

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Е. А. ОЛЕНЕВ

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Учебник

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением  
в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей  
и направлений подготовки 12.00.00 – Фотоника, приборостроение,  
оптические и биотехнические системы и технологии в качестве  
учебника для реализации образовательных программ высшего  
образования бакалавриата и магистратуры по направлениям  
подготовки 12.03.04 и 12.04.04 «Биотехнические системы и технологии»*



Владимир 2019

УДК 615.47  
ББК 34.967  
О-53

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
зав. лабораторией идентификации систем управления  
Института проблем управления им. В. А. Трапезникова  
Российской академии наук  
*Н. Н. Бахтадзе*

Кандидат технических наук, доцент  
доцент кафедры технологического и экономического образования  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*Л. Н. Шарыгин*

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Оленев, Е. А.**

О-53 Математическое моделирование приборов и систем :  
учебник / Е. А. Оленев ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Сто-  
летовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2019. – 160 с.  
ISBN 978-5-9984-1053-6

Посвящен вопросам математического моделирования приборов и систем – одной из высших форм творческой деятельности человека. Показаны подходы к решению задач, связанных с обработкой экспериментальных данных, построением математических моделей приборов, систем и физических процессов, а также подробно рассмотрены случаи моделирования, когда число переменных больше числа связывающих их уравнений. На ряде численных примеров показано, как следует решать задачи подобного характера.

Предназначен для студентов, обучающихся по программам бакалавриата и магистратуры в технических учебных заведениях по направлениям подготовки «Приборостроение» и «Биотехнические системы и технологии» при изучении дисциплин «Математическое моделирование приборов и систем», «Математическое моделирование измерительных процессов и приборов», «Моделирование биопроцессов и систем» и др. Материал также будет полезен аспирантам и молодым инженерам.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 14. Ил. 40. Библиогр.: 21 назв.

УДК 615.47  
ББК 34.967

ISBN 978-5-9984-1053-6

© ВлГУ, 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
Глава 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ .....	8
1.1. Понятие функции.....	8
1.2. Линейная функция $y = mx + n$ .....	9
1.3. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ .....	10
1.4. Показательная функция $y = a^x$ .....	11
1.5. Степенная функция $y = ax^m$ .....	12
1.6. Дробно-рациональная функция $y = P_n(x)/Q_m(x)$ .....	16
1.7. Равномерные и неравномерные шкалы.....	17
1.8. Дифференциальное исчисление.....	22
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	26
Глава 2. МЕТОДЫ ПОДБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ .....	27
2.1. Выбор вида функциональной зависимости .....	27
2.2. Определение постоянных коэффициентов формулы .....	28
2.3. Моделирование с помощью дифференциальных уравнений .....	39
2.4. Специальные методы нахождения формул для двух переменных .....	40
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	48
Глава 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ.....	50
3.1. Автоматическая коррекция показаний пирометра при высоких температурах.....	50
3.2. Измерение температуры кипящей воды в барабане парового котла.....	52
3.3. Определение коэффициента избытка воздуха по данным автоматических газоанализаторов .....	55
3.4. Моделирование работы барометра .....	59
3.5. Моделирование работы ингалятора.....	60
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	67

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ .....	68
4.1. Определение расхода истекающей из емкости жидкости .....	68
4.2. Система управления сушкой материалов .....	73
4.3. Система определения уровня физического здоровья человека .....	80
4.4. Система получения пара высоких параметров .....	84
4.5. Определение параметров перегретого пара .....	93
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	99
Глава 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ .....	100
5.1. Метод определения температурного режима паровой топки .....	100
5.2. Количество тепла, передаваемого конвекцией и излучением .....	109
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	119
Глава 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ .....	120
6.1. Феноменологические модели проблемной ситуации .....	120
6.2. Подготовка исходных данных для построения модели .....	137
<i>Вопросы для самопроверки</i> .....	156
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	157
СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК .....	158

## ВВЕДЕНИЕ

Издание представляет собой учебник для бакалавров и магистрантов высших технических учебных заведений, обучающихся по направлениям «Приборостроение», «Биотехнические системы и технологии», а также для аспирантов и молодых инженеров, желающих познать основы решения задач научного характера, приемы определения по экспериментальным данным зависимости между изучаемыми переменными.

Методы моделирования – весьма эффективный способ исследования различных процессов. Моделирование позволяет изучать на модели количественное и качественное протекание какого-либо процесса. В настоящее время этот метод широко распространен практически во всех областях техники.

В процессе экспериментальной исследовательской работы в любой области техники получают данные, которые характеризуют зависимость между изучаемыми переменными величинами, которую можно представить по-разному – в виде таблиц, графиков и формул.

Преимущество таблиц заключается в том, что записанные в них данные относительно точно отвечают результатам измерений. В таблицах также можно одновременно указать величины нескольких переменных.

К недостаткам таблиц следует отнести их громоздкость, а также то, что они составлены из дискретных данных.

Преимущество графиков состоит в том, что они дают наглядное представление о характере изменения зависимости между переменными величинами. Кроме того, пользуясь графиками, можно найти любые промежуточные значения переменных, в то время как нахождение этих данных из таблиц требует определенных вычислений.

Отображение исследуемой зависимости между переменными величинами с помощью уравнений и формул устраняет указанные недостатки. При этом, как правило, уравнение представляет собой ту

или иную зависимость в удобной и ясной форме, весьма легкой как для запоминания, так и записи.

Исследовательские работы можно разделить на две группы. К первой группе следует отнести те, в которых изучаемые явления или процессы протекают по известным законам и вид формулы, отображающей эти процессы, экспериментатору известен. В этом случае его задача состоит в определении постоянных, входящих в эту формулу.

Ко второй группе работ необходимо отнести те из них, в которых изучаемые процессы не подчиняются уже известным теоретическим законам. В этом случае задача исследователя состоит в том, чтобы сначала на основе опытных данных попытаться определить вид формулы, а затем – ее постоянные коэффициенты.

Определение вида формулы – творческая задача, решение которой вызывает у студентов ряд трудностей. С одной стороны, это связано с тем, что выпускники средней школы имеют чрезвычайно скудный запас знаний об элементарных функциях. С целью пополнения этого запаса в учебнике детализирован материал об элементарных функциях. С другой стороны, указанные трудности усугубляет и слабое знание курса высшей математики, связанного с дифференциальным и интегральным исчислениями. Для восполнения пробелов по ним в учебнике также затрагиваются вопросы, касающиеся курса высшей математики.

Научные и экспериментальные исследования в различных областях науки, техники и производства (от сельского хозяйства до медицины и космоса) составляют весьма существенную часть человеческой деятельности. Поэтому эффективное решение таких задач имеет важное практическое и экономическое значение и заслуживает всестороннего анализа.

Решение задач научного характера предполагает, как правило, моделирование исследуемых явлений физического, технического и социально-психологического характера с помощью математического аппарата теории вероятностей, исследования операций, теории графов и т. д.

При решении указанных задач фактор затрат времени выступает на первый план, поэтому профессионализм в этом вопросе во многом способствует ускорению получения национального продукта.

Многие практически необходимые задачи не имеют простых и удобных решений. При проведении экспериментальных исследований очень часто сталкиваются со сложными зависимостями, для которых дать готовый план действий невозможно, его приходится разрабатывать самому исследователю. Для этого необходимо знать основные приемы построения математических моделей, уметь оценивать параметры процесса и находить зависимость между исследуемыми переменными.

Хорошее понимание процессов моделирования важно не только тому, кто впоследствии займется научными исследованиями. Математический стиль мышления и умение рассуждать логически нужны также и работникам других профессий.

Материал учебника доступен для понимания широкому кругу читателей, интересующихся решением задач научного характера.

## Глава 1

### ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

#### 1.1. Понятие функции

При изучении различных явлений природы приходится иметь дело с самыми разнообразными величинами: давлением, температурой, массой, длиной и др. При этом одни из этих величин являются переменными, а другие остаются неизменными.

Величина называется *переменной*, если она принимает различные численные значения.

Одна и та же величина при одних условиях может рассматриваться как постоянная, при других – как переменная. Например, при кипении вода постепенно переходит в пар, причем при условии постоянства давления возникает характерное явление – температура смеси жидкости и пара остается неизменной и равной температуре кипения. Если после испарения всей жидкости продолжать сообщать пару теплоту, то его температура будет возрастать, т. е. станет уже переменной, а пар из насыщенного станет переходить в перегретый.

Среди переменных величин следует различать *независимые* и *зависимые*. Известно, что давление атмосферного воздуха зависит от высоты. В этом случае независимой переменной следует считать высоту над уровнем моря, а зависимой – величину давления воздуха.

Величина  $y$  называется *функцией* величины  $x$ , если каждому значению  $x$  соответствует одно или несколько определенных значений  $y$ , величину  $x$  при этом называют *аргументом*.

Если величина  $y$  есть функция величины  $x$ , то это записывают как  $y = f(x)$ . Для каждой конкретной функции знак  $f$  определенным образом расшифровывается. При явном задании функции  $y = f(x)$  значок  $f$  указывает совокупность тех математических операций, которые должны быть произведены над  $x$ , чтобы получить  $y$ .

Если задана функция  $y = f(x)$ , то каждому  $x$  должно соответствовать значение  $y$ , называемое значением функции в точке  $x$ . По каждой паре значений  $x$  и  $y$  можно построить точку в системе координат, а совокупность таких точек образует график функции, который обычно



представляет собой одну или несколько кривых. Если задается кривая, а по ней восстанавливается функция, то полученное уравнение  $y = f(x)$  является уравнением кривой. Всякая функция имеет свой график, и, наоборот, всякая линия имеет свое уравнение.

Функции бывают однозначными и многозначными. *Однозначной* называется функция, у которой каждому значению аргумента соответствует одно значение функции, а *многозначной* – функция, имеющая несколько значений для одного аргумента. Например, функция  $y = \arcsin x$ , получающаяся из графика синуса путем смены мест оси абсцисс и ординат, является многозначной.

Для правильного предварительного определения вида формулы, способной описать ту или иную зависимость, необходимо, прежде всего, хорошо знать и представлять элементарные функции, знать их свойства и уметь осуществлять преобразования. Математический анализ и графики различных функций приведены в работе [1], а также в различных справочниках по математике. Остановимся лишь на самых употребляемых: линейной, квадратичной, показательной, степенной и дробно-рациональной.

## 1.2. Линейная функция $y = mx + n$

Уравнение вида  $y = mx + n$  задает линейную функцию, где  $m$  и  $n$  – действительные числа. Так как при этих условиях указанная функция действительна для всех действительных  $x$ , то областью ее определения является вся числовая прямая. При  $n = 0$  график функции проходит через начало координат, т. е. уравнение всякой прямой, проходящей через начало координат и не совпадающей с осью ординат, имеет вид  $y = mx$ . Коэффициент  $m$  – тангенс угла, образуемого прямой с положительным направлением оси абсцисс.

По знаку  $m$  можно установить, какой угол образует прямая с осью абсцисс: при  $m$  меньше нуля угол тупой, при  $m$  больше нуля – острый.

При одном и том же значении  $x$  значения функций  $y = mx$  и  $y = mx + n$  отличаются на  $n$ , причем значения второй функции больше первой, если  $n > 0$ , и меньше, если  $n < 0$ . Абсолютное значение коэффициента  $n$  дает длину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, а

знак  $n$  указывает на положение этого отрезка относительно оси абсцисс: «+» – выше, а «-» – ниже этой оси.

Линейная функция используется также для проведения интерполяции. Пусть дана некоторая функция, вид которой не известен, а известны два ее значения в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Требуется найти значение функции в точке  $x$ , находящейся между  $x_1$  и  $x_2$ .

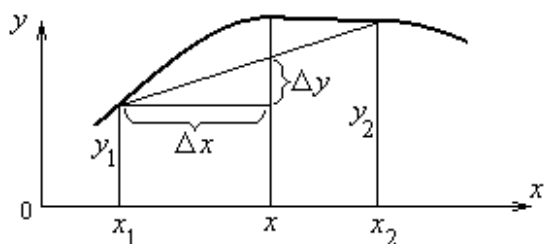


Рис. 1.1. Линейная интерполяция

Для этого неизвестную нам функцию заменяем линейной, принимающей в точках  $x_1$  и  $x_2$  значения неизвестной функции. Принимая  $x = x_1 + \Delta x$ , полагаем  $y = y_1 + \Delta y$ , тогда для нахождения функции в точке  $x$  достаточно найти  $\Delta y$  (рис. 1.1).

Приближенно заменяя неизвестную функцию линейной, находим приращение последней:  $\Delta y = m \Delta x$ .

Поскольку  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , то  $\Delta y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Delta x$ . Вычисляя приближенно значение функции, получим

$$y \approx y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Delta x.$$

**Пример.** Вычислите среднюю весовую теплоемкость воздуха (ккал/(кг · град) при температуре 500 °С, если значения этой теплоемкости при температурах 400 и 600 °С соответственно составляют 0,246 и 0,251. Здесь  $x_1 = 400$ ,  $y_1 = 0,246$ ;  $x_2 = 600$ ,  $y_2 = 0,251$ ;  $\Delta x = x - x_1 = 500 - 400 = 100$ .

Находим

$$y \approx 0,246 + \frac{0,251 - 0,246}{600 - 400} 100 \approx 0,2485.$$

### 1.3. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

Функция вида  $y = ax^2 + bx + c$  называется квадратичной и определена для всех  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ), так как любые действительные числа можно возводить в квадрат, умножать, складывать, в результате чего получаются определенные действительные числа.

Преобразуем правую часть этого уравнения методом выделения полного квадрата:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

или

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Принимая  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , получим выражение  $y - y_0 = a(x - x_0)^2$ , описывающее параболу с вершиной в точке  $(x_0, y_0)$ .

Таким образом, графиком функции  $y = ax^2 + bx + c$  является парабола, вершина которой находится в точке  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ,  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ , при этом ветви параболы направлены вверх, если  $a > 0$ , или вниз, если  $a < 0$ .

#### 1.4. Показательная функция $y = a^x$

Функция  $y = a^x$ , где  $a$  – действительное положительное число, называется показательной. Так как положительное число  $a$  можно возводить в любую степень, то функция  $y = a^x$  определена при всех  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) и график ее располагается над всей осью абсцисс. Если  $x = 0$ , то  $y = a^0 = 1$ , т. е. график пересекает ось ординат в точке  $y = 1$ . С осью абсцисс кривая  $y = a^x$  не пересекается, так как ни при каком  $x$  значение  $y$  не обращается в нуль. Если  $a > 0$  и  $x \rightarrow -\infty$ , то  $a^x$  уменьшается, приближаясь к нулю, поэтому ось абсцисс представляет собой асимптоту этой функции. Если  $a < 1$ , то при возрастании  $x$  число со значением меньше единицы возводится все в большую степень, при этом значение функции уменьшается. Поэтому при  $x \rightarrow \infty$ ,  $y \rightarrow 0$  ось абсцисс является асимптотой.

Для выяснения наличия симметрии у данной функции изменим знак перед  $x$ , тогда  $y = a^{-x} = 1/a^x$ . Следовательно, при изменении знака аргумента функция  $y = a^x$  сохраняет знак, но изменяет величину, поэтому не относится ни к четной, ни к нечетной. График этой функции

не имеет симметрии ни относительно оси ординат, ни относительно начала координат. Графики показательных функций вида  $y = a^{bx}$  при разных значениях  $b$  приведены на рис. 1.2.

Характерная особенность указанных графиков – постоянный знак кривизны как при  $b > 0$ , так и при  $b < 0$ . Для проверки возможности описания показательной функцией экспериментальных данных удобно строить график в полулогарифмическом масштабе, когда ось ординат выполняется в логарифмической шкале, а абсцисс – в равномерной (рис. 1.3). В этом случае график показательной функции представляет собой прямую линию.

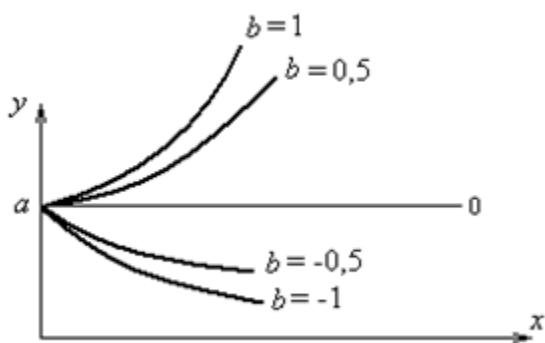


Рис. 1.2. Графики показательных функций

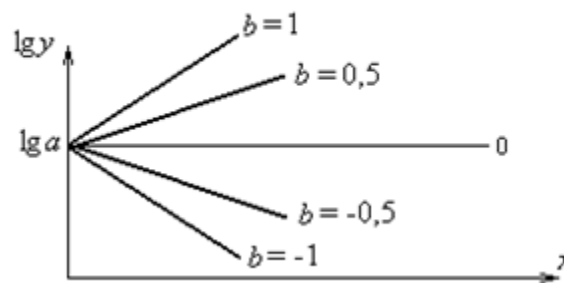


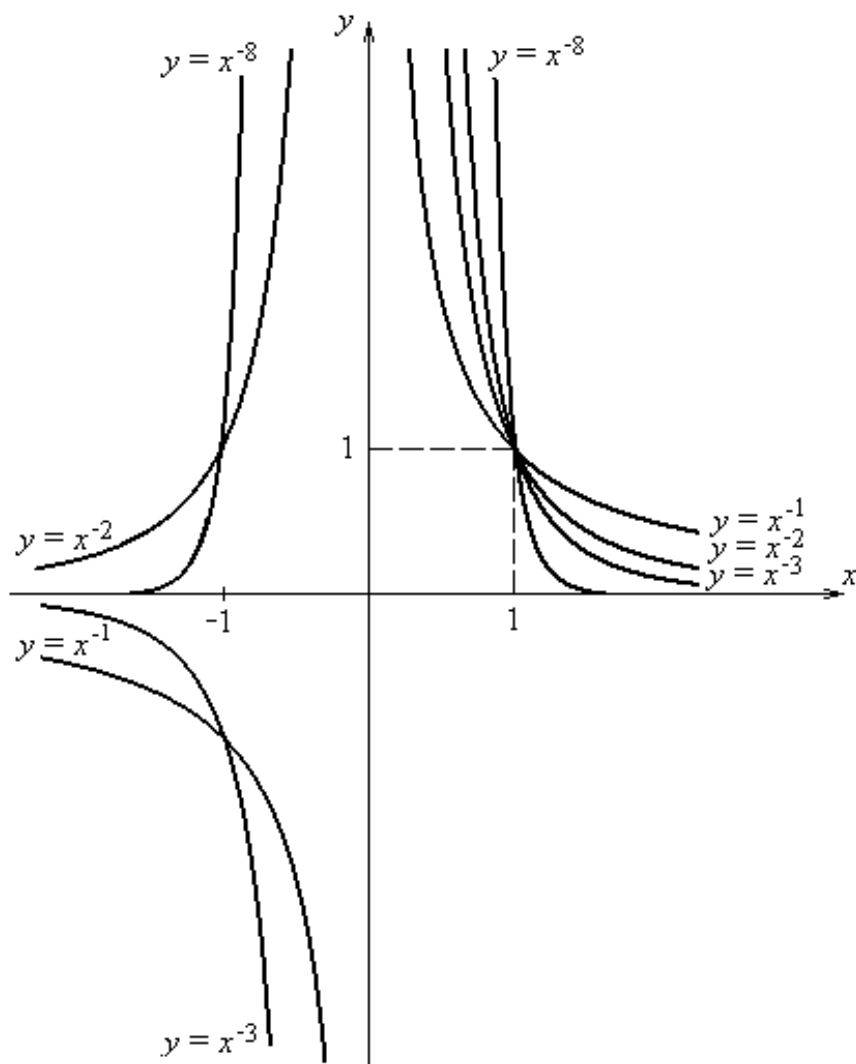
Рис. 1.3. Графики показательных функций в полулогарифмическом масштабе

### 1.5. Степенная функция $y = ax^m$

Функция  $y = ax^m$  с вещественным показателем  $m$  называется степенной. Для натуральных  $m$  степенная функция определяется на всей числовой оси. Для произвольных вещественных  $m$  это невозможно, поэтому степенная функция с вещественным показателем определена только для положительных  $x$ . При  $m > 0$  областью определения функции является промежуток  $(0; +\infty)$ . Область значений также находится в этом промежутке. Для любых  $m$  график проходит через точку  $(1; 1)$ , так как возведение единицы в любую степень дает единицу. Функция строго монотонно возрастает в области определения функции.

Графики простейших степенных функций представлены на рис. 1.4, 1.5. Если линия на графике не имеет кривизны, то это прямая  $y = x$ ; если показатель степени четный, то кривая симметрична отно-

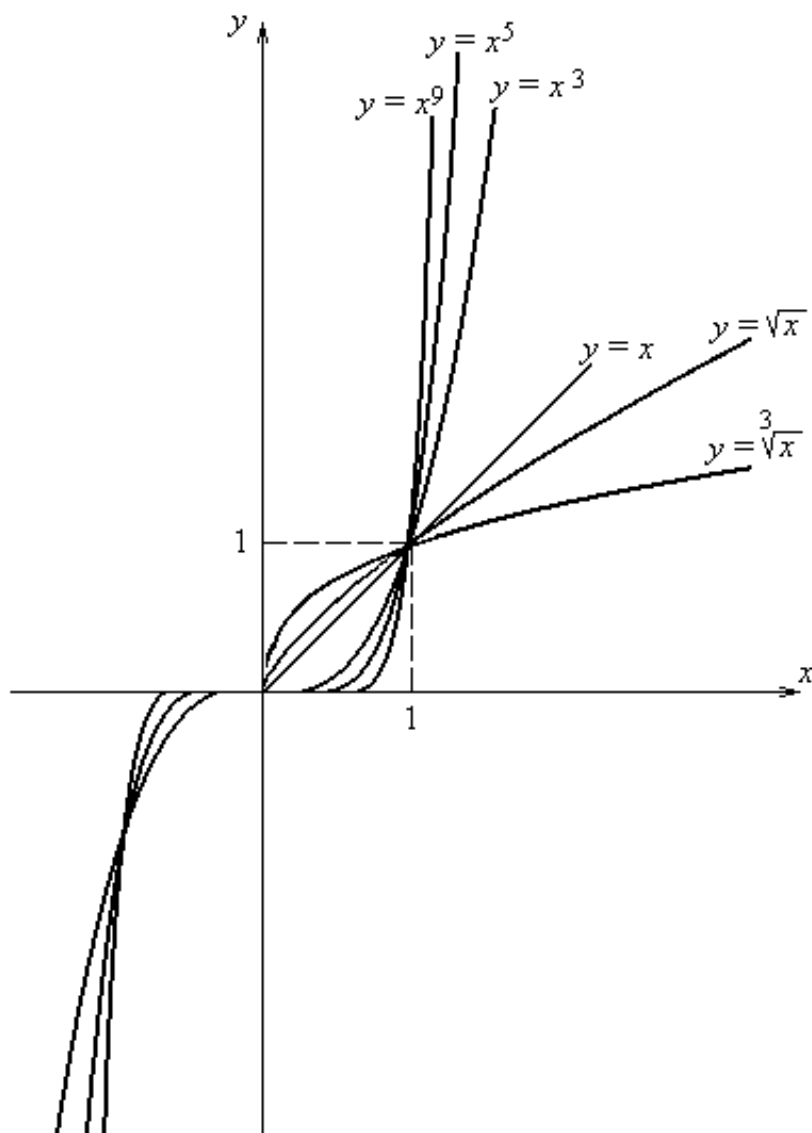
сительно оси ординат. Для нечетных функций характерна S-образная форма с точкой перегиба в начале координат и симметрией относительно оси абсцисс. Если показатель степени отрицательный, то также наблюдается симметрия относительно осей координат. Эти простейшие признаки позволяют подбирать подходящие функции при математическом моделировании.



*Рис. 1.4. Графики степенной функции с отрицательным показателем степени*

Следует иметь в виду, что график может быть сдвинут относительно начала координат или повернут, поэтому в этом случае требуется преобразование переменных для перемещения начала системы координат в вершину кривой.

Из всех уравнений с двумя переменными только один вид уравнений, а именно  $y = ax^m$ , при любых положительных значениях коэффициента  $a$  и любых положительных или отрицательных значениях показателя степени  $m$ , при построении в прямоугольных координатах с применением логарифмических шкал на обеих осях координат, дает прямую линию.



*Рис. 1.5. Графики степенной функции с натуральным показателем степени*

Действительно, логарифмируя уравнение  $y = ax^m$ , получим  $\lg y = m \lg x + \lg a$ .

Обозначим  $\lg y$  через  $y'$ ,  $\lg x$  через  $x'$  и  $\lg a$  через  $a'$ . Тогда наше уравнение примет следующий вид:

$$y' = mx' + a'.$$

Это есть уравнение прямой, причем коэффициент  $m = \operatorname{tg}\varphi$ , где  $\varphi$  – угол наклона прямой к оси  $x$ , а постоянная  $a' = \lg a$  определяет величину отрезка, который прямая отсекает на оси  $y$ , если в начале логарифмических координат по осям  $x$  и  $y$  имеются пометки «единица».

Таким образом, при построении уравнения вида  $y = ax^m$  показатель степени  $m$  определяет наклон к оси  $x$  получаемой прямой, причем если показатель  $m$  положительный, то угол, образованный прямой с осью  $x$  (считая от оси  $x$  вверх против часовой стрелки), будет острым, а если показатель  $m$  отрицательный, то угол наклона прямой к оси  $x$  будет тупым. Уравнение с двумя переменными любого другого вида при построении в логарифмических координатах дает кривую линию.

Для проверки того, описывается ли исследуемая зависимость степенной функцией вида  $y = ax^m$ , следует прологарифмировать ее вместе с аргументом, учитывая, что это можно сделать после выделения членов вида  $y_0$  и  $a(x - x_0)$ . Если после логарифмирования экспериментальных значений  $x$  и  $y$  и последующего построения графика в осях  $\lg x$  и  $\lg y$  получится прямая линия, то выбор данной функции может быть сделан окончательно. Кроме того, выполнение графика в осях  $\lg x$  и  $\lg y$  позволяет найти еще и параметры  $a$  и  $m$ . Для этого на графике необходимо выбрать любые две точки 1 и 2 и составить систему уравнений, используя для решения координаты этих точек:

$$\begin{cases} \lg y_1 = m \lg x_1 + \lg a; \\ \lg y_2 = m \lg x_2 + \lg a. \end{cases}$$

Откуда

$$m = \frac{\lg y_2 - \lg y_1}{\lg x_2 - \lg x_1};$$
$$a = \frac{y_1}{x_1^m} \quad \text{или} \quad a = \frac{y_2}{x_2^m}.$$

## 1.6. Дробно-рациональная функция $y = P_n(x)/Q_m(x)$

Дробно-рациональной называется функция, у которой числитель и знаменатель являются многочленами. Они очень удобны для аппроксимации, поскольку путем трансформации степеней многочленов можно получить различную конфигурацию кривых.

Дробь  $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}$  называется пра-

вильной, если степень числителя ниже степени знаменателя ( $n < m$ ). Если  $m \leq n$ , то дробь называется неправильной. Дробно-рациональная функция определена на всех  $x$ , за исключением тех, при которых знаменатель обращается в нуль –  $Q_m(x) = 0$ .

График этой функции пересекает ось ординат в точке  $y = \frac{a_n}{b_m}$  и ось  $Ox$  в точках, абсциссы которых являются корнями уравнения  $P_n(x) = 0$ . Правильная дробь при неограниченном возрастании  $x$  по абсолютной величине стремится к нулю. Действительно, разделив числитель и знаменатель дроби на  $x^m$ , будем иметь

$$y = \frac{\frac{a_0}{x^{m-n}} + \frac{a_1}{x^{m-n+1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_n}{x^m}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}},$$

откуда следует, что при возрастании  $x$  по абсолютной величине числитель стремится к нулю, а знаменатель – к  $b_0$  и, следовательно, дробь стремится к нулю, а ось  $Ox$  является асимптотой.

В работе [2] рассмотрена дробно-рациональная функция вида  $y = \frac{ax^m}{b^n + x^n}$ . При  $m = 0$ ,  $b = 0$  и  $n = 1$  эта функция представляет собой гиперболу вида  $y = a/x$  (кривая 1 на рис. 1.6); при  $m = 0$  и  $n = 1$  – кривая 2 вида  $y = a/(b+x)$ ; при  $m = 1$  и  $n = 2$  – кривая 3; при  $m = 1$  и  $n = 1$  – кривая 4 на рис. 1.6 вида  $y = ax/(b+x)$ , вначале возрастающая линейно с увеличением  $x$ , а затем стремящаяся к постоянному значению, равному  $a$ ;  $m = n$  – кривая 5, переходящая с уровня  $y = 0$  на уровень  $y = a$  с крутизной, зависящей от значения  $m = n$ ; и, наконец, при



$m = 2$  и  $n = 4$  – колоколообразная кривая 6, сначала возрастающая пропорционально  $x^2$ , а затем спадающая обратно пропорционально  $x^2$ .

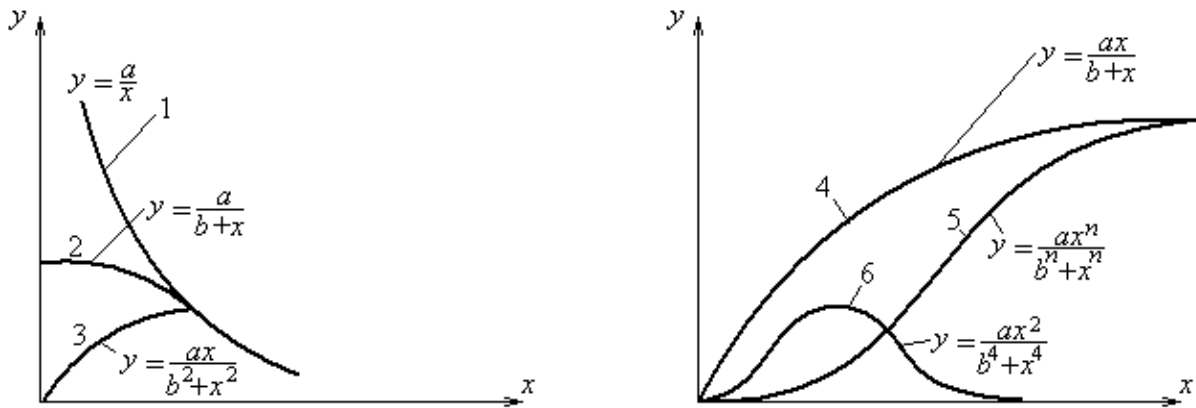


Рис. 1.6. Графики дробно-рациональной функции

Таким образом, дробно-рациональные функции могут оказаться полезными в самых разнообразных случаях аппроксимации экспериментальных данных.

### 1.7. Равномерные и неравномерные шкалы

Всякое уравнение, определяющее зависимость между двумя переменными, может быть построено в прямоугольной системе координат. Для этого нужно задать ряд значений одной переменной и, подставив их в уравнение, определить отвечающие им значения второй переменной.

Затем необходимо построить по найденным координатам соответствующие им точки и соединить их прямой или плавной кривой, которая часто проводится не по самим точкам, а рядом с ними для обеспечения плавности.

Если уравнение определяет зависимость между тремя переменными, то сначала следует последовательно подставить в заданное уравнение ряд значений третьей переменной (обычно той, которая изменяется в меньших пределах). В результате этого получим серию уравнений с двумя переменными, которые строим, как было ука-

зано выше. На каждой из построенных прямых или кривых надписываем то значение третьей переменной, которому она отвечает. Промежуточные значения третьей переменной находятся путем интерполяции.

Цель применения неравномерных шкал при выражении уравнений в графическом виде с двумя и тремя переменными – «спрямить» кривые, которые получаются при построении уравнений в прямоугольных координатах с равномерными шкалами. Конечно, далеко не все уравнения в системе координат с неравномерными шкалами могут быть изображены прямыми линиями. Наоборот, каждой неравномерной шкале соответствует вполне определенный вид уравнения, при построении которого с применением этой шкалы на графике получается прямая линия. Следовательно, если при построении графиков по экспериментальным данным применить какие-либо неравномерные шкалы на осях координат и при этом на графике получатся прямые линии, то определить вид уравнения, выражающего зависимость между изучаемыми переменными, не составит труда. Найти тот тип неравномерной шкалы, применение которого при построении графиков по экспериментальным данным даст на графике прямые линии, можно лишь методом подбора, т. е. путем последовательного построения нескольких графиков с применением различного типа неравномерных шкал. Некоторые указания для успешного подбора типа необходимой неравномерной шкалы определяют характер кривых, получаемых при построении графиков по экспериментальным данным в прямоугольных координатах с равномерными шкалами.

Например, при построении графика в прямоугольных координатах мы получили кривую, похожую на гиперболу. Проверка того, является ли данная кривая гиперболой, состоит в построении графика  $1/y = f(x)$ . Если является, то экспериментальные точки ложатся на прямую, а ее продолжение до пересечения с осями  $x$  и  $y$  позволяет графически определить неизвестные коэффициенты.

При этом замена координаты  $y$  на  $1/y$  (и соответственно  $x$  на  $1/x$ ) допустима лишь в том случае, если сдвиг по этой координате отсут-

ствуется, т. е. другая ось является асимптотой такой гиперболы, что вызвано следующим: в общем виде уравнение гиперболы можно записать

$$y - y_0 = \frac{a}{x - x_0},$$

где  $a$  – некоторая постоянная величина;  $y_0, x_0$  – величина сдвига гиперболы соответственно по осям  $y$  и  $x$ .

При сдвиге вдоль оси  $x$  на величину  $b$  ( $y_0 = 0$ ) аналитическое описание гиперболы примет вид  $y = a/(x - b)$ . Обращение оси  $y$  приводит к зависимости вида  $1/y = (x - b)/a = x/a - b/a$ , т. е. прямой в координатах  $1/y$  и  $x$ .

При сдвиге же вдоль оси  $y$  на величину  $c$  ( $x_0 = 0$ ) уравнение гиперболы имеет вид  $y = c + a/x$ , а следовательно,  $1/y = 1/(c + a/x) = x/(a + cx)$  не является прямой линией.

Особенно сложен для проверки случай, когда гипербола сдвинута одновременно по обеим осям (на величину  $c$  по оси  $y$  и на величину  $b$  по оси  $x$ ), т. е. имеет уравнение  $y = c + a/(x - b)$ . В этом случае нужно проводить вычисления методом последовательных приближений: задать ряд возможных значений  $b$ , вычислить значения  $1/(x - b)$  и остановиться на том значении  $b$ , когда  $y = c + a/(x - b)$  в координатах  $y$  и  $1/(x - b)$  даст расположение точек, наиболее близкое к прямой линии.

Из неравномерных шкал наиболее часто применяется логарифмическая шкала с построением ее на обеих осях координат (логарифмическая сетка) или на одной оси координат (полулогарифмическая сетка). Из других неравномерных шкал применяются квадратичная, обратная, шкала квадратных корней и т. п.

Приведем описание метода построения логарифмической шкалы.

Возьмем две вертикальные прямые одинаковой длины и на левой построим равномерную шкалу от 0 до 1 (рис. 1.7). Определим значения логарифмов целых чисел от 1 до 10 с точностью до двух десятичных знаков. Получим

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = \lg x$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1

Отмечая на левой шкале все точки, отвечающие приведенным значениям  $\lg x$ , перенесем их на правую вертикаль и напротив каждой перенесенной пометки напишем соответствующее значение  $x$ .

Полученная шкала и будет логарифмической. Так как расстояния на этой шкале между пометками целых значений  $x$  оказались большими и нахождение промежуточных значений  $x$  путем линейной интерполяции будет весьма неточным, то тем же методом можно определить положение пометок для следующих промежуточных значений  $x$ .

$x$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$y = \lg x$	0,08	0,15	0,20	0,26	0,40	0,54	0,65	0,74	0,81	0,88	0,93

Длина построенной логарифмической шкалы для значений  $x$  от 1 до 10 называется ее модулем; на рис. 1.7 его величина составляет 10,7 см. Предположим, что требуется построить логарифмическую шкалу для значений  $x$  от 1 до 100. Для этого достаточно продолжить вверх построенную нами шкалу для значений  $x$  от 1 до 10 на ту же длину и отложить на продолжении все те же расстояния, что и на первой ее половине, а все численные пометки напротив соответствующих делений увеличить в 10 раз.

Это очень важное свойство логарифмической шкалы, которое значительно упрощает ее построение и дает весьма большие преимущества при пользовании ею. Оно основано на следующем свойстве логарифмов: если число увеличилось в 10, 100 и другое количество раз, то логарифм нового числа сохраняет свою мантиссу, а характеристика его увеличится соответственно на единицу, два и т. д. Например,  $\lg 3 = 0,48$ , а  $\lg 30 = 1,48$ . Так как длина шкалы для значений  $x$  от 1 до 10 была принята равной единице (так как  $\lg 10 = 1$ ), то очевидно, что для получения пометки, отвечающей  $\lg 30$ , т. е. 1,48, необходимо от конца первого модуля шкалы отложить отрезок, равный 0,48, т. е. тот же самый отрезок, который был отложен от начала шкалы для получения пометки, отвечающей  $\lg 3$ .

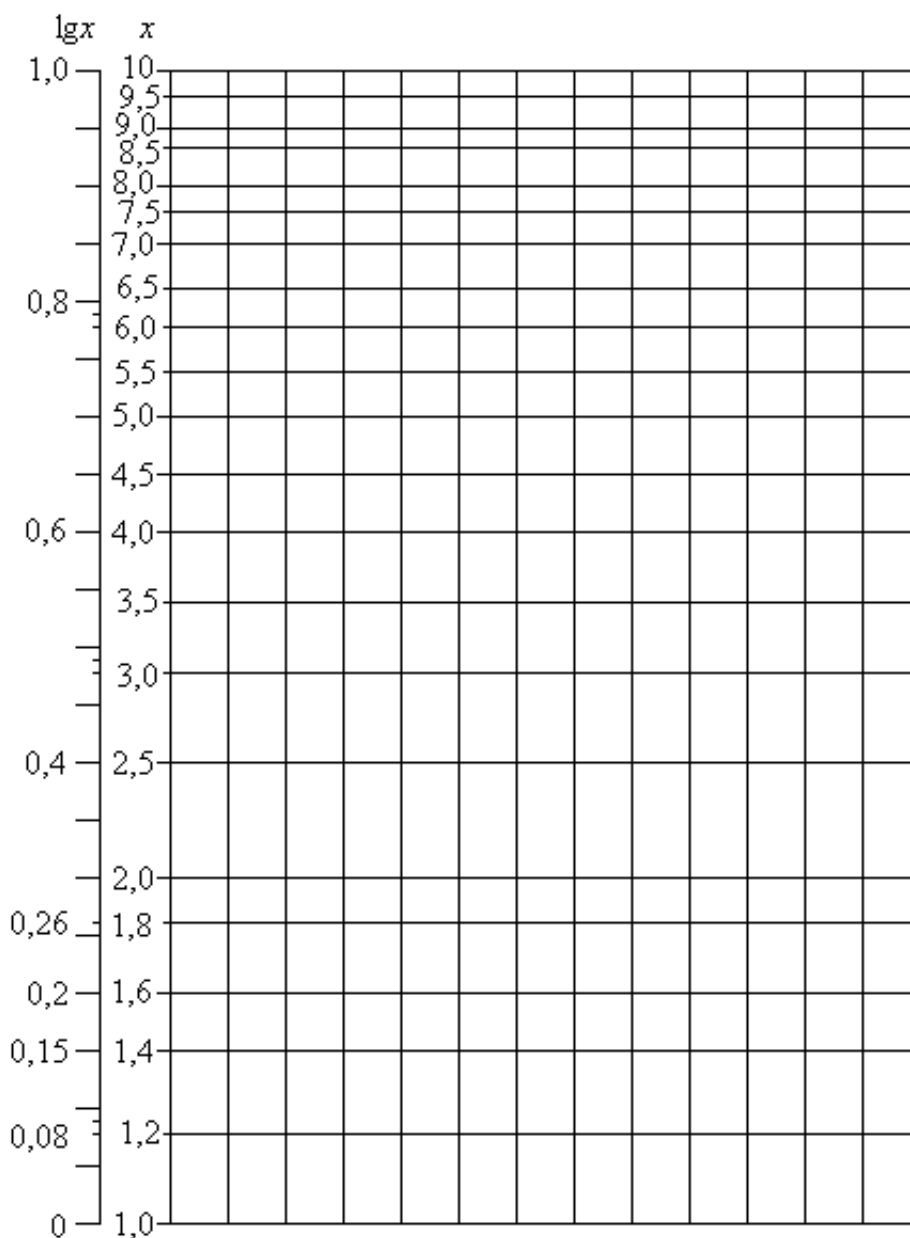


Рис. 1.7. Логарифмическая шкала (сетка) по оси ординат

Полная повторяемость всех расстояний пометок от начала каждого модуля до его конца дает возможность легко построить логарифмическую шкалу с любым числом модулей, причем начало первого модуля можно принять не только за единицу, но и за единицу с последующими или предшествующими нулями, например 10; 100 или 0,1; 0,01 и т. д. Численная пометка в конце модуля будет всегда в 10 раз больше, чем в его начале. Пометки «нуль» на логарифмической шкале быть не может, так как  $\lg 0 = \infty$ , т. е. эта пометка располагается в бесконечности.

Подобным образом строятся неравномерные шкалы и для других функций одной независимой переменной.

Построить уравнение с двумя и тремя переменными в прямоугольных координатах с неравномерными шкалами можно с помощью тех же приемов, которые используют при построении с применением равномерных шкал, так как на всех неравномерных шкалах против делений, полученных при их построении, надписываются значения переменных, которым они соответствуют. Напомним, что применение неравномерных шкал равносильно замене переменных в заданном уравнении.

### **1.8. Дифференциальное исчисление**

Методы дифференциального исчисления применяются, главным образом, для описания динамических процессов.

К какому бы роду явлений ни принадлежал изучаемый процесс, его исследование только тогда можно считать удовлетворительным, когда достигаются, по крайней мере, два общих результата: становится известным закон, выражающий общий ход явления, и когда установлено, как протекает это явление в каждый произвольно взятый момент и чем оно определяется. Очевидно, что между общим ходом явления и его отдельными моментами должна быть причинная связь.

Достаточно знать общий закон, управляющий явлением, чтобы путем вычисления определить отдельные его моменты и свойства. Точно так же с помощью вычисления можно вывести общий закон явления, если известна закономерность для отдельных его фаз. Достигается это с помощью методов высшей математики. Например, исходя из закона сохранения массы, можно установить те формулы, которые описывают движение вихревого воздушного кольца, его тепло-массообмен с окружающей средой. Точно так же, сделав допущение, что тепловой поток прямо пропорционален падению температуры, можно вычислить распределение тепла в любом проводнике тепла.

Каковы же те представления, которые дают возможность прилагать математические методы к рассмотрению различных процессов? Каковы те вспомогательные средства, с помощью которых можно безошибочно переходить от общего закона к частному случаю, и наоборот?

Когда воздух, передающий звук своими колебаниями, претерпевает ряд попеременных разрежений и сгущений, когда при взрыве газа температура быстро возрастает до определенного максимума, а затем снова быстро падает, – всякий раз мы имеем дело с явлениями, картина которых в любой момент отличается от существовавшей в предыдущий. Для того чтобы понять эти явления, обычно разлагают их на элементарные составные части, на целый ряд одиночных явлений, длящихся минимальное время, и допускают, что в течение означенного промежутка времени явления протекают равномерно. Такой прием имеет весьма важное значение.

Например, рассматривая расширение жидкости при нагревании, или сжатие газа при изменении давления, или ход химической реакции, или любые другие процессы, обычно их расчленяют на отдельные элементы, что облегчает нахождение искомым закономерностей.

Поэтому описанный прием исследования явлений имеет характер приближенного метода. Чем меньше взятые интервалы, тем больше степень приближения.

Значительное число встречающихся на практике задач связано со скоростью превращений или изменений с течением времени, как это имеет место в периодических процессах, но часто переменной является скорость изменения какой-либо величины не относительно времени, а относительно положения массы в пространстве, концентрации и т. п. Так, например, для теплообменника непрерывного действия может быть установлен закон изменения скорости, с которой передается тепло в каждой точке аппарата; закон трения определяет переменные, влияющие на величину потери напора при движении жидкости в трубопроводе, и т. д.

При изучении зависимостей, описывающих различные процессы, в первую очередь встает вопрос о нахождении скорости этих процессов. Задача об определении скорости, с которой изменяется переменная величина, приводит к одному из важнейших понятий науки – понятию *производной*.

Пусть точка совершает какое-то движение. Длина пути, пройденного точкой, изменяется в зависимости от времени и, следовательно, является функцией времени:  $s = s(t)$ .

Пусть за время  $t$  точка прошла путь  $s$ , а за время  $(t + \Delta t) - (s + \Delta s)$ , т. е. за время  $\Delta t$ , точка прошла путь  $\Delta s$ . Отношение  $\Delta s/\Delta t$  характери-

зует скорость движения точки на данном отрезке пути в том смысле, что если бы движение было равномерным, то скорость движения равнялась бы отношению пройденного пути  $\Delta s$  ко времени  $\Delta t$ . Отношение  $\Delta s/\Delta t$  называется *средней скоростью* на отрезке  $\Delta s$ .

Однако, если движение неравномерное, то средняя скорость на каком-то отрезке  $\Delta s$  не будет характеризовать движение точки в любой момент времени.

Очевидно, истинная скорость движения будет тем меньше отличаться от средней, чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ . Для того чтобы получить скорость  $v$  в данный момент времени, рассмотрим предел  $\Delta s/\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т. е.  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$ . Этот предел представляет собой

предел отношения приращения функции  $s(t)$  к приращению аргумента  $t$  и, следовательно, является производной от функции  $s(t)$ . Какой процесс можно представить этой функцией? Производную с физической точки зрения можно представить себе как скорость, с которой протекает этот процесс. Например, если функция  $s$  выражает собой температуру нагревающегося тела, то производная от нее есть скорость нагревания. Если отвлечься от физического смысла переменных  $s$  и  $t$ , то производная от  $s$  по  $t$  выражает скорость изменения  $s$  в зависимости от изменения  $t$ .

К понятию дифференциала нас приводит задача о вычислении приращения функции. Дифференциал функции равен производной этой функции, умноженной на приращение независимой переменной. Пусть кривая есть график функции  $y = f(x)$ , тогда согласно определению  $dy = y'dx$ , отсюда, т. е. из формулы, определяющей дифференциал, следует  $y' = \frac{dy}{dx}$ .

Таким образом, производную функции можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной. Обозначение в виде отношения дифференциалов весьма употребительно в технической литературе наряду со штриховым обозначением производной.

Метод применения дифференциального исчисления к изучению различных процессов состоит в том, что данный процесс разбивают на ряд коротких процессов, каждый из которых предполагают проте-



кающим равномерно. При этом приращение функции, определяющей ход явления, заменяют ее дифференциалом.

Так, например, тело при нагревании в течение промежутка времени  $dt$  получает приращение тепла, выражаемое дифференциалом  $dQ$ ; при сжатии газа  $dV$  является тем изменением объема, которое вызывается приращением давления  $dp$ , и т. д.

Математический анализ технических задач состоит из трех частей: перевод условий задачи на язык математики; решение полученной таким образом математической задачи; оценка полученных результатов.

Первая часть работы заключается чаще всего в составлении дифференциального уравнения и является наиболее трудной. Для составления дифференциальных уравнений нет общих методов, и навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате изучения конкретных примеров.

Практическая ценность дифференциальных уравнений обуславливается тем, что, пользуясь ими, можно установить связь между основным физическим или химическим законом и часто целой группой переменных, имеющих большое значение при исследовании технических вопросов.

Применение даже наиболее простого физического закона к процессу, протекающему при переменных условиях, может привести к весьма сложному соотношению между переменными величинами.

Уравнения, связывающие независимую переменную, ее функцию и производные этой функции, называются *дифференциальными уравнениями*. При решении технических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям, бывает важно не только найти общий интеграл уравнения, но также и определить значения постоянных, входящих в интеграл, так, чтобы решение соответствовало данной задаче.

В случае уравнения первого порядка для этого достаточно одного дополнительного условия (начального условия), обычно задаваемого числовым значением функции при каком-либо частном значении независимого переменного.

Уравнения, содержащие обыкновенные производные или дифференциалы, называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями*; уравнения, содержащие частные производные, называются *дифференциальными уравнениями с частными производными*.

К обыкновенным дифференциальным уравнениям приводит изучение процессов, в которых все искомые величины являются функциями лишь одной независимой переменной.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Какая величина называется переменной?
2. Что такое независимые и зависимые переменные?
3. Что такое однозначная и многозначная функции?
4. Какая функция называется квадратичной?
5. Какая функция называется показательной?
6. Начертите график функции вида  $y = a^{bx}$  в полупологарифмическом масштабе.
7. Какая функция называется степенной?
8. Как выглядит график функции  $y = ax^m$  при любых положительных значениях коэффициента  $a$  и любых положительных или отрицательных значениях показателя степени  $m$ , при построении в прямоугольных координатах с применением логарифмических шкал?
9. Какая функция называется дробно-рациональной?
10. Как выглядят графики дробно-рациональной функции?
11. Дайте определение равномерной и неравномерной шкалам.
12. Что такое модуль логарифмической шкалы?
13. Назовите важное свойство логарифмической шкалы. В чем оно заключается?
14. Для чего главным образом применяются методы дифференциального исчисления?
15. Из каких частей состоит математический анализ технических задач?
16. В чем состоит практическая ценность дифференциальных уравнений?

## Глава 2

### МЕТОДЫ ПОДБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

#### 2.1. Выбор вида функциональной зависимости

Задача подбора вида функциональной зависимости является *неформализуемой*, так как одна и та же кривая на данном участке примерно с одинаковой точностью может быть описана самыми различными аналитическими выражениями. Кроме того, в настоящее время нет определенных разработанных методов, которые позволяли бы сразу установить вид эмпирической формулы на основе имеющихся взаимозависимых данных. Обычный путь, по которому в этих случаях приходится идти, – путь подбора. Он заключается в том, что экспериментатор, установив характер изменения имеющихся данных и руководствуясь знаниями и своей интуицией, выбирает определенный вид формулы и, подставляя в нее ряд значений переменных, находит ее постоянные коэффициенты, а подставляя в найденную формулу остальные значения переменных, проверяет соответствие формулы этим данным. Если проверка приводит к отрицательным результатам, то выбирают другой вид формулы и все вычисления повторяют. Так как разнообразие видов формул чрезвычайно велико, то вполне понятно, что метод подбора всегда требует значительных затрат времени на выполнение весьма многочисленных и кропотливых вычислений. Кроме того, далеко не всегда этим методом удастся найти формулу, удобную для практического применения.

Использование графических методов при обработке исходных данных часто может весьма облегчить задачу нахождения нужной формулы.

Для графического изображения зависимости между двумя переменными на графике строят точки и соединяют их непрерывной линией. Если линия получилась близкой к прямой или плавной кривой, то имеются основания предполагать наличие закономерной зависимости между изучаемыми переменными.

Число кривых, которые в пределах графика можно провести через одни и те же точки, велико. Каждой кривой будет отвечать свое

уравнение, причем эти уравнения могут отличаться не только значениями своих постоянных, но и математической формулой. Так, например,  $U$ -образная кривая может быть описана участком параболы, гиперболы, эллипса или синусоиды. Рациональный выбор того или иного аналитического описания может быть обоснован лишь при учете определенного перечня требований. Главное требование к математической модели – удобство ее последующего использования. Основное, что обеспечивает удобство математического выражения, – его *компактность*. Например, известно, что любую функцию  $y = f(x)$  можно описать многочленом вида  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ . Но если же оказывается возможным с приемлемой точностью описать ее одночленом вида  $y = a \ln(x/b)$ ,  $y = ae^{bx}$ ,  $y = a \sin bx$  и т. п., то ясно, что такое компактное представление намного лучше. Таким образом, компактность модели достигается удачным выбором элементарных функций, обеспечивающих хорошее приближение при малом их числе.

Другое весьма желательное (но иногда трудно достижимое) требование – *содержательность*, иначе говоря, *интерпретируемость* предлагаемого аналитического описания. Как правило, оно достигается с помощью придания определенного смысла константам или функциям, входящим в найденную математическую модель.

Отсюда следует важный практический вывод. Даже в наш век широкого использования ЭВМ в научных исследованиях принятие решения о выборе той или иной математической модели остается за человеком-исследователем и не может быть передано ЭВМ. Только человек, а не ЭВМ, знает, для чего будет в дальнейшем использоваться эта модель, на основе каких понятий будут интерпретированы ее параметры и т. д.

## 2.2. Определение постоянных коэффициентов формулы

Наиболее простыми формулами, которые исследователь подбирает на основе имеющихся опытных данных, являются такие, в которые входит лишь одна постоянная величина, например  $y = tx$ .

Для нахождения постоянного коэффициента  $t$  можно воспользоваться или среднеарифметическим методом, или методом наименьших квадратов. Рассмотрим здесь только первый из этих методов.

По среднеарифметическому методу требуется, чтобы сумма разностей между значениями искомой величины, определенными по найденной формуле, и ее опытными исходными значениями равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n y_i = m \sum_{i=1}^n x_i,$$

где  $n$  – число опытов;  $x_i, y_i$  – значения переменных в  $i$ -м опыте. Но для сокращения записи будем придерживаться здесь и в дальнейшем обозначений без индексов. Отсюда получаем

$$m = \frac{\sum y}{\sum x}. \quad (2.1)$$

**Пример 1.** В результате опытов были получены данные (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Номер опыта	$y_i$	$x_i$
1	20	5,4
2	24	6,6
3	30	8,2
4	36	10,3
5	40	11
6	48	13,3

Теоретический анализ дает основание предполагать наличие пропорциональной зависимости между изучаемыми переменными  $y$  и  $x$ . Сопоставление цифр столбцов  $y_i$  и  $x_i$  показывает, что с увеличением  $x_i$  примерно во столько же раз увеличивается и  $y_i$ , т. е. эту зависимость можно описать формулой  $y = mx$ . Кроме того, грубая оценка показывает, что отношение (чуть меньше четырех)  $y_i$  к  $x_i$  приблизительно одинаковое во всех опытах, а указанная линейная зависимость имеет место, то должно выполняться условие  $m = \frac{y_i}{x_i} = \text{const.}$

Поэтому находим величину этих отношений и заполняем табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер опыта	$y_i$	$x_i$	$m = y_i/x_i$	$y$
1	20	5,4	3,7	19,5
2	24	6,6	3,6	23,8
3	30	8,2	3,7	29,6
4	36	10,3	3,7	37,2
5	40	11	3,6	39,7
6	48	13,3	3,6	48
$\Sigma$	198	54,8	–	–

Сравнение показывает достаточное совпадение этих отношений и, следовательно, подтверждает наличие пропорциональной зависимости. Переходим к вычислению постоянной величины  $m$ , которую определяют по среднеарифметическому методу. Для этого необходимо найти  $\sum y_i$  и  $\sum x_i$  и их отношение  $m = \frac{\sum y_i}{\sum x_i} = \frac{198}{54,8} = 3,613$ . Таким образом, математическая модель будет иметь вид  $y = 3,613x$ .

Вычислив значения функции по этой модели (последний столбец табл. 2.2), становится очевидно, что эта модель вполне удовлетворительно описывает существующую зависимость между переменными  $y$  и  $x$ .

К уравнению  $y = mx$  можно привести и ряд других выражений, выполнив для этого некоторые подстановки [21], что даст возможность формализовать использование выражения (2.1).

В уравнении  $y = \frac{m}{x}$  примем  $\frac{1}{x} = x'$ , тогда  $y = mx'$ . Подставляя полученное выражение в уравнение (2.1), получим  $m = \frac{\sum y}{\sum x'} = \frac{\sum y}{\sum \frac{1}{x}}$ .

Для нахождения  $m$  в уравнении  $y = x^m$  прологарифмируем и будем иметь  $\lg y = m \lg x$ . Примем  $\lg y = y'$ ;  $\lg x = x'$ .  $\frac{1}{x} = x'$ , тогда  $y' = mx'$ .

Отсюда с учетом выражения (2.1)  $m = \frac{\sum y'}{\sum x'} = \frac{\sum \lg y}{\sum \lg x}$ .

В уравнении  $y = m \lg x$  примем  $\lg x = x'$ , тогда  $y = mx'$  и

$$m = \frac{\sum y}{\sum \lg x}.$$

Если  $y = m^x$ , то после логарифмирования получим  $\lg y = x \lg m$  и, принимая  $\lg y = y'$ ;  $\lg m = m'$ , получим  $\lg m = \frac{\sum \lg y}{\sum x}$ .

Аналогично для  $y = e^{mx}$  имеем  $\lg y = mx \lg e$  или  $\ln y = mx$ . Принимая  $\ln y = y'$ ,  $m = \frac{\sum \ln y}{\sum x}$ .

В технических расчетах также часто применяются различные по виду формулы с двумя постоянными величинами, например  $y = mx + n$ .

По среднеарифметическому методу для уравнения этого вида имеем

$$\begin{aligned} \sum [y - (mx + n)] &= 0; \\ \sum y - m \sum x - \sum n &= 0, \end{aligned}$$

или

$$m \sum x + ns - \sum y = 0, \quad (2.2)$$

где  $s$  – число опытов (сумму заменяем произведением).

Так как для нахождения неизвестных  $m$  и  $n$  требуются два уравнения, то разобьем исходные данные на две группы с одинаковым числом опытов, и тогда получим в общем виде два уравнения

$$\begin{aligned} \sum_1^{s/2} y - m \sum_1^{s/2} x - \frac{ns}{2} &= 0; \\ \sum_{s/2+1}^s y - m \sum_{s/2+1}^s x - \frac{ns}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Решая полученные уравнения, находим значения  $m$  и  $n$ . По существу это сводится к решению системы уравнений с двумя неизвестными следующего вида:

$$\begin{aligned} a_1 m + b_1 n - c_1 &= 0; \\ a_2 m + b_2 n - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Найти коэффициенты этой системы уравнений можно четырьмя способами:

а) умножением первого уравнения на  $a_2/a_1$  или второго на  $a_1/a_2$  для определения величины  $n$ ;

б) умножением первого уравнения на  $b_2/b_1$  или второго на  $b_1/b_2$  для определения величины  $m$ .

В уравнениях коэффициенты  $a_1, b_1, c_1$  и  $a_2, b_2, c_2$  определяются на основе опытных данных, следовательно, являются числами приближенными, поэтому для получения более точных результатов следует выбирать тот из четырех указанных способов, при котором уравнение умножается на наименьший множитель.

**Пример 2.** Результаты опытов приведены в первых двух колонках табл. 2.3. Если построить на основе имеющихся данных график в прямоугольной системе координат с равномерными шкалами по обеим осям, то увидим прямую линию, не проходящую через начало координат. Это дает основание предположить, что указанную зависимость можно описать прямой линией вида  $y = mx + n$ . Так как имеются данные о восьми опытах, то для получения двух уравнений при применении среднеарифметического метода разобьем опыты на две группы, с четырьмя опытами в каждой.

Получим следующие уравнения:

$$m \sum_1^{8/2} x_i + \frac{8n}{2} - \sum_1^{8/2} y_i = 0;$$

$$m \sum_{8/2+1}^8 x_i + \frac{8n}{2} - \sum_{8/2+1}^8 y_i = 0.$$

Таблица 2.3

Номер опыта	$y_i$	$x_i$	$y$	$\Delta$	$\delta, \%$
1	120	20	119,87	-0,13	-0,1
2	175	30	174,12	-0,88	-0,5
3	228	40	228,37	0,37	0,2
4	283	50	282,62	-0,38	-0,1
$\Sigma$	805	140	—	—	—
5	337	60	336,87	-0,13	-0,03
6	391	70	391,12	0,12	0,03
7	445	80	445,37	0,37	0,08
8	500	90	499,62	-0,38	-0,08
$\Sigma$	1673	300	—	—	—



Подставляя значения  $\sum y_i$  и  $\sum x_i$  для каждой группы, получим

$$140m + 4n - 805 = 0;$$

$$300m + 4n - 1673 = 0.$$

Решая уравнения путем исключения  $n$ , находим  $m = 5,425$ ;  
 $n = 11,37$ .

Окончательно математическая модель примет вид  $y = 5,425x + 11,37$ .

Вычисляя значения  $y$  по этой модели, видим, что полученная модель хорошо описывает зависимость между переменными, о чем свидетельствуют абсолютная  $\Delta$  и относительная  $\delta$  погрешности, при этом значения последней не превосходят 0,5 %.

**Пример 3.** Результаты опытов приведены в табл. 2.4. Требуется найти зависимость между переменными  $x$  и  $y$ .

Таблица 2.4

$y_i$	20	30	40	50	60	70	80
$x_i$	16,2	35,9	64,1	99,8	148,7	196,2	256,5
$y$	20,1	30	40,2	50,3	61,5	70,7	80,9

На рис. 2.1 изображен график функции  $y = f(x)$ , построенный по опытными данным. Полученная плавная прямая позволяет сделать вывод о том, что исследуемая зависимость может быть описана показательной функцией вида  $y = nx^m$ . Для проверки сделанного предположения построим эту же зависимость в системе координат с логарифмическими шкалами (рис. 2.2). Полученный график отобразился в прямую линию, что подтверждает правильность выдвинутой гипотезы о виде функции. Как отмечалось ранее, острый угол прямой с осью абсцисс свидетельствует о положительном значении коэффициента  $n$ , а значение этого угла менее  $45^\circ$  показывает, что коэффициент  $m$  меньше единицы.

Найти коэффициенты  $m$  и  $n$  можно по двум любым точкам (желательно, чтобы они были расположены подальше друг от друга). Возьмем, например, точки с координатами  $x = 16,2$ ;  $y = 20$  и  $x = 196,2$ ;  $y = 70$ .

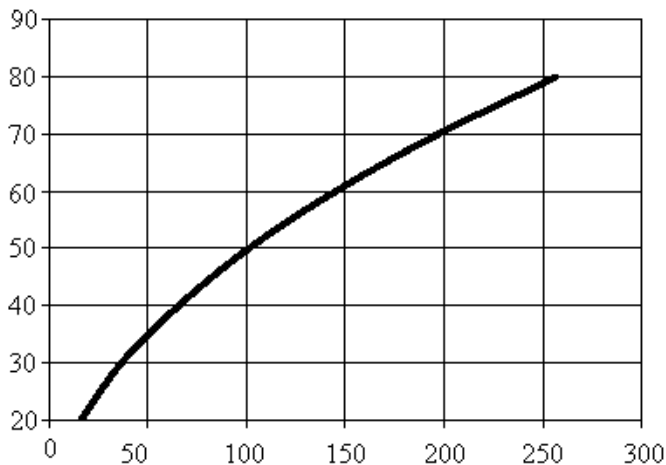


Рис. 2.1. График в системе координат с равномерными шкалами

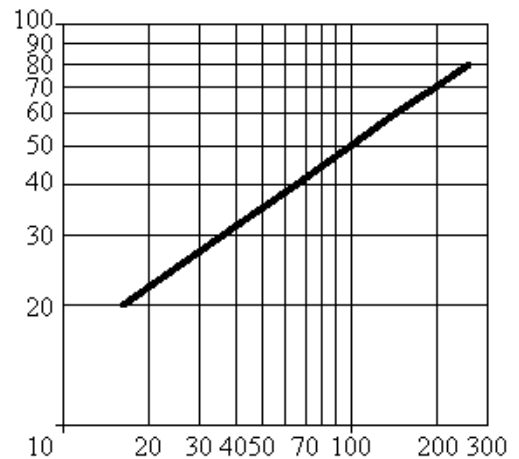


Рис. 2.2. График в системе координат с логарифмическими шкалами

Поскольку эти точки лежат на прямой, то можно записать

$$20 = n \cdot 16,2^m,$$

$$70 = n \cdot 196,2^m.$$

После логарифмирования этих уравнений

$$\lg 20 = \lg n + m \lg 16,2,$$

$$\lg 70 = \lg n + m \lg 196,2,$$

или

$$1,301 = \lg n + 1,21m,$$

$$1,845 = \lg n + 2,293m.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим  $0,544 = 1,083m$  и  $m = 0,502$ .

Подставляя найденное значение  $m$  в любое из уравнений, находим  $\lg n = 0,694$ , откуда  $n = 4,943$ . Таким образом, зависимость описывается формулой  $y = 4,943x^{0,504}$ .

Вычисления  $y$  по этой модели показывают, что она хорошо описывает исходную зависимость, относительная погрешность по существу не превосходит 1 %. Более точно указанные коэффициенты можно найти среднеарифметическим методом.

Выполним преобразования часто встречающихся функций для того, чтобы формализовать задачу нахождения коэффициентов  $m$  и  $n$  по формуле (2.2), т. е. среднеарифметическим методом.

Для нахождения  $m$  и  $n$  в уравнении  $y = nx^m$  прологарифмируем его, получится  $\lg y = m \lg x + \lg n$ . Примем  $\lg y = y'$ ;  $\lg x = x'$  и  $\lg n = n'$ . Тогда  $y' = mx' + n'$ . Отсюда с учетом выражения (2.2)  $m \sum \lg x + s \lg n - \sum \lg y = 0$ .

В уравнении  $y = m \lg x + n$  примем  $\lg x = x'$ . После подстановки в выражение (2.2), получим  $m \sum \lg x + ns - \sum y = 0$ .

Уравнение  $y = ne^{mx}$  прологарифмируем и получим  $\ln y = mx + \ln n$ , принимая  $\ln y = y'$  и  $\ln n = n'$ , получим  $m \sum x + s \ln n - \sum \ln y = 0$ .

Уравнение  $y = e^{mx+n}$  также прологарифмируем, в результате чего будем иметь  $\ln y = mx + n$ , принимая  $\ln y = y'$ , окончательно запишем  $m \sum x + sn - \sum \ln y = 0$ .

В уравнении  $y = \frac{m}{x} + n$  примем  $\frac{1}{x} = x'$ , тогда  $y = mx' + n$  и  $m \sum \frac{1}{x} + sn - \sum y = 0$ .

Если  $y = \frac{x}{nx+m}$ , то, преобразовывая его, получим  $\frac{1}{y} = \frac{m}{x} + n$ ; принимая  $\frac{1}{y} = y'$ ;  $\frac{1}{x} = x'$ , получим  $y' = mx' + n$  и  $m \sum \frac{1}{x} + sn - \sum \frac{1}{y} = 0$ .

Аналогично для уравнения  $y = \frac{1}{mx+n}$  имеем  $\frac{1}{y} = mx + n$ . Принимая  $\ln y = y'$ , получим  $m \sum x + sn - \sum \frac{1}{y} = 0$ .

**Пример 4.** Найдите математическую зависимость между переменными  $x$  и  $y$  по опытным данным, приведенным в табл. 2.5.

Таблица 2.5

$y_i$	7	11	14,4	17	19,2	23,6	27,4	30
$x_i$	3,2	6,4	11	16,6	24,6	50	95	145
$\lg x_i$	0,5052	0,8052	1,0414	1,2201	1,3909	1,6989	1,9777	2,1614
$y$	6,96	11,14	14,4	16,89	19,27	23,6	27,42	29,97

На рис. 2.3 представлен график, построенный на основе опытных данных в координатах с равномерными шкалами. Полученная плавная кривая предполагает для выявления вида зависимости дальнейшее построение графика с применением логарифмической шкалы. Однако неполучение прямой линии в логарифмических координатах побуждает провести следующее построение в полулогарифмических координатах (полулогарифмической сетке). На рис. 2.4 показан график, отражающий указанную зависимость прямой линией в полулогарифмической сетке. Исходя из этого, можно предположить, что логарифмирование должно выполняться только с переменной  $x$ , а невозможность прохождения этой линии через начало координат ( $\lg 0 = -\infty$ ) подразумевает наличие в математической модели коэффициента  $n$ , обеспечивающего подъем прямой линии над осью абсцисс. Поэтому будем считать, что данную зависимость можно описать уравнением вида  $y = m \lg x + n$ . Тогда по среднеарифметическому методу общий вид уравнения выразится  $m \sum \lg x + ns - \sum y = 0$ .

Для нахождения коэффициентов разбиваем исходные данные на две группы и составляем соответственно систему из двух уравнений:

$$3,5728m + 4n - 49,4 = 0;$$

$$7,229m + 4n - 100,2 = 0.$$

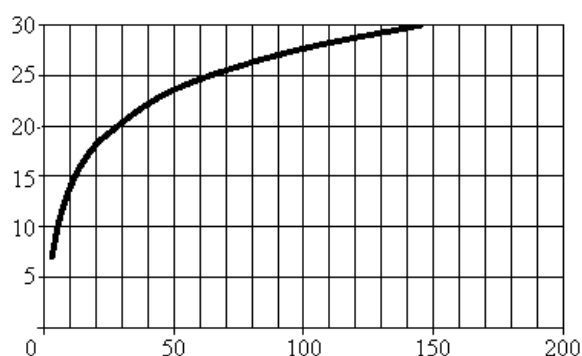


Рис. 2.3. График в системе координат с равномерными шкалами

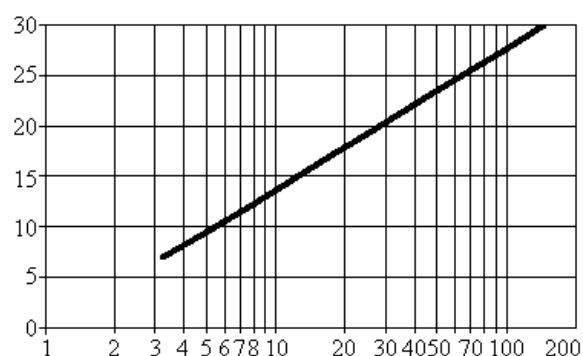


Рис. 2.4. График в системе координат с логарифмической шкалой по оси  $x$

Решаем уравнения путем вычитания из второго первого и находим  $m = 13,894$  и  $n = -0,06$ . Окончательно математическая модель примет вид  $y = 13,894 \lg x - 0,06$ . Значения  $y$ , вычисленные по этой формуле и представленные в последней строке табл. 2.5, показывают хорошую совместимость с опытными данными.

Рассмотрим уравнение с тремя постоянными, которое наиболее часто применяют при подборе эмпирических формул, а именно

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Определение постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$  такой формулы, пользуясь значениями изучаемых переменных  $y$  и  $x$ , может также быть выполнено среднеарифметическим методом, согласно которому

$$\sum [y - (ax^2 + bx + c)] = 0$$

или

$$\sum y - a \sum x^2 - b \sum x - sc = 0. \quad (2.3)$$

Так как для определения трех постоянных  $a$ ,  $b$  и  $c$  требуются три уравнения, поэтому исходные данные разбивают на три равные по числу опытов группы и составляют три уравнения, предварительно вычислив  $\sum y$ ,  $\sum x^2$ ,  $\sum x$  для каждой группы данных. Решая совместно полученные три уравнения, находят постоянные  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Пример 5.** Результаты опытов для определения зависимости между  $y$  и  $x$  приведены в первых двух колонках табл. 2.6.

Таблица 2.6

Номер опыта	$y_i$	$x_i$	$x_i^2$	$y$	$\Delta$	$\delta, \%$
1	17	2	4	16,85	-0,15	-0,9
2	23	2,5	6,25	22,97	-0,03	-0,1
3	30	3	9	30,19	0,19	0,6
$\Sigma$	70	7,5	19,25	—	—	—
4	38	3,5	12,25	38,53	0,53	1,4
5	48	4	16	47,97	-0,03	-0,06
6	59	4,5	20,25	58,53	-0,47	-0,8
$\Sigma$	145	12	48,5	—	—	—
7	70	5	25	70,19	0,19	0,3
8	83	5,5	30,25	82,97	-0,03	-0,04
9	97	6	36	96,85	-0,15	-0,2
$\Sigma$	250	16,5	91,25	—	—	—
$\Sigma$	465	36	159	—	—	—

Построим по исходным данным график функции (рис. 2.5). График показывает, что зависимость можно описать квадратичной функцией вида  $y = ax^2 + bx + c$ , поскольку кривая похожа на ветвь параболы, смещенной относительно оси координат. Исходя из этого, составляем систему из трех уравнений:

$$19,25a + 7,5b + 3c - 70 = 0;$$

$$48,5a + 12b + 3c - 145 = 0;$$

$$91,25a + 16,5b + 3c - 250 = 0.$$

Решая первое уравнение со вторым и второе с третьим, получим

$$29,25a + 4,5b - 75 = 0;$$

$$42,75a + 4,56b - 105 = 0,$$

откуда

$$13,5a - 30 = 0;$$

$$a = 2,22.$$

Подставляя найденное значение постоянной  $a$ , получим  $b = 2,24$  и  $c = 3,49$ . Окончательно математическая модель будет иметь вид  $y = 2,22x^2 + 2,24x + 3,49$ .

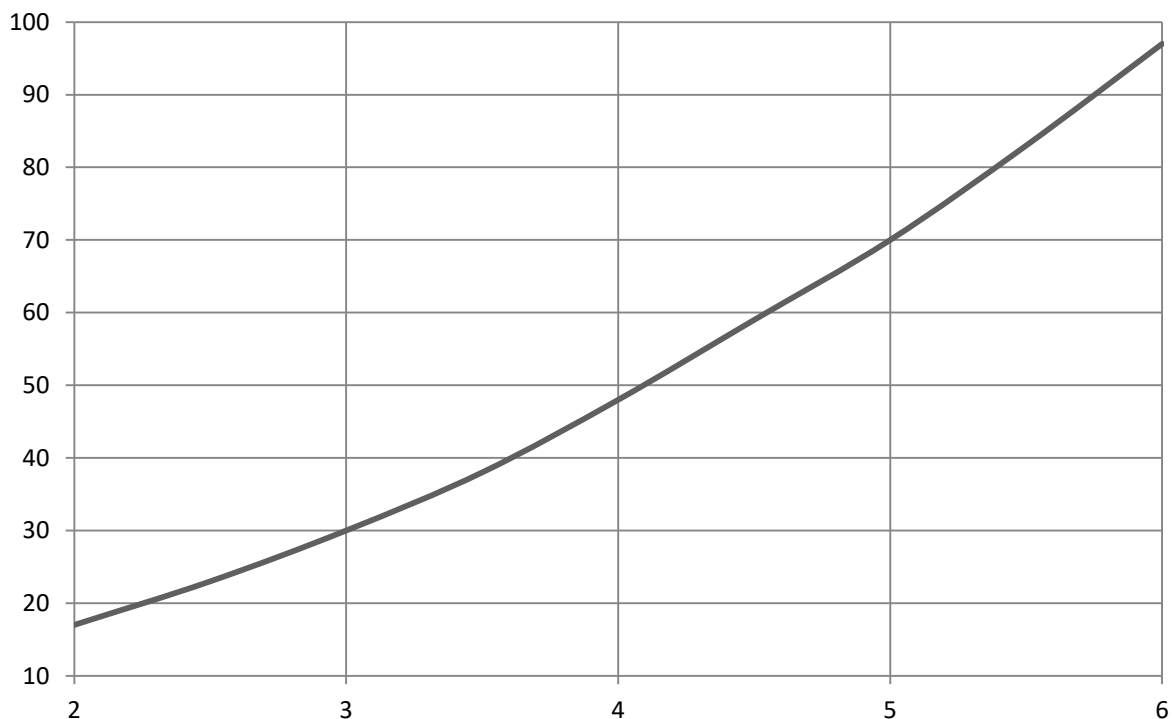


Рис. 2.5. График квадратичной функции

Теперь можно проверить сделанные предположения относительно ветви параболы, представленной графиком на рис. 2.5. Известно, что уравнение смещенной относительно оси координат параболы имеет вид

$$y - y_0 = a(x - x_0)^2, \quad (2.4)$$

где  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  и  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$  (см. с. 11). Подставляя найденные коэффициенты в последние выражения, получим

$$x_0 = -\frac{2,24}{2 \cdot 2,22} = -0,505; \quad y_0 = \frac{4 \cdot 2,22 \cdot 3,49 - 2,24^2}{4 \cdot 2,22} = 2,925.$$

Возьмем, например, из исходных данных значение  $x_i = 3$  и вычислим по уравнению (2.4) значение  $y$ :

$$y = 2,22(3 + 0,505)^2 + 2,925 = 27,273 + 2,925 = 30,19.$$

Вычисляя значения  $y$  по математической модели, видим, что эта модель хорошо описывает зависимость между переменными, о чем свидетельствуют абсолютная  $\Delta$  и относительная  $\delta$  погрешности, при этом значения последней не превосходят 1,4 %.

### 2.3. Моделирование с помощью дифференциальных уравнений

Часто моделирование работы каких-либо приборов, систем или исследование процессов осуществляется с помощью составления и последующего решения дифференциальных уравнений.

**Пример.** Необходимо найти тепловой коэффициент  $\gamma$  расширения (коэффициент плоскостного расширения) прямоугольной пластины из кварца со сторонами  $x$  и  $y$ , при увеличении ее температуры на величину  $t$ , если коэффициент линейного расширения (линейный коэффициент теплового расширения) в одном направлении равен  $\alpha$ , а в другом –  $\beta$ .

При вычислениях двумерное расширение следует рассматривать как линейное расширение в двух направлениях. Коэффициент  $\gamma$  будет равен отношению приращения площади  $A$  пластины и приращения температуры, отнесенному к единице площади:  $\gamma = \frac{dA}{dt} \frac{1}{A}$ .

Поскольку  $A = xy$ , то  $dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy$ , но  $\frac{\partial A}{\partial x} = y$ , а  $\frac{\partial A}{\partial y} = x$ ,

поэтому, деля обе части предыдущего уравнения на  $dt$ ,

$$\frac{dA}{dt} = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt}.$$

Так как  $\frac{dx}{xdt} = \alpha$ , а  $\frac{dy}{ydt} = \beta$ , то, подставляя выражения в урав-

нение для  $\gamma$ , получим  $\gamma = (y\alpha x + x\beta y)/xy = \alpha + \beta$ .

Для изотропного кристалла  $\alpha = \beta$ , коэффициент плоскостного расширения  $\gamma$  будет равен удвоенному коэффициенту линейного расширения.

## 2.4. Специальные методы нахождения формул для двух переменных

Рассмотренные ранее зависимости между переменными выражались или уравнением прямой линии или представляли собой плавные кривые, не исключающие возможность нахождения описывающей их математической формулы путем некоторых преобразований, в том числе путем использования неравномерных шкал, спрямляющих эти кривые. Однако бывают случаи, когда спрямления кривых получить не удалось, приходится применять специальные методы, позволяющие отыскать нужную зависимость между переменными и построить математическую модель. Рассмотрим несколько примеров получения математических формул, описывающих искомую зависимость между переменными.

**Пример 1.** Имеется совокупность опытных данных, представленных в табл. 2.7. Найдите зависимость между переменными  $y$  и  $x$ .

Таблица 2.7

$y_i$	50	126	169	191	214	234
$x_i$	121	248	342	414	510	700

Если нанести указанные в табл. 2.7 значения на логарифмическую сетку, то полученная линия будет не прямой, а близкой к пара-



боле (рис. 2.6). Следовательно, можно попробовать найти решение в виде квадратичной функции [20]:

$$\lg y = a \lg^2 x + b \lg x + c.$$

Подставим в это уравнение координаты любой точки графика, обозначив их  $y'$  и  $x'$ :

$$\lg y' = a \lg^2 x' + b \lg x' + c.$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\lg y - \lg y' = a (\lg^2 x - \lg^2 x') + b (\lg x - \lg x').$$

Поделив обе части уравнения на  $\lg x - \lg x'$ , получим

$$\frac{\lg y - \lg y'}{\lg x - \lg x'} = a (\lg x + \lg x') + b = a \lg x + (a \lg x' + b) = Y.$$

Анализируя результат проведенных преобразований, можно сказать, что  $Y$  представляет собой линейную зависимость, поскольку слагаемое  $(a \lg x' + b)$  – постоянная величина, перемещающее прямую линию  $a \lg x$ , угловой коэффициент которой равен  $a$ , параллельно самой себе.

Возьмем точку с координатами  $y' = 50$  и  $x' = 121$  и построим график (рис. 2.7) зависимости  $Y$  от  $x$  в координатах с логарифмической осью по  $x$ , для чего сначала вычислим необходимые данные (табл. 2.8).

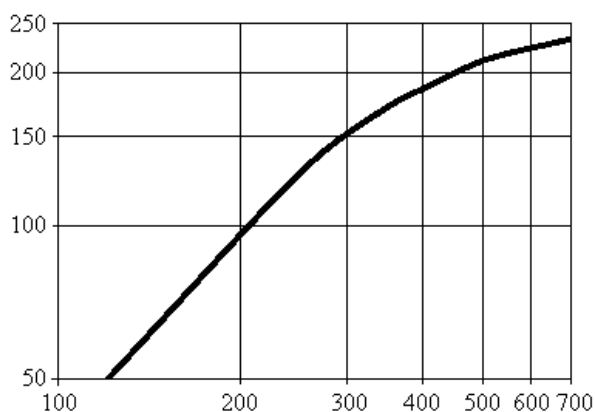


Рис. 2.6. График в системе координат  $\lg y$  и  $\lg x$

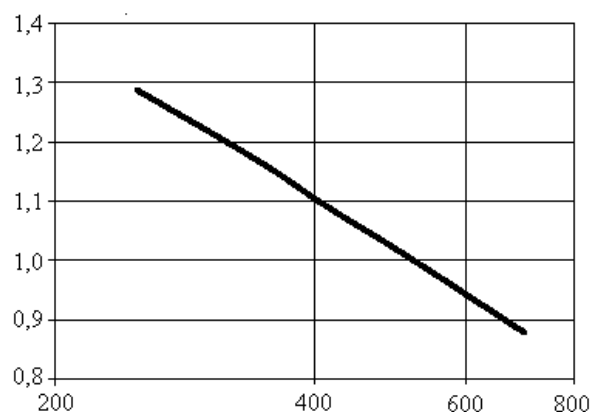


Рис. 2.7. График в системе координат  $Y$  и  $\lg x$

На основании построенного на рис. 2.7 графика можем записать  $Y = m' \lg x + n'$ .

Для нахождения коэффициентов  $m$  и  $n$  разобьем данные на две группы по три и две штуки соответственно и составим систему уравнений:

$$3,5495 = + 7,5455m' + 3n',$$

$$1,8898 = 5,5527m' + 2n',$$

откуда  $n' = 3,4776$  и  $m' = -0,9123$ . Следовательно,

$$\frac{\lg y - 1,699}{\lg x - 2,0828} = 3,4776 - 0,9123 \lg x,$$

$$y = 10^{5,3777 \lg x - 0,9123 \lg^2 x - 5,5441}.$$

Таблица 2.8

$y_i$	$x_i$	$\lg y_i$	$\lg y_i - \lg 50$	$\lg x_i$	$\lg x_i - \lg 121$	$\frac{\lg y - \lg 50}{\lg x - \lg 121}$	$y$	$\delta, \%$
50	121	1,699	—	2,0828	—	—	50	0
126	248	2,1004	0,4014	2,3945	0,3117	1,2878	126,46	0,4
169	342	2,2279	0,5289	2,5340	0,4512	1,1722	167,87	-0,7
191	414	2,2810	0,582	2,6170	0,5342	1,0895	191	0
214	510	2,3304	0,6314	2,7076	0,6248	1,0106	213	-0,5
234	700	2,3692	0,6702	2,8451	0,7623	0,8792	235	0,5

Вычисления по полученной последней формуле, представленные в предпоследнем столбце табл. 2.8, свидетельствуют о хорошем приближении к исходным данным.

**Пример 2.** В табл. 2.9 представлены опытные данные, выражающие зависимость между переменными  $x_i$  и  $y_i$ . Найдите эту зависимость в виде математической формулы.

Построенный по данным из табл. 2.9 график (рис. 2.8) показывает, что при  $8,5 < x < 3$  зависимость представляет собой прямую линию, которая между этими значениями делает выступ. Поэтому логично предположить, что уравнение прямой линии следует дополнить еще одной (дополнительной) функцией, посредством которой удалось бы описать указанный выступ.

Какими же свойствами должна обладать дополнительная функция? Очевидно, что она должна увеличивать соответствующим образом значения переменной  $y_i$  только в промежутке  $3 < x < 8,5$  и практически не изменять величину этой переменной вне этого промежутка. Для этого указанная дополнительная функция должна иметь колоколообразную форму с круто восходящей и спадающей ветвями (рис. 2.9) и ось абсцисс в виде асимптоты. В качестве таковой попробуем использовать функцию  $\varphi$ , похожую на функцию  $\text{secsh}$  (гиперболического секанса):

$$\varphi = \frac{a}{e^{b(x-x_0)} + e^{-b(x-x_0)}},$$

где  $a$  и  $b$  – некоторые коэффициенты, позволяющие видоизменять эту функцию;  $x_0$  – значение  $x$ , при котором величина  $y_i$  максимально удалена от прямой линии ( $y' = mx + n$ ) на графике (см. рис. 2.8).

Таблица 2.9

$x_i$	$y_i$	$y_i'$	$y_i - y_i'$	$\varphi_1$	$y_1$	$\delta_1$	$y$	$\delta$
0,5	0,3	0,305	–	0,001	0,306	2	0,299	–0,48
2	1,1	1,106	–	0,008	1,114	1,3	1,113	1,16
3	1,65	1,64	–	0,032	1,672	1,3	1,673	1,39
4	2,3	2,174	0,126	0,125	2,299	0	2,303	0,12
5	3,2	2,708	0,492	0,438	3,146	–1,7	3,156	–1,38
5,75	3,8	3,109	0,691	0,691	3,8	0	3,802	0,06
6,5	4	3,509	0,491	0,438	3,947	–1,3	3,944	–1,39
7,5	4,15	4,043	0,107	0,125	4,168	0,4	4,169	0,47
8,5	4,6	4,577	–	0,032	4,609	0,2	4,613	0,28
9,5	5,1	5,111	–	0,008	5,119	0,4	5,124	0,47
11	5,9	5,912	–	0,001	5,913	0,2	5,919	0,32

Исходя из этого, запишем уравнение предполагаемой математической модели

$$y = y' + \varphi = mx + n + \frac{a}{e^{b(x-x_0)} + e^{-b(x-x_0)}}.$$

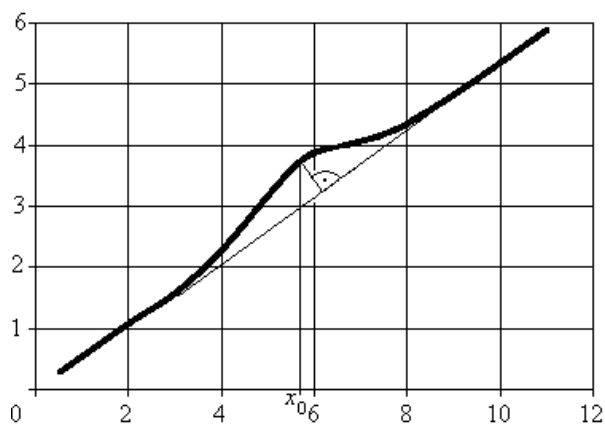


Рис. 2.8. График опытных данных

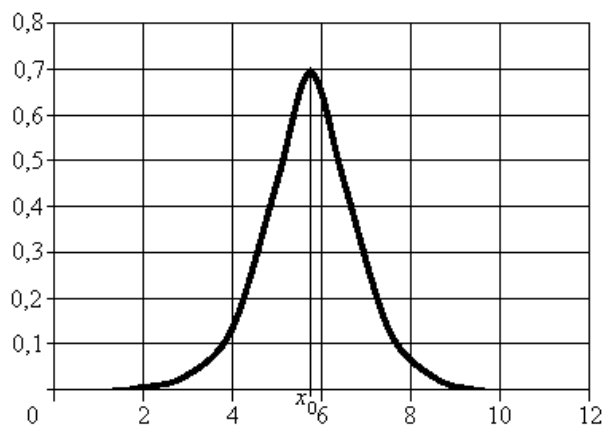


Рис. 2.9. График функции  $\varphi$

Нетрудно догадаться, что максимальное удаление от указанной прямой линии  $y_i$  должно равняться максимуму функции  $\varphi$ , который при  $x = x_0$  равен  $a/2$ . Для нахождения коэффициентов  $a$  и  $b$  сначала среднеарифметическим способом вычислим величины  $m$  и  $n$ , далее — значения функции  $y_i$ , затем найдем разность  $(y_i - \varphi)$ , а потом методом подбора определим  $b$ .

При составлении системы уравнений по среднеарифметическому методу учитываем, что на прямой линии лежат только первые три и последние три точки, поэтому

$$5,5m + 3n - 3,05 = 0;$$

$$29m + 3n - 15,6 = 0.$$

$$m = 0,534 \text{ и } n = 0,038.$$

Максимальная разность значений  $y_i - y_i'$  при  $x_i = 5,75$  составляет 0,691, поэтому  $a = 2 \cdot 0,691 = 1,382$ . Подставим найденное значение коэффициента  $a$  в формулу для  $\varphi$  и примем  $b = 1$ . Вычислив значение этой функции в точках  $x_i = 4$  и  $x_i = 5$ , получим значения  $y_i = 0,233$  и  $y_i = 0,534$ . Аналогичные значения  $y_i$  будут и в точках  $x_i = 6,5$  и  $x_i = 7,5$ . Такое значение коэффициента  $b$  плохо удовлетворяет требуемой величине добавки к  $y_i'$ , поскольку в точках  $x_i = 4$  и  $x_i = 7,5$  эта добавка превышает 0,1 и  $-0,04$  — в точках  $x_i = 5$  и  $x_i = 6,5$ . Если подставить в формулу для  $\varphi$   $b = 1,5$ , то будет уже недостача около 0,03 в точках  $x_i = 4$  и  $x_i = 7,5$  и недостача 0,08 — в точках  $x_i = 5$  и  $x_i = 6,5$ . Следовательно, коэффициент  $b = 1,5$  нужно несколько уменьшить. После нескольких подстановок получаем нужный коэффициент  $b = 1,37$ , при

котором значения  $y_i'$  будут наилучшим образом приближаться к требуемым величинам. При  $x_i = 4$  и  $x_i = 7,5$   $y_i = 0,125$ ; и  $y_i = 0,438$  при  $x_i = 6,5$  и  $x_i = 7,5$ .

Проведем первое вычисление функции  $\varphi$  и  $y$ , после чего найдем относительную погрешность  $\delta$  и запишем полученные результаты в табл. 2.9 под обозначениями  $\varphi_1$ ,  $y_1$  и  $\delta_1$ . В табл. 2.9 представлены результаты указанных вычислений. Анализ этих данных показывает, что относительная погрешность не превосходит 2 %, что является хорошим результатом. Однако при желании можно постараться еще уменьшить эту погрешность. Для этого  $x_0$  следует взять равным 5,735, несколько сместив тем самым функцию  $\varphi$  вдоль оси абсцисс и введя асимметрию этой функции, поскольку асимметрия относительно точки  $x_i = 5,75$  наблюдается и в значениях  $y_i - y_i'$ . Кроме того, необходимо ввести вторую добавочную функцию (уточняющий коэффициент), равную  $0,011g_x$ , уменьшающую функцию  $y$  при первых значениях  $x$  и уменьшить коэффициент  $n$  до значения 0,0335 для симметрирования погрешностей, имеющих разный знак. Таким образом, окончательно математическая модель примет следующий вид:

$$y = 0,534x + 0,0335 + \frac{1,382}{e^{1,37(x-5,735)} + e^{-1,37(x-5,735)}}.$$

Вычисления по этой формуле также представлены в табл. 2.9, относительная погрешность не превышает 1,4 %.

**Пример 3.** На рис. 2.10 представлен график зависимости между опытными данными, приведенными в табл. 2.10.

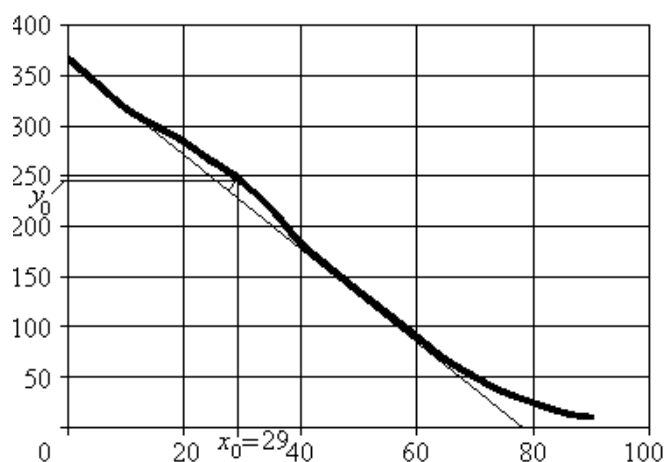


Рис. 2.10. График опытных данных

Как видно из графика (см. рис. 2.10) точки  $x_i$ , соответствующие значениям 0, 5, 10 и 45, 50, 55, 60, 65, лежат на одной прямой. Точки с координатами  $x_i = 15, 20, 25, 30, 35, 40$  образуют выпуклость, а точки 70, 75, 85 и 90 монотонно удаляются от этой прямой. В результате проведенного анализа полагаем, что имеющуюся зависимость можно описать функцией вида

$$y = mx + n + \varphi + \eta = mx + n + \frac{a}{e^{b(x-x_0)} + e^{-b(x-x_0)}} + \eta.$$

Таблица 2.10

$x_i$	$y_i$	$y_i'$	$y_i - y_i'$	$\varphi$	$\eta$	$y$	$\delta, \%$
0	367	367	0	0,238	0,002	367,2	0
5	342	343,9	-1,9	0,531	0,003	344,4	0,7
10	317	320,8	-3,8	1,181	0,006	322	1,6
15	300	297,7	2,3	2,624	0,01	300,3	0,1
20	284	274,7	9,3	5,776	0,02	280,5	-1,2
25	263	251,6	11,4	11,788	0,03	263,4	0,15
30	244	228,5	15,5	15,643	0,06	244,2	0,1
35	217	205,4	11,6	8,102	0,104	213,6	-1,6
40	183	182,3	0,7	2,482	0,185	185	1,1
45	159	159,2	-0,2	0,687	0,33	160,2	0,8
50	135	136,2	-1,2	0,188	0,586	137	1,5
55	113	113,1	-0,1	0,051	1,042	114,2	1
60	90	90	0	0,014	1,854	91,9	2
65	67	66,9	0,1	0,004	3,296	70,2	4,7
70	50	43,8	6,2	0,001	5,861	49,7	-0,6
75	31	20,7	10,3	0	10,423	31,1	0,3
85	8	-25,4	33,4	0	32,961	7,6	-5
90	10	-48,5	58,5	0	58,614	10,1	1

В качестве  $\varphi$  берем функцию, похожую на гиперболический секанс:  $\varphi = \frac{a}{e^{b(x-x_0)} + e^{-b(x-x_0)}}$ , а вид добавочной функции  $\eta$  установим позже.

Поскольку при  $x_i = 0$   $y_i = 367$ , то коэффициент  $n = 367$ . Коэффициент  $m$  найдем из треугольника, взяв точку с координатами  $x_i = 60$   $y_i = 90$ :

$$m = \frac{367 - 90}{60} = -4,617.$$

Отсюда  $y' = -4,617x + 367$ . Заметим, что знак « $\leftarrow$ » определяется наклоном прямой (см. рис. 2.10). Вычисляем значения  $y_i'$  по этому уравнению прямой, а затем – максимальную разность величин  $y_i - y_i'$ . По графику (см. рис. 2.10) находим максимум функции, которому соответствует точка с координатами  $x_i = 29$ ,  $y_i = 243$ . Для значений  $x_i = 29$ ,  $y_i' = 233$ , а  $y_i - y_i' = -10$ , т. е. получается, что наибольшую величину добавки к значениям функции  $y_i'$  нужно производить в точке с  $x_i = 30$ , поэтому принимаем коэффициент  $a = 31$ .

Методом подбора определяем  $b = 0,16$ . Для создания асимметрии относительно точки  $x_i = 30$  в первом слагаемом знаменателя функции  $\varphi$  берем коэффициент  $b = 0,26$ , а во втором слагаемом увеличиваем  $x_0$  до 31, и поднимаем коэффициент  $a$  до 34. В результате получается следующее:

$$\varphi = \frac{34}{e^{0,26(x-30)} + e^{-0,16(x-31)}}.$$

Вычисленные значения этой функции приведены в табл. 2.10.

Для определения вида функции  $\eta$  построим зависимость  $y - y_i' = f(x_i)$  для точек  $x_i = 70, 75, 85, 90$  в полулогарифмической сетке (рис. 2.11).

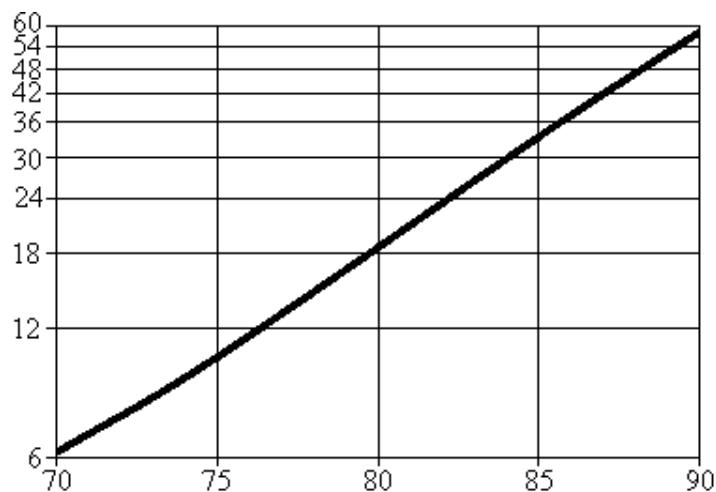


Рис. 2.11. График функции  $\eta$

Поскольку указанная зависимость получилась в виде прямой линии, то запишем

$$\lg(y - y'_i) = cx + d.$$

Составим систему из трех уравнений, используя координаты точек с  $x_i = 75, 85$  и  $90$ :

$$\lg(10,3) = 75x + d;$$

$$\lg(33,4) = 85x + d;$$

$$\lg(58,5) = 90x + d.$$

Решая полученную систему уравнений, находим  $c = 0,05$  и  $d = -2,732$ ,  $\eta = 10^{0,05x - 2,732}$ .

Результаты вычислений значений этой функции представлены в табл. 2.10. После этого находим значения  $y$  путем сложения второго, пятого и шестого столбцов табл. 2.10, т. е. по формуле  $y = \varphi + \eta$ , или в развернутом виде

$$y = mx + n + \frac{34}{e^{0,26(x-30)} + e^{-0,16(x-31)}} + 10^{0,05x - 2,732}.$$

Относительная погрешность  $\delta$  (последний столбец табл. 2.10) свидетельствует о достаточно удовлетворительном описании полученной математической моделью исходных данных, средняя величина этой погрешности не превосходит 1,3 %.

Для некоторого уменьшения погрешности можно сделать значение коэффициента  $d$  равным 2,73, увеличив тем самым значение функции  $\eta$  в последних точках и снизив погрешность в точке  $x_i = 85$  до 4 %.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Для чего строят графическое изображение зависимости между двумя переменными?
2. Назовите главное требование к математической модели.
3. Что такое интерпретируемость предлагаемого аналитического описания?



4. В чем заключается суть среднеарифметического метода?

5. Какой из четырех способов следует выбирать для получения более точных результатов при решении системы уравнений вида

$$a_1m + b_1n - c_1 = 0;$$

$$a_2m + b_2n - c_2 = 0?$$

6. Прологарифмируйте уравнение  $y = ne^{mx}$ .

7. Чему равен  $\lg(0)$ ?

8. В чем заключаются специальные методы нахождения формул для двух переменных?

9. Для чего применяются добавочные функции при использовании специальных методов нахождения формул для двух переменных?

## Глава 3

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ

#### 3.1. Автоматическая коррекция показаний пирометра при высоких температурах

Принцип работы пирометра основан на измерении термоЭДС, которая возникает при нагреве термопары. Погруженная в атмосферу горячих газов часть термопары испускает, как и всякое нагретое твердое тело, тепловое излучение в окружающее более холодное пространство. В результате пирометр показывает не температуру окружающих его газов, а более низкую температуру тела термопары. Впервые о необходимости введения поправки на радиацию пирометра было указано в работе С. П. Сыромятникова [3]. Величина этой поправки с достаточной точностью может быть выведена аналитическим путем. В указанной работе приведены температура пирометра  $t_{\text{п}}$  и измеряемая им действительная температура газов  $t_{\text{г}}$  для нулевого коэффициента конвекционного теплообмена между газом и поверхностью термопары пирометра (табл. 3.1).

*Таблица 3.1*

$t_{\text{п}}$	200	250	300	350	400	500	600	700	
$t_{\text{г}}$	200	275	342	407	469	588	705	820	
$\Delta t$	0	25	42	57	69	88	105	120	
$\Delta t'$	51,46	58,28	65,09	71,91	78,72	92,35	105,98	119,61	
$t_{\text{к}}$	199,9	274,2	342,6	407	468,9	588	704,1	818,8	
$\delta, \%$	-0,05	-0,29	0,17	0	-0,02	0	-0,13	-0,15	
$t_{\text{п}}$	800	900	1000	1100	1200	1300	1400	1500	
$t_{\text{г}}$	934	1048	1162	1275	1388	1502	1614	1728	
$\Delta t$	134	148	162	175	188	202	214	228	
$\Delta t'$	133,24	146,87	160,5	174,13	187,76	201,39	215,02	228,65	
$t_{\text{к}}$	932,9	1046,7	1160,4	1274,1	1387,7	1501,4	1615	1728,6	
$\delta, \%$	-0,12	-0,12	-0,13	-0,07	-0,02	-0,04	0,06	0,04	

Найдем разность температур  $\Delta t = t_{\text{г}} - t_{\text{п}}$  и построим по полученным данным график функции  $\Delta t = f(t_{\text{п}})$  (рис. 3.1). Из этого графика

видно, что, начиная с точки  $x_i = 600$ , указанная зависимость может быть описана прямой линией вида  $\Delta t' = f(t_{\Pi}) = mx + n$ . Вычислим описанными ранее способами коэффициенты этой функции ( $m = 0,1363$ ;  $n = 24,2$ ) и ее значения, которые необходимо занести в табл. 3.1. Далее находим разность между значениями функции  $\Delta t'$  и  $t_{\Pi}$  для точек  $x_i = 200, 250, 300, 350, 400$  и  $500$ , которые не лежат на указанной прямой линии. Эта разность с соответствующими значениями  $- 51,46$ ;  $33,28$ ;  $23,09$ ;  $14,91$ ;  $9,72$  и  $4,35$  – на полулогарифмической сетке отображается в прямую линию (рис. 3.2).

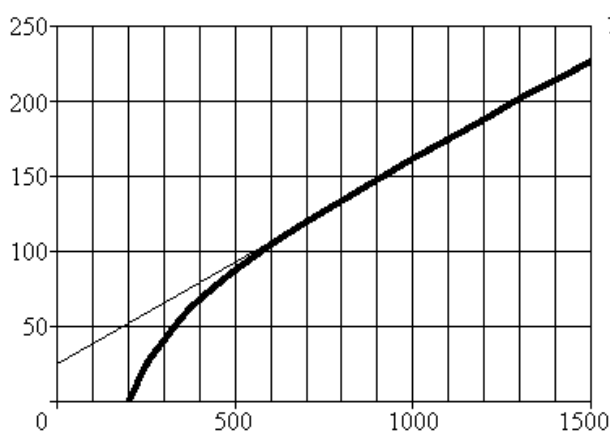


Рис. 3.1. График опытных данных  
 $\Delta t = f(t_{\Pi})$

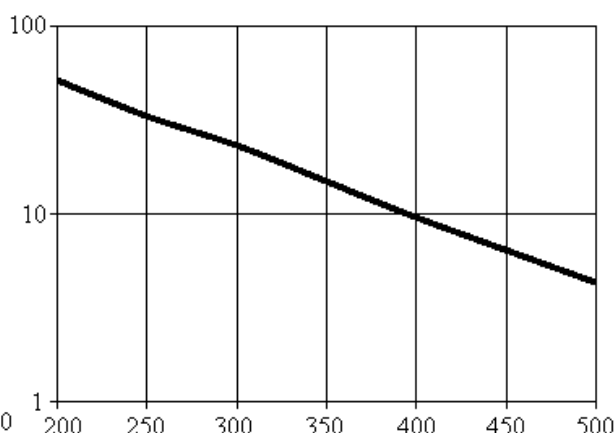


Рис. 3.2. График функции  
 $(t_2' - t_2) = f(t_{\Pi})$

Составим систему уравнений исходя из того, что  $\sum \lg(t_r' - t_r) = m \sum x + n$ :

$$4,597 = 750a + 3b;$$

$$2,799 = 1250a + 3b.$$

В результате решения этой системы получим  $a = -0,0036$  и  $b = 2,4323$ , следовательно,  $t_r' - t_r = 10^{2,4323 - 0,0036 t_{\Pi}}$ .

После этого вычислим температуру с требуемой поправкой, т. е. откорректированной с помощью математической модели температуры  $t_k$ :  
 $t_{\Pi} = t_{\Pi} + 0,1363 t_{\Pi} + 24,2 - 10^{2,4323 - 0,0036 t_{\Pi}} = 1,1363 t_{\Pi} + 24,2 - 10^{2,4323 - 0,0036 t_{\Pi}}$ .

Относительная погрешность полученной математической модели не превосходит 0,3 %. Если пирометр снабдить вычислительным устройством, производящим подсчет параметров по данной формуле,

то можно отказаться от таблицы с поправками, которую используют для повышения достоверности отсчетов. Заметим, что величина поправки зависит еще и от коэффициента конвекционного теплообмена между газом и поверхностью термометра пирометра, поэтому для других значений указанного коэффициента можно аналогичным образом построить математические модели.

### 3.2. Измерение температуры кипящей воды в барабане парового котла

Измерение температуры кипящей воды в барабане парового котла непосредственно предназначенными для этого приборами (датчиками) связано с рядом трудностей. Во-первых, на поверхностях деталей, погруженных в воду, появляется накипь, что искажает показания прибора и уменьшает срок его службы. Во-вторых, давление в котлах может быть очень высоким, что также отрицательно сказывается на работе этих приборов. Поэтому измерение целесообразнее провести косвенным образом с помощью прибора для измерения давления пара, который не содержит загрязняющих частиц, а давление его равномерно одинаково во всех направлениях, что позволяет устанавливать этот прибор в любом удобном месте. Существуют таблицы опытных данных зависимости температуры водяного пара от давления, выдержка из которых представлена в табл. 3.2.

Таблица 3.2

$p$	15	16	17	18	19	20	21	22
$t$	197,36	200,43	203,35	206,14	208,81	211,38	213,85	216,23
$t'$	197,4	200,44	203,34	206,12	208,79	211,35	213,82	216,2
$\delta', \%$	0,019	0,005	-0,003	-0,009	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01
$t''$	197,36	200,42	203,32	206,12	208,79	211,35	213,82	216,2
$\delta'', \%$	0	-0,005	-0,009	-0,009	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01
$p$	23	24	25	26	27	28	29	30
$t$	218,53	220,75	222,9	224,99	227,01	228,98	230,89	232,76
$t'$	218,5	220,73	222,88	224,98	227,01	228,99	230,92	232,79
$\delta', \%$	-0,01	-0,01	-0,007	-0,005	0	0,005	0,01	0,01
$t''$	218,5	220,72	222,88	224,97	227	228,97	230,89	232,76
$\delta'', \%$	-0,01	-0,01	-0,007	-0,009	-0,005	-0,003	0	0

Анализ указанных данных показывает, что величина температуры кипения воды  $t$ , или температуры насыщенного водяного пара (температура кипения жидкости есть одновременно температура ее насыщенного пара при данном давлении), прямо пропорциональна корню четвертой степени из величины давления  $p$  пара. Действительно, если взять, например,  $p = 16$  и  $20$ , то грубо  $t = 100\sqrt[4]{16} = 200$  и  $t = 100\sqrt[4]{20} = 211,47$ .

На основании сделанных предположений построим график зависимости между опытными данными, используя на оси абсцисс неравномерную шкалу  $\sqrt[4]{p}$  (рис. 3.3). Из этого графика видно, что точки легли по прямой линии. Это подтверждает высказанные предположения и позволяет искать математическую зависимость в виде

$$\sum t' = m \sum \sqrt[4]{p} + sn.$$

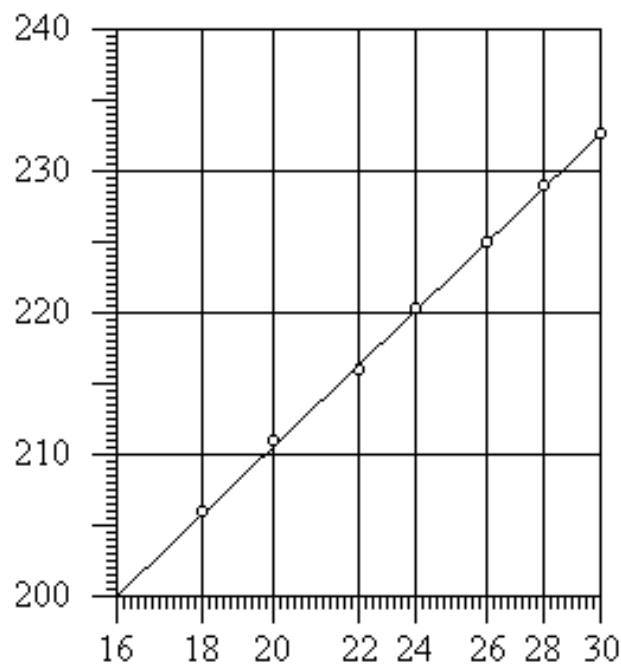


Рис. 3.3. График опытных данных со шкалой  $\sqrt[4]{p}$  по оси абсцисс

Любым из описанных выше способов находим  $m = 95,075$  и  $n = 10,29$ , вычисляем  $t'$ , относительную погрешность  $\delta'$  и заносим полученные данные в таблицу (табл. 3.2). Проведенные вычисления показывают очень высокую точность этой математической модели, поскольку  $\delta'$  не превосходит сотых долей процента.

Если, используя опытные данные, построить график в логарифмической сетке, то он примет вид прямой линии (рис. 3.4). Это дает возможность предположить, что эту же зависимость опытных данных можно смоделировать и с помощью другой модели вида  $t'' = np^m$ .

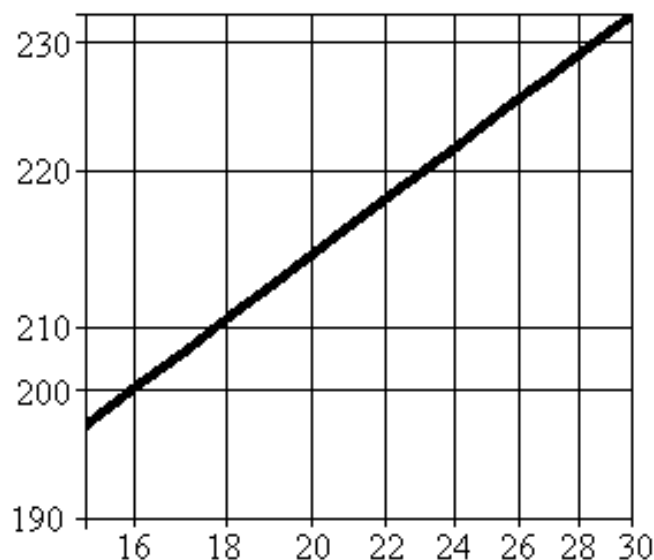


Рис. 3.4. График опытных данных в логарифмической сетке

Для нахождения коэффициентов  $m$  и  $n$  можно поступить следующим образом. Возьмем две любые точки, например, с координатами  $p = 16$ ;  $t = 200,43$  и  $p = 22$ ;  $t = 216,23$ , вычислим логарифмы этих координат и найдем коэффициент  $m$  по формуле

$$m = \frac{2,334916 - 2,325064}{1,342423 - 1,30103} = \frac{0,009852}{0,041393} = 0,238.$$

Для нахождения  $n$  подставим в формулу для  $t''$  значение  $t = 216,23$  и получим  $216,23 = 22^{0,238}n$ , откуда  $n = 103,6$ . Окончательно математическая модель примет вид  $t'' = 103,6p^{0,238}$ .

Вычисления по последней формуле также представлены в табл. 3.2, относительная погрешность  $\delta''$  также не превосходит сотых долей процента, что свидетельствует о хорошей адекватности и этой модели, однако по сравнению с первой данная математическая модель представляется более компактной и удобной в случае дальнейшего ее использования в других математических моделях.

Таким образом, имея прибор для измерения давления с вычислительным устройством, можно, кроме измерения давления, получать и температурный параметр.

### 3.3. Определение коэффициента избытка воздуха по данным автоматических газоанализаторов

Известно, что процесс сгорания топлива сопровождается постоянным подведением в топку окислителя – кислорода, составляющего по массе 0,236 части воздуха. Если топливо содержит  $C$  весовых процентов углерода, то для обеспечения его полного сгорания в углекислоту необходимо подать в топку требуемое согласно реакции  $C + O_2 = CO_2$  количество кислорода. Поэтому для сгорания одной весовой части углерода требуется  $32/12 = 8/3$  весовых частей кислорода, а на  $C/100$  кг весовых частей углерода, содержащегося в топливе, соответственно потребуется  $\frac{8}{3} \frac{C}{100}$  кг кислорода. При горении водорода

согласно реакции  $2H_2 + O_2 = 2H_2O$  потребуется 8 весовых частей кислорода, а для содержащихся в топливе  $H/100$  весовых частей водорода необходимо подать  $8 \frac{H}{100}$  кг кислорода. Аналогично для сгорания

серы ( $S + O_2 = SO_2$ ) требуется  $\frac{S}{100}$  кг кислорода. В результате этого

количество кислорода, подаваемое для полного сгорания топлива, будет равно  $\frac{1}{100} \left( \frac{8}{3}C + 8H + S \right)$  кг. При наличии в топливе  $O$  % кислорода,

количество подводимого в топку кислорода соответственно уменьшается и составляет  $\frac{1}{100} \left( \frac{8}{3}C + 8H + S - O \right)$  кг. Отсюда теорети-

чески необходимое количество подаваемого в топку воздуха для полного сгорания топлива

$$L_0 = \frac{1}{0,236 \cdot 100} \left( \frac{8}{3}C + 8H + S - O \right),$$

где  $L_0$  – теоретически необходимое количество воздуха, которое следует подать в топку для полного сгорания килограмма топлива, кг/кг.

Например, для угля, имеющего состав  $72C + 4,9H + 6,4O + 3S + 4,8W$ ,

$$L_0 = \frac{1}{0,236 \cdot 100} \left( \frac{8}{3}72 + 8 \cdot 4,9 + 3 - 6,4 \right) = 9,65 \text{ кг/кг.}$$

Поскольку на практике для полного сгорания топлива подают несколько большее количество воздуха, определяемое коэффициентом избытка воздуха  $\alpha$ , то действительный расход воздуха выразится

$$L_{\text{в}} = \alpha \frac{1}{23,6} \left( \frac{8}{3} C + 8H + S - O \right).$$

Имеется ряд формул, которые пригодны для любого топлива и состава дутья, например формула, данная в работе [4], но по причине необходимости применения в них параметров состава сжигаемого топлива, использование их для автоматической оценки коэффициента избытка воздуха и определения состава продуктов горения не приемлемо.

Известна также формула, позволяющая находить коэффициент избытка воздуха по составу в продуктах горения трех газов:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 3,76 \frac{O_2 - 0,5CO}{N_2}}. \quad (3.1)$$

Как видно из выражения (3.1), для нахождения  $\alpha$  требуются три газоанализатора, что усложняет конструкцию прибора.

При сборе информационных данных о составе дымовых газов с помощью автоматических газоанализаторов нужно использовать такой метод определения этих параметров, который обеспечивал бы приемлемую точность при относительной простоте их получения.

Например, для нахождения действительного расхода воздуха при топочном процессе можно воспользоваться данными о составе дымовых газов, определив в них процентное содержание углекислого газа, окиси углерода.

При относительно постоянном значении  $N_2$  коэффициент избытка воздуха зависит только от разности величин  $O_2$  и  $0,5 \cdot CO$ . Это дало возможность построить номограмму для определения  $\alpha$  по величинам  $O_2$  и  $CO$  для разных значений  $N_2$  [5]. Зависимости  $\alpha = f(O_2, CO)$  для различных  $N_2$  имеют вид кривых, которые практически сливаются в одну в области величин для  $O_2$ , меньших 12 % (рис. 3.5).



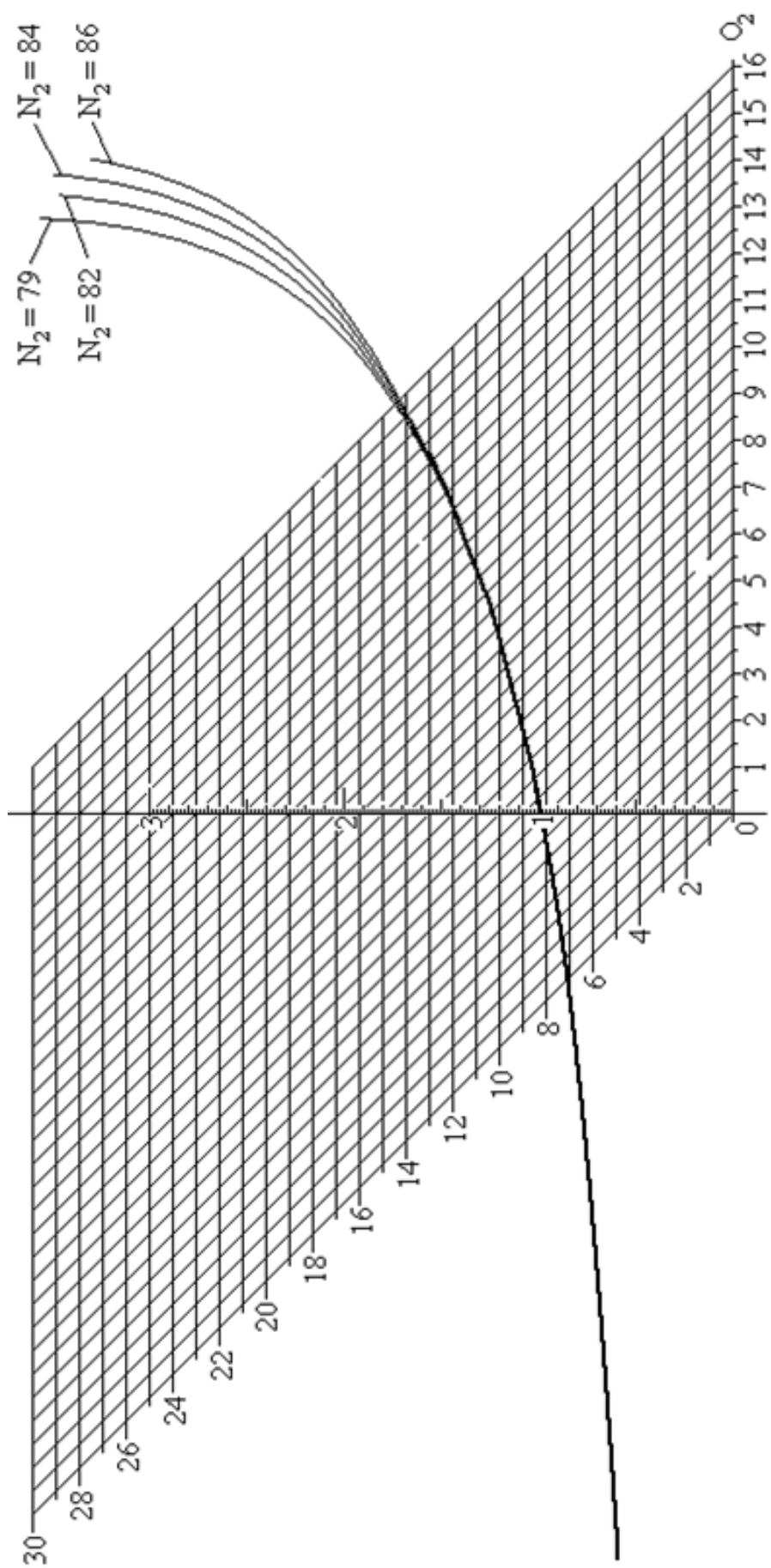


Рис. 3.5. Номограмма для определения коэффициента избытка воздуха по данным газового анализа

Номограмма позволяет по данным  $O_2$  и  $CO$  найти коэффициент избытка воздуха. Для этого из точки перекрещивания линий  $O_2$  и  $CO$  (лежащей выше оси  $O_2$ ) проводят вертикаль до пересечения с кривой. Затем из точки пересечения проводят горизонталь к оси  $\alpha$  и получают величину коэффициента избытка воздуха.

Исходя из этого и учитывая, что наиболее вероятное содержание кислорода в продуктах горения не превышает 10 – 12 %, предлагается описывать начальную часть кривых, изображенных на рис. 3.5, следующим выражением, вывод которого читателю предлагается сделать самостоятельно:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 4,64 \cdot 10^{-2} \left( O_2 - \frac{CO}{2} \right)}. \quad (3.2)$$

Сравним коэффициенты  $\alpha$ , рассчитанные по формулам (3.1) и (3.2) при сжигании угля марки ПЖ, имеющего следующий состав:  $71,4C + 4,3H + 3,9O + 2,5S + 4W + 1,3N + 12,6A$ , пользуясь данными газового анализа продуктов сгорания (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Состав продуктов сгорания, %			Коэффициент избытка воздуха $\alpha$ по формуле		Абсолютная погрешность, %	Относительная погрешность, %
$CO_2$	$O_2$	$CO$	(3.1)	(3.2)		
17,2	2,5	0,2	1,13	1,13	0	0
12,31	7,14	0,0	1,5	1,49	-0,01	-0,7
9,18	10,66	0,0	2,0	1,98	-0,02	-1,0

Как видно из табл. 3.3, с увеличением  $O_2$  в продуктах сгорания возрастает и погрешность определения  $\alpha$  по формуле (3.2), однако величина погрешности является вполне удовлетворительной. Следовательно, для вычисления коэффициента избытка воздуха достаточно двух газовых анализаторов, позволяющих определять содержание  $CO$  и  $O_2$  в продуктах сгорания.

Таким образом, математическая модель (3.2) с достаточной точностью позволяет определять коэффициент избытка воздуха без использования данных о составе сжигаемого топлива, имея в наличии только значения  $O_2$  и  $CO$  в дымовых газах, что обуславливает построение на ее основе устройств автоматического управления топочным процессом.

### 3.4. Моделирование работы барометра

При проектировании приборов, измеряющих барометрическое давление, необходимо знать вид зависимости между переменными, чтобы представлять себе, например, каким образом измерить эту зависимость, равномерная или неравномерная шкала будет у прибора и т. п.

Для примера найдем зависимость изменения барометрического давления от высоты над уровнем моря. Предположим, что  $p$  – это давление на горизонтальную единичную площадку на высоте  $h$ , а  $p + dp$  – давление на такую же площадку на высоте  $h + dh$ . Разность этих давлений будет равна весу столба воздуха высотой  $dh$ , т. е.  $dp = -\rho g dh$ . Обозначим через  $\rho_0$  плотность воздуха при давлении  $p_0$ ,

тогда  $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$ , откуда  $\rho = \frac{p\rho_0}{p_0}$ .

Подставляя это значение в дифференциальное уравнение, получим

$$dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \frac{dp}{p}.$$

Примем высоты указанных площадок соответственно  $h_1$  и  $h_2$  и величины давлений на них –  $p_1$  и  $p_2$ ; разделяя переменные, будем иметь

$$\int_{h_1}^{h_2} dh = -\frac{p_0}{\rho_0 g} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}.$$

Решая интеграл, получим

$$h_2 - h_1 = -\frac{p_0}{\rho_0 g} (\ln p_2 - \ln p_1) = \frac{p_0}{\rho_0 g} \ln \frac{p_1}{p_2} = k \ln \frac{p_1}{p_2},$$

где  $k$  – постоянный коэффициент.

Если принять за нулевую отметку над уровнем моря  $h_1 = 0$ , то

$$h = k \ln \frac{p_1}{p_2},$$

т. е. по показаниям барометра можно определять высоту подъема относительно уровня моря, при этом шкала барометра не будет линейной.

### 3.5. Моделирование работы ингалятора

Для детей дошкольного и младшего школьного возраста лечение ингаляцией связано с рядом трудностей, обусловленных, в первую очередь, их повышенной эмоциональной и двигательной возбудимостью, из-за чего для лечебной процедуры практически не представляется возможным использовать дыхательную маску, соединительную трубку (мундштук) или носовой наконечник (канюлю), которых ребенок боится, поэтому начинает капризничать и плакать. В связи с этим был разработан метод аэрозольного лечения, основанный на дистанционном воздействии на пациента аэрозольной лекарственной струей, сформированной из последовательности вихревых колец. Такие кольца, имея очень малую начальную скорость (около 1 м/с), могут бесшумно перемещаться с сохранением своей формы на расстояние до 5 м в зону носогубного треугольника на лице пациента, ограниченную ртом, носогубными складками и носом, создавая в этой зоне лечебную воздушно-лекарственную смесь для последующего вдыхания. Благодаря этому ребенок ведет себя спокойно, не осознавая при этом, что он принимает лечебную процедуру, которую таким методом можно проводить даже для спящего пациента.

Для обеспечения подачи вихревых колец в указанную зону, т. е. для правильной настройки ингалятора и согласования работы последнего с пациентом, важно знать расстояние, которое может пройти вихревое кольцо в зависимости от его начальной скорости. Для этого необходимо иметь математическую модель движения аэрозольного кольца, позволяющую вычислить все необходимые параметры.

На рис. 3.6 показана схема формирования аэрозольной струи из вихревых колец. Лечебный аэрозоль 1, выходя из отверстия 2 устройства 3 формирования струи, закручивается в вихревые кольца 4, движущиеся в зону 5 носогубного треугольника головы 6 ребенка. Ребенок вдыхает воздушно-лекарственную смесь обычным для себя способом – через нос и/или рот.

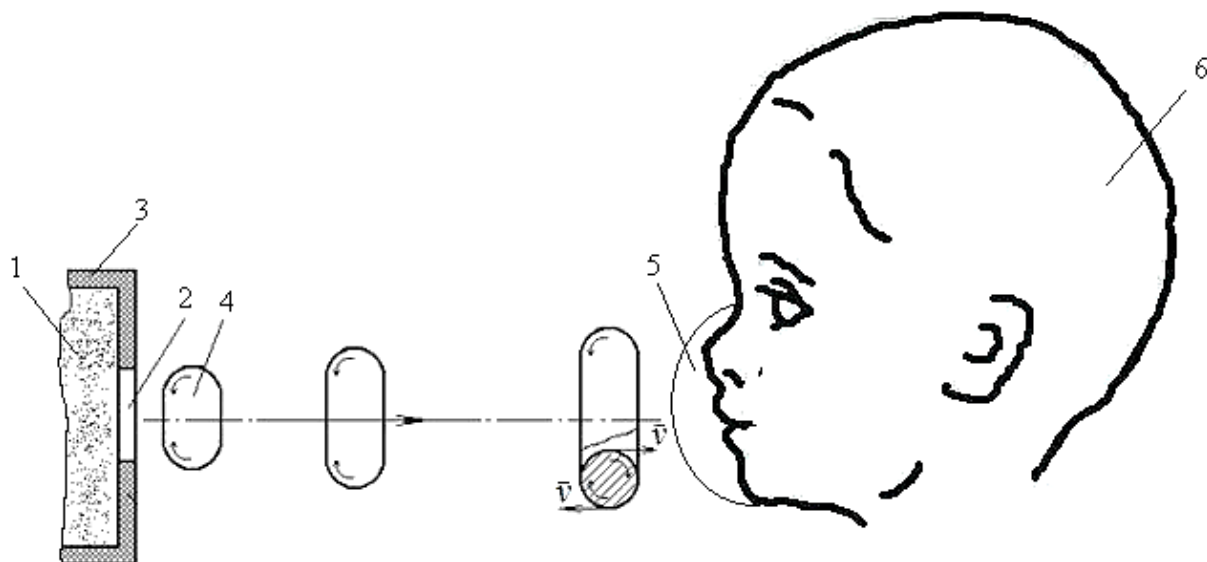


Рис. 3.6. Схема формирования аэрозольной струи из вихревых колец

Пусть в сечении 0-0 сформировано аэрозольное кольцо, имеющее скорость  $u_0$ , к которому подсасывается окружающий воздух со скоростью  $v_0$ . В процессе движения кольцо смешивается с воздухом (растворяется в нем), образуя смесь (рис. 3.7).

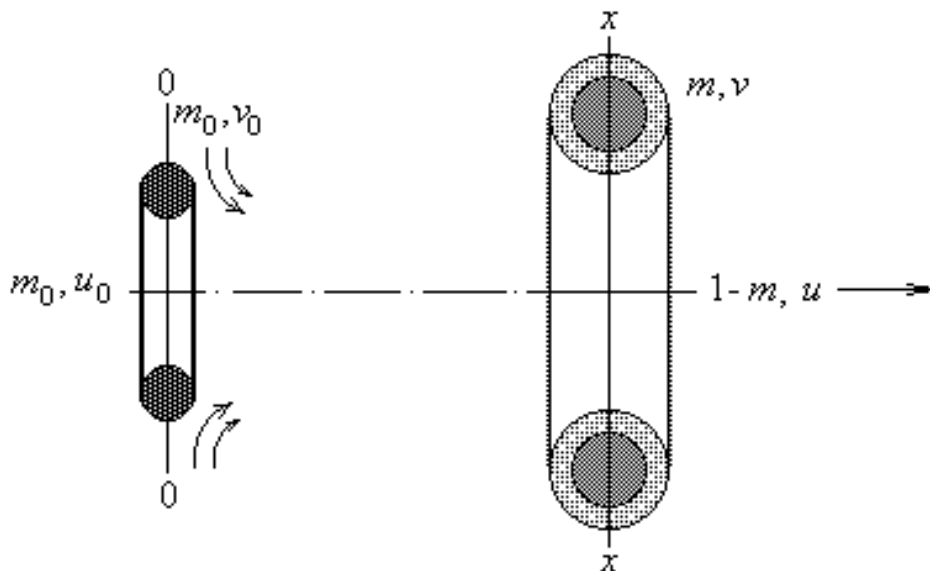


Рис. 3.7. Схема движения аэрозольного кольца

Требуется найти зависимость между давлением  $p$  в сечении  $x$  и начальным давлением  $p_0$  в сечении 0-0, а также определить расстоя-

ние, на котором произойдет смешение кольца с воздухом до заданного значения порозности (объем среды, окружающий аэрозоль, на единицу объема пространства в данном сечении).

Аэрозоль смешивается с воздухом в процессе его движения путем молекулярной диффузии турбулентных пульсаций. Скорость этого смешивания (проникновения) будет зависеть от величины поверхности соприкосновения  $S$  объемов неперемешанного аэрозоля и окружающей его смеси, от разности концентраций в указанных объемах и смеси, а также от интенсивности массообмена с окружающей средой.

Исходя из закона сохранения массы

$$\begin{aligned} \rho_a u_0 (1 - m_0) + \rho_v v_0 m_0 &= \rho_{см} v m + \rho_a u (1 - m), \\ \rho_a u_0 (1 - m_0) &= \rho_a u (1 - m) + c_a v m, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\rho_a$ ,  $\rho_v$ ,  $\rho_{см}$  – плотность аэрозоля, воздуха и смеси соответственно, кг/м<sup>3</sup>;  $u$ ,  $v$  – средние скорости движения аэрозоля и смеси в данном сечении (нулевой индекс соответствует исходному сечению, в котором происходит формирование кольца, еще не перемешанного с воздухом), м/с;  $m_0$  и  $m$  – порозность в исходном и данном сечении;  $c_a$  – концентрация аэрозоля в смеси, кг/м<sup>3</sup>.

Скорость смешивания в бесконечно малом объеме выразится

$$-\frac{d(c_a v m)}{dx} = S q, \quad (3.4)$$

где  $S$  – величина поверхности объемов неперемешанного аэрозоля и окружающей его смеси, зависит от порозности и среднего радиуса  $r$  объема неперемешанного аэрозоля в данном сечении, м<sup>-1</sup>;  $q$  – интенсивность массообмена, кг/(м<sup>2</sup> · с). Знак минус указывает, что градиент концентрации отрицательный.

Величина поверхности может быть выражена известной формулой

$$S = \frac{3(1 - m)}{r}. \quad (3.5)$$

Интенсивность  $q$  можно учесть через суммарный коэффициент массообмена  $\beta$ :

$$q = \frac{\beta}{1 + \frac{\beta \delta}{D}} (\rho_a - c_a), \quad (3.6)$$

где  $\delta$  – толщина слоя на границе неперемешанного аэрозоля, через который он проникает в смесь путем молекулярной диффузии и турбулентных пульсаций, м;  $D$  – коэффициент молекулярной диффузии, м<sup>2</sup>/с. Полагая, что молекулярная диффузия действует во всем объеме неперемешанного аэрозоля, примем  $\delta \approx r/3$ .

Из уравнения состояния газовой среды для сечения на расстоянии  $x$  можно записать  $p = \rho_x R_x T_x$ , где  $\rho_x$ ,  $R_x$ ,  $T_x$  – соответственно средняя плотность (кг/м<sup>3</sup>), средняя газовая постоянная (Дж/кг · К) и средняя температура (К) для аэрозоля и смеси.

Средняя плотность  $\rho_x$  выразится

$$\rho_x = \frac{\rho_a u (1 - m) + \rho_{см} v m}{u (1 - m) + v m}. \quad (3.7)$$

Плотность смеси может быть найдена через концентрации  $c_a$  и  $c_b$  аэрозоля и воздуха в смеси:

$$\rho_{см} = c_a + c_b. \quad (3.8)$$

Причем из соотношения  $\frac{c_a}{\rho_a} + \frac{c_b}{\rho_b} = 1$  получим

$$c_b = \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \rho_b. \quad (3.9)$$

Подставляя выражение (3.9) в уравнение (3.8), получим

$$\rho_{см} = c_a + \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \rho_b.$$

Средняя газовая постоянная  $R_x$  для сечения  $x$

$$R_x = \frac{\rho_{см} R_{см} v m + \rho_a R_a u (1 - m)}{\rho_{см} v m + \rho_a u (1 - m)}. \quad (3.10)$$

Газовая постоянная смеси будет определяться концентрациями аэрозоля и воздуха в смеси и их газовыми постоянными. Поэтому

$$R_{см} = \frac{c_a}{\rho_{см}} R_a + \left(1 - \frac{c_a}{\rho_a}\right) \frac{\rho_b}{\rho_{см}} R_b.$$

Соотношение давлений в начальном сечении и на расстоянии  $x$  от него с учетом выражений (3.7) и (3.10) будет иметь вид

$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\rho_0 R_0} \frac{T_x}{T_0} \frac{\rho_{\text{см}} R_{\text{см}} v m + \rho_a R_a u (1-m)}{u(1-m) + v m}. \quad (3.11)$$

Если принять  $T_x \approx T_0$  и учесть, что в конце смешения  $m \rightarrow 1$ , то для завершающей стадии процесса смешения уравнение (3.11) примет

вид 
$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho_{\text{см}} R_{\text{см}}}{\rho_0 R_0}.$$

Заметим, что при движении кольца его скорость изменяется незначительно.

Если принять скорость движения воздуха и кольца одинаковыми ( $v = u$ ) и постоянными, то уравнения (3.3) и (3.4) примут вид

$$\rho_a (1 - m_0) = \rho_a (1 - m) + c_a m, \quad (3.12)$$

$$\frac{ud(c_a m)}{dx} = Sq. \quad (3.13)$$

Из уравнения (3.12)

$$c_a = \rho_a \left(1 - \frac{m_0}{m}\right). \quad (3.14)$$

Подставляя выражения (3.5), (3.6), (3.14) в уравнение (3.13) и разделяя переменные, получим

$$\frac{m}{1-m} dm = \frac{3}{r} \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\beta r}{3D}\right) u} m_0 dx. \quad (3.15)$$

Проинтегрируем левую часть выражения (3.15):

$$\int \frac{m}{1-m} dm = -m - \ln(1-m) + C.$$

Вычислив постоянную интегрирования  $C = 1 + \ln(1 - m_0)$ , получим окончательный вид математической модели, позволяющий произвести расчет необходимых для работы ингалятора параметров и правильно настроить ингаляционный аппарат для работы с пациентом:

$$\ln \frac{1-m_0}{1-m} + 1 - m = \frac{3}{r} \frac{\beta}{\left(1 + \frac{\beta r}{3D}\right) u} m_0 x. \quad (3.16)$$



Средний радиус  $r$  объема неперемешанного аэрозоля может быть найден следующим образом:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha_m} + \frac{\delta}{D}, \quad (3.17)$$

где величина  $1/\alpha_m$  представляет собой «сопротивление» турбулентного переноса, а величина  $\delta/D$  – «сопротивление» молекулярной диффузии. Так как величина  $\alpha_m \gg D/\delta$ , то из выражения (3.17) следует, что

$$\beta = \frac{D}{\delta}. \quad (3.18)$$

Из выражения (3.18), учитывая,  $\delta \approx r/3$ , находим  $r$ :  $r = \frac{3D}{\beta}$ .

На рис. 3.8 показана зависимость  $m = f(x)$ , определяемая уравнением (3.16). Поскольку в аэрозольном кольце содержится влага, то значение коэффициента молекулярной диффузии было приравнено к соответствующему коэффициенту для  $H_2O$  (пар);  $D = 3,19 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

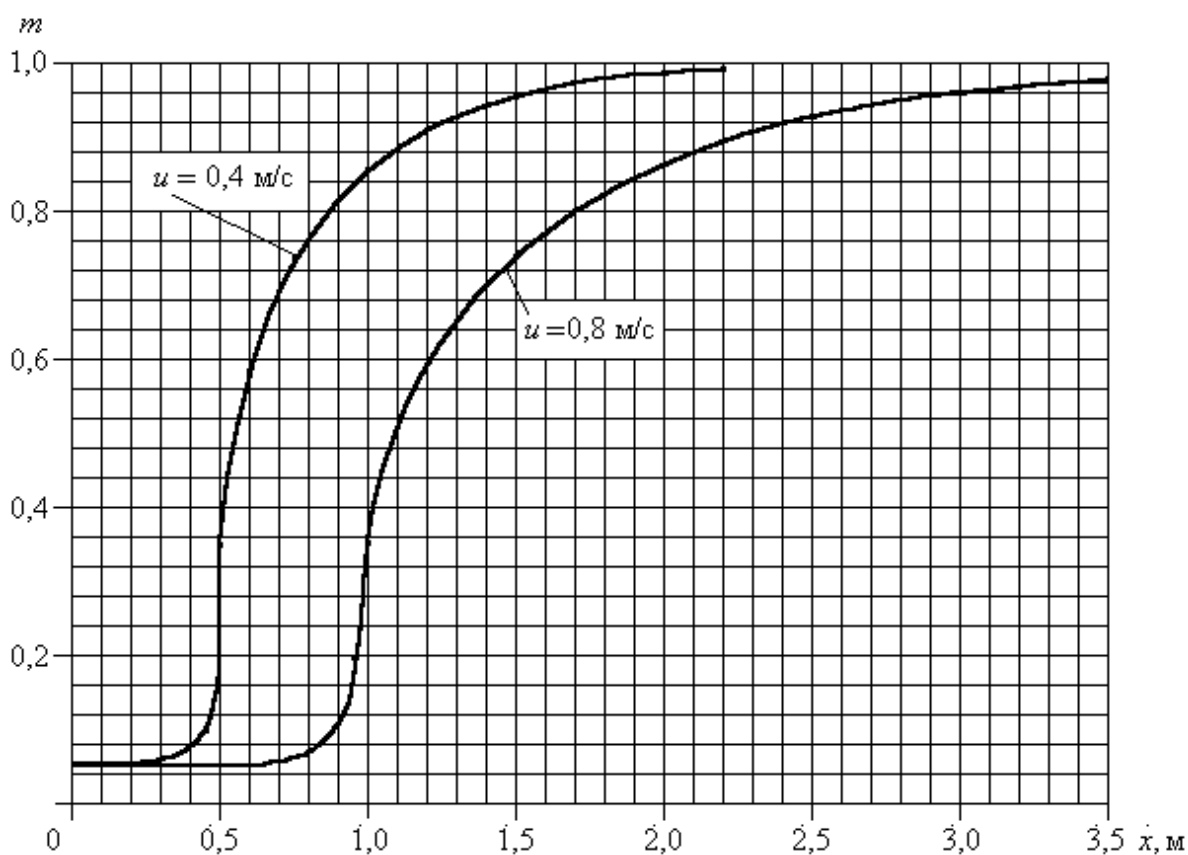


Рис. 3.8. Зависимость  $m = f(x)$  для аэрозольного кольца

Графики показывают, что с увеличением скорости движения аэрозольного кольца увеличивается минимальное расстояние начала смешивания аэрозоля с воздухом и продолжительность смешивания. Величину указанного минимального расстояния  $x_{\min}$  можно определить из уравнения (3.16), полагая  $m = m_0$  и учитывая выражение (3.18):

$$x_{\min} = \frac{2(1-m_0)r^2u}{9Dm_0}. \quad (3.19)$$

Из уравнения (3.16) и рис. 3.8 видно, что полное смешивание теоретически наступает при  $x \rightarrow \infty$ . Однако практически можно считать, что полное смешивание наступает при  $m = 0,99$ . Расстояние  $x_{0,99}$ , при котором наступает практически полное смешивание, может быть также определено из уравнения (3.16) или по приближенной формуле:

$$x_{0,99} = r^2u/Dm_0. \quad (3.20)$$

Поделив уравнение (3.20) на выражение (3.19), найдем соотношение конца зоны смешивания к ее началу:

$$\frac{x_{0,99}}{x_{\min}} = \frac{4,5}{(1-m_0)}, \quad (3.21)$$

Найдя разность этих выражений, получим длину зоны смешивания, на протяжении которой происходит растворение аэрозольного кольца:

$$x_{0,99} - x_{\min} = \frac{r^2u}{Dm_0} - \frac{2(1-m_0)r^2u}{9Dm_0} = \frac{r^2u}{Dm_0} \left( 1 - \frac{(1-m_0)}{4,5} \right). \quad (3.22)$$

Таким образом, варьируя скорость движения аэрозольного кольца, можно изменять размеры зоны смешивания и ее положение относительно ингалятора и пациента. Формирование аэрозольной струи с помощью вихревых колец обеспечивает достаточно протяженную зону для размещения пациента, принимающего лечебную процедуру, что позволяет ему чувствовать себя комфортно, меняя при необходимости позу, слегка наклоняясь, откидываясь или поворачиваясь. Возможность изменения положения тела в процессе процедуры особенно важна для детей и пожилых людей. Кроме того, появляется возможность проведения ингаляционных процедур во время сна пациента.

### *Вопросы для самопроверки*

1. На чем основан принцип работы пирометра с термопарой?
2. Чем вызвана поправка показаний термоэлектрического пирометра с термопарой?
3. Каким образом посредством манометра можно измерить температуру кипящей воды в барабане парового котла?
4. Напишите дифференциальное уравнение, описывающее работу барометра.
5. Что такое порозность?
6. Как зависит положение зоны смешивания аэрозольного кольца от его начальной скорости?
7. Как зависит температура кипения воды в барабане котла от давления (формула)?

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

### 4.1. Определение расхода истекающей из емкости жидкости

Как для управления, так и для расчета мощности отдельных узлов системы водоподготовки необходимо знать время разбора (расход) питьевой воды из емкости. Рассмотрим в общем виде задачу об истечении воды из цилиндрического резервуара.

Цилиндрический резервуар диаметром  $D$ , имеющий отверстия диаметрами  $d_1$  и  $d_2$ , размещенными соответственно на расстояниях  $a$  и  $b$  от дна, наполнен водой до уровня (высоты)  $h_0$  (рис. 4.1). Требуется вывести уравнение, позволяющее определить время  $t$  понижения уровня до определенной высоты. Известно, что скорость вытекающей из резервуара жидкости зависит от высоты ее столба  $h$ :  $v = \mu\sqrt{2gh}$ , где  $\mu$  – коэффициент истечения;  $g$  – ускорение свободного падения;  $h$  – текущее значение высоты столба жидкости. Эта зависимость показана на рис. 4.2. Рассмотрим сначала истечение жидкости из одного отверстия, например, находящегося

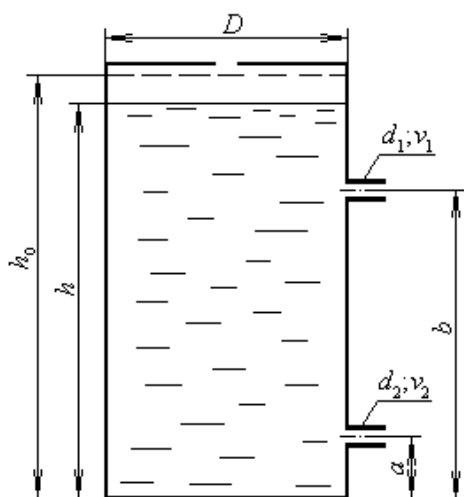


Рис. 4.1. Схема для определения времени истечения жидкости резервуара

на расстоянии  $a$  от дна резервуара и имеющего площадь  $f$  сечения (для краткости записи индекс 2 опускаем).

Количество жидкости  $dQ$ , вытекающей за время  $dt$  со скоростью  $v$  через отверстие резервуара, равно  $fvdt$ . При этом уровень жидкости в резервуаре за этот промежуток времени понизится  $v'dt$ , где  $v'$  – скорость понижения уровня жидкости в сосуде. Будем считать, что площадь поперечного сечения резервуара  $F = \pi D^2/4$ , тогда можно записать

$$dQ = fvdt = Fv'dt \quad (4.1)$$

или

$$fv = Fv'. \quad (4.2)$$

Учитывая, что  $v = \mu\sqrt{2gh}$ , где  $h$  – уровень в момент времени  $t$ , и подставляя это выражение в уравнение (4.2), получим значение  $v'$ , т. е. скорость понижения уровня:

$$v' = \frac{f}{F} \mu \sqrt{2gh}. \quad (4.3)$$

Подставляя в это уравнение вместо  $v'$  выражение  $\frac{dh}{dt}$ , получим

$$dt = \frac{F}{f\mu\sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}. \quad (4.4)$$

Интегрируя обе части этого уравнения, получим

$$t = \frac{F}{f\mu\sqrt{2g}} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{F}{f\mu} \sqrt{\frac{2}{g}} h + C, \quad (4.5)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

При  $t = 0$   $h = h_0$ , поэтому

$$C = \frac{F}{f\mu} \sqrt{\frac{2}{g}} h_0. \quad (4.6)$$

Подставляя значение  $C$  в формулу для  $t$ , получим

$$t = \frac{F}{f\mu} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{h_0} - \sqrt{h}). \quad (4.7)$$

Формула (4.7) позволяет вычислять время истечения жидкости из одного отверстия. При увеличении числа отверстий в резервуаре математическая модель для определения времени истечения усложняется.

Рассмотрим истечение жидкости из двух отверстий резервуара, схема которого представлена на рис. 4.1. Объем воды, истекающей из резервуара за единицу времени (расход) через отверстия, соответственно равен  $v_1 f_1$  и  $v_2 f_2$ , где  $v_1$  и  $v_2$  –

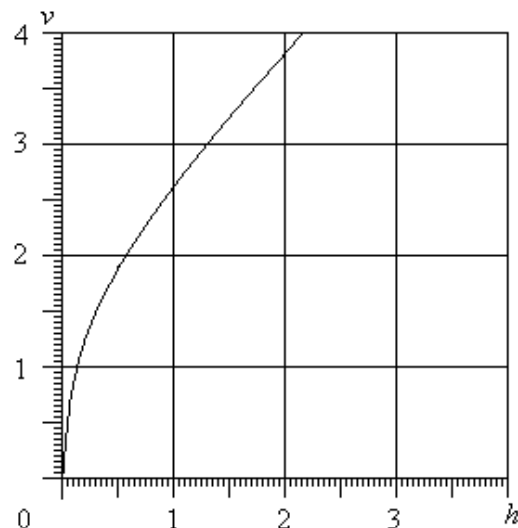


Рис. 4.2. Зависимость скорости  $v$  истечения жидкости от высоты  $h$

соответственно скорости истечения жидкости из проходных отверстий,  $v_1 = \mu\sqrt{2g(h-b)}$ ,  $v_2 = \mu\sqrt{2g(h-a)}$ ;  $f_1$  и  $f_2$  – площади сечений проходных отверстий. Исходя из равенства объемов убывающей в резервуаре жидкости и вытекающей из отверстий, запишем

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{v_1 f_1 + v_2 f_2}{F}, \quad (4.8)$$

где  $f_1 = \frac{\pi}{4}d_1^2$ , м<sup>2</sup>;  $f_2 = \frac{\pi}{4}d^2$ , м<sup>2</sup>;  $F = \frac{\pi}{4}D^2$ , м<sup>2</sup>.

Подставляя в выражение (4.8) значение для скорости, получим

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\mu\sqrt{2g}f_1}{F}(\sqrt{h-b} + k\sqrt{h-a})$$

или

$$dt = -\frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \frac{dh}{\sqrt{h-b} + k\sqrt{h-a}},$$

где  $k = f_2/f_1$ .

В начальный момент времени при  $t = 0$   $h = h_0$ , поэтому

$$t = -\frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h-b} + k\sqrt{h-a}}. \quad (4.9)$$

Полученное выражение (4.9) устанавливает зависимость между временем истечения жидкости и ее уровнем (высотой столба жидкости).

Для решения уравнения (4.9) умножим числитель и знаменатель подинтегральной функции на  $k\sqrt{h-a} - \sqrt{h-b}$  и получим

$$t = -\frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \int_{h_0}^h \frac{k\sqrt{h-a} - \sqrt{h-b}}{k^2(h-a) - (h-b)} dh = -\frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \int_{h_0}^h \frac{k\sqrt{h-a} - \sqrt{h-b}}{(k^2-1)h + b - k^2a} dh.$$

Обозначим  $b - k^2a = p$  и интеграл в виде суммы двух интегралов

$$t = -\frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ \int_{h_0}^h \frac{k\sqrt{h-a}}{(k^2-1)h + p} dh - \int_{h_0}^h \frac{\sqrt{h-b}}{(k^2-1)h + p} dh \right].$$

Примем в первом интеграле  $h - a = x^2$ , во втором  $h - b = y^2$ , после чего произведем подстановку новых переменных и изменим пределы интегрирования. При  $h = h_0$

$$x = \sqrt{h_0 - a}, \quad a y = \sqrt{h_0 - b},$$

следовательно,

$$t = \frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ - \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \frac{2kx^2}{(k^2-1)x^2 + (k^2-1)a + p} dx + \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \frac{2y^2}{(k^2-1)y^2 + (k^2-1)b + p} dy \right].$$

Примем  $(k^2 - 1)a + p = b - a = q$ ,  $(k^2 - 1)b + p = k^2(b - a) = r$ , тогда можно записать последнее выражение в следующем виде:

$$t = \frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ - \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \frac{2kx^2}{(k^2-1)x^2 + q} dx + \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \frac{2y^2}{(k^2-1)y^2 + r} dy \right]. \quad (4.10)$$

Приведем интегралы к известному табличному виду

$$\int \frac{dx}{(ax)^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} ax. \quad \text{Для этого выразим подынтегральные выраже-}$$

ния следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \frac{2kx^2}{(k^2-1)x^2 + q} + \frac{2k}{k^2-1} - \frac{2k}{k^2-1} = - \frac{2kx^2/q}{(k^2-1)x^2/q + 1} + \frac{2k}{k^2-1} - \frac{2k}{k^2-1} = \\ & = \frac{[-(k^2-1)2kx^2/q] + 2k(k^2-1)x^2/q + 2k}{[(k^2-1)x^2/q + 1](k^2-1)} - \frac{2k}{k^2-1} = \frac{2k}{k^2-1} \frac{1}{(k^2-1)x^2/q + 1} - \frac{2k}{k^2-1} \end{aligned}$$

и аналогичным образом

$$\begin{aligned} & \frac{2y^2}{(k^2-1)y^2 + r} - \frac{2}{k^2-1} + \frac{2}{k^2-1} = \frac{2y^2/r}{(k^2-1)y^2/r + 1} - \frac{2}{k^2-1} + \frac{2}{k^2-1} = \\ & = \frac{(k^2-1)2y^2/r - 2(k^2-1)y^2/r - 2}{(k^2-1)[(k^2-1)y^2/r + 1]} + \frac{2}{k^2-1} = - \frac{2}{k^2-1} \frac{1}{(k^2-1)y^2/r + 1} + \\ & + \frac{2}{k^2-1}. \end{aligned}$$

Подставим полученные выражения в уравнение (4.10) и получим

$$t = \frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \left( \frac{2k}{(k^2-1)} \frac{1}{(k^2-1)x^2/q+1} - \frac{2k}{(k^2-1)} \right) dx - \int_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} \left( \frac{2}{(k^2-1)} \frac{1}{(k^2-1)x^2/r+1} - \frac{2}{(k^2-1)} \right) dy \right].$$

После преобразования с учетом выражения для табличного интеграла

$$t = \frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ \frac{2k}{(k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{(k^2-1)/q}} \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)/q} x \Big|_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} - \frac{2k}{(k^2-1)} x \Big|_{\sqrt{h_0-a}}^{\sqrt{h-a}} - \frac{2}{(k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{(k^2-1)/r}} \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)/r} y \Big|_{\sqrt{h_0-b}}^{\sqrt{h-b}} + \frac{2}{(k^2-1)} y \Big|_{\sqrt{h_0-b}}^{\sqrt{h-b}} \right].$$

После подстановки пределов и последующих вычислений получим

$$t = \frac{F}{\mu\sqrt{2g}f_1} \left[ \frac{2k}{(k^2-1)} \frac{1}{\sqrt{(k^2-1)/q}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)(h-a)/q} - \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)(h_0-a)/q} \right) - \frac{2k}{(k^2-1)} \sqrt{h-a} + \frac{2k}{(k^2-1)} \sqrt{h_0-a} - \frac{2}{(k^2-1)} \times \frac{1}{\sqrt{(k^2-1)/r}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)(h-b)/r} - \operatorname{arctg} \sqrt{(k^2-1)(h_0-b)/r} \right) + \frac{2}{(k^2-1)} \sqrt{h-b} - \frac{2}{(k^2-1)} \sqrt{h_0-b} \right].$$

После подстановки выражений для  $q$  и  $r$  окончательно получим уравнение

$$t = \frac{2kF}{\mu\sqrt{2g}f_1(k^2-1)} \left[ \sqrt{\frac{b-a}{k^2-1}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k^2-1)(h-a)}{b-a}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k^2-1)(h_0-a)}{b-a}} \right) - \sqrt{h-a} + \sqrt{h_0-a} - \sqrt{\frac{b-a}{k^2-1}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k^2-1)(h-b)}{k^2(b-a)}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(k^2-1)(h_0-b)}{k^2(b-a)}} \right) + \frac{\sqrt{h-b} - \sqrt{h_0-b}}{k} \right]. \quad (4.11)$$



Выражение (4.11) позволяет вычислять время истечения жидкости из двух отверстий.

**Пример.** Пусть  $a = 0,6$  м;  $b = 1,2$  м;  $D = 1,8$  м;  $d_1 = 0,05$  м;  $d_2 = 0,1$  м;  $h = 1,5$  м и  $h_0 = 3$  м. Подставим эти данные в формулу (4.11):

$$t = 255,8 \left[ \sqrt{\frac{1,2-0,6}{4^2-1}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(4^2-1)(1,5-0,6)}{1,2-0,6}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(4^2-1)(3-0,6)}{1,2-0,6}} \right) - \sqrt{1,5-0,6} + \sqrt{3-0,6} - \sqrt{\frac{1,2-0,6}{4^2-1}} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(4^2-1)(1,5-1,2)}{4^2(1,2-0,6)}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{15(4^2-1)(3-1,2)}{4^2(1,2-0,6)}} \right) + \frac{\sqrt{0,3} - \sqrt{1,8}}{4} \right] = 255,8 [0,2(1,363 - 1,442) - 0,949 + 1,549 - 0,2(0,601 - 1,033) - 0,198] = 255,8 \cdot 0,4726 = 121 \text{ с.}$$

## 4.2. Система управления сушкой материалов

Для проектирования системы управления сушкой материалов необходимо, прежде всего, смоделировать непосредственно сам процесс сушки, чтобы иметь представление о количестве испаряющейся влаги (пара), скорости этого испарения и т. п.

Исследования, проведенные в работе [6], показали, что процесс контактной сушки определяется испарением со свободной поверхности лишь при низкой температуре греющей поверхности (до  $60 - 70$  °С). При температурах греющей поверхности, близких к  $100$  °С и выше, интенсивное парообразование происходит в контактных слоях материала. Рассмотрим сначала суть процесса сушки.

Поверхность воды (жидкости), соприкасающаяся со стенкой капилляра материала, в момент времени  $\tau = \tau_0 = 0$  считается исходной и обозначена цифрой 0 на рис. 4.3. Под действием тепла стенки, имеющей температуру  $T_c$ , указанная поверхность жидкости продуцирует пар, являясь при этом одновременно поверхностью раздела жидкой и парообразной фаз. В любой момент времени  $\tau$  эта поверхность есть  $x(\tau)$ . При этом жидкость, занимавшая слой толщиной  $X_{ж}(\tau)$  между

границами 0 и I, испаряется и превращается в пар, который вне капилляра занял бы слой толщиной  $X_{п}(\tau)$  между границами I и II. В момент времени  $(\tau + d\tau)$  жидкость испарится из слоя  $X_{ж}(\tau + d\tau)$ , отмеченного на рис. 4.3 границами 0 и I', а пар при этом вне пространства капилляра мог бы занять слой между границами I' и II', измеряемый величиной  $X_{п}(\tau + d\tau)$ . Жидкость имеет температуру  $T_{ж}$ , которая для установившегося процесса равна температуре кипения жидкости.

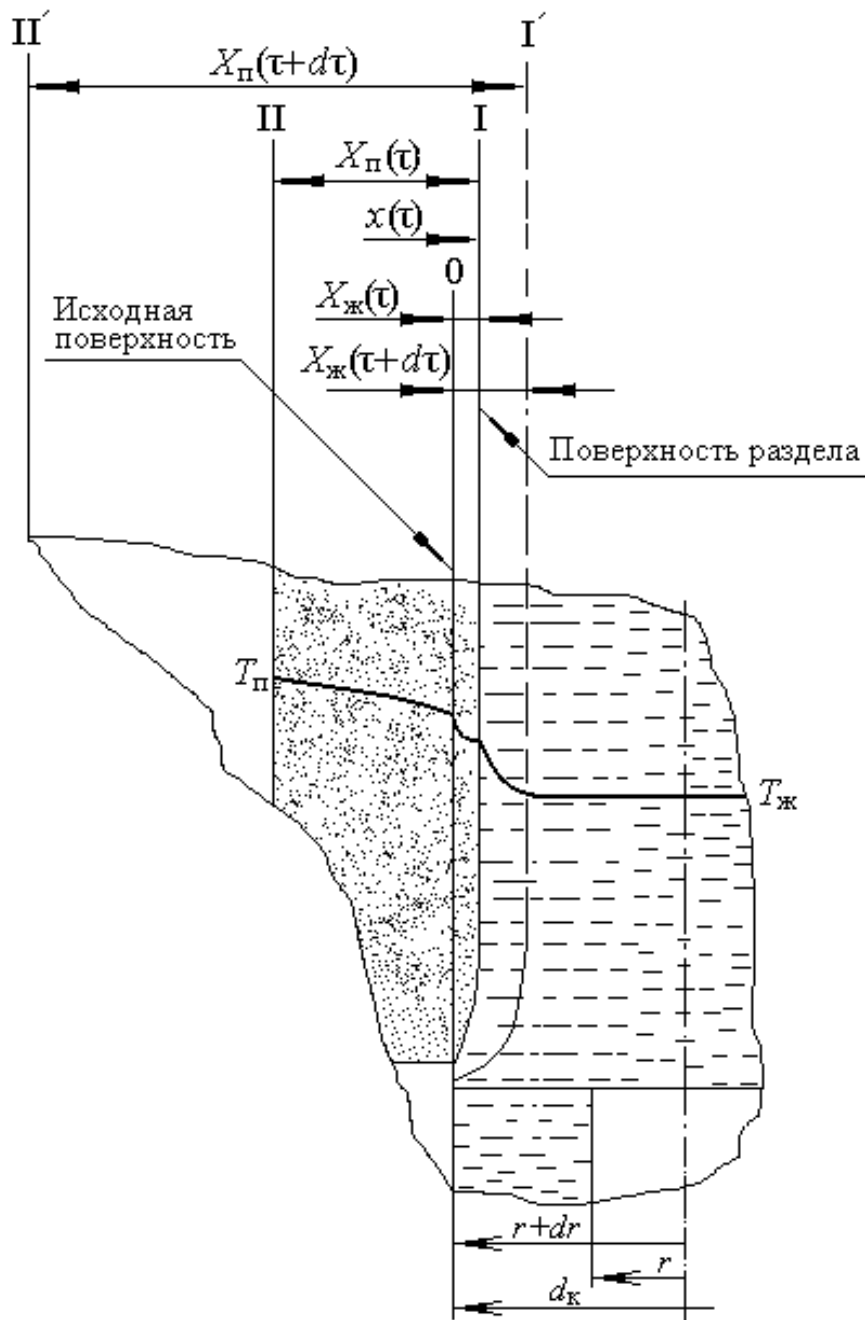


Рис. 4.3. Схема получения пара в капилляре массива материала

Перейдем к разработке математической модели процесса.

Количество тепла, затрачиваемого в зоне фронта парообразования толщиной  $\Delta\xi$ , на единице площади за время  $\Delta\tau$

$$q_{\Pi}\Delta\tau = \rho_{\Pi,\Pi}q\Delta\xi, \quad (4.12)$$

где  $\rho_{\Pi,\Pi}$  – парциальная плотность компоненты превращения,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $q_{\Pi}$  – удельная тепловая мощность фронта,  $\text{Вт}/\text{м}^2$ .

Отсюда удельная тепловая мощность фронта превращения вещества выразится как

$$q_{\Pi} = \rho_{\Pi,\Pi}q \frac{\Delta\xi}{\Delta\tau}. \quad (4.13)$$

Для энергетической характеристики процесса превращения можно воспользоваться условным понятием потенциальной температуры превращения, которая отвечает потенциальной энергии превращения вещества:

$$\Theta = \frac{\rho_{\Pi,\Pi}q}{\rho_c c_p}, \quad (4.14)$$

где  $\Theta$  – температура превращения,  $\text{К}$ ;  $\rho_c c_p$  – объемная теплоемкость среды,  $\text{Дж}/\text{м}^3 \cdot \text{К}$ .

Обозначая через  $\frac{\Delta\xi}{\Delta\tau} = v$  скорость перемещения фронта и подставляя уравнение (4.14) в выражение (4.13), получим

$$q_{\Pi} = v\rho_c c_p \Theta. \quad (4.15)$$

Будем полагать, что тепло от нагретых стенок капилляра подводится через парообразную среду к поверхности раздела. При этом на превращение жидкости в пар затрачивается теплота парообразования. Область слева от границы раздела состоит из парообразной фазы с характеристиками  $\rho_{\Pi}$ ,  $c_{\Pi}$ ,  $\lambda_{\Pi}$ ,  $a_{\Pi}$ , а справа – из жидкой – с характеристиками  $\rho_{\text{ж}}$ ,  $c_{\text{ж}}$ ,  $\lambda_{\text{ж}}$ ,  $a_{\text{ж}}$ , где соответственно  $\rho_{\Pi}$ ,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность пара и жидкости;  $c_{\Pi}$ ,  $c_{\text{ж}}$  – удельная теплоемкость пара и жидкости;  $\lambda_{\Pi}$ ,  $\lambda_{\text{ж}}$  – коэффициент теплопроводности пара и жидкости;  $a_{\Pi}$ ,  $a_{\text{ж}}$  – коэффициенты температуропроводности пара и жидкости. Заметим, что если

$t_{\text{п}}, t_{\text{ж}}$  – соответственно температура паровой и жидкой фаз, то они должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial^2 t_{\text{п}}}{\partial x_{\text{п}}^2} - \frac{1}{a_{\text{п}}} \frac{\partial t_{\text{п}}}{\partial \tau} = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial^2 t_{\text{ж}}}{\partial x_{\text{ж}}^2} - \frac{1}{a_{\text{ж}}} \frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial \tau} = 0. \quad (4.17)$$

На поверхности раздела, имеющей соответствующую температуру  $T_{\text{п.р}}$ , которая необходима для перехода вещества из одной фазы в другую, должно выполняться условие

$$t_{\text{п}} = T_{\text{п.р}} = t_{\text{ж}}. \quad (4.18)$$

Для того чтобы перевести вещество из жидкого состояния в парообразное, к нему необходимо подвести определенное количество теплоты (энергии) на единицу массы  $q$ , Дж/кг. Умножив последнее на плотность вещества, получим количество теплоты  $q_{\text{рж}}$ , которое следует подвести на единицу объема вещества для перевода его из жидкой фазы в парообразную. Тогда при передвижении поверхности раздела на величину  $dx$  необходимо затратить тепла (иметь удельную тепловую мощность фронта)  $q_{\text{рж}} \frac{dX_{\text{ж}}}{d\tau}$ . Следовательно,

$$\lambda_{\text{п}} \left( \frac{\partial t_{\text{п}}}{\partial x_{\text{п}}} \right) \Big|_{x_{\text{п}} = X_{\text{п}}} - \lambda_{\text{ж}} \left( \frac{\partial t_{\text{ж}}}{\partial x_{\text{ж}}} \right) \Big|_{x_{\text{ж}} = X_{\text{ж}}} = q_{\text{рж}} \frac{dX_{\text{ж}}}{d\tau}. \quad (4.19)$$

Используя метод Ньюмана [7], предполагаем решения уравнений в виде

$$t_{\text{п}} - T_{\text{п.р}} = (T_{\text{с}} - T_{\text{п.р}}) + A \operatorname{erfc} \frac{x_{\text{п}}}{2\sqrt{a_{\text{п}}\tau}}, \quad (4.20)$$

$$t_{\text{ж}} - T_{\text{п.р}} = (T_{\text{ж}} - T_{\text{п.р}}) + B \operatorname{erf} \frac{x_{\text{ж}}}{2\sqrt{a_{\text{ж}}\tau}}, \quad (4.21)$$

где  $A, B$  – постоянные коэффициенты;  $T_{\text{с}}$  – температура стенки капилляра.

Поскольку из условия  $x_{\text{п}} = X_{\text{п}}(\tau)$ ,  $x_{\text{ж}} = X_{\text{ж}}(\tau)$ , то уравнения (4.20), (4.21) можно записать

$$-(T_{\text{п.п}} - T_{\text{с}}) = A \operatorname{erfc} \frac{X_{\text{п}}}{2\sqrt{a_{\text{п}}\tau}}, \quad (4.22)$$

$$(T_{\text{п.п}} - T_{\text{ж}}) = B \operatorname{erf} \frac{X_{\text{ж}}}{2\sqrt{a_{\text{ж}}\tau}}. \quad (4.23)$$

Поскольку решения уравнений (4.22), (4.23) должны быть справедливы для всех  $X_{\text{п}}$  и  $X_{\text{ж}}$ , то они должны быть пропорциональны  $\sqrt{\tau}$ . Тогда

$$X_{\text{ж}} = k\sqrt{\tau}. \quad (4.24)$$

С учетом отношения плотностей жидкости и пара можно записать:  $X_{\text{п}}/X_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}}/\rho_{\text{п}} = \beta$ , тогда

$$X_{\text{п}} = \beta k\sqrt{\tau}, \quad (4.25)$$

где  $k$  – некоторый коэффициент, м/  $\sqrt{\text{с}}$ .

Подставляя решения уравнений (4.20), (4.21), (4.24), (4.25) в уравнение (4.19), получим

$$\frac{\lambda_{\text{п}} A}{\sqrt{\pi a_{\text{п}}}} e^{-\frac{\beta^2 k^2}{4a_{\text{п}}}} - \frac{\lambda_{\text{ж}} B}{\sqrt{\pi a_{\text{ж}}}} e^{-\frac{k^2}{4a_{\text{ж}}}} = \frac{1}{2} q_{\text{рж}} k. \quad (4.26)$$

Найдем значения  $A$  и  $B$  из выражений (4.22) и (4.23) и подставим их в уравнение (4.26), которое примет вид

$$\frac{\lambda_{\text{п}} (T_{\text{с}} - T_{\text{п.п}})}{\sqrt{\pi a_{\text{п}} \operatorname{erfc}(\beta k / 2\sqrt{a_{\text{п}}})}} e^{-\frac{\beta^2 k^2}{4a_{\text{п}}}} - \frac{\lambda_{\text{ж}} (T_{\text{п.п}} - T_{\text{ж}})}{\sqrt{\pi a_{\text{ж}} \operatorname{erf}(k / 2\sqrt{a_{\text{ж}}})}} e^{-\frac{k^2}{4a_{\text{ж}}}} = \frac{1}{2} q_{\text{рж}} k. \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) можно решить численно, получив значение  $k$  как функцию от температуры. Поделив уравнения (4.24), (4.25) на  $\tau$ , получим скорость  $v_{\text{ж}}$  перемещения поверхности раздела «жидкость – пар».

Процесс истечения пара из капилляра в окружающую среду можно считать адиабатическим, так как на близком расстоянии от поверхности материала влиянием теплообмена между выходящим паром и окружающим пространством можно пренебречь. Тогда из уравнения Бернулли массовый расход истекающего из капилляра пара, кг/с,

$$G = A\mu \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_{\kappa} \rho_{\kappa} \left[ \left( \frac{p'_{\kappa}}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p'_{\kappa}}{p_{\kappa}} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]}, \quad (4.28)$$

где  $A$  – площадь сечения отверстия капилляра, м<sup>2</sup>;  $\mu$  – коэффициент расхода отверстия капилляра, зависящий в данном случае только от числа Рейнольдса,  $\mu = f(\text{Re})$ ;  $\kappa$  – показатель адиабаты;  $p_{\kappa}$  – давление в капилляре, Па;  $p'_{\kappa}$  – давление над капилляром (окружающей среды), Па;  $\rho_{\kappa}$  – плотность сухого насыщенного пара в капилляре при давлении  $p'_{\kappa}$ , кг/м<sup>3</sup>.

При данных значениях  $A$ ,  $\mu$  и  $\rho_{\kappa}$  массовый расход пара будет в основном зависеть от давления  $p_{\kappa}$  в капилляре и от величины соотношения  $\delta = \frac{p'_{\kappa}}{p_{\kappa}}$ . При  $\delta = 0$  и  $\delta = 1$ ,  $G = 0$ . Поэтому максимального значения расход пара достигнет при некотором критическом значении  $\delta = \delta_{\text{кр}}$ , для определения которого необходимо взять производную и приравнять ее к нулю. Откуда

$$\frac{2}{\kappa} \delta_{\text{кр}}^{\frac{2-\kappa}{\kappa}} = \frac{\kappa + 1}{\kappa} \delta_{\text{кр}}^{\frac{1}{\kappa}}, \quad (4.29)$$

$$\delta_{\text{кр}} = \frac{(p'_{\kappa})_{\text{кр}}}{p_{\kappa}} \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad (4.30)$$

где  $(p'_{\kappa})_{\text{кр}}$  – критическое давление, при котором расход максимален, Па.

Если давление окружающей среды будет таким, что  $\delta > \delta_{\text{кр}}$  или  $p'_{\kappa} > (p'_{\kappa})_{\text{кр}}$ , то оно установится на выходе капилляра. При этом истечение пара будет происходить под действием разности давлений  $\Delta p = p_{\kappa} - p'_{\kappa}$ .

Если давление к камере установится таким, что  $\delta < \delta_{\text{кр}}$ , то на выходе капилляра установится критическое давление  $(p'_{\kappa})_{\text{кр}} = \delta_{\text{кр}} p_{\kappa}$ , при этом расход пара не будет зависеть от давления  $p'_{\kappa}$  и станет определяться только величиной давления  $p_{\kappa}$ .

Величина давления  $p_k$  будет зависеть от температуры насыщения  $T_n$  ( $p_k = f(T_n)$ ), первая производная которой есть  $\frac{dp}{dT_n}$ .

Будем считать, что внутри материала вода не испаряется, поэтому  $X_{ж}(\tau) = 0$ . В начале этого участка (у поверхности материала) жидкость полностью испарилась, при этом  $X_{ж}(\tau) = d_k/2$ . Из уравнения (4.24) при  $\tau = 0$   $X_{ж} = 0$ ; при  $\tau = \left(\frac{d_k}{2k}\right)^2$   $X_{ж} = d_k/2$ .

Тогда расстояние до усредненной границы раздела паровой и жидкой фаз, м, может быть найдено из выражения

$$\bar{X} = \left(\frac{2k}{d_k}\right)^2 \int_0^{\left(\frac{d_k}{2k}\right)^2} k\sqrt{\tau} d\tau = \frac{1}{3} d_k. \quad (4.31)$$

Найдем объемы, м<sup>3</sup>, которые занимают кипящая жидкость и сухой насыщенный пар в капилляре при давлении  $p_k$ :

$$V_{ж} = \left(\pi \left(\frac{d_k}{2} - \bar{X}\right)\right)^2 l = \frac{\pi d_k^2}{36} l, \quad (4.32)$$

$$V_{п} = \pi d_k^2 l \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right) = \frac{2\pi d_k^2}{9} l, \quad (4.33)$$

где  $l$  – толщина участка материала, пропитанного водой, м.

Определить значения удельного объема сухого насыщенного пара различных жидкостей можно расчетным путем, используя уравнение Клапейрона – Клаузиуса, если известны соответствующие значения удельного объема  $v'$  жидкости, м<sup>3</sup>/кг, теплота парообразования  $r$  и  $\frac{dp}{dT_n}$ . Вычислив значение удельного объема  $v''$  сухого насыщенного пара, м<sup>3</sup>/кг, можно найти массу жидкости и пара в капилляре, кг:

$$G_{ж} = \frac{V_{ж}}{v'}, \quad (4.34)$$

$$G_{п} = \frac{V_{п}}{v''}. \quad (4.35)$$

Начальная степень сухости  $x$  смеси

$$x = \frac{G_{\text{п}}}{G_{\text{п}} + G_{\text{ж}}}. \quad (4.36)$$

Если вода в капилляре полностью перейдет в пар до момента выхода последнего из капилляра, то  $x \rightarrow 1$ , а удельный объем смеси  $v_x$  будет стремиться к удельному объему сухого насыщенного пара ( $v_x \rightarrow v''$ ). Тогда плотность истекающего из отверстия капилляра пара может быть найдена из выражения

$$\rho_{\text{к}} = \frac{1}{v''}. \quad (4.37)$$

Подставив выражение (4.37) в уравнение (4.28), получим величину расхода пара из капилляра

$$G = A\mu \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_{\text{к}}}{v''} \left[ \left( \frac{p'_{\text{к}}}{p_{\text{к}}} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left( \frac{p'_{\text{к}}}{p_{\text{к}}} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \right]}. \quad (4.38)$$

Уравнение (4.38) позволяет определить расход пара, а зная массу влаги, находящейся в материале (влажность материала, например древесины), можно вычислить предполагаемое время сушки этого материала.

Заметим, что при уменьшении толщины слоя материала, заполненного влагой, резко увеличивается скорость отвода пара.

### 4.3. Система определения уровня физического здоровья человека

Уровень здоровья и физической работоспособности человека можно установить путем выполнения им определенной физической нагрузки и последующего определения косвенным путем величины возникшего в результате этого кислородного долга и времени ликвидации его организмом [8].

Для этого испытуемому необходимо выполнить дозированную физическую нагрузку, например в виде 10 приседаний, затем он задерживает дыхание на вдохе (апноэ-1), фиксируя его продолжительность. При этом задержку дыхания производят до момента, требую-



щего у испытуемого волевого усилия для продолжения процедуры апноэ. Предъявление указанной нагрузки, например в виде десяти приседаний, позволяет включить в работу большую часть основных мышц человека и получить при этом более объективную оценку его уровня здоровья и физической работоспособности.

Проведение задержки дыхания до момента, требующего волевого усилия для продолжения процедуры апноэ, позволяет испытуемому лучше контролировать свое состояние при выполнении апноэ, так как указанное волевое усилие сигнализирует о том, что гипоксическая фаза приближается к концу, а кислородный долг – к своему пределу. Это обеспечивает хорошую повторяемость результатов обследования конкретного человека и повышает их достоверность.

Затем испытуемому предоставляют отдых в течение 4 минут. За это время функции сердечно-сосудистой и дыхательной систем после снятия у людей с высоким уровнем здоровья предъявленной физической нагрузки приходят в нормальное исходное состояние. Предоставление указанного отдыха дает возможность выявлять людей с пониженным уровнем здоровья и физической работоспособности, которым для восстановления требуется больший период времени. Результатом неполного восстановления станет меньшая продолжительность апноэ-2 и более низкий результат.

После отдыха испытуемого повторно подвергают задержке дыхания на вдохе (апноэ-2), фиксируя его продолжительность. При этом апноэ-2 производят до момента, требующего у испытуемого волевого усилия для продолжения этой процедуры.

Затем вычисляют отношение продолжительности апноэ-2 к продолжительности апноэ-1 и определяют уровень здоровья человека и его физической работоспособности в зависимости от того, к какому интервалу принадлежит это отношение. Удобнее и нагляднее определять уровень здоровья человека и его физической работоспособности по диаграмме, проведя сначала вертикаль из точки, соответствующей отношению апноэ-2 к апноэ-1, до пересечения с линией диаграммы, а потом – горизонталь до пересечения с осью ординат (рис. 4.4).

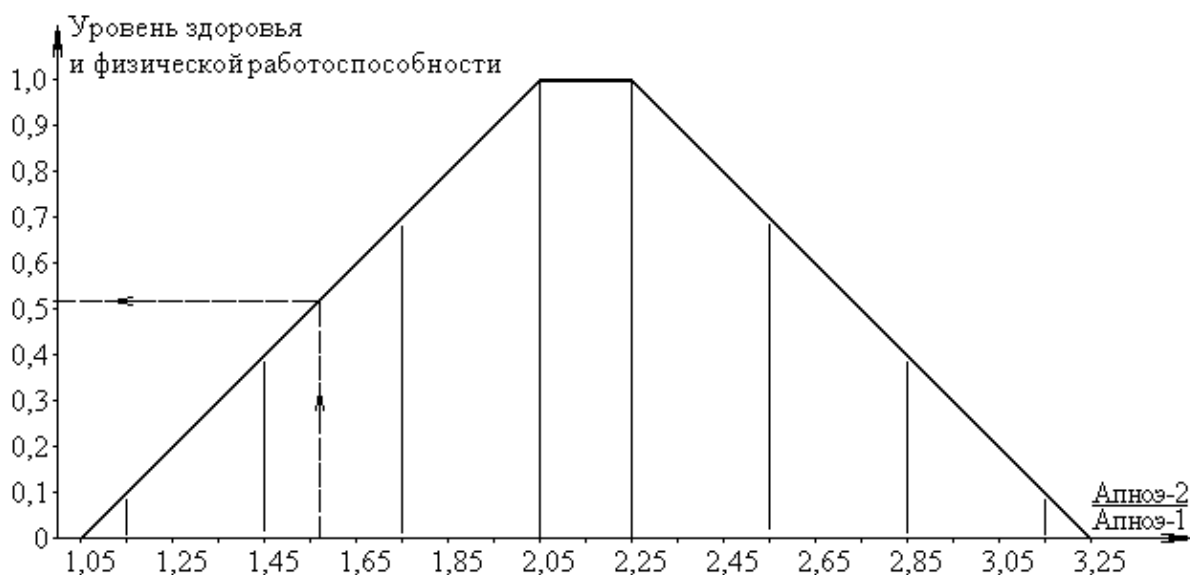


Рис. 4.4. Диаграмма для определения уровня физического здоровья

Недостаток нахождения параметров по диаграмме заключается в том, что выполнение этой процедуры с помощью компьютера затруднено. Для автоматизации вычислений необходимо разработать математическую модель, описывающую показанный график трапециевидального вида.

Анализ графика (см. рис. 4.4) показывает, что его можно описать показательной функцией вида  $y = ne^{-x^m}$ , где  $x$  – некоторая функция. Сначала примем  $x = A_2/A_1 - 2,15$ , поскольку при  $x = 2,15$  функция должна иметь максимум. Любым из описанных способов найдем коэффициенты  $n$  и  $m$ , которые сделали бы нужный наклон восходящей ветви функции относительно оси абсцисс, т. е. параллельно левой стороне (опытным данным) графика (см. рис. 4.4). После подстановки найденных коэффициентов ( $n = 1,7$ ;  $m = 1,5$ ) функция примет вид

$$y = 1,7e^{-\left|\frac{A_2}{A_1} - 2,15\right|^{1,5}}.$$

Параллельность указанных линий подтверждают малые отклонения ( $\pm 0,05$ ) относительно среднего значения (0,59) разности ординат этих линий. Для получения нисходящей ветви функции вместо круглых скобок необходимо поставить знак абсолютной величины. Максимум функции приходится на точку с координатами  $A_2/A_1 = 2,15$ . Если принять значение формируемой функции в этой точке равным

единице, то в других точках значения этой функции будут занижены, поскольку функция не может иметь плоской вершины подобно основанию трапеции. Например, при  $A_2/A_1 = 2,15$  функция имеет значение 1,7, т. е. на 0,7 больше, чем следует по графику трапеции. В точке  $A_2/A_1 = 2$  эта функция равна 1,61 и, если принять ее максимум за единицу, то это значение станет приблизительно равным 0,91 ( $1,61 - 0,7$ ), а по графику должно быть 0,95, т. е. результат будет занижен на 0,04. Поэтому нужно несколько приподнять максимум, например на величину 0,03. Тогда при  $A_2/A_1 = 2,15$   $e^{-\left|\frac{A_2}{A_1} - 2,15\right|^{1,5}} = \frac{1,03}{1,7} = 0,605$ .

Поскольку  $e^0 = 1$ , то для получения значения 0,605 необходимо из единицы вычесть 0,395. При  $A_2/A_1 = 1,05$  значение функции должно быть равным нулю, т. е.  $e^{-\left|\frac{A_2}{A_1} - 2,15\right|^{1,5}}$  должно стать равным 0,395. Однако при подстановке вместо 0,395 получаем 0,315. Поэтому выражение  $(A_2/A_1 - 2,15)$ , равное в данном случае 1,1, нужно поделить на некоторый коэффициент, который найдем следующим образом.

Примем выражение в круглых скобках за  $y$  и запишем  $e^{-(y)^{1,5}} = 0,395$ . Тогда  $-(y)^{1,5} = \ln 0,395 = -0,928$ . Умножим обе части уравнения на минус единицу и, прологарифмировав его еще раз, получим  $1,5 \ln y = -0,737$ . Откуда  $\ln y = -\frac{0,737}{1,5} = -0,491$ , а  $y = 0,61$ . Отсюда найдем коэффициент  $1,16 = 1,1/0,95$ , который потом для выравнивания значения погрешности увеличиваем до величины 1,164. Окончательно формула принимает вид

$$H = 1,7 \left( \exp - \left| \frac{\frac{A_2}{A_1} - 2,15}{1,164} \right|^{1,5} - 0,395 \right).$$

На рис. 4.5 показан график, отражающий полученную математическую модель, который совмещен с графиком, изображенным на рис. 4.4. Для проверки вычислим значение  $H$  с помощью математической модели, которое по графику рис. 4.4 равно 0,52 для  $A_2/A_1 = 1,57$ .

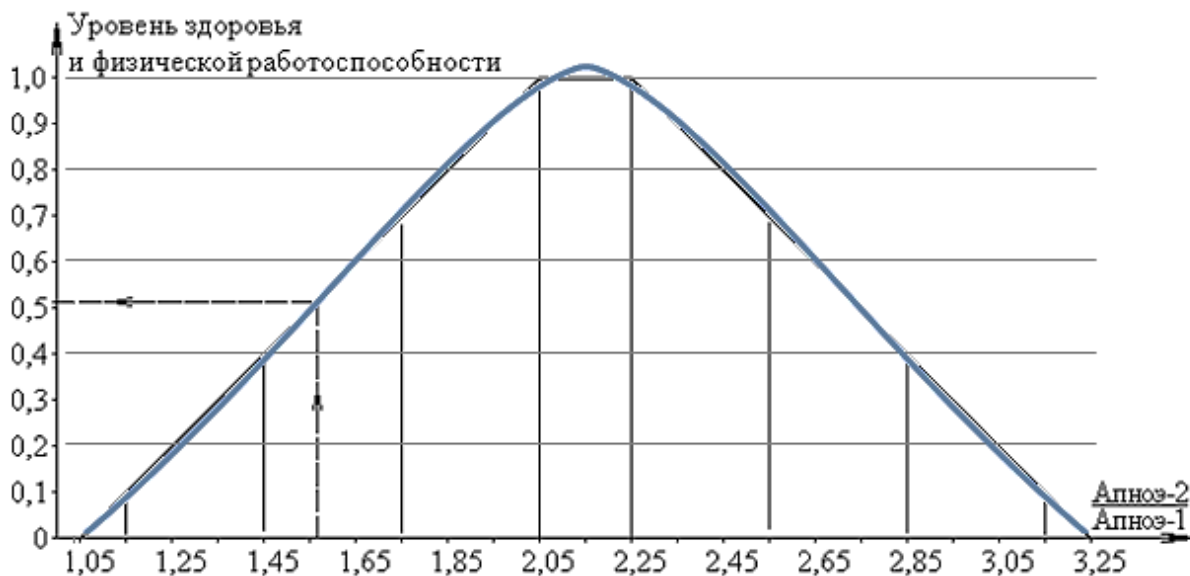


Рис. 4.5. Графическое представление математической модели

После вычислений получим  $H = 0,524$ , что подтверждает точность модели.

#### 4.4. Система получения пара высоких параметров

Один из способов повышения экономичности работы паросиловых установок – перегрев пара, который осуществляется в пароперегревателях. Для проектирования систем перегрева пара и последующего управления этим процессом необходимо определить степень перегрева в зависимости от температуры пара при данном давлении. Рассмотрим более подробно работу такой системы.

Помимо тепла, передаваемого топкой путем лучеиспускания и конвекции, котловая вода воспринимает тепло от газов, проходящих через трубы котла. Газовый поток, поступающий в трубную часть котла (рис. 4.6), разделяется на две части. Первая его часть  $\beta$  направляется в жаровые трубы 1 длиной  $l$ , а вторая часть  $(1 - \beta)$  поступает в дымогарные трубы 2, где омывает испаряющую поверхность. В жаровых трубах топочные газы кроме испаряющей омывают еще и пароперегревательную поверхность 3. При этом часть газов, равная  $\beta'$  и составляющая от всей массы топочных газов величину  $\beta\beta'$ , отдает

тепло перегретому пару, циркулируя между трубками пароперегревателя. Другая часть  $\beta(1-\beta')$  газов передает тепло котловой воде через стенки жаровых труб.

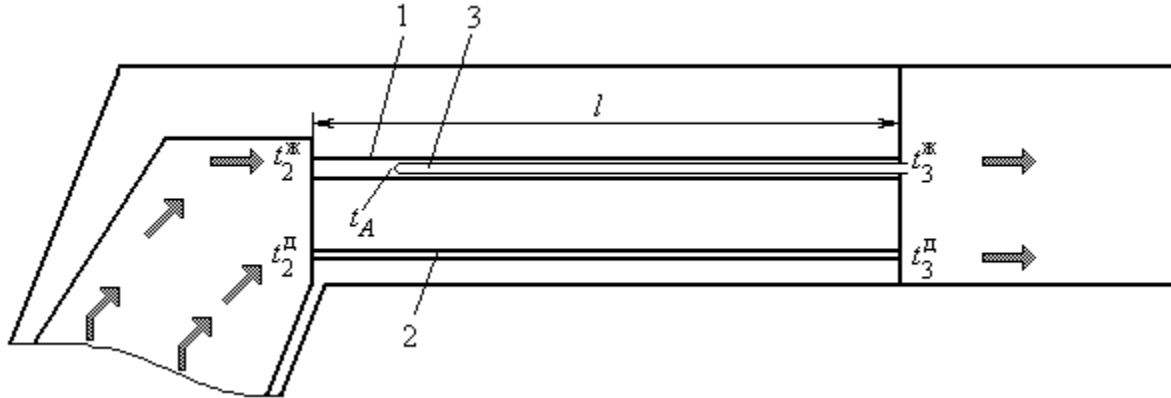


Рис. 4.6. Трубная часть котла

Академик С. П. Сыромятников вывел следующую систему из четырех уравнений, устанавливающих связь между параметрами тепловой работы газового потока в жаротрубном пароперегревателе. Уравнение теплопередачи для экранирующей поверхности нагрева жаровых труб имеет вид

$$\beta(1-\beta') \left[ (M + 2Nt_B) \ln \frac{t_A - t_B}{t_3^ж - t_B} + 2N(t_A - t_3^ж) \right] = k_{ж''} A_{ж''}, \quad (4.39)$$

где  $\beta$  – доля газов, поступающих из топки в жаровые трубы;  $(1-\beta')$  – коэффициент ответвления тепла в жаровых трубах в сторону нагревательной поверхности жаровых труб в области элементов перегревателя;  $M, N$  – коэффициенты уравнения тепла;  $t_B$  – температура котловой воды;  $t_A$  – температура газов у начала элементов перегревателя;  $t_3^ж$  – температура газов, уходящих из жаровых труб;  $k_{ж''}$  – коэффициент теплопередачи в жаровых трубах;  $A_{ж''}$  – поверхность нагрева жаровых труб в области элементов перегревателя.

Выражение для количества тепла, затрачиваемого на осушку и перегрев пара в элементах перегревателя

$$Q_u = \beta\beta' \left[ M(t_A - t_3^ж) + N(t_A^2 - t_3^{ж^2}) \right], \quad (4.40)$$

где  $\beta'$  – коэффициент ответвления тепла в жаровых трубах в сторону перегревательной поверхности.

Уравнение теплопередачи для перегревательной поверхности

$$\frac{Q_u}{\frac{Q_3}{k_{ж''}A_{ж''}} - \frac{t_u - t_B}{2}} = k_u A_u, \quad (4.41)$$

где  $Q_3$  – количество тепла, передаваемого в котел через экранирующую поверхность нагрева жаровых труб на той части их длины, где расположены перегревательные элементы;  $t_u$  – температура перегретого пара;  $k_u$  – коэффициент теплопередачи перегревателя;  $A_u$  – поверхность нагрева перегревателя (газовая).

Коэффициенты теплопередачи жаровых труб и элементов перегревателя определяются по данным в указанной работе эмпирическим формулам:

$$K_{ж''} = 7,44 \left[ \frac{(L_0 \alpha + 1) \mu B_h \beta}{3600 \Omega_{ж''}} \right]^{0,75} \left( \frac{0,0115}{r_{ж''}} \right)^{0,214},$$

$$K_u = 7,00 \left[ \frac{(L_0 \alpha + 1) \mu B_h \beta}{3600 \Omega_{ж''}} \right]^{0,75} \left( \frac{0,0115}{r_{ж''}} \right)^{0,214},$$

где  $L_0$  – теоретический расход воздуха для сжигания 1 кг топлива;  $\alpha$  – коэффициент избытка воздуха;  $\mu$  – коэффициент механической полноты сгорания топлива;  $B_h$  – часовой расход топлива (полный); 0,0115 – гидравлический радиус сечения дымогарной трубы;  $r_{ж''}$  – гидравлический радиус сечения жаровой трубы в области элементов перегревателя;  $\Omega_{ж''}$  – площадь живого сечения жаровых труб в области элементов перегревателя.

Зависимость между количеством тепла  $Q_3$ , передаваемым в котел через экранирующую поверхность нагрева жаровых труб, на той части их длины, где расположены пароперегревательные элементы, и количеством тепла  $Q_u$ , затраченным на осушку и перегрев пара, определяется выражением

$$\frac{Q_3}{Q_u} = \frac{1 - \beta'}{\beta'}. \quad (4.42)$$

Решение системы тепловых уравнений (4.42) в общем виде относительно переменных невозможно, так как число неизвестных больше числа уравнений. Существующие громоздкие графо-аналитические методы решения этих уравнений предполагают определение некоторых параметров с помощью графиков, что, во-первых, снижает точность расчетов, а во-вторых, затрудняет процесс автоматизации управления паровым котлом. Наиболее простой графо-аналитический метод, предложенный М. Я. Белоусовым [9], требует предварительного построения графика зависимости  $(1-\beta')$  и  $t_3^*$  по уравнению (4.39) и последующего задания температуры  $t_u$ , выбор величины которой, к сожалению, никак не оговаривается, поскольку, видимо, это значение задается из интуитивных соображений. В результате этот метод также затруднительно использовать при расчетах необходимых параметров на ЭВМ.

Для устранения указанных недостатков рассмотрим новый метод решения системы тепловых уравнений, предложенной С. П. Сыромятниковым.

Прежде чем приступить к аналитическому решению системы тепловых уравнений и построению математической модели, необходимо получить следующие зависимости: температуры перегретого пара от степени перегрева и давления, средней удельной теплоемкости перегретого пара от температуры и давления и температуры кипения воды от давления. Такие зависимости были выведены автором с использованием табличных данных, приведенных в приложении работы В. В. Сушкова [10]. Вывод формулы для средней удельной теплоемкости здесь не приводится из-за своей громоздкости.

Температура кипения воды  $t_b$  (насыщенного пара) при давлении от 1,2 до 225,65 кг/см<sup>2</sup> (давление в критической точке) достаточно хорошо описывается уравнением

$$t_b = 9,396 + 95,656 \sqrt[4]{p} - \frac{p^{1,521}}{978,2} - \frac{p^{0,81}}{39,2} - \frac{5,74}{p^{0,533 p^{0,3814}}}, \quad (4.43)$$

где  $p$  – давление насыщенного пара в котле, кг/см<sup>2</sup>. При этом относительная погрешность вычислений не превышает 0,06 %.

В диапазоне давлений от 2 до 30 кг/см<sup>2</sup> приемлема более простая формула:

$$t_{\text{в}} = 9,175 + 95,6 \sqrt[4]{p} - \frac{5,21}{p^{0,536p^{0,4}}}. \quad (4.44)$$

Величина погрешности также составляет не более 0,06 %.

При давлениях, характерных для паровозных котлов (от 12 до 25 кг/см<sup>2</sup>), может быть применено еще более простое выражение:

$$t_{\text{в}} = 9,18 + 95,6 \sqrt[4]{p}, \quad (4.45)$$

погрешность вычислений не превышает 0,02 %.

Известно, что зависимость теплоемкостей от температуры многомолекулярных газов не может быть представлена линейной зависимостью, поэтому для расчетов пользуются средним значением весовой теплоемкости  $c_{pm} = \Delta\lambda / (t_u - t_{\text{в}})$ , где  $\Delta\lambda$  – степень перегрева пара. Для давлений от 12 до 20 кгс/см<sup>2</sup> и температур 240 ÷ 500 °С была получена формула, по которой указанная теплоемкость (кДж/кг · °С) может быть подсчитана с относительной погрешностью около 1 %:

$$c_{pm} = \frac{16,34e^{0,094p} + 1,957t_u + 66,2}{t_u}. \quad (4.46)$$

С учетом уравнения (4.46) можно записать

$$\Delta\lambda t_u = (16,34e^{0,094p} + 1,957t_u + 66,2)(t_u - t_{\text{в}}).$$

Преобразовывая выражение (4.46), получим

$$t_u^2 + (8,35e^{0,094p} + 24,65 - 95,6 \sqrt[4]{p} - \Delta\lambda / 1,957)t_u - 76,65e^{0,094p} - 798,26e^{0,094p} \sqrt[4]{p} - 310,56 - 3234 \sqrt[4]{p} = 0, \quad (4.47)$$

откуда температура перегретого пара

$$t_u = \frac{-b + \sqrt{D}}{2}, \quad (4.48)$$

где  $b = 8,35e^{0,094p} + 24,65 - 95,6 \sqrt[4]{p} - \frac{\Delta\lambda}{1,957}$ ;



$$D = \left( 8,35e^{0,094p} + 24,65 - 96,6\sqrt[4]{p} - \frac{\Delta\lambda}{1,957} \right)^2 + 306,6e^{0,094p} + 3193e^{0,094p} \sqrt[4]{p} + 1242 + 12936 \sqrt[4]{p}.$$

Преобразуем уравнение (4.41), поделив числитель и знаменатель левой части на  $Q_u$  и учтя выражение (4.42):

$$\frac{1}{\frac{(1-\beta')}{\beta' k_{ж''} A_{ж''}} - \frac{t_u - t_B}{2Q_u}} = k_u A_u \quad \text{или} \quad 1 = \frac{(1-\beta')}{\beta'} \frac{k_u A_u}{k_{ж''} A_{ж''}} - \frac{k_u A_u}{2Q_u} (t_u - t_B).$$

Обозначая  $\frac{k_u A_u}{k_{ж''} A_{ж''}} = k$ ,  $\frac{k_u A_u}{2Q_u} (t_u - t_B) = \varepsilon$ , получим  $1 = \frac{(1-\beta')}{\beta'} k - \varepsilon$ ,

откуда

$$\beta' = \frac{k}{1+k+\varepsilon}; \quad (1-\beta') = \frac{1+\varepsilon}{1+k+\varepsilon}. \quad (4.49)$$

Преобразуем выражение для  $\varepsilon$ , учитывая, что  $\Delta\lambda = \frac{Q_u}{B_m}$ , где  $B_m$  –

часовой расход пара:

$$\varepsilon = \frac{k_u A_u}{2Q_u} (t_u - t_B) = \frac{k_u A_u}{2B_m c_{pm}} \frac{1}{16,34e^{0,094p} + 1,957t_u + 66,2} t_u. \quad (4.50)$$

Заменим в полученном выражении температуру перегрева пара  $t_u$  на температуру  $t_3^{\text{ж}}$  газов, уходящих из жаровых труб. Чем меньше  $t_u$  будет отличаться от  $t_3^{\text{ж}}$ , тем более равноценной окажется указанная замена, и тем лучше величина  $\varepsilon$  приблизится к своему истинному значению. Далее для получения точного результата можно использовать два варианта.

Первый вариант заключается в следующем. С учетом выражений (4.45), (4.49) преобразовываем уравнение (4.39):

$$\left( \frac{M}{2N} + 9,18 + 95,6\sqrt[4]{p} \right) \ln \frac{t_A - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}}{t_3^{\text{ж}} - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}} + t_A - t_3^{\text{ж}} - \frac{1+k+\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{k_{ж''} A_{ж''}}{\beta 2N} = 0, \quad (4.51)$$

или в развернутом виде (с указанной в уравнении (4.50) заменой  $t_u$  на  $t_3^{\text{ж}}$ )

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M}{2N} + 9,18 + 95,6\sqrt[4]{p} \right) \ln \frac{t_A - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}}{t_3^{\text{ж}} - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}} + t_A - t_3^{\text{ж}} - \\ & \frac{1 + k + \frac{k_u A_u}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957t_3^{\text{ж}} + 66,2)} t_3^{\text{ж}}}{1 + \frac{k_u A_u}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957t_3^{\text{ж}} + 66,2)} t_3^{\text{ж}}} \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{\beta 2N} = \\ & = \left( \frac{M}{2N} + 9,18 + 95,6\sqrt[4]{p} \right) \ln \frac{t_A - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}}{t_3^{\text{ж}} - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}} + t_A - t_3^{\text{ж}} - \\ & - \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957t_3^{\text{ж}} + 66,2)} t_3^{\text{ж}}} \right) \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{\beta 2N} = 0. \quad (4.52) \end{aligned}$$

Данное трансцендентное уравнение содержит только одну неизвестную величину  $t_3^{\text{ж}}$  и легко решается методом дихотомии.

Определив из (4.52) значение  $t_3^{\text{ж}}$ , подставляем его в уравнение (4.50) и находим  $\varepsilon$ , после чего из выражения (4.49) получаем величины  $\beta'$  и  $(1-\beta')$ . Затем подставляем  $t_3^{\text{ж}}$  в уравнение (4.40) и определяем количество тепла  $Q_u$ , затрачиваемого на осушку и перегрев пара. Далее из выражения (4.42) получаем величину  $Q_3$ . После этого находим  $\Delta\lambda$ , определяем коэффициент  $b$  и дискриминант  $D$  уравнения (4.47) и из выражения (4.48) получаем температуру  $t_u$  перегретого пара.

Для проверки тождественности левой и правой частей уравнения (4.41) подставим в него найденные значения  $Q_u$ ,  $Q_3$ ,  $k_{\text{ж}''}$ ,  $A_{\text{ж}''}$ ,  $k_u$ ,  $A_u$ ,  $t_u$  и  $t_b$ . Если левая и правая части будут отличаться не более чем на 2 %, то решение системы уравнений можно считать удовлетворительным, в противном случае нужно повторить расчет, подставив в уравнение (4.50) вместо  $t_3^{\text{ж}}$  уже найденное значение  $t_u$ . Такая итерация позволяет уточнить найденные при первом решении значения  $t_3^{\text{ж}}$ ,  $\varepsilon$ ,  $Q_u$ ,  $Q_3$  и  $t_u$ .

Второй вариант состоит в том, что в пароперегревателях котлов температура перегретого пара обычно колеблется от величины, близкой к  $t_3^{\text{ж}}$ , до значений, в 1,4 – 1,5 раза ее превышающих. Поэтому если принять  $t_u \approx 1,2 t_3^{\text{ж}}$ , то возникающая в результате замены погрешность становится более симметричной (нежели при замене  $t_u$  непосредственно на  $t_3^{\text{ж}}$ ), что очень часто позволяет обойтись в расчетах без итераций. В этом случае уравнения (4.50) и (4.52) примут вид

$$\varepsilon = \frac{k_u A_u}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957 \cdot 1,2 t_3^{\text{ж}} + 66,2)} 1,2 t_3^{\text{ж}}; \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M}{2N} + 9,18 + 95,6\sqrt[4]{p} \right) \ln \frac{t_A - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}}{t_3^{\text{ж}} - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}} + t_A - t_3^{\text{ж}} - \\ & \frac{1 + k + \frac{k_u A_u}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957 \cdot 1,2 t_3^{\text{ж}} + 66,2)} 1,2 t_3^{\text{ж}}}{1 + \frac{k_u A_u}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957 \cdot 1,2 t_3^{\text{ж}} + 66,2)} 1,2 t_3^{\text{ж}}} \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{\beta 2N} = \\ & = \left( \frac{M}{2N} + 9,18 + 95,6\sqrt[4]{p} \right) \ln \frac{t_A - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}}{t_3^{\text{ж}} - 9,18 - 95,6\sqrt[4]{p}} + t_A - t_3^{\text{ж}} - \\ & - \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{2B_m (16,34e^{0,094p} + 1,957 \cdot 1,2 t_3^{\text{ж}} + 66,2)} 1,2 t_3^{\text{ж}}} \right) \frac{k_{\text{ж}''} A_{\text{ж}''}}{\beta 2N} = 0. \quad (4.54) \end{aligned}$$

Решение этого уравнения аналогично предыдущему.

**Пример.** Проведем исследование парового котла мощного советского паровоза ФД, имеющего следующие характеристики:

- газовая поверхность нагрева пароперегревателя  $A_{\text{ж}''} = 185,3 \text{ м}^2$ ;
- поверхность пароперегревателя  $A_u = 134,8 \text{ м}^2$ ;
- коэффициент теплопередачи через поверхность жаровой трубы в области элементов пароперегревателя  $k_{\text{ж}''} = 55,14 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°С} = 198,5 \text{ кДж/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{°С}$ ;

- коэффициент теплопередачи для пароперегревательной поверхности  $k_u = 51,83 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°С} = 186,6 \text{ кДж/м}^2 \cdot \text{ч} \cdot \text{°С}$ ;
- коэффициент, определяющий ту часть топочных газов, которая направляется в жаровые трубы,  $\beta = 0,831$ ;
- коэффициент уравнения тепла  $M = 25\,190 \text{ кДж/ч} \cdot \text{°С}$ ;
- коэффициент уравнения тепла  $N = 2,7529 \text{ кДж/(ч} \cdot \text{°С)}^2$ ;
- температура газов у начала пароперегревателя  $t_A = 1131 \text{ °С}$ ;
- температура котловой воды  $t_B = 200 \text{ °С}$ ;
- расход пара  $B_m = 12\,000 \text{ кг/ч}$ .

Тепловой расчет подбором по известному методу [4] дает следующие результаты:

1. Количество тепла, затрачиваемого на осушку и перегрев пара в пароперегревательных элементах,  $Q_u = 6\,465\,787 \text{ кДж/ч}$ .

2. Количество тепла, передаваемого в котел через экранирующую поверхность нагрева жаровых труб в области пароперегревателя,  $Q_s = 13\,792\,501 \text{ кДж/ч}$ .

3. Степень перегрева пара и его теплосодержание  $\lambda_u = \Delta\lambda + i''$ , где  $i''$  – энтальпия сухого насыщенного пара;

$$\Delta\lambda = \frac{6\,465\,787}{12\,000} = 538,8 \text{ кДж/кг};$$

$$\lambda_u = 538,8 + 2\,795 = 3\,333,8 \text{ кДж/кг}.$$

4. Коэффициент отвлечения тепла в сторону пароперегревательной поверхности  $\beta' = 0,3192$ .

5. Температура перегрева пара  $t_u = 436,6 \text{ °С}$ .

6. Температура газов, выходящих из жаровых труб,  $t_3^{\text{ж}} = 293,6 \text{ °С}$ .

7. Относительная погрешность несовпадения правой и левой частей уравнения (4.41) 0,05 %.

Результаты теплового расчета по выведенным уравнениям сведены в таблицу.

Параметр	Известный метод, результат решения	Новый метод								
		1-й вариант						2-й вариант		
		Результат решения	Расчетные формулы	Относительная погрешность, %	Результат итерации	Расчетные формулы	Относительная погрешность, %	Результат решения	Расчетные формулы	Относительная погрешность, %
$t_3^{\text{ж}}$	293,6	292,1	(4.52)	-0,5	293,6	(4.52)	0	292,9	(4.54)	-0,2
$\varepsilon$	–	0,4310	(4.50)	–	0,4613	(4.50)	–	0,4457	(4.53)	–
$\beta'$	0,3192	0,3234	(4.49)	1,3	0,3188	(4.49)	-0,1	0,3211	(4.49)	0,6
$Q_{\text{и}}$	6 465 787	6 561 364	(4.40)	1,5	6 468 508	(4.40)	0,04	6 510 794	(4.40)	0,7
$Q_{\text{э}}$	13 792 501	13 729 443	(4.42)	-0,5	13 822 300	(4.42)	0,2	13 763 473	(4.42)	-0,2
$\Delta\lambda$	538,8	546,8	–	1,5	539	–	0,03	542,6	–	0,7
$\lambda_{\text{и}}$	3 333,8	3 341,8	–	0,2	3 334	–	0,006	3 337,6	–	0,1
$t_{\text{и}}$	436,6	440,6	(4.48)	0,9	436,9	(4.48)	0,07	438,6	(4.48)	0,5
$\neq$	0,05	3,1	(4.41)	–	0,05	(4.41)	–	1,5	(4.41)	–

Из таблицы видно, что решение по первому варианту после одной итерации дает уже очень хороший результат. Относительная погрешность температуры перегретого пара не превышает 0,07 %, а температуры газов, уходящих из жаровых труб, равна нулю. При этом левая и правая части уравнения (4.41) отличаются на 0,05 %. Вторым вариантом достигается тоже неплохой результат, вполне приемлемый для практических расчетов.

Разработанный аналитический метод решения системы тепловых уравнений позволяет с высокой точностью находить параметры перегретого пара с помощью компьютера и осуществлять автоматическое управление паровым котлом. Кроме того, этот метод может быть применен при проектировании пароперегревателей.

#### 4.5. Определение параметров перегретого пара

Паровоз работает на перегретом паре. Перегрев пара должен быть таким, чтобы в процессе его расширения в паровой машине не образовывался конденсат. Для этого отсечка пара, определяющая степень его расширения, и температура перегрева должны быть согласо-

ваны между собой. При этом необходимо следить за отсутствием утечек пара через парораспределительные органы и поршень пара, чтобы его масса оставалась величиной постоянной.

Внутренняя энергия  $U$  перегретого пара

$$U = U'' + \Delta\lambda - Ap(v - v''), \quad (4.55)$$

где  $U''$  – внутренняя энергия сухого насыщенного пара;  $\Delta\lambda$  – теплота перегрева пара;  $A$  – тепловой эквивалент работы;  $p$  – давление перегретого пара, кг/см<sup>2</sup>;  $v$  – удельный объем перегретого пара;  $v''$  – удельный объем сухого насыщенного пара;.

Внутренняя энергия сухого насыщенного пара

$$U'' = U' + \rho^*, \quad (4.56)$$

где  $U'$  – внутренняя энергия воды;  $\rho^*$  – работа дисгрегации (перевода жидкости в пар, т. е. преодоление сил сцепления между молекулами жидкости).

При невысоких давлениях можно принять внутреннюю энергию жидкости равной ее теплоте  $q'$  или ее энтальпии  $i'$ , т. е.  $U' \approx q' \approx i'$ . Работа дисгрегации равна разности между теплотой парообразования  $r$  и работой расширения  $\psi$ , т. е.  $\rho^* = r - \psi$ , причем  $\psi = Ap(v'' - v')$ . Тогда уравнение (4.56) примет вид

$$U'' = i' + r - Ap(v'' - v'), \quad (4.57)$$

где  $r$  – теплота парообразования;  $v'$  – удельный объем жидкости.

Подставляя выражение (4.57) в уравнение (4.55), получаем

$$U = i' + r - Ap(v'' - v') + \Delta\lambda - Ap(v - v'') = r + i' + \Delta\lambda - Ap(v - v'). \quad (4.58)$$

Для нахождения теплоты парообразования  $r$  воспользуемся известным уравнением Клапейрона – Клаузиуса  $\frac{r}{T_B} = A(v'' - v') \frac{dp}{dT_B}$ , где  $T_B$  – температура кипения воды (насыщенного сухого пара), К.

Учитывая, что  $T_B = t_B + 273$ , выразим из уравнения (4.45) давление

$$p = \left( \frac{T_B - 282,18}{95,6} \right)^4 \text{ и найдем } \frac{dp}{dT_B} : \quad (4.59)$$

$$\frac{dp}{dT_B} = \frac{4}{95,6} \left( \frac{T_B - 282,18}{95,6} \right)^3.$$

Для нахождения  $v'$  и  $(v'' - v')$  автор предлагает следующие формулы (вывод некоторых формул из-за громоздкости не приводится):

$$v' = 1,01 \cdot 10^{-3} p^{0,05}; \quad (v'' - v') = 1,73 p^{-0,947}. \quad (4.60)$$

Теплоту перегрева пара выражаем через среднюю удельную теплоемкость  $\Delta\lambda = c_{pm}(t_u - t_b)$ . Для нахождения  $c_{pm}$  в диапазоне давлений  $1 \div 20$  кг/см<sup>2</sup> и температур от 180 до 600 °С можно воспользоваться разработанной автором формулой:

$$c_{pm} = \frac{16,34e^{0,094p} + \frac{2,03(p+2)}{p+3,5}t_u + 66,2}{t_u} + \frac{t_u}{954,65P^{0,46}}, \quad (4.61)$$

где  $t_u$  – температура перегретого пара, °С.

Возможно применение более точных формул, которые были разработаны для определенных величин давлений:

1) при  $p = 1$  атм

$$c_{pm} = \frac{0,8765}{(t_u + 273)^{0,122}} + 1,24 \cdot 10^{-4} (t_u + 273) + \frac{2,2 \cdot 10^{13}}{t_u^7}; \quad (4.61a)$$

2) при  $p = 5$  атм

$$c_{pm} = \frac{3,0806566}{(t_u + 273)^{0,32}} + 1,78 \cdot 10^{-4} (t_u + 273) + \frac{2,2 \cdot 10^{13,65}}{t_u^7}; \quad (4.61b)$$

3) при  $p = 10$  атм

$$c_{pm} = \frac{7,7510375}{(t_u + 273)^{0,458}} + 2 \cdot 10^{-4} (t_u + 273) + \frac{2,2 \cdot 10^{14,14}}{t_u^7}; \quad (4.61b)$$

4) при  $p = 20$  атм

$$c_{pm} = \frac{44,2837}{(t_u + 273)^{0,72}} + 2,4 \cdot 10^{-4} (t_u + 273) + \frac{2,2 \cdot 10^{14,81}}{t_u^7}. \quad (4.61g)$$

В формулах (4.61a) – (4.61г) размерность теплоемкости – ккал/(кг · град), для получения размерности в кДж/(кг · град) необходимо рассчитанную по формуле величину умножить на коэффициент 4,19.

С учетом выражений (4.59), (4.60) теплота парообразования, ккал/кг,

$$r = 1,92 \cdot 10^{-6} T_{\text{в}} (t_{\text{в}} - 9,18)^3 p^{-0,947}. \quad (4.62)$$

Температура и давление насыщенного пара – взаимосвязанные величины, поэтому  $r$  можно выразить через какой-нибудь один параметр, например через температуру:

$$r = 856,6 - T_{\text{в}}^{0,97}, \quad (4.63)$$

при этом погрешность определения  $r$  не превышает 0,5 %. Однако если в эту формулу ввести уточняющий коэффициент, то в диапазоне давлений от 1 до 20 кг/см<sup>2</sup> указанную погрешность можно снизить практически на порядок. После введения указанной поправки формула (4.63) примет вид

$$r = 858,1 - T_{\text{в}}^{0,97} - 1,53 \cdot 10^{-3} (169 - t_{\text{в}})^2. \quad (4.64)$$

Энтальпию воды, ккал/кг, автор предлагает вычислять по формуле

$$i' = 5 + 95,6 p^{0,266}, \quad (4.65)$$

которая в диапазоне от 2 до 20 кг/см<sup>2</sup> имеет погрешность не более 0,5 %.

Если ввести в формулу (4.65) уточняющий коэффициент, то величина погрешности уменьшается до 0,06 %. Формула в этом случае будет иметь следующий вид:

$$i' = 5,74 + 95,5 p^{0,266} - 2,5 \cdot 10^{-4} (124 - t_{\text{в}})^2 - \frac{2,05}{p^{1,78}}. \quad (4.66)$$

Для нахождения удельного объема перегретого пара была получена формула

$$v = \frac{\frac{6,85}{5 - p^{0,2}} + 0,005 (t_{\text{у}} - 100 p^{0,251})}{p}. \quad (4.67)$$

Кроме того, автором была также разработана более точная формула, которая с погрешностью не более 0,06 % позволяет находить удельный объем перегретого пара:



$$v = \frac{47(t_u + 273)}{10^4 p} - \frac{20,55}{t_u^{1,4}} - 2,2 \cdot 10^{-6} t_u - \frac{14,5 p^{1,05} - 123,25}{10^{-6} t_u^{4,8}} + 10^{-6} t_u^{0,89} \left( 8 + \frac{120}{(1,6 + p)^2} \right) + p^{0,75} t_u^{-7} \left( 3,2 \cdot 10^{11} - \frac{2 \cdot 10^{19}}{(13,8 + p)^{5,93}} - 6 \cdot 10^9 p^{1,32} \right). \quad (4.68)$$

Тогда величина внутренней энергии перегретого пара с учетом уравнений (4.58), (4.60), (4.63) и (4.67) будет равна

$$U = \Delta\lambda + 861,6 - T_B^{0,97} + 95,6 p^{0,266} - A \left( \frac{68500}{5 - p^{0,2}} + 50(t_u - 100 p^{0,251}) - 10,1 p^{1,05} \right). \quad (4.69)$$

Преобразуем формулу (4.69):

$$U = \Delta\lambda + 858,1 - T_B^{0,97} - 1,6 \cdot 10^{-3} (169 - t_B)^2 + 5,74 + 95,5 p^{0,266} - 2,5 \cdot 10^{-4} (124 - t_B)^2 - A \left( \frac{68500}{5 - p^{0,2}} + 50(t_u - 100 p^{0,251}) - 10,1 p^{1,05} \right)$$

или окончательно

$$U = \Delta\lambda + 814,3 + 0,6028 t_B - 1,85 \cdot 10^{-3} t_B^2 - T_B^{0,97} + 95,5 p^{0,266} - A \left( \frac{68500}{5 - p^{0,2}} + 50(t_u - 100 p^{0,251}) - 10,1 p^{1,05} \right). \quad (4.70)$$

Для проверки точности полученных математических моделей, общий принцип построения которых изложен в этой главе, найдем удельную теплоемкость, теплоту парообразования, удельный объем, теплоту перегрева, энтальпию и внутреннюю энергию перегретого пара, который имеет давление 20 атм и температуру 460 °С. В скобках указаны соответствующие параметры, приведенные в таблицах [10], и относительная погрешность вычислений.

Из уравнения (4.61) получаем

$$c_{pm} = \frac{16,34e^{0,094 \cdot 20} + \frac{2,03(20+2)}{20+3,5} 460 + 66,2}{460} + \frac{460}{954,65 \cdot 20^{0,46}} =$$

$$= 2,396 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 0,572 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \quad (0,559; \delta = 2,3 \%),$$

а по формуле (4.61Г)

$$c_{pm} = \frac{44,2837}{(460+273)^{0,72}} + 2,4 \cdot 10^{-4} (460+273) + \frac{2,2 \cdot 10^{14,81}}{460^7} =$$

$$= 0,559 \text{ ккал}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \quad (\delta = 0 \%).$$

Из уравнения (4.45) или из таблиц при давлении пара  $p = 20$  атм  $t_B = 211,4$  °С. Тогда, подставляя это значение в выражение (4.63), вычислим теплоту парообразования  $r = 856,6 - (211,4 + 273)^{0,97} = 454,2$  ккал/кг (452,7;  $\delta = 0,5 \%$ ), а по формуле (4.64)  $r = 858,1 - (484,4)^{0,97} - 1,53 \cdot 10^{-3} (169 - 211,4)^2 = 452,9$  ккал/кг ( $\delta = 0,04 \%$ ).

По формуле (4.67) удельный объем пара

$$v = \frac{\frac{6,85}{5 - 20^{0,2}} + 0,005(460 - 100 \cdot 20^{0,251})}{20} = 0,1697 \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (0,1692; \delta = 0,3 \%),$$

по формуле (4.68)  $v = \frac{47(460+273)}{10^4 20} - \frac{20,55}{460^{1,4}} - 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot 460 -$

$$- \frac{14,5 \cdot 20^{1,05} - 123,25}{10^{-6} \cdot 460^{4,8}} + 10^{-6} \cdot 460^{0,89} \left( 8 + \frac{120}{(1,6+20)^2} \right) + 20^{0,75} \cdot 460^{-7} \times$$

$$\times \left( 3,2 \cdot 10^{11} - \frac{2 \cdot 10^{19}}{(13,8+20)^{5,93}} - 6 \cdot 10^9 \cdot 20^{1,32} \right) = 0,1693, \quad (\delta = 0,05 \%).$$

Теплота перегрева при значении удельной теплоемкости, найденной по формуле (4.61Г), будет равна  $\Delta\lambda = 0,559(460 - 211,4) = 138,97$  ккал/кг (139;  $\delta = -0,02 \%$ ).

Для определения энтальпии перегретого пара, которая равна  $i = i' + r + \Delta\lambda$ , предварительно найдем энтальпию воды из уравнения (4.65):  $i' = 5 + 95,6 \cdot 20^{0,266} = 217$  ккал/кг (215,8;  $\delta = 0,5$  %). По формуле (4.66)  $i' = 5,74 + 95,5 \cdot 20^{0,266} - 2,5 \cdot 10^{-4} (124 - 211,4)^2 - \frac{2,05}{20^{1,78}} = 215,7$  ( $\delta = -0,05$  %).

Энтальпия перегретого пара  $i = 215,7 + 452,9 + 138,97 = 807,57$  ккал/кг (807,5;  $\delta = 0,01$  %).

Из выражения (4.70) внутренняя энергия перегретого пара, ккал/кг,  $U = 138,97 + 814,3 + 0,6028 \cdot 211,4 - 1,85 \cdot 10^{-3} \cdot 211,4^2 - 484,4^{0,97} + 95,5 \cdot 20^{0,266} - \frac{1}{427} \left( \frac{68500}{5 - 20^{0,2}} + 50(460 - 100 \cdot 20^{0,251}) - 10,1 \cdot 20^{1,05} \right) = 728,58$  (728,3;  $\delta = 0,04$  %).

Таким образом, разработанные формулы позволяют легко и с достаточной точностью вычислять все параметры водяного пара.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. Напишите формулу, по которой можно вычислить скорость жидкости, вытекающей из бокового отверстия резервуара.
2. Напишите дифференциальное уравнение для скорости жидкости, вытекающей из двух боковых отверстий, исходя из равенства объемов убывающей в резервуаре жидкости и вытекающей из отверстий.
3. Каким образом можно построить математическую модель системы (процесса), когда число неизвестных больше числа уравнений, связывающих эти переменные?
4. Что такое итерация?
5. Что такое энтальпия перегретого пара?

## Глава 5

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Построение модели физического процесса, как правило, основывается на причинно-следственной связи между отдельными его моментами и общим его ходом. Поэтому, прежде всего, необходимо выявить эти связи, описать их математически в виде определенных зависимостей, которые потом следует использовать для составления дифференциальных уравнений. Методы дифференциального исчисления применяются в том случае, когда решение технической задачи иными путями невозможно.

Составление дифференциальных уравнений является эвристической задачей, поскольку для их составления не существует общих методов, и навыки в этом вопросе могут быть приобретены лишь в результате решения конкретных задач.

Рассмотрим процесс распространения тепла в топке (топочном пространстве) парового котла паровоза.

#### **5.1. Метод определения температурного режима паровозной топки**

Сегодня всё актуальнее становятся задачи эффективного использования твердого топлива в энергетике и на транспорте. В настоящее время железнодорожный транспорт работает преимущественно на электрической и дизельной тяге, в результате чего такое доступное и относительно дешевое топливо, как каменный уголь, остается не востребованным, если не считать его использование на ТЭЦ, вырабатывающей электрическую энергию для электровоза. Замена в конце 50-х – начале 60-х годов XX века паровозов электровозами и тепловозами привела не к снижению себестоимости перевозок на железнодорожном транспорте, а наоборот, к их росту. Более того, стоимость перевозимого по железным дорогам груза будет увеличиваться и дальше вследствие постоянного удорожания электроэнергии и нефтепродуктов. Все это делает услуги железнодорожного транспорта невыгодными, снижает грузопассажирский оборот и прибыль и в конечном счете сдерживает развитие экономики страны и рост благососто-

яния населения. Кроме того, используемое в дизелях тепловозов топливо наносит вред окружающей среде. Загрязнение воздуха железнодорожным транспортом больше всего ощущается в районах, где эксплуатируются тепловозы. Их отработанные газы содержат до 97 % всех токсичных веществ, выделяемых данным видом транспорта.

Применяя новые технологии при сжигании твердого топлива на паровозе, можно превратить его в более совершенную тепловую машину и сделать экологически чистым транспортом XXI века [11]. Не затрагивая здесь вопросов о повышении КПД паровоза и возможном устранении других недостатков, остановимся на наиболее важной и ответственной части паровозного котла – топке.

В процессе работы на старых паровозах у локомотивной бригады много сил и времени уходило на обслуживание котла. Для создания более совершенного паровоза нужно создать систему автоматического управления его тепловым процессом, которая позволила бы автоматизировать все операции (в том числе, и контроля), связанные с отоплением и приготовлением пара. Для этого, в первую очередь, необходимо знать температуры, развивающиеся в топке, а также количество тепла, уносимого с газами в трубную часть котла и передаваемого котловой воде непосредственно через стенки топки излучением и конвекцией.

В работе [3] дан приближенный (графо-аналитический) метод построения температурных диаграмм топки паровоза. Несмотря на свою простоту и наглядность, он обладает и рядом недостатков, поскольку содержит элемент субъективности при определении конфигурации кривых и требует, как правило, нескольких вариантов расчета, из которых потом выбирается наиболее подходящий. Необходимость построения графиков для последующего нахождения температур в топке затрудняет прогнозирование и автоматическое управление топочным процессом в реальном масштабе времени. С целью устранения указанных недостатков был разработан описанный ниже метод, который может быть применен для моделирования работы паровозной и других видов топок.

Температурный режим работы топки характеризуется семейством кривых, показанных на рис. 5.1. Прямая  $cd$  соответствует теоретической температуре  $t_0$  горения, получаемой из уравнения тепла

при полном сгорании. Кривая  $(t_1)_x$  ( $ae$ ) изменения действительной температуры  $t_1$  показывает темп догорания выделившихся из топлива летучих. Кривой  $af$  соответствуют величины температур  $t^*$ , устанавливающиеся в результате отдачи тепла излучением. Кривая  $(t_2)_x$  ( $ag$ ) отражает закон изменения действительной температуры  $t_2$  топочного пространства. Отрезки ординат между прямой  $cd$  и кривой  $ae$  соответствуют величинам температурных вычетов, обусловленных потерями горения; отрезки ординат между кривыми  $ae$  и  $af$  представляют собой температурные вычеты в результате отдачи тепла излучением, а между кривыми  $af$  и  $ag$  – конвекционной теплоотдачи.

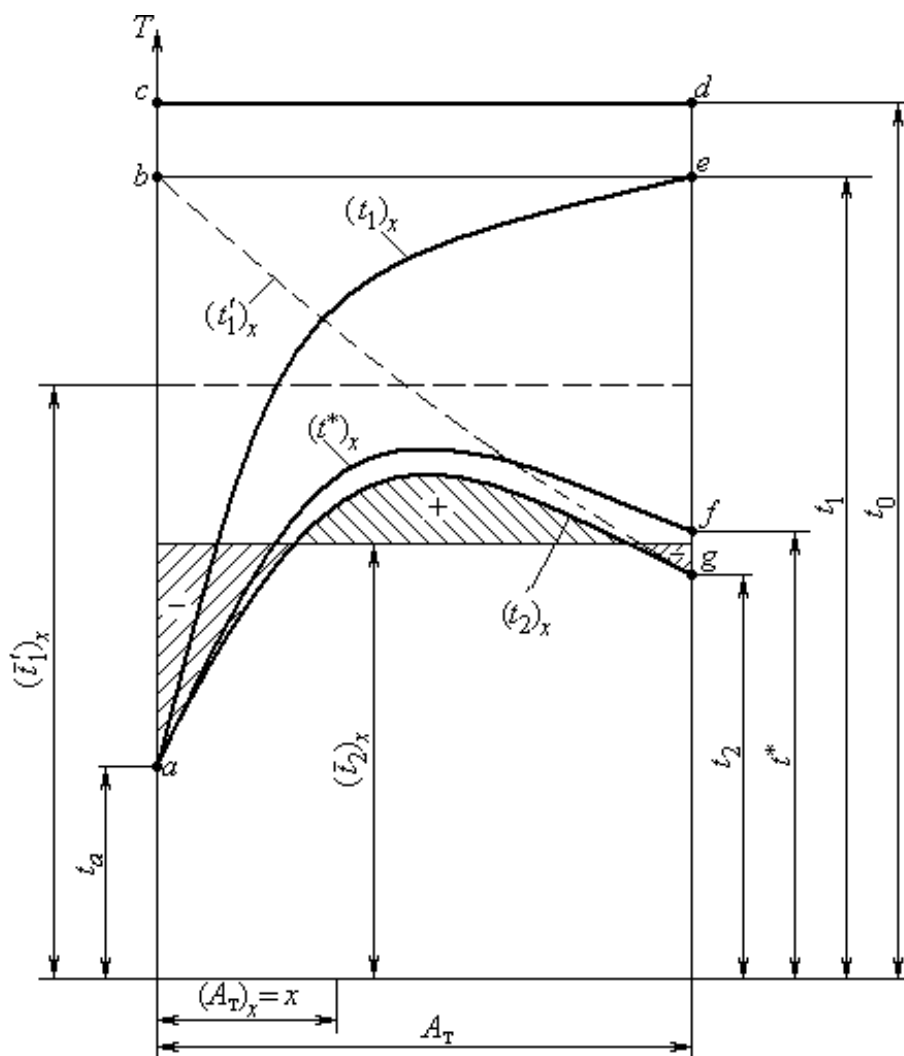


Рис. 5.1. Кривые, характеризующие температурный режим работы топки

В работе [3] также даны уравнения тепла и теплопередачи, применяемые для исследования тепловой работы паровозного котла.

Уравнение тепла представляет собой зависимость между температурой газового потока в сечении газохода и количеством тепла  $Q$ , которое проходит через данное сечение:

$$Q = Mt + Nt^2, \quad (5.1)$$

где  $M = \mu B_h G_b c$ ,  $N = \mu B_h G_b \delta$  – коэффициенты, в которых произведения  $G_b c$  и  $G_b \delta$  определяются по формулам

$$G_b c = 0,55 \frac{C}{CO_2 + CO} + 2,1 \cdot 10^{-3} C + 4,06 \cdot 10^{-2} H + 4,5 \cdot 10^{-3} W,$$

$$G_b \delta = 4,45 \cdot 10^{-5} \frac{C}{CO_2 + CO} + 1,3 \cdot 10^{-6} C + 4,4 \cdot 10^{-6} H + 5 \cdot 10^{-7} W,$$

где  $C$ ,  $H$ ,  $W$  – соответственно содержание углерода, водорода и воды в топливе;  $CO$ ,  $CO_2$  – соответственно содержание окиси углерода и углекислого газа в продуктах сгорания;  $\mu$  – коэффициент механической полноты сгорания;  $B_h$  – количество израсходованного в час топлива.

Уравнение теплопередачи устанавливает зависимость между температурой газового потока в сечении и теплом, полученным омываемой газами поверхностью до этого сечения:

$$(M + 2Nt_B) \ln \frac{t_H - t_B}{t_K - t_B} + 2N(t_H - t_K) = kA, \quad (5.2)$$

где  $t_B$  – температура воды в котле;  $t_H$ ,  $t_K$  – температуры газов в начале и конце участка;  $k$  – коэффициент теплопередачи через поверхность нагрева;  $A$  – площадь омываемой газами поверхности.

Если известны начальная и конечная температуры газов и величина поверхности нагрева, то из уравнения (5.2) можно определить коэффициент теплопередачи, после чего появляется возможность определения температуры газов в любом промежуточном сечении.

Запишем уравнение теплопередачи применительно к топке паровоза:

$$(M + 2Nt_B) \ln \frac{t_1 - t_B}{(t_1)_x - t_B} + 2N(t_1 - (t_1)_x) = k_T (A_T)_x, \quad (5.3)$$

где  $(t_1)'_x$  – условная действительная температура в сечении  $x$  топки;  $k_T$  – коэффициент теплопередачи стенок топки;  $(A_T)_x = x$  – площадь поверхности топки до сечения  $x$ .

Кривая  $bg$ , построенная по уравнению (5.3), показана на рис. 5.1 пунктиром. В начальный момент времени, соответствующий  $(A_T)_x = 0$ , температура могла бы быть равной значению  $t_1$  только в том случае, если бы отсутствовали химические потери горения, обусловленные постепенным вступлением в реакцию горения летучих, выделяющихся из топлива в процессе его распада. Очевидно, что в первоначальный момент эти потери имеют весьма большую величину, определяемую теплосодержанием летучих.

Количества тепла  $Q_T$ , отдаваемого газами через поверхность топки, равно

$$Q_T = (Mt_1 + Nt_1^2) - (Mt_2 + Nt_2^2) = M(t_1 - t_2) + N(t_1^2 - t_2^2). \quad (5.4)$$

Выражая это количество тепла через среднюю величину температуры  $(\bar{t}_1)'_x$  газов, будем иметь

$$Q_T = k_T A_T ((\bar{t}_1)'_x - t_B), \quad (5.5)$$

где  $A_T$  – площадь поверхности топки.

Приравняв правые части уравнений (5.4) и (5.5), получим выражение для средней условной действительной температуры  $(\bar{t}_1)'_x$  газов:

$$(\bar{t}_1)'_x = t_B + \frac{M(t_1 - t_2) + N(t_1^2 - t_2^2)}{k_T A_T}. \quad (5.6)$$

Принимая во внимание уравнение (5.3) и учитывая, что в конце топочной поверхности  $(\bar{t}_1)'_x = t_2$  (см. рис. 5.1), уравнение (5.6) можно переписать в виде

$$(\bar{t}_1)'_x = t_B + \frac{M(t_1 - t_2) + N(t_1^2 - t_2^2)}{(M + 2Nt_B) \ln \frac{t_1 - t_B}{t_2 - t_B} + 2N(t_1 - t_2)}. \quad (5.7)$$



Если использовать более простую зависимость теплоемкости газов от температуры, взяв в выражении (5.7)  $N = 0$ , то последнее примет вид

$$(\bar{t}_1)_x = t_B + \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{t_1 - t_B}{t_2 - t_B}}. \quad (5.8)$$

Количество тепла, отдаваемое через топочную поверхность нагрева, может быть выражено

$$Q_T = (Q_0 - Q_2' - Q_2'') - (Mt_2 + Nt_2^2), \quad (5.9)$$

где  $Q_0$  – располагаемое тепло;  $Q_2'$  – потеря тепла от химической неполноты сгорания;  $Q_2''$  – потеря тепла от механической неполноты сгорания;  $t_2$  – температура газов на выходе из топки (на входе в трубную часть котла).

Учитывая, что указанное тепло передается соприкосновением через стенки и лучеиспусканием, будем иметь

$$Q_T = k_T A_T ((\bar{t}_2)_x - t_B) + \sigma_0 A_{\text{л}} \left[ \left( \frac{(\bar{t}_2)_x + 273}{100} \right)^4 - \left( \frac{t_B + 273}{100} \right)^4 \right], \quad (5.10)$$

где  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана;  $A_{\text{л}}$  – поверхность лучеиспускания.

Приравнивая правые части уравнений (5.9) и (5.10) и пренебрегая последним членом в квадратных скобках ввиду его относительной малости, получим

$$(Q_0 - Q_2' - Q_2'') - (Mt_2 + Nt_2^2) = k_T A_T ((\bar{t}_2)_x - t_B) + \sigma A_{\text{л}} \left( \frac{(\bar{t}_2)_x + 273}{100} \right)^4, \quad (5.11)$$

Из уравнения (5.11) методом дихотомии или пробных подстановок находим значение  $(\bar{t}_2)_x$ . В соответствии с уравнением (5.1)

$$Q_0 - (Q_2' + Q_2'') = Mt_1 + Nt_1^2, \quad (5.12)$$

откуда

$$t_1 = \frac{\sqrt{M^2 + 4N(Q_0 - Q_2' - Q_2'')} - M}{2N}. \quad (5.13)$$

Примем  $A_T = 1$  и  $t_1 = 1$ , тогда площадь под прямой  $be$  будет тоже равна единице. Если бы в начальный момент  $((A_T)_x = 0)$  температура могла бы достичь значения  $t_1$ , то выделившееся тепло (площадь под прямой  $be$ ) было бы израсходовано так, что в результате средняя температура газов равнялась  $(\bar{t}'_1)_x$ , причем закон изменения температуры  $(\bar{t}'_1)_x$  в соответствии с выражением (5.3) отражался бы кривой  $bg$ . Однако из-за потерь тепла температура  $t_1$  нарастает по кривой  $ae$ , а в результате выделившегося тепла (площадь под кривой  $ae$ ) действительная температура будет меняться по кривой  $ag$ , и средняя температура газов будет равна  $(\bar{t}_2)_x$ . Поэтому примем отношение площадей под кривой  $ae$  и прямой  $be$  равным отношению температур  $(\bar{t}_2)_x$  и  $(\bar{t}'_1)_x$  или, что то же самое, – отношение температур  $(\bar{t}_2)_x$  и  $(\bar{t}'_1)_x$  равным площади под кривой  $ae$ . Исходя из этого, можно записать

$$\frac{(\bar{t}_2)_x}{(\bar{t}'_1)_x} = S, \quad (5.14)$$

где  $S$  – площадь под кривой  $ae$ .

В газовом потоке над поверхностью угля имеет место резкий градиент температур, связанный с термическим разгоном реакции горения. Скорость горения летучих будет обуславливаться скоростью их выделения из твердого топлива и концентрацией реагирующих веществ. Результаты работы [12] показывают, что закономерности выделения фракций летучих в целом охватываются уравнением скорости первого порядка, поэтому для математического описания кривой  $ae$  возьмем дробно-линейную функцию вида

$$y = a + \frac{b + x}{c + x}. \quad (5.15)$$

Проинтегрируем эту функцию и получим выражение для площади  $(S)_x$  под кривой  $ae$  в общем случае на участке от  $x = x_H$  до  $x = x_K$ :

$$(S)_x = \int_{x_H}^{x_K} \left( a + \frac{b + x}{c + x} \right) dx = a(x_K - x_H) + x_K - x_H + (b - c) \ln \left| \frac{c + x_K}{c + x_H} \right|. \quad (5.16)$$

При  $x_{\text{н}} = 0$  и  $x_{\text{к}} = 1$  получим величину площади под всей кривой  $ae$ :

$$S = a + 1 + (b - c) \ln \left| \frac{c+1}{c} \right|. \quad (5.17)$$

При  $x = 0$  температура в топке равна  $t_a$ , что в долях составит  $g = \frac{t_a}{t_1} = y$ . При  $x = 1$  температура в топке будет соответствовать  $t_1$  или  $y = 1$ . На основании этого и с учетом уравнений (5.15), (5.17) можно составить систему из трех уравнений, имеющих неизвестные  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$\left. \begin{aligned} g &= a + \frac{b}{c}; \\ 1 &= a + \frac{b+1}{c+1}; \\ S &= a + 1 + (b - c) \ln \left| \frac{c+1}{c} \right|. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

Решая эту систему, получим трансцендентное уравнение:

$$S = 1 + (1 - g)c + c(1 + c)(g - 1) \ln \left| \frac{c+1}{c} \right|, \quad (5.19)$$

из которого методом дихотомии (или подстановкой) находим параметр  $c$  и определяем коэффициенты:  $a = (1 - g)c$  и  $b = (g - a)c$ .

Подставив полученные значения коэффициентов в уравнение (5.15), можно найти значение температуры  $(t_1)_x$  в любой точке топочного пространства. Кривая  $(t_1)_x = f(x)$  изменения температуры горения  $t_1$  характеризует темп догорания выделившихся из топлива летучих. По этой кривой подсчитываются потери  $(Q_2')_x$  от химической неполноты сгорания в требуемом месте топки. Из уравнения (5.1)

$$(Q_2')_x = Q_0 - Q_2'' - \left[ M(t_1)_x - N((t_1)_x)^2 \right], \quad (5.20)$$

или в процентах от располагаемого тепла

$$(q_2')_x = \frac{Q_0 - Q_2'' - M(t_1)_x - N((t_1)_x)^2}{Q_0} 100. \quad (5.21)$$

Далее переходим к определению закона изменения действительной температуры топочного пространства, которая вследствие наличия в топке лучеиспускания и конвекции значительно ниже  $(t_1)_x$ . Величина температуры  $t_2$  в точке  $g$  кривой  $ag$  находится непосредственно из опыта, путем измерения температуры газов. Для вычисления ординат кривой  $ag$  в других точках поступим следующим образом.

На бесконечно малом участке  $\Delta x$   $(t_2)_x$  будет приближаться к средней температуре  $(\bar{t}_2)_{\Delta x}$  газов на этом участке. То же можно сказать и относительно температур  $(t_1')_x$  и  $(t_1')_{\Delta x}$ . Поэтому с учетом выражения (5.14) можно записать

$$\frac{(t_2)_x}{(t_1')_x} = \frac{(t_1)_x}{t_1} = \frac{(t_1)_x}{1}. \quad (5.22)$$

Заменяя пунктирную линию  $bg$ , имеющую небольшую кривизну, на прямую, получаем уравнение для нахождения  $(t_1')_x$ :

$$(t_1')_x = 1 - x(1 - t_2), \quad (5.23)$$

которое значительно проще выражения (5.3). Тогда соотношение (5.22) примет вид

$$\frac{(t_2)_x}{1 - x(1 - t_2)} = a + \frac{b + x}{c + x}, \quad (5.24)$$

откуда получим окончательное выражение для нахождения  $(t_2)_x$ :

$$(t_2)_x = [1 - x(1 - t_2)] \left( a + \frac{b + x}{c + x} \right). \quad (5.25)$$

Таким образом, без каких-либо субъективных оценок и графических построений вычисляют важные параметры топочного процесса – температуру горения  $(t_1)_x$ , действительную температуру  $(t_2)_x$  газов и химическую неполноту сгорания  $(Q_2')_x$  топлива в любой точке топки, что часто бывает вполне достаточным для управления ее работой.

Уравнения (5.15) и (5.25) дают возможность вычислить температуру горения  $(t_1)_x$  и действительную температуру топочного пространства  $(t_2)_x$  в любом месте топочного пространства.

Уравнения (5.20), (5.21) позволяют подсчитать потери  $(Q_2')_x$ ,  $(q_2')_x$  от химической неполноты сгорания топлива в топке.

Аналитическое определение указанных характеристик важно не только для автоматизации топочного процесса, но и для анализа температурных деформаций стенок топки и ее размеров.

Изложенный метод включает в себя выполнение последовательности формальных операций, благодаря чему полностью рассчитать температурный режим топки можно на ЭВМ.

## 5.2. Количество тепла, передаваемого конвекцией и излучением

Продолжим рассмотрение процесса распределения тепла в топке, начатое в п. 5.1.

В работе [3] сказано, что для большинства топлив температура  $t_a$  колеблется в пределах 550 – 900 °С и принимается при построении графиков (поскольку точное определение этой температуры затруднено) равной 600 – 700 °С, что не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на точность результатов.

Для определения температур в топке изменение  $t_a$  в указанных пределах практически не сказывается на точности результатов, однако при нахождении количества распределенного в топке тепла такой выбор значения  $t_a$  уже вносит более существенную погрешность, которую можно уменьшить лишь только путем более точного вычисления величины  $t_a$ .

Проинтегрируем уравнение (5.25) и, опуская громоздкие выкладки, запишем результат:

$$\int [1 - x(1 - t_2)] \left( a + \frac{b + x}{c + x} \right) dx = (a + 1)x + (b - c)[1 - c(t_2 - 1)] \ln |c + x| + (t_2 - 1)(c + x) \left[ b + \frac{(c + x)}{2} - 2c + \frac{ax^2}{2(c + x)} \right]. \quad (5.26)$$

Обозначив через  $x_n$ ,  $x_k$  соответственно начало и конец участка интегрирования, а через  $(s_2)_x$  – площадь под кривой  $(t_2)_x$  на этом участке, преобразуем выражение (5.26):

$$\begin{aligned}
(s_2)_x = \int_{x_H}^{x_K} [1 - x(1 - t_2)] \left( a + \frac{b+x}{c+x} \right) dx = (a+1)(x_K - x_H) + \\
+ (b-c)[1 - c(t_2 - 1)] \ln \left| \frac{c+x_K}{c+x_H} \right| + \\
+ (t_2 - 1) \left[ (x_K - x_H)(b - 2c) + \frac{(c+x_K)^2 - (c+x_H)^2}{2} + \frac{a}{2}(x_K^2 - x_H^2) \right]. \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Выражая через  $g$  из системы уравнений (5.18) переменные  $a$  и  $b$ , подставляя результат в соотношение (5.27) и принимая  $x_H = 0$ , а  $x_K = 1$ , получим величину площади  $s_{ag}$  под кривой  $ag$ :

$$\begin{aligned}
s_{ag} = (1-g)c + 1 + c [g(1+c) - c - 1] [1 - c(t_2 - 1)] \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| + \\
+ (t_2 - 1) \left\{ c [g(1+c) - c - 1] + \frac{(1-g)c + 1}{2} \right\}. \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Из последнего уравнения системы (5.18) найдем

$$g = 1 + \frac{S-1}{(1+c)c \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| - c}, \quad (5.29)$$

подставляя которое в уравнение (5.28), будем иметь  $s_{ag}$  в функции одной переменной  $c$ :

$$\begin{aligned}
s_{ag} = 1 - \frac{(S-1)c}{(1+c)c \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| - c} + \\
+ c \left[ \left( 1 + \frac{S-1}{(1+c)c \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| - c} \right) (1+c) - c - 1 \right] [1 - c(t_2 - 1)] \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| + (t_2 - 1) \times \\
\times \left\{ c \left[ \left( 1 + \frac{S-1}{(1+c)c \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| - c} \right) (1+c) - c - 1 \right] + 0,5 - \frac{(S-1)c}{2 \left[ (1+c)c \ln \left| \frac{c+1}{c} \right| - c \right]} \right\}. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Количество тепла, отдаваемое через топочную поверхность нагрева, определяется уравнением (5.9), а количество тепла, уносимое газами в трубную часть котла, равно  $Mt_2 + Nt_2^2$ . Выразим отношение указанных количеств тепла через  $m$ :

$$m = \frac{Q_0 - Q_2' - Q_2''}{Mt_2 - Nt_2^2} - 1, \quad (5.31)$$

или, что одно и то же, через площади:

$$m = \frac{S - s_{ag}}{s_{ag} - g}. \quad (5.32)$$

Теперь систему (5.18) можно дополнить уравнением (5.32), решая которое относительно  $s$ , можно найти значения  $a$ ,  $b$  и  $g$ , а также величину температуры  $t_a$ , которая в этом случае уже точно определяется в результате данного решения.

В соответствии с уравнениями (5.4), (5.5) можно записать

$$Mt^* + N(t^*)^2 = Mt_2 + Nt_2^2 + k_T^c A_T \left( (\bar{t}_2)_x - t_B \right), \quad (5.33)$$

откуда

$$t^* = \frac{\sqrt{M^2 + 4N \left( Mt_2 + Nt_2^2 + k_T^c A_T \left( (\bar{t}_2)_x - t_B \right) \right)} - M}{2N}. \quad (5.34)$$

Количество тепла, передаваемое газами на отдельных участках топки соприкосновением и конвекцией, будет пропорционально средней температуре газов, которая, как уже говорилось, на бесконечно малом участке будет приближаться к действительной температуре  $(t_2)_x$ . При этом температурный вычет, обусловленный передачей тепла прикосновением, в сечении  $x$  будет равен сумме вычетов на участках до этого сечения, т. е. пропорционален площади под кривой  $ag$ . Зная величину суммарного вычета для всей топки (равного разности температур  $t^*$  и  $t_2$ ), можно записать

$$(t^*)_x = (t_2)_x + \frac{(s_2)_x}{s_{ag}} (t^* - t_2), \quad (5.35)$$

где  $(t^*)_x$  – значение температуры на участке  $x$  в результате отдачи тепла излучением. Подставляя в уравнение (5.35) выражение для  $(t_2)_x$  из соотношения (5.25) и принимая в (5.27)  $x_H = 0$ , а  $x_K = x$ , получим

$$(t^*)_x = [1 - x(1 - t_2)] \left( a + \frac{b+x}{c+x} \right) + \frac{t^* - t_2}{s_{ag}} \left\{ (b-c) \ln \left| \frac{c+x}{c} \right| + (a+1)x + \right. \\ \left. + (t_2 - 1) \left[ bx - (b-c)c \ln \left| \frac{c+x}{c} \right| + \frac{x^2(a+1) - 2cx}{2} \right] \right\}. \quad (5.36)$$

Зависимость  $(t^*)_x$  (кривая  $af$  на рис. 5.1) разграничивает области конвективной и радиационной теплопередачи. Площадь, заключенная между кривыми  $ae$  и  $af$ , соответствует количеству тепла, отданному газам лучеиспусканием, а между кривыми  $af$  и  $ag$  – конвекцией.

Для подсчета количества тепла, передаваемого конвекцией, необходимо найти площадь  $s_x^K$  между кривыми  $af$  и  $ag$ . Площадь под кривой  $af$  будет определяться интегралом выражения (5.36). Очевидно, что интеграл первого слагаемого правой части указанного уравнения будет определять площадь  $(s_2)_x$ , а интеграл второго – площадь  $s_x^K$ . Тогда, интегрируя второе слагаемое уравнения (5.36), получим

$$s_x^K = \frac{t^* - t_2}{s_{ag}} \left\{ \begin{aligned} & (b-c) [c(t_2 - 1) + 1] c \ln \left( \frac{c + x_K}{c + x_H} \right) + (b-c) [1 - c(t_2 - 1)] \times \\ & \times [x_K \ln(c + x_K) - x_H \ln(c + x_H) - (x_K - x_H)(1 + \ln c)] + \\ & + \frac{t_2 - 1}{6} (x_K^3 - x_H^3)(1 - a) + \frac{x_K^2 - x_H^2}{2} [a + 1 + (t_2 - 1)(b - c)] \end{aligned} \right\}. \quad (5.37)$$

Площадь  $s_x^\Pi$  (между кривыми  $ae$  и  $af$ ), соответствующая количеству тепла, отдаваемому излучением на данном участке топки, будет равна

$$s_x^\Pi = (S)_x - s_x^K - (s_2)_x. \quad (5.38)$$

Таким образом, уравнения (5.16), (5.37) и (5.38) позволяют вычислить количество тепла, передаваемое излучением и конвекцией, а также теплосодержание газов на любом участке топки.



Для более полного горения топлива нужно, чтобы летучие успели выделиться из него и сгореть до момента входа газов в трубную часть котла. Такой режим характеризуется прекращением роста температуры  $(t_1)_x$  в топке. Для исследования процесса горения летучих, который определяется соответствием размеров топки количеству сжигаемого топлива, возьмем производную функции (5.15)

$$\left( a + \frac{b+x}{c+x} \right)' = \frac{c-b}{(c+x)^2} \quad (5.39)$$

и вычислим ее значение при  $x=1$ . Малое значение ( $\leq 0,105$ ) свидетельствует о небольшом угле наклона касательной к этой кривой, т. е. о том, что летучие в основном прореагировали и температура горения практически не поднимается. Если указанное условие будет наблюдаться при  $x$  значительно меньше единицы, то это будет свидетельствовать о том, что данные размеры топки велики для сжигания такого количества топлива, из-за чего в дальнейшем температура горения может понизиться и, как следствие, возникнут обратные реакции с последующим увеличением процентного содержания СО в газах. Недостаточно малый угол наклона касательной (при  $x=1$ ) показывает, что температура продолжает нарастать, горение летучих еще не закончилось и для его завершения требуется больший размер топки.

Таким образом, по значениям функции (5.39), вычисленным в нескольких точках топочного пространства, можно легко определить характер изменения температуры горения и выяснить адекватность размеров топки количеству сжигаемого топлива. Для нахождения места достижения газовым потоком максимальной температуры возьмем производную функции (5.25):

$$(t_2)'_x = \frac{c-b}{(c+x)^2} + (t_2-1) \left[ \frac{x^2 + c(b+2x)}{(c+x)^2} + a \right]. \quad (5.40)$$

Приравняем полученную производную к нулю и найдем  $x$ :

$$x = \sqrt{c^2 - \frac{c(ac+b)}{a+1} - \frac{c-b}{(t_2-1)(a+1)}} - c. \quad (5.41)$$

Подставляя полученное значение  $x$  в выражение (5.25), определим максимальную температуру  $(t_2)_{x \max}$  топочных газов.

На этом процесс исследования температурного режима топки завершается.

**Пример.** Определите температурный режим топки паровоза. Пользуясь разработанными методами, проведем исследование температурного режима топки мощного советского паровоза ФД, работающего на угле марки Г (С = 72 %; Н = 4,9 %; О = 6,4 %; N = 1,3 %; S = 3 %; W = 4,8 %; теплота сгорания 28 780 кДж/кг) с форсировкой 313 кг/м<sup>2</sup> · ч ( $B_h = 2203$  кг/ч). Продукты сгорания содержат: CO<sub>2</sub> = 13,7 %, CO = 0,9 %;  $t_b = 200$  °С;  $k_T = 35,2$  кДж/ч · м<sup>2</sup> · °С;  $\mu = 0,885$ ;  $t_2 = 1\,200$  °С;  $A_T = 31,2$  м<sup>2</sup>;  $A_{II} = 16,15$  м<sup>2</sup>.

Из уравнения (5.1) найдем коэффициенты  $M$  и  $N$ :

$$G_b c = 4,19 \left( 0,55 \frac{72}{13,7 + 0,9} + 2,1 \cdot 10^{-3} \cdot 72 + 4,06 \cdot 10^{-2} \cdot 4,9 + 4,5 \cdot 10^{-3} \cdot 4,8 \right) = 12,92;$$

$$M = 0,885 \cdot 2203 \cdot 12,92 = 25\,190 \text{ кДж/ч} \cdot \text{°С}.$$

$$G_b \delta = 4,19 \left( 4,45 \cdot 10^{-5} \frac{72}{13,7 + 0,9} + 1,3 \cdot 10^{-6} \cdot 72 + 4,4 \cdot 10^{-6} \cdot 4,9 + 5 \cdot 10^{-7} \cdot 4,8 \right) = 1,412 \cdot 10^{-3};$$

$$N = 0,885 \cdot 2203 \cdot 1,412 \cdot 10^{-3} = 2,7529 \text{ кДж/ч} \cdot (\text{°С})^2.$$

$$Q_0 = 28780 \cdot 2203 = 63402340 \text{ кДж/ч}.$$

$$Q_2' = 4,19 \left( 56,9 \cdot 72 \frac{0,9}{13,7 + 0,9} - 0,885 \cdot 2203 \right) = 2\,063\,000 \text{ кДж/ч}.$$

$$Q_2'' = (1 - 0,885) 2203 \cdot 28780 = 7\,291\,270 \text{ кДж/ч}.$$

Из уравнения (5.13)

$$t_1 = \frac{\sqrt{25\,190^2 + 4 \cdot 2,7529(63402340 - 2063\,000 - 7291\,270)} - 25\,190}{2 \cdot 2,7529} = 1794 \text{ °С}.$$

Согласно уравнению (5.11)

$$(63\,402\,340 - 2\,063\,000 - 7\,291\,270) - (25\,190 \cdot 1\,200 + 2,7529 \cdot 1\,200^2) =$$

$$= 33,52 \cdot 31,2 \left( (\bar{t}_2)_x - 200 \right) + 20,413 \cdot 16,15 \left( \frac{(\bar{t}_2)_x + 273}{100} \right)^4, \text{ откуда}$$

$$(\bar{t}_2)_x = 1\,271 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

В соответствии с формулой (5.34)

$$t^* = \frac{\sqrt{25190^2 + 4 \cdot 2,7529 (25190 \cdot 1200 + 2,7529 \cdot 1200^2 + 33,52 \cdot 31,2 \cdot 1000)} - 25190}{2 \cdot 2,7529} =$$

$$= 1233 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Из уравнения (5.8) найдем среднюю условную действительную температуру:

$$(\bar{t}'_1)_x = 200 + \frac{1794 - 1200}{\ln \frac{1794 - 200}{1200 - 200}} = 1474 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Теперь имеются все данные для нахождения характеристик топочного процесса:  $t_1 = 1\,794 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 1\,200 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $(\bar{t}_2)_x = 1\,271 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $t^* = 1\,233 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $(\bar{t}'_1)_x = 1\,474 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

По формуле (5.14)

$$S = \frac{1271}{1474} = 0,8623.$$

Из выражения (5.31)  $m = 0,5807$ . Подставляя это значение в уравнение (5.32), которое решается с учетом (5.30) методом дихотомии, получаем  $c = 0,2351$ . Тогда в соответствии с (5.29)  $g = 0,4416$  и  $t_a = 792 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Далее из формулы (5.18) находим  $a = (1 - 0,4416)0,2351 = 0,1313$  и  $b = (0,4416 - 0,131)0,2351 = 0,073$ .

Подставляя найденные коэффициенты в уравнение (5.15), получим функцию изменения температуры горения в топке

$$y = 0,1313 + \frac{0,073 + x}{0,2351 + x}.$$

В соответствии с выражениями (5.20), (5.21) находим потери от химической неполноты сгорания топлива в требуемом месте топки. Если в эти уравнения вместо  $(t_1)_x$  подставить выражение для  $y$ , то получим значения указанных потерь в функции изменения площади топки (рис. 5.2).

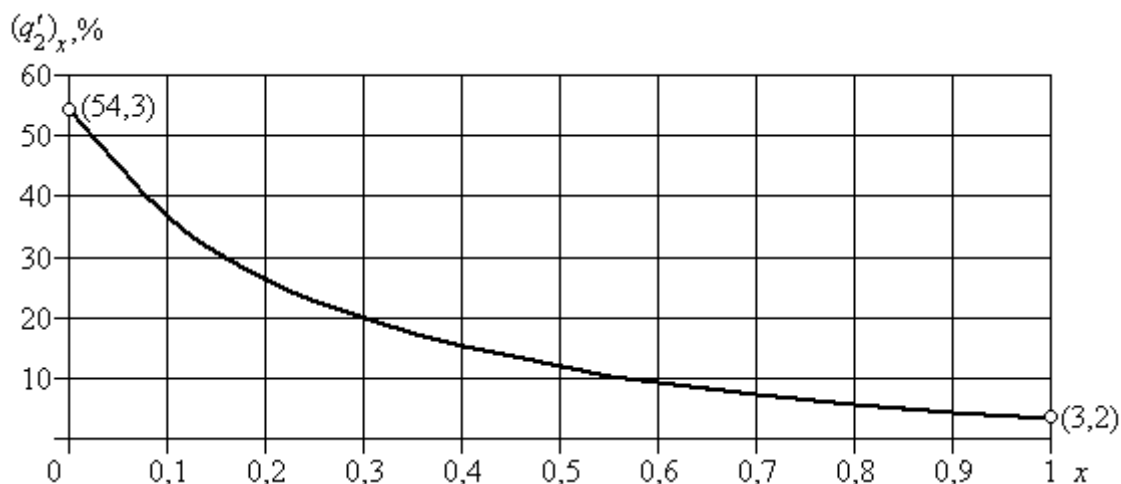


Рис. 5.2. Потери от химической неполноты сгорания топлива

Далее из уравнения (5.25) находим функцию действительной температуры, которая установилась в топочном пространстве:

$$(t_2)_x = [1 - x(1 - 0,6689)] \left( 0,1313 + \frac{0,073 + x}{0,2351 + x} \right),$$

затем из (5.36) определяем положение кривой  $(t^*)_x$ .

Согласно выражению (5.41) определяем  $x$ , при котором действительная температура газов достигает в топке своего максимального значения:

$$x = \sqrt{0,2351^2 - \frac{0,2351(0,1313 \cdot 0,2351 + 0,073)}{0,1313 + 1} - \frac{0,2351 - 0,073}{(0,6689 - 1)(0,1313 + 1)}} - 0,2351 = 0,448.$$

Подставив найденное значение  $x$  в уравнение (5.25), получим

$$(t_2)_{\max} = [1 - 0,448(1 - 0,6689)] \left( 0,1313 + \frac{0,073 + 0,448}{0,2351 + 0,448} \right) = 0,7614,$$

или 1366 °С.

Графики топочных температур представлены на рис. 5.3.

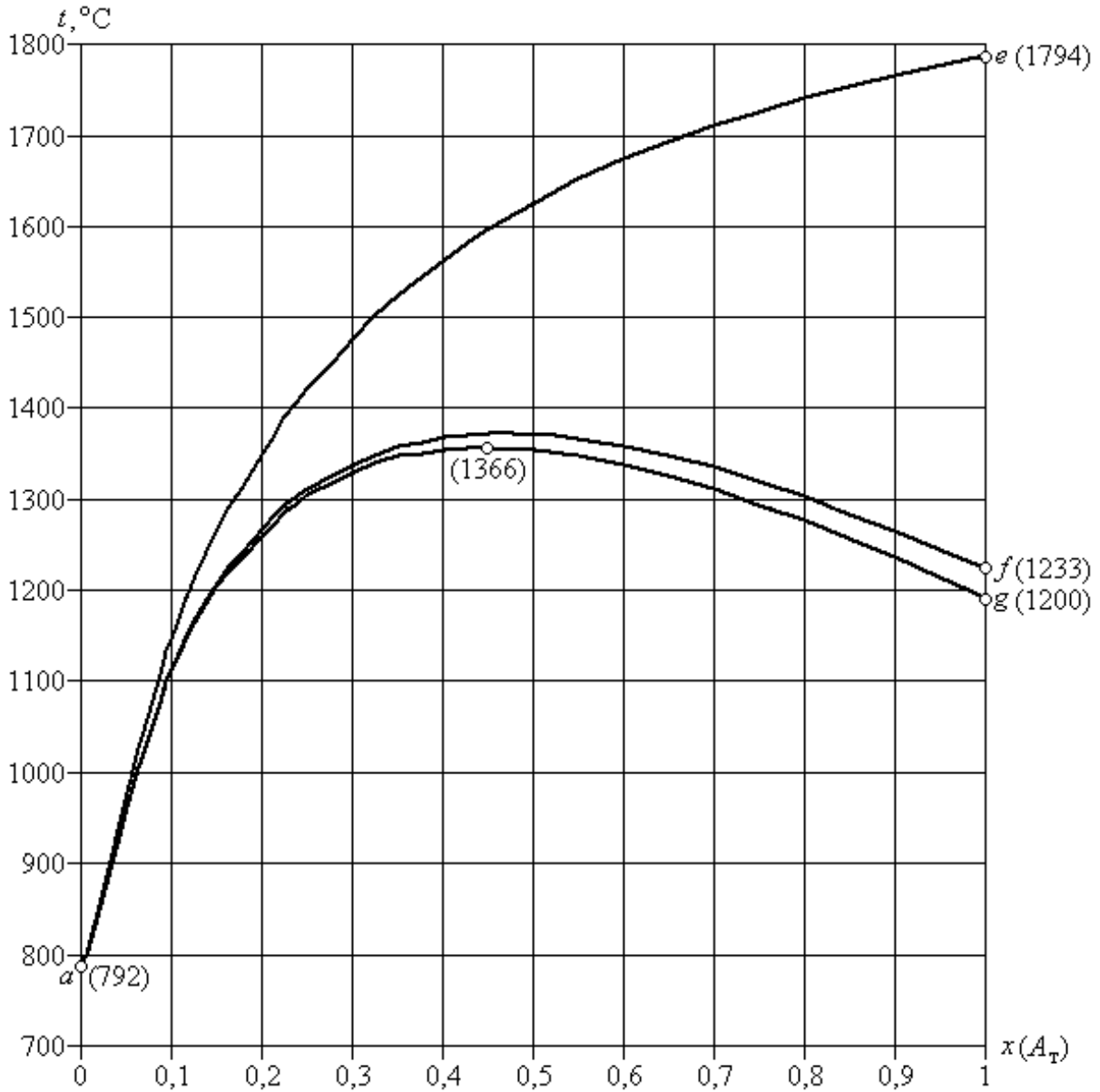


Рис. 5.3. Семейство кривых температур топочного пространства

Далее рассмотрим соответствие размеров топки количеству сжигаемого топлива. По уравнению (5.39) для  $x = 0,95$  и  $x = 1$  имеем

$$x_{0,95} = \frac{0,2351 - 0,073}{(0,2351 + 0,95)^2} = 0,115 \quad x_1 = \frac{0,2351 - 0,073}{(0,2351 + 1)^2} = 0,106.$$

Данные показывают, что к концу топки рост температуры горения практически завершается, и размеры топки позволяют сжигать в

ней 2 203 кг/ч угля. Однако при более больших форсировках, видимо, потребуется увеличение размеров топки для обеспечения большей полноты сгорания.

Перейдем к определению количества тепла, передаваемого в топке конвекцией, лучеиспусканием и уносимого с газами в трубную часть котла.

Расчеты по уравнениям (5.37), (5.38) и (5.27) показывают, что на участке от  $x_n = 0,4$  до  $x_k = 0,5$  приблизительно  $2/5$  (1 422 505 кДж) тепла передаются лучеиспусканием и конвекцией, а  $3/5$  (3 411 014 кДж) – заключено в топочных газах на этом участке.

При  $x_n = 0$  и  $x_k = 1$  отношение площадей, которые соответствуют лучеиспусканию, конвекции и теплосодержанию, изменяется. Эти площади в долях соответственно равны 0,3445, 0,0229 и 0,6326, что эквивалентно количеству тепла 18 619 560, 1 237 701 и 34 190 809 кДж. Отсюда следует: при теплопередаче 6,6 % тепла передается конвекцией и 93,4 % – излучением. Всего на лучеиспускание и конвекцию в пределах топки расходуется 36,7 % тепла (примерно  $1/3$ ), а остальная его часть – 63,3 % (примерно  $2/3$ ) уходит с газами в трубную часть котла.

Кроме того, в любом месте топки по уравнениям (5.37) и (5.38) можно определить количество тепла, передаваемое котловой воде конвекцией и лучеиспусканием, а при помощи выражения (5.27) вычислить теплосодержание газов  $((s_2)_x - g)$ .

Выражения (5.39), (5.41) позволяют установить соответствие размеров топки количеству сжигаемого топлива и найти сечение топочного пространства, в котором развивается максимальная температура  $(t_2)_{x \max}$ .

Аналитическое определение указанных характеристик важно не только для автоматизации топочного процесса, но и для анализа температурных деформаций стенок топки и ее размеров.

Изложенный метод включает в себя выполнение последовательности формальных операций, благодаря чему полностью рассчитать температурный режим топки можно на ЭВМ.

### ***Вопросы для самопроверки***

1. На чем, как правило, основывается построение модели физического процесса?
2. В каком случае применяются методы дифференциального исчисления?
3. Почему снижается теоретическая температура горения?
4. Какие виды потерь существуют при горении топлива в топке?

## Глава 6

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Развитие кибернетики и ее математического аппарата предоставило проектировщикам, имеющим дело со сложными процессами управления, мощный инструмент для математического анализа ситуаций и проведения мыслительных экспериментов с объектами, природа которых не позволяет провести реальные эксперименты.

Совокупность новых подходов и способов решения задач планирования, организации и управления получила название «Исследование операций». Исследование операций включает построение и разработку математических моделей целенаправленных процессов и выработку критериев качества их протекания с целью оптимизации этих процессов. Математические модели описывают процессы, происходящие в сложных системах, в форме количественных зависимостей условий и факторов, в том числе и таких трудноуловимых, как моральные и эмоциональные. Может оказаться, что одно информационное состояние субъекта или охватывает целое множество его физических состояний, или является следствием положения связанных с ним множества физических объектов. При исследовании конкретного процесса определенную трудность представляет получение данных, необходимых для построения моделей. Часто эти параметры имеют не физический или технический, а социально-экономический или психологический характер, и их измерение может стать самостоятельной проблемой. Эту трудность можно считать основным препятствием для построения модели.

#### **6.1. Феноменологические модели проблемной ситуации**

Феноменологическая модель – модель, охватывающая набор наблюдаемых явлений, которую можно использовать для прогнозирования.

С точки зрения точности феноменологические модели уступают физическим моделям, и процент ошибочных предсказаний в прогно-



зировании у них больше. Однако научный подход, базирующийся на математическом моделировании, позволяет решить многие проблемы.

Построение математической модели включает три этапа: подготовку исходных данных, разработку модели и ее проверку. Первые два этапа носят эвристический характер и являются наиболее сложными. Для их выполнения важно обладать определенными знаниями и опытом, поэтому в дальнейшем будем рассматривать только эти этапы. Необходимость создания математических моделей порою диктуется изучением поведения объектов, которое предопределяет структуру и функции системы управления, т. е. формирует концептуальный базис управления.

Рассмотрим последовательность построения математических моделей, необходимых для создания автоматической системы диспетчерского управления. При управлении ходом перевозочного процесса следует учитывать то обстоятельство, что отрицательные последствия, связанные с отклонениями от нормального протекания этого процесса, нельзя, как правило, быстро устранить. Поэтому необходимо постоянно моделировать картину пассажирских перевозок, что обеспечит прогнозирование результатов управления.

В первую очередь следует разработать математические модели, прогнозирующие поведение пассажирских корреспонденций (пассажиров) с учетом динамики формирования пассажиропотоков во времени и по направлениям транспортной сети города.

Присутствие человека, для которого характерны определенные потребности и цели, побуждающие его совершать поездки на городском пассажирском транспорте, позволяет рассматривать перевозочный процесс как активную систему, элементами которой являются пассажиры, водители транспортных средств и работники городских служб.

Существующий механизм управления перевозочным процессом исчерпал свои возможности, поэтому назрела объективная необходимость в создании новых эффективных управленческих технологий, позволяющих поднять городские пассажирские перевозки на качественно новый уровень. Новая технология предполагает постоянное

моделирование состояния активной системы с последующим его прогнозированием с учетом управляющих воздействий.

Идентификацию указанной активной системы следует начать с той ее части, поведение которой предопределяет ответные действия других частей, т. е. с построения стохастических моделей, прогнозирующих поведение пассажиров, совершающих поездки на городском пассажирском транспорте. Поведение пассажира на остановочном пункте субъективно, однако оно зависит и от объективных обстоятельств, позволяющих выявить некоторые закономерности.

Придя на остановочный пункт, пассажир, как правило, имеет возможность выбрать пути передвижения к пункту назначения. Он может воспользоваться множеством маршрутов 1-го выбора пути (которые являются для него более удобными для совершения поездки), 2-го выбора пути (менее удобными) или пойти пешком – 3-й выбор пути. Пассажир, ожидающий на остановочном пункте транспортное средство для осуществления посадки в него, производит выбор того или иного пути следования в условиях риска, основываясь на анализе наблюдаемой с остановочного пункта картины перевозочного процесса, надеясь на свой опыт и интуицию. Способность человека прогнозировать состояние внешней среды – следствие обучения, которое с точки зрения психологии представляет собой процесс объединения ячеек памяти в системы с определенной информационной структурой, хранящих условные рефлекссы.

Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  – соответственно множества маршрутов 1, 2 и 3-го выбора пути,  $L$  – множество исходов поездки, включающее в себя элементы:  $l$  – исход поездки без опоздания;  $\bar{l}$  – исход поездки с опозданием. Получившиеся в результате возможного выбора связи между альтернативами и исходами можно представить в виде графа (рис. 6.1), представляющего собой дерево, на ветвях которого указаны вероятности, начиная от корня дерева (начальное состояние) и заканчивая конкретным исходом на его вершине.

Будем полагать, что пассажир, ожидающий на остановочном пункте транспортное средство для осуществления посадки в него, производит выбор того или иного пути следования в условиях риска,

основываясь на анализе наблюдаемой с остановочного пункта картины перевозочного процесса, надеясь на собственный опыт и интуицию. Принятие решения в условиях риска будем характеризовать вероятной мерой, которую на графе связей альтернатив и исходов зададим указанием вероятности каждого исхода, возможного при выборе данной альтернативы, которая, в свою очередь, выполняется с определенными значениями вероятности.

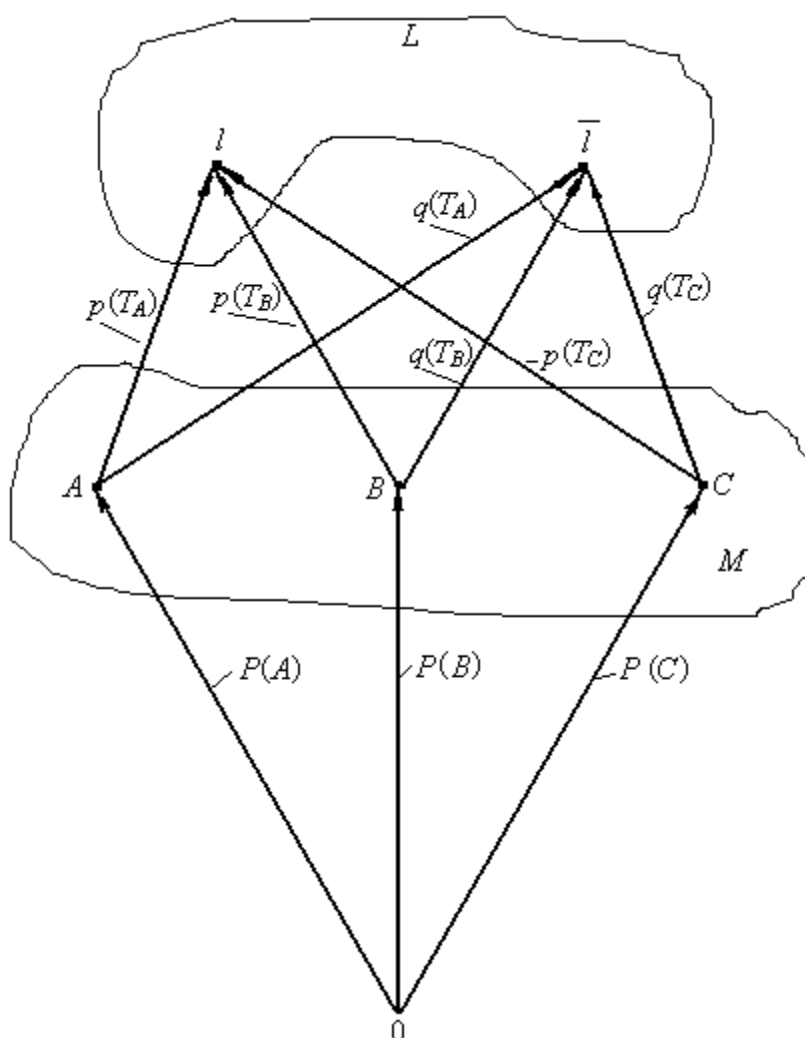


Рис. 6.1. Граф связей между альтернативами выбора пути и исходами поездки

Пусть  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$  – соответственно вероятности реализации альтернатив  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , входящих в множество  $M$  выбора путей следования пассажира, доверительные значения которых можно оценить по-

средством величины вероятности времени  $T_0^\Phi$  фактического ожидания транспортных средств данного множества маршрутов. При этом следует заметить, что если пассажир в качестве альтернативы выбирает пешеходный путь, то вероятность такой реализации будет равна 1. Пусть  $p(T)$  – множество вероятностей, обозначающих вероятности  $p(T_A)$ ,  $p(T_B)$ ,  $p(T_C)$  передвижения на транспортных средствах соответствующих множеств маршрутов в течение времени, позволяющего пассажиру добраться до пункта назначения поездки без опоздания, а  $q(T)$  – с опозданием.

Полная вероятность каждого исхода определяется как произведение вероятностей, указанных на ветвях дерева, поэтому каждый исход может быть представлен функцией

$$F_l = P(i) p(T_i), \quad (6.1)$$

$$F_{\bar{l}} = P(i) q(T_i), \quad (6.2)$$

где  $q(T_i) = 1 - p(T_i)$ ;  $i = A, B, C$ .

Функцию  $F_l$  будем называть функцией вероятности реализации поездки без опоздания, а  $F_{\bar{l}}$  – функцией вероятности реализации поездки с опозданием.

Пассажиру, ожидающему транспортную единицу на остановочном пункте, доподлинно не известны значения вероятностей  $P(i)$ ,  $p(T_i)$  и  $q(T_i)$ , однако, анализируя картину перевозочного процесса, используя интуицию и опыт, он достаточно точно выбирает тот маршрут поездки, который влечет наименьшие неприятности. Способность человека прогнозировать состояние внешней среды является следствием обучения, которое с точки зрения психологии представляет собой процесс объединения ячеек памяти в системы с определенной информационной структурой, хранящих условные рефлекссы.

Пассажир, совершая поездку на общественном транспорте, и система автоматического управления, прогнозирующая действия пассажира на остановочном пункте, должны иметь общую цель, т. е. некоторую общность в поведении, состоящую в том, что функционирование и пассажира, и системы направлено на достижение определенного результата. В кибернетике активное поведение разделяется на два

класса: нецеленаправленное и целенаправленное. При целенаправленном поведении объект вступает в определенную связь в пространстве или во времени с некоторыми другими объектами или событиями. Указанный подход к понятиям цели связан с их объективацией и распространением на системы произвольной природы и основан на их поведении.

Имея цель, заданную с помощью функций (6.1), (6.2), будем полагать, что из двух исходов более предпочтительным будет тот, которому соответствует большее значение выражения (6.1) и меньшее – (6.2). Если две альтернативы ведут к исходу с одинаковой вероятностью, то выбор пути множества  $A$  предпочитается пути множества  $B$ , а  $B$  предпочтительнее  $C$ .

Будем также полагать, что помимо линейности предпочтения должны удовлетворять условию транзитивности, т. е. если  $A$  предпочтительнее  $B$ , а  $B$  предпочтительнее  $C$ , то  $A$  предпочтительнее  $C$ . Иногда реальные предпочтения людей могут не обладать свойствами линейности и транзитивности, однако это, скорее, исключение, а не правило [13].

Значение вероятностей множества  $p(T)$  будет зависеть от времени  $T_p$ , которым располагает пассажир для посадки в транспортное средство и проезда в нем, и времени  $T_o^\Phi$  фактического ожидания пассажиром транспортного средства для совершения посадки. Если фактическое время посадки пассажира в транспортное средство будет равно времени  $T_0$ , отводимому им для посадки, то время поездки будет равно времени  $T_p$ , которым располагает пассажир. Следовательно, с принятым значением доверительной вероятности поездка закончится в положенный срок  $t_c$  (рис. 6.2, а).

Если время  $T_o^\Phi$  будет меньше  $T_0$  на  $\Delta t$  (рис. 6.2, б), то вероятность окончания поездки к указанному сроку увеличится, и наконец, если  $T_o^\Phi > T_0$ , то эта вероятность уменьшится (рис. 6.2, в).

Обозначим через  $x$  моменты окончания поездок. Тогда

$$x = 1,6\sigma_\Sigma + T_0 - T_o^\Phi. \quad (6.3)$$

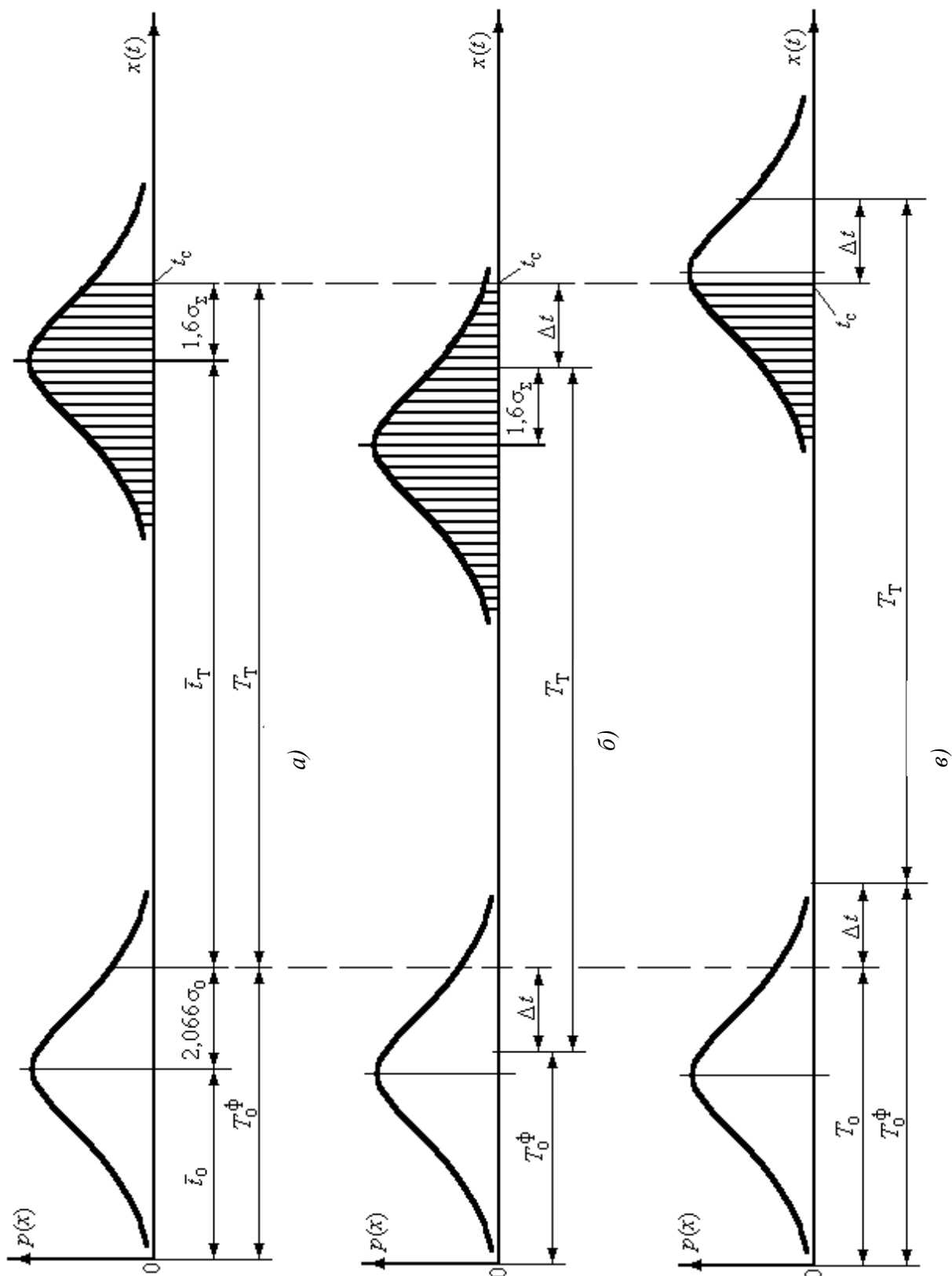


Рис. 6.2. К определению значения вероятности времени прибытия пассажиров в пункт назначения без опоздания: а – значение вероятности равно расчетному; б – больше расчетного; в – меньше расчетного

С учетом [14] вероятность  $P(x)$  прибытия транспортной единицы на участке  $x$  может быть записана

$$P(x) = A(\alpha) x \int_0^x e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} dx, \quad (6.4)$$

где  $A(\alpha) = \alpha/2\lambda\sigma_\Sigma \cdot \Gamma(1/\alpha)$ ;  $\Gamma(\bullet)$  – гамма-функция;  $\alpha$  – показатель степени распределения;  $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$ ;  $\sigma_\Sigma$  – среднее квадратическое отклонение времени прибытия транспортной единицы на данный остановочный пункт.

Введем новую переменную  $t^2 = x$ ,  $dt = dx/2t$  и подставим ее в уравнение (6.4):

$$P(x) = A(\alpha) \int_0^{t^2} 2te^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} dt. \quad (6.5)$$

Произведя подстановку в (6.5), получим

$$P(x) = A(\alpha) \left( e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} t^2 + \int_0^{t^2} t^2 e^{-\frac{|t|^{2\alpha}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha}} \frac{2\alpha|t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha} dt \right). \quad (6.6)$$

Введем новую переменную  $y = |t|^{2\alpha} / |\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha$ , тогда

$$|t|^2 = y^{\frac{1}{\alpha}} |\lambda\sigma_\Sigma|, \quad dy = \frac{2\alpha|t|^{(2\alpha-1)}}{|\lambda\sigma_\Sigma|^\alpha} dt$$

и уравнение (6.6) преобразуется к виду

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda\sigma_\Sigma| \left( y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \int_0^{|\lambda\sigma_\Sigma| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right), \quad (6.7)$$

которое можно переписать в виде

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda\sigma_\Sigma| \left[ y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} + \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda\sigma_\Sigma| y^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} e^{-y} dy \right) \right], \quad (6.8)$$

где  $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) = \Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)$  – гамма-функция;  $\frac{1}{\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda\sigma_\Sigma|y^{1/\alpha}} y^{1/\alpha} e^{-y} dy$  – не-

полная гамма-функция, которая согласно (6.9) может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)} \int_0^{|\lambda\sigma_\Sigma|y^{1/\alpha}} y^{1/\alpha} e^{-y} dy = \Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right) \left[ \frac{e^{-y^{(1/\alpha)}}}{\Gamma\left(2\frac{1}{\alpha}\right)} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Подставляя в выражение (6.8) переменную  $x$  и учитывая уравнение (6.9), имеем

$$P(x) = A(\alpha) |\lambda\sigma_\Sigma| \left\{ e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} \cdot \left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right| + \Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right) \left[ \frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} \cdot \left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^{\alpha+1}}{\Gamma\left(2\frac{1}{\alpha}\right)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^{\alpha k}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right] \right\}. \quad (6.10)$$

Поскольку  $\Gamma\left(2\frac{1}{\alpha}\right) = 1\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)$ , а  $A(\alpha) = \alpha / 2\lambda\sigma_\Sigma \Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)$ , то

$$P(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)} \left[ e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} \cdot \left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right| + \frac{e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} \cdot \left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^{\alpha+1}}{1\frac{1}{\alpha}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^{\alpha k}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (6.11)$$

Выражение (6.11) приведем к виду

$$P(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma\left(1\frac{1}{\alpha}\right)} e^{-\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha} \cdot \left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right| \left[ 1 + \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^\alpha}{1\frac{1}{\alpha}} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{x}{\lambda\sigma_\Sigma}\right|^{\alpha k}}{\left(1\frac{1}{\alpha}+1\right)\cdots\left(1\frac{1}{\alpha}+k\right)} \right) \right]. \quad (6.12)$$



Принимая во внимание симметричность функции  $p(x)$  (см. рис. 6.2), а также то обстоятельство, что величина  $x$  в выражении (6.3) может принимать отрицательное значение, запишем функцию вероятности передвижения пассажира на транспортной единице в течение времени, позволяющего ему добраться до пункта назначения в срок, выбрав  $i$ -ю альтернативу:

$$P(T_i) = \begin{cases} 0,5 + P(x), & x \geq 0, \\ 0,5 - P(x), & x < 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Таким образом, рассчитав числовые характеристики параметров  $P(i)$ ,  $p(T_i)$ ,  $q(T_i)$ , можно вычислить функции реализации поездки без опоздания (6.1) и с опозданием (6.2), прогнозируя выбор пассажиром маршрута (альтернативы) поездки.

Существенная черта человека, отличающая его от механической системы, – наличие эмоций, которые зависят от его психофизиологического состояния и потребностей. Удовлетворение определенных потребностей протекает на фоне эмоционального напряжения, представляющего собой регулируемую систему, мобилизующую функции организма на активную целенаправленную деятельность и подготовку к ней. Поэтому накопившееся в процессе ожидания транспортного средства эмоциональное напряжение также играет существенную роль при посадке. Картина учета психофизиологического состояния пассажира, определяющая его действия на остановочном пункте транспортной сети, оказывается весьма сложной, поэтому не всегда можно дать точное, даже формальное, ее описание. Это означает, что разрабатываемые для описания поведения пассажира модели отражают лишь некоторые черты рассматриваемого явления, пренебрегая которыми можно совершить грубые ошибки, которые исказят динамику хода перевозочного процесса и неблагоприятно отразятся на качестве предоставляемых транспортных услуг.

Эмоциональное напряжение пассажира описывается функцией двух величин: потребности в поездке и дефицита сведений о путях ее удовлетворения. В работе [14] процесс накопления у пассажира эмоционального напряжения представлен в виде точки, совершающей в случайные моменты переходы за время  $\Delta T$  с уровня  $E_k$  на уровень  $E_{k+1}$

с вероятностью, равной  $\gamma\Delta_T + o(\Delta_T)$ , где  $\gamma$  – прогнозирующий параметр;  $o(\Delta_T)$  – величина, имеющая порядок малости более высокий, чем  $\Delta_T$ .

Указанный процесс описывается выражением

$$E(T) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\gamma T)^k}{k!} e^{-\gamma T} \quad (6.14)$$

или окончательно – функцией  $E(T)$  роста эмоционального напряжения:

$$E(T) = 1 - e^{\left[ \frac{\gamma}{\eta} \left( 1 - e^{-\eta T} \right) - (\gamma + h) T \right]}, \quad (6.15)$$

где  $\eta$  – параметр, корректирующий скорость роста эмоционального напряжения;  $h$  – параметр, характеризующий уровень эмоционального напряжения у пассажира в момент прихода его на остановочный пункт.

Полагая, что накапливаемое пассажиром эмоциональное напряжение определяет его действия на остановочном пункте, представим вероятность отказа пассажира от альтернативы  $A$  (множество маршрутов 1-го выбора пути) в течение бесконечно малого интервала времени  $(T, T + \Delta_T)$  (при условии, что в начальный момент времени пассажир намеревался воспользоваться данным путем следования) выражением  $Q = \beta\Delta_T$ , где  $Q$  – вероятность отказа пассажира от альтернативы  $A$ ;  $\beta$  – некоторый параметр, прогнозирующий отказ.

Назовем событием  $A$  решение пассажира воспользоваться альтернативой  $A$  до момента времени  $T$ , а событием  $B$  – отказ пассажира от альтернативы  $A$  в интервале времени  $(T, T + \Delta_T)$ . Тогда наличие события  $A$  в момент времени  $(T, T + \Delta_T)$  будет представлять собой противоположное отказу событие, т. е.  $\bar{B}$ . Тогда из предыдущего уравнения

$$Q(B/A) = Q = \beta\Delta_T. \quad (6.16)$$

Так как сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1, то условная вероятность события  $A$  в интервале времени  $(T, T + \Delta_T)$

$$Q(\bar{B}|A) = 1 - \beta\Delta_T. \quad (6.17)$$

Если вероятность события  $A$  представить неизвестной функцией  $g(T)$ , то вероятность совместного появления событий  $A$  и  $\bar{B}$  будет равна значению этой функции в момент  $(T, T + \Delta T)$ :

$$\left. \begin{aligned} Q(A) &= g(T), \\ Q(A \text{ и } \bar{B}) &= g(T + \Delta T). \end{aligned} \right\}$$

На основании принципа умножения вероятностей

$$Q(A \text{ и } \bar{B}) = Q(A) \cdot Q(\bar{B}/A). \quad (6.18)$$

Подставляя в уравнение (6.18) выражения (6.16), (6.17), получим  $g(T + \Delta T) = g(T)(1 - \beta\Delta T)$ , откуда после преобразования

$$\frac{g(T + \Delta T) - g(T)}{\Delta T} = -\beta g(T).$$

Разность  $g(T + \Delta T) - g(T)$  представляет собой приращение вероятности за время  $\Delta T$ . Переходя к пределу  $\Delta T \rightarrow 0$ , получим дифференциальное уравнение для нахождения неизвестной функции  $g(T)$

$$\frac{dg(T)}{dT} = -\beta g(T),$$

которое вместе с начальным условием  $g(0) = 1$  полностью определяет функцию  $g(T)$ . Легко убедиться, что начальному условию отвечает решение

$$g(T) = e^{-\beta T}. \quad (6.19)$$

Найдем теперь вероятность события  $\bar{A}$  – отказа пассажира воспользоваться альтернативой  $A$  до момента времени  $T$ , которая с учетом (6.19) будет равна

$$Q(\bar{A}) = 1 - e^{-\beta T}. \quad (6.20)$$

Вероятность  $Q(T_1, T_2)$  отказа пассажира от альтернативы  $A$  в интервале времени  $(T_1, T_2)$  можно определить на основании принципа сложения вероятностей. На отрезке времени  $(0, T_1)$  вероятность отказа пассажира от альтернативы  $A$  равна  $1 - e^{-\beta T_1}$ , а на отрезке  $(0, T_2)$  соответственно будет  $1 - e^{-\beta T_2}$ .

В интервале времени  $(0, T_2)$  отказ от альтернативы  $A$  может произойти только в случае появления какого-нибудь из двух несовмест-

ных событий: или отказ пассажира произошел до момента времени  $T_1$ , или в интервале времени  $(T_1, T_2)$ . Поэтому

$$1 - e^{-\beta T_2} = Q(T_1, T_2) + 1 - e^{-\beta T_1},$$

откуда

$$Q(T_1, T_2) = e^{-\beta T_1} - e^{-\beta T_2}. \quad (6.21)$$

Заменяя в формуле (6.21)  $T_1 = T$ ,  $T_2 = T + \Delta T$ , получим

$$Q(T, T + \Delta T) = e^{-\beta T} - e^{-\beta(T + \Delta T)} = e^{-\beta T} (1 - e^{-\beta \Delta T}).$$

Раскладывая показательную функцию в скобках в ряд Маклорена [15] и ограничиваясь первыми двумя членами ряда, имеем  $e^{-\beta \Delta T} = 1 - \beta \Delta T$ ,  $Q(T, T + \Delta T) = \beta e^{-\beta T} \Delta T$ .

Разделив на  $\Delta T$  и перейдя к пределу  $\Delta T \rightarrow 0$ , найдем плотность вероятности отказа пассажира от альтернативы  $A$ , т. е. от поездки на транспортной единице множества маршрутов 1-го выбора

$$f_A(T) = \beta e^{-\beta T}. \quad (6.22)$$

Придя на остановочный пункт, пассажир, как правило, не может сразу в начальный момент времени отказаться от альтернативы  $A$ , поскольку этот путь следования – наилучший для него. И только спустя некоторое время с начала выполнения безуспешных попыток воспользоваться транспортными средствами множества маршрутов 1-го выбора пассажир начинает искать выход из создавшейся неблагоприятной для него ситуации. Поэтому в общем случае выражение (6.22) будет иметь вид двухпараметрического распределения:

$$f_A(T) = \begin{cases} \beta e^{-\beta(T - T_\Gamma)}, & T \geq T_\Gamma, \\ 0, & T < T_\Gamma, \end{cases} \quad (6.23)$$

где  $T_\Gamma$  – время гарантированного нахождения пассажира на остановочном пункте с момента прихода на него.

При  $T_\Gamma = 0$  (например, в случае полного останова хода перевозочного процесса) выражения (6.21) и (6.23) совпадают.

Если после отказа от альтернативы  $A$  решение пассажира воспользоваться альтернативой  $B$  (транспортными средствами множества маршрутов 2-го выбора) также не дало положительного результата, то он выбирает альтернативу  $C$  – покидает остановочный пункт (путь

3-го выбора). Можно предположить, что вид закона плотности распределения, отражающего моменты выбора альтернативы  $C$ , будет соответствовать кривой плотности распределения роста эмоционального напряжения пассажира. Назовем событием  $C$  отказ пассажира от альтернативы  $B$ . При этом можно считать, что уровень эмоционального напряжения, накопленный в результате безуспешных попыток воспользоваться транспортными средствами, будет достаточно высоким.

Обратимся к выражению (6.14), плотность распределения которого имеет вид

$$f_c(T) = \frac{\gamma^{r+1}}{\Gamma(r+1)} T^r e^{-\gamma T}. \quad (6.24)$$

Воспользуемся формулой Сонины [16] и с точностью до бесконечно малых преобразуем выражение  $\Gamma(r+1)$ :  $\Gamma(r+1) = \sqrt{2\pi} r^{r+\frac{1}{2}} e^{-r}$ .

Тогда уравнение (6.24) примет вид

$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{r/\gamma^2}} \left( \frac{\gamma T}{r} \right)^r e^{r - \gamma T}. \quad (6.25)$$

При действительных значениях функция  $(\gamma T/r)^r$  связана с показательной функцией соотношением  $\left( \frac{\gamma T}{r} \right)^r = e^{r \ln \frac{\gamma T}{r}}$ .

Раскладывая степень показательной функции в степенной ряд и ограничиваясь двумя членами ряда, получим

$$\left( \frac{\gamma T}{r} \right)^r = e^{r \left[ \frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{(\gamma T/r - 1)^2}{2} \right]}. \quad (6.26)$$

Подставляя выражение (6.26) в уравнение (6.25), имеем

$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{r/\gamma^2}} e^{r \left[ \frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{(\gamma T/r - 1)^2}{2} \right] + r - \gamma T}. \quad (6.27)$$

Преобразуем показатель степени функции в уравнении (6.27):

$$r \left[ \frac{\gamma T}{r} - 1 - \frac{\left( \frac{\gamma T}{r} - 1 \right)^2}{2} \right] + r - \gamma T = -\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{r} \left( T - \frac{r}{\gamma} \right)^2 = -\frac{\left( T - \frac{r}{\gamma} \right)^2}{2 \frac{r}{\gamma^2}}. \quad (6.28)$$

Подставляя выражение (6.28) в уравнение (6.27) и делая подстановку

$$\sqrt{\frac{r}{\lambda^2}} = \sigma_c, \quad \frac{r}{\gamma} = m_c,$$

получим окончательно

$$f_c(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{(T-m_c)^2}{2\sigma_c^2}}, \quad (6.29)$$

где  $m_c$  – среднее время отказа пассажира от альтернативы  $B$ ;  $\sigma_c$  – среднее квадратическое отклонение этого времени.

Из выражения (6.29) видно, что при возрастании  $r$  кривая плотности распределения, задаваемая выражением (6.14), становится более симметричной и стремится к кривой плотности нормального распределения.

Вероятность времени отказа пассажира от поездки при высоком уровне эмоционального напряжения выразится

$$Q(c) = \int_{-\infty}^T f_c(T) dT = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T-m_c}{\sigma_c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, \quad (6.30)$$

где  $\Phi\left(\frac{T-m_c}{\sigma_c}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{T-m_c}{\sigma_c}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$  – функция Лапласа.

Причины, побуждающие пассажира покинуть остановочный пункт, могут возникать в различные моменты времени его пребывания на остановочном пункте, причем действия этих причин сначала происходят на низком фоне эмоционального напряжения, а в конце – на высоком. Очевидно, что действия причин независимы друг от друга, и если одна из причин вынудила пассажира покинуть остановоч-

ный пункт, то действия других причин уже не смогут изменить положение. Тогда функцию вероятности времени ухода пассажира с остановочного пункта можно записать

$$Q_y(T) = Q(\bar{A}) + Q(C) - Q(\bar{A}) Q(C). \quad (6.31)$$

Подставляя в уравнение (6.31) значения из выражений (6.20), (6.30), получим

$$Q_y(T) = 1 - e^{-\beta T} \left[ 1 - \Phi \left( \frac{T - m_c}{\sigma_c} \right) \right]. \quad (6.32)$$

Продифференцировав полученное выражение, будем иметь

$$f_y(T) = e^{-\beta T} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_c} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{T - m_c}{\sigma_c} \right)^2} + \beta \left( 1 - \Phi \left( \frac{T - m_c}{\sigma_c} \right) \right) \right]. \quad (6.33)$$

Кривые плотности этого распределения при различных значениях параметров представлены на рис. 6.3.

Следует заметить, что если  $1/\beta$  меньше  $m_c$ , то функция плотности напоминает экспоненциальную кривую. И, наоборот, при  $1/\beta$  больше  $m_c$  функция стремится к виду нормального распределения. По данным функциям можно дать общую оценку хода перевозочного процесса применительно к данному остановочному пункту. Если функция плотности напоминает экспоненциальную кривую, то перевозочный процесс протекает крайне плохо, пассажиры не имеют возможности воспользоваться транспортными средствами и поэтому быстро покидают остановочный пункт.

В случае приобретения функцией вида, близкого к нормальному распределению, можно сказать, что перевозочный процесс идет несколько лучше. Пассажиры более длительное время находятся на остановочном пункте, пытаясь воспользоваться для поездки транспортными средствами. Математическое ожидание времени ухода имеет большее значение, чем в предыдущем случае, а следовательно, есть определенный запас времени для исправления возникающей на остановочном пункте неблагоприятной ситуации.

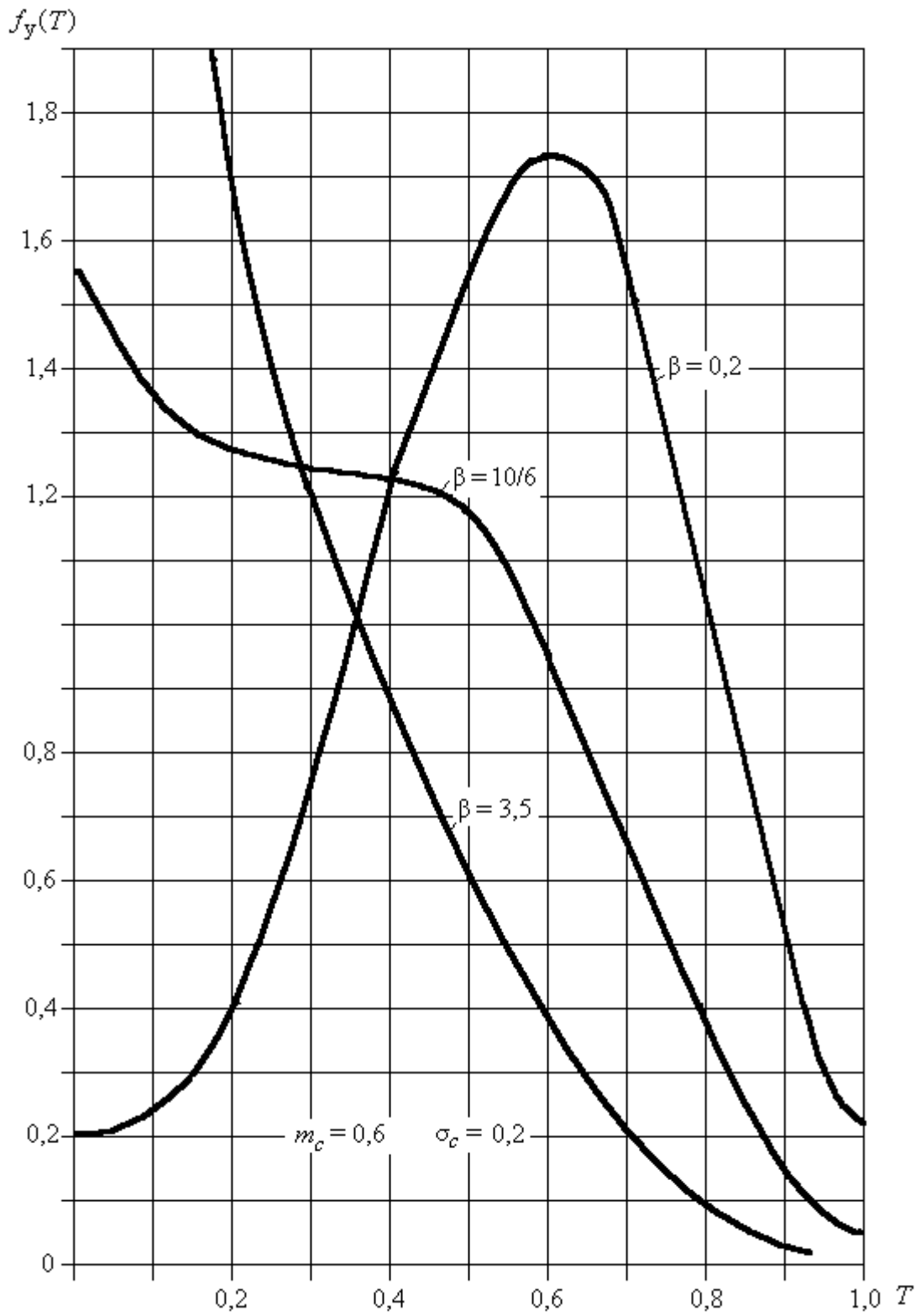


Рис. 6.3. Кривые плотности распределения времени отказа пассажира от поездки на городском пассажирском транспорте



## 6.2. Подготовка исходных данных для построения модели

Статистические данные исследований, собранные с остановочных пунктов  $B_1, B_2, \dots, B_m$ , разбиваются на множества, каждое из которых содержит пассажирские корреспонденции с одноименным пунктом отправления. После этого полученное множество (рис. 6.4) разделяется на подмножества по видам потребности поездки, а затем – по видам пассажирских корреспонденций (исток – сток). В результате этого образуются группы пассажирских корреспонденций класса  $XUZ$ , характеризующегося номером остановочного пункта, видом потребности поездки и видом корреспонденции.

Эмоциональное напряжение пассажира, ожидающего на остановочном пункте транспортное средство, является функцией двух величин: потребности в поездке и дефицита сведений о путях ее удовлетворения.

Наибольшая потребность в поездке бывает у пассажира в условиях объективно ограниченного временного ресурса пользования общественным транспортом, альтернатива которому в это время суток отсутствует или маловероятна, а срыв поездки грозит большими неприятностями. Например, ранняя утренняя поездка на вокзал ограничена по времени, с одной стороны, началом работы городского транспорта, а с другой – моментом отправления поезда, при этом опоздание на поезд влечет за собой крупные неприятности. Будем считать, что такие поездки характеризуют потребность первого вида.

Потребность второго вида определяется поездками, опоздание при выполнении которых также чревато для пассажира неприятностями, однако для их совершения пассажир самостоятельно (по своему усмотрению) отводит время на ожидание транспортного средства и проезд в нем. К такому виду следует отнести поездки, совершаемые на объекты приложения труда населения города (трудовые поездки).

К третьему виду отнесем поездки, срыв которых влияет на величину свободного времени трудящихся (поездки с объектов трудовой организации).

И, наконец, потребность четвертого вида может быть охарактеризована поездками культурно-бытового назначения.

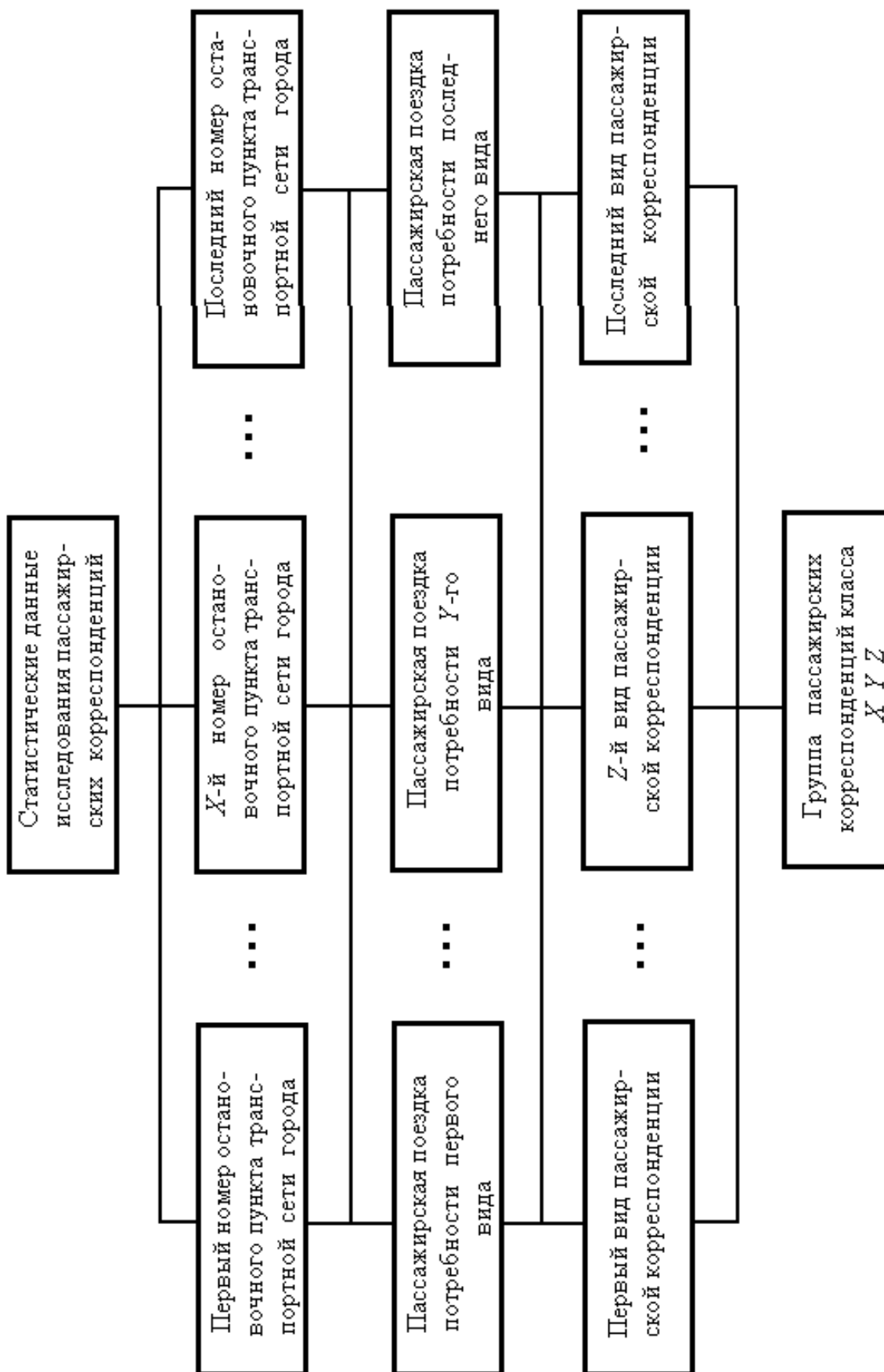


Рис. 6.4. Классы пассажирских корреспонденций

Исходя из сказанного, собранные в течение всего суточного цикла работы данные о пассажирских корреспонденциях следует группировать по временным отрезкам, в которые совершается подавляющее большинство поездок того или иного вида.

Второй величиной, определяющей величину эмоционального напряжения, является дефицит информации. Информация о ходе перевозочного процесса поступает к пассажиру, находящемуся на остановочном пункте, в натуральном и параметрическом виде. Натуральная информация отражает реально существующие объекты – транспортные средства, поток людей, прибывающих на остановочный пункт, и т. д. Носителями параметрической информации считаются сведения, извлекаемые пассажиром из картины перевозочного процесса (наполненность салона прибывающих на остановочный пункт транспортных единиц, интервал их движения на маршруте, количество людей, желающих произвести посадку на то или иное транспортное средство и т. д.). Эти данные пассажир принимает и оценивает в общих чертах для координации своих действий, направляемых на достижение поставленной цели.

Разность между необходимыми для гарантированного успеха выполнения поездки и субъективными сведениями, имеющимися у пассажира на остановочном пункте, представляет собой дефицит информации, который способствует росту эмоционального напряжения. Следовательно, ожидание пассажиром на остановочном пункте общественного транспорта сопровождается ростом его эмоционального напряжения, которое активизирует работу различных функций организма. Это, в свою очередь, побуждает пассажира к проведению на остановочном пункте целенаправленной деятельности, которая определяется готовностью пассажира нести неизбежные энергетические затраты как при посадке в общественный транспорт, так и во время проезда в нем.

Будем полагать, что величина этих энергозатрат прямо пропорциональна накопившемуся на данный момент эмоциональному напряжению.

В группе пассажирских корреспонденций одного класса каждой корреспонденции соответствует значение коэффициента  $E$  потери

комфортабельности поездки, после чего корреспонденции с близким по значению  $\Xi$  объединяются в подгруппы, для которых вычисляется среднее значение этого коэффициента по формуле

$$\bar{\Xi}^i = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{\mu} \Xi_j^i, \quad (6.34)$$

где  $\bar{\Xi}^i$  – средний коэффициент потери комфортабельности поездки для  $i$ -й подгруппы;  $\mu$  – число пассажирских корреспонденций в  $i$ -й подгруппе;  $\Xi_j^i$  – значение коэффициента потери комфортабельности  $j$ -й пассажирской корреспонденции  $i$ -й подгруппы.

Затем вычисляется общая средняя величина коэффициента потери комфортабельности для всего класса корреспонденций:

$$\bar{\Xi} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{\Xi}^i, \quad (6.35)$$

где  $l$  – количество подгрупп пассажирских корреспонденций в каждом классе.

После этого вычисляется дисперсия  $D_i$  из выражения

$$D_i = \frac{1}{\mu - 1} \sum_{j=1}^{\mu} \left( \Xi_j^i - \bar{\Xi}^i \right)^2.$$

При помощи критерия Бартлетта проверяют однородность данных подгрупп путем сравнения дисперсий. Для этого вычисляют значение хи-квадрат по формуле

$$\chi^2 = \frac{2,3026}{1 + \frac{l+1}{3l(\mu-1)}} l(\mu-1) \left[ \lg \frac{\sum_{i=1}^l D_i}{l} - \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \lg D_i \right] \quad (6.36)$$

и число степеней свободы

$$\omega = l - 1. \quad (6.37)$$

По таблице [17] находят величину  $\chi^2_{0,05}$  для значения вероятности, равного 0,05 и соответствующего числу степеней свободы  $\omega$ . Если окажется, что значение  $\chi^2 \leq \chi^2_{0,05}$ , то данные не противоречат равенству дисперсий.

На следующем этапе проводят проверку расхождения средних значений коэффициента потери комфортабельности поездки. Для этого подсчитывают сумму квадратов отклонений  $O_1$ ,  $O_2$  соответственно между подгруппами и внутри самих подгрупп по формулам

$$O_1 = \mu \sum_{i=1}^l (\bar{E}^i - \bar{E})^2, \quad (6.38)$$

$$O_2 = (\mu - 1) \sum_{i=1}^l D_i \quad (6.39)$$

и соответствующие этим отклонениям значения степеней свободы

$$\omega_1 = l - 1, \quad (6.40)$$

$$\omega_2 = l(\mu - 1), \quad (6.41)$$

а затем находят их отношение  $F$ , которое будет равно

$$F = \frac{O_1 / \omega_1}{O_2 / \omega_2}. \quad (6.42)$$

Взяв в качестве  $\omega_1$  то из чисел степеней свободы, которое соответствует большему из двух чисел  $O_1$  и  $O_2$ , по таблице [18] 5 %-х уклонений  $F$  находят величину  $F\omega_1$ ,  $\omega_2$ . Если  $F \leq F\omega_1$ ,  $\omega_2$ , то делается вывод о равенстве средних значений.

Аналогичную процедуру проводят с временами ожиданий указанных корреспонденций, определяя значения среднего времени ожидания  $\bar{\tau}_0^i$  посадки для каждой подгруппы, среднего времени ожидания  $\bar{\tau}_0$  посадки всего класса пассажирских корреспонденций и дисперсии для каждой группы. Убедившись в том, что полученные статистические данные не противоречат однородности, находят прогнозирующий параметр  $\gamma$ , задающий среднюю скорость роста эмоционального напряжения, по формуле

$$\gamma = \frac{\bar{E}}{\bar{\tau}_0}. \quad (6.43)$$

Для нахождения постоянной  $h$  про дифференцируем выражение (6.15):

$$\frac{dE(T)}{dT} = \left[ h + \gamma(1 - e^{-\eta T}) \right] e^{\left[ \frac{\gamma}{\eta}(1 - e^{-\eta T}) - (\gamma + h)T \right]} \quad (6.44)$$

и подставим в него значение  $T = 0$ . Тогда выражение (6.44) примет вид

$$\frac{dE(T)}{dT} = h. \quad (6.45)$$

Если полагать, что уравнение (6.44) отражает плотность роста эмоционального напряжения, то, выбрав из указанного класса пассажирских корреспонденций те, время ожидания которых близко к нулю, подсчитав частоту этого события

$$V = \frac{n_0}{n}, \quad (6.46)$$

где  $n$  – количество пассажирских корреспонденций в классе;  $n_0$  – количество пассажирских корреспонденций, время ожидания которых близко к нулю, и разделив ее значение на величину  $\tau_n$  начального временного интервала, в который попадает  $n_0$ , получают параметр  $h$

$$h = \frac{n_0}{n} / \tau_n. \quad (6.47)$$

Физически это означает, что если  $h \neq 0$ , то, придя на остановочный пункт, пассажир имеет уже определенный эмоциональный настрой, побуждающий его практически сразу же затрачивать определенное количество энергии на посадку, т. е. рост эмоционального напряжения начинается как бы с некоторого уровня, продиктованного сложившимися со временем на данном остановочном пункте условиями посадки.

Далее производят разбиение пассажирских корреспонденций некоторым числом  $\theta$  и подсчитывают частоту

$$v(\theta) = \frac{n(\theta)}{n}, \quad (6.48)$$

где  $n(\theta)$  – количество пассажирских корреспонденций, у которых время ожидания меньше  $\theta$ .

Прологарифмировав уравнение (6.15) при  $T = \theta$  и подставив в полученное выражение вместо  $E(T)$  значение  $v(\theta)$  из выражения (6.48), получим соотношение

$$\frac{1 - e^{-\eta\theta}}{\eta} = \theta \left( 1 + \frac{h}{\gamma} \right) + \frac{\ln[1 - v(\theta)]}{\gamma}, \quad (6.49)$$

в правой части которого стоит известная величина. Решая его относительно  $\eta$ , определяют значение последнего параметра. Параметр  $\eta$  корректирует скорость роста эмоционального напряжения. Отметим, что равенство  $E(T) = v(\theta)$  носит статистический характер и тем точнее, чем больше  $n$ .

Следует заметить, что, используя вычислительную технику, указанные параметры модели могут быть найдены и другими методами. Поскольку расчет параметров функции выбранного вида есть операция чисто детерминированная, то, как указывалось выше, ее полностью можно доверить компьютеру. В связи с тем, что число экспериментальных данных больше числа параметров модели, то количество независимых уравнений системы (для нахождения этих параметров) избыточно. Следовательно, из этих уравнений в разных комбинациях можно составить несколько систем уравнений, каждая из которых даст свое решение. При этом решения будут несовместны между собой, так как каждое будет соответствовать своей функции. В результате этого получится целый пучок кривых, который, во-первых, позволит провести усреднение полученных кривых, а во-вторых, покажет форму и ширину исследуемого явления. Усредненная функция может описать исследуемое явление точнее и достовернее, поскольку она в значительной степени защищена от случайного разброса отдельных экспериментальных точек.

Таким образом, полученные исходные данные для математической модели (6.15) дают возможность посредством этой модели оценивать психофизиологическую готовность пассажира, ожидающего на остановочном пункте транспортное средство, совершить в него посадку.

Теперь определим исходные данные для моделей (6.23) и (6.33).

Оценим параметры на основе данных о времени  $\tau$  ухода пассажиров с остановочного пункта. Величина времени гарантированного нахождения пассажиров на остановочном пункте

$$T_{\Gamma} = \min (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n), \quad (6.50)$$

где  $n$  – количество данных.

Далее найдем наименьшие значения  $\tau_i^*$  из данных, принадлежащих каждой из  $l$  подгрупп одного класса ( $XYZ$ ), после чего найдем параметр  $\beta$ :

$$\beta = \frac{l^2}{\sum_{i=1}^1 \tau_i^* \sum_{i=1}^1 \vartheta_i}, \quad (6.51)$$

где  $\vartheta_i$  – число реализаций случайной величины в  $i$ -й подгруппе.

Применяя метод разделяющих разбиений, разбивают данные реализации случайной величины, пронумерованные в порядке возрастания ( $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \tau_n$ ), некоторыми выбранными числами  $\theta_1, \theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ) на три группы. Затем подсчитывают частоту данных, оказавшихся соответственно в интервалах  $(0, \theta_1)$  и  $(0, \theta_2)$ , по формуле

$$v(\theta_j) = \frac{m(\theta_j)}{n}, \quad (6.52)$$

где  $m(\theta_j)$  – количество значений в  $j$ -м интервале,  $j = 1, 2$ .

Подставляя в выражение (6.32) вместо  $T$  значения  $\theta_j$  и преобразовывая его, получим

$$\Psi_j = \Psi \left[ 1 - (1 - v(\theta_j)) e^{\beta \theta_j} \right], \quad (6.53)$$

где  $\psi$  – обратная функция Лапласа.

Параметр  $m_c$  находится по формуле

$$m_c = \frac{\Psi_1 \theta_2 - \Psi_2 \theta_1}{\Psi_1 - \Psi_2}, \quad (6.54)$$

а параметр  $\sigma_c$  – из выражения

$$\sigma_c = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Psi_1 - \Psi_2}. \quad (6.55)$$

Следует иметь в виду, что получить значения  $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_n$  непосредственно из результатов статистических исследований пассажиропотоков сложно, поскольку в процессе этих исследований не предусматривается нарушение нормального хода перевозочного процесса. Эти сведения появлялись бы только на нескольких остановочных пунктах, на которых ход перевозочного процесса был неудовлетворительным, и из-за своей малочисленности они не дали бы возможности составить полную картину отказов пассажиров от поездки. Кроме того, полученная таким образом модель была бы индивидуальна для сло-



жившейся при проведении исследований фазы перевозочного процесса, а следовательно, – малопригодной для практического применения.

Поэтому, имея разработанные математические модели, отражающие ход перевозочного процесса, целесообразно воспользоваться статистическим моделированием, применяя для этой цели известный метод Монте-Карло [19]. Задавая различные интервалы движения транспортных средств, моделируют варианты хода перевозочного процесса, из которых потом выбирают наилучший, позволяющий сформировать расчетный план движения. Худшие варианты используются для получения значений  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , с помощью которых потом может быть построено целое семейство функций (6.33) для каждого остановочного пункта. Обобщая полученные функции для определенных фаз перевозочного процесса, определяют усредненные значения математического ожидания времени ухода пассажиров с остановочного пункта и интервала времени ухода большей части пассажиров, которые впоследствии применяются для принятия решений выхода из нештатных ситуаций, возникающих при выполнении пассажирских перевозок на общественном транспорте.

Таким образом, поскольку отрицательные последствия, связанные с отклонением нормального протекания перевозочного процесса, нельзя, как правило, быстро устранить, то для нормализации процесса перевоза и снижения возможных потерь необходимо постоянно прогнозировать складывающуюся ситуацию на остановочных пунктах, применяя полученные математические модели.

Кроме того, используя созданные динамические модели прогнозирования поведения пассажиров (основной части активной системы) на остановочных пунктах транспортной сети, можно предопределять действия другой части активной системы, в которую входят водители городского пассажирского транспорта. Для успешной работы водителей необходимо создать соответствующие условия, обеспечивающие заинтересованность водителей в качественном выполнении своей работы и позволяющие уменьшить зависимость этого качества от неправильных действий других участников перевозочного процесса. Очевидно, что решение этой задачи также предполагает разработку математических моделей, которые позволяли бы получать количе-

ственные оценки труда водителей, исходя из затрат энергии, затрачиваемой водителем при управлении транспортным средством.

Прежде всего, следует определить времена прохождения транспортным средством участков дорожной сети.

Определим данные для моделей (6.1) и (6.2), а именно время, отводимое пассажиром на ожидание посадки в транспортное средство и проезд в нем, и время фактического ожидания пассажиром транспортного средства.

При нормальном ходе перевозочного процесса время ожидания пассажиров на остановочном пункте распределено по нормальному закону. Кривая плотности этого распределения может быть описана выражением

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x - \bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2}}, \quad (6.56)$$

где  $\bar{t}_0$  – среднее время ожидания пассажира на остановочном пункте посадки в транспортные средства множества маршрутов 1-го выбора пути;  $\sigma_0$  – среднее квадратическое отклонение этого времени. Отметим, что для краткости записи индекс  $t_0$  при  $x$  опущен.

Математическое ожидание этого распределения и его среднее квадратическое отклонение зависят от величины суммарного потока транспортных средств, входящих в множество маршрутов 1-го выбора пути, которым может воспользоваться пассажир для выполнения поездки, а также – от наполненности прибывающих транспортных единиц. Поэтому можно предположить, что пассажирские корреспонденции с одинаковым истоком, имеющие одно множество маршрутов реализации поездки, будут обладать близкими по значению  $\bar{t}_0$  и  $\sigma_0$ .

На основании этого можно объединить в серию классов XYZ одного множества маршрутов 1-го выбора пути, а затем определить параметры  $\bar{t}_0$  и  $\sigma_0$  по формулам

$$\bar{t}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\tau}_0^k, \quad (6.57)$$

где  $N$  – количество классов в серии;  $\bar{\tau}_0^k$  – среднее время ожидания посадки в  $k$ -м классе пассажирских корреспонденций.

$$\sigma_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^N (\bar{\tau}_0^k - \bar{t}_0)^2 / (N-1)}. \quad (6.58)$$

В общем случае нормальное распределение задается на всей оси  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , однако для математической модели (см. рис. 6.2), описывающей время ожидания пассажира, необходимо ограничить интервал неопределенности, по крайней мере, до величины, которая охватывала бы большую часть значений этого времени.

В качестве такой меры будем использовать энтропийный интервал неопределенности. Согласно К. Шеннону, энтропия будет равна

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx. \quad (6.59)$$

Для нормального распределения (6.56)

$$\ln p(x) = - \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) - \frac{(x - \bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2}. \quad (6.60)$$

Отсюда энтропия  $H(X)$  выразится как

$$\begin{aligned} H(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \left[ \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) + \frac{(x - \bar{t}_0)^2}{2\sigma_0^2} \right] dx = \\ &= \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx + \frac{1}{2\sigma_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{t}_0)^2 dx. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Учитывая, что из условия нормирования площадь под кривой плотности распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (6.62)$$

и по определению дисперсии

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{t}_0)^2 dx = \sigma_0^2, \quad (6.63)$$

получаем

$$H(X) = \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi}) + \frac{1}{2} \quad (6.64)$$

или

$$H(X) = \ln(\sigma_0 \sqrt{2\pi e}). \quad (6.65)$$

Тогда энтропийный интервал неопределенности, равный  $e^{H(X)}$ , составит

$$d_0 = \sqrt{2\pi e} \sigma_0 = 4,133 \sigma_0. \quad (6.66)$$

При этом величина доверительной вероятности для данного интервала будет равна 0,961. Поэтому, если пассажир приходит на остановочный пункт с таким расчетом, чтобы отводимое им на посадку время ожидания  $T_0$  было бы равно

$$T_0 = \bar{t}_0 + d_0 / 2, \quad (6.67)$$

то вероятность  $P_0$  его посадки в транспортное средство за это время будет не менее 0,961.

После завершения посадки пассажир передвигается на транспортном средстве к месту назначения. Среднее время  $\bar{t}_T$  передвижения пассажира будет равно сумме математических ожиданий времени движения транспортной единицы по отдельным участкам маршрута поездки, а суммарное среднее квадратическое отклонение  $\sigma_\Sigma$  этого времени находится из выражения

$$\Delta_{0,9\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^g \Delta_{0,9i}^2}, \quad (6.68)$$

где  $g$  – количество суммируемых участков маршрута при значении доверительной вероятности 0,9. Исходя из этого, интервал неопределенности  $d_T$  будет равен

$$d_T = 3,2 \sigma_\Sigma. \quad (6.69)$$

Следовательно, если пассажир для передвижения на транспортном средстве отводит время  $T_T$ , которое равно (см. рис. 6.2, б)

$$T_T = \bar{t}_T + d_T / 2, \quad (6.70)$$

то вероятность  $P_T$  того, что продолжительность поездки на транспортном средстве не превзойдет указанного времени, будет не менее 0,95.

Для того чтобы поездка пассажира состоялась, необходимы два события – посадка в транспортное средство и передвижение в нем до пункта назначения, которые являются независимыми, поэтому появление обоих из них будет определяться произведением их вероятностей.

Если время посадки пассажира в транспортное средство оказалось больше времени, отводимого им для этой цели, а в процессе передвижения на транспортном средстве компенсировать эту потерю времени не удалось, то пассажир может опоздать в пункт назначения.

Пассажир также может опоздать и в случае, когда посадка в транспортное средство была произведена в отведенное для этого время, а поездка в транспортном средстве оказалась более длительной, чем это планировалось пассажиром.

Но самая неприятная для пассажира ситуация возникает, когда он затрачивает время больше положенного и на посадку, и на передвижение. Это, как правило, бывает при плохой работе общественного транспорта.

Будем считать, что в первых двух случаях потери времени не очень большие, и пассажир благополучно добирается до целевого объекта, компенсируя потерю за счет остатков свободного времени, а запаздывание в последнем случае грозит пассажиру неприятностями. Тогда риск пассажира попасть в ситуацию, обусловленную неприятностями, будет определяться вероятностью  $q_p$  наступления двух независимых событий, характеризуемых перерасходом времени на посадку в транспортное средство и проезд в нем. Вероятность  $q_p$  будет равна

$$q_p = (1 - P_0)(1 - P_T). \quad (6.71)$$

Предположим, что в течение года пассажир делает  $\nu$  трудовых поездок. Тогда вероятность  $Q_p$  того, что пассажир опоздает на работу за год не более  $u$  раз, можно подсчитать по формуле Бернулли:

$$Q_p = C_\nu^u q_p^u (1 - q_p)^{\nu - u}, \quad (6.72)$$

где  $C_\nu^u$  – число сочетаний из  $\nu$  по  $u$ .

Поскольку вероятность  $q_p$  мала, а количество  $\nu$  трудовых поездок велико, то  $Q_p$  может быть выражена формулой Пуассона

$$Q_p = \frac{(\nu q_p)^u}{u!} e^{-\nu q_p}. \quad (6.73)$$

Подставляя в уравнение (6.73) значение  $q_p$  из выражения (6.71), получаем значение 0,978 вероятности того, что пассажир может опоздать на работу не более 1 – 2-х раз в год. Это вполне приемлемая величина риска при совершении трудовых поездок на общественном транспорте.

Следовательно, время, которым располагает пассажир для посадки в транспортное средство и проезд в нем, может быть описано выражением

$$T_p = T_0 + T_T = \bar{t}_0 + d_0 / 2 + \bar{t}_T + d_T / 2. \quad (6.74)$$

Так как  $d_0/2$  и  $d_T/2$  – допустимые отклонения случайной величины, то формула (6.74) принимает вид

$$T_p = \bar{t}_0 + \Delta_0 + \bar{t}_T + \Delta_T, \quad (6.75)$$

где  $\Delta_0$  – допустимое отклонение времени ожидания пассажиром транспортного средства для совершения посадки в него,  $\Delta_0 = \frac{d_0}{2}$ ;  $\Delta_T$  – допустимое отклонение времени передвижения в транспортном средстве,  $\Delta_T = \frac{d_T}{2}$ .

Полученные выражения (6.67), (6.70), (6.75) позволяют оценить время, отводимое пассажиром для посадки, передвижения и поездки в целом, т. е. оценить запас времени у пассажира, однако фактические значения указанных времен зависят от реально складывающейся картины перевозочного процесса.

Время  $T_0^\Phi$  фактического ожидания пассажиром посадки в транспортное средство в основном зависит от интенсивности потока транспортных единиц множества маршрутов, с помощью которых удовлетворяется поездка пассажира, наполненности этих единиц на момент посадки и количества пассажиров на остановочном пункте (условной очереди), желающих выполнить поездку на этих транспортных единицах.

Пусть  $t_1, \dots, t_m$  – интервалы движения транспортных средств соответственно на 1-м, ...  $m$ -м маршрутах множества, которыми намеревается воспользоваться пассажир для удовлетворения своей поездки

(рис. 6.5, а). Интенсивность  $\xi$ -го потока транспортных средств будет равна

$$\lambda_{\xi} = \frac{1}{t_{\xi}}, \quad (6.76)$$

где  $t_{\xi}$  – интервал движения на  $\xi$ -м маршруте.

Поскольку пассажир может воспользоваться множеством маршрутов, то интенсивность потока транспортных единиц, принадлежащих множеству маршрутов 1, ...  $m$  (интенсивность суммарного потока  $\Pi_{\Sigma}$ ), с помощью которых возможна поездка, выразится как

$$\lambda_{\Pi} = \sum_{\xi=1}^m \lambda_{\xi} = \frac{1}{t_{\Pi}}, \quad (6.77)$$

где  $t_{\Pi}$  – интервал движения транспортных единиц, принадлежащих множеству маршрутов 1, ...  $m$ .

Пусть из пассажирских корреспонденций, осуществляющих поездки с данного остановочного пункта, сформировано упорядоченное множество  $\{Z(E), \geq\}$ , или условная очередь, в которой пассажирская корреспонденция  $Z_i$  занимает  $i$ -е место. Предположим, что на прибывшую на остановочный пункт транспортную единицу, принадлежащую потоку  $\Pi_{\Sigma}$  (рис. 6.5, б), была произведена посадка, которая закончилась на пассажирской корреспонденции  $Z_j$ . Тогда, если  $j < i$ , то посадка пассажира, обозначенного корреспонденцией  $Z_i$ , может быть осуществлена через  $k$  транспортных единиц потока  $\Pi_{\Sigma}$ , которые будут заполняться пассажирскими корреспонденциями, доминирующими над  $Z_i$  в множестве  $\{Z(E), \geq\}$ .

Будем полагать, что количество пассажиров, входящих в каждое прибывающее транспортное средство потока  $\Pi_{\Sigma}$ , равно некоторому среднему числу  $\bar{Z}$ . Исходя из этого, число транспортных единиц будет равно

$$k = \left[ \frac{Z_i}{\bar{Z}} \right], \quad (6.78)$$

т. е. целой части числа («антье»), если  $Z_i / \bar{Z}$  – нецелое число, и

$$k = \frac{Z_i}{\bar{Z}} - 1, \quad (6.79)$$

если  $Z_i / \bar{Z}$  – целое число.

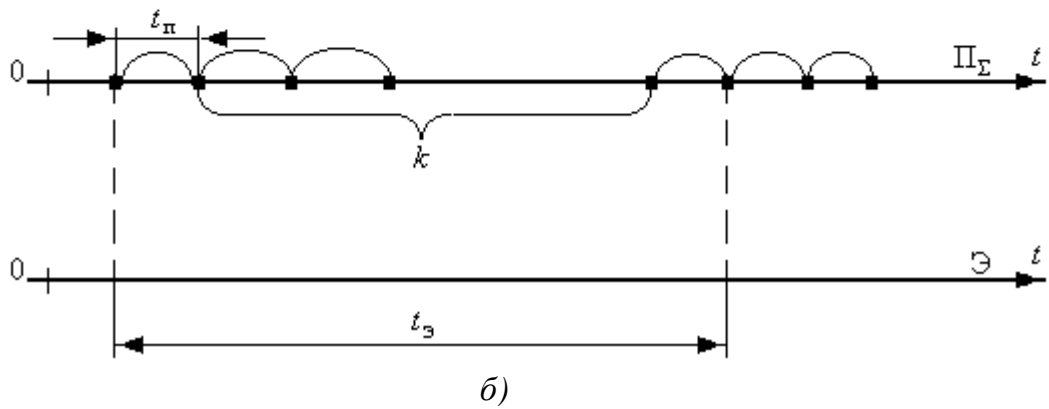
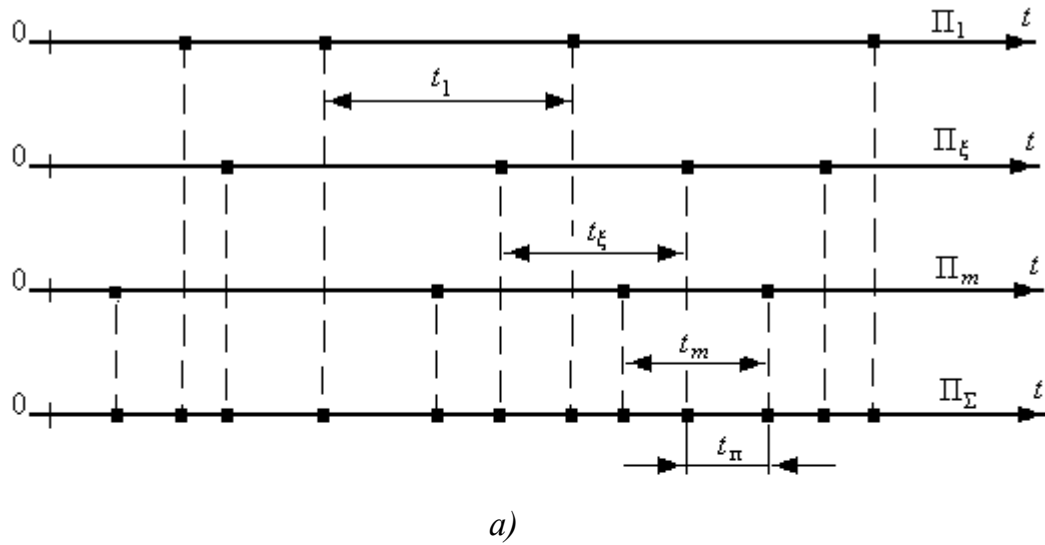


Рис. 6.5. К определению времени фактического ожидания пассажиром посадки в транспортное средство: а – интервалы потоков транспортных средств на множестве  $n$  маршрутов; б – поток Эрланга  $k$ -го порядка

Следовательно, у нового потока Э, обеспечивающего посадку пассажира в транспортное средство, интервал  $t_э$  между событиями представляет собой сумму  $(k + 1)$  независимых случайных величин, распределенных одинаково по показательному закону с параметром  $\lambda_\pi$ .

Данный поток является потоком Эрланга  $k$ -го порядка, плотность распределения случайной величины  $t_э$  (интервала между двумя соседними событиями) в котором равна

$$f(t) = \frac{\lambda_\pi (\lambda_\pi t)^k}{k!} e^{-\lambda_\pi t}. \quad (6.80)$$



Функция распределения случайной величины для целого  $k \geq 0$  будет иметь вид

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt = 1 - \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda_{\Pi} t)^n}{n!} e^{-\lambda_{\Pi} t}. \quad (6.81)$$

Обозначим

$$R(k, \lambda_{\Pi} t) = \sum_{n=0}^k \frac{(\lambda_{\Pi} t)^n}{n!} e^{-\lambda_{\Pi} t}, \quad (6.82)$$

тогда выражение (6.81) примет вид

$$F(t) = 1 - R(k, \lambda_{\Pi} t). \quad (6.83)$$

Математическое ожидание интервала  $t_{\text{Э}}$  между прибытием соседних транспортных единиц в потоке Э будет равно

$$m_{\text{Э}} = \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (6.84)$$

Подставляя в уравнение (6.84) значение функции плотности распределения из выражения (6.80), получим

$$m_{\text{Э}} = \frac{\lambda_{\Pi}^{k+1}}{k!} \int_0^{\infty} t^{(k+1)} e^{-\lambda_{\Pi} t} dt = \frac{k+1}{\lambda_{\Pi}}. \quad (6.85)$$

Соответственно дисперсия и среднее квадратическое отклонение находятся следующим образом:

$$D_{\text{Э}} = \int_0^{\infty} (t - m_{\text{Э}})^2 f(t) dt = \frac{k+1}{\lambda_{\Pi}^2}, \quad (6.86)$$

$$\sigma_{\text{Э}} = \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda_{\Pi}}. \quad (6.87)$$

Поскольку, как было показано раньше в формуле (6.68), отклонение времени движения транспортной единицы на участках дорожной сети определяется с 90 %-й доверительной вероятностью, то целесообразно и время фактического ожидания пассажиром этого транспортного средства вычислять с таким же значением доверительной вероятности. Для этого воспользуемся свойством функции  $R(k, \lambda_{\Pi} t)$ , которое дает возможность при значении параметра  $(\lambda_{\Pi} t) > 20$  пользоваться выражением

$$R(k, \lambda_{\Pi} t) \approx \Phi^* \left( \frac{k + 0,5 - \lambda_{\Pi} t}{\sqrt{\lambda_{\Pi} t}} \right), \quad (6.88)$$

где  $\Phi^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}}$  – функция Лапласа.

Значение функции  $\Phi^*$  при доверительной вероятности 0,9 равно 1,27. Подставляя это значение в формулу (6.88), получим параметр  $(\lambda_{\Pi} t) = 20,209$  при  $k = 14$ . С учетом выражений (6.85), (6.87) можно записать

$$\lambda_{\Pi} t = \lambda T_0^{\Phi} = \lambda_{\Pi} \left( \frac{k+1}{\lambda_{\Pi}} + E \frac{\sqrt{k+1}}{\lambda_{\Pi}} \right) = k+1 + E\sqrt{k+1}, \quad (6.89)$$

где  $E$  – коэффициент, связывающий между собой значение времени  $T_0^{\Phi}$  и уровень доверительной вероятности.

Решая уравнение (6.89) относительно  $E$  при  $\lambda_{\Pi} t = 20,209$  и  $k = 14$ , получим  $E = 1,34$ . Подставляя выражение (6.89) в уравнение (6.81) и учитывая значение  $E$ , получим

$$F(t) = 1 - \sum_{n=0}^k \frac{(k + 1,34\sqrt{k+1} + 1)^n}{n!} e^{-(k+1,34\sqrt{k+1}+1)}, \quad (6.90)$$

которое позволяет вычислить уровень доверительной вероятности при  $k < 14$ . Расчеты по формуле (6.90) показывают, что для всех  $1 \leq k < 14$   $F(t) = 0,9$  с погрешностью не более 0,2 %. Следовательно, с вероятностью 0,9 время фактического ожидания пассажиром транспортного средства будет равно

$$T_0^{\Phi} = t_{\Pi} (k + 1 + 1,34\sqrt{k+1}). \quad (6.91)$$

При  $k = 0$  получается исходный поток  $\Pi_{\Sigma}$ , так как никакого преобразования исходного потока мы не производим.

Напомним, что полученное значение времени  $T_0^{\Phi}$  необходимо для прогнозирования автоматической системой диспетчерского управления выбора пассажиром маршрута поездки, которое в условиях работы системы определяется через интервал  $t_{\Pi}$  движения транспортных единиц, принадлежащих соответствующему множеству

маршрутов, получаемый с помощью автоматического контроля моментов их прибытия на остановочный пункт.

Таким образом, получение данных для разработанных математических моделей само по себе является сложной задачей, для решения которой пришлось использовать различные методы и приемы, а иногда руководствоваться просто здравым смыслом. Более того, поскольку подготавливаемые для моделей данные зависели от нескольких факторов, то пришлось расчленять эту задачу на ряд частных, решать каждую из них в отдельности и потом объединять полученные решения. Несмотря на то что подобный путь получения данных представляет собой довольно трудоемкую процедуру, приходится мириться с этим, так как это единственный способ решения указанной задачи.

Если необходимо создать модель, которая адекватно отражала бы протекающие в действительности процессы, следует понимать, что она должна быть многофакторной, чувствительной к изменению ряда факторов, а следовательно, и более содержательной с точки зрения информационного наполнения. При этом с ростом числа учитываемых факторов возрастает и сложность отыскания закономерности взаимосвязей между этими переменными. Однако не следует также забывать, что одно из требований к математической модели, обеспечивающее удобство ее дальнейшего использования, – ее компактность. Но оно предполагает отказ от учета лишних факторов, поэтому входит в прямое противоречие с требованиями точности описания моделируемого явления. Поэтому для модели используют только те факторы, которые действительно повышают точность описания исследуемого явления, а повышение этой точности, в свою очередь, необходимо для получения экономического эффекта от использования этой модели.

В заключение следует сказать, что моделирование поведения биологических объектов, в частности человека, зависит от множества факторов, поэтому математическое моделирование его поведения – сложная задача, требующая творческого подхода для ее решения.

### *Вопросы для самопроверки*

1. Что такое «исследование операций»?
2. Что такое феноменологическая модель?
3. Какие этапы включает в себя построение математической модели?
4. Как изменяется сложность математической модели с ростом числа учитываемых факторов?
5. В какое противоречие входит требование компактности математической модели?
6. В каких отраслях народного хозяйства применяется математическое моделирование?
7. Каким образом может быть уменьшена погрешность в описании какого-либо явления?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование применяется практически во всех отраслях народного хозяйства. Однако моделирование – сложный эвристический процесс и многие практически необходимые задачи, например аналитическое определение степени черноты продуктов горения, не имеют простых и удобных решений. Разнообразие видов уравнений безгранично и в результате некоторой затраты времени в целом ряде случаев можно найти формулу, выражающую зависимость между изучаемыми переменными величинами.

При определенных обстоятельствах бывает сложно предугадать наиболее вероятный вид искомой формулы, поэтому любое соображение, позволяющее исключить тот или иной вид формулы из числа подбираемых, облегчает исследователю сложную задачу нахождения эмпирической формулы. Например, полезно наряду с равномерными шкалами на осях координат использовать и неравномерные, позволяющие в некоторых случаях точно и однозначно определить вид нужной формулы.

Погрешность в описании какого-либо явления, возникающая вследствие недостаточного соответствия искомой функции форме экспериментальной кривой, как правило, может быть уменьшена за счет усложнения математической модели. Лучшее соответствие модели описываемому явлению посредством усложнения приводит к противоречию между ее компактностью и точностью, поэтому следует искать оптимальный вариант между этими показателями.

Более сложен процесс описания семейства кривых единой аналитической моделью, требующий большого опыта и знаний в моделировании. Поэтому изучение основных методов моделирования – та основа, на которой впоследствии при необходимости можно разрабатывать сложные математические модели.

## СПИСОК БИБЛИОГРАФИЧЕСКИХ ССЫЛОК

1. Крейн С. Г., Ушакова В. Н. Математический анализ элементарных функций. М. : Физматгиз, 1963. 168 с.
2. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. 2-е изд., перераб и доп. Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. 304 с.
3. Сыромятников С. П. Вопросы тепловой работы котла, динамики и парораспределения паровоза. М. : Гос. трансп. ж.-д. изд-во, 1940. 88 с.
4. Сыромятников С. П. Тепловой процесс паровоза. М. : Гос. трансп. ж.-д. изд-во, 1949. 437 с.
5. Новые методы сжигания топлив и вопросы теории горения // Труды института горючих ископаемых / под ред. Б. В. Канторовича. М. : Изд-во Академии наук СССР, 1962. Т. XIX. 216 с.
6. Лыков А. В. Тепло- и массообмен в процессах сушки. М. : Госэнергоиздат, 1956. 264 с.
7. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена / под ред. А. В. Лыкова. М. : Госэнергоиздат, 1961. 680 с.
8. Пат. 2299007, Российская Федерация, МПК А61В, 1/00, 2007. Способ определения уровня здоровья и физической работоспособности человека / Оленев Е. А., Сушкова Л. Т. ; заявитель и патентообладатель Владим. гос. ун-т. № 2005120882/14 ; заявл. 07.04.05 ; опубл. 20.05.07, Бюл. № 14. 9 с.
9. Белоусов М. Я. Тепловой расчет пароперегревателя паровоза. М. : Гос. трансп. ж.-д. изд-во, 1944. 68 с.
10. Сушков В. В. Техническая термодинамика. М. : Госэнергоиздат, 1953. 336 с.
11. Оленев Е. А. Нетрадиционное использование твердого топлива на железнодорожном транспорте // Научно-технические технологии. 2007. № 1. С. 61 – 66.
12. Струнников М. Ф. О скорости выхода летучих веществ из твердого топлива // Исследование процессов горения натурального топлива. М. : Гос. энергет. изд-во, 1948. С. 110 – 116.

13. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М. : Наука, 1974. 160 с.
14. *Оленев Е. А.* Современные методы и средства контроля и диспетчерского управления движением городского пассажирского транспорта : монография. Ковров : КГТА, 1998. 76 с.
15. *Выгоцкий М. Я.* Справочник по высшей математике. М. : Физматгиз, 1963. 870 с.
16. *Сонин Н. Я.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М. : [Б. и.], 1954. 124 с.
17. *Новиков О. А., Петухов С. И.* Прикладные вопросы теории массового обслуживания. М. : Сов. радио, 1969. 400 с.
18. *Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. М. : Наука, 1965. 156 с.
19. *Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболев И. М.* Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). М. : Физматгиз, 1962. 186 с.
20. *Батунер Л. М., Позин М. Е.* Математические методы в химической технике. Л. : Госхимиздат, 1960. 640 с.
21. *Блох Л. С.* Основные графические методы обработки опытных данных. Л. : Машгиз, 1961. 164 с.

*Учебное издание*

ОЛЕНЕВ Евгений Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

Учебник

Редактор Е. А. Лебедева

Технические редакторы С. Ш. Абдуллаева, Н. В. Пустовойтова

Корректор О. В. Балашова

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 25.12.19.

Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,30. Тираж 50 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета.  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.