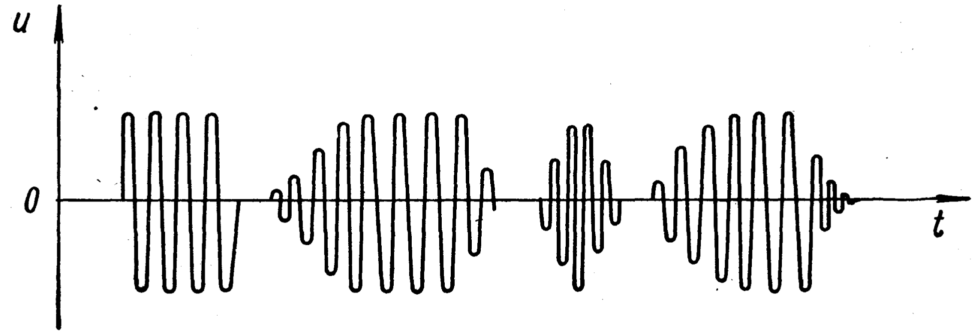
$$Y(t) = Y_m \frac{t}{T}, \quad \text{при } 0 \le t \le T \ . \qquad (2.17)$$

Представленное выражение, говорит о том, что математическая модель пилообразного сигнала является, на интервале времени равном периоду данного сигнала T, линейной возрастающей функцией времени t с положительным угловым коэффициентом прямой $k = {Y_m}/{T}$. Однако следует заметить, что модель (2.17) и график 2.8. б) являются идеализированными, так как реальные пилообразные сигналы своё максимальное амплитудное значение Y_m изменяют до 0 не мгновенно, а за конечное (хоть и очень малое) время, причём, как правило по экспоненциальному закону, так как это время обусловлено быстрым электрическим разрядом конденсатора, входящим в состав генератора пилообразного напряжения в качестве основного элемента.

Математические модели импульсных сигналов весьма многообразны, так как в качестве измерительных сигналов в измерительной технике, в настоящее время используется очень большое количество разнообразных импульсов. *Под импульсом*, в общем случае, понимается физическая величина действующая в течение короткого промежутка времени, малого или сравнимого с временем переходных процессов, происходящих в объекте, формирующем эту величину. В связи с тем, что в современной измерительной технике наиболее часто используются электрические импульсы, то необходимо отметить, что *под электрическим импульсом* понимают напряжение (ток), действующее в электрической цепи в течение короткого промежутка времени, малого или сравнимого с переходными процессами в этой цепи. *Различают* два вида электрических импульсных сигналов: *видеоимпульсы и радиоимпульсы*. *Видеоимпульсом* называют напряжение (ток), мгновенное значение которого отличается от нуля или постоянного уровня в течении короткого промежутка времени. Наиболее распространёнными формами видеоимпульсов являются прямоугольная, трапециидальная, треугольная и экспоненциальная (см. рис. 2.9. а).



а)



б)

Рис. 2.10. Видео- и радиоимпульсы

Одиночный видеоимпульс характеризуется следующими основными параметрами: *полярностью, амплитудой и длительностью импульса, длительностью фронта и среза.*

Различают видеоимпульсы *положительной и отрицательной полярности.*

Амплитуда импульса U_m представляет собой значение напряжения (тока) импульса, измеренное от начального его уровня до установившегося максимального значения. *Длительность импульса* $t_и$ равна интервалу времени от момента появления импульса до момента его исчезновения. Принято длительность импульса отсчитывать на уровне $0{,}1U_m$. *Длительность фронта импульса* $t_ф$ определяется временем нарастания импульса от уровня $0{,}1U_m$ до $0{,}9U_m$. *Длительность среза импульса* t_c определяется интервалом времени, в течение которого напряжение (ток) уменьшается от уровня $0{,}9U_m$ до уровня $0{,}1U_m$.

Радиоимпульсами (см. рис. 2.10.б) называют импульсы высокочастотного синусоидального напряжения (тока), огибающей которых является видеоимпульс. Параметры радиоимпульсов аналогичны соответствующим параметрам видеоимпульсов, за исключением лишь одного дополнительного параметра – значение несущей частоты колебания (частота заполнения радиоимпульса).

Для математического моделирования последовательности импульсов (см., например, периодическую последовательность прямоугольных импульсов, представленную на рис. 2.11.) дополнительно используют следующие параметры: период повторения, пауза и скважность.

Период повторения (следования) импульсов T измеряется интервалом времени от момента появления одного импульса до момента появления

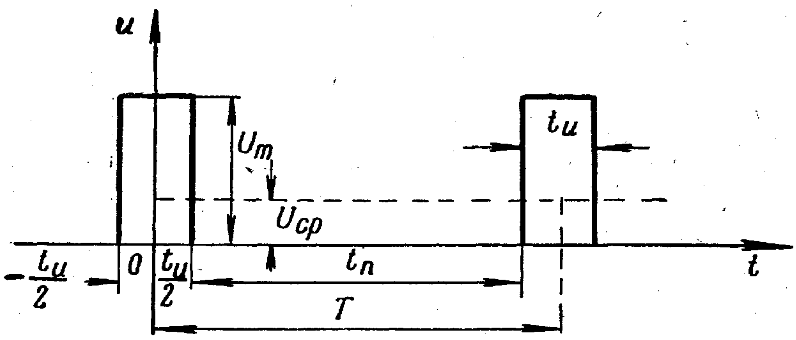
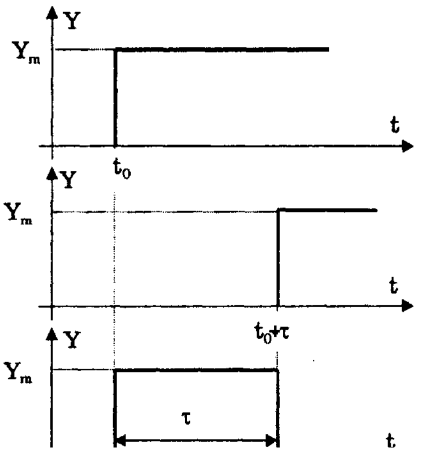


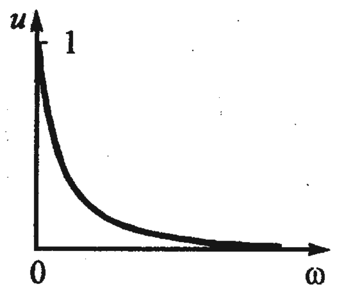
***Рис.** 2.11. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов*

следующего импульса той же полярности. Величину, обратную периоду повторения, называют частотой повторения (следования) импульсов *F*. *Пауза* t_n - это интервал времени между моментом окончания одного импульса и началом следующего за ним импульса. Скважность импульсов q определяется отношением периода повторения импульсов к его длительности $q = T/t_u$. В частном случае, *при скважности равной 2,* последовательность импульсов называют *меандром*. Величину обратную скважности называют коэффициентом заполнения g.

Рассмотрим математические модели некоторых видеоимпульсов и последовательности прямоугольных импульсов.

Идеальный одиночный прямоугольный видеоимпульс формируется как разность двух единичных функций, сдвинутых на время t, равное длительности импульса t_u (см. рис. 2.12. а).





а) *б)*

Рис.2.12. Формирование идеального одиночного прямоугольного импульса из единичных функций (а) и экспоненциальный импульс (б)

Математическая модель такого импульса представляется выражением вида:

$$Y(t) = Y_m \cdot [1(t - t_0) - 1(t - t_0 - t)], \tag{2.18}$$

Экспоненциальный импульс это сигнал с «полубесконечной» длительностью (см. рис.2.11. б) и при единичной амплитуде описывается математической моделью вида:

$$Y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ e^{-a\,t}, & t \geq 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

где $a. > 0$ и является вещественным параметром этого типа импульса.

Математическая модель периодической последовательности идеальных прямоугольных импульсов строится исходя из того, что она (последовательность) представляет собой ничто иное, как сумму соответствующих одиночных импульсов. Поэтому данная модель имеет следующий вид:

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_m \cdot [1(t - kT) - 1(t - kT - t_u)], \tag{2.20}$$

где обозначения приняты для рис. 2.11., а k - целочисленное положительное число, обозначающее порядковый номер импульса в бесконечной по количеству последовательности импульсов.

Частотная модель периодической последовательности прямоугольных импульсов напряжения, симметричных относительно оси ординат (см. рис. 2.11.), может быть получена путём разложения в ряд Фурье функции u(t) на элементарные гармонические косинусоидальные составляющие:

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_{c_n} \cdot \cos w\, t. \qquad (2.21)$$

Здесь: U_0 – постоянная составляющая, определяемая для данного случая выражением $U_0 = U_m \cdot \frac{t_u}{T}$; U_{c_n} - амплитуды косинусоидальных членов ряда Фурье; w - круговая (циклическая) частота последовательности импульсов.

Делая необходимые преобразования, можно показать, что *частотная математическая модель периодической последовательности прямоугольных импульсов напряжения* примет вид:

$$u(t) = U_m \cdot \frac{t_u}{T} + \frac{2U_m}{p} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(np\, g)}{n} \cdot \cos(w\, t), \qquad (2.22)$$

где g - коэффициент заполнения импульсов, равный обратной величине скважности импульсов, т.е. $g = {}^{t_u}\!/_{T}$.

Спектральная диаграмма, соответствующая этой последовательности импульсов, состоит из отдельных гармоник, т. е. спектр является дискретным (см. рис. 2.12, где под U_{mn} — понимается амплитуда n —гармоники)

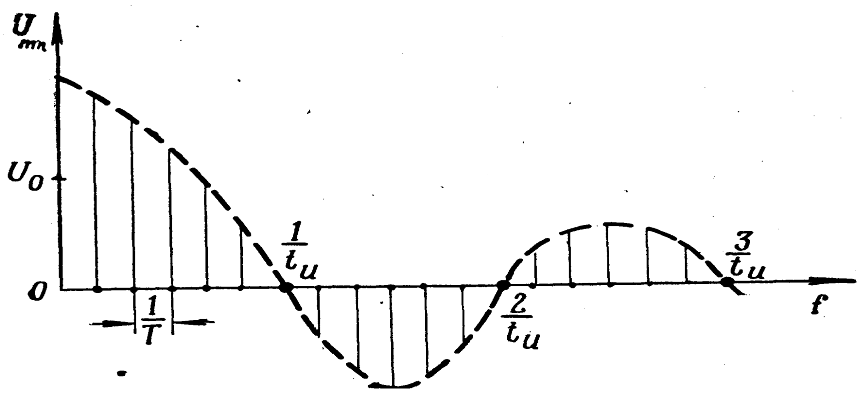


***Рис.2.13.**. Спектр последовательности прямоугольных импульсов*

Из анализа спектрального состава последовательности прямоугольных импульсов (рис. 2.12) можно сделать следующие выводы:

1. Спектр последовательности импульсов является дискретным и безграничным. Следовательно, для получения идеальной прямоугольной формы импульсов необходимо суммировать бесконечно большое число гармоник.
2. Амплитуды гармоник, номера которых кратны скважности импульсов, обращаются в нуль.
3. Наибольшие амплитуды имеют гармоники, расположенные примерно в середине между гармониками с нулевыми амплитудами.
4. Гармоники, лежащие по разные стороны от гармоники с нулевой амплитудой, отличаются по фазе на 180°.
5. Чем меньше длительность импульсов, тем шире частотный интервал между гармониками с нулевыми амплитудами.
6. Уменьшение частоты следования импульсов при неизменной их длительности приводит к увеличению плотности спектра. В предельном случае при $F \to 0 \quad (T \to \infty)$, т. е. при переходе от импульсной последовательности к одиночному импульсу, спектр содержит составляющие всех частот от 0 до ∞ и превращается из дискретного в сплошной.
7. В полосе спектра частот от 0 до $f = 2/t_и$ сосредоточено 95% всей энергии импульса, и поэтому ширина этой области называется активной шириной амплитудного спектра импульса.
8. Когда частота следования $F \to \infty \quad (T \to 0)$, все импульсы на временной диаграмме сливаются в прямую, параллельную оси абсцисс, а в их спектре, остается только постоянная составляющая.

Модулированные сигналы. В метрологии (в теории измерений) под *модуляцией* понимается процесс, при котором измерительный сигнал $e(t)$ воздействует на какой-либо параметр некоторого стационарного сигнала $u_н(t)$, обладающего такими физической природой и характером изменения во времени, при которых удобны его дальнейшие преобразование и передача. В качестве стационарного сигнала, именуемого *несущим*, обычно выбирают либо последовательность импульсов, либо синусоидальное (гармоническое) колебание:

$$u_н(t) = U_н \cos(w_0 t + j_0) = U_н \cdot \cos[\Psi(t)], \qquad (2.23)$$

где $U_н$ — амплитуда в отсутствие модуляции; w_0 — угловая (круговая) частота; j_0 — начальная фаза; $\Psi(t) = w_0 + j_0$ — полная фаза.

В зависимости от того, какой из параметров гармонического несущего колебания подвергается воздействию, различают *амплитудную, частотную, фазовую* и ряд видов импульсной модуляции.

Физический процесс, обратный модуляции, называется *демодуляцией,* или *детектированием,* и заключается в получении из модулированного колебания сигнала, пропорционального модулирующему.

Наиболее простым модулированным сигналом является ***амплитудно-модулированный (АМ) сигнал,*** в котором измерительная информация заложена в амплитуду $U_н(t)$ несущего колебания (рис.2.13):

$$u_н(t)=U_н(t)\cdot\cos\left(w_0 t + j_0\right)=\left[U_н + ke(t)\right]\cos\left(w_0 t + j_0\right), \qquad (2.24)$$

где k — безразмерный коэффициент пропорциональности.

Пусть модулирующий сигнал — гармоническое колебание вида

$$e(t)=E_0\cos\Omega\, t, \qquad (2.25)$$

где E_0 — амплитуда; $\Omega = 2p\,/T$ — круговая частота; T_1 — период.

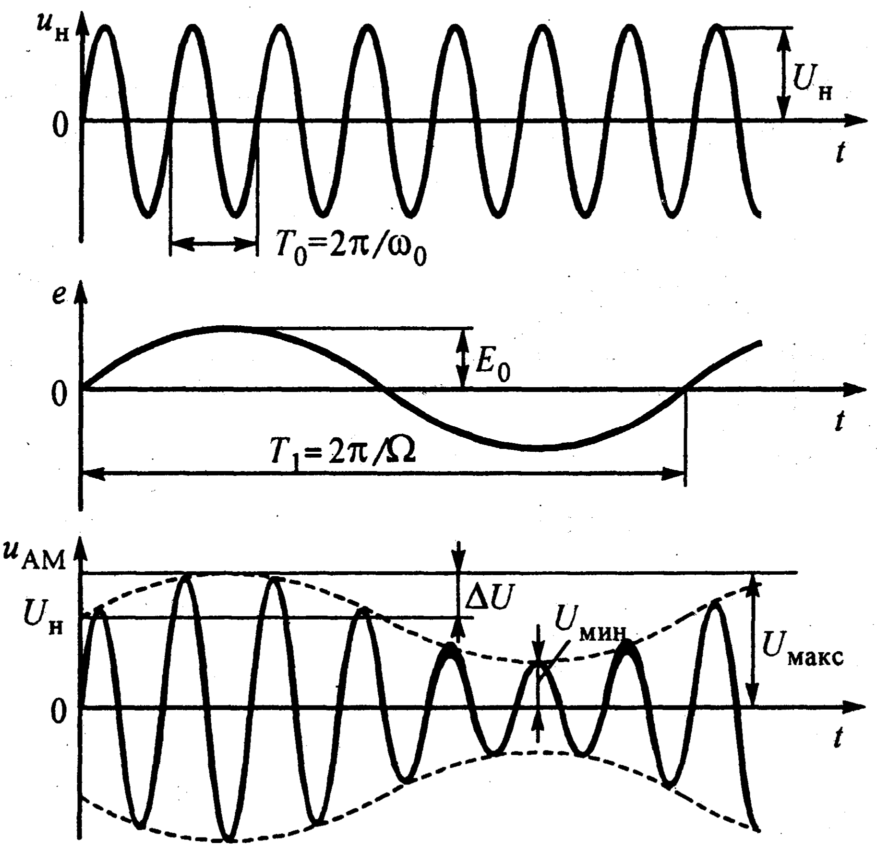


Рис.2.13. Амплитудная модуляция

Тогда, приняв для упрощения $j_0 = 0$, и подставив формулу (2.25) в (2.24), получим выражение для АМ-сигнала:

$$u_{AM}(t) = (U_н + kE_0 \cos \Omega t) \cos w_0 t = U_н (1 + M \cos \Omega t) \cos w_0 t, \quad (2.26)$$

где ***kEo*** = Δ ***U*** максимальное отклонение амплитуды АМ-сигнала от амплитуды несущей $U_н$; *M* = ***kEo*** / $U_н$ = Δ*U* / $U_н$ — *коэффициент* или *глубина амплитудной модуляции.*

Графики несущего колебания с начальной фазой j_0 = 90°, модулирующего сигнала и АМ-сигнала показаны на рис. 2.13.

Частотно-модулированный (ЧМ) сигнал. При частотной модуляции несущая частота $w(t)$ связана с модулирующим сигналом ***e(t)*** зависимостью:

$$w(t) = w_0 + k_ч e(t), \quad (2.27)$$

где $k_ч$ — размерный коэффициент пропорциональности ЧМ сигнала. Рассмотрим *однотональную частотную модуляцию*, когда модулирующим сигналом является гармоническое колебание $e(t) = E_0 \cos \Omega t$. Пусть $j_0 = 0$. Полную фазу ЧМ-сигнала в любой момент времени *t* определим путем интегрирования частоты, выраженной через формулу (2.27):

$$\Psi(t) = \int_0^t w(t) dt = \int_0^t (w_0 + k_ч E_0 \cos \Omega t) dt = w_0 t + \frac{w_{дч}}{\Omega} \sin \Omega t, \quad (2.28)$$

где $w_{дч} = k_ч E_0$ — максимальное отклонение частоты от значения w_0, или *девиация (изменение) частоты* при частотной модуляции.

Отношение $m_ч = w_{дч} / \Omega = k_ч E_0 / \Omega$, являющееся *девиацией фазы* несущего колебания, называют *индексом частотной модуляции.*

С учетом этого выражения и (2.28) ЧМ-сигнал запишется как

$$u_{чм}(t) = U_н \cos[\Psi(t)] = U_н \cos(w_0 t + m_ч \sin \Omega t). \quad (2.29)$$

На рис.2.14. представлены временные диаграммы соответственно несущего $u_н(t)$, модулирующего $e(t)$ и ЧМ – сигналов $u_{чм}(t)$

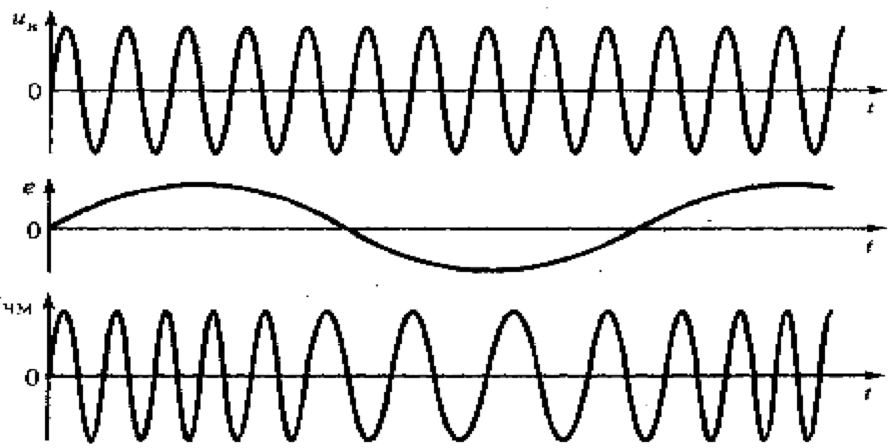


Рис. 2.14. Частотная однотональная модуляция

Фазомодулированный (ФМ) сигнал. При однотональной модуляции фаза несущего колебания:

$$\Psi(t) = w_0 t + k_ф E_0 \cos\Omega t = w_0 t + m_ф \cos\Omega t, \qquad (2.30)$$

где $k_ф$ — коэффициент пропорциональности; $m_ф = k_ф E_0$ — *индекс фазовой модуляции*. Подставляя формулу (2.30) в (2.23), запишем ФМ-сигнал как

$$u_{фм}(t) = U_н \cos(w_0 t + m_ф \cos\Omega t). \qquad (2.31)$$

Нетрудно заметить, что ЧМ-сигнал и ФМ-сигнал при однотональной модуляции очень похожи. В последние годы в измерительной технике всё шире применяются ***сигналы с импульсной модуляцией***. При *импульсной модуляции* (рис. 2.15) в качестве несущего колебания (точнее, поднесущего) используются различные периодические импульсные последовательности, в один из параметров которых вводится измерительная информация.

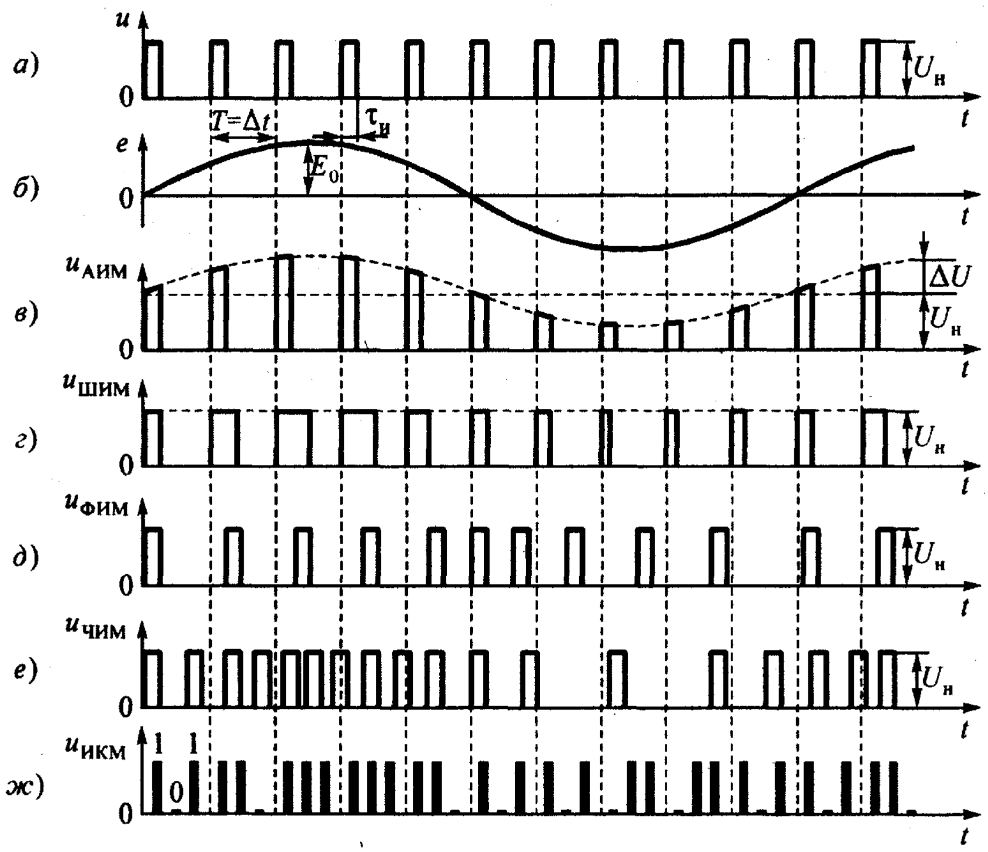


Рис.2.15. Импульсная модуляция

Для дискретных сигналов процесс модуляции принято называть *манипуляцией* параметров импульсов.

Пусть поднесущим колебанием является периодическая последовательность прямоугольных импульсов с амплитудой $U_н$, длительностью $t_и$ и периодом повторения T (рис. 4.11, *а*). Для наглядности и упрощения математических выкладок выберем в качестве модулирующего сигнала гармоническое колебание $e(t) = E_0 \cos \Omega t$, у которого начальная фаза θо = 90° (рис. 2.15, б).

Импульсную модуляцию в зависимости от выбора изменяемого параметра модулируемой последовательности делят на:

амплитудно-импульсную (АИМ), когда по закону измерительной информации изменяется амплитуда импульсов исходной последовательности (рис. 2.15, в);

широтно-импулъсную (ШИМ), при изменении по закону измерительной информации длительности (ширины) импульсов исходной последовательности (рис. 2.15, г);

фазоимпульсную (ФИМ), или *времяимпульсную* (ВИМ), если по закону измерительной информации изменяется временное положение импульсов (рис. 2.15, *д),*

частотно-импульсную модуляцию (ЧИМ), при изменении по закону измерительной информации частоты следования импульсов поднесущей (рис.2.15,е);

импульсно-кодовая модуляция (ИКМ), при которой первичный сигнал превращается в цифровой код — последовательность импульсов (1 — «единиц») и пауз (0 — «нулей»), имеющих одинаковую длительность. Этот вид модуляции (рис. 2.15, *ж)* наиболее широко применяется в современной измерительной технике.

2.1.5. Математические модели вероятностных характеристик измерительных сигналов

Рассмотренные в предыдущих подразделах данного учебного пособия математические модели элементарных и сложных измерительных сигналов, относящиеся, согласно классификации измерительных сигналов, к детерминированным и квазидетерминированным сигналам, не позволяют провести моделирование ещё одного такого, очень распространённого типа измерительных сигналов, как случайных сигналов.

Анализ различных измерительных задач по измерению, например, таких ФВ, как температура, давление, мощность, частота, скорость, энергетическая сила света, световой поток, напряжение, звуковая энергия и т.д., показывает, что практически любой сигнал, несущий информацию об указанных ФВ, можно рассматривать как случайный (стохастический) сигнал, то есть сигнал мгновенные значения которых в любые моменты времени не известны и не могут быть предсказаны с вероятностью, равной единице.

Случайные сигналы, являются реализациями случайных процессов, которые при изучении их требуют статистических методов анализа и определения разнообразных вероятностных характеристик этих процессов. При статистическом подходе нет необходимости определять точный результат отдельного опыта или измерения, а можно основываться на исследовании множества опытов. При рассмотрении множества опытов удается найти закономерности и количественные соотношения, характеризующие случайный процесс в среднем. Если повторять наблюдения (измерения) в течение длительного времени (или другим измерительным прибором аналогичного типа), численные значения измеренной величины будут иные, т.е. они также являются случайными величинами.

Совокупность отдельных наблюдений в теории случайных процессов называются *ансамблем реализации*. Ансамбль реализации — математическая абстракция, аналитическая модель случайного процесса. Конкретные реализации, наблюдаемые при исследованиях, представляют собой физические процессы, явления или объекты и входят в ансамбль как его неотъемлемая часть. Например, ансамблем реализации случайного процесса является группа сигналов, наблюдаемых одновременно на выходах идентичных генераторов сигналов специальной формы. Ансамбль реализации случайного процесса является основным экспериментальным материалом, на основе которого можно получить его характеристики и параметры.

На рис. 2.16 показан некий условный ансамбль реализации случайных функций. Однако этот ансамбль случайных функций получен в результате измерения *неслучайной функции* и, после обработки данных

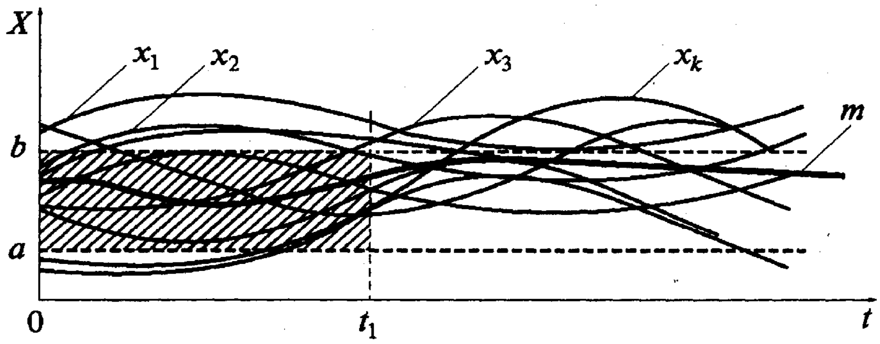


Рис.2.16. Ансамбль реализаций случайного процесса

ансамбля, необходимо иметь сведения об истинном (неслучайном) значении измеряемой случайной функции $X(t)$.

Рассмотрим вероятностные характеристики случайных процессов, представляющих собой фактически совокупность измерительных сигналов, которые при многократных измерениях поступают от объекта измерения на вход средства измерения. ***Под вероятностными характеристиками случайных процессов*** принято понимать*: функцию и плотность распределения вероятностей; числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсию); корреляционные и спектральные функции.*

Пусть случайный процесс описан некоторой обобщенной случайной функцией $X(t)$. Конкретный вид реализаций $x_1, x_2, x_3, \ldots$ этой функции процесса, полученной в результате проведенного измерительного эксперимента, позволяет определить все ее параметры и её уже можно считать (по крайней мере, условно) *детерминированным сигналом*. Следовательно, случайная функция $X(t)$ совмещает в себе характерные признаки, как случайной величины, так и детерминированной функции. При фиксированном значении аргумента t эта функция превращается в случайную величину, а в результате каждого отдельного опыта становится детерминированной функцией.

Если выбрать некоторый момент времени t_1 (см. рис. 2.16),то совокупность отдельных мгновенных значений всех реализаций ансамбля в заданный момент времени t_1 будет некоторой случайной величиной $X(t_1)$, называемой *сечением случайного процесса*. Эта случайная величина может иметь любые заранее неизвестные значения в возможном интервале ее изменения.

Известно, что наиболее полной характеристикой случайной величины $X(t_1)$ является *функция распределения F(x),* являющаяся *интегральным законом распределения*. Эта функция определяется как вероятность того, что все значения случайной величины $X(t_1)$ не превышают некоторого заданного уровня переменной x:

$$F(x) = P\lfloor X(t_1) < x \rfloor, \tag{2.32}$$

где P — символ, характеризующий вероятность данного события, которая определяется на интервале $[0;1]$.

В случаях, когда случайная величина $X(t_1)$ является непрерывной случайной величиной во времени, чаще пользуются производной функции распределения, а именно одномерной *плотностью распределения вероятности*:

$$f(x) = p(x, t_1) = \frac{dF}{x}. \tag{2.33}$$

Одномерная плотность распределения всегда является неотрицательной величиной, причём площадь под кривой вероятности $p(x, t_1)$равна единице.

Если задать какой-либо интервал a,b изменения параметра x случайной величины $X(t_1)$ (см. рис.2.16), то из формулы (2.33) следует, что значение

$$p(x,t_1)dx = F(a) - F(b) = P[a < X(t_1) < b]. \quad (2.34)$$

есть ни что иное, как вероятность попадания случайной величины $X(t_1)$ в заданный интервал *a,b*. В случае если параметр $a \to -\infty$, а параметр *b* принимает текущее значение переменой *x*, то интегральная функция распределения случайного процесса может быть определена, используя соотношение вида:

$$F(x) = P[-\infty < X(t_1) < x] = \int_{-\infty}^{x} p(x,t_1)dx. \quad (2.35)$$

Несмотря на то, что случайные процессы наиболее полно описываются функцией и плотностью распределения оперировать с такими функциями довольно сложно, поэтому при решении измерительных задач и при математическом моделировании измерительных сигналов стараются обойтись характеристиками и параметрами этих законов, которые описывают случайные процессы не полностью, а лишь частично. К важнейшим и наиболее простым из них из них относятся такие ***числовые характеристики (параметры),*** как *математическое ожидание* m_X *и дисперсия* D_X.

В связи с тем, что согласно классификации случайных измерительных сигналов они подразделяются на стационарные и нестационарные, то на рис. 2.17, для наглядности представлены некоторые варианты реализаций данных случайных процессов.

Моделирование параметров и характеристик случайного процесса существенно упрощается, если этот процесс стационарен и эргодичен. Напомним, что стационарными называют случайные процессы, статистические характеристики которых не изменяются во времени. Можно также сказать, что к стационарным процессам относятся случайные процессы, протекающие во времени однородно, частные реализации которых с постоянной амплитудой колеблются вокруг некоторой средней функции. Для стационарных случайных

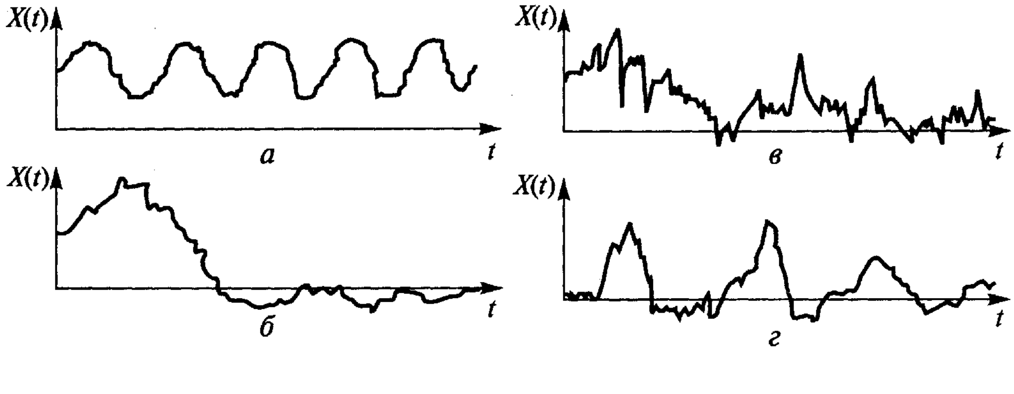


Рис.2.17. Реализации случайных процессов:
а — стационарный; б — нестационарный с переменным математическим ожиданием; в — нестационарный с переменной дисперсией; г — нестационарный с переменным математическим ожиданием и дисперсией

процессов должны выполняться два важных требования:

математическое ожидание стационарного случайного процесса должно быть постоянно, т.е. $m_x(t) = m_x = const$;

дисперсия стационарного случайного процесса по сечениям его ансамбля реализаций должна быть постоянной величиной, т.е. $D_x(t) = D_x = const.$

Известно, что значительное большинство стационарных случайных процессов обладают свойством *эргодичности,* при котором усреднение по ансамблю реализации можно заменить усреднением по времени одной реализации в пределах бесконечно длинного интервала T_x. Проще говоря, для стационарного эргодического случайного процесса любая его реализация достаточной продолжительности является как бы «полномочным представителем» всей совокупности реализации процесса.

Исходя из данных представлений, можно сказать, что для стационарного случайного процесса характерна вероятностная эквивалентность всех временных сечений ансамбля реализации, а для эргодического — вероятностная эквивалентность всех реализации, входящих в ансамбль.

В принципе при моделировании случайных измерительных сигналов возможны и другие виды случайных процессов. *Стационарный неэргодический* процесс — это случайный процесс, у которого эквивалентны временные сечения (вероятностные характеристики не зависят от времени), но не эквивалентны реализации (вероятностные характеристики зависят от номера реализации). У *нестационарного эргодического* случайного процесса эквивалентны реализации (вероятностные характеристики не зависят от номера реализации), но не эквивалентны сечения по времени (вероятностные характеристики зависят от текущего времени). *Нестационарный неэргодический* — это случайный процесс, у которого не эквивалентны ни временное сечения, ни реализации. Итак, классификация на основе стационарности и эргодичности дает четыре класса случайных процессов: *стационарные эргодические, стационарные неэргодические, нестационарные эргодические, нестационарные неэргодические.*

Несмотря на такое широкое многообразие реальных случайных процессов, которые обрабатываются средствами измерений при измерении ряда ФВ, в практике математического моделирования измеряемых величин в большинстве случаев представляет интерес измерение вероятностных характеристик стационарных эргодических процессов, что и рассматривается далее.

Рассмотрим *математические модели основных числовых характеристик стационарного эргодического случайного процесса*.

Математическое ожидание (среднее значение) случайного процесса моделируют путем усреднения (эта операция обозначена чертой над соответствующей функцией) значений заданной реализации (жирная линия, обозначенная как m на рис. 2.16)

$$m_x = \overline{x(t)} = \lim_{T_x \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T_x} x(t)dt. \qquad (2.36)$$

Дисперсия случайного процесса, характеризующая рассеяние случайной величины $x(t)$ вокруг её математического ожидания, моделируется, как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины $x(t)$от её математического ожидания m_x:

$$D_x = s_x^2 = \lim_{T_x \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T_x} [x(t) - m_x]^2 dt. \qquad (2.37)$$

Используемое в выражении (2.37) обозначение $s_x = \sqrt{D_x}$ есть *среднее квадратическое отклонение* (СКО). Следует заметить, что для измерительных сигналов дисперсия определяет мощность флюктуаций (изменений) этих сигналов.

Несмотря на то, что математическое ожидание и дисперсия являются весьма важными характеристиками случайного процесса,, но они не являются исчерпывающими его характеристиками, так как определяются только одномерным законом распределения. Эти числовые характеристики не могут характеризовать взаимосвязь между различными сечениями случайного процесса при различных значениях времени t_1 и t_2. В этом случае используют такую числовую характеристику, как ***корреляционная функция*** $R(t_1, t_2)$, являющуюся неслучайной функцией двух аргументов t_1 и t_2. Корреляционная функция, называемая часто *автокорреляционной* (АКФ), описывает статистическую связь (корреляция — степень связи) между мгновенными значениями случайной функции, разделенными заданным значением времени $\Delta t = t_1 - t_2$. При равенстве аргументов, т.е. при $t_1 = t_2$ корреляционная функция равна дисперсии случайного процесса. Корреляционная функция всегда неотрицательна.

Если копия сигнала $u(t+t)$, или, что равноценно $u(t$ - τ), смещена относительно своего оригинала $u(t)$ на некоторый интервал времени τ, то в качестве количественной оценки степени отличия (связи) исходного сигнала $u(t)$ от его смещенной во времени копии $u(t$ + τ) и используют автокорреляционную функцию.

Для детерминированного сигнала конечной длительности математическая модель АКФ представляет собой интеграл вида:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot u(t-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\cdot u(t+t). \qquad (2.38)$$

Важнейшее свойство АКФ — её четность: $R(t) = R(t-t)$, что нетрудно доказать математически.

Часто при математическом моделировании используют нормированную АКФ вида:

$$K(t) = R(t)/R(0) = R(t)/s^{2}, \qquad (2.39)$$

где $s^{2} = R(0)$, т.е. дисперсия, равная АКФ при отсутствии смещения между оригиналом сигнала и его копией.

Для периодического сигнала с периодом следования T, энергия которого бесконечно велика (так как сигнал существует бесконечное время), вычисление АКФ по формуле (2.38) неприемлемо. Поэтому для таких сигналов принято определять АКФ за его период:

$$R_{П}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} u(t)\cdot u(t+t)dt. \qquad (2.40)$$

В общем случае для некоторого интервала наблюдения $T_{оп}$ (времени опроса) корреляционная функция случайного стационарного эргодического процесса имеет вид:

$$R(t) = \lim_{T_{on} \to \infty} \frac{1}{T_{on}} \cdot \int_{0}^{T_{on}} x(t) \cdot x(t+t)\,dt. \qquad (2.41)$$

При моделировании случайных процессов, где наблюдается связь между двумя случайными реализациями $x_1(t)$ и $x_2(t)$ используют такую вероятностную характеристику, как ***взаимная корреляционная функция***, математическая модель которой, в случае эргодичности этих двух случайных реализаций, имеет вид:

$$R_{12}(t) = \lim_{T_{on} \to \infty} \frac{1}{T_{on}} \cdot \int_{0}^{T_{on}} x_1(t) \cdot x_2(t+t)\,dt. \qquad (2.42)$$

Для оценки спектрального характера случайных измерительных сигналов при их математическом моделировании используют такую числовую вероятностную характеристику случайного процесса, относящуюся к разряду ***спектральных характеристик***, *как спектральная плотность мощности (спектр мощности)* $S_x(w)$. Известно (например, из статистической радиотехники), что спектральная плотность $S_x(w)$ и функция корреляции $R_x(t)$ связаны межу собой теоремой Хинчина-Винера, выражаемой в виде прямого и обратного преобразования Фурье:

$$S_x(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t) \cdot e^{-jwt}\,dt\,, \qquad (2.43)$$

$$R_x(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(w) \cdot e^{-jwt}\,dw\,. \qquad (2.44)$$

Поэтому моделирование спектральной плотности $S_x(w)$ сводится к моделированию вначале функции корреляции $R_x(t)$ по одной из зависимостей (2.38) – (2.42), а затем уже к моделированию непосредственно спектральной плотности $S_x(w)$, используя выражение (2.43).

2.2. Математические модели средств измерений

2.2.1. Общие принципы и алгоритм математического моделирования средств измерений

Под математической моделью средства измерения (СИ) понимается адекватное описание математическими средствами особенностей и свойств СИ, оказывающих влияние на результат измерения.

Математическая модель СИ описывает взаимосвязь его показаний Y со значением измеряемой величины X, конструктивными параметрами $a_1, a_2, a_3 ... a_m$ и влияющими величинами $z_1, z_2, z_3 ... z_k$ с использованием некоторой функции F, т.е. $Y = F(x, a_1, a_2, a_3 ... a_m, z_1, z_2, z_3 ... z_k)$.

При классифицировании средств измерений по различным признакам в подразделе 1.3.3 показано, какое широкое многообразие СИ существует в настоящее время, что естественно отражается на их конкретном устройстве, а, следовательно, и на построении всего измерительного тракта, где происходит преобразование измерительных сигналов. Поэтому при построении математических моделей (ММ) средств измерений либо на этапе их проектирования, либо при определении свойств и характеристик конкретного типа (экземпляра) СИ, необходимо знать структуру этого СИ. При этом *под структурой СИ* в данном случае следует понимать количественный и качественный состав блоков, в которых происходит определённое преобразование сигнала, а также их функциональная связь между собой по выполнению измерительных операций (преобразований). Современные СИ, являясь сложными техническими системами, имеют соответственно довольно сложную структуру, которую весьма непросто выделить. Поэтому, для упрощения анализа процессов, протекающих в СИ, и для выделения структуры СИ в целом при его математическом моделировании используют, как правило, четыре основных понятия – измерительная цепь, измерительный канал и измерительный тракт, структурная схема. Следует заметить, что при введении данных понятий предполагается обязательное проведение измерительного преобразования в каждом измерительном элементе, цепи, .канале, тракте (в зависимости от используемого понятия).

Измерительная цепь – совокупность элементов СИ, образующих непрерывный путь прохождения измерительного сигнала от её входа до её выхода и осуществляющая его определённое преобразование.

Измерительный канал – измерительная цепь, представляющая собой последовательное соединение СИ и (или) других технических устройств и предназначенная для измерения одной ФВ. Измерительный канал имеет нормированные метрологические характеристики.

Измерительный тракт – совокупность измерительных каналов, имеющих нормированные метрологические характеристики и предназначенная для измерения одной ФВ

Структурная схема – условное графическое обозначение измерительной цепи, канала, тракта, средства измерения в виде плоских общепринятых геометрических фигур (внутри этих фигур написано или условно обозначено название элемента схемы) и связей между ними. На структурной схеме могут быть также указаны: все входные, выходные и промежуточные (преобразуемые) величины; поясняющие надписи; временные или другие зависимости сигналов в наиболее важных точках схемы; информационные таблицы и т.д. Структурные схемы состоят из соединенных структурных элементов (блоков), каждый из которых выполняет одну из определённых измерительных функций. На рис.2.18., в качестве примера, представлен вариант структурной схемы радиоприёмного устройства прямого усиления, предназначенного для приёма радиосигналов или естественных радиоизлучений и преобразования их к виду, позволяющему использовать содержащуюся в них информацию.

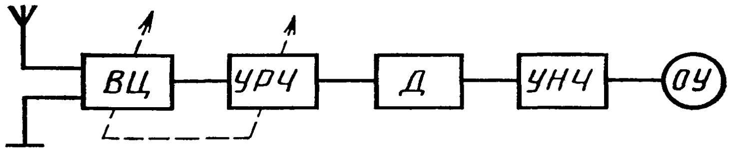


Рис. 2.18. Структурная схема радиоприёмного устройств

В представленной схеме, с учётом сокращений, изображены следующие блоки, выполняющие определённые измерительные функции.

Входная цепь *(ВЦ)* выделяет полезный сигнал высокой частоты, поступающий на его вход, и одновременно осуществляет ослабление сигналов поступивших на антенну от других источников (например, от других радиостанций) и различных помех. Тем самым в ВЦ осуществляется предварительная избирательность радиоприёмника. Усилитель радиочастоты (УРЧ) выполняет две функции: выполняет усиление полезного сигнала до необходимого для нормальной работы стоящего за ним в измерительном канале детектора (Д); обеспечивает дальнейшую (более высокую) избирательность приёмника. Детектор (Д) обеспечивает выделение из модулированных колебаний высокой частоты низкочастотных колебаний, несущих информацию об интересующем информативном параметре измерительного сигнала. Усилитель низкой частоты (УНЧ) усиливает малое значение напряжения низкой частоты, поступающее с детектора, до уровня необходимого для нормальной работы оконечного устройства (ОУ). Оконечное устройство (ОУ) преобразует свой входной электрический сигнал в информацию (вид, сообщение), доступную для восприятия человеком или удобную для обработки другими СИ (техническими устройствами).

Для описания измерительных (преобразовательных) свойств структурных элементов (блоков) используются необходимые уравнения (системы уравнений), которые известны из соответствующих естественных или технических наук.

Наиболее полной характеристикой структурного элемента (блока) является его *функция преобразования*, задаваемая уравнением общего вида: $Y = f\left(x, k_j, z_i\right)$, где: x и Y – входной и выходной сигналы соответственно структурного элемента, k_j это параметры структурного элемента, а z_i внешние влияющие величины. Именно эта функция и является его математической моделью.

Все структурные элементы (блоки) принято классифицировать по следующим различным признакам: *тип выходного сигнала* (активные – элементы самостоятельно генерируют энергетические величины; пассивные – элементы, использующие для преобразования не свою энергию, а энергию от других элементов); *вид связи между входной и выходной величинами структурных элементов* (линейные – связь между входными и выходными сигналами описывается линейными функциями; нелинейные - связь описывается квазилинейными или нелинейными функциями); *тип динамических свойств элементов* (статические – скорость изменения входного сигнала не влияет на выходной сигнал; динамические – при моделировании элемента необходимо учитывать скорость изменения входного сигнала); *вид функции преобразования* (аналоговые – функция преобразования описывается непрерывными во времени функциями; цифровые - функция преобразования описывается дискретными во времени и квантованными по уровню функциями); *способ соединения элементов структурной схемы* (прямого преобразования – все структурные элементы соединены последовательно, и все преобразования производятся в прямом направлении; уравновешивающего преобразования – структурная схема содержит цепь прямого преобразования, все элементы которой охвачены отрицательной обратной связь, в которой выходная величина структурной схемы подвергается обратному преобразованию в величину однородную с входной величиной схемы).

Все рассмотренные признаки классификации структурных элементов (блоков) средств измерений являются основополагающими (отправными) моментами при составлении математических моделей средств измерений.

Решение задачи по определению математической модели СИ в теории измерений происходит, как правило, совместно с решением задачи по расчёту метрологических характеристик, как составляющих его структурных элементов (блоков), так и в целом СИ (цепи, канала, тракта). Поэтому алгоритм действий по совместному решению этих двух задач можно представить в виде выполнения следующей последовательности.

1. Выбирается (если оно известно) или выводится (если оно не известно) уравнение или система уравнений, по которому (которой) определяется измеряемая ФВ. Данное уравнение (система уравнений) является основой математической модели СИ, с помощью которой разрабатывается структурная схема СИ (цепи, канала, тракта).

2. Используя уравнение (систему уравнений) полученное в п.1.и применяя знания по технической реализации входящих в него (неё) функций, а также последовательности выполнения этих функций и входящих в них аргументов, разрабатывается идеализированная структурная схема СИ, в которой не учитываются возможные помехи, а также неидеальность составляющих её элементов (блоков).

3. На основе априорной информации об измеряемой ФВ, оценив возможные условия измерений и диапазоны изменения влияющих величин, производится оценка диапазонов изменения информативных и неинформативных параметров входных и выходных сигналов, как каждого структурного элемента СИ, так и в целом СИ.

4. Применяя полученную информацию в п.3. о диапазонах изменения входных и выходных сигналов, производится оценка возможности технической реализации структурных элементов, разработанной в п.2. структурной схемы. Если результаты проведенной оценки подтверждают возможность технической реализации разработанной идеализированной структурной схемы СИ, то выполняется разработка математических моделей структурных элементов этой схемы с использованием необходимой информации из соответствующих технических наук для их реализации. В случае невозможности технической реализации, разработанной идеализированной структурной схемы СИ, по результатам проведенной оценки в данном пункте алгоритма – производится уточнение или изменение ранее

разработанной структурной схемы, а затем снова выполнение п.3. и п.4, а возможно и возвращение к п.1, с последующим выполнением п.п.2- 4.

5. Используя структурную схему СИ (цепи, канала, тракта), математические модели её элементов, временные и (или) частотные диаграммы всех измерительных сигналов этих элементов, осуществляется построение математической модели СИ (цепи, канала, тракта). Математическая модель в итоге должна представлять собой функцию преобразования, связывающая между собой входной и выходной сигнал СИ. В общем виде эта функция для СИ может быть представлена в виде:

$$Y\{b_0[x], b_1,...,b_m, s_1,...,s_L, d_1,...,d_k\} = F\{x\{a_0[\Psi(t)], a_1,...,a_n\}, s_1,...,s_L\}, \quad (2.45)$$

где F – функционал, описывающий ряд определённых математических операций, производимых над входной величиной x; $b_0[x]$ - информативный параметр выходного сигнала, функционально связанный с информативным параметром входного сигнала; $b_1,...,b_m$ - неинформативные параметры выходного сигнала; $s_1,...,s_L$ - параметры СИ, зависящие от его методической и технической реализации; $d_1,...,d_k$ - влияющие величины; a_0 - информативный параметр выходного сигнала; $\Psi(t)$ - измеряемая ФВ; $a_1,...,a_n$ - неинформативные параметры выходного сигнала.

В большинстве случаев при математическом моделировании в качестве независимого аргумента модели используется время t или частота w изменения измерительного сигнала. Следует заметить, что при моделировании аналоговых средств измерений модель описывается функцией преобразования F непрерывной во времени и по амплитуде, в то время как при моделировании цифровых средств измерений модель описывается функцией преобразования F, которая является дискретной функцией по времени, квантованной по уровню амплитуд и кодированной (такая функция при математическом моделировании цифровых средств измерений имеет название дискретной весовой функции, хотя иногда её называют также решётчатой функцией).

6. Проводится анализ полученной модели СИ, и выделяются элементы структурной схемы, параметры которых входят в модель. При этом может оказаться, что некоторые параметры элементов структурной схемы СИ не входят в состав модели. Недостающие параметры, как правило, принад-

лежат элементам СИ, построенным по схеме с уравновешивающим преобразованием и стоящим в цепи прямого преобразования.

7. Определяются, по возможности, метрологические характеристики всех элементов структурной схемы, параметры которых, как вошли, так и не вошли в модель СИ. К таким характеристикам, как правило, относят: уравнение преобразования; интервал возможных значений систематической погрешности; плотность распределения вероятности случайной составляющей погрешности (или её основные числовые характеристики – математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение).

7. Используя методику обработки косвенных измерений, рассчитывается погрешность СИ, а также другие необходимые метрологические характеристики СИ. Расчёт погрешностей является, одним из наиболее сложных этапов расчёта СИ, значительно зависящим от информации о погрешностях элементов (блоков) структурной схемы и их характеристик. Вопросы, касающиеся понятия, классификации и расчёта погрешностей рассмотрены в следующих разделах данного учебного пособия.

Подводя итог рассмотренного алгоритма, следует заметить, что чем выше точность измерений рассчитываемого СИ, тем более сложным будет построение его математической модели и расчёт его метрологических характеристик. Особые сложности возникают при расчёте цифровых СИ, так как необходимо моделировать процессы дискретизации во времени, квантования по уровню и кодирования.

2.2.2. Структурные схемы аналоговых средств измерений прямого и уравновешивающего преобразований

В связи с тем, что *под СИ прямого преобразования* понимается такое СИ у которого все структурные элементы соединены последовательно и все преобразования производятся в прямом направлении, то с уверенностью можно сказать, что его структурная схема состоит из n элементов (блоков) соединённых последовательно (см. рис.2.19).

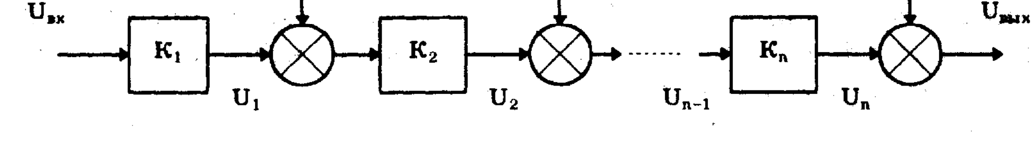


Рис.2.19. Структурная схема средства измерения прямого преобразования

В данной схеме символами $K_1, K_2, ..., K_n$ обозначены коэффициенты преобразования элементов (блоков), причём каждый i - й коэффициент определяется по формуле: $K_i = {dU_i}/{dU_{i-1}}$, где U_{i-1} и U_i - соответственно входной и выходной сигналы i - го элемента (символ U используется в предположении, что все сигналы обрабатываемые СИ имеют электрическую природу происхождения и представлены напряжением). Символом – «круг с перекрестием» в этой схеме условно обозначен сумматор (этот символ широко используется в науке «Теория автоматического регулирования»), который в данной схеме обеспечивает сложение сигналов помех и наводок ΔU_{0i} с выходными сигналами элементов (блоков) U_i.

Очевидно, что в приведенной схеме входной сигнал $U_{вх}$, несущий информацию об измеряемой величине, последовательно преобразуется в промежуточные сигналы U_i в итоге представляемые выходным сигналом $U_{вых}$. Следует помнить, что в общем случае в аналоговом СИ все сигналы являются переменными во времени, которые можно представить виде суммы гармонических составляющих. Поэтому, как сами сигналы, так и коэффициенты передачи элементов структурной схемы K_i при их математическом описании должны записываться в виде комплексных чисел. Однако на практике, наиболее часто, достаточным является считать данные сигналы и коэффициенты K_i вещественными (действительными) числами. Поэтому, с целью упрощения моделирования СИ, будем здесь считать, что информативным параметром любого сигнала, имеющего место в структурной схеме, является его амплитуда, а коэффициенты преобразования K_i являются вещественными числами. Кроме того, опять же с целью упрощения выкладок, допустим, что все элементы схемы являются линейными элементами (следовательно, $K_i = const$ при $-\infty < U_i < +\infty$), т.е. значения коэффициентов преобразования K_i элементов схемы не зависят от уровня входного сигнала, поступающего на вход i - го элемента схемы. Естественно, что сделанные допущения, при реальном моделировании СИ могут быть недопустимыми, так как они могут привести к значительному искажению метрологических характеристик моделируемого СИ, но в учебных целях эти допущения не искажают методику математического моделирования рассматриваемого СИ.

С учётом принятых допущений, принимая структурную схему СИ в виде представленном на рис. 2.19 и первоначально считая, что все помехи и наводки, поступающие на сумматоры отсутствуют, т.е. $\Delta U_{0i} = 0$ (при

$i=\overline{1,n}$), запишем *уравнение преобразования СИ прямого преобразования* в виде:

$$U_{вых} = K \cdot U_{вх} = \left(\prod_{i=1}^{n} K_i\right) \cdot U_{вх} = \left(\frac{dU_1}{dU_{вх}} \cdot \frac{dU_2}{dU_1} \cdot \frac{dU_3}{dU_2} \cdot \ldots \frac{dU_n}{dU_{n-1}}\right) \cdot U_{вх}, \quad (2.46)$$

где K - коэффициент преобразования СИ.

Однако при реальном выполнении процесса измерения СИ, на результат измерения будут оказывать такие явления, как: *нестабильность коэффициентов преобразования* элементов (блоков) структурной схемы (ΔK_i); так называемое явление – «*дрейф нуля*», заключающееся в непрогнозируемом во времени увеличении амплитуды сигнала на выходе элемента (блока) при отсутствии сигнала на его входе; *помехи и наводки*, действующие на каждый элемент (блок) схемы. Поэтому, для учёта в модели этих трёх явлений, представим (опять же для упрощения в учебных целях) их воздействие в виде суммарного сигнала ΔU_{0i}, действующего на каждый элемент схемы и складываемый сумматорами схемы с выходными сигналами U_i каждого элемента (блока) структурной схемы. Результирующее действие сигналов ΔU_{0i} приводит в итоге к появлению дополнительного сигнала $\Delta U_{вых}$, который смещает график функции преобразования СИ данного типа вдоль оси ординат на величину $\Delta U_{вых}$. т.к. функция преобразования будет уже иметь вид:

$$U_{вых} = K \cdot U_{вх} + \Delta U_{вых}, \quad (2.47)$$

где $\Delta U_{вых}$ определяется выражением

$$\Delta U_{вых} = \Delta U_{01} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot \ldots \cdot K_n + \Delta U_{02} \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot \ldots \cdot K_n + \Delta U_{0n}\ . \quad (2.48)$$

Дополнительный сигнал $\Delta U_{вых}$ является по своей сути погрешностью результата измерения, которая, согласно классификации погрешностей (приведена в 3-м разделе данного учебного пособия), относится к разряду аддитивных погрешностей, входящих в состав метрологических характеристик СИ.

Выделенное перед записью выражения (2.47) такое явление, как *нестабильность коэффициентов преобразования* элементов (блоков) структурной схемы (ΔK_i), позволяет, с учётом выражения (2.46), получить уравнение, определяющее такую составляющую погрешности $\Delta U_{вых}$, как *абсолютную погрешность измерения выходного сигнала, обусловленную* *нестабильность коэффициентов преобразования элементов (блоков) структурной схемы СИ* ($\Delta U_{вых._{нст}}$):

$$\Delta U_{вых_{нст}} = U_{вх} \cdot \left[K_2 K_3 ... K_n \Delta K_1 + K_1 K_3 ... \Delta K_2 + ... + K_1 K_2 ... K_{n-1} K_n\right]. \quad (2.49)$$

Из данного уравнения видно, что абсолютная погрешность $\Delta U_{вых._{нст}}$ зависит от уровня измеряемого сигнала $U_{вх}$, поэтому, согласно классификации погрешностей, она относится к разряду мультипликативных погрешностей. Однако относительная составляющая этой мультипликативной составляющей погрешности в целом для СИ ($dU_{вых_{ст}}$) складывается из соответствующих относительных погрешностей элементов (блоков) структурной схемы СИ:

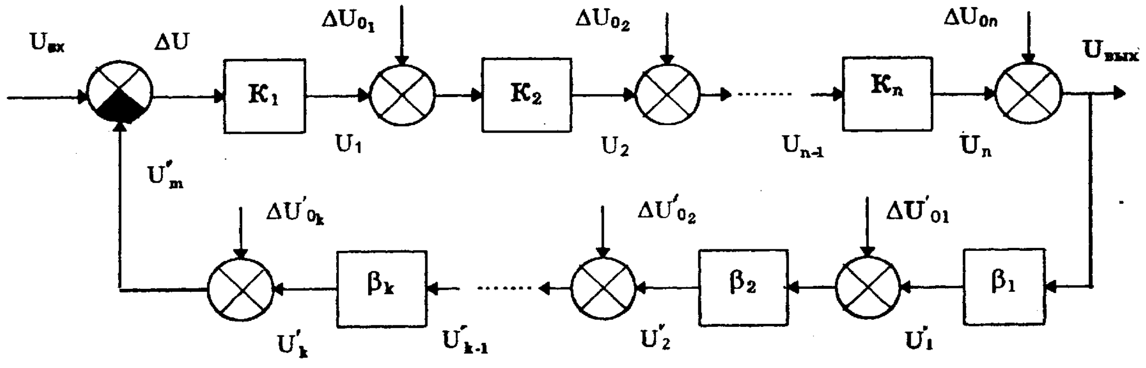
$$dU_{вых_{ст}} = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} (\Delta K_i / K_i) = \Delta K / K, \quad (2.50)$$

где d_i - относительная нестабильность коэффициента преобразования i - го элемента (блока), а $\Delta K / K$ - относительная нестабильность коэффициента преобразования в целом СИ.

Анализируя совокупность выражений (2.48) и (2.50), можно сделать вывод о том, что в средстве измерения прямого преобразования происходит суммирование погрешностей вносимых отдельными (элементами) блоками. Поэтому для получения высокой точности результатов измерений данным типом средств измерений, необходимо обеспечить высокую стабильность параметров и характеристик каждого элемента (блока) структурной схемы СИ, что значительно затрудняет изготовление высокоточных СИ прямого преобразования.

Для устранения важных на практике недостатков СИ прямого преобразования, при построении аналоговых СИ, часто используют структуру уравновешивающего преобразования. *Структурная схема СИ уравновешивающего преобразования* содержит цепь прямого преобразования, все элементы которой охвачены отрицательной обратной связью, в которой выходная величина структурной схемы $U_{вых}$ подвергается обратному преоб-

Цепь прямого преобразования



разованию в величину $U_m^{'}$ однородную с входной величиной ΔU схемы (см. рис. 2.20).

Рис.2.20.Структурная схема средства измерения уравновешивающего преобразования

Вводимое понятие цепи обратной связи требует некоторого его пояснения. Под цепью обратной связи $\dot{b}$ понимают цепь, которая обеспечивает воздействие выходного сигнала прямой цепи, с коэффициентом передачи $\dot{K}$, на её вход (см. рис. 2.21).

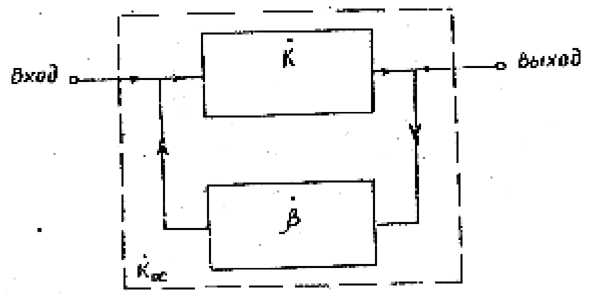


Рис.2.21. К понятию цепи обратной связи

Обратные связи (ОС) классифицируют по различным признакам, но остановимся лишь на одном из них, который необходим при рассмотрении данной схемы. Таким признаком является фазовое соотношение напряжений между выходным сигналом цепи ОС (U_{oc}) и входным сигналом прямой цепи (U_c), так как эти сигналы, являясь переменными сигналами, характеризуются не только амплитудой и частотой, но и начальным углом сдвига фаз. По данному признаку ОС классифицируют на положительную (ПОС), отрицательную (ООС) и комплексную (КОС). Если напряжение ОС (U_{oc}) совпадает по фазе с напряжением сигнала (U_c), то имеет место ПОС. Если напряжение ОС (U_{oc}) находится в противофазе с напряжением сигнала (U_c), то имеет место ООС. При несовпадении по фазе напряжения ОС (U_{oc}) с напряжением сигнала (U_c), ОС называют комплексной. В зависимости от величины фазового сдвига комплексная ОС приближается по своим свойствам либо к ПОС, либо к ООС.

При выводе уравнения преобразования структурной схемы рис.2.21 примем те же упрощающие предположения, что и для схемы прямого преобразования. Тогда, при отсутствии помех и наводок ΔU_{0i}, сигнал рассогласования ΔU, являясь входным сигналом первого элемента (блока) цепи прямого преобразования K_1, обеспечит при прохождении его по элементам (блокам) измерительной цепи прямого преобразования $K_1, K_2, ... K_i, ..., K_n$ (т.е. без учёта влияния элементов цепи обратной связи) формирование выходного сигнала $U_{вых}$ с амплитудой

$$U_{вых} = K \cdot \Delta U = (\prod_{i=1}^{n} K_i) \cdot \Delta U \,. \qquad (2.51)$$

Полученное значение выходного сигнала $U_{вых}$ в целом СИ, если посмотреть на структурную схему рис. 2.20., является фактически входным сигналом для цепи обратной связи, состоящей из элементов (блоков) с коэффициентами преобразований $b_1, b_2, ... b_i, ..., b_n$. С учётом этого факта значение амплитуды выходного напряжения цепи обратной связи $U_m^{'}$ (по аналогии с цепью прямого преобразования) может быть определено, применяя уравнение вида:

$$U_m^{'} = b \cdot U_{вых} = \left(\prod_{i=1}^{k} b_i \right) \cdot U_{вых} \,. \qquad (2.52)$$

Тогда с учётом того, что, согласно рис. 2. 20., $U_{вх} = \Delta U + U_m^{'}$, а также полученных выражений (2.51) и (2.52), коэффициент преобразования в целом СИ с уравновешивающим преобразованием $K_{си}$ может быть определён, используя уравнение вида:

$$K_{си} = \frac{U_{вых}}{U_{вх}} = \frac{K \cdot \Delta U}{\Delta U + U_m^{'}} = \frac{K \cdot \Delta U}{\Delta U + b \cdot K \cdot \Delta U} = \frac{K}{1 + b \cdot K} \,, \qquad (2.53)$$

Учитывая два крайних левых и крайнее правое выражения равенства (2.53), уравнение преобразования СИ с уравновешивающим преобразованием примет вид:

$$U_{вых} = \frac{K}{1 + b \cdot K} \cdot U_{вх} \,. \qquad (2.54)$$

Из выражения (2.54) видно, что выходной сигнал структурной схемы СИ с уравновешивающим преобразованием зависит как от коэффициента преобразования прямой цепи K, так и от аналогичного коэффициента обратной цепи b .

Здесь следует обратить внимание на важнейшее свойство цепи отрицательной обратной связи. При выполнении соотношения $b \cdot K >> 1$, обратную связь называют глубокой, так как в этом случае (см. 2.53) следует, что $K_{си} \approx \left(K / b \cdot K \right) \approx \left(1/b \right)$. Это соотношение показывает ***замечательное свойство цепей охваченных глубокой отрицательной обратной связью***, а именно – *цепь прямого преобразования практически не влияет на работу такого СИ, а зависит лишь от коэффициента преобразования цепи обратной связи* b. Поэтому нестабильность коэффициентов преобразования прямой цепи K_i (как это имеет место в СИ прямого преобразования) не вызывает погрешности в результате измерения.

По аналогии с рассуждениями, сделанными при выводе абсолютной и относительной погрешностей СИ с прямым преобразованием, для схемы с уравновешивающим преобразованием можно показать следующее.

Относительная мультипликативная погрешность $dU_{вых}(K)$, обусловленная нестабильностью коэффициентов преобразования прямой цепи K_i, в схеме с уравновешивающим преобразованием при $b \cdot K >> 1$ уменьшается в $(1 + K \cdot b)$ раз. При этом относительная мультипликативная погрешность $dU_{вых}(b)$, обусловленная нестабильностью коэффициентов преобразования цепи обратной связи b_i, при тех же условиях, полностью входит в состав суммарной погрешности результата измерения СИ.

Отсюда следует важный практический вывод. В СИ с уравновешивающим преобразованием в прямой цепи можно использовать нестабильные преобразователи, которые осуществляют основное преобразование измеряемой ФВ (это очень важно), а в цепи обратной связи применять высокостабильные преобразователи, при этом лишь необходимо выполнение условия $b \cdot K >> 1$.

2.2.3. Особенности моделирования цифровых средств измерений

В настоящее время в измерительной технике широкое применение нашло импульсное и цифровое представление измерительных сигналов, обработку которых выполняют цифровые средства измерения (ЦСИ).

Цифровое СИ *это средство измерения, имеющее в своем составе цифровое вычислительное устройство, выполняющее преобразования и вычислительные операции со значениями величин, представленными в цифровой форме*. Наличие цифрового устройства позволяет существенно повысить качество СИ: увеличить надежность, расширить функциональные возможности в части самоконтроля, выдачи результатов обработки информации в виде, удовлетворяющем различные требования потребителей, и т. п.

В ЦСИ входная измеряемая аналоговая (непрерывная) величина, отражающая параметры реального физического процесса, автоматически преобразуется в соответствующую дискретную величину с последующим представлением результата измерения в цифровой форме.

Исходной предпосылкой возможности построения ЦСИ служит известная в радиотехнике теорема Котельникова (теорема отсчетов). Согласно одной, наиболее известной интерпретации теоремы Котельникова, произвольный сигнал *u(t),* спектр которого ограничен некоторой верхней частотой *Fв* может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, следующих с интервалом времени

$$\Delta t = \frac{1}{2F_в}. \tag{2.55}$$

При переходе от аналогового (непрерывного) сигнала к цифровому осуществляются три специфических преобразования (рис. 2.22): *дискретизация по времени, квантование по уровню амплитуд и кодирование (оцифровка).* Такое представление сигналов называют аналого-цифровым преобразованием.

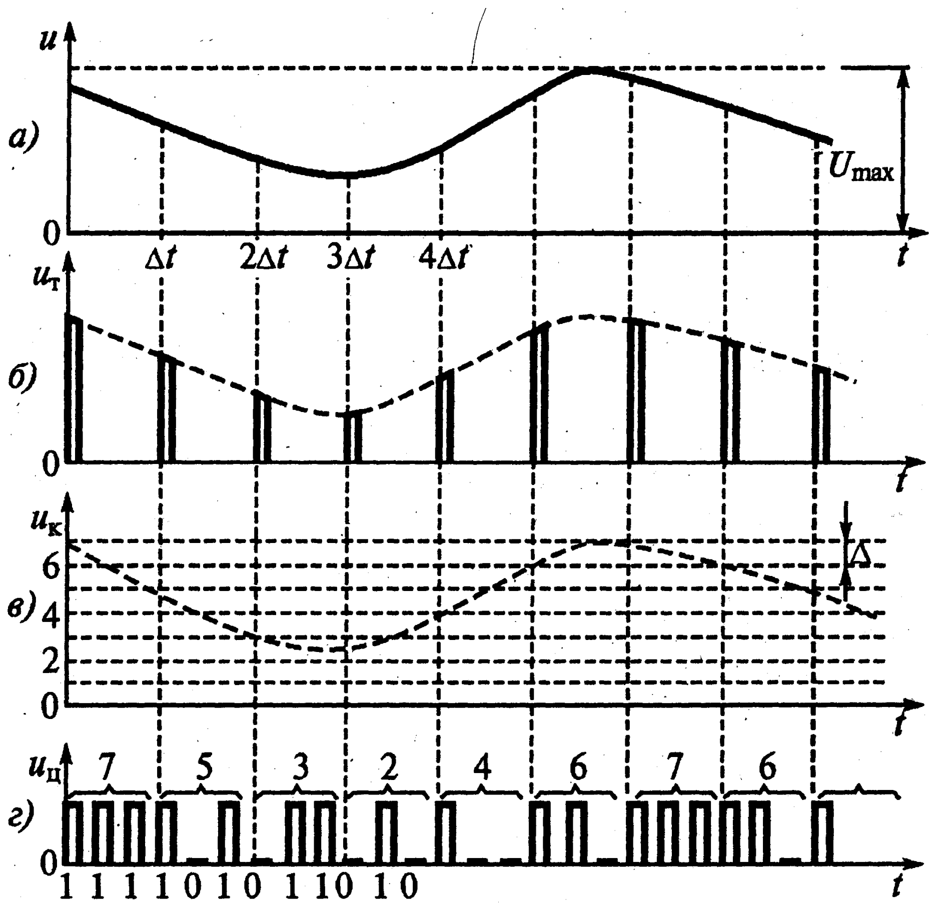


Рис.2.22. Формы сигналов при аналого-цифровом преобразовании:
а — аналогового; б — дискретизированного; в — квантованного; г — цифрового

Под дискретизацией понимают процесс представления (замену) во времени аналогового сигнала дискретной последовательностью отсчетов (выборок), следующих с заданным временным интервалом *Δt,* и по которым с заданной точностью можно вновь восстановить исходный сигнал. В простейшем случае при дискретизации аналогового сигнала формируется множество его *отсчетных значений* соответствующей амплитуды (в виде бесконечно коротких импульсов), взятых через интервал времени, отвечающий условию теоремы Котельникова (рис.2.22., α, б).

Для представления дискретных отсчетов цифровыми сигналами *(кодирования)* их предварительно квантуют по уровню напряжения. В процессе квантования весь диапазон возможных изменений амплитуд аналогового сигнала от 0 до $U_{\max}$ (или от $U_{\min}$ до $U_{\max}$ в случае разнополярного сигнала) разбивают на определенное число одинаковых или различных фиксированных уровней напряжения Δ, называемых *шагом квантования* (рис.2.22., *в).* При этом каждому фиксированному уровню сигнала $u_k(t)$ присваивают определенное значение в форме условного числа цифрового кода. С точки зрения удобства технической реализации и обработки обычно используют двоичные цифровые коды, составленные из n (n - целое число) разрядов, каждый из которых представлен «I» — импульсом или «0» — паузой. Общее число уровней квантования составляет 2 . Уровень шага квантования (рис. 2.22, *в)* связан с количеством разрядов двоичного кода формулой: $\Delta = U_{\max} / 2^n$.

На рис. 2.22 в качестве примера показано квантование простейшего однополярного аналогового сигнала на $2^n = 2^3$ = 8 (0, 1, 2,..., 7) уровней, что соответствует трехразрядному коду. На временной оси трехразрядный цифровой код представляется различными комбинациями из трех импульсов и пауз. Каждый из этих импульсов на одном интервале дискретизации сигнала Δt в соответствии с занимаемой позицией, отвечающей разряду $2^2, 2^1, 2^0$, имеет множитель 1 или 0. Наличие на данном интервале дискретизации импульсов с тем или иным множителем определяет уровень квантования сигнала. Например, при кодировании значения амплитуды напряжения $u(0)$ = 7 каждый разряд имеет множитель 1, чему соответствует присутствие всех трех импульсов на интервале дискретизации — 111. Аналогично значение $u(2\Delta t) = 3$ представлено двоичным кодом 011, т.е. паузой и двумя импульсами. Преобразуемый в цифровую форму аналоговый сигнал может иметь и отрицательное значение. В этом случае максимальному значению отрицательного потенциалы сигнала будет соответствовать нулевой двоичный код, т. е. 000.

В цифровой технике для отражения измерительной информации используют *кодовые слова*. Как правило, информация (кодовые слова) представляется импульсными сигналами прямоугольной формы, имеющими два фиксированных уровня напряжения 1 и 0. Таким образом, кодовое слово в цифровой технике имеет вид последовательности символов 1 и 0 определенной длины, например 10110110.

Теоретической базой построения ЦСИ являются *дискретная математика* и *алгебра логики Буля.*

В силу ограниченности разрядной сетки представления чисел ЦСИ, результаты измерения имеют квантованный (дискретный вид). Такая особенность цифрового СИ, естественно, отражается и на его математической модели.

В структуре ЦСИ можно выделить две части: аналоговую и цифровую. Взаимодействия между ними обеспечиваются аналого-цифровыми и цифроаналоговыми преобразователями (АЦП и ЦАП).

АЦП — техническое устройство, преобразующее аналоговую величину на входе в упорядоченную, относительно дискретных моментов времени, величину на выходе $z^*(t_n)$, $n = 0$, 1, ..., причем, значения величины $z^*(t_n)$ представлены в цифровом виде (коде). Такая упорядоченная совокупность значений величины называется последовательностью, а значение $z^*(t_n)$ - n-м членом последовательности. В зависимости от принципа аналого-цифрового преобразования все ЦСИ, так же как и аналоговые СИ, подразделяют на ЦСИ прямого преобразования и ЦСИ уравновешивающего преобразования.

ЦАП — техническое устройство, преобразующее входную величину в форме последовательности в аналоговую величину на выходе.

Структурная схема ЦСИ, используемая при его математическом моделировании, представлена на рис. 2.23[4].

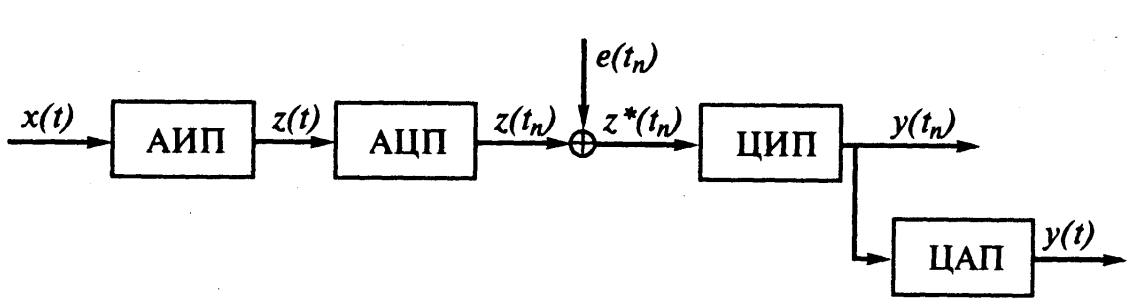


Рис. 2.23. Структурная схема математической модели цифрового средства измерения

Аналоговая часть ЦСИ представляет аналоговый измерительный преобразователь (АИП), преобразующий измеряемую величину в величину, которая является входной для АЦП. Для линейного ЦСИ математическая модель АИП представляется без учета аддитивной погрешности линейным дифференциальным уравнением следующего вида

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i z}{dt^i} = k_1 \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j x}{dt^j}, \qquad (2.56)$$

где $a_i, i=\overline{0,m}; b_j=\overline{0,m}$ — постоянные коэффициенты, причем $a_0 = b_0 = 1$; k_1 — коэффициент чувствительности АИП; $z(t)$ — выходная величина АИП.

Интегральная связь между выходной и входной величинами, соответствующая уравнению (2.56), имеет вид

$$z(t) = k_1 \int_0^t w_{10}(t) \cdot x(t-t)dt \quad , \qquad (2.57)$$

где $w_{10}(t)$ - нормированная весовая функция АИП, отличная от нуля при $t \in [0, T_r]$.

АЦП преобразует аналоговую величину $z(t)$ в последовательность $z^*(t_n)$, n = 1, 2, ..., где каждый член последовательности $z^*(t_n)$ есть не что иное, как результат измерения величины $z(t_n)$, представленный в цифровой форме. Таким образом, по существу АЦП является средством измерения, измеряющим величину $z(t)$ в дискретные моменты времени t_n, n = 1, 2, ..., равноудаленные друг от друга. ЦСИ, будучи СИ, оно, естественно, воспроизводит единицу величины [z], на основе которой формирует результат измерения в соответствии с выражением, определяющем результат измерения

$$z^*(t_n) = k_2 z(t_n) + h_2, \qquad (2.58)$$

где $k_2 = 1/q_z$ - коэффициент чувствительности АЦП; $q_z = [z]/[z]_0 \neq 1$ - размер единицы величины z, воспроизводимой АЦП; $[z]_0$ — единица величины z, воспроизводимая государственным эталоном; h_2 — составляющая, обусловленная округлением числа за счет ограниченной длины разрядной сетки АЦП, внутренними шумами АЦП и возмущениями, действующими на величину $z(t)$.

Подробное рассмотрение составляющей h_2, в том числе с учетом ее случайности, рассмотрено в [4].

Цифровое вычислительное устройство выполняет роль цифрового измерительного преобразователя (ЦИП), преобразующего последовательность $z^*(t_n)$, n = 0, 1, ... в последовательность результатов измерений $y(t_n)$, n = 0, 1,... Для линейного ЦИП математическая модель представляется линейным уравнением следующего вида [4]:

$$y(t_n) = k_3 \sum_{n=0}^{r_3-1} w_{30n}\, z^*(t_{n-n}), \tag{2.59}$$

где k_3 - коэффициент чувствительности ЦИП; w_{30n}, $n = \overline{0, r_3 - 1}$ - нормированная дискретная весовая функция ЦИП, причем $\sum_{n=0}^{r_3-1} w_{30n} = 1$.

В [4] показано, что, в результате дополнительных преобразований и уточнений выражений (2.58) и (2.59), уравнение преобразования ЦСИ представляется в следующем виде

$$y(t_n) = k_1 k_2 k_3 \sum_{n=0}^{r_3-1} w_{30n} \sum_{m=0}^{r_1-1} w_{10m}\, x(t_{n-n-m}) = k \sum_{n=0}^{r-1} w_{0n}\, x(t_{n-n}), \tag{2.60}$$

где $k = k_1 k_2 k_3$ - коэффициент чувствительности ЦСИ; $w_{0n} = \sum_{m=0}^{r_1-1} w_{30(n-m)} w_{10m}$, $n = \overline{0, r-1}$; $r = r_1 + r_3 - 1$, $r_1 = T_r / \Delta t$. Коэффициенты w_{0n}, n называют нормированными весовыми коэффициентами, а их упорядоченная совокупность - нормированной дискретной весовой функцией. Эта функция совместно с коэффициентом чувствительности представляет собой математическую модель ЦСИ в форме дискретной весовой функции kw_{0n}, где $n = \overline{0, r-1}$.

При этом следует заметить, что *под дискретной весовой функцией* понимают реакцию ЦСИ на измеряемую величину, являющуюся единичной импульсной последовательностью вида

$$x(t_n) = \Delta(t_n) = \begin{cases} 1 & при \quad n = 0, \\ 0 & при \quad n \neq 0. \end{cases} \tag{2.61}$$

Владимирский государственный университет

В.Е. КУПРИЯНОВ Э.Ф. КАСАТКИНА

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Часть 2

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ.
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ.
ПОГРЕШНОСТИ И ОБРАБОТКА
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Владимир 2005