

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра автоматических и мехатронных систем

ПРОГРАММИРОВАНИЕ И ОСНОВЫ АЛГОРИТМИЗАЦИИ

Практикум

Часть 2

. Составитель: Новикова Н.А.

Владимир 2004

УДК 519.67

Программирование и основы алгоритмизации. Практикум. Часть 2.
/ Сост. Новикова Н. А. Владимир, 2004. 37с.

Разработан в соответствии с Государственным образовательным стандартом Министерства образования Российской Федерации по специальности 210200 "Автоматизация технологических процессов и производств".

Основу практикума составляет изучение приемов программирования научных и инженерных задач. Включает лабораторные работы раздела "Численные методы" дисциплины Программирование и основы алгоритмизации.

Подготовлен для студентов специальности 210200 дневной формы обучения, а также ориентирован на студентов заочной формы обучения и студентов Центра профессионального образования инвалидов.

Библиогр. 8 назв.

УДК 519.67

Владимирский государственный
университет, 2004

Введение

Лабораторный практикум содержит описание лабораторных работ по дисциплине "Программирование и основы алгоритмизации" и включает основные положения численных методов решения большинства инженерных и технических задач, автоматизации обработки информации. В практикум включены следующие разделы: решение нелинейных уравнений, систем линейных уравнений, дифференциальных уравнений, интерполирование и интегрирование функций.

Приведенные в практикуме работы состоят из краткого описания теоретических основ решения рассматриваемой задачи, заданий и требований к отчету. Как правило, при выполнении лабораторных работ задания требуют решения задачи различными методами с последующим анализом полученных результатов, включающим оценку точности, быстродействия и сходимости. Для выполнения лабораторных заданий требуется знание типовых приемов программирования на алгоритмическом языке Паскаль.

Практикум предназначен для студентов технических специальностей, изучающих дисциплины, связанные с применением численных методов обработки информации.

Лабораторная работа №1

Решение нелинейных уравнений

Цель работы. Изучение методов решения трансцендентных уравнений. Практическое решение уравнений. Сравнительный анализ рассмотренных методов.

1. Краткие сведения.

В практике научных и инженерных расчетов часто возникает необходимость решения уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале $a \leq x \leq b$. Если функция представляет многочлен, то уравнение (1.1) называется алгебраическим. Если x находится под знаком трансцендентной функции (показательной, логарифмической, тригонометрической и т.п.), уравнение (1.1) называется трансцендентным. Значение x^* , при котором выполняется условие $f(x^*) = 0$, называется корнем уравнения (1.1). В общем случае функции $f(x)$ не имеют аналитических формул для своих корней. В силу этого разработаны численные методы решения уравнений вида (1.1), которые позволяют определять приближенные значения корней с заданной степенью точности.

Процесс отыскания корня уравнения (1.1) состоит из двух этапов:

- 1) нахождение приближенного значения корня;
- 2) уточнение приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Первый этап реализуется различными способами. Приближенное значение корня может быть известно, например, из физического смысла задачи. При выделении области, в пределах которой находятся вещественные корни уравнения, можно воспользоваться следующим обстоятельством. Если на концах некоторого отрезка значения непрерывной функции $f(x)$ имеют разные знаки, то на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень. Широко распространен графический способ определения приближенных корней. В этом случае строится график функции $y = f(x)$, абсциссы точек пересечения которого с осью OX дадут приближенное значение корней. Иногда удается подобрать более простое уравнение, корни которого находятся вблизи корней исходного уравнения.

Существует также ряд специальных аналитических методов приближенного нахождения корней многочленов. Найденные приближенные значения корней уточняют различными итерационными методами. Рассмотрим наиболее эффективные из них.

Метод деления пополам

Для этого метода существенно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна и ограничена в заданном интервале $[a, b]$, внутри которого ищется корень. Предполагается также, что значения функции на концах интервала $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т.е. выполняется условие $f(a)f(b) < 0$. Для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ отрезок $[a, b]$ делят пополам, т.е. выбирают начальное приближение равным $x[0] = (a + b)/2$.

Если $f(x[0]) = 0$, то $x[0]$ является корнем уравнения. В противном случае выбирают тот из отрезков $[a, x[0]]$ или $[b, x[0]]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет разные знаки, ибо корень лежит на этой половине. Интервал вновь делят пополам и выбирают ту половину, на концах которой функция имеет противоположные знаки, и т.д. Если требуется определить корень с точностью ε , то деление пополам продолжают до тех пор, пока длина отрезка не даст значение корня с требуемой точностью.

Метод хорд (метод ложного положения)

В основе этого метода лежит линейная интерполяция по двум значениям функции, имеющим противоположные знаки. При отыскании корня этот метод нередко обеспечивает более быструю сходимость, чем предыдущий. Счет ведется следующим образом. Сначала определяют значения функции в точках, расположенных на оси x через равные интервалы. Это делается до тех пор, пока не будет найдена пара последовательных значений функции $f(x_n)$ и $f(x_{n+1})$, имеющих противоположные знаки. Прямая, проведенная через эти две точки, пересекает ось x при значении

$$x^* = x_n - f(x_n) \frac{x_{n+1} - x_n}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}.$$

Это значение аргумента используется для определения значения функции $f(x^*)$, которое сравнивается со значениями функции $f(x_n)$ и $f(x_{n+1})$ и в дальнейшем используется вместо того из них, с которым оно совпадает по знаку. Если значение $f(x^*)$ недостаточно близко к нулю, то вся процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнута необходимая степень сходимости.

Метод последовательных приближений

Исходное уравнение можно представить в форме $x = \varphi(x)$. Например, можно выделить x из уравнения (1.1), а остальное перенести в правую часть. Можно также выполнить следующее преобразование:

$$x = x + cf(x),$$

где c - произвольная постоянная. В этом случае $\varphi(x) = x + cf(x)$. Задаются начальным приближением $x[0]$, а последующие приближения определяют итерационной процедурой вида $x[k+1] = \varphi(x[k])$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Эта итерационная процедура сходится, если на отрезке $[a, b]$, содержащем корень x^* , а также все его последовательные приближения $x[0], x[1], \dots, x[k]$, выполнено условие $|\varphi'(x)| < 1$, Сходимость будет тем быстрее, чем меньше по абсолютной величине значение производной $\varphi'(x)$.

Метод последовательных приближений обладает тем важным преимуществом, что при его использовании не накапливаются ошибки вычислений. Ошибка вычислений эквивалентна ухудшению очередного приближения, а это может отразиться только на числе итераций, но не на точности результата.

Метод Ньютона

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень на отрезке $[a, b]$, причем первая и вторая производные $f'(x), f''(x)$ определены, непрерывны и сохраняют постоянные знаки на отрезке $[a, b]$. Выбирают некоторое начальное приближение корня $x[0]$ на интервале $[a, b]$ и проводят касательную в точке $C_0(x[0], f(x[0]))$ к кривой $y = f(x)$ до пересечения с осью абсцисс в точке $x[1]$. Абсциссу $x[1]$ принимают за очередное приближение корня. Уравнение касательной в точке C_0 имеет вид

$$y = f(x[0]) + f'(x[0])(x - x[0]). \quad (1.2)$$

Полагая в (1.2) $y = 0$, находят абсциссу $x[1]$:

$$x[1] = x[0] - \frac{f(x[0])}{f'(x[0])}.$$

Далее проводят касательную через новую точку $C_1(x[1], f(x[1]))$ и находят точку ее пересечения с осью абсцисс $x[2]$

$$x[2] = x[1] - \frac{f(x[1])}{f'(x[1])}.$$

Эту точку принимают за новое приближение корня.

Аналогично находят последующие приближения

$$x[k] = x[k-1] - \frac{f(x[k-1])}{f'(x[k-1])}.$$

Итерационный процесс прекращают при выполнении условий:

$$\delta \leq \varepsilon, f(x[k]) \leq 100\varepsilon,$$

$$\delta = \begin{cases} \left| \frac{x[k] - x[k-1]}{x[k]} \right|, & \text{если } |x[k]| > 1; \\ |x[k] - x[k-1]|, & \text{если } |x[k]| \leq 1; \end{cases}$$

где ε - заданная погрешность вычислений.

Начальное приближение $x[0]$ целесообразно выбирать из условия $f(x[0])f''(x[0]) > 0$. В противном случае сходимость метода Ньютона не гарантируется. Чаще всего выбирают $x[0] = a$ или $x[0] = b$ в зависимости от того, для какой из точек выполняется указанное условие.

Метод Ньютона эффективен для решения уравнений, у которых значение модуля производной $|f'(x)|$ близ к корню достаточно велико, т.е. график функции $y = f(x)$ в окрестности корня имеет большую крутизну. В данном методе погрешность очередного приближения примерно равна квадрату погрешности предыдущего приближения. Сходимость этого метода существенно выше сходимости метода последовательных приближений. Метод Ньютона чаще других применяют для нахождения корней произвольной дифференцируемой функции.

Отметим, что все сказанное справедливо, если начальное приближение $x[0]$ выбрано достаточно близко к истинному корню уравнения, что не всегда осуществимо. В силу этого методу Ньютона часто предшествует какой-либо надежно сходящийся алгоритм (например, метод деления пополам). Метод Ньютона в таком случае работает на завершающей стадии решения уравнения.

Метод секущих

Один из недостатков метода Ньютона состоит в том, что, пользуясь им, приходится дифференцировать функцию $f(x)$. Если нахождение производной затруднено, то можно воспользоваться некоторым приближением, которое и составляет основу метода секущих. Заменим производную $f'(x)$, используемую в методе Ньютона (1.2) разностью последовательных значений функции, отнесенной к разности значения аргумента

$$F'(x[k]) = \frac{f(x[k]) - f(x[k-1])}{x[k] - x[k-1]}.$$

Получим следующую итерационную формулу:

$$x[k+1] = x[k] - \frac{f(x[k])}{F'(x[k])}. \quad (1.3)$$

Схема алгоритма для этого метода та же, что и для метода Ньютона (несколько иной вид имеет итерационная формула). В сущности, в методе секущих для отыскания корня используется комбинация интерполяции и экстраполяции. В своей интерполяционной части этот метод эквивалентен методу ложного положения. Как и в случае метода Ньютона, счет заканчивается, когда последовательные значения совпадают с некоторой приемлемой точностью или когда значение функции $f(x)$ становится достаточно близким к нулю. В случае кратных корней при использовании метода секущих возникают те же трудности, что и при использовании метода Ньютона

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схемы алгоритмов решения нелинейных уравнений методами деления пополам, последовательных приближений и Ньютона. При составлении программ предусмотреть определения числа итераций для получения решения с заданной точностью.

2. Разработать программы решения нелинейных уравнений с использованием подпрограмм.

3. Решить нелинейные уравнения, приведенные в табл. 1.1. Начальное приближение корня выбрать из указанной области. Параметр ε принять равным 0.001.

4. На основании результатов расчетов п. 3 провести сравнительный анализ методов.

3. Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ.
2. Листинг программы.
3. Протоколы результатов решения задач.
4. Выводы по работе.

Для системы двух уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

согласно методу Ньютона последовательные приближения приращений $\Delta x_{n+1}, \Delta y_{n+1}$ вычисляются по формулам

$$\Delta x_{n+1} = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} f(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

$$\Delta y_{n+1} = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Где $f'_y(x_n, y_n)$ и $f'_x(x_n, y_n)$, $g'_y(x_n, y_n)$, $g'_x(x_n, y_n)$ частные производные функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$ по переменным y и x соответственно в точке начального приближения (x_n, y_n) ; $J(x_n, y_n)$ - якобиан в точке (x_n, y_n)

$$J(x_n, y_n) = -\frac{1}{J(x_n, y_n)} \begin{vmatrix} f'_x(x_n, y_n) & f'_y(x_n, y_n) \\ g'_x(x_n, y_n) & g'_y(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

Хотя метод Ньютона имеет преимущества по сравнению с другими итерационными методами, для него также существует проблема сходимости. Величина области сходимости обратно пропорциональна степени сложности и числу уравнений.

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схемы алгоритмов решения нелинейных систем уравнений методами Ньютона и простой итерации.

2. Разработать программы решения систем нелинейных уравнений методами Ньютона и простой итерации с использованием подпрограмм.

3. Решить системы нелинейных уравнений, приведенных в табл. 2.1. Параметр ε принять равным 0,00001.

4. Провести сравнительный анализ методов

3. Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ.

2. Листинг программы.

3.Протоколы результатов решения задач.

4.Выводы по работе.

Таблица 2.1

Система уравнений	x^0, x^0_2	№	Система уравнений	x^0, x^0_2
$\begin{cases} \cos \frac{x_1 x_2}{6} - x_2 + 0.5 = 0 \\ \ln(1 + \frac{x_1 + x_2}{5}) + 1.1 = \sin \frac{x_2}{3} + x_1 \end{cases}$	1,1	4	$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3 = 0 \\ x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 + 2 = 0 \end{cases}$	0,5 0,5
$\begin{cases} \lg \frac{x_2}{x_3} - x_1 + 1 = 0 \\ 2x_1^2 + x_2 - x_3^2 - 0.4 = 0 \end{cases}$	1, 2,2 2	5	$\begin{cases} x_1 + 3 \lg x_1 - x_2^2 = 0 \\ 2x_1 - x_1 x_2 - 5x_1 + 1 = 0 \end{cases}$	3,4 2,2
$\frac{x_1 x_2}{20} - x_3 + 2 = 0$		6	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 10 \lg x_2 = 4 \\ 5x_1 - 6x_2 + 20 \lg x_1 = -16 \end{cases}$	1,1
$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2 x_3 - 0.1 = 0 \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1 x_3 + 0.2 = 0 \end{cases}$	0 0	7	$\begin{cases} 0.3 \cos x_1 - x_2 = 0 \\ 0.5 \sin \frac{x_2}{3} - x_1 + 1 = 0 \end{cases}$	1,0
$x_3 + x_3^2 + 2x_1 x_2 - 0.3 = 0$	0			

Лабораторная работа №3

Решение алгебраических уравнений

Цель работы. Изучение современных методов численного решения алгебраических уравнений. Практическое определение действительных и комплексных корней уравнений. Сравнительный анализ решения трансцендентных и алгебраических уравнений.

1.Краткие сведения.

Уравнения, содержащие суммы целых степеней x называют алгебраическими. Их общий вид

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0.$$

При отыскании корней алгебраических уравнений полезно иметь в виду некоторые их свойства:

1. Алгебраическое уравнение порядка n имеет n корней, которые могут быть действительными или комплексными.
2. Если все коэффициенты a_i действительные, то все комплексные корни образуют комплексно-сопряженные пары.

3. Число положительных действительных корней равно или меньше (на целое число) числа перемен знаков в последовательности коэффициентов a_i ,

4. Число отрицательных действительных корней равно или меньше (на целое число) числа перемен знаков в последовательности коэффициентов a_i , при замене x на $-x$.

Известны прямые методы отыскания корней алгебраических уравнений второй и третьей степеней, однако для уравнений более высоких степеней приходится использовать итерационные методы. Для нахождения действительных или комплексных корней алгебраических уравнений можно использовать алгоритмы решения трансцендентных уравнений, если использовать комплексные числа.

Метод Лина

Существует несколько специальных методов для отыскания комплексных корней. Все они почти всегда связаны с выделением из исходного алгебраического уравнения квадратичного множителя $x^2 + px + q$.

Широко применяемым методом этого типа является метод Лина. В его основе лежит представление алгебраического уравнения

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (3.1)$$

в виде

$$(x^2 + px + q)(b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \dots + b_3 x + b_2) + b_1 x + b_0 = 0, \quad (3.2)$$

где $b_1 x + b_0$ - линейный остаточный член, который мы стремимся сделать равным нулю. Если это возможно, то исходное алгебраическое уравнение делится на квадратичный множитель без остатка. Предположив, что $b_1 = b_0 = 0$ и сравнивая соответствующие коэффициенты двух приведенных форм алгебраического уравнения, получаем:

$$\begin{aligned} b_n &= a_n; \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - pb_n; \\ b_{n-2} &= a_{n-2} - pb_{n-1} - qb_n; \\ &\dots\dots\dots \\ b_{n-j} &= a_{n-j} - pb_{n+1-j} - qb_{n+2-j}; \\ p &= (a_1 - qb_3) / b_2; \quad q = a_0 / b_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Алгоритм итерационной процедуры решения действует следующим образом. Сначала задаются вероятные значения p и q , которые вместе с заданными коэффициентами a_i используются для вычисления b_{n-1} . В свою очередь, значение b_{n-1} служит для вычисления b_{n-2} и т.д. до тех пор, пока не будут найдены все коэффициенты, включая b_2 , по формулам (3.3). Значения b_3, b_2, a_1 и a_0 позволяют найти из двух последних уравнений (3.3) уточненные значения p и q , которые обозначим через p^* и q^* . Если их отличие от p и q достаточно мало, счет прекращается. В противном случае вся процедура повторяется с использованием новых значений p и q . Процедура вычислений сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными методом простой итерации.

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схему алгоритма решения алгебраического уравнения порядка n $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ с произвольными коэффициентами $a_i (i = 0, \dots, n)$ методом Лина.

2. Разработать программу решения алгебраического уравнения общего вида методом Лина с использованием подпрограмм.

3. Решить контрольный пример из таблицы 3.1.

Таблица 3.1

№	n	Коэффициенты a_n, a_{n-1}, \dots, a_0
1	4	2, 0.2, 1.4, 2.3, -1.5
2	4	1, 1, 0, 2, 1
3	4	1, 2, 1, 2, 1
4	4	1, 4, 4, 4, -1
5	4	1, 4, 2, 2, 6.4, 2.56
6	4	1, -8, -5, -12, 2.25
7	4	1, 10, 1.8, -31, 9.61

Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ.
2. Листинги программ.
3. Протокол результатов решения задачи.
4. Выводы по работе.

Лабораторная работа №4 **Решение систем линейных уравнений**

Цель работы. Изучение приближенных методов решения систем линейных уравнений. Практическое решение систем уравнений. Сравнительный анализ рассмотренных методов.

1. Краткие сведения.

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводятся многие задачи анализа и синтеза физических систем различной природы: механических, гидравлических, электрических и т.п.

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

или в векторно-матричной форме $Ax = b$, где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

есть соответственно матрица коэффициентов, вектор-столбец свободных членов и вектор-столбец неизвестных.

Если матрица A невырожденная, т.е. если ее определитель не равен нулю, то уравнение имеет единственное решение. Значения неизвестных x_i могут быть получены по формулам Крамера. Однако, данный метод на практике не применяется, так как его реализация требует значительного количества арифметических операций и соответственно больших затрат машинного времени. Кроме того, правило Крамера приводит к большим ошибкам при округлении.

Применяемые в практике численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений делятся на две группы: точные (прямые) и приближенные (итерационные). Точными называются методы, которые в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить точное решение за конечное число арифметических операций.

2. Задают начальное приближение $x[0] = \{x_1[0], \dots, x_n[0]\}$. Начальный вектор может быть выбран произвольно, однако необходимо использовать всю имеющуюся информацию о системе уравнений, чтобы $x[0]$ располагался как можно ближе к точному решению системы x^* .

3. В первое уравнение системы подставляют координаты точки $x[0]$ и вычисляют новое значение первой координаты:

$$x_1[1] = C_{11}x_1[0] + C_{12}x_2[0] + \dots + C_{1n}x_n[0] + d_1.$$

Применяя вычисленное значение $x_1[1]$ и начальное значение остальных переменных $x_2[0], \dots, x_n[0]$, из второго уравнения системы определяют новое значение второй координаты:

$$x_2[1] = C_{21}x_1[1] + C_{22}x_2[0] + \dots + C_{2n}x_n[0] + d_2.$$

Используя аналогично уже вычисленные приближения, получают значения всех остальных координат. Так, последняя координата будет иметь значение:

$$x_n[1] = C_{n1}x_1[1] + C_{n2}x_2[1] + \dots + C_{nn}x_n[1] + d_n.$$

В результате будет определено первое приближение $x[1]$ к решению системы x^* .

4. Начальный вектор $x[0]$ заменяют вектором $x[1]$ и вычисляют следующее приближение. В общем случае $k+1$ приближение определяют по формулам:

$$x_1[k+1] = C_{11}x_1[k] + C_{12}x_2[k] + \dots + C_{1n}x_n[k] + d_1;$$

$$x_2[k+1] = C_{21}x_1[k+1] + C_{22}x_2[k] + \dots + C_{2n}x_n[k] + d_2;$$

$$\dots$$

$$x_n[k+1] = C_{n1}x_1[k+1] + C_{n2}x_2[k+1] + \dots + C_{nn}x_n[k] + d_n.$$

Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока все $x_i[k+1]$ не станут достаточно близкими к $x_i[k]$. Итерации прекращают при выполнении условия

$$\max \frac{x_i[k+1] - x_i[k]}{x_i[k+1]} < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где ε - некоторое заданное положительное число (точность вычислений).

Весьма важно, что итерационные методы являются самоисправляющимися, т.е. отдельная ошибка, допущенная при вычислениях, не отражается на конечном результате, так как ошибочное приближение рассматривается как новый начальный вектор.

Важным преимуществом итерационных методов является удобство их программирования, так как они требуют выполнения однообразных повторяющихся операций.

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схемы алгоритмов решения систем линейных уравнений методами Якоби и Зейделя. Предусмотреть контроль количества итераций.

2. Разработать программу решения систем линейных уравнений методами Якоби и Зейделя с использованием подпрограмм.

3. Решить системы линейных уравнений, приведенные в табл. 4.1, с точностью до 0,001.

4. Вычислить точные оценки погрешности методов по координатам $\delta = \max|x_i - x_i^*|$, $i = 1, 2, \dots, n$ (x в табл. 4.1 – точное решение системы).

5. На основании полученных результатов провести сравнительный анализ методов по точности и времени решения.

Таблица 4.1

№	Матрица А	Вектор В	х	№	Матрица А	Вектор В	х	
1	10.9 1.2 2.1 0.9	-7	-1	4	6.1 2.2 1.2	16.55	1.5	
	1.2 11.2 1.5 2.5	5.3	0		2.2 5.5 -1.5	10.55	2	
	2.1 1.5 9.8 1.3	10.3	1		1.2 -1.5 7.2	16.8	2.5	
	0.9 2.5 1.3 12.1	24.6	2					
2	20.9 1.2 2.1 0.9	21.77	0.8	5	0.15 2.11 30.75	-26.38	1	
	1.2 21.2 1.5 2.5	27.46	1		0.64 1.21 2.05	1.01	2	
	2.1 1.5 19.8 1.3	28.76	1.2		3.21 1.53 1.04	5.23	-2	
	0.9 2.5 1.3 32.1	49.72	1.4	6	1.02 -0.25 -0.3	0.515	2	
			-0.41 1.13 -0.15		1.555	2.5		
3	3.82	1.02	15.655	2.5	-0.25 -0.14 1.21	2.78	3	
	0.75 0.81		22.705	3				
	1.05 4.53 0.98		23.48	3.5	7	1.15 0.42 100.71	198.7	2
	1.53		16.11	2		1.19 0.55 0.32	2.29	1
	0.73 0.85 4.71					1.00 0.35 3.00	-0.65	-2
	0.81							
0.88 0.81 1.28 3.5								

Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ
2. Листинги программы
3. Протокол результатов решения
4. Результаты расчетов.
5. Выводы по работе.

Лабораторная работа №5

Интерполирование функций

Цель работы. Изучение методов интерполирования функций. Практическое интерполирование функций с использованием подпрограмм. Сравнительный анализ рассмотренных методов.

1. Краткие сведения.

Данные, с которыми приходится иметь дело инженеру, часто представляются в виде таблиц. Это может быть связано либо с тем, что результаты были получены экспериментально и лишь для некоторых дискретных значений аргумента, либо с тем, что объем таблиц ограничен и в них можно привести лишь некоторые данные. Сущность интерполяции состоит в отыскании значения функции в некоторой промежуточной точке.

Линейная интерполяция

Простейшим видом интерполяции является линейная интерполяция, в основе которой лежит аппроксимация кривой на участке между точками (x_k, y_k) и (x_{k+1}, y_{k+1}) прямой, проходящей через те же точки. Уравнение прямой можно представить в виде

$$\frac{y - y_k}{x - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

или в виде

$$y = \frac{y_k(x - x_{k+1}) - y_{k+1}(x - x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

Таким образом, зная два табличных значения y_k и y_{k+1} соответствующих x_k и x_{k+1} с помощью указанных формул можно найти значение функции y при любом значении x в интервале $[x_k, x_{k+1}]$. Обычно полагают, что, используя большее число соседних точек и аппроксимируя истинную кривую более сложной линией, можно уточнить полученный результат. Рассмотрим методы нахождения единственного многочлена n -й степени $P_n(x)$, аппроксимирующего функцию $f(x)$ кривой, проходящей через все $n+1$ заданные в таблице точки (x_i, y_i) , где $i = 0, 1, \dots, n$. В этом случае говорят, что многочлен удовлетворяет условиям

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Методы отыскания такого многочлена делятся на три группы: методы Лагранжа, разностные методы и итерационные.

Интерполяционный многочлен для этого метода имеет вид
 $P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_1(x - x_0)(x - x_1) + \dots + C_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$.
 Коэффициенты C_j , находятся из уравнений

$P_n(x) = Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$, позволяющих записать систему:

$$\begin{aligned} C_0 &= Y_0, \\ C_0 + C_1(x - x_0) &= Y_1, \\ C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) &= Y_2, \\ &\dots\dots\dots \\ C_0 + \dots + C_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-2}) &= Y_n. \end{aligned}$$

Это линейная система уравнений с треугольной матрицей и определение с ее помощью значений C_j не вызывает затруднений, однако существует и еще более простой способ определения C_j , основанный на применении правых конечных разностей. Если значения x заданы через равные промежутки $x_{i+1} - x_i = h$, то в общем случае $x_j = x_0 + ih$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Последнее выражение позволяет привести решаемые уравнения к виду

$$\begin{aligned} Y_0 &= C_0, \\ Y_1 &= C_0 + C_1 h, \\ Y_2 &= C_0 + C_1(2h) + 2h^2 C_2, \\ &\dots\dots\dots \\ Y_i &= C_0 + C_1(ih) + C_2 i h[(i-1)h] + \dots + C_i (i!) h^i, \end{aligned}$$

откуда для коэффициентов получаем

$$\begin{aligned} C_0 &= Y_0 \\ C_1 &= \frac{Y_1 - C_0}{h} = \frac{Y_1 - Y_0}{h} = \frac{\Delta Y}{h}. \end{aligned}$$

ΔY

$$C_2 = \frac{1}{2h^2}(Y_2 - C_0 - 2hC_1) = \frac{1}{2h^2}[(Y_2 - Y_1) - (Y_1 - Y_0)] = \frac{1}{2h^2}[\Delta(\Delta Y_0)] = \frac{\Delta^2 Y_0}{2h^2},$$

где $\Delta^2 Y_0$ - вторая правая разность, представляющая собой разность первых разностей. Коэффициент C_j можно представить в виде

$$C_j = \frac{\Delta^j Y_0}{(j!) h^j}.$$

В общем случае разности более высоких порядков для функции $y = f(x)$ в интервале $x_0 \leq x \leq x_n$ определяются выражением

$$\Delta^j Y_j = \Delta^{j-1} Y_{j+1} + \Delta^{j-1} Y_j, \quad i = 0, 1, \dots, n-j.$$

Итерационные методы интерполяции

Эти методы основаны на повторном применении простой интерполяционной схемы. Наиболее известным из них является метод Эйткена, сущность которого в повторном применении интерполяции.

Выше было показано, что линейная интерполяция между точками (x_0, y_0) и (x_1, y_1) осуществляется по формуле

$$Y_{11}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} [Y_0(x_1 - x) - Y_1(x_0 - x)],$$

с помощью которой, задав значение x_1 , можно составить таблицу функций $y_{11}(x)$, где $i = 1, 2, \dots, n$. Пользуясь этими функциями, с помощью линейной интерполяции

$$Y_{12}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} [Y_{11}(x_2)(x_1 - x) - Y_{11}(x)(x_2 - x)],$$

получим новое семейство соотношений. Простой подстановкой можно показать, что выражения для $Y_{12}(x)$ представляют собой многочлены второй степени, описывающие кривые, проходящие через точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Получив многочлены Y_{12} с помощью линейной интерполяции и используя функции $Y_{12}(x)$, можно записывать выражение для многочлена третьей степени

$$Y_{13}(x) = \frac{1}{x_3 - x_2} [Y_{12}(x_3)(x_2 - x) - Y_{12}(x)(x_3 - x)],$$

и (x_i, y_i) . Продолжая этот процесс, получим значения $Y_q(x)$, которые будут стремиться к значению $f(x)$. Хотя этот метод позволяет вводить многочлены степени $n > 3$, обычно этого не делают, стремясь избежать роста ошибок. Следует, однако, отметить, что метод Эйткена не требует, чтобы используемые для интерполяции значения функции были расположены через равные интервалы.

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схемы алгоритмов интерполирования функций по методам, указанным преподавателем.

2. Разработать программу интерполирования функций с применением подпрограмм.

3. Выполнить интерполирование функций, приведенных в табл. 5.1.

4. Построить графики функций. Провести сравнительный анализ методов

Таблица 5.1

№	Значение аргумента	Значение функций	Пределы изменения аргумента	Шаг	№	Значение аргумента	Значение функций	Пределы изменения аргумента	Шаг
1	-1,06 -0,837 -0,684 -0,315 -0,117 0,0 0,115 0,5	1,22 0,854 0,513 0,271 0,217 0,198 0,218 0,277	-1,8 0,4	0,2	4	0,215 0,441 0,638 0,865 1,05 1,3 1,55 1,82	5,82 4,63 4,1 3,34 3,0 3,29 4,32 5,72	0,4 1,6	0,2
2	-2,15 -1,83 -1,62 -1,45 -1,01 -0,72 -0,48 0,0	-2,23 -2,65 -3,1 -3,54 -4,26 -4,38 -4,52 -4,27	2,95 0,1	0,3	5	-1,0 -0,96 -0,86 -0,79 0,22 0,5 0,93 1,1	-1,0 -0,151 0,894 0,986 0,895 0,5 -0,306 -0,51	-1,0 1,02	0,35
3	-0,21 -0,143 -0,099 -0,032 0,114 0,182 0,257 0,38	-12,64 -11,05 -10,25 -9,32 -9,25 -10,0 -11,48 -14,4	-0,21 0,28	0,08	6	0,5 0,75 1,0 1,25 1,5 1,75 2,0 2,25	0,1915 0,2734 0,3413 0,3944 0,4332 0,4599 0,4773 0,4878	0,625 2,226	0,25

4. Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ.
2. Листинг программы.
3. Протокол результатов решения задачи.
4. Графики функций.
5. Выводы по работе

Лабораторная работа №6

Численное интегрирование функций

Цель работы. Изучение методов численного интегрирования функций. Практическое интегрирование функций. Сравнительный анализ рассмотренных методов.

1. Краткие сведения.

Во многих случаях задачи вычисления определенных интегралов не могут быть решены точно, так как не удается выразить первообразную функцию через элементарные функции.

Довольно часто нахождение первообразной связано с необходимостью выполнения весьма сложных преобразований. Распространенной является также ситуация, когда подынтегральная функция задана таблицей экспериментально полученных значений. Во всех этих случаях прибегают к приближенному вычислению определенных интегралов.

В основе численного интегрирования лежит приближенное вычисление значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции. В общем случае задача формулируется как нахождение значения

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Обычный прием состоит в том, что функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx.$$

для I непосредственно.

Метод трапеций

Пусть $y = f(x)$ - непрерывная функция в интервале $[a, b]$. Требуется вычислить определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{где } a, b \text{ конечны.}$$

Интервал интегрирования $[a, b]$ разбивается на n равных частей, имеющих длину $h = (b - a) / n$. Площадь под кривой $y = f(x)$ на одном из участков разбиения $[x_i, x_{i+1}]$ определяется выражением

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx.$$

Эту площадь можно с некоторой погрешностью считать равной площади трапеции

$$I_i \approx \frac{h(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2}.$$

Общая площадь равна сумме площадей на отдельных участках разбиения, т. е.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) \right) h, \end{aligned}$$

где $x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{n-1} = a + (n-1)h$.

Погрешность вычислений определенного интеграла по методу трапеций оценивают согласно формуле

$$|\Delta| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, \text{ где } M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Метод Симпсона

Интервал интегрирования $[a, b]$ разбивается на четное число $2n$ равных частей длиной $h = (b - a) / 2n$. Через три последовательные ординаты разбиения на концах двух соседних отрезков проводится квадратичная парабола и вычисляется площадь получения фигуры. Общая площадь образуется путем суммирования площадей отдельных фигур и определяется по формуле

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}),$$

где $x_k = a + kh, y_k = f(x_k), k = 0, 1, \dots, 2n$.

Погрешность данного метода можно оценить по формуле

$$|\Delta| \leq \frac{(b-a)^5}{180 \cdot 12n^4} M, \quad \text{где } M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|.$$

Метод Симпсона обладает достаточно высокой для практических вычислений точностью, прост, хорошо программируется, вследствие чего он широко применяется.

Метод Гаусса

В данном методе концы участков разбиения интервала $[a, b]$ располагают таким образом, чтобы при заданном количестве участков n добиться наивысшей точности интегрирования. Можно показать, что этот метод точно интегрирует все многочлены степени, меньшей или равной $2n-1$.

Предварительно интервал интегрирования $[a, b]$ преобразуется в интервал $[-1, 1]$ путем замены переменных:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}; \quad \varphi(t) = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right).$$

В результате получают $I = \int_{-1}^1 \varphi(t) dt$.

В методе Гаусса используется квадратурная формула вида

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \approx \sum_{k=0}^n a_k \varphi(t_k).$$

Абсциссы t_k называются узлами, а коэффициенты a_k — весовыми коэффициентами квадратурной формулы. Значения t_k являются корнями полиномов Лежандра степени n . Полиномы Лежандра $P_0(t)$ можно отыскать с помощью выражений:

$$\left. \begin{aligned} P_0(t) &= 1; \\ P_1(t) &= t; \\ P_m(t) &= \frac{1}{m}((2m-1)tP_{m-1}(t) - (m-1)P_{m-2}(t)) \end{aligned} \right\}$$

Весовые коэффициенты можно найти из соотношения

$$a_k = \frac{2}{(1-t_k^2)(P_n'(t_k))^2}.$$

Метод Гаусса обладает высокой точностью при малом числе узлов интегрирования. Если подынтегральная функция сложна и на вычисление ее значений в узлах интегрирования затрачивается много времени, применение формулы Гаусса особенно выгодно.

2.Порядок выполнения работы

1.Составить схемы алгоритмов интегрирования функций по методам трапеций, Симпсона и Гаусса.

2.Разработать программы интегрирования функций с использованием подпрограмм.

3.Вычислить абсолютные погрешности методов численного интегрирования функций $\delta = |I^* - I|$, где I^* точное значение интеграла, вычисленное через первообразную; I - значение интеграла, полученное в результате применения конкретного численного метода.

4.Провести сравнительный анализ методов численного интегрирования.

Таблица 6.1

№	Подынтегральная функция $f(x)$	Интервал $[a, b]$	Число разбиений n	Шаг h	Первообразная функция
1	$xe^x \sin x$	[0,1]	50	0,02	$\frac{xe^x(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{e^x \cos x - 1}{2}$
2	$\frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$	[0,2]	200	0,01	$\ln(x + \sqrt{9+x^2}) - \ln 3$
3	$\frac{1}{\sqrt{1+3x+2x^2}}$	[0,1]	40	0,025	$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x+0,75}{0,75+0,5} + \frac{\sqrt{(x+0,75)^2 - 0,0625}}{0,75+0,5} \right)$
4	$\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3$	[1,2]	40	0,025	$(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2/2 + \frac{3(\ln x)/2 + 3/4}{2x^2} + \frac{3}{8}$
5	$\frac{x^3}{3+x}$	[1,2]	80	0,0125	$9x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - 27\ln(3+x) - \frac{47}{6} + 27\ln 4$
6	$x \arctg x$	[0,2]	50	0,04	$\frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \arctg x$
7	$\frac{1}{x \lg x}$	[2,3]	40	0,025	$2,3026(\ln \ln x - \ln \ln 2)$

3.Содержание отчета.

- 1.Схемы алгоритмов и программ.
- 2.Листинг программы.
- 3.Протоколы результатов решения задачи.
- 4.Результаты расчетов.

5. Выводы по работе.

Лабораторная работа №7

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель работы. Изучение методов численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Практическое решение уравнений с использованием подпрограмм. Сравнительный анализ рассмотренных методов.

1. Краткие сведения.

Важное место в теории и практике численных методов решения задач занимают приближенные методы решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Многие задачи физики и техники сводятся к нахождению решения именно этой задачи. Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, электрических цепей, сопротивления материалов, систем автоматического управления и регулирования и многое другое. Точное решение дифференциального уравнения можно получить лишь в отдельных случаях, а большинство дифференциальных уравнений могут быть решены только численно. Численное решение задачи состоит в построении таблицы приближенных значений y_1, y_2, \dots, y_n , решений уравнения в точках (узлах) сетки $x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \dots, n, x_0 = a, x_n = b$. Величина h называется шагом интегрирования. Он может быть как постоянным, так и переменным. Для дифференциального уравнения первого порядка задача Коши ставится следующим образом: требуется найти решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Численные методы не позволяют найти общего решения задачи Коши: они могут дать только какое-то частное решение. Это основной недостаток численных методов. Однако эти методы применимы к очень широкому классу уравнений. С появлением современных быстродействующих ЭВМ численные методы решения стали одним из основных способов решения конкретных практических задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка, которое можно разрешить относительно старшей производной, лег-

ко сводится к системе из n уравнений первого порядка путем введения $(n-1)$ новых переменных.

Например, $u'' = g(u', u, x)$ можно записать как систему

$$\left. \begin{aligned} z' &= g(u, z, x), \\ u' &= z \end{aligned} \right\}$$

Методы Рунге-Кутты

Одними из более эффективных и часто применяемых на практике численных методов решения задач Коши являются так называемые методы Рунге - Кутты. Эти методы обладают следующими свойствами:

- являются одношаговыми, т. е. для нахождения приближения y_{i+1} нужна информация только о предыдущей точке (x_i, y_i) ;
- согласуются с рядом Тейлора вплоть до членов порядка n^p , где степень p различна для различных методов и называется порядком метода;
- не требуют вычисления производных от $f(x, y)$, необходимо вычисление значений только самой функции $f(x, y)$.

Метод Эйлера - простейший численный метод решения задачи Коши. В методе Эйлера величины $y_i = y(x_i)$ вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + h(f(x_i, y_i)) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N),$$

$$y_0 = y(x_0), \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_N.$$

Основной недостаток метода Эйлера - систематическое накопление ошибки, которое происходит из-за того, что при вычислении значений на следующем шаге исходные данные не являются точными и содержат погрешности, зависящие от неточности предыдущих вычислений. Другим недостатком метода является и малая точность.

Существуют модифицированные варианты метода Эйлера, которые являются методами Рунге - Кутты второго порядка:

- исправленный метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \tilde{f}(x_i, y_i, h) \quad y_0 = y(x_0),$$

$$\text{где } \tilde{f}(x_i, y_i, h) = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))];$$

- модифицированный метод Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i, h) \quad y_0 = y(x_0),$$

где ${}^*f(x_i, y_i, h) = \frac{1}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot y_i')]$.

Одним из самых употребительных методов численного решения дифференциальных уравнений (систем уравнений) является метод четвертого порядка, называемый просто метод Рунге- Кутта. В этом методе величины y_{i+1} вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + h(F(x_i, y_i, h)),$$

где $F(x_i, y_i, h) = (1/6)(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})$,

$$k_{1i} = f(x_i, y_i),$$

$$k_{2i} = f(x_i + h/2, y_i + hk_{1i} / 2),$$

$$k_{3i} = f(x_i + h/2, y_i + hk_{2i} / 2),$$

$$k_{4i} = f(x_i + h, y_i + hk_{3i}).$$

Погрешность метода на одном шаге равна Mh^5 , но поскольку на практике оценить величину M обычно трудно, при оценке погрешности используют правило Рунге, для этого проводят вычисления сначала с шагом h и, а затем с шагом $h/2$. Если y_i' - приближение, вычисленное с шагом h , а y_i , - с шагом $h/2$, то справедлива оценка $[y_i' - y_i] \leq (16/15)[y_i' - y_i]$.

При реализации метода обычно на каждом шаге делают двойной пересчет. Если полученные значения отличаются в пределах допустимой погрешности, то шаг h удваивают, иначе берут половинный шаг. Для проверки точности можно использовать неравенство $[y_i' - y_i] \leq (E(h))/(b - a)$.

Методы прогноза и коррекции

В этих методах для вычисления положения новой точки используется информация о нескольких ранее полученных точках. Для этого применяются две формулы, называемые соответственно формулами *прогноза* и *коррекции*. Схемы алгоритмов для всех этих методов примерно одинаковы, а сами методы отличаются лишь формулами решения дифференциального уравнения вида $y'(x) = f(x, y)$. Так как в рассматриваемых методах используется информация нескольких ранее полученных точек, то в отличие от одношаговых методов они не обладают свойством самостартования. Поэтому прежде чем применять метод прогноза и коррекции, приходится вычислять исходные данные с помощью какого-либо одношагового метода. Часто для этого прибегают к методу Рунге - Кутта.

Вычисления производят следующим образом. Сначала по формуле прогноза и исходным значениям переменных определяют значение $y_{n+1}^{(0)}$. Верхний индекс (0) показывает, что прогнозируемое значение является одним из последовательности значений y_{n+1} , располагающихся в порядке возрастания точности. По прогнозируемому значению $y_{n+1}^{(0)}$ с помощью дифференциального уравнения находят производную $y_{n+1}^{(0)'} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$, которая затем подставляется в формулу коррекции для вычисления уточненного значения $y_{n+1}^{(j+1)}$. В свою очередь, $y_{n+1}^{(j+1)}$ используется для получения более точного значения производной с помощью дифференциального уравнения $y_{n+1}^{(j+1)'} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j+1)})$.

Если это значение производной недостаточно близко к предыдущему, то оно вводится в формулу коррекции и итерационный процесс продолжается. Если же производная изменяется в допустимых пределах, то значение $y_{n+1}^{(j+1)}$ используется для вычисления окончательного значения y_{n+1} . После этого процесс повторяется - делается следующий шаг, на котором вычисляется y_{n+2} .

Метод Милна

В этом методе на этапе прогноза используется формула Милна

$$y_{n+1} = y_{n-3} + (4/3)h(2y_n' - y_{n-1}' + 2y_{n-2}') + (28/90)h^5 y^{(5)},$$

а на этапе коррекции - формула Симпсона

$$y_{n+1} = y_{n-1} + (1/3)h(y_{n+1}' + 4y_n' + y_{n-1}') - (1/90)h^5 y^{(5)}.$$

Последние члены в обеих формулах в действительности в итерационном процессе не используются и служат лишь для оценки ошибки усечения.

Метод Милна относят к методам четвертого порядка точности, так как в нем отбрасываются члены, содержащие h в пятой и более высокой степенях.

Метод Адамса-Баушфорта

Этот метод также имеет четвертый порядок точности. Используемая в нем формула прогноза получена интегрированием обратной интерполяционной формулы Ньютона и имеет вид

$$y_{n+1} = y_n + (1/24)h(55y_n' - 59y_{n-1}' + 37y_{n-2}' - 9y_{n-3}') + (251/270)h^5 y^{(5)},$$

На этапе коррекции используется формула

$$y_{n+1} = y_n + (1/24)h(9y_{n+1}' - 19y_n' - 5y_{n-1}' + y_{n-2}') + (19/720)h^5 y^{(5)}.$$

Расчеты по методу Адамса-Башфорта выполняются так же, как и по методу Милна, однако, в отличие от последнего ошибка, внесенная на каком-либо шаге, не имеет тенденции к экспоненциальному росту.

Метод Хэмминга

В методе Хэмминга используются следующие формулы:

$$\text{-прогноза} \quad y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4}{3}h(2y'_n - y'_{n-1} + 2y'_{n-2}) + \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}$$

$$\text{-коррекции} \quad y_{n+1} = \frac{1}{8}[9y_n - y_{n-2} + 3h(y'_{n+1} + 2y'_n - y'_{n-1})] - \frac{1}{40}h^5 y^{(5)}.$$

Особенность метода Хэмминга в том, что он позволяет оценивать погрешности, вносимые на стадиях прогноза и коррекции, и устранять их. Благодаря простоте и устойчивости этот метод является одним из наиболее распространенных методов прогноза и коррекции.

2. Порядок выполнения работы

1. Составить схемы алгоритмов решения систем дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты и прогноза и коррекции.

2. Разработать схемы программ решения систем дифференциальных уравнений с использованием подпрограмм.

3. Решить дифференциальные уравнения, приведенные в табл.6.1. Заданные уравнения предварительно свести к системе уравнений первого порядка. Предусмотреть в программах вычисление точных решений по заданному в таблице алгоритму.

4. Результаты счета оформить в виде графика.

5. Определить близость полученного заданным методом решения к точному значению с помощью оценок:

$$\beta_1 = \max_{i=1, \dots, n} |y_{Ti} - y_{Mi}|, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{Ti} - y_{Mi})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_{Ti}^2}}.$$

Здесь y_{Ti} - точное решение; y_{Mi} - решение, полученное заданным методом; n - число дискретизации процесса по времени.

6. Провести сравнительный анализ методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Содержание отчета

1. Схемы алгоритмов и программ.

2. Листинг программы.

3. Протоколы результатов решения.

- 4.Графики сравнительного анализа методов.
 5.Результаты расчетов.
 6.Выводы по работе.

Таблица 6.1

N	Дифференциальное уравнение	$y(0), y'(0)$	[a, b]	Шаг h	Точное решение
1	$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$	1, 0	[0, 0,5]	0,05	$e^{-x}(\cos x + \sin x + x \sin x)$
2	$y'' + 4y = e^{3x}(13x - 7)$	0, -4	[0, 02]	0,02	$\cos 2x - \sin 2x + e^{3x}(x - 1)$
3	$y'' + 4y' + 4y = 0$	1, -1	[0, 1]	0,1	$(1+x)e^{-2x}$
4	$y'' - 2y' + y = 5xe^x$	1, 2	[0, 1]	0,1	$e^x + xe^x + 5e^x \frac{x^3}{6}$
5	$y'' - 5y' + 6y = e^x$	0, 0	[0, 0,2]	0,02	$-e^{2x} + 0,5e^{3x} + 0,5e^x$
6	$y'' + y = 1 + e^x$	2.5,1.5	[0, 1]	0,1	$\cos x + \sin x + 1 + \frac{e^x}{2}$
7	$y'' - 2y' + y = xe^x$	1, 2	[0, 0,5]	0,05	$(1+x)e^x + (x^3 e^x / 6)$

Библиографический список

- 1.Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. - М.:Высш.шк.,1994.
- 2.Волков Е.А. Численные методы. - М.:Наука,1987.
- 3.Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.:Наука,1998.
- 4.Самарский А.А. Введение в численные методы. -М.:Наука,1992.
- 5.Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. - М.:Наука,1997.
- 6.Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики - М.: Наука,1996.
- 7.Шуп Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике. - М., Высш. шк.,1990.
- 8.Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. - М., Наука, 1992

Оглавление

Введение.....	3
Лабораторная работа №1. Решение нелинейных уравнений.....	4
Лабораторная работа №2. Решение систем нелинейных уравнений.....	9
Лабораторная работа №3. Решение алгебраических уравнений.....	13
Лабораторная работа №4. Решение систем линейных уравнений.....	16
Лабораторная работа №5. Интерполирование функций.....	20
Лабораторная работа №6. Численное интегрирование функций.....	25
Лабораторная работа №7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.....	29
Библиографический список.....	34