Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-практическое пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Владимир 2019

УДК 517.3
ББК 22.161.12
К78

Рецензенты:
Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент Департамента анализа данных, финансовых технологий
и принятия решений Финансового университета, г. Москва
М. Б. Хрипунова

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры математического образования и информационных
технологий Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Крашенинникова, О. В.
К78 Интегральное исчисление функций одной переменной : учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 103 с. – ISBN 978-5-9984-0978-3.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты по следующим разделам высшей математики: неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, несобственный интеграл.

Предназначено для студентов очной формы обучения технических специальностей вузов.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 11. Библиогр.: 8 назв.

УДК 517.3
ББК 22.161.12

ISBN 978-5-9984-0978-3
© Крашенинникова О. В., 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов-бакалавров очной формы обучения технических специальностей, которые изучают высшую математику в течение первых двух семестров. Материал пособия соответствует программе второго семестра и включает разделы: неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, несобственный интеграл.

Пособие содержит необходимый теоретический материал по рассматриваемым разделам, примеры решения типовых задач и индивидуальные типовые расчеты, включающие 30 вариантов, для самостоятельного выполнения (с последующей их защитой во время рейтинговой недели).

Обозначения и терминология, используемые в пособии являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Отметим, что настоящее пособие ни в коей мере не призвано заменить более подробные курсы высшей математики, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с ним предполагает параллельное изучение соответствующих разделов курса математики по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

К числу важных задач механики относится задача об определении закона движения материальной точки по заданной ее скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ускорению. Эти задачи приводят к проблеме отыскания функции по заданной производной этой функции.

Определение. Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на (a,b), если $\forall x \in (a,b)$ имеем $F'(x) = f(x)$.

Аналогично определяется первообразная для функции $f(x)$ на бесконечной прямой и открытой полупрямой.

Примеры. 1. Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$ на $(-\infty,+\infty)$, так как $\forall x \in \boldsymbol{R}$ имеем $(\sin x)' = \cos x$.

2. Функция $F(x) = \ln x$ является первообразной для $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на $(0,+\infty)$, так как $\forall x \in (0,+\infty)$ имеем $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Если $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ где C – любая постоянная, тоже является первообразной для $f(x)$ на (a,b).

Теорема 1.1. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на (a,b), то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C – постоянная.

Доказательство. Положим $F(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Так как каждая из функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ дифференцируема на (a,b), то и $F(x)$ дифференцируема на (a,b), причем всюду на этом интервале $F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Отсюда получаем, что $F(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = const$. Теорема доказана.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на (a,b), то любая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где C – *const*.

Если функция $f(x)$, определенная на (a,b), имеет первообразную, то она называется интегрируемой на (a,b).

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на (a,b) называется **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция.

Если $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$ на (a,b), то согласно следствию из теоремы 1.1. имеем $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – любая постоянная. Легко видеть, что подынтегральное выражение есть дифференциал любой первообразной для $f(x)$. Действительно, если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$, то по определению дифференциала имеем $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. А так как $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $d(F(x) + C) = dF(x)$, то можно записать равенства:

1. $\int dF(x) = F(x) + C$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx$.

Знак равенства в последнем соотношении означает, что все функции, входящие в совокупность $\int f(x)dx$ имеют один и тот же дифференциал $dF(x)$. Также имеем $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

Определение. Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a,b), называется интегрированием этой функции. Саму задачу нахождения интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a,b), можно рассматривать как обратную к задаче нахождения дифференциала функции.

Следующие два свойства обычно называют линейными свойствами неопределенного интеграла:

3. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
4. $\int k \cdot f(x)dx = k\int f(x)dx$;
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, $k \neq 0$, то $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Исходя из таблицы производных основных элементарных функций, мы можем выписать интегралы основных элементарных функций:

1. $\int 0 \cdot dx = C$	11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
2. $\int dx = x + C$	12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
3. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$	13. $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \begin{cases} arctg\, x + C \\ -arcctg\, x + C \end{cases}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

5. $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

6. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$

7. $\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

9. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

10. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C$

16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

17. $\int sh\, x\, dx = ch\, x + C$

18. $\int ch\, x\, dx = sh\, x + C$

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = th\, x + C$

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth\, x + C$.

Докажем некоторые из этих формул.

3°. Если $0 < x < +\infty$, то $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Если $-\infty < x < 0$, то $|x| = -x$, $\ln|x| = \ln(-x)$, $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

15°. $\left(\ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a}} \right) =$

$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a}}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$.

16°. $\left(\frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \right)' = \frac{1}{2a} \left(\ln|x-a| - \ln|x+a| \right)' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) =$

$\frac{x+a-x+a}{2a(x-a)(x+a)} = \frac{1}{x^2 - a^2}$.

Известно, что производная любой элементарной функции представляет также элементарную функцию. Иными словами, операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций. Отметим, что с операцией интегрирования дело обстоит иначе. Можно доказать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными, например,

1. $\int e^{x^2} dx$

2. $\int \cos x^2\, dx$

4. $\int \frac{dx}{\ln x} = li\, x$, $x > 0, x \neq 1$

5. $\int \frac{\sin x}{x} dx = si\, x$

3. $\int \sin x^2\, dx$

6. $\int \frac{\cos x}{x} dx,\ x \neq 0$

Каждый из указанных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной. Интеграл 1, называемый интегралом Пуассона или интегралом ошибок, широко используется в статистической физике, в теории теплопроводности и диффузии, интегралы 2 и 3, называемые интегралами Френеля, широко применяются в оптике. Часто встречаются в приложениях интегралы 4–6, первый из которых называется интегральным логарифмом, а последние два – интегральным синусом и косинусом. Для всех перечисленных новых функций составлены таблицы и графики.

2. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

К основным приемам интегрирования относятся: непосредственное интегрирование, внесение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.

Непосредственное интегрирование – это метод нахождения неопределенных интегралов, основанный на применении таблицы интегралов, свойств неопределенного интеграла и тождественных преобразованиях подынтегральной функции.

Примеры. Найти неопределенные интегралы

1. $\int \left(3x^2 - 4x + 5\right) dx$;

2. $\int \frac{3x^5 - 2xe^x + 7}{x} dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$;

4. $\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2}$;

5. $\int ctg^2 x\, dx$;

6. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

7. $\int e^{2x+3} dx$;

8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$;

9. $\int \frac{3dx}{x^2 + 4x + 20}$;

10. $\int \frac{x^3 dx}{x + 3}$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

12. $\int \frac{2dx}{\sqrt{5 - 3x^2}}$.

Решение.

1. Согласно свойствам 3 и 4, а также табличным интегралам 2 и 3, имеем:

$$\int (3x^2 - 4x + 5)dx = \int 3x^2 dx - \int 4x\,dx + \int 5dx = 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x + C =$$
$$= x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

2. Разделим почленно числитель на знаменатель, получим:

$$\int \frac{3x^5 - 2xe^x + 7}{x} dx = \int \left(3x^4 - 2e^x + \frac{7}{x} \right) dx = \frac{3x^5}{5} - 2e^x + 7\ln|x| + C.$$

3. $\displaystyle \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{\left(x^2 + x^{-2}\right)^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx =$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int x^{-5} dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

4. Выделим целую часть в подынтегральной функции, тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{1 - x^2} = -\int \frac{x^2 - 1 + 1 dx}{x^2 - 1} = -\int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx = -x - \frac{1}{2} \ln\left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + C.$$

5. Согласно формулам тригонометрии, имеем:

$$\int ctg^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x + ctg\,x + C.$$

6. $\displaystyle \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos x)dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C.$

7. Согласно свойству 5 неопределенного интеграла получим:

$$\int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C.$$

8. $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} = \frac{1}{a^2} \cdot a \cdot arctg\,\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a} arctg\,\frac{x}{a} + C.$

9. Выделим полный квадрат в знаменателе подынтегральной функции:

$$\int \frac{3dx}{x^2+4x+20}dx = 3\int \frac{dx}{x^2+4x+4+16} = 3\int \frac{dx}{(x+2)^2+16} = \frac{3}{4} arctg \frac{x+2}{4}.$$

10. Выделим целую часть в подынтегральной функции, получим

$$\int \frac{x^3dx}{x+3} = \int \frac{x^3+27-27}{x+3}dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x+3} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x - 27 \ln|x+3| + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{a} \cdot a \cdot \arcsin \frac{x}{a} + C.$

12. $\displaystyle\int \frac{2dx}{\sqrt{5-3x^2}} = 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}x\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C.$

Внесение под знак дифференциала

Теорема 2.1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и функция $u(x)$ – непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Примеры.

1. $\displaystyle\int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C;$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{1+\ln x}\, d(1+\ln x) = \int (1+\ln x)^{\frac{1}{2}} d(1+\ln x) =$

$$= \frac{2(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C;$$

3. $\displaystyle\int 3x \cdot e^{2x^2} dx = \frac{3}{4}\int e^{2x^2} d\left(2x^2\right) = \frac{3}{4}e^{2x^2} + C;$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\arcsin^3 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\arcsin 2x)}{\arcsin^3 2x} = \frac{1}{2}\int \arcsin^{-3} 2x\, d(\arcsin 2x)$

$= -\frac{1}{4\arcsin^2 2x} + C.$

Замена переменной

Теорема 2.2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(\alpha;\beta)$, причем множество значений функции $\{\varphi(t)\}$ принадлежит интервалу $(a;b)$. Пусть для функции $f(x)$ на $(a;b)$ существует первообразная $F(x)$, то есть $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда на интервале $(\alpha;\beta)$ для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ существует первообразная $F(\varphi(t))$, то есть

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$.

Доказательство. По определению первообразной $F'(x) = f(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Также $\varphi'(t)dt = d\varphi(t)$, поэтому $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) =$

$= [\varphi(t) = x] = \int f(x)dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C$. Теорема доказана.

Замена переменной применяется в основном при интегрировании сложных тригонометрических и иррациональных функций.

Примеры.

1. $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}\, dx = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{1-x} = t \\ x = 1-t^3 \\ dx = -3t^2 dt \end{bmatrix} = -3\int (1-t^3)^2 \cdot t^3 dt = -3\int (t^3 - 2t^6 + t^9) dt =$

$= -3\left(\frac{t^4}{4} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^{10}}{10}\right) + C$, где $\sqrt[3]{1-x} = t$.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+e^x} = t \\ e^x = t^2 - 1 \\ x = \ln\left(t^2-1\right) \\ dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1} \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,dt}{t\left(t^2-1\right)} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$

3. $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x}\,dx = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \\ \cos^5 x\,dx = \cos^4 x \cdot \cos x\,dx = \\ \left(1-\sin^2 x\right)^2 \cdot \cos x\,dx = \left(1-t^2\right)^2 dt \end{bmatrix} = \int \sqrt{t} \cdot \left(1-t^2\right)^2 dt =$

$$\int \sqrt{t} \cdot \left(1-2t^2+t^4\right) dt = \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}}\right) dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4t^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2t^{\frac{11}{2}}}{11} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{4}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x + C.$$

Интегрирование по частям

Теорема 2.3. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы на промежутке $(a;b)$ и существует первообразная для функции $u'(x)v(x)$. Тогда на $(a;b)$ существует первообразная и для функции $u(x)v'(x)$, причем справедлива формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{или} \quad \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du \qquad (1)$$

Доказательство. Запишем формулу производной произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$: $\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. Умножим обе части на dx и проинтегрируем. Так как по условию существует $\int u'(x)v(x)dx$ и $\int \left(u(x)v(x)\right)' dx = u(x)v(x) + C$, то существует $\int u(x)v'(x)dx$, причем справедлива формула (1). Теорема доказана.

Вычисление интеграла $\int u\,dv$ посредством формулы (1) называется **интегрированием по частям.** Большая часть интегралов, берущихся по частям, может быть разбита на следующие группы:

1. Интегралы вида $\int (ax+b)^n e^{cx}dx$, $\int (ax+b)^n \sin(cx)\,dx$, $\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx$, где a,b,c – $cost$, $n \in \boldsymbol{N}$. В качестве $u(x)$ берется функция $(ax+b)^n$. После каждого интегрирования по частям эта степень будет понижаться на единицу.

2. Интегралы, в которых подынтегральная функция есть произведение многочлена на одну из следующих функций: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arctg^{\,2} x$, $\arccos^2 x$,… В качестве $u(x)$ берется одна из перечисленных выше функций.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx$, $\int e^{ax}\cdot\sin(bx)\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$. Обозначая любой из интегралов этой группы через I и производя двукратное интегрирование по частям, мы получим для I уравнение первого порядка.

Примеры.

1. $$\int (2x+3)\sin 4x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=2x+3 & dv=\sin 4x\,dx \\ du=(2x+3)'\,dx & v=\int \sin 4x\,dx \\ du=2dx & v=-\frac{1}{4}\cos 4x \end{array}\right] = -\frac{1}{4}\cos 4x\cdot(2x+3) -$$

$$-\int -\frac{1}{4}\cos 4x \cdot 2dx = -\frac{1}{4}\cos 4x\cdot(2x+3)+\frac{1}{8}\sin 4x + C;$$

2. $$\int (2x^2-x)e^{2x}dx = \left[\begin{array}{ll} u=2x^2-x & dv=e^{2x}dx \\ du=(2x-1)dx & v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{1}{2}e^{2x}(2x^2-x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int (2x-1)e^{2x}dx = \left[\begin{array}{ll} u=2x-1 & dv=e^{2x}dx \\ du=2dx & v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{1}{2}e^{2x}(2x^2-x) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}(2x-1)-\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}e^{2x}\left(2x^2-x\right)-\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+\frac{1}{4}e^{2x}+C=$$

$$=e^{2x}\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)+C\,;$$

3. $\int x^3\cdot\ln x\,dx=\begin{bmatrix} u=\ln x & dv=x^3dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^4}{4}\end{bmatrix}=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C\,;$

4. $\int arctg\,x\,dx=\begin{bmatrix} u=arctg\,x & dv=dx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2} & v=x\end{bmatrix}=x\cdot arctg\,x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=x\cdot arctg\,x-$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=x\cdot arctg\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\,;$$

5. $I=\int e^{ax}\cdot\cos(bx)\,dx=\begin{bmatrix} u=e^{ax} & dv=\cos(bx)\,dx \\ du=ae^{ax}dx & v=\dfrac{1}{b}\sin(bx)\end{bmatrix}=\frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}-$

$$-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin(bx)dx=\begin{bmatrix} u=e^{ax} & dv=\sin(bx)\,dx \\ du=ae^{ax}dx & v=-\dfrac{1}{b}\cos(bx)\end{bmatrix}=\frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}-$$

$$-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}\cos(bx)\cdot e^{ax}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cdot\cos(bx)dx\right)=$$

$=\dfrac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}+\dfrac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax}-\dfrac{a^2}{b^2}I$, то есть получили уравнение относительно I:

$I=\dfrac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}+\dfrac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax}-\dfrac{a^2}{b^2}I$. Отсюда находим

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I=\frac{1}{b}\sin(bx)\cdot e^{ax}+\frac{a}{b^2}\cos(bx)\cdot e^{ax},$$

$$I=\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\sin(bx)+\frac{a}{b}\cos(bx)\right).$$

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. **Рациональной функцией (дробью)** называется отношение двух алгебраических многочленов $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Рациональная дробь называется правильной, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. В противном случае рациональная дробь называется неправильной. Любую неправильную рациональную дробь можно посредством деления числителя на знаменатель «столбиком» представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби. Действительно, если $P(x)=q(x)\cdot Q(x)+r(x)$, где $q(x)$ и $r(x)$ – многочлены, причем $\deg r(x)<\deg Q(x)$, то

$$\int R(x)\,dx=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{q(x)\cdot Q(x)+r(x)}{Q(x)}dx=\int q(x)dx+\int\frac{r(x)}{Q(x)}dx.$$

Интегрировать многочлен мы умеем, поэтому задача сводится к интегрированию правильной рациональной дроби.

Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшими рациональными дробями называются дроби вида

$\dfrac{A}{(x-a)^m}$, $m=1,2,\ldots$ и $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}$, $m=1,2,\ldots$, $p^2-4q<0$.

Докажем, что каждая из этих дробей интегрируема в элементарных функциях.

При $m=1$: $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$;

при $m>1$: $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^m}dx=A\int(x-a)^{-m}dx=\frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}}+C$.

Рассмотрим интеграл от дроби второго вида:

$$\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=\left[d\left(x^2+px+q\right)=(2x+p)dx\right]=\int\frac{\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}}{\left(x^2+px+q\right)^m}dx=$$

$$=\frac{B}{2}\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^m}+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\frac{B}{2}\cdot I_1+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)\cdot I_2.$$

Рассмотрим по отдельности каждый из интегралов I_1 и I_2:

$$I_1=\int\frac{d\left(x^2+px+q\right)}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\begin{cases}\ln\left(x^2+px+q\right)+C, & если\ m=1\\ \dfrac{\left(x^2+px+q\right)^{-m+1}}{-m+1}, & если\ m=2,3,\ldots\end{cases};$$

при $m=1$:

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}=\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C;$$

при $m>1$:

$$I_m=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}=\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^m}=\begin{bmatrix}x+\frac{p}{2}=y\\ dx=dy\\ \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=a\end{bmatrix}=\int\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^m}=$$

$$=\begin{bmatrix}u=\dfrac{1}{\left(y^2+a^2\right)^m} & dv=dy\\ du=\dfrac{-2my\,dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}} & v=y\end{bmatrix}=\frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{\left(y^2+a^2-a^2\right)dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}}=$$

$$=\frac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^m}-2ma^2\int\frac{dy}{\left(y^2+a^2\right)^{m+1}}.$$

Последнее равенство можно переписать в виде: $I_m=\dfrac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m}+2mI_m-2ma^2I_{m+1}$. Отсюда находим $I_{m+1}=\dfrac{1}{2ma^2}\left(\dfrac{y}{\left(y^2+a^2\right)^m}+(2m-1)I_m\right)$. Соотношение, связывающее I_m и I_{m+1}, называется рекуррентным.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому сначала нужно разделить числитель на знаменатель «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - x^3 + 1 & \underline{x^2 + x + 2} \\
\underline{x^4 + x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x \\
\quad -2x^3 - 2x^2 + 1 & \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad 4x + 1 &
\end{array}
$$

Тогда

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x + 2} dx = \int \left(x^2 - 2x + \frac{4x+1}{x^2 + x + 2} \right) dx = \left[d\left(x^2 + x + 2\right) = (2x+1)dx \right] =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 2\int \frac{(2x+1)dx}{x^2 + x + 2} - \int \frac{dx}{x^2 + x + 2} = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2\int \frac{d\left(x^2 + x + 2\right)}{x^2 + x + 2} -$$

$$-\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2\ln\left(x^2 + x + 2\right) - \frac{2}{\sqrt{7}} arctg\, \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C\,.$$

Интегрирование рациональных дробей (общий случай)

Рассмотрим интеграл $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, где $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильная рациональная дробь. Любой многочлен $Q(x)$ может быть разложен на произведение действительных неприводимых множителей

$$Q(x) = A(x - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{m_r} \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{k_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_l x + q_l \right)^{k_l}.$$

Любую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x - a_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \ldots.$$

$$+ \frac{B_{k_l} x + C_{k_l}}{\left(x^2 + p_l x + q_l \right)^{k_l}}. \qquad (2)$$

Знаменателями простейших дробей служат все целые степени каждого множителя в разложении $Q(x)$, числителями служат либо постоянные $A_1, A_2, \ldots$, либо линейные функции $B_i x + C_i$ смотря по тому, является ли знаменатель линейной или квадратичной функцией. Для того чтобы найти неизвестные постоянные в числителях правой части равенства (2), приводят правую часть к общему знаменателю и приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих частей. Получают систему линейных уравнений, решая которую, находят неизвестные постоянные.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$; 2. $\int \frac{2-x}{x^3+1}dx$; 3. $\int \frac{x^2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}dx$.

Решение.

1. Подынтегральная функция представляет собой неправильную рациональную дробь, поэтому сначала выделим целую часть:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx=\int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}dx=\int\left(1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right)dx.$$

Затем раскладываем знаменатель последней дроби на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{5x^2-6x+1}{x\left(x^2-5x+6\right)}=\frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-2}.$$

Чтобы найти неизвестные постоянные A, B, C, приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители в левой и правой частях полученного равенства, получим:

$$5x^2-6x+1=A(x-3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x-3).$$

Положим в последнем равенстве x=0, получим: $1=6A$, откуда $A=\frac{1}{6}$.

Аналогично, полагая в последнем равенстве x=2, получим: $9=-2C$, откуда $C=-\frac{2}{9}$. Наконец, полагая в последнем равенстве x=3, получим: $28=3B$, откуда $B=\frac{3}{28}$. Следовательно, исходный интеграл может быть переписан в виде:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx=\int\left(1+\frac{1}{6x}+\frac{3}{28(x-3)}-\frac{2}{9(x-2)}\right)dx=$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{28}\ln|x-3|-\frac{2}{9}\ln|x-2|+C.$$

2. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому раскладываем знаменатель на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2-x}{x^3+1}=\frac{2-x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)},$$

$2-x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$.

При $x=-1$ находим $3=3A$, $A=-1$.

Приравняем коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства:

$0=A+B$, $B=-A=1$.

Приравняем коэффициенты при x в левой и правой частях равенства:

$-1=-A+B+C$, $C=-1+A-B=-3$.

Таким образом, исходный интеграл можно переписать в виде:

$$\int\frac{2-x}{x^3+1}dx=\int\frac{-1}{x+1}dx+\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx=\left[d(x^2-x+1)=(2x-1)dx\right]=-\ln|x+1|+$$

$$+\int\frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=-\ln|x+1|+$$

$$+\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

3. Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому раскладываем знаменатель на множители, а саму дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}=$$

$$\frac{A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)^2}.$$

Приравняем числители левой и правой частей последнего равенства:

$x^2=A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2$.

При $x=1$ находим $1=B$, при $x=2$ находим $4=D$.

Раскроем скобки в последнем равенстве:

$x^2=A(x^3-5x^2+8x-4)+B(x^2-4x+4)+C(x^3-4x^2+5x-2)+D(x^2-2x+1)$

Приравняем коэффициенты при x^3 в левой и правой частях последнего равенства: $0=A+C$, и приравняем коэффициенты при x^2:

$1=-5A+B-4C+D$. Подставляя найденные значения B и D, получим систему:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 5A+4C=4 \end{cases}, \begin{cases} C=-A \\ 5A-4A=4 \end{cases}, \begin{cases} C=-4 \\ A=4 \end{cases}.$$

Таким образом, исходный интеграл можно переписать в виде:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}dx = \int\left(\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx = 4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-$$

$$4\ln|x-1|-\frac{4}{x-2}+C.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Наиболее употребительные следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные:

I. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Рассмотрим функцию вида: $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, где $a,b,c,d-$ некоторые постоянные, $n \in \boldsymbol{N},\ R(x,y)-$ рациональная функция. Функцию такого вида и называют дробно-линейной иррациональностью. Покажем, что интеграл от функции такого вида при $ad-bc \neq 0$ рационализируется подстановкой $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Действительно, $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$,

$ax+b=t^n(cx+d)$, $x\left(a-ct^n\right)=dt^n-b$, $x=\frac{dt^n-b}{a-ct^n}$. Тогда $dx=\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{\left(a-ct^n\right)^2}dt$.

Таким образом, $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n},t\right)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{\left(a-ct^n\right)^2}dt$.

Поскольку рациональная функция от рациональной функции представляет собой также рациональную функцию, то интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, является интегралом от рациональной дроби. Тем самым доказано, что интеграл от дробно-линейной иррациональности рационализируется подстановкой $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{dx}{1-x}$.

Решение. $$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}=\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=t\\ 1+x=t^2(1-x)\\ x=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\\ 1-x=\dfrac{2}{t^2+1}\\ dx=\dfrac{4tdt}{\left(t^2+1\right)^2}\end{array}\right]=\int\frac{4t^2\left(t^2+1\right)}{2\left(t^2+1\right)^2}dt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=$$

$$2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)=$$

$=2(t-arctg\,t)+C$, где $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=t$.

II. Интеграл $\int R\left(x,x^{\alpha},x^{\beta},\ldots\right)dx$, где $R(x,y)-$рациональная функция, $\alpha=\dfrac{m_1}{n_1}$, $\beta=\dfrac{m_2}{n_2},\ldots-$рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены $x=t^k$, где $k=HOK\left(n_1,n_2,\ldots\right)-$наименьший общий знаменатель всех дробных показателей у *x*.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx=\left[\begin{array}{l}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{array}\right]=\int\frac{1+t}{t^4+t^2}\cdot4t^3dt=4\int\frac{t^2+t}{t^2+1}dt=4\int\left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=4\left(t+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1}-arctg\,t\right)=4\left(t+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-arctg\,t\right)+C=$$

$$4\sqrt[4]{x}+2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)-4arctg\sqrt[4]{x}+C.$$

III. Интегралы более общего вида $\int R\left(x,(ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\ldots\right)dx$ или $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta},\ldots\right)dx$ находят с помощью аналогичных подстановок $ax+b=t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где $k-$наименьший общий знаменатель всех дробных показателей.

IV. Интегрирование биномиальных дифференциалов.

Определение. **Биномиальным дифференциалом** называется выражение вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $a,b-$произвольные постоянные, $m,n,p\in\mathbf{Q}$.

Рассмотрим три случая, когда интеграл от биномиального дифференциала допускает рационализирующую подстановку:

1) $p-$ целое, $m=\frac{k}{l}$, $n=\frac{c}{d}$, $k,l,c,d\in\mathbf{Z}$.

Находим $HOK(l,d)=s$, тогда $m=\frac{k'}{s}$, $n=\frac{c'}{s}$, $k',c'\in\mathbf{Z}$. Делаем подстановку $x=t^s$, тогда $x^m=t^{k'}$, $x^n=t^{c'}$, $dx=st^{s-1}dt$, $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\int t^{k'}\left(a+bt^{c'}\right)^p st^{s-1}dt$.

Получили интеграл от рациональной функции.

2) $\frac{m+1}{n}\in\mathbf{Z},\ p=\frac{c}{s}$.

Делаем подстановку $a+bx^n=t^s$, тогда $x=\sqrt[n]{\frac{t^s-a}{b}}$, $x^m=\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$, $dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}st^{s-1}dt$. Таким образом, получаем интеграл от рациональной функции $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=\frac{s}{nb}\int\left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}t^{c+s-1}dt$.

3) $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbf{Z}$.

В этом случае интеграл от биномиального дифференциала рационализируется подстановкой $\frac{a}{x^n}+b=t^s$, $x=\sqrt[n]{\frac{a}{t^s-b}}$, $dx=-\frac{a}{n}\left(\frac{a}{t^s-b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{st^{s-1}}{\left(t^s-b\right)^2}dt$, $\left(a+bx^n\right)^{\frac{c}{s}}=a^{\frac{c}{s}}\cdot\frac{t^c}{\left(t^c-b\right)^{\frac{c}{s}}}$. Тогда

$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx = -\dfrac{a^{\frac{m+1}{n}+p} s}{n}\int \dfrac{t^{s(p+1)-1}}{\left(t^s-b\right)^{\frac{m+1}{n}+p}}dt$. Получили интеграл от рациональной функции.

Примеры. Найти неопределенные интегралы: 1) $\int \dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$,

2) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. 1) Имеем $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$, $p=\dfrac{1}{3}$, тогда $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{1}{2}\cdot 4=2\in \boldsymbol{Z}$, следовательно, получаем второй случай. Делаем подстановку $1+x^{\frac{1}{4}}=t^3$, $x=\left(t^3-1\right)^4, x^{-\frac{1}{2}}=\left(t^3-1\right)^{-2}$, $dx=12t^2\left(t^3-1\right)^3 dt$. Окончательно приходим к интегралу:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=12\int \frac{t^3\left(t^3-1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^2}dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=12\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}}{7}-\frac{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}}{4}\right)+C.$$

2) Имеем $m=0$, $n=4$, $p=-\dfrac{1}{4}$, тогда $\dfrac{m+1}{n}+p=0\in \boldsymbol{Z}$, следовательно, получаем третий случай. Делаем подстановку $\dfrac{1}{x^4}+1=t^4$, тогда $x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}}$, $\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}=t^{-1}\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}$, $dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt$. Окончательно приходим к интегралу: $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int t^2\left(t^4-1\right)^{-1}dt=-\int \dfrac{t^2}{t^4-1}dt$.

Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь, поэтому разложим ее на сумму простейших дробей: $\dfrac{t^2}{t^4-1}=\dfrac{t^2}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}=\dfrac{A}{t-1}+\dfrac{B}{t+1}+\dfrac{Ct+D}{t^2+1}$. Приводим к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой части полученного равенства: $t^2=A(t+1)\left(t^2+1\right)+B(t-1)\left(t^2+1\right)+(Ct+D)\left(t^2-1\right)$. (*)

Положим $t=1$, найдем $4A=1$, $A=\frac{1}{4}$. При $t=-1$ получаем $-4B=1$, $B=-\frac{1}{4}$. Раскроем скобки в равенстве (*):

$t^2=A(t^3+t^2+t+1)+B(t^3-t^2+t-1)+C(t^3-t)+D(t^2-1)$.

Приравняем коэффициенты при t^3: $0=A+B+C$, отсюда $C=0$, и при t^2: $1=A-B+D$, отсюда $D=\frac{1}{2}$.

Тогда $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{t^2}{t^4-1}dt=-\int\left(\frac{1}{4(t-1)}-\frac{1}{4(t+1)}+\frac{1}{2(t^2+1)}\right)dt=$

$\frac{1}{4}(\ln|t+1|-\ln|t-1|)-\frac{1}{2}arctg\,t+C$, где $t=\frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$.

V. Интегрирование квадратичных иррациональностей посредством подстановок Эйлера.

В этом пункте мы докажем интегрируемость в элементарных функциях любой функции вида $R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)$, где $a,b,c-$произвольные постоянные. Функцию такого вида будем называть **квадратичной иррациональностью**. При этом считаем, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет равных корней.

Докажем, что интеграл от квадратичной иррациональности всегда рационализируется одной из так называемых **подстановок Эйлера**. Рассмотрим три случая:

1. Если $a>0$, то имеем право сделать следующую подстановку:

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$,

$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\cdot x\cdot t+t^2$,

$x(b-2\sqrt{a}\,t)=t^2-c$,

$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t}$,

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{bt-\sqrt{a}c-\sqrt{a}t^2}{b-2\sqrt{a}t}$,

$dx=\frac{2bt-2\sqrt{a}t^2-2\sqrt{a}c}{(b-2\sqrt{a}\,t)^2}dt$.

Таким образом, $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\,t},\frac{bt-\sqrt{a}c-\sqrt{a}t^2}{b-2\sqrt{a}t}\right)\frac{2bt-2\sqrt{a}t^2-2\sqrt{a}c}{\left(b-2\sqrt{a}\,t\right)^2}dt.$$

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

2. Если $c>0$, то имеем право сделать следующую подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c},$$

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2\sqrt{c}\cdot x\cdot t+c,$$

$$ax+b=xt^2+2\sqrt{c}\cdot t,$$

$$x=\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2},$$

$$dx=\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2bt}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2},\frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}a}{a-t^2}\right)\frac{2\sqrt{c}a+2\sqrt{c}t^2-2bt}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

3. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные различные корни, то есть $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. В этом случае делают подстановку:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1),$$

$$a(x-x_1)(x-x_2)=t^2(x-x_1)^2,$$

$$a(x-x_2)=t^2(x-x_1),$$

$$x=\frac{ax_2-t^2x_2}{a-t^2},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{ta(x_2-x_1)}{a-t^2},$$

$$dx=\frac{2at(x_2-x_1)}{\left(a-t^2\right)^2}dt.$$

Таким образом,

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx=\int R\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2},\frac{ta(x_2-x_1)}{a-t^2}\right)\frac{2at(x_2-x_1)}{(a-t^2)^2}dt.$$

В правой части под знаком интеграла стоит рациональная дробь.

Примеры. Найти неопределенные интегралы: 1) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$,

2) $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x-x^2-2}}$.

Решение. 1) Так как $a>0$, то можно сделать подстановку:

$\sqrt{x^2+x+1}=x+t$,

$x^2+x+1=x^2+2tx+t^2$,

$x=\frac{t^2-1}{1-2t}$,

$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-1}{1-2t}+t=\frac{t^2-1+t-2t^2}{1-2t}=\frac{t-1-t^2}{1-2t}$,

$x+\sqrt{x^2+x+1}=\frac{t^2-1}{1-2t}+\frac{t-1-t^2}{1-2t}=\frac{t-2}{1-2t}$

$dx=\frac{2t(1-2t)+2(t^2-1)}{(1-2t)^2}dt=\frac{2t-2t^2-2}{(1-2t)^2}dt.$

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{2t-2t^2-2}{(1-2t)(t-2)}dt=\int\frac{2t-2t^2-2}{-2t^2+5t-2}dt=\int\left(1-\frac{3t}{(1-2t)(t-2)}\right)dt.$$

Разложим дробь $\frac{3t}{(1-2t)(t-2)}$ на сумму простейших:

$\frac{3t}{(1-2t)(t-2)}=\frac{A}{1-2t}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(1-2t)}{(1-2t)(t-2)}$,

$3t=A(t-2)+B(1-2t)$.

При $t=2$ находим $6=-3B$, $B=-2$, при $t=\frac{1}{2}$ находим $\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}A$, то есть $A=-1$. Окончательно получаем:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int\left(1+\frac{3}{2(1-2t)}+\frac{2}{t-2}\right)dt=t-\frac{3}{4}\ln|1-2t|+2\ln|t-2|+C,$$

где $t=\sqrt{x^2+x+1}-x$.

2) Квадратный трехчлен $3x-x^2-2$ имеет действительные корни $x_1=1$ и $x_2=2$, то есть $3x-x^2-2=-(x-1)(x-2)$. В этом случае сделаем подстановку:

$\sqrt{3x-x^2-2}=t(x-1)$,
$-(x-1)(x-2)=t^2(x-1)^2$,
$x=\dfrac{t^2+2}{t^2+1}$, $\sqrt{3x-x^2-2}=t\left(\dfrac{t^2+2}{t^2+1}-1\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $dx=-\dfrac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Тогда имеем:
$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{3x-x^2-2}}=-2\int\dfrac{t(t^2+1)(t^2+1)}{(t^2+1)^2(t^2+2)t}dt=-2\int\dfrac{dt}{t^2+2}=-\sqrt{2}arctg\,\dfrac{t}{\sqrt{2}}+C$, где
$t=\dfrac{\sqrt{3x-x^2-2}}{x-1}$.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Часто встречаются интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

I. $\int\sin^n x\cdot\cos^m x\,dx$; $n,m\in\mathbf{Z}$.

1) Если n и m неотрицательные четные числа, то применяются формулы понижения степени: $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, а также формула $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$.

2) Если n и m натуральные числа такие, что хотя бы одно из них нечетное, то в случае нечетного n полагают $\cos x=t$, а в случае нечетного m полагают $\sin x=t$ и используют формулу $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

3) Если n и m целые отрицательные числа такие, что оба числа $|m|$ и $|n|$ либо четные, либо нечетные, то полагают $tg\,x=t$, либо $ctg\,x=t$ и применяют формулы $1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $1+ctg^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$. К этому типу сводятся интегралы видов $\int\dfrac{dx}{\sin^n x}$, $n>0$ и $\int\dfrac{dx}{\cos^m x}$, $m>0$. В самом деле,

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{dx}{2^n \sin^n \frac{x}{2} \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^n \frac{x}{2} \cos^n \frac{x}{2}},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m \left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

4) Если n и m целые отрицательные числа, причем одно из $|m|$ и $|n|$ нечетное, то в случае нечетного $|m|$ полагают $\sin x = t$, а в случае нечетного $|n|$ полагают $\cos x = t$. Иногда в случае больших степеней $|m|$ и $|n|$ полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

5) Если n–четное число, а m–целое отрицательное, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и в этом случае интегралы сводятся к интегралам вида $\int \frac{dx}{\cos^k x}$, $k \in \boldsymbol{N}$. В случае четного m и целого отрицательного n заменяют $\cos^2 x$ по формуле $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. В некоторых специальных случаях полагают $tg\, x = t$.

6) Если n–нечетное число, а m–целое отрицательное, то полагают $\cos x = t$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае нечетного m и целого отрицательного n полагают $\sin x = t$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

II. $\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx\, dx$

При вычислении этих интегралов используются формулы:

$$\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right),$$

$$\sin ax \cdot \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right),$$

$$\cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right).$$

III. $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(x,y)$ – рациональная функция, приводится к интегралу от рациональной функции с помощью универсальной тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$, при этом

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad x=2arctg\,t,$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

В некоторых случаях подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом:

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$.
2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $\sin x = t$.
3. Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяется подстановка $tg\, x = t$.

Замечание. Любое рациональное выражение $R(u,v)$ всегда можно представить в виде суммы трех выражений, представленных в пунктах 1,2 и 3:

$$R(u,v)=\frac{R(u,v)-R(-u,v)}{2}+\frac{R(-u,v)-R(-u,-v)}{2}+\frac{R(-u,-v)+R(u,v)}{2}.$$

IV. $\int tg^n x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$; $n,m\in\boldsymbol{N}$ находят с помощью подстановок $tg\,x=t$ и $ctg\,x=t$ соответственно.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx$, 2) $\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx$, 3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}$,

4) $\int \cos\frac{x}{3}\cdot\sin 5x\cdot\cos 2x\,dx$, 5) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$, 6) $\int tg^4 x\,dx$.

Решение.

1) $\int \sin^4 x\cdot\cos^2 x\,dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 x\cdot\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 2x)\sin^2 2x\,dx=$

$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\,dx-\frac{1}{8}\int\cos 2x\cdot\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx-$

$-\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x)=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

2) $\int\sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx=\begin{bmatrix} t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{bmatrix}=\int(1-\cos^2 x)\cos^5 x\cdot\sin x\,dx=$

$=-\int(1-t^2)t^5dt=\int\left(t^7-t^5\right)dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^6}{6}+C=\frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\cos^6 x}{6}+C$.

3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}=\int\frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^2 x\cdot\cos^6 x}=\int\frac{d(tg\,x)}{tg^3 x\left(\frac{1}{1+tg^2 x}\right)^3}=[t=tg\,x]=$

$=\int\frac{(1+t^2)^3dt}{t^3}=\int\frac{t^6+3t^4+3t^2+1}{t^3}dt=\int\left(t^3+3t+\frac{3}{t}+t^{-3}\right)dt=$

$=\frac{1}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2+3\ln|t|-\frac{1}{2t^2}+C$, где $tg\,x=t$.

4) $\int\cos\frac{x}{3}\cdot\sin 5x\cdot\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{3}(\sin 7x+\sin 3x)dx=$

$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{3}\sin 7x+\cos\frac{x}{3}\sin 3x\right)=\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{22x}{3}+\sin\frac{20x}{3}+\sin\frac{10x}{3}+\sin\frac{8x}{3}\right)dx=$

$=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{22}\cos\frac{22x}{3}+\frac{3}{20}\cos\frac{20x}{3}+\frac{3}{10}\cos\frac{10x}{3}+\frac{3}{8}\cos\frac{8x}{3}\right)+C$.

5) $\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}=\left[t=tg\,\frac{x}{2}\right]=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6}{1+t^2}+\frac{4-4t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{10-4t^2}=-\int\frac{dt}{2t^2-5}=$

$=-\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-\sqrt{5}}{\sqrt{2}t+\sqrt{5}}\right|+C$, где $t=tg\,\frac{x}{2}$.

6) $\int tg^4 x\,dx = \begin{bmatrix} t = tg\,x \\ x = arctg\,t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \int \dfrac{t^4}{t^2+1}dt = \int \dfrac{t^4-1+1}{t^2+1}dt = \int\left(t^2-1+\dfrac{1}{t^2+1}\right)dt =$

$= \dfrac{t^3}{3} - t + arctg\,t + C = \dfrac{1}{3}tg^3 x - tg\,x + x + C$.

Тригонометрические подстановки

К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ подстановкой $x = a\sin t$, тогда $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$.

2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ подстановкой $x = a\,tg\,t$, тогда $\sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}$.

В этом случае можно положить $x = a\,sh\,t$, тогда $\sqrt{a^2+x^2} = a\,ch\,t$.

3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ подстановкой $x = \dfrac{a}{\cos t}$, тогда $\sqrt{x^2-a^2} = a\,tg\,t$.

В этом случае можно положить $x = a\,ch\,t$, тогда $\sqrt{x^2-a^2} = a|sh\,t|$.

Для удобства приведем некоторые формулы, связывающие гиперболические функции между собой:

$th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$, $cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x}$, $ch^2 x - sh^2 x = 1$, $ch^2 x + sh^2 x = ch\,2x$,

$sh\,2x = 2ch\,x \cdot sh\,x$, $ch^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + ch\,2x)$, $sh^2 x = \dfrac{1}{2}(ch\,2x - 1)$.

Примеры. Найти неопределенные интегралы:

1) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$, 2) $\int \dfrac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$, 3) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{(x^2-16)^3}}$.

Решение.

1) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t \end{bmatrix} = \int 4\sin^2 t \cdot 4\cos^2 t\,dt = 4\int \sin^2 2t\,dt =$

$= 2\int(1-\cos 4t)dt = 2t - \dfrac{1}{2}\sin 4t + C$, где $t = \arcsin\dfrac{x}{2}$.

$$2)\ \int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}}=\left[\begin{array}{l}x=3tg\,t\\ dx=\dfrac{3dt}{\cos^2 t}\\ \sqrt{\left(x^2+9\right)^3}=\dfrac{27}{\cos^3 t}\end{array}\right]=\int\frac{27tg^2t\cdot\cos^3 t}{27\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt=\int\frac{dt}{\cos t}-\int\cos t\,dt=\left[u=tg\,\frac{t}{2}\right]=\int\frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}-\sin t=$$

$$=-2\int\frac{dt}{u^2-1}-\sin t=-\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|-\sin t+C=-\ln\left|\frac{tg\,\dfrac{t}{2}-1}{tg\,\dfrac{t}{2}+1}\right|-\sin t+C,\ \text{где}$$

$$t=arctg\,\frac{x}{3}.$$

$$3)\ \int\frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-16\right)^3}}=\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{\cos t}\\ \sqrt{\left(x^2-16\right)^3}=64tg^3t\\ dx=\dfrac{4\sin t}{\cos^2 t}dt\end{array}\right]=\int\frac{\sin t\cdot\cos t}{\cos^2 t\cdot 64tg^3t}dt=\frac{1}{64}\int\frac{dt}{tg^2t}=$$

$$=\frac{1}{64}\int\frac{\cos^2 t\,dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{64}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=\frac{1}{64}(-ctg\,t-t)+C=$$

$$=-\frac{1}{64}\left(ctg\left(\arccos\frac{4}{x}\right)+\arccos\frac{4}{x}\right)+C=-\frac{1}{64}\left(\frac{4}{\sqrt{x^2-16}}+\arccos\frac{4}{x}\right)+C.$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Обозначим символом T разбиение отрезка $[a;b]$ при помощи некоторых не совпадающих друг с другом точек $T:\ a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n частичных отрезков. Обозначим через $\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=\overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$ назовем диаметром разбиения. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку

$c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Составим сумму $\sigma_T = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется интегральной суммой функции $y = f(x)$, соответствующей данному разбиению T отрезка $[a;b]$. Она зависит от способа разбиения отрезка $[a;b]$ и выбора точек $c_1, c_2, \ldots c_n$.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм σ_T при $\lambda_T \to 0$, если для любого малого положительного числа ε найдется положительное число $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$ с диаметром $\lambda_T < \delta$ и при любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ выполняется неравенство $|\sigma_T - I| < \varepsilon$.
Для обозначения предела интегральных сумм употребляется символика $I = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a;b]$, если существует конечный предел I интегральных сумм этой функции при $\lambda_T \to 0$. Указанный предел I называется **определенным интегралом** от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 6.1. Если функция интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она и ограничена на нем.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - I\right| < 1$ или $-1 + I - \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i < f(c_1)\Delta x_1 < 1 + I - \sum_{i=2}^{n} f(c_i)\Delta x_i$. Зафиксируем точки $c_2, \ldots c_n$, тогда для любой точки $c_1 \in [x_0, x_1]$ имеем $A < f(c_1)\Delta x_1 < B$, то есть функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[x_0, x_1]$. Аналогично доказывается, что она ограничена на остальных частичных отрезках $[x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, то есть на всем отрезке $[a;b]$. Теорема доказана.

Приведем пример интегрируемой функции. Докажем, что функция $f(x) = C = const$ интегрируема на любом отрезке $[a;b]$, причем $\int\limits_a^b C\,dx = C(b-a)$. Действительно, так как $f(c_i) = C$ при $\forall c_i$, то $\sigma_T = C\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b-a)$ и поэтому $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = C(b-a)$.

Докажем следующее утверждение: неограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ не интегрируема на нем.

Пусть функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, тогда она не ограничена на некотором частичном отрезке $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ любого данного разбиения *T* разбиение отрезка $[a;b]$. Поэтому слагаемое $f(c_i)\Delta x_i$ интегральной суммы σ_T, отвечающей этому разбиению *T,* может быть сделано сколь угодно большим по абсолютной величине за счет выбора точки c_i. Отсюда вытекает, что интегральные суммы σ_T, отвечающие любому разбиению *T,* не ограничены, поэтому не существует конечного предела интегральных сумм.

Возникает вопрос: всякая ли ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция является интегрируемой на нем? Следующий пример показывает, что это, вообще говоря, не так. Рассмотрим функцию Дирихле: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$.

Она ограничена на любом отрезке $[a;b]$, но не интегрируема на нем. Действительно, если для любого разбиения *T* со сколь угодно малым диаметром λ_T выбрать точки c_i рациональными, то $\sigma_T=\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=b-a$, а если же для того же разбиения *T* точки c_i выбрать иррациональными, то $\sigma_T=0$. Поэтому для функции Дирихле не существует предела интегральных сумм, то есть эта функция не интегрируема.

Задачи, приводящие к определенному интегралу

1. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на отрезке $[a;b]$ и положительную на нем. Поставим задачу нахождения площади криволинейной трапеции $\{(x,y): a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\}$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на части точками деления *T*: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Обозначим через $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i\in\left[x_{i-1},x_i\right]$, $i=\overline{1,n}$. Тогда $\sigma_T=\sum\limits_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i-$ площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников, которая при-

ближенно равна площади криволинейной трапеции (рис.1). Следовательно, $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = \int\limits_a^b f(x)dx = S_{крив.трап}$.

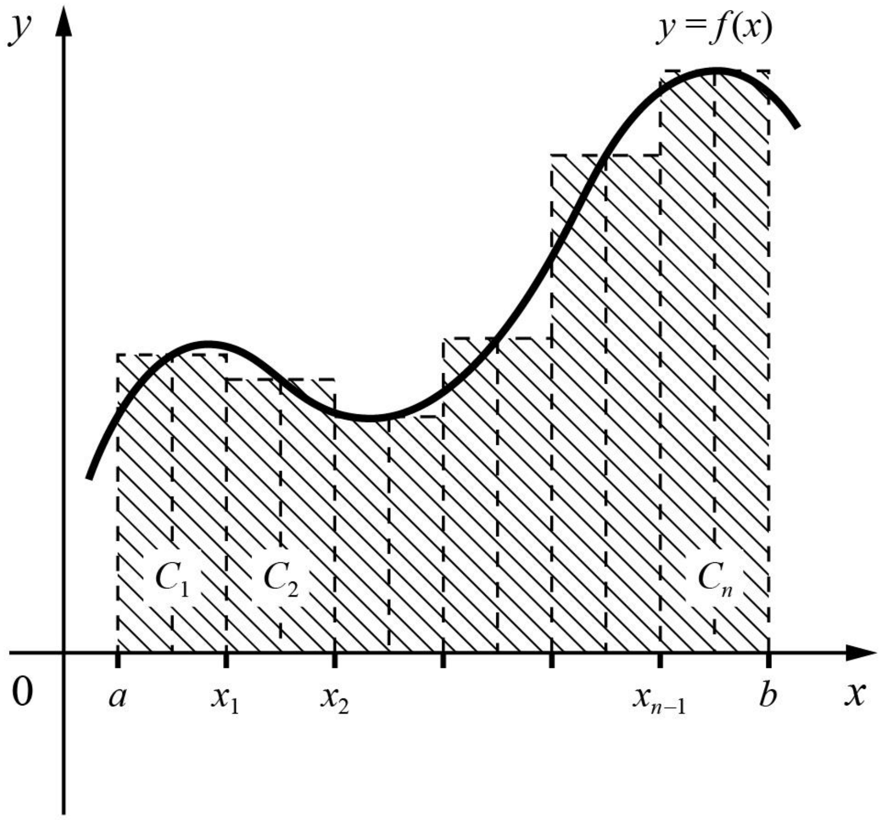

Рис. 1

2. Пусть под действием некоторой переменной силы $F(x)$ тело перемещается из точки *a* в точку *b*. Найти работу, совершаемую этой силой.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на части точками деления

T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. Тогда $A \approx \sum\limits_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами

1. Будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Отметим, что эта формула должна рассматриваться как соглашение. Ее нужно рассматривать как естественное распространение понятия определенного интеграла на отрезок нулевой длины.

2. Будем считать, что при $a<b$ $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Эта формула также должна рассматриваться как соглашение. Она представляет собой естественное обобщение понятия интеграла на случай, когда отрезок $[a;b]$ пробегается от b к a (в этом случае в интегральной сумме все разности $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ имеют отрицательный знак).

3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $k \cdot f(x)$ ($k - const$) также интегрируемы на этом отрезке, причем

$$\int\limits_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx, \tag{3}$$

$$\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Доказательство. При любом разбиении отрезка $[a;b]$ и любом выборе точек $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ справедливо соотношение:

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f(c_i) \pm g(c_i)\big)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \pm g(c_i)\Delta x_i.$$

А поэтому из существования предела правой части следует существование предела левой. Следовательно, функция $f(x) \pm g(x)$ интегрируема и выполняется соотношение (3). Для доказательства интегрируемости функции $k \cdot f(x)$ заметим, что интегральные суммы функций $f(x)$ и $k \cdot f(x)$ отличаются постоянным множителем k. Поэтому функция $k \cdot f(x)$ интегрируема и справедлива формула (4).

4. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, тогда она интегрируема на любом отрезке $[c, d]$, содержащемся в $[a;b]$.

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, тогда она интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Оценки интегралов. Формулы среднего значения

1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и неотрицательна на нем, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. Каждая интегральная сумма такой функции $\sigma_T = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \geq 0$, поэтому и $\lim_{\lambda_T \to 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = I = \int_a^b f(x)dx \geq 0$. Действительно, допустим, что $I < 0$. Тогда по определению предела для $\varepsilon = |I|$ найдется интегральная сумма $\sigma_T = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$, для которой $|\sigma_T - I| < |I|$. Отсюда $\sigma_T < |I| + I = 0$, но мы только что показали, что $\sigma_T \geq 0$. Получили противоречие, следовательно, $I \geq 0$.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq m$, то $\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$.

Доказательство. Функция $f(x) - m \geq 0$ и интегрируема на отрезке $[a;b]$, поэтому по свойству 1: $\int_a^b (f(x) - m)dx \geq 0$. Отсюда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b m dx = m(b-a)$.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не равна тождественно нулю на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq c > 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на отрезке $[a;b]$, то найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = 2k > 0$. Тогда по теореме об устойчивости знака непрерывной функции можно найти такой отрезок $[a_1;b_1]$, содержащий точку ξ, в пределах которого значения функции $f(x)$ будут не меньше числа $k > 0$. Поэтому в силу замечания 1:

$\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geq k(b_1 - a_1) > 0$.

Согласно свойству определенного интеграла имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx + \int\limits_{b_1}^{b} f(x)dx$.

Поскольку $f(x) \geq 0$ и $\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)dx \geq c > 0$, где $c = k(b_1 - a_1)$, получим, что $\int\limits_a^b f(x)dx \geq c > 0$.

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \geq g(x)$ всюду на этом отрезке, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Функция $h(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда в силу свойства 1 имеем: $\int\limits_a^b h(x)dx \geq 0$. Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b (h(x) + g(x))dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Тогда для всех точек $x \in [a;b]$ имеем $f(x) = 0$.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что $f(\xi) > 0$. Тогда из свойства 2 следует, что $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$, а это противоречит условию $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Следовательно, нет таких точек $x \in [a;b]$, в которых $f(x) \neq 0$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Замечание 2. Из интегрируемости $|f(x)|$ не следует, вообще говоря, интегрируемость $f(x)$. Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ -1, & x \notin Q \end{cases}$ не интегрируема на отрезке $[0,1]$, тогда как $|f(x)| \equiv 1 -$ интегрируемая на отрезке $[0,1]$ функция.

6. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $g(x) \geq 0$ всюду на этом отрезке. Тогда, если M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx. \quad (5)$$

Доказательство. Для $\forall x \in [a;b]$ имеем $m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x)$ и применяем свойство 3.

Теорема 7.1. (первая формула среднего значения)
Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на этом отрезке. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \quad (6)$$

Доказательство. Полагая в (5) $g(x) = 1$ и учитывая, что $\int_a^b dx = b - a$, получим $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Обозначая через $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, получаем требуемую формулу (6). Теорема доказана.
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существуют такие точки $a_1, b_1 \in [a, b]$, что $f(a_1) = m$, $f(b_1) = M$. Тогда на отрезке $[a_1;b_1]$, а стало быть и на отрезке $[a;b]$ найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$. В этом случае формула (4) примет вид: $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$. Эта формула называется **первой формулой среднего значения.**

Теорема 7.2. (первая формула среднего значения в обобщенной форме)
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, M и m – точные верхняя и нижняя грани $f(x)$ на этом отрезке. Пусть $g(x) \geq 0$ (или $g(x) \leq 0$) на всем отрезке $[a;b]$. Тогда найдется такое число μ, удовлетворяющее неравенствам $m \leq \mu \leq M$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx. \quad (7)$$

В частности, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \qquad (8)$$

Доказательство. Докажем справедливость формулы (7). Если $\int_a^b g(x)dx = 0$, то в силу неравенства (5) $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и поэтому в качестве μ можно взять любое число. Если $\int_a^b g(x)dx > 0$, то разделив все части неравенства (5) на $\int_a^b g(x)dx$, получим $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$. Полагая $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$, получим формулу (7). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то какого бы ни было число μ, заключенное между M и m, на этом отрезке найдется точка ξ такая, что $f(\xi) = \mu$ и формула (7) переходит в формулу (8). Теорема доказана.

Замечание. Если функция $f(x)$ не является непрерывной на отрезке $[a;b]$, то формула (8), вообще говоря, неверна. Пусть, например, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$. Тогда число μ в формуле (7) равно $\frac{2}{3}$. Таким образом, для $\forall \xi \in [0,1]$ $f(\xi) \ne \mu$.

Теорема 7.3. (вторая формула среднего значения)
Если функция $g(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, а функция $f(x)$ интегрируема на нем, то на этом отрезке существует такая точка ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Эта формула называется второй формулой среднего значения или формулой Бонне.

8. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ И ЕГО СВОЙСТВА. ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, тогда она интегрируема на любой части этого отрезка, то есть $\forall x \in [a;b]$ она интегрируема на $[a;x]$. Следовательно, существует функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, которую называют **интегралом с переменным верхним пределом**. Докажем несколько свойств этой функции.

Теорема 8.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$. Тогда $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ является непрерывной функцией на этом отрезке.

Доказательство. Из интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ следует, что она ограничена на этом отрезке, то есть найдется постоянная $M>0$ такая, что $\forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| \le M$. Возьмем любые точки $x, x+\Delta x \in [a,b]$. Имеем: $|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x)-F(x)| = \left|\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| =$

$$= \left|\int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt\right| = \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \le \left|\int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt\right| \le M|\Delta x|.$$

Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда для любой величины Δx с условием $|\Delta x| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ имеем $|\Delta F(x)| < \varepsilon$. Следовательно, функция $\Delta F(x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, то есть функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Теорема доказана.

Теорема 8.2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна во внутренней точке x_0 этого отрезка. Тогда функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)=f(x_0)$.

Доказательство. Надо доказать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} = f(x_0)$.

Имеем в силу свойств определенного интеграла

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0) = \int\limits_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_a^{x_0} f(t)dt + \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt.$$

По формуле среднего значения находим: $F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=f(\xi)\Delta x$, где ξ – число, заключенное между числами x_0 и $x_0+\Delta x$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то при $\Delta x\to 0$ $f(\xi)\to f(x_0)$. Поэтому из последней формулы находим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x_0)$. Теорема доказана.

Замечание 8.1. При доказательстве теоремы 8.1. мы установили существование производной от интеграла с переменным верхним пределом и доказали, что эта производная равна подынтегральной функции $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=f(x)$.

Замечание 8.2. Интеграл с переменным верхним пределом часто используется для определения новых функций. Мы отмечали, что первообразные некоторых элементарных функций не выражаются через элементарные функции и не являются поэтому элементарными. Напомним, что к числу неэлементарных функций относятся, например, функции $\int\limits_0^x e^{t^2}dt$, $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$.

Следствие из теоремы 8.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для нее существует первообразная на этом отрезке. Одной из первообразных будет интеграл с переменным верхним пределом.

Формулу Ньютона-Лейбница называют основной теоремой интегрального исчисления, поскольку она связывает понятия определенного и неопределенного интегралов.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ будет первообразной для $f(x)$, то есть $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$. Пусть $F(x)$ – любая другая первообразная, тогда $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt+C$. Полагая в последней формуле $x=a$, получим $F(a)=C$. Полагая затем $x=b$, найдем $F(b)=\int\limits_a^b f(t)dt+C$. Отсюда находим

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$ – формула Ньютона-Лейбница.

Теорема 8.3. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и существует функция $F(x)$, непрерывная на этом отрезке такая, что $F'(x) = f(x)$ во всех точках отрезка $[a;b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a;b]$ на части точками деления *T*: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В число точек деления включим те, в которых $F'(x) \neq f(x)$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Тогда

$F(b) - F(a) = F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots + F(x_1) - F(a)$.

По теореме Лагранжа: $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)\Delta x_i$, где $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Тогда

$F(b) - F(a) = F'(c_n)\Delta x_n + F'(c_{n-1})\Delta x_{n-1} + \ldots + F'(c_1)\Delta x_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sigma_T$. (9)

Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = \int\limits_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$ в равенстве (9), получим формулу Ньютона-Лейбница.

9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ И ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теорема 9.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$. Тогда имеет место следующая формула:

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Доказательство. Так как $(uv)' = u'v + uv'$, то функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $u'v + uv'$. Следовательно, по формуле Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b (u'v + uv')dx = uv\Big|_a^b$. По свойству определенного интеграла $\int_a^b (u'v+uv')dx=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx$. Из этих двух равенств получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

Теорема 9.2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Функция $x=\varphi(t)$ имеет на отрезке $[\alpha,\beta]$ непрерывную производную $\varphi'(t)$ и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и при $t\in[\alpha,\beta]$ $\phi(t)\in[a,b]$. Тогда имеет место следующая формула: $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для нее существует первообразная $F(x)$, то есть $F'(x)=f(x)$. Легко проверить, что функция $F(\varphi(t))$ есть первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Действительно, $(F(\varphi(t)))'=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Учитывая этот факт и формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема доказана.

Примеры. Вычислить определенные интегралы: 1) $\int_0^\pi x\sin 2x\,dx$,

2) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$, 3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int_0^\pi x\sin 2x\,dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=\sin 2x\,dx \\ du=dx & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos 2x\,dx=$$

$$-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi+\frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\pi-\frac{1}{4}\sin 0=-\frac{\pi}{2}.$$

2) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{x}, & x=4 \to t=2 \\ x=t^2, & x=9 \to t=3 \\ dx = 2t\,dt & \end{bmatrix} = \int\limits_2^3 \frac{2t^2}{t-1}dt = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$

$= 2\int\limits_2^3 \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Bigg|_2^3 = 2\left(\frac{9}{2}+3+\ln 2-2-2-\ln 1\right) =$

$= 7-2\ln 2.$

3)

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x} = \begin{bmatrix} t = tg\,\frac{x}{2} \\ x=-\frac{\pi}{2} \to t=-1 \\ x=\frac{\pi}{2} \to t=1 \end{bmatrix} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{3+3t^2+1-t^2} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{2t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}} - arctg\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

10. ПЛОЩАДЬ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Теорема 10.1. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и неотрицательна на этом отрезке. Тогда площадь криволинейной трапеции $P=\{(x,y): a\le x\le b,\ \ 0\le y\le f(x)\}$ равна $S(P)=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна и не положительна на отрезке $[a;b]$, то значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ равно взятой с отрицательным знаком площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox (рис. 2).

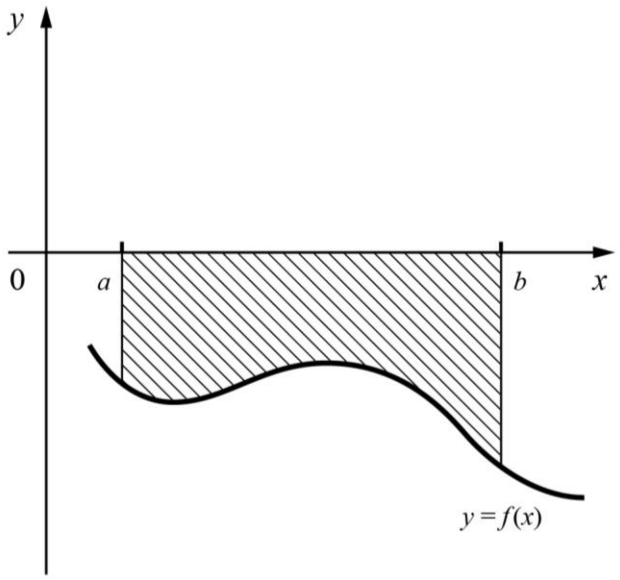

Рис. 2

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу графиком функции $g(x)$, сверху графиком функции $f(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ равна $S(P)=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$ (рис.3).

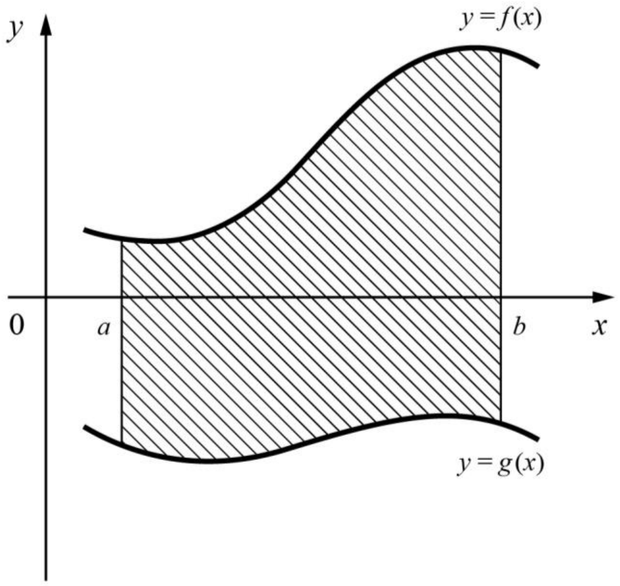

Рис. 3

Доказательство. Заменим функцию $f(x)$ на $f(x)+C\geq 0$ и $g(x)$ на $g(x)+C\geq 0$, тогда $S(P)=\int\limits_a^b (f(x)+C)dx-\int\limits_a^b (g(x)+C)dx=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))dx$.

Примеры. 1) Найти площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-1$ и прямой $y=x+1$.

Решение. 1) Дуга эллипса, расположенная в верхней полуплоскости, задается уравнением $y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. Очевидно, что вся площадь равна (рис.4)

$$S=4b\int\limits_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\begin{bmatrix} x=a\sin t \\ dx=a\cos t\,dt \\ \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}=\cos t \\ 0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix}=4ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=2ab\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

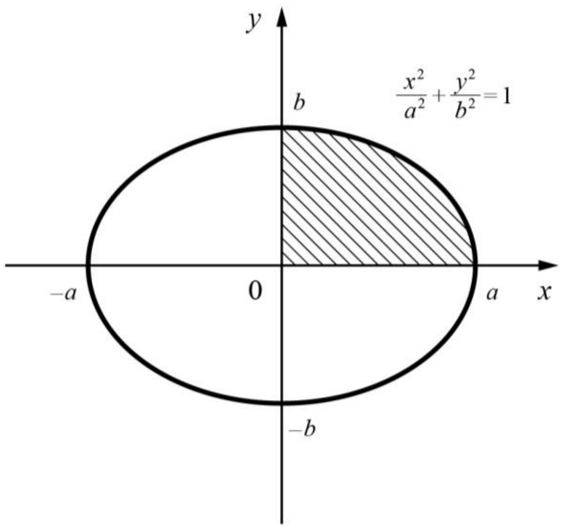

Рис. 4

2) Найдем точки пересечение графиков функций: $x^2-1=x+1$, $x^2-x-2=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$. Тогда площадь равна (рис. 5):

$$S=\int_{-1}^{2}\left(x+1-x^2+1\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=-\frac{8}{3}+2+4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2=\frac{9}{2}.$$

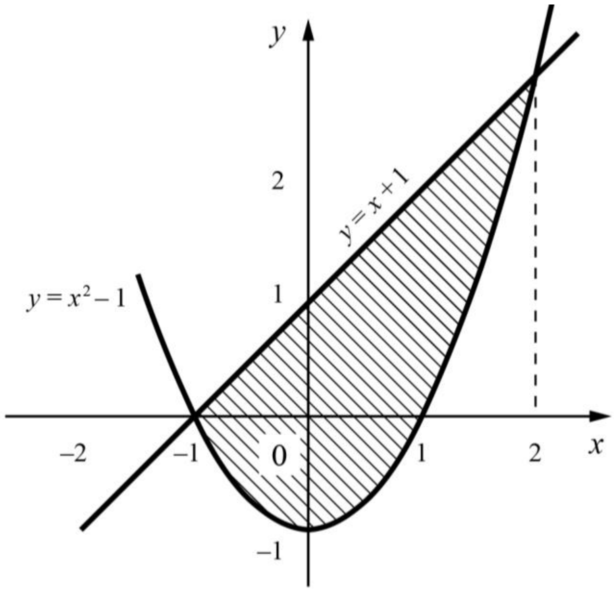

Рис. 5

Перейдем к вычислению площади области, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями. Пусть область D ограничена непрерывной замкнутой кривой Γ:
$$\begin{cases} x=x(t), & t\in\left[T_0;T_1\right], \quad x\left(T_0\right)=x\left(T_1\right), \quad y\left(T_0\right)=y\left(T_1\right). \\ y=y(t) \end{cases}$$

Рассмотрим простейший случай: отрезок $\left[T_0;T_1\right]$ делится точкой $\tau\in\left(T_0;T_1\right)$ так, что на каждом из отрезков $\left[T_0;\tau\right]$ и $\left[\tau;T_1\right]$ функция $x=x(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей, каждая из которых есть график однозначной непрерывной функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$. Предположим, что для любого x выполнено соотношение $y_1(x)\le y_2(x)$, тогда кривая $y=y_2(x)$ есть верхняя, а кривая $y=y_1(x)$ – нижняя граница области D. Если при возрастании t` кривая Γ проходится так, что область D остается слева (положительное направление обхода), то верхняя граница D проходится справа налево (значение x убывает), а нижняя граница D проходится слева направо (значение x возрастает). Поэтому имеем: $S(D)=\int\limits_a^b (y_2(x)-y_1(x))dx=\int\limits_a^b y_2(x)dx-\int\limits_a^b y_1(x)dx$. Сделав в первом интеграле замену $x=x(t)$, $t\in[T_0;\tau]$, а во втором замену $x=x(t)$, $t\in[\tau;T_1]$, получаем, что так как $y_2(x(t))=y(t)$, $t\in[T_0;\tau]$ и $y_1(x(t))=y(t)$, $t\in[\tau;T_1]$, то

$$S(D)=-\int\limits_{T_0}^{\tau} y(t)\cdot x'(t)dt-\int\limits_{\tau}^{T_1} y(t)\cdot x'(t)dt=-\int\limits_{T_0}^{T_1} y(t)\cdot x'(t)dt.$$

Таким же образом получаем, что если отрезок $[T_0;T_1]$ делится точкой $\tau\in(T_0;T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0;\tau]$ и $[\tau;T_1]$ функция $y=y(t)$ строго монотонна и непрерывно дифференцируема, то $S(D)=\int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)\cdot y'(t)dt$. Объединяя эти две формулы, получаем следующую формулу:

$$S(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}(x(t)\cdot y'(t)-y(t)\cdot x'(t))dt.$$

Можно доказать, что все эти три формулы справедливы и в более общем случае, когда непрерывная замкнутая кривая Γ: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[T_0;T_1]$, проходится при изменении t от T_0 до T_1 таким образом, что ограничиваемая этой кривой область D остается слева. Какую из формул удобнее применять, зависит от конкретного вида функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

Пример. Найти площадь области, ограниченной петлей кривой $x=a(t^2-2t)$, $y=a(t^2-1)(t-3)$, $a>0$. (рис.6).

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении t от -1 до 3. Поэтому

$$S(D)=-\int\limits_{T_0}^{T_1} y(t)\cdot x'(t)dt=-\int\limits_{-1}^{3} a(t^2-1)(t-3)a(2t-2)dt=$$

$$= -2a^2\int_{-1}^{3}\left(t^4-4t^3+2t^2+4t-3\right)dt = -2a^2\left(\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{2}{3}t^3+2t^2-3t\right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= -2a^2\left(\frac{244}{5}-80+\frac{2}{3}\cdot 28\right)+16-12=\frac{256}{15}a^2 .$$

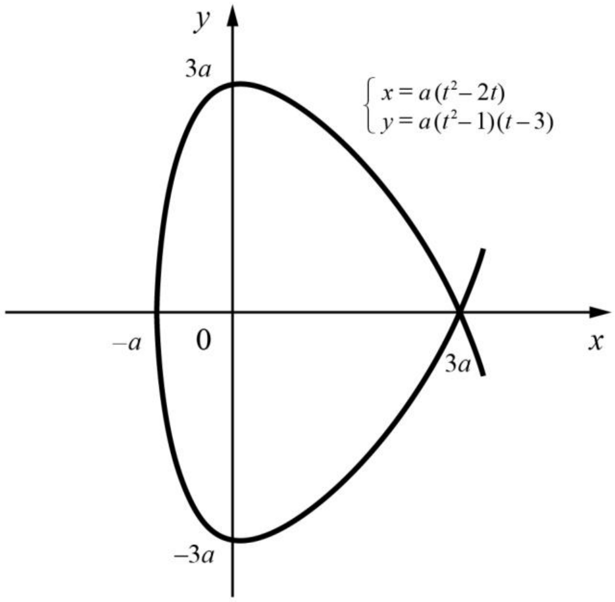

Рис. 6

Перейдем к вычислению площади области, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат. Пусть кривая L задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, причем функция $r = r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы α и β, будем называть криволинейным сектором.

Теорема 10.2. Площадь криволинейного сектора может быть вычислена по формуле $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

Доказательство. Отрезок $[\alpha, \beta]$ разобьем на части точками $T: \alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i$, $i = \overline{1, n}$, $\lambda_T = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \Delta\varphi_i$. На каждом частичном отрезке выберем точки $c_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ и построим круговые секторы с радиусами $r(c_i)$. Получим веерообразную фигуру, площадь которой равна $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(c_i)\Delta\varphi_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$ получим $S = \lim\limits_{\lambda_T \to 0} \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} r^2(c_i)\Delta\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi$.

Теорема доказана.

Примеры. 1) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$ (рис.7).

Решение. $S = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int\limits_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int\limits_0^{\pi}\left(1+2\cos\varphi+\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\right)d\varphi =$

$$= a^2\left(\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

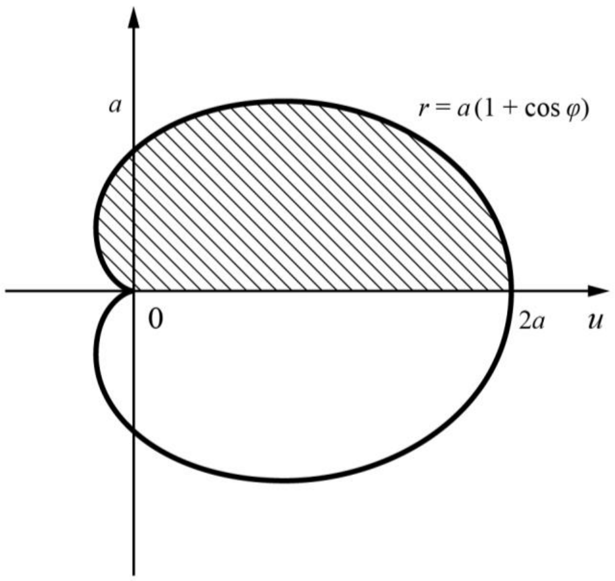

Рис. 7

2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = 2\sin 3\varphi$.

Решение. Исходя из условия неотрицательности полярного радиуса, находим $\sin 3\varphi \ge 0$, $2\pi n \le 3\varphi \le \pi + 2\pi n$, $\frac{2\pi n}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, что вся площадь равна (рис.8)

$$S = 3\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3\varphi\, d\varphi = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 6\varphi)d\varphi = 3\left(\varphi - \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \pi .$$

$r = 2\sin 3\varphi$

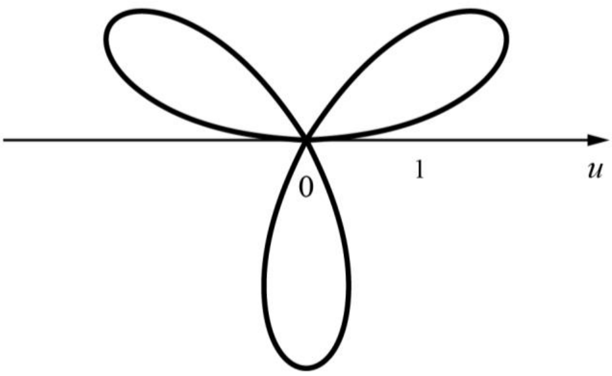

Рис. 8

11. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Теорема 11.1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ (рис.9). Тогда объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a;b]$ оси Ox равен $V_{Ox} = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Доказательство. Разобьем отрезок $[a;b]$ на части точками деления T: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$. На каждом частичном отрезке выберем произвольную точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ и построим прямоугольник с высотой $f(c_i)$. При вращении этих прямоугольников вокруг оси Ox получим ступенчатое тело, составленное из цилиндров, объем которого равен $\sigma_T = \pi\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i$, который приближенно равен объему тела вращения. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $V_{Ox} = \lim\limits_{\lambda_T\to 0}\sigma_T = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$.

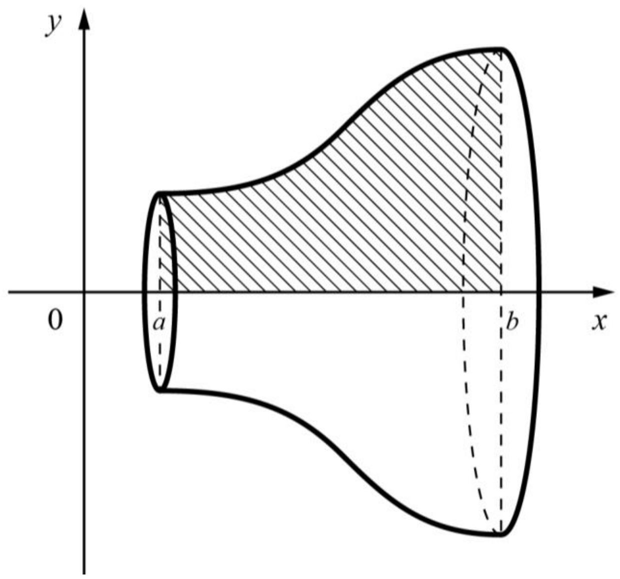

Рис. 9

В более общем случае объем кольца, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $\{(x,y): a \le x \le b,\quad g(x) \le y \le f(x)\}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные неотрицательные функции, равен

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $\{(x,y): a \le x \le b,\quad 0 \le y \le f(x)\}$, где $f(x)$ – однозначная непрерывная функция, равен

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Примеры. 1) Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис.10).

Решение. Так как $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$, то $V_{Ox} = \pi\int_{-a}^{a} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx =$

$$= 2\pi\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \right)^3 dx = 2\pi\int_0^a \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right) dx =$$

$$2\pi\left(a^2x - \frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}} + \frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}} - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^a = 2\pi\left(a^3 - \frac{9}{5}a^3 + \frac{9}{7}a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

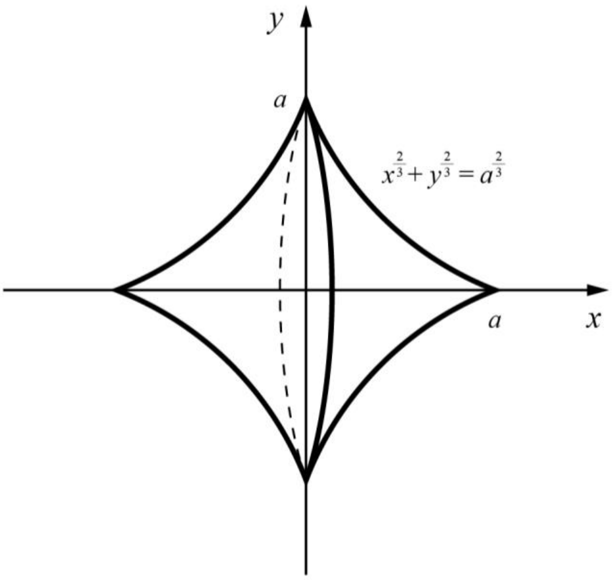

Рис. 10

2) Вычислить объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, расположенной в правой полуплоскости и ограниченной линиями $y=x$, $y=2x-x^3$ вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy (рис.11).

Решение. а) $V_{Ox}=\pi\int_0^1\left(\left(2x-x^3\right)^2-x^2\right)dx=\pi\int_0^1\left(4x^2-4x^4+x^6-x^2\right)dx=$

$$=\pi\left(x^3-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1=\pi\left(1-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{12\pi}{35}.$$

б) $V_{Oy}=2\pi\int_0^1 x\left(2x-x^3-x\right)dx=2\pi\int_0^1\left(x^2-x^4\right)dx=2\pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{4\pi}{15}$.

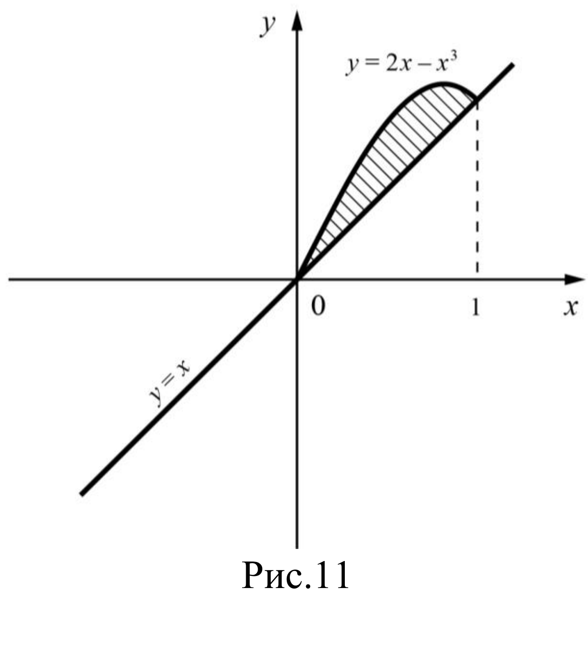

Рис.11

Теорема 11.2. Пусть на плоскости задана гладкая кривая $\begin{cases} x=\varphi(t), & \alpha\le t\le\beta \\ y=\psi(t) \end{cases}$ и функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют на отрезке $[\alpha,\beta]$ непрерывные производные. При этих условиях длина дуги кривой равна $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$.

Рассмотрим частные случаи этой формулы. Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$, $a\le x\le b$. Можно считать, что кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x, & a\le x\le b \\ y=f(x) \end{cases}$. Тогда $l=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Пусть кривая задана в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$. Тогда

$$\begin{cases} x=r(\varphi)\cos\varphi, & \alpha\le\varphi\le\beta \\ y=r(\varphi)\sin\varphi \end{cases},$$

$$\begin{cases} x'=r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi \\ y'=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi, \end{cases}$$

$(x')^2+(y')^2=(r')^2\cos^2\varphi-2r'r\cos\varphi\sin\varphi+r^2\sin^2\varphi+(r')^2\sin^2\varphi+$

$+\ 2r'r\cos\varphi\sin\varphi+r^2\cos^2\varphi=(r')^2+r^2$. Тогда $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r')^2+r^2}\,d\varphi$.

Примеры. 1) Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$.

Решение.

$$\begin{cases} x'=-3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ y'=3a\sin^2 t\cdot\cos t, \end{cases}\qquad \sqrt{(x')^2+(y')^2}=\sqrt{9a^2\cos^2 t\cdot\sin^2 t}=3a\cos t\cdot\sin t.$$

Тогда $l=4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}3a\cos t\cdot\sin t\,dt=6a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=-3a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-3a(-1-1)=6a$.

2) Найти длину дуги цепной линии $y=ch\,x$, $-1\le x\le 1$.

Решение. Имеем $y'=sh\,x$, $l=2\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+sh^2x}\,dx=2\int\limits_{0}^{1}ch\,x\,dx=2shx\Big|_0^1=2sh1$.

3) Найти длину дуги логарифмической спирали $r = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Решение. Находим $r' = \frac{9}{4}e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $\sqrt{(r')^2 + r^2} = \sqrt{\frac{81}{16}e^{\frac{3\varphi}{2}} + 9e^{\frac{3\varphi}{2}}} = \frac{15}{4}e^{\frac{3\varphi}{2}}$. Тогда

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{15}{4}e^{\frac{3\varphi}{4}}d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{\frac{3\varphi}{4}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = 5\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right).$$

Рассмотрим поверхность, образованную вращением вокруг оси Ox графика функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a;b]$.

Теорема 11.3. Если на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то площадь поверхности, образованной вращением графика этой функции вокруг оси Ox может быть вычислена по формуле $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$. (10)

Следствие. Если поверхность получается посредством вращения вокруг оси Ox кривой, определяемой параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), & \alpha \le t \le \beta \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то осуществляя замену переменных под знаком определенного интеграла в формуле (10), получим следующее выражение для площади этой поверхности: $S = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$.

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), & 0 \le t \le 2\pi \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

Решение. Находим $\begin{cases} x' = a(1 - \cos t) \\ y' = a\sin t \end{cases}$. Тогда

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right)} = a\sqrt{2 - 2\cos t} = a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} =$$

$$= 2a\sin\frac{t}{2}.$$

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} 2a^2(1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}dt = -16\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}d\left(\cos\frac{t}{2}\right) =$$

$$=-16\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-16\pi a^2\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$
$$=-16\pi a^2\left(-2+\frac{2}{3}\right)=\frac{64\pi a^2}{3}.$$

12. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление массы стержня

Рассмотрим неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a;b]$ оси Ox. Пусть $\rho(x)-$ линейная плотность стержня, то есть $\rho(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}=m'(x)$, где $m(x+\Delta x)-m(x)=\Delta m-$ масса части стержня на отрезке $[x,x+\Delta x]$. Обозначим через T разбиение отрезка $[a;b]$ части: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$. Выберем точки $c_i\in\lfloor x_{i-1},x_i\rfloor$, $i=\overline{1,n}$. Обозначим через $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=\overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$. Тогда $\rho(c_i)\Delta x_i\approx m_i-$масса части стержня на $\lfloor x_{i-1},x_i\rfloor$, а масса всего стержня $M\approx\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(c_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T\to 0$, получим $M=\lim\limits_{\lambda_T\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(c_i)\Delta x_i=\int\limits_a^b\rho(x)dx$.

Вычисление статических моментов и координат центра тяжести кривой

Пусть на плоскости задан набор из n точек, в каждой из которых находится шарик массой m_i и задана направленная ось l.

Определение. Статическим моментом системы материальных точек относительно оси l называется сумма $M_l=\sum\limits_{i=1}^{n}m_id_i$, где d_i-расстояние от i-ой точки до оси, взятое со знаком «+», если точка лежит по левую сторону от оси и со знаком «-», если лежит по правую сторону.

Определение. Точка называется центром тяжести системы из n точек, если после помещения в эту точку шарика массой $m_1+m_2+\ldots m_n$ статический момент относительно любой оси для этой точки совпадает со статическим моментом всей системы точек.

Пусть на плоскости задана кривая $\begin{cases} x = x(t), & \alpha \le t \le \beta \\ y = y(t) \end{cases}$ и вдоль кривой распределена масса. Будем считать, что плотность распределения массы постоянна и равна 1, тогда масса любой части кривой совпадает с длиной этой части и $M = l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$. Найдем статические моменты этой кривой относительно осей Ox и Oy и координаты центра тяжести. Обозначим T: $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$, $\lambda_T = \max\limits_{1\le i\le n}\Delta t_i$. Тогда точки $M_i(x(t_i), y(t_i))$ разбивают кривую на части. Статический момент относительно оси Ox равен $M_x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} l_{M_{i-1}M_i}\, y(t_i)$, где $l_{M_{i-1}M_i} = l(t_i) - l(t_{i-1}) = l'(t_i)\Delta t_i$ (по теореме Лагранжа). Поэтому $M_x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} y(t_i)\sqrt{(x'(t_i))^2+(y'(t_i))^2}\,\Delta t_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

Аналогично, статический момент относительно оси Oy равен $M_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

Найдем координаты центра тяжести кривой $P(\xi,\eta)$. По определению $M\cdot\xi = M_y \Rightarrow \xi = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{M_y}{l}$; $M\cdot\eta = M_x \Rightarrow \eta = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{M_x}{l}$.

Распишем $M\cdot\eta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$. Умножим обе части последнего равенства на 2π, получим: $2\pi\eta l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$.

В правой части стоит формула для вычисления площади поверхности вращения. Таким образом, доказана **первая теорема Гульдена**:

Площадь поверхности, полученной при вращении вокруг оси *Ox* кривой, равна произведению длины окружности, описываемой центром тяжести вокруг оси *Ox* на длину кривой.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, тогда $M = S = \int_a^b f(x)dx$, так как $\rho(x) = 1$. Возьмем разбиение отрезка $[a;b]$ части: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{1,n}$ длину частичного отрезка и величину $\lambda_T = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. Координаты центра тяжести прямоугольника со сторонами Δx_i и y_{i-1} приближенно равны $\left(x_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{2}; \frac{\Delta y_i}{2}\right) \approx \left(x_{i-1}; \frac{\Delta y_i}{2}\right)$, $M_i = y_{i-1}\Delta x_i$. Тогда получим $M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} f(x_{i-1}) f(x_{i-1}) \Delta x_i$. Переходя к пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$. Аналогично, $M_y \approx \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} f(x_{i-1}) \Delta x_i$, или, переходя пределу при $\lambda_T \to 0$, получим $M_y = \int_\alpha^\beta x \cdot f(x)dx$.

Координаты центра тяжести $P(\xi, \eta)$ равны:

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{\int_\alpha^\beta x \cdot f(x)dx}{\int_\alpha^\beta f(x)dx}, \qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(x)dx}{\int_\alpha^\beta f(x)dx}.$$

Из последней формулы находим: $2\eta S = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$, $2\pi\eta S = \pi\int_\alpha^\beta f^2(x)dx$. В правой части последнего равенства стоит формула для вычисления объема тела вращения. Таким образом, доказана **вторая теорема Гульдена**:

Объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции вокруг оси Ox, равен площади криволинейной трапеции, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести.

Примеры. 1) Найти координаты центра тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте: $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = a\sin^3 t \end{cases}.$

Решение. Находим $x' = -3a\cos^2 t \cdot \sin t$, $y' = 3a\sin^2 t \cdot \cos t$, $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 3a\sqrt{\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t} = 3a\sin t \cdot \cos t = \frac{3}{2}a\sin 2t$.

Тогда

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = -\frac{3}{4}a\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{4}a(\cos\pi - \cos 0) = \frac{3}{2}a,$$

$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\,dt = -3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,d(\cos t) =$$

$= -\frac{3}{5}a^2\cos^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2$. Тогда абсцисса центра тяжести равна $\xi = \frac{M_y}{l} = \frac{3a^2}{5} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{2a}{5}$. Аналогично находим

$$M_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t \cdot 3a\sin t \cdot \cos t\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,d(\sin t) =$$

$= \frac{3}{5}a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5}a^2$. Ордината центра тяжести равна $\eta = \frac{M_x}{l} = \frac{3a^2}{5} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{2a}{5}$.

2) Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой H=6 м и радиусом основания R=2 м. Удельный вес масла $\delta = 0{,}9$.

Решение. Величина работы q, затрачиваемой на поднятие некоторого тела, зависит от высоты x его подъема: $q=Px$, где P – вес тела.

Допустим, что работа, затраченная на выкачивание из резервуара слоя масла толщиной x, есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении x на величину Δx объем v слоя масла увеличится на величину $\Delta v = \pi R^2 \Delta x$, его вес p увеличится на величину $\Delta p = \pi\delta R^2 \Delta x$, а затраченная работа q увеличится на величину $\Delta q = \pi\delta R^2 x \Delta x = dq$.

Всю искомую работу Q получим при изменении x от 0 до H. Поэтому

$$Q = \pi\delta R^2 \int_0^H x dx = \pi\delta R^2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^H = \frac{1}{2} \pi\delta R^2 H^2 = 64{,}8\pi .$$

13. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Дальнейшая цель состоит в распространении понятия интегрируемости функции по Риману на новые классы функций, а именно:

1) на функции, заданные на бесконечном промежутке;

2) на неограниченные функции.

Для первого случая интегралы типа $\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются несобственными интегралами первого рода, во втором случае, когда функция $f(x)$ является неограниченной на конечном отрезке $[a;b]$, интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называются несобственным интегралом второго рода.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;+\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a;A]$, где $a < A < +\infty$. Тогда, если существует предел $I = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом первого рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a;+\infty)$. Для интеграла I используется следующее обозначение: $I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Если предел I существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, если этот предел не существует или равен бесконечности, то говорят, что интеграл расходится.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty;a]$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[A;a]$, где $-\infty < A < a$. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int\limits_A^a f(x)dx$.

Определение. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

Примеры. 1) Пусть $a > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = (\alpha \neq 1) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A x^{-\alpha} dx = \lim_{A\to+\infty} \left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{A^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & \textit{если } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \textit{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln|x|\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \ln A - \ln a = \infty.$$

Таким образом, $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \textit{сходится}, & \textit{если } \alpha > 1 \\ \textit{расходится}, & \textit{если } \alpha \le 1. \end{cases}$

2) При любом натуральном n интегрированием по частям получаем, что $\int\limits_0^{+\infty} x^n \cdot e^{-x} dx = n!$

Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов

Теорема 13.1. (критерий сходимости несобственного интеграла первого рода)

Для сходимости интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых чисел $A_1, A_2 > B \Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Рассмотрим вопрос о сходимости интегралов первого рода в случае положительной функции. Если функция $f(x)$ положительна, то интеграл $F(c) = \int_a^c f(x)dx$ представляет собой монотонно возрастающую функцию переменной *c*. Действительно, пусть $c_1 > c_2$, тогда

$$F(c_1) - F(c_2) = \int_a^{c_1} f(x)dx - \int_a^{c_2} f(x)dx = \int_a^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^{c_1} f(x)dx - \int_a^{c_2} f(x)dx =$$

$$= \int_{c_2}^{c_1} f(x)dx \geq 0,$$ то есть $F(c_1) \geq F(c_2)$.

Поэтому для сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ в случае положительной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_a^c f(x)dx$ при возрастании *c* оставался ограниченным сверху: $\int_a^c f(x)dx \leq M$. Если это условие не выполнено, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ имеет значение ∞.

Теорема 13.2. (признак сравнения)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на промежутке $[a;+\infty)$, интегрируемы на любом отрезке $[a;c]$, где $a < c < +\infty$. Предположим, что при $x \geq x_0$ $0 < f(x) \leq g(x)$, тогда из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходится $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$. Так как $0 < f(x) \le g(x)$, то по свойству определенного интеграла $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \le \int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx$. Если $\int\limits_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то $\int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx \le M$, следовательно, $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \le M$. Поэтому $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

Если $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_{x_0}^{c} f(x)dx \to +\infty$ при $c \to +\infty$, значит и $\int\limits_{x_0}^{c} g(x)dx \to +\infty$, поэтому $\int\limits_{x_0}^{+\infty} g(x)dx$ расходится. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1-\cos bx}{x^2} dx,\ a > 0$.

Решение. Так как $\cos bx \ge -1$, то $\frac{1-\cos bx}{x^2} \le \frac{2}{x^2}$. А интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{2}{x^2} dx$ сходится, то по признаку сравнения сходится и исходный интеграл.

Теорема 13.3. (признак сравнения в предельной форме)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и положительны на промежутке $[a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, тогда:

1) при $0 \le K < +\infty$ из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$,

2) при $0<K\le+\infty$ из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, при $0<K<+\infty$ оба интеграла сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. По определению предела $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K$ имеем: $\forall\varepsilon>0\ \exists\Delta>0$ такое, что $\forall x: x>\Delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-K\right|<\varepsilon$. Последнее неравенство равносильно $K-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\varepsilon$ или

$$(K-\varepsilon)g(x)<f(x)<(K+\varepsilon)g(x). \qquad (*)$$

Пусть $0\le K<+\infty$, тогда $0\le f(x)<(K+\varepsilon)g(x)$. По теореме 13.2 из сходимости $\int\limits_a^{+\infty}(K+\varepsilon)g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пусть $0<K<+\infty$. Выберем $\varepsilon=\frac{K}{2}$ и воспользуемся левой частью неравенства (*): $\frac{K}{2}g(x)<f(x)$. Если $\int\limits_a^{+\infty}\frac{K}{2}g(x)dx$ расходится, то по теореме 13.2 и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Пусть $K=+\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. По определению предела имеем: $\forall E>0\ \exists\Delta>0$ такое, что $\forall x: x>\Delta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|>E$ или $f(x)>E\cdot g(x)$. Тогда из расходимости $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на сходимость $\int\limits_a^{+\infty}\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x+1}}dx$.

Решение. В нашем случае $f(x)=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x+1}}$. Рассмотрим функцию $g(x)=\dfrac{x}{x^2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ сходится, то по признаку сравнения в предельной форме исходный интеграл тоже сходится.

Выбирая конкретную функцию для сравнения, можно получить частные признаки сходимости или расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$.

Практическое значение имеет сравнение с функцией $\dfrac{1}{x^\alpha}$, которая интегрируема от $a>0$ до $+\infty$ при $\alpha>1$ и не интегрируема при $\alpha\le 1$. На этом построены следующие признаки:

Пусть при достаточно больших *x* функция $f(x)$ имеет вид $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}$ ($\alpha>0$). Тогда:

1) если $\alpha>1$ и $\varphi(x)\le c<+\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится;

2) если $\alpha\le 1$ и $\varphi(x)\ge c>0$, то $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ расходится.

Для доказательства нужно воспользоваться теоремой 13.2, функцией сравнения является функция $\dfrac{c}{x^\alpha}$.

Если при $x\to+\infty$ функция $f(x)$ является бесконечно малой порядка $\alpha>0$ (по сравнению с $\dfrac{1}{x}$), то интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ сходится или расходится в зависимости от того, будет ли $\alpha>1$ или $\alpha\le 1$. Здесь следует сослаться на теорему 13.3, роль функции $g(x)$ играет $\dfrac{1}{x^\alpha}$.

Примеры. Исследовать на сходимость: 1) $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+1}dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. 1) Подынтегральная функция при $x \to +\infty$ представляет собой бесконечно малую порядка $\frac{1}{2}$, следовательно, интеграл расходится.

2) Подынтегральная функция при $x \to +\infty$ представляет собой бесконечно малую порядка 2, следовательно, интеграл сходится.

Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Теорема 13.4. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится также и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Доказательство. Так как интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_0 > a$ такое, что для любых чисел $A_1, A_2 > A_0 \Rightarrow \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx < \varepsilon$. Но очевидно, что $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)dx\right| \le \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx < \varepsilon$.

Отсюда в силу того же критерия Коши вытекает сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Теорема доказана.

Определение. Будем говорить, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, а функцию $f(x)$ называть абсолютно интегрируемой на $[a; +\infty)$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, то будем говорить, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится условно.

Пример 1. (условно сходящегося интеграла)

Рассмотрим интеграл

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\begin{bmatrix} u=\frac{1}{x} & dv=\sin x \\ du=-\frac{dx}{x^2} & v=-\cos x\end{bmatrix}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Bigg|_{\pi}^{A}-\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx=-\frac{1}{\pi}-$$

$$-\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ сходится абсолютно, так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится. Таким образом, $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ сходится. Докажем, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ расходится. Так как $\frac{|\sin x|}{x}\ge\frac{\sin^2 x}{x}$, то достаточно доказать, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ расходится. Имеем

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx.$$

Мы доказывали, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x}$ расходится. Если мы докажем, что интеграл $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx$ сходится, то их разность будет расходиться. Имеем

$$\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx=\begin{bmatrix} u=\frac{1}{x} & dv=\cos 2x dx \\ du=-\frac{dx}{x^2} & v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{bmatrix}=\lim_{A\to+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}\Bigg|_{\pi}^{A}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2}dx.$$

Так как $\left|\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \dfrac{\sin 2x}{x^2} dx$ сходится абсолютно.

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью бесконечного веретена, образованного вращением линии $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ вокруг ее асимптоты.

Решение. $V_{Ox} = 2\pi \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \pi \lim\limits_{A \to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x^2} + arctgx \right)\Bigg|_0^A = \pi \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi^2}{2}$.

Пример 3. Бесконечная дуга $y = e^{-x}$, соответствующая положительным значениям *x*, вращается вокруг оси *Ox*. Найти площадь поверхности, которая при этом получается.

Решение. $S = 2\pi \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \sqrt{1+e^{-2x}} dx = \begin{bmatrix} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x} dx \\ x = 0, \quad t = 1 \\ x \to +\infty, \quad t \to 0 \end{bmatrix} = -2\pi \int\limits_{1}^{0} \sqrt{1+t^2} dt =$

$= \pi \left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left| t + \sqrt{1+t^2} \right| \right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right).$

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b)$ и не ограничена на нем, $\forall c : a \le c < b$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$. Тогда если существует $\lim\limits_{c \to b-} \int\limits_{a}^{c} f(x)dx = I$, то этот предел называется несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$ на промежутке $[a,b)$ и обозначается $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

В случае существования конечного предела, говорят, что интеграл сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a,b)$. В противном случае говорят, что интеграл расходится. Точка *b* называется особой.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $(a,b]$ и не ограничена на нем, $\forall c: a<c\le b$ функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a,c]$. Тогда $\lim\limits_{c\to a+}\int\limits_c^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках отрезка $[a,b]$ кроме точки d, тогда $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{c\to d-}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{c\to d+}\int\limits_c^b f(x)dx$.

Примеры. 1) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{c\to 1-}\int\limits_0^c\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{c\to 1-}\arcsin x\Big|_0^c=\frac{\pi}{2}$;

2) $\int\limits_0^a\frac{dx}{x^\alpha}=(\alpha\ne 1)=\lim\limits_{c\to 0+}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_c^a=\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}-\lim\limits_{c\to 0+}\frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}=\begin{cases}\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \alpha<1\\ \infty, & \alpha>1\end{cases}$,

$\int\limits_0^a\frac{dx}{x}=\lim\limits_{c\to 0+}\ln|x|\Big|_c^a=\ln|a|-\lim\limits_{c\to 0+}\ln|c|=\infty$. Таким образом,

$\int\limits_0^a\frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\textit{сходится}, & \textit{если } \alpha<1\\ \textit{расходится}, & \textit{если } \alpha\ge 1\end{cases}$.

Рассмотрим основные свойства несобственного интеграла второго рода на примере интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ с единственной особой точкой b. Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода.

1) **Теорема 13.5.** (критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода)

Для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых чисел $c_1,c_2\in(b-\delta,b)\Rightarrow\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right|<\varepsilon$.

2) Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ в случае положительной функции необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int\limits_a^c f(x)dx\ (a<c<b)$ оставался ограниченным сверху.

3) Теоремы сравнения 1 и 2 для положительных функций и здесь имеют место.

4) Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ и условно сходящимся, если он сходится, а $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ расходится.

Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле

Теорема 13.6. Пусть производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и отлична от нуля на (α,β) и пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$. Тогда имеет место формула:

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

как для собственных, так и для несобственных интегралов.

Доказательство. Пусть сначала α и β являются конечными. Тогда особыми точками функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))$ могут быть концы соответствующих отрезков. В силу монотонности функции $x=\varphi(t)$ каждое значение x принимается лишь один раз, когда переменная $t \in (\alpha,\beta)$. Тогда $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ по теореме о замене переменных для собственного интеграла имеем

$$\int\limits_{\varphi(\alpha+\varepsilon_1)}^{\varphi(\beta-\varepsilon_2)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha+\varepsilon_1}^{\beta-\varepsilon_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\varepsilon_1 \to 0, \varepsilon_2 \to 0$, получим искомую формулу.

Если пределы α и β бесконечны, то, взяв $\alpha_1, \beta_1 \in \boldsymbol{R}$ и вновь используя теорему о замене переменной для собственного интеграла, получим

$$\int\limits_{\varphi(\alpha_1)}^{\varphi(\beta_1)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\alpha_1 \to -\infty, \beta_1 \to +\infty$, получаем искомое равенство. Теорема доказана.

Теорема 13.7. Пусть: 1) функции $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на промежутке $(a,+\infty)$;

2) сходится хотя бы один из несобственных интегралов $\int_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ или $\int_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx$;

3) существует предел $l_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)v(x)$, а в случае, если a – особая, то существует предел $l_2 = \lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$. Тогда существуют оба интеграла и имеет место равенство $\int_a^{+\infty} u\,dv = uv\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v\,du$.

Доказательство. Рассмотрим собственные интегралы на отрезке $[a+\varepsilon, b]$. По теореме об интегрировании по частям в собственном интеграле имеем

$\int_{a+\varepsilon}^{b} u\,dv = uv\Big|_{a+\varepsilon}^{b} - \int_{a+\varepsilon}^{b} v\,du$. Устремив в этом равенстве $\varepsilon \to 0, b \to +\infty$, получим искомую формулу. Теорема доказана.

Примеры. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

1) $$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2-1} = t, & x = \sqrt{2}, & t = 1 \\ x = \sqrt{t^2+1}, & x \to +\infty, & t \to +\infty \\ dx = \dfrac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}} & & \end{bmatrix} = \int_1^{+\infty} \frac{tdt}{(t^2+1)t} =$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = arctg\, t\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

2) $$\int_0^{+\infty} x\cdot\sin x\,dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \cos x dx =$$

$- \lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\cos x) + \sin x\Big|_0^{+\infty} = -\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot\cos x + \sin x)$ не существует, следовательно, интеграл расходится.

Типовой расчет № 1
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Найти интегралы, используя приемы непосредственного интегрирования.

1. a) $\int \frac{3dx}{\cos^2(1+2x)}$; b) $\int \frac{x^3 + x\cdot e^x - 3}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 25}$.

2. a) $\int \frac{5dx}{\sin^2(1-3x)}$; b) $\int \frac{x^5 + x^2\cdot e^x - 7}{x^2}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 25}$.

3. a) $\int \frac{3dx}{\sqrt{2x+1}}$; b) $\int \frac{5^x + 2^x}{10^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 7}$.

4. a) $\int 4\sqrt{2x-1}dx$; b) $\int \frac{3^x + 2^x}{6^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 + 16x + 41}$.

5. a) $\int 8\sin(4x+1)dx$; b) $\int \frac{3^x - 7^x}{21^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 21}$.

6. a) $\int 4\cos(2x-1)dx$; b) $\int \frac{3dx}{\sqrt{4-3x^2}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x - 7}$.

7. a) $\int \frac{3dx}{4x+1}$; b) $\int \frac{4dx}{\sqrt{4x^2+1}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x - 5}$.

8. a) $\int \frac{5dx}{(2x+1)^2}$; b) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9x^2-1}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 - 20x + 9}$.

9. a) $\int 3e^{2x+1}dx$; b) $\int \frac{x^3 - 3}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 - 8x + 12}$.

10. a) $\int 5e^{2-3x}dx$; b) $\int \frac{x^3 + 5}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 12}$.

11. a) $\int 2\cdot 5^{1+4x}dx$; b) $\int (\sqrt{x}+1)(x-2)dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$.

12. a) $\int 3\cdot 4^{1-2x}dx$; b) $\int (\sqrt[3]{x}+2)(x-1)dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 21}$.

13. a) $\int 4\cdot 2^{1-4x}dx$; b) $\int (\sqrt[4]{x}+4)(x-1)dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 + 20x + 41}$.

14. a) $\int \frac{4dx}{\cos^2(3x+1)}$; b) $\int \frac{7dx}{\sqrt{3-4x^2}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 12}$.

15. a) $\int \frac{6dx}{\sin^2(3x-1)}$; b) $\int \frac{5dx}{\sqrt{9-4x^2}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2 - 12x + 13}$.

16. a) $\int 6\sqrt{2x+1}\,dx$; b) $\int \frac{3^x-5^x}{15^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+20x+21}$.

17. a) $\int 6\sqrt[4]{3x+5}\,dx$; b) $\int \frac{2^x+7^x}{14^x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+29}$.

18. a) $\int \frac{3dx}{(2x+1)^3}$; b) $\int \frac{2dx}{\sqrt{16x^2-1}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$.

19. a) $\int \frac{4dx}{(2x+1)^4}$; b) $\int \frac{3dx}{\sqrt{9x^2-4}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2-6x+25}$.

20. a) $\int \frac{9dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$; b) $\int \frac{2dx}{\sqrt{\frac{x^2}{16}-1}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+41}$.

21. a) $\int 2\sin\left(\frac{x}{4}-1\right)dx$; b) $\int \frac{5dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$.

22. a) $\int 3\cos\left(2-\frac{x}{3}\right)dx$; b) $\int \frac{2dx}{\sqrt{9-\frac{x^2}{16}}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+8x-21}$.

23. a) $\int \frac{4dx}{5^{4x-1}}$; b) $\int (\sqrt[4]{x}+4)(\sqrt{x}-1)dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2-6x-7}$.

24. a) $\int \frac{2dx}{\sqrt[3]{4+3x}}$; b) $\int (x+2)(\sqrt{x}-1)dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+12x+13}$.

25. a) $\int 2\sin\left(1-\frac{x}{4}\right)dx$; b) $\int \frac{5dx}{\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+6x+18}$.

26. a) $\int 4\cos\left(1-\frac{x}{2}\right)dx$; b) $\int \frac{5dx}{\sqrt{\frac{x^2}{4}-2}}$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+12x+25}$.

27. a) $\int 4(3-4x)^{\frac{3}{5}}dx$; b) $\int (x+4)(\sqrt{x}-2)dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+20x+9}$.

28. a) $\int 2(1-2x)^{\frac{3}{4}}dx$; b) $\int (2x-1)(\sqrt{x}+3)dx$; c) $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$.

29. a) $\int 5e^{1-5x}dx$; b) $\int \frac{x^4+4}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2-20x+21}$.

30. a) $\int 8e^{1-4x}dx$; b) $\int \frac{\sqrt{x}+4}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{4x^2+20x+9}$.

2. Найти интегралы, используя подходящую замену переменной.

1. a) $\int \cos x\sqrt{\sin^3 x}dx$; b) $\int \frac{3^x dx}{9^x+4}$; c) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

2. a) $\int \sqrt{x}\sqrt[5]{2+3\sqrt[3]{x}}dx$; b) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$; c) $\int \frac{tgx+5}{\cos^2 x}dx$.

3. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}$; b) $\int \frac{xdx}{x^2-4}$; c) $\int \frac{ctgx-5}{\sin^2 x}dx$.

4. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}$; b) $\int \frac{x^2 dx}{x^6-9}$; c) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

5. a) $\int \frac{\sqrt[7]{2+\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx$; b) $\int \frac{\cos x dx}{\sin x+9}$; c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}dx$.

6. a) $\int \frac{\sqrt[5]{2+\frac{1}{x^3}}}{x^4}dx$; b) $\int \frac{\sin x dx}{2\cos x+1}$; c) $\int \frac{2^x}{\sqrt{9-4^x}}dx$.

7. a) $\int \frac{dx}{x^2\sin^2\left(\frac{x-1}{x}\right)}$; b) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos^3 x}$.

8. a) $\int \frac{dx}{x^2\cos^2\left(\frac{x+1}{x}\right)}$; b) $\int \frac{\ln^5 x dx}{x}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$.

9. a) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; b) $\int \frac{\arccos^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

10. a) $\int (x^2+1)e^{x^3+3x}dx$; b) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-25}$; c) $\int \frac{dx}{arctg^3 x(1+x^2)}$.

11. a) $\int (x^3+1)e^{x^4+4x}dx$; b) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x-16}$; c) $\int \frac{dx}{arcctg^4 x(1+x^2)}$.

12. a) $\int \sqrt[3]{3+\frac{1}{x^3}}\frac{dx}{x^4}$; b) $\int \frac{(\cos x-1)dx}{\sqrt{x-\sin x}}$; c) $\int \frac{tg^3 x dx}{\cos^2 x}$.

13. a) $\int \sqrt{x}\cdot 5^{\sqrt{x^3}}dx$; b) $\int \frac{\cos x dx}{7\sin x+2}$; c) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4-e^{8x}}}$.

14. a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$; b) $\int \frac{\sin x dx}{5\cos x+2}$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$.

15. a) $\int 7^{\frac{1}{x^2}}\frac{dx}{x^3}$; b) $\int \frac{\arcsin^4 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{9-\sin^2 x}}$.

16. a) $\int 2^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$; b) $\int \frac{\arccos^5 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; c) $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{16-\cos^2 x}}$.

17. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+5}}$; b) $\int \frac{arctg^5 x dx}{1+x^2}$; c) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^2 x+3}$.

18. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-4}}$; b) $\int \frac{arcctg^4 x dx}{1+x^2}$; c) $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^2 x-5}$.

19. a) $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$; b) $\int \frac{\sqrt[5]{arctg\, x+5}dx}{1+x^2}$; c) $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^{2x}+3}}$.

20. a) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{arcctg\, x+3}dx}{1+x^2}$; c) $\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{9-e^{2x}}}$.

21. a) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2(x^3)}$; b) $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+x+3}}$; c) $\int \frac{3^x\, dx}{\sqrt{4-9^x}}$.

22. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sin^2(x^3)}$; b) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x+9}}$; c) $\int \frac{5^x\, dx}{\sqrt{4-25^x}}$.

23. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-7x^6}}$; b) $\int \frac{(2tg\, x+3)^3 dx}{\cos^2 x}$; c) $\int 2^{\cos x-1}\cdot \sin x\, dx$.

24. a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-4x^4}}$; b) $\int \frac{(2ctg\, x-3)^3 dx}{\sin^2 x}$; c) $\int 3^{\sin x+1}\cdot \cos x\, dx$.

25. a) $\int \frac{x^5 dx}{9+16x^{12}}$; b) $\int \frac{tg\, x dx}{\ln(\cos x)}$; c) $\int \frac{2^x\, dx}{\sqrt[5]{2-2^{x+1}}}$.

26. a) $\int \frac{x^4 dx}{4+25x^{10}}$; b) $\int \frac{ctg\, x dx}{\ln(\sin x)}$; c) $\int \frac{3^x\, dx}{\sqrt[5]{3-3^{x+1}}}$.

27. a) $\int \frac{\sqrt{1+3\ln x}dx}{x}$; b) $\int \frac{(1+\cos x)dx}{(x+\sin x)^4}$; c) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$.

28. a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+3\ln x}\, dx}{x}$; b) $\int \frac{x^5 dx}{\sin^2(3x^6-1)}$; c) $\int \frac{4^x\, dx}{16^x+9}$.

29. a) $\int \frac{\sqrt[4]{1+4\ln x}\, dx}{x}$; b) $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(3x^5-1)}$; c) $\int \frac{2^x\, dx}{4^x+25}$.

30. a) $\int \sqrt[3]{1+3\cos x}\cdot \sin x dx$; b) $\int \frac{\ln^3(2x+1)dx}{2x+1}$; c) $\int \frac{5^x\, dx}{25^x-9}$.

3. Найти интегралы, используя формулу интегрирования по частям

1. a) $\int(4x+1)\cos 2x\,dx$; b) $\int\left(x^2+x\right)e^{-x}dx$;

   c) $\int(2x+1)arctgx\,dx$; d) $\int\left(3x^2-1\right)\ln(x-1)dx$.

2. a) $\int(3x-1)\sin 3x\,dx$; b) $\int\left(x^2+1\right)e^{2x}dx$;

   c) $\int\arcsin x\,dx$; d) $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$.

3. a) $\int(5x+2)\sin\frac{x}{2}dx$; b) $\int\left(2-x^2\right)e^{4x}dx$;

   c) $\int\arccos x\,dx$; d) $\int\frac{\ln x}{x^5}dx$.

4. a) $\int(3-4x)\cos\frac{x}{2}dx$; b) $\int\left(2x-x^2\right)e^{2x}dx$;

   c) $\int x\cdot arctgx\,dx$; d) $\int\frac{\ln(2x+1)}{(2x+1)^5}dx$.

5. a) $\int(2-3x)\cos 3x\,dx$; b) $\int\left(2x^2+3\right)e^{4x}dx$;

   c) $\int arctg\,2x\,dx$; d) $\int(2x-3)\ln(x-3)dx$.

6. a) $\int(4-8x)\sin 4x\,dx$; b) $\int\left(4x^2+1\right)e^{2x}dx$;

   c) $\int arcctg\,3x\,dx$; d) $\int(2x+4)\ln(x+4)dx$.

7. a) $\int(4-3x)\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int\left(4x^2-x\right)e^{2x}dx$;

   c) $\int\arcsin 2x\,dx$; d) $\int(6x+5)\ln(3x-2)dx$.

8. a) $\int(1-3x)\sin\frac{x}{3}dx$; b) $\int\left(x^2-2x\right)e^{2x}dx$;

   c) $\int\arccos 2x\,dx$; d) $\int(2x+3)\ln(x+3)dx$.

9. a) $\int(5x+1)\sin 5x\,dx$; b) $\int\left(x^2+4x\right)e^{4x}dx$;

   c) $\int\arccos\frac{x}{2}dx$; d) $\int\frac{\ln(x+3)}{(x+3)^2}dx$.

10. a) $\int(4x+3)\cos 4x\,dx$; b) $\int\left(x^2-4\right)e^{-2x}dx$;

    c) $\int\arcsin\frac{x}{2}dx$; d) $\int\frac{\ln(x+5)}{(x+5)^2}dx$.

11. a) $\int(4x+3)\cos 4x\,dx$; b) $\int\left(x^2-4\right)e^{-2x}dx$;

    c) $\int\arcsin\frac{x}{2}dx$; d) $\int\frac{\ln(x+5)}{(x+5)^2}dx$.

12. a) $\int(6x-1)\sin 2x\,dx$; b) $\int\left(x^2-2x\right)e^{-x}dx$;

c) $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$; d) $\int (4x-1)\ln(2x+9)dx$.

13. a) $\int (2-5x)\cos 4x\,dx$; b) $\int \left(x^2+2\right)e^{-2x}dx$;

c) $\int \arccos 4x\,dx$; d) $\int 2x\ln(x+1)dx$.

14. a) $\int (3-x)\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int \left(x^2+4\right)e^{x}dx$;

c) $\int x\cdot arctg\,x\,dx$; d) $\int 2x\ln(x-2)dx$.

15. a) $\int (3-x)\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int \left(x^2+4\right)e^{x}dx$;

c) $\int x\cdot arctg\,x\,dx$; d) $\int 2x\ln(x-2)dx$.

16. a) $\int (3-2x)\sin 2x\,dx$; b) $\int \left(x^2+x\right)e^{x}dx$;

c) $\int x\cdot arcctg\,x\,dx$; d) $\int 3x^2\ln(x-1)dx$.

17. a) $\int (4x-5)\cos 2x\,dx$; b) $\int \left(x^2-3\right)e^{2x}dx$;

c) $\int \left(3x^2+1\right)arctg\,x\,dx$; d) $\int \left(3x^2-1\right)\ln(x-1)dx$.

18. a) $\int (8x-5)\sin 4x\,dx$; b) $\int \left(x^2+x\right)e^{-2x}dx$;

c) $\int \left(3x^2+1\right)arcctg\,x\,dx$; d) $\int \frac{\ln(4x-1)}{(4x-1)^2}dx$.

19. a) $\int (9x-1)\cos 3x\,dx$; b) $\int \left(x^2+4\right)e^{2x}dx$;

c) $\int \left(2x^3+x^2\right)arctg\,x\,dx$; d) $\int \frac{\ln(3x+1)}{(3x+1)^2}dx$.

20. a) $\int (2x-9)\sin 2x\,dx$; b) $\int \left(x^2+4x\right)e^{-x}dx$;

c) $\int \left(2x^3+2x\right)arctg\,x\,dx$; d) $\int \frac{\ln(2x-1)}{(2x-1)^3}dx$.

21. a) $\int (3x+8)\sin\frac{x}{3}dx$; b) $\int \left(2x^2-3\right)e^{4x}dx$;

c) $\int \arcsin 5x\,dx$; d) $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+2)^2}dx$.

22. a) $\int (4x-1)\sin 4x\,dx$; b) $\int x^2e^{2x}dx$;

c) $\int \arccos\frac{x}{4}dx$; d) $\int \frac{\ln(x-4)}{(x+1)^2}dx$.

23. a) $\int (3x-2)\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int x^2e^{3x}dx$;

c) $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$; d) $\int \frac{\ln(3x-4)}{(3x-4)^5}dx$.

24. a) $\int (3x-2)\cos\frac{x}{3}dx$; b) $\int x^2 e^{3x}dx$;

c) $\int \arcsin\frac{x}{3}dx$; d) $\int \frac{\ln(3x-4)}{(3x-4)^5}dx$.

25. a) $\int (3-4x)\sin 4x\,dx$; b) $\int \left(x^2-2\right)e^{\frac{x}{2}}dx$;

c) $\int arctg\frac{x}{2}dx$; d) $\int \frac{\ln(x-4)}{(x-4)^4}dx$.

26. a) $\int (2-x)\cos 4x\,dx$; b) $\int \left(x^2+2x\right)e^{\frac{x}{4}}dx$;

c) $\int arcctg\frac{x}{2}dx$; d) $\int \frac{\ln(x-2)}{(x-2)^6}dx$.

27. a) $\int (5-x)\sin 3x\,dx$; b) $\int \left(x^2+5\right)e^{\frac{x}{3}}dx$;

c) $\int arctg\,3x\,dx$; d) $\int (2x-1)\ln(x-1)dx$.

28. a) $\int (4+x)\cos 4x\,dx$; b) $\int \left(x^2-1\right)e^{\frac{x}{4}}dx$;

c) $\int x\cdot arcctg\,2x\,dx$; d) $\int (2x+1)\ln(x+1)dx$.

29. a) $\int (3+2x)\sin 6x\,dx$; b) $\int \left(x^2-x\right)e^{\frac{x}{2}}dx$;

c) $\int x\cdot arctg\,4x\,dx$; d) $\int \left(3x^2+1\right)\ln x\,dx$.

30. a) $\int (3-4x)\cos 2x\,dx$; b) $\int \left(x^2+4x\right)e^{\frac{x}{4}}dx$;

c) $\int arctg\,4x\,dx$; d) $\int \left(3x^2-2\right)\ln x\,dx$.

4. Найти интегралы от рациональных функций

1. a) $\int \frac{x+2}{x^3-5x^2+6x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+9x^3+14x^2+62x+4}{(x+4)\left(x^2+5\right)}dx$;

c) $\int \frac{11x^2+19x+15}{(x-1)\left(x^2+4x+4\right)}dx$.

2. a) $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-2x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+2x^3+10x^2+5x+7}{(x+1)\left(x^2+3\right)}dx$;

c) $\int \frac{11x^2+19x+15}{(x-1)\left(x^2+4x+4\right)}dx$.

3. a) $\int \frac{x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$; b) $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-10x+9}{(x-2)\left(x^2+1\right)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2+17x+6}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx$.

4. a) $\int \frac{x-2}{x^3-5x^2+4x}dx$; b) $\int \frac{x^4-7x^3+13x^2-56x+73}{(x-7)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{-2x^2-2x+60}{(x+4)(x^2-4x+4)}dx$.

5. a) $\int \frac{2x+5}{x^3-9x^2+14x}dx$; b) $\int \frac{2x^4-6x^3+20x^2-33x+49}{(x-3)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{8x^2+28x+37}{(x-2)(x^2+6x+9)}dx$.

6. a) $\int \frac{x-5}{x^3-x^2-6x}dx$; b) $\int \frac{2x^4-8x^3+27x^2-74x+94}{(x-4)(x^2+7)}dx$;

c) $\int \frac{3x^2+2x+14}{(x+4)(x^2+2x+1)}dx$.

7. a) $\int \frac{x-6}{x^3+2x^2-8x}dx$;

b) $\int \frac{3x^4+15x^3+32x^2+119x+43}{(x+5)(x^2+6)}dx$;

c) $\int \frac{-4x^2-2x+69}{(x-2)(x^2+10x+25)}dx$.

8. a) $\int \frac{3x+4}{x^3-3x^2+2x}dx$; b) $\int \frac{5x^4-10x^3+26x^2-39x+23}{(x-2)(x^2+3)}dx$;

c) $\int \frac{x^2+x-55}{(x+3)(x^2-8x+16)}dx$.

9. a) $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-12x}dx$; b) $\int \frac{2x^4-8x^3+13x^2-27x+8}{(x-4)(x^2+2)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2+7x+15}{(x-1)(x^2+4x+4)}dx$.

10. a) $\int \frac{x-4}{x^3-4x^2+3x}dx$; b) $\int \frac{x^4+4x^3+8x^2+25x-7}{(x+4)(x^2+5)}dx$;

c) $\int \frac{8x^2+93x+225}{(x-3)(x^2+10x+25)}dx$.

11. a) $\int \frac{2x+6}{x^3+6x^2+8x}dx$; b) $\int \frac{3x^4-6x^3+17x^2-25x-2}{(x-2)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{11x^2-17x-28}{(x+4)(x^2-4x+4)}dx$.

12. a) $\int \frac{x-3}{x^3-9x^2+20x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+6x^3+11x^2+20x+5}{(x+3)(x^2+2)}dx$;

c) $\int \frac{9x^2+13x-6}{(x-1)(x^2+6x+9)}dx$.

13. a) $\int \frac{x-1}{x^3-2x^2-3x}dx$; b) $\int \frac{x^4-5x^3+11x^2-33x+52}{(x-5)(x^2+2)}dx$;

c) $\int \frac{7x^2-19x-8}{(x+1)(x^2-4x+4)}dx$.

14. a) $\int \frac{x-4}{x^3+5x^2+6x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+2x^3+17x^2+5x+23}{(x+1)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{-x^2+39x+208}{(x-7)(x^2+10x+25)}dx$.

15. a) $\int \frac{x-6}{x^3-7x^2+10x}dx$; b) $\int \frac{x^4-x^3+24x^2-12x+76}{(x-1)(x^2+7)}dx$;

c) $\int \frac{8x^2-x-3}{(x-2)(x^2+2x+1)}dx$.

16. a) $\int \frac{x-8}{x^3-6x^2+8x}dx$; b) $\int \frac{3x^4+15x^3+21x^2+74x-19}{(x+5)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{7x^2-30x-52}{(x-7)(x^2+4x+4)}dx$.

17. a) $\int \frac{2x+5}{x^3-x^2-12x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+x^3+9x^2+8x+4}{(x+1)(x^2+2)}dx$;

c) $\int \frac{-x^2+x+3}{(x+1)(x^2+4x+4)}dx$.

18. a) $\int \frac{3x-4}{x^3+2x^2-8x}dx$; b) $\int \frac{4x^4-10x^3+23x^2-57x-26}{(x-3)(x^2+7)}dx$;

c) $\int \frac{10x^2-35x+31}{(x-3)(x^2-2x+1)}dx$.

19. a) $\int \frac{x+4}{x^3-6x^2+5x}dx$; b) $\int \frac{4x^4+8x^3+2x^2+18x-36}{(x+3)(x^2+3)}dx$;

c) $\int \frac{6x^2+37x+63}{(x+5)(x^2+6x+9)}dx$.

20. a) $\int \frac{x+2}{x^3+2x^2-3x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+x^3+3x^2+8x-29}{(x-1)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{8x^2-69x+154}{(x-7)(x^2-8x+16)}dx$.

21. a) $\int \frac{x+5}{x^3-6x^2+5x}dx$; b) $\int \frac{4x^4+3x^3+7x^2+3x+10}{(x+1)(x^2+2)}dx$;

c) $\int \frac{12x^2-152x+353}{(x+1)(x^2-12x+36)}dx$.

22. a) $\int \frac{x-4}{x^3-3x^2+2x}dx$; b) $\int \frac{x^4-4x^3+14x^2-27x+22}{(x-1)(x^2+5)}dx$;

c) $\int \frac{3x^2+2x-61}{(x-7)(x^2+6x+9)}dx$.

23. a) $\int \frac{x+6}{x^3-x^2-20x}dx$; b) $\int \frac{x^4-7x^3+17x^2-40x+59}{(x-4)(x^2+5)}dx$;

c) $\int \frac{-26x+55}{(x+1)(x^2-4x+4)}dx$.

24. a) $\int \frac{x-10}{x^3-8x^2+12x}dx$; b) $\int \frac{4x^4+12x^3-12x^2+x-9}{(x+4)(x^2+1)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2-31x+38}{(x-1)(x^2-6x+9)}dx$.

25. a) $\int \frac{x-6}{x^3+6x^2+8x}dx$; b) $\int \frac{x^4-7x^3+8x^2-15x+29}{(x-3)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2-72x+244}{(x-4)(x^2-14x+49)}dx$.

26. a) $\int \frac{x+8}{x^3+3x^2+2x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+3x^3-2x^2+9x-24}{(x+3)(x^2+4)}dx$;

c) $\int \frac{3x^2-15x-126}{(x+10)(x^2-16x+64)}dx$.

27. a) $\int \frac{x+10}{x^3-10x^2+24x}dx$; b) $\int \frac{2x^4+x^3+5x^2+3x-1}{(x+1)(x^2+3)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2+14x+3}{(x+3)(x^2+4x+4)}dx$.

28. a) $\int \frac{x+2}{x^3-5x^2+4x}dx$; b) $\int \frac{3x^4+7x^3+21x^2+49x-16}{(x+3)(x^2+7)}dx$;

c) $\int \frac{5x^2-10x-3}{(x-5)(x^2+2x+1)}dx$.

29. a) $\int \frac{x-4}{x^3+x^2-2x}dx$; b) $\int \frac{x^4+6x^3+15x^2+17x+20}{(x+2)(x^2+3)}dx$;

c) $\int \frac{11x^2+115x+292}{(x-7)(x^2+18x+81)}dx$.

30. a) $\int \frac{x}{x^3-5x^2+4x}dx$; b) $\int \frac{x^4+3x^3+x^2+21x-24}{(x+4)(x^2+5)}dx$;

c) $\int \frac{3x^2-5x-29}{(x-9)(x^2+8x+16)}dx$.

5. Найти интегралы от тригонометрических функций

1. a) $\int \sin^4 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; c) $\int \cos x\cdot\cos 3x\cdot\cos 5x\,dx$.

2. a) $\int \cos^4 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; c) $\int \sin x\cdot\sin 5x\cdot\cos 4x\,dx$.

3. a) $\int \sin^3 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$; c) $\int \sin^2 6x\cdot\cos 5x\,dx$.

4. a) $\int \cos^3 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$; c) $\int \sin 2x\cdot\cos 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

5. a) $\int \cos^3 x\cdot\sin^4 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$; c) $\int \sin x\cdot\sin 5x\cdot\cos\frac{2x}{3}dx$.

6. a) $\int \sin^5 x\,dx$; b) $\int \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$; c) $\int \sin\frac{x}{2}\cdot\cos 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

7. a) $\int \sin^3 x\cdot\cos^2 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; c) $\int \sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin 4x\,dx$.

8. a) $\int \cos^4 x\cdot\sin^4 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x-5}$; c) $\int \sin 2x\cdot\cos 5x\cdot\cos 3x\,dx$.

9. a) $\int \cos^3 x\cdot\sin^3 x\,dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x+1}$; c) $\int \sin x\cdot\cos^2 3x\,dx$.

10. a) $\int \cos^3 x \cdot \sin^5 x dx$; b) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin^2 x \cdot \cos 3x dx$.

11. a) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$; c) $\int \sin 6x \cdot \cos x \cdot \sin 4x dx$.

12.a) $\int \cos^7 x \cdot \sin^3 x dx$; b) $\int \frac{dx}{4 + 3\cos x}$; c) $\int \sin 8x \cdot \cos 2x \cdot \sin 4x dx$.

13. a) $\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx$; b) $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}$; c) $\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx$.

14. a) $\int \cos^3 x \cdot \sin^7 x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x + 5\cos x - 4}$; c) $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos x dx$.

15. a) $\int \cos^5 x dx$; b) $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$; c) $\int \sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \cos x dx$.

16. a) $\int \sin^5 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x + 2\cos x + 2}$; c) $\int \sin 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 6x dx$.

17. a) $\int \cos^4 2x dx$ b) $\int \frac{dx}{3\sin x + \cos x + 2}$; c) $\int \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx$.

18. a) $\int \sin^3 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x + 5\cos x - 3}$; c) $\int \sin x \cdot \cos 4x \cdot \cos 6x dx$.

19. a) $\int \cos^3 \frac{x}{2} dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 3}$; c) $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 5x dx$.

20. a) $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x + \cos x + 1}$; c) $\int \sin x \cdot \sin 5x \cdot \cos 6x dx$.

21. a) $\int \sin^4 \frac{x}{2} dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 5x dx$.

22.a) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 2}$; c) $\int \sin x \cdot \sin 3x \cdot \cos 4x dx$.

23.a) $\int \sin^2 2x \cdot \cos^3 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x}$; c) $\int \sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \cos 6x dx$.

24.a) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}$; c) $\int \sin x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

25.a) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^7 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{5\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin x \cdot \cos 5x \cdot \cos 7x dx$.

26.a) $\int \sin^5 2x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x + 4}$; c) $\int \sin x \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x dx$.

27.a) $\int \cos^5 2x dx$ b) $\int \frac{dx}{\sin x + 9\cos x + 9}$; c) $\int \sin x \cdot \sin 7x \cdot \cos 6x dx$.

28. a) $\int \sin^3 4x dx$; b) $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin^2 4x \cdot \cos^2 3x dx$.

29. a) $\int \sin^3 \frac{x}{4} dx$; b) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{3x}{2} dx$.

30. a) $\int \cos^3 \frac{x}{4} dx$; b) $\int \frac{dx}{4\sin x - \cos x}$; c) $\int \sin^2 \frac{3x}{2} \cdot \cos^2 \frac{5x}{2} dx$.

6. Найти интегралы от иррациональных функций:

a) с помощью подстановок Эйлера;

b) с помощью подстановки, рационализирующей биномиальный дифференциал;

c) с помощью тригонометрической подстановки.

1. a) $\int \frac{dx}{2x+\sqrt{x^2+4x-1}}$; b) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[6]{x}}}{\sqrt[3]{x}}dx$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-9\right)^3}}$.

2. a) $\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x^2-x+2}}$; b) $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt[6]{x}}{x}}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^5}}$.

3. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}-2x}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{8-\sqrt{x}}}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$.

4. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-1}-2x}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2\sqrt[3]{x}-1}}dx$; c) $\int \sqrt{36-x^2}\,dx$.

5. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}+2x}$; b) $\int \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-6}}{x}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(9+x^2\right)^3}}$.

6. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}+2x}$; b) $\int x^2\sqrt{4-\sqrt{x}}\,dx$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}dx$.

7. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+4}-2x}$; b) $\int \sqrt{x\left(\sqrt[4]{x}+3\right)}dx$ c) $\int \sqrt{\left(4-x^2\right)^3}dx$.

8. a) $\int \frac{dx}{2x-\sqrt{x^2+x+4}}$; b) $\int \sqrt{x\left(\sqrt[4]{x^3}-1\right)}dx$; c) $\int \sqrt{\left(16-x^2\right)^3}dx$.

9. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x-1}+3x}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(\sqrt[4]{x}+2)}}$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-25)^3}}$.

10. a) $\int \frac{dx}{3x-\sqrt{x^2+9x-1}}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

11. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-11x-3}-3x}$; b) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+5}}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$.

12. a) $\int \frac{dx}{3x-\sqrt{x^2+7x+1}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(\sqrt[3]{x}-7)}}$; c) $\int \sqrt{49-x^2}\,dx$.

13. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[3]{x}+1)}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

14. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{4+2x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(\sqrt[6]{x}+3)}}$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}\,dx}{x^3}$.

15. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{9-7x-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2}dx$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{(x^2-4)^3}}$.

16. a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{4-7x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+16)^5}}$.

17. a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{9+7x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

18. a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{9-3x-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$; c) $\int \sqrt{100-x^2}\,dx$.

19. a) $\int \frac{dx}{x-\sqrt{16-4x-x^2}}$; b) $\int x\cdot\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$.

20. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{4+7x-x^2}}$; b) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}}$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^3}dx$.

21. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{4-2x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}}$; c) $\int \sqrt{\left(36-x^2\right)^3}\,dx$.

22. a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{25-5x-x^2}}$; b) $\int \sqrt[3]{x+4x^3}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-16\right)^3}}$.

23. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x-2-x^2}}$; b) $\int \sqrt[3]{\frac{x}{\left(1+8x^2\right)^2}}\,dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+9\right)^5}}$.

24. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x-3-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{3+4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(36-x^2\right)^3}}$.

25. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x-4-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^5}}dx$; c) $\int \sqrt{81-x^2}\,dx$.

26. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{6x-5-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[3]{x}-4\right)^2}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+36\right)^3}}$.

27. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{10-3x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\left(\sqrt[4]{x}+2\right)}$; c) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx$.

28. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{5-4x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt[3]{x}-3\right)^3}$; c) $\int \sqrt{\left(25-x^2\right)^3}\,dx$.

29. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{6-5x-x^2}}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{x}+8}$; c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$.

30. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{7-6x-x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt[3]{x}-9\right)^2}$; c) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+25\right)^5}}$.

Типовой расчет № 2
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Вычислить определенные интегралы:
   a) с помощью формулы интегрирования по частям;
   b) с помощью замены переменной.

1. a) $\int_2^{\pi}(x-2)\sin\frac{x}{2}\,dx$; b) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

2. a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\pi}(2x-1)\cos\frac{x}{2}\,dx$; b) $\int_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

3. a) $\int_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 2x\,dx$; b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

4. a) $\int_{-1}^{0}(x^2-1)\sin 2x\,dx$; b) $\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$.

5. a) $\int_0^{2\pi}(x^2-x)\cos 3x\,dx$; b) $\int_2^9 \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

6. a) $\int_0^2 (x^2-x)e^{2x}dx$; b) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$.

7. a) $\int_0^3 (2x-6)e^{2x}dx$; b) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

8. a) $\int_0^1 (x^2+x)e^{\frac{x}{2}}dx$; b) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$.

9. a) $\int_0^1 (x^2-x)e^{2x}dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

10. a) $\int_0^2 (x^2-x)e^{-x}dx$; b) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

11. a) $\int_0^1 x^2e^{4x}dx$; b) $\int_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

12. a) $\int_0^1 (x^2+2x)e^{x}dx$; b) $\int_{-1}^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

13. a) $\int_0^2 \ln(x^2+4)dx$; b) $\int_1^9 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+7}}$.

14. a) $\int_{-1}^0 9x^2\ln(x+2)dx$; b) $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$.

15. a) $\int_0^\pi (x-x^2)\cos\frac{x}{2}dx$; b) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

16. a) $\int_0^\pi x^2\cdot\sin 2x\,dx$; b) $\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

17. a) $\int_0^\pi x^2\cdot\cos\frac{x}{2}dx$; b) $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

18. a) $\int_0^{2\pi} \left(1-8x^2\right)\cdot\cos 4x\,dx$; b) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

19. a) $\int_0^{2\pi} \left(3-7x^2\right)\cdot\cos 2x\,dx$; b) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$.

20. a) $\int_0^{2\pi} \left(2x^2-15\right)\cdot\cos 3x\,dx$; b) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

21. a) $\int_0^{2\pi} \left(3x^2+5\right)\cdot\cos 2x\,dx$; b) $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x\,dx}{\sqrt{2+3x}}$.

22. a) $\int_{-2}^0 \left(x+2\right)^2\cdot\cos 3x\,dx$; b) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

23. a) $\int_{-1/3}^{-2/3} x\cdot e^{-3x}\,dx$; b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

24. a) $\int_{-1/2}^{0} x\cdot e^{-2x}\,dx$; b) $\int_{2}^{5} \frac{x^2\,dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$.

25. a) $\int_{-\pi}^{\pi} x\cdot\sin 2x\,dx$; b) $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

26. a) $\int_{-2}^{0} x^2\cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx$; b) $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

27. a) $\int_{2}^{3} x\cdot\ln(x-1)\,dx$; b) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

28. a) $\int_{1}^{2} (x-1)\ln x\,dx$; b) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

29. a) $\int_{0}^{\pi} x^2\sin x\,dx$; b) $\int_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

30. a) $\int_{0}^{\pi} x^2\cos x\,dx$; b) $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций.

1. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$. 2. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3$.

3. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1$. 4. $y=x^2,\ y=3-2x$.

5. $y=\sqrt{x},\ y=x^3$. 6. $y=x^3,\ y=1,\ x=0$.

7. $xy=6,\ x+y=7$. 8. $y=\frac{1}{1+x^2},\ y=\frac{x^2}{2}$.

9. $y=x^2+4x,\ x-y+4=0$. 10. $y=x^3,\ y=x,\ y=2x$.

11. $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$. 12. $y=x^2,\ y=\frac{x^3}{3}$.

13. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0$. 14. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0$.

15. $y^2=x+1,\ y^2=9-x$. 16. $y^2=x^3,\ x=0,\ y=4$.

17. $y^2=9x,\ y=3x$. 18. $y^2=4x,\ x^2=4y$.

19. $y^2=x^3,\ x=2$. 20. $y=x^2,\ y=2-x^2$.

21. $y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=0,\ x=2$. 22. $y=x^2,\ y=x,\ y=2x$.

23. $y=x^2-2x+3,\ y=3x-1$. 24. $y=x^3-3x,\ y=x$.

25. $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6,\ y=\frac{1}{2}x^2-x+1$. 26. $y=x^2-2x,\ y=2-x$.

27. $y=x^2-4x+3, y=-x^2+2x+3$. 28. $y=\frac{1}{4}x^2, y=3x-\frac{1}{2}x^2$.

29. $y=\frac{16}{x^2},\ y=17-x^2$ (I четверть) 30. $y=-x^2,\ x+y+2=0$..

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций, заданных параметрически.

1. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}; \quad y = 0$

3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = 3 + 2\sin t \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 6\sin t \end{cases}; \; y = 3 \; (y \geq 3)$

7. $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}; y = 4 \; (y \geq 4)$

$(0 < x < 8\pi)$

9. $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t \\ y = 5\cos t - 12\sin t \end{cases}.$

10. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}; \; x = 2 \; (x \geq 2)$

11. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}; \; y = 2 \; (y \geq 2)$

12. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}; y = 3 \; (y \geq 3)$

$(0 < x < 4\pi)$

13. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}; \; x = 3\sqrt{3} \; (x \geq 3\sqrt{3})$

14. $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}; \; y = \sqrt{3} \; (y \geq \sqrt{3})$

15. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t) \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases}; y = 15 \; (y \geq 15)$

$(0 < x < 20\pi)$

16. $\begin{cases} x = 6\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}; y = 2\sqrt{3} \; (y \geq 2\sqrt{3})$

17. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; \; x = 6\sqrt{3} \; (x \geq 6\sqrt{3})$

18. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; y = 3 \; (y \geq 3)$

$(0 < x < 6\pi)$

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}; \; y = 3 \; (y \geq 3)$

20. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}; \; x = 4 \; (x \geq 4)$

21. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t) \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}; y = 9 \; (y \geq 9)$

$(0 < x < 12\pi)$

22. $\begin{cases} x = 9\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}; \; y = 2 \; (y \geq 2)$

23. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$; $x = 1\ (x \ge 1)$

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$; $y = 12\ (y \ge 12)$
$(0 < x < 16\pi)$

25. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$; $y = 4\ (y \ge 4)$

26. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$; $x = 2\ (x \ge 2)$

27. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$; $y = 6\ (y \ge 6)$
$(0 < x < 8\pi)$

28. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 8\sin t \end{cases}$; $y = 4\sqrt{3}\ (y \ge 4\sqrt{3})$

29. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$; $x = 12\sqrt{3}\ (x \ge 12\sqrt{3})$

30. $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$; $y = 1\ (y \ge 1)$
$(0 < x < 2\pi)$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в полярных координатах.

1. $r = \cos 2\varphi$
2. $r = \sin 3\varphi$
3. $r = 2 + \cos\varphi$
4. $r = 3(1 + \sin\varphi)$
5. $r = 3\sin 4\varphi$
6. $r = 4\cos 5\varphi$
7. $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2\ (r \ge 2)$
8. $r = 4\sin 3\varphi,\ r = 2\ (r \ge 2)$
9. $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi$
10. $r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi$
11. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$
12. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$
13. $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$
14. $r = 6\cos 3\varphi,\ r = 3\left(r \ge 3\right)$
15. $r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$
16. $r = \dfrac{3}{2}\sin\varphi,\ r = \dfrac{5}{2}\sin\varphi$
17. $r = 2\cos\varphi,\ r = 3\cos\varphi$
18. $r = 3\sin 2\varphi$
19. $r = 2\cos 6\varphi$
20. $r = 2\sin 3\varphi,\ r = 1\ (r \ge 1)$
21. $r = 4\cos 2\varphi,\ r = 2\ (r \ge 2)$
22. $r = 4\cos 3\varphi$
23. $r = 6\sin 4\varphi,\ r = 3\ (r \ge 3)$
24. $r = 2\sin 4\varphi$
25. $r = 4\sin 3\varphi$
26. $r = 3\cos 6\varphi$
27. $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2\ (r \ge 2)$
28. $r = 6\sin 3\varphi,\ r = 3\ (r \ge 3)$
29. $r = 2\cos\varphi,\ r = 4\cos\varphi$
30. $r = 3\sin\varphi,\ r = 4\sin\varphi$

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в прямоугольной декартовой системе координат.

1. $y=\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

2. $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right), \quad -1\le x\le 1$

3. $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$

4. $y=1-\ln\cos x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

5. $y=\ln\left(1-x^2\right), \quad 0\le x\le\frac{1}{2}$

6. $y=\ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

7. $y^2=(x-1)^3, \quad 2\le x\le 5$

8. $y=\sqrt{x-1}, \quad 1\le x\le 2$

9. $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}, \quad 1\le x\le 2$

10. $y=-\ln\cos x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

11. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le\frac{7}{9}$

12. $y=e^{x}+6, \quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$

13. $y=\ln\frac{5}{2x}, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

14. $y=2-e^{x}, \quad \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$

15. $y=\ln 7-\ln x, \quad \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$

16. $y=1-\ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

17. $y=1-\ln\left(x^2-1\right), \quad 3\le x\le 4$

18. $y=\ln\sin x, \quad \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$

19. $y=\ln\cos x+2, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

20. $y=e^{x}+26, \quad \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{24}$

21. $y=1-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x, 0\le x\le\frac{3}{4}$

22. $y=ch\,x+3, 0\le x\le 1$

23. $y=e^{x}+e, \quad \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{15}$

24. $y=\frac{1-e^{x}-e^{-x}}{2}, \quad 0\le x\le 3$

25. $y=\frac{3+e^{2x}+e^{-2x}}{4}, \quad 0\le x\le 2$

26. $y=ch\,x+3, 0\le x\le 2$

27. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}, \quad \frac{1}{9}\le x\le 1$

28. $y=e^{x}+13, \quad \ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}$

29. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x, \quad 0\le x\le\frac{8}{9}$

30. $y=-\ln\cos x, \quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$.

6. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями

1. $\begin{cases} x=10\cos^3 t \\ y=10\sin^3 t \end{cases}, \quad 0\le t\le\pi.$

2. $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$

3. $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}, \quad 0\le t\le\frac{\pi}{6}.$

4. $\begin{cases} x=e^{t}(\cos t+\sin t) \\ y=e^{t}(\cos t-\sin t) \end{cases}, \quad \frac{\pi}{2}\le t\le\pi.$

5. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$ 6. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}.$

7. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi$ 8. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2$

9. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t) \\ y = 2{,}5(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi.$ 10. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3}.$

11. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ 12. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}, \quad \pi \le t \le 2\pi.$

13. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$ 14. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases}, \quad \pi \le t \le 2\pi.$

15. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, 0 \le t \le \pi.$ 16.

$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin 2t \end{cases}, \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3}$

17. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ 18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi.$

19. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}.$ 20. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi$

21. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$ 22. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}, \quad \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$

23. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{2\pi}{3}.$ 24. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

25. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le \pi.$ 26. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$

27. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \le t \le \pi$ 28. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t) \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}, \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$

29. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$ 30. $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

7. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах.

1. $r=6\sin^3\frac{\varphi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

2. $r=6\cos^3\frac{\varphi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

3. $r=2\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{12}.$

4. $r=6(1+\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0.$

5. $r=\sqrt{2}\sin\varphi.$

6. $r=3{,}5(1-\cos\varphi).$

7. $r=2\cos^3\frac{\varphi}{3},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

8. $r=3\sin\varphi.$

9. $r=2(1-\cos\varphi).$

10. $r=5\sin\varphi.$

11. $r=\sqrt{2}e^{\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

12. $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

13. $r=2e^{\frac{4\varphi}{3}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

14. $r=5e^{\frac{5\varphi}{12}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

15. $r=6e^{\frac{12\varphi}{5}},\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$

16. $r=3e^{\frac{3\varphi}{4}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

17. $r=4e^{\frac{4\varphi}{3}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

18. $r=5e^{\frac{5\varphi}{12}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

19. $r=12e^{\frac{12\varphi}{5}},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

20. $r=1-\sin\varphi,\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le-\frac{\pi}{6}.$

21. $r=2(1-\cos\varphi),\quad -\pi\le\varphi\le-\frac{\pi}{2}.$

22. $r=3(1+\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0.$

23. $r=5(1+\sin\varphi),\quad -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le 0.$

24. $r=7(1-\sin\varphi), -\frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$

25. $r=8(1-\cos\varphi),\quad -\frac{2\pi}{3}\le\varphi\le 0.$

26. $r=2\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{6}.$

27. $r=8\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$

28. $r=6\cos\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

29. $r=8\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$

30. $r=6\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}.$

8. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной графиками функций. В вариантах 1-15 ось вращения Ox, в вариантах 16-30 ось вращения Oy.

1. $y=2x-x^2,\ y=-x+2.$

2. $y=x^2,\ y^2=x.$

3. $y=x^3,\ y=\sqrt{x}.$

4. $y=x^2,\ y=3-2x.$

5. $y=x^2,\ y=x^3.$

6. $y=x^3,\ y=1,\ x=0.$

7. $xy=6,\ x+y=7.$

8. $y=\sqrt{6}x^2,\ y^2=6x.$

9. $y=2\sin x,\quad 0\le x\le\pi.$

10. $y^2=4x,\ y^2=x^3.$

11. $y=\sqrt{x}e^x,\ x=0,\quad x=\ln 2.$

12. $y=xe^x,\quad x=1,\quad y=0.$

13. $y=\dfrac{1}{2}x^2,\quad 2x+2y-3=0.$

14. $y=\sin x,\ y=3\sin x,\ 0\le x\le\pi.$

15. $y=\cos x,\ y=5\cos x,\ x=0,\ x\ge 0.$

16. $2y=16-x^2,\ y=0,\ y=4.$

17. $y=2x-x^2,\quad y=0.$

18. $2y=\left(x+2\right)^2,\ y=2.$

19. $y=x^3,\quad y=8,\ x=0.$

20. $y=2-\dfrac{x^2}{2},\ y+x=2.$

21. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1.$

22. $y=x^2,\ y=0,\ x=2.$

23. $y=x^2-2x+1,\ y=1.$

24. $y=x^3,\ y=x.$

25. $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=0.$

26. $y=\arcsin x,\ y=\arcsin x,\ x=0.$

27. $y=\ln x,\quad x=2,\quad y=0.$

28. $y=(x-1)^2,\ x=0,\ x=2,\ y=0.$

29. $y^2=x-2,\ y=0,\ y=x^3,\ y=1.$

30. $y=x^3,\ y=x^2.$

9. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

1. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{16x^4+1}$; b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

2. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{16x\,dx}{16x^4-1}$; b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

3. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; b) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{16x^4-1}}$; b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

5. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$; b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)\,dx}{3x-1}$.

6. a) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}$; b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln 2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

7. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{\left(x^2+16\right)^5}}$; b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

8. a) $\int_{4}^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; b) $\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}\,dx}{2-3x}$.

9. a) $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$; b) $\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{1-x^4}$.

10. a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$.

11. a) $\int_{0}^{\infty}\frac{arctg\,2x}{4x^2+1}dx$; b) $\int_{0}^{1}\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

12. a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$; b) $\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

13. a) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x\,dx}{x^2+1}$; b) $\int_{\frac{3}{4}}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

14. a) $\int_{0}^{\infty}\frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{tgx}\,dx}{\cos^2 x}$.

15. a) $\int_{0}^{\infty}\frac{3dx}{x^2+4}$; b) $\int_{0}^{1}x\ln x\,dx$.

16. a) $\int_{1}^{\infty}\frac{4\,dx}{x(1+\ln^2 x)}$; b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

17. a) $\int_{0}^{\infty}x\sin x\,dx$; b) $\int_{-\frac{3}{4}}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

18. a) $\int_{-\infty}^{-1}\frac{7\,dx}{x^2-4x}$; b) $\int_{1}^{2}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

19. a) $\int_{\frac{1}{3}}^{\infty}\frac{\pi\,dx}{(1+9x^2)\,arctg^2\,3x}$; b) $\int_{0}^{e}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.

20. a) $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{arctg\,\frac{x}{2}}}$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

21. a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x}$; b) $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9x}\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

22. a) $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-3x} dx$; b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

23. a) $\int\limits_{0}^{\infty} e^{-3x} dx$; b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

24. a) $\int\limits_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$; b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

25. a) $\int\limits_{0}^{\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} dx$; b) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

26. a) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{arctg\, x\, dx}{1+x^2}$; b) $\int\limits_{0}^{1} x \ln^2 x\, dx$.

27. a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$; b) $\int\limits_{1}^{5} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

28. a) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; b) $\int\limits_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

29. a) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{6x^2-5x+1}$; b) $\int\limits_{0}^{4} \frac{10x\,dx}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}}$.

30. a) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; b) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(2x-1\right)^2}$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица интегралов элементарных функций.
3. Основные методы интегрирования: внесение под знак дифференциала, замена переменной, интегрирование по частям.
4. Интегрирование простейших рациональных дробей.
5. Интегрирование рациональных дробей (общий случай).
6. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей и иррациональностей более общего вида.
7. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
8. Интегрирование квадратичных иррациональностей посредством подстановок Эйлера.
9. Интегрирование тригонометрических функций вида $\sin^n x \cdot \cos^m x$, где $n, m -$целые числа.
10. Вычисление интегралов видов:
    $\int R(\sin x, \cos x)dx, \int R\left(x, \sqrt{a^2 \pm x^2}\right)dx, \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx,$
    где $R(x, y) -$рациональная функция.

11. Интегральные суммы. Определение функции, интегрируемой по Риману. Ограниченность интегрируемой функции. Задачи, приводящие к определенному интегралу.
12. Свойства определенного интеграла, выраженные равенствами.
13. Свойства определенного интеграла, выраженные неравенствами.
14. Первая и вторая формулы среднего значения.
15. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства.
16. Формула Ньютона-Лейбница.
17. Интегрирование по частям и замена переменной под знаком определенного интеграла.
18. Площадь криволинейной трапеции.
19. Вычисление площади области, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями.
20. Вычисление площади в полярных координатах.
21. Объем тела вращения.
22. Вычисление длины гладкой кривой.
23. Вычисление площади поверхности вращения.
24. Физические приложения определенного интеграла. Первая тео рема Гульдена.
25. Вторая теорема Гульдена.
26. Несобственный интеграл первого рода. Критерий Коши и достаточные условия сходимости несобственных интегралов первого рода.
27. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Несобственные интегралы второго рода и их основные свойства.
28. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное учебно-практическое пособие отражает мой опыт работы со студентами очной формы обучения технических специальностей. Материал пособия содержит следующие разделы высшей математики, изучаемые во втором семестре: неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, несобственный интеграл.

Опыт показал, что для студентов очной формы обучения значительную трудность представляет усвоение теоретического материала. Поэтому в данном пособии большое внимание уделено доступному изложению теоретического материала, подробному доказательству основных теорем курса. Также студенты первого курса сталкиваются с проблемами решения типовых задач. В связи с этим в этом пособии детально разобраны все примеры и задачи из индивидуальных типовых расчетов. Подробные объяснения к решениям направлены на формирование у студентов научного стиля изложения, умения выражать свои мысли. Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать сложные задачи может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания и проводятся контрольные работы во время аудиторных занятий.

В настоящее время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, т.1. – СПб.: Лань, 2001.
2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть 1. – М.: Физматлит, 2014. – 648 с. – ISBN 978-5-9221-0902-4.
3. Архипов Г.И. Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков; Под ред. В.А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-8334-X.
4. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: Пособие для университетов, пед. вузов: В 2 ч./ Под ред. В.А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2001. – Ч.1: Дифференциальное и интегральное исчисление. – 725 с.: ил. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-4294-5 (ч. 1)
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 3-е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) – ISBN 5-8114-0574-X.

6. Скляренко В.А., Сорокина А.Г., Филинова Е.В. Неопределенные интегралы: Практикум/Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2014. – 36 с. ISBN 5-89368-529-6.
7. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс/ К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 576 с.: ил. – (Высшее образование) – ISBN 978-5-8112-3681-7.
8. Рябушко А.П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие в 3-х ч. Ч.2/ Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть В.Е. – Мн.: Выс. шк., 1991. – 352 с.: ил. – ISBN 5-339-00327-2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-практическое пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 09.07.19.
Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 6,05. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.