Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

О. В. КРАШЕНИННИКОВА

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ

Учебно-практическое пособие

Владимир 2018

УДК 51
ББК 22.1
К78

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент кафедры информатики и информационных технологий
в образовании Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
С. Б. Наумова

Кандидат физико-математических наук, доцент
доцент департамента анализа данных, принятия решений
и финансовых технологий Финансового университета
при правительстве Российской Федерации, г. Москва
М. Б. Хрипунова

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Крашенинникова, О. В.

К78 Алгебра и геометрия. Введение в математический анализ. Производная : учеб.-практ. пособие / О. В. Крашенинникова ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 116 с. – ISBN 978-5-9984-0871-7.

Содержит необходимый теоретический материал, примеры решения типовых задач и индивидуальные контрольные работы по следующим разделам высшей математики: линейная, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Предназначено для студентов бакалавров заочной формы обучения направления 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника, 09.03.03 – Прикладная информатика.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 18. Библиогр.: 9 назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-9984-0871-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие отражает опыт работы кафедры алгебры и геометрии ВлГУ со студентами бакалаврами технических специальностей заочной формы обучения, которые изучают высшую математику в течение первых двух семестров. Представленный по рассматриваемым разделам теоретический материал соответствует программе первого семестра и включает примеры решения типовых задач и индивидуальные контрольные работы (30 вариантов) для самостоятельного выполнения с последующей их защитой во время сессии.

Используемые обозначения и терминология являются общеупотребительными и не нуждаются в специальных пояснениях. Следует отметить, что это пособие ни в коей мере не заменяет более подробные курсы высшей математики, изложенные в классических учебниках и монографиях. Работа с ним предполагает параллельное изучение соответствующих разделов курса высшей математики по книгам, указанным в библиографическом списке.

1. МАТРИЦЫ. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

Определение. **Матрицей размерами** $m \times n$ называется числовая таблица, состоящая из m строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу обозначают $A = (a_{ij})_{m\times n}$, a_{ij} – элемент i-й строки j-го столбца.

Виды матриц:

1. Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны 0.

2. Квадратная матрица – матрица, у которой число строк равно числу столбцов $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Элементы a_{11}, …, a_{nn} образуют главную диагональ.

3. Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю.

4. Единичная матрица – диагональная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы. Единичную матрицу обозначают

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5. Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные по одну сторону относительно главной диагонали, равны нулю.

6. Трапециевидная матрица – прямоугольная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Линейные операции с матрицами

К линейным операциям с матрицами относят сложение матриц и умножение матрицы на число.

Определение. **Суммой двух матриц** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой равны $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Например, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & -1 & -6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 8 & -3\\ 2 & -4 & 9\end{pmatrix}$, то $A+B=\begin{pmatrix}4 & 6 & 1\\ 7 & -5 & 3\end{pmatrix}$.

Свойства операции сложения матриц:

1. $A+B=B+A-$ коммутативность,
2. $(A+B)+C=A+(B+C)-$ассоциативность,
3. $A+0=A$,
4. $A+(-A)=0$, где $-A=\left(-a_{ij}\right)$ противоположная матрица.

Определение. **Произведением матрицы** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **и числа** α называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ такая, что $b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$.

Матрица $-1\cdot A=-A$ называется противоположной матрице A.

Например, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & -1 & -6\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, то $3A=\begin{pmatrix}9 & -6 & 12\\ 15 & -3 & -18\end{pmatrix}$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1. $1\cdot A=A$,
2. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A-$ ассоциативность,
3. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B-$дистрибутивность,
4. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A-$ дистрибутивность.

Умножение матриц

Определение. **Произведением матрицы** $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **на матрицу** $B=\left(b_{ij}\right)_{n\times k}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times k}$ такая, что $c_{ij}=\sum\limits_{l=1}^{n}a_{il}b_{lj}$.

Свойства операции умножения матриц:

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$,

2. $(A\cdot B)C = A(B\cdot C)$,

3. пусть $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $E=E_m$, тогда $E_m\cdot A = A$, если $E=E_n$, то $A\cdot E_n = A$.

4. $A(B+C)=A\cdot B + A\cdot C$.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Найти произведение *AB*.

Решение. $AB=\begin{pmatrix} 3\cdot 2-2\cdot(-1)+4\cdot 5 & 3\cdot 0-2\cdot 4+4\cdot(-3) \\ 5\cdot 2-1\cdot(-1)-6\cdot 5 & 5\cdot 0-1\cdot 4-6\cdot(-3) \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 28 & -20 \\ -19 & 14 \end{pmatrix}$

Пример 2. Найти значение матричного многочлена $f(A)=2A^2-3A+7E$, если матрица $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Решение. $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot 3-5\cdot 0-3\cdot 2 & 3\cdot(-5)-5\cdot(-3)-3\cdot 6 & 3\cdot(-3)-5\cdot 4-3\cdot 1 \\ 0\cdot 3-3\cdot 0+4\cdot 2 & 0\cdot(-5)-3\cdot(-3)+4\cdot 6 & 0\cdot(-3)-3\cdot 4+4\cdot 1 \\ 2\cdot 3+6\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot(-5)+6\cdot(-3)+1\cdot 6 & 2\cdot(-3)+6\cdot 4+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & -18 & -32 \\ 8 & 33 & -8 \\ 8 & -22 & 19 \end{pmatrix},$$

$$2A^2=\begin{pmatrix} 6 & -36 & -64 \\ 16 & 66 & -16 \\ 16 & -44 & 38 \end{pmatrix},\ 3A=\begin{pmatrix} 9 & -15 & -9 \\ 0 & -9 & 12 \\ 6 & 18 & 3 \end{pmatrix},\ 7E=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}6 & -36 & -64\\ 16 & 66 & -16\\ 16 & -44 & 38\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & -15 & -9\\ 0 & -9 & 12\\ 6 & 18 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 7 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -21 & -55\\ 16 & 82 & -28\\ 10 & -62 & 42\end{pmatrix}$$

Транспонирование матрицы

Определение. Матрица, полученная из данной путем замены строк столбцами с теми же номерами, называется **транспонированной** матрицей относительно данной матрицы A и обозначается A^T. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Например, если $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 5 & -1 & -6\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -1\\ 4 & -6\end{pmatrix}$

Свойства операции транспонирования:

1. $\left(A^T\right)^T=A$,
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$,
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$,
4. $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$.

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Пусть множество n натуральных чисел 1, 2, 3, … n взаимно однозначно отображается на себя. Такое отображение называется **подстановкой порядка *n*.** Если 1 отображается в i_1, 2 – в i_2, … , n – в i_n, то подстановка записывается в виде

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix},$$

где нижняя строка есть перестановки элементов 1, 2, 3, … n в произвольном порядке.

Например, если n = 2, то получаем две подстановки: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Если n = 3, то получаем шесть подстановок:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Два элемента (i_1, i_2) образуют **инверсию**, если $i_1 > i_2$. Например, (1, 3) – нет инверсии, а (3, 1) есть инверсия. У каждой подстановки есть четность, которая определяется четностью или нечетностью общего числа инверсий первой и второй строк. Например, у подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ есть 2 инверсии, это четная подстановка.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определителем матрицы A называется число, равное сумме из n! слагаемых, каждое из которых есть произведение из n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Произведение идет со знаком «+» или «–» в зависимости от четности или нечетности соответствующей подстановки.

По определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$.

Определитель обозначается одним из символов: $det\, A$, ΔA, $|A|$.

В частности, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Свойства определителей:

1. При умножении строки (столбца) определителя на число α определитель умножается на α.

2. Если в определителе строка (столбец) нулевая, то определитель равен 0.

3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

4. Если в определителе две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен 0.

5. Если одна строка (столбец) умножается на отличное от нуля число и складывается с другой строкой (столбцом), то определитель не меняется.

6. При транспонировании определитель не меняется.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка *n*. Выделим в ней какие-то *k* строк и *k* столбцов. **Минором *k*-го порядка *M*** называется определитель матрицы, стоящей на пересечении выбранных строк и столбцов. **Дополнительным минором *M*'** называется определитель матрицы, стоящей на пересечении оставшихся строк и столбцов. **Алгебраическим дополнением** называется число $A=(-1)^{i_1+\ldots+i_k+j_1+\ldots+j_k}M'$, где $i_1,\ldots,i_k, j_1,\ldots j_k$ – номера выбранных строк и столбцов.

Например, выберем в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ первую и третью строки и первый и четвертый столбцы. Тогда соответствующий минор второго порядка

$$M=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 12 \end{vmatrix}=12-36=-24.$$

Дополнительный минор

$$M'=\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 14 & 15 \end{vmatrix}=90-98=-8.$$

Алгебраическое дополнение

$$A=(-1)^{1+3+1+4}\cdot M'=(-1)^9\cdot(-8)=8.$$

Для вычисления определителей порядка выше третьего используется **теорема Лапласа**:

Пусть в определителе выделена i-я строка. Тогда определитель равен

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots a_{in}A_{in},$$ где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot$ определитель матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

В частности, $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$:

а) по правилу «треугольника»;

б) разложением по строке или столбцу.

Решение.

а) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 6\cdot 3 + 3\cdot 7\cdot 8 + (-4)\cdot 5\cdot 0 - (-4)\cdot 6\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 3 - 2\cdot 7\cdot 0 =$$

$$= 36 + 168 + 192 - 45 = 351;$$

б) так как в третьей строке стоит нуль, то удобно раскладывать по этой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 8\cdot\left(21 + 24\right) + 3\cdot(12 - 15) = 351.$$

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Решение. Пользуясь свойством 5 определителя, обнулим первую строку, кроме первого элемента. Для этого сложим первый столбец со вторым и результат запишем во второй, затем первый столбец умножим на –2 и сложим с третьим столбцом, и также первый столбец, умноженный на –2, сложим с четвертым. В итоге получим

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 6 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(9+35)-(-9+14) = -49.$$

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА. МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Матрицей, **обратной** квадратной матрице $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, называется квадратная матрица A^{-1} порядка n, такая что $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E_n$.

Теорема. Если $\Delta A \neq 0$, то существует обратная матрица, причем $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta A}\left(A_{ij}\right)^T$, где $\left(A_{ij}\right)^T$ – транспонированная матрица из алгебраических дополнений матрицы A.

Пример 1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и сделать проверку.

Решение. Вычислим определитель матрицы по правилу «треугольника»:

$$\Delta A = 2\cdot1\cdot0 + 0\cdot1\cdot2 + (-1)\cdot(-3)\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot(-1) - 2\cdot1\cdot(-1) - 0\cdot(-3)\cdot0 = = -3 + 4 = 1.$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot0 - 1\cdot(-1) = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = -\left(-3\cdot0 - 2\cdot1\right) = 2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -3\cdot(-1) - 1\cdot2 = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} = -\left(0\cdot0 - (-1)\cdot(-1)\right) = 1,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} = 2\cdot0 - 2\cdot(-1) = 2,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} = -\left(2\cdot(-1) - 2\cdot0\right) = 2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot0 - 1\cdot(-1) = 1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix} = -\left(2\cdot1 - (-1)\cdot(-3)\right) = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix} = 2\cdot1 - 0\cdot(-3) = 2.$$

Тогда $A^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3+2 & 0+1-1 & -1+1+0\\ 4-6+2 & 0+2-1 & -2+2+0\\ 2-6+4 & 0+2-2 & -1+2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

Решение. $\Delta A = ad - bc \neq 0$, $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot d = d$, $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot c = -c$, $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot b = -b$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot a = a$. Следовательно, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Пример 3. Решить матричное уравнение $AXB = C$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Решение.

$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$, отсюда $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$. Согласно примеру 2 имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{-1-6}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-3+6}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -15 & 18 \\ -37 & 29 \end{pmatrix}$$

4. РАНГ МАТРИЦЫ

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к ступенчатому виду. Элементарные преобразования матрицы:

- перестановка местами двух строк,
- умножение строки на отличное от нуля число,
- умножение строки на отличное от нуля число и сложение с другой строкой.

Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Пусть $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то поменяем первую строку с *i*-й, в которой $a_{i1} \neq 0$. Умножим первую строку на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и сложим со второй, затем умножим первую строку на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и сложим с третьей и таким образом поступим со всеми строками. Получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

Затем обнуляем аналогично элементы второго столбца, стоящие ниже a'_{22} и так далее получаем нули ниже главной диагонали.

Определение. **Рангом** матрицы называется число ненулевых строк после приведения матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Теорема. Пусть A – произвольная матрица размера $m \times n$, тогда ее ранг равен порядку наибольшего минора матрицы, отличного от нуля. Любой такой минор называется базисным.

Свойства ранга матрицы:

1) $0 \le r \le \min(m,n)$,

2) $r = 0 \Leftrightarrow$ матрица нулевая,

3) для квадратной матрицы порядка n ранг равен n тогда и только тогда, когда матрица невырожденная.

Способы вычисления ранга матрицы:

1) приведение к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований,

2) методом окаймляющих миноров: вычисляют различные миноры матрицы до тех пор, пока не обнаружится одно из двух: либо все миноры k-го порядка равны нулю, тогда $r = k-1$, либо есть минор k-го порядка, отличный от нуля и $k = \min(m,n)$, тогда $r = k$.

Пример. Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Решение. Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Умножим первую строку на (-3) и сложим со второй, затем умножим первую строку на (-1) и сложим с третьей, получим матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Умножим третью строку на $\left(-\frac{1}{3}\right)$ и поменяем местами со второй

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 3 & 20 \end{pmatrix}$. Теперь умножим вторую строку на 7 и сложим с третьей, получим матрицу

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 20 \end{pmatrix}$. Так как приведенная матрица имеет 3 ненулевые строки, то ранг матрицы равен 3.

В качестве базисного минора рассмотрим определитель матрицы, стоящей на пересечении первый трех строк и первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 2 \cdot (-4) - (-2) = 12 \neq 0.$$

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Определение. **Системой m линейных уравнений с n неизвестными** называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где $a_{ij}, b_j \in \mathbf{R}$. Числа a_{ij} $\left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right)$ называются коэффициентами, b_j – свободными членами, x_1, … x_n – неизвестными.

Решением системы (1) называется упорядоченный набор n чисел, подстановка которого вместо x_1, … x_n обращает каждое уравнение системы в верное равенство. Система называется **совместной**, если множество ее решений не пусто. В противном случае система называется **несовместной**, или **противоречивой**. Совместная система называется **определенной**, если имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет более одного решения.

Матрицей системы (1) называется матрица, составленная из коэффициентов и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матрица, составленная из коэффициентов системы (т. е. до черты), называется **основной**, а с присоединением столбца свободных членов – **расширенной**.

Теорема Кронекера – Капелли

Для совместности системы линейных уравнений (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной.

Совместная система линейных уравнений может иметь:

1) единственное решение, если ранг основной матрицы равен числу неизвестных;

2) бесконечно много решений, если ранг основной матрицы меньше числа неизвестных.

Способы решения систем линейных уравнений

1. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Выписывают матрицу системы, составленную из коэффициентов и свободных членов:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований приводят матрицу к ступенчатому виду. При обнулении может возникнуть строка вида $\left(0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \middle| b_i'\right)$. Тогда:

а) если $b_i' \neq 0$, то ранг основной матрицы меньше ранга расширенной, и, следовательно, система несовместна;

б) если $b_i' = 0$, то нулевую строку можно отбросить, не изменив при этом множество решений.

По приведенной матрице восстанавливают систему. Если приведенная матрица имеет треугольный вид, то система будет определенной и имеет одно решение:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{nn}'x_n = b_n' \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражают $x_n = \dfrac{b_n'}{a_{nn}'}$ и подставляют в предыдущее, из которого находят x_{n-1}. Подставляя x_n и x_{n-1} в предыдущее, выражают x_{n-2} и т. д.

Если приведенная матрица имеет трапециевидный вид, система будет неопределенной и имеет бесконечно много решений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}'x_2 + \ldots + a_{2m}'x_m + \ldots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad a_{mn}'x_m + \ldots + a_{nn}'x_n = b_n' \end{cases}.$$

Отделяют переменные после x_m, т. е. переносят их в правые части со знаком «–». Переменные x_{m+1}, … x_n называются свободными, а переменные x_1, … x_m связанными. В левой части останется выражение треугольного вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = -a_{1,m+1}x_{m+1} - \ldots - a_{1n}x_n + b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2m}x_m = -a'_{2,m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{2n}x_n + b'_2 \\ \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad a'_{mn}x_m = -a'_{m,m+1}x_{m+1} - \ldots - a'_{nn}x_n + b'_n \end{cases}$$

Из последнего уравнения выражают x_m через $x_{m+1}, \ldots x_n$, затем из предпоследнего x_{m-1} через $x_{m+1}, \ldots x_n$ и т. д. до x_1.

2. Формулы Крамера

Рассмотрим систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2}$$

Пусть определитель матрицы из коэффициентов $\Delta A \neq 0$. Обозначим через Δ_i определитель матрицы, полученной из матрицы коэффициентов заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Теорема. Система (2) имеет единственное решение $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta A}$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

3. Матричный метод

Запишем систему (2) в матричном виде $AX = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Тогда $A^{-1}AX = A^{-1}B$, $X = A^{-1}B$ – матричная форма записи решения системы (2).

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера, матричным методом.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 5z = 15 \\ 6x - 8y + 7z = 9 \end{cases}$$

Решение.

1. Метод Гаусса

Выписываем матрицу системы $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{array}\right)$ и приводим ее к ступенчатому виду. Первую строку умножаем на (–4) и складываем со второй строкой, затем первую строку умножаем на (–6) и складываем с третьей строкой, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -11 & -3 \end{array}\right)$$

Разделим вторую строку на 7, получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -11 & -3 \end{array}\right)$

Затем умножаем вторую строку на (–4) и складываем с третьей строкой, получаем

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right)$$

Ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 3, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система совместна. Так как ранг равен числу неизвестных, то система будет определенной. По приведенной матрице восстанавливаем систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ \qquad y - z = 1 \\ \qquad -7z = -7 \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = 1$, затем из второго $y = 2$, а из первого $x = 3$.

2. Формулы Крамера

Вычислим определитель матрицы из коэффициентов

$$\Delta A=\begin{vmatrix}1&-2&3\\4&-1&5\\6&-8&7\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-8&7\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\6&-8\end{vmatrix}=$$

$=-7+40+2(28-30)+3(-32+6)=-49$.

Вычислим определитель матрицы, полученной из матрицы коэффициентов заменой первого столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}2&-2&3\\15&-1&5\\9&-8&7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-8&7\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}15&5\\9&7\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}15&-1\\9&-8\end{vmatrix}=$$

$=2(-7+40)+2(105-45)+3(-120+9)=-147$. Тогда $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta A}=\dfrac{-147}{-49}=3$.

Аналогично находим

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&15&5\\6&9&7\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}15&5\\9&7\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4&15\\6&9\end{vmatrix}=$$

$=105-45-2(28-30)+3(36-90)=-98$. Тогда $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta A}=\dfrac{-98}{-49}=2$.

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1&-2&2\\4&-1&15\\6&-8&9\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1&15\\-8&9\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&15\\6&9\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}4&-1\\6&-8\end{vmatrix}=$$

$=-9+120+2(36-90)+2(-32+6)=-49$. Тогда $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=\dfrac{-49}{-49}=1$.

3. Матричный метод

Запишем систему в матричном виде $AX = B$,

где $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&-1&5\\6&-8&7\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\15\\9\end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу для матрицы A. Определитель матрицы $\Delta A=-49$. Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&5\\-8&7\end{vmatrix}=-7+40=33,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4&5\\6&7\end{vmatrix}=-(28-30)=2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ 6 & -8\end{vmatrix}=-32+6=-26,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -8 & 7\end{vmatrix}=-(-14+24)=-10,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 6 & 7\end{vmatrix}=7-18=-11,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 6 & -8\end{vmatrix}=-(-8+12)=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-10+3=-7,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-(5-12)=7,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix}=-1+8=7.$$

Тогда $A^{-1}=\dfrac{1}{-49}\begin{pmatrix}33 & -10 & -7\\ 2 & -11 & 7\\ -26 & -4 & 7\end{pmatrix}$,

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{-49}\begin{pmatrix}33 & -10 & -7\\ 2 & -11 & 7\\ -26 & -4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 15\\ 9\end{pmatrix}=\frac{1}{-49}\begin{pmatrix}66-150-63\\ 4-165+63\\ -52-60+63\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{49}\begin{pmatrix}-147\\ -98\\ -49\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

Ответ: $\{3;2;1\}$.

Пример 2. Используя критерий Кронекера – Капелли, исследовать совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее:

$$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3-x_4=2\\ 3x_1-5x_2-x_3+2x_4=-1\\ 6x_1-11x_2-3x_3+x_4=2\\ -2x_1+3x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$$

Решение. Выписываем матрицу системы $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -11 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$ и приводим ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. Первую строку умножаем на (–3) и складываем со второй строкой, затем первую строку умножаем на (–6) и складываем с третьей строкой и первую строку умножаем на 2 и складываем с четвертой строкой, получаем

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 4 \end{array}\right)$. Теперь вторую строку умножаем на (–1) и складываем с третьей строкой, затем вторую строку складываем с четвертой строкой, получаем

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$. Поскольку третья и четвертая строки оказались одинаковыми, то можно оставить одну, не изменив при этом пространство решений

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right)$$

Ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 3, следовательно, по критерию Кронекера – Капелли система совместна. Но поскольку он меньше числа неизвестных, то система будет неопределенной, т. е. имеет бесконечно много решений. Восстановим по приведенной матрице систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ \quad x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -7 \\ \qquad x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

Выразим из последнего уравнения x_3 через x_4 и подставим в предыдущее $x_3 = -3 - 2x_4$, $x_2 = -2x_3 - 5x_4 - 7 = -2(-3 - 2x_4) - 5x_4 - 7 =$ $= -x_4 - 1$.

Из первого уравнения выражаем x_1:

$x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 + 2 = 2(-x_4 - 1) - 3 - 2x_4 + x_4 + 2 = -3x_4 + 1$. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 = -3x_4 + 1 \\ x_2 = -x_4 - 1 \\ x_3 = -2x_4 - 3 \\ x_4 \in R \end{cases}$$

6. ВЕКТОРЫ. СКАЛЯРНОЕ, ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Вектор – это направленный отрезок, т. е. отрезок, у которого принимается во внимание его начало и его конец. Вектор обозначается $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$ – это длина отрезка, изображающего вектор.

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется нуль-вектором и обозначается $\vec{0}$.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными**. Коллинеарные векторы, лежащие в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начала, называются **сонаправленными** и обозначаются $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, в противном случае – **противоположно направленными** и обозначаются $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Сонаправленные векторы, равные по длине, называются **равными**.

Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

Линейные операции над векторами

К линейным операциям над векторами относят сложение векторов и умножение вектора на число, отличное от нуля, так как результатом этих операций является вектор.

Суммой двух векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец – с концом второго при условии, что второй вектор отложен от первого. Или для любых точек *A*, *B*, *C* имеет место: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Аналогично определяется сумма трех и более векторов: $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, если $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.
Свойства суммы:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,
2. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$,
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}\quad\forall\vec{a}$,
4. $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется вектор $\lambda\vec{a}$ такой, что:

1. $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$,
2. $\lambda\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a},\quad\lambda>0$, $\lambda\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a},\quad\lambda<0$.

Свойства операции умножения вектора на число:

1. $\alpha\left(\beta\cdot\vec{a}\right)=\left(\alpha\beta\right)\vec{a}$,
2. $\left(\alpha+\beta\right)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$,
3. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$,
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}\quad\forall\vec{a}$.

Координаты вектора

Прямая, на которой зафиксировано положительное направление, называется осью. **Проекцией вектора на ось** называется число, равное длине отрезка, полученного при ортогональном проектировании вектора, взятое со знаком «+» при одинаковом направлении вектора и оси и со знаком «–» – в противном случае. Обозначается $np_l \vec{a}$. Очевидно, $np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$ (рис. 1).

Рассмотрим в пространстве прямоугольную декартову систему координат. $\overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M. Очевидно, что

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y + \overrightarrow{OM}_z, \qquad (3)$$

где $\overrightarrow{OM}_x, \overrightarrow{OM}_y, \overrightarrow{OM}_z$ – проекции вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 2).

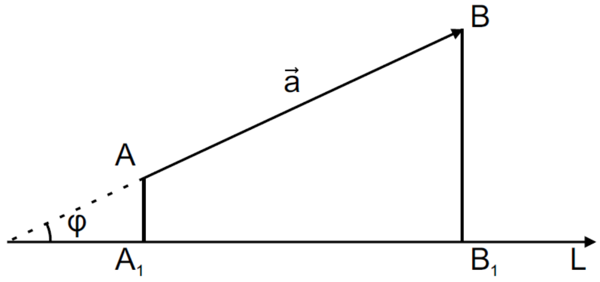

Рис. 1

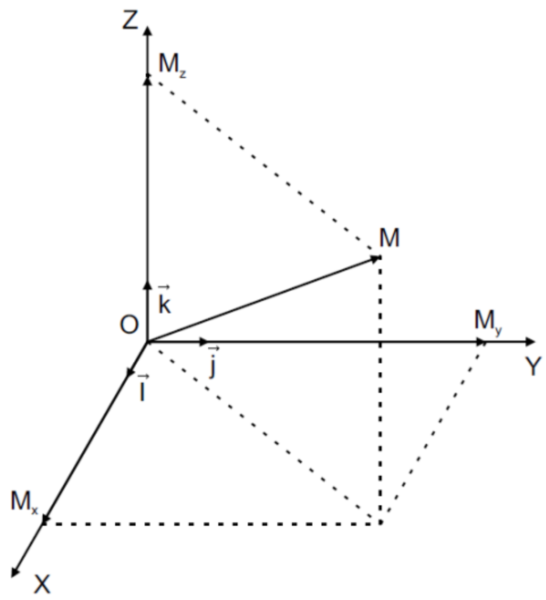

Рис. 2

Отложим на каждой координатной оси от точки O в положительном направлении единичные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Они называются базисными векторами, или ортами. Возвращаясь к равенству (3), замечаем, что $\overrightarrow{OM}_x, = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{OM}_y, = y \cdot \vec{j}$, $\overrightarrow{OM}_z = z \cdot \vec{k}$, где $x = np_{Ox} \overrightarrow{OM}$, $y = np_{Oy} \overrightarrow{OM}$, $z = np_{Oz} \overrightarrow{OM}$. Тогда равенство (3) перепишется в виде: $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \cdot + z \cdot \vec{k}$. Числа x, y, z называются координатами вектора $\overrightarrow{OM}$ и записываются в виде $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$.

Для произвольного вектора $\overrightarrow{AB}$, заданного координатами своих концов $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, имеем $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Обозначим через α, β, γ углы между вектором $\overrightarrow{AB} = \{x, y, z\}$ и осями координат, тогда $\cos\alpha = \dfrac{np_{Ox}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{x}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{np_{Oy}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{y}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{np_{Oz}\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{z}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. Косинусы этих углов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2} = 1$, т. е. сумма квадратов направляющих косинусов равна единице.

Действия над векторами в координатах

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$,
2. $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$,
3. $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Скалярное произведение векторов

Определение. **Скалярным произведением** двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
2. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,
3. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$,
4. если $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$,
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, если $\varphi < 90^\circ$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, если $\varphi > 90^\circ$,
6. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Если $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Условие перпендикулярности двух векторов: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+$ $+y_1y_2+z_1z_2=0$.

Условие коллинеарности двух векторов: $\vec{a}\|\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Пример. Даны три точки $A(7;11)$, $B(-3;1)$, $C(1;7)$:

1) проверить, что эти точки не лежат на одной прямой, т. е. образуют треугольник;

2) вычислить параметры треугольника (площадь, периметр, величину угла C).

Решение. 1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{CA}=\{6;\,4\}$ и $\overrightarrow{CB}=\{-4;\,-6\}$. Так как $\dfrac{6}{-4}\neq\dfrac{4}{-6}$, то векторы неколлинеарны, следовательно, точки не лежат на одной прямой, т. е. образуют треугольник.

2) $\cos\angle C=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{6\cdot(-4)+4\cdot(-6)}{\sqrt{6^2+4^2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2}}=-\dfrac{48}{\sqrt{52}\sqrt{52}}=-\dfrac{12}{13}$,

$\angle C=\arccos\left(-\dfrac{12}{13}\right)\approx157^\circ$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}CA\cdot CB\cdot\sin\angle C$, $\sin\angle C=\sqrt{1-\cos^2\angle C}=\sqrt{1-\dfrac{144}{169}}=\dfrac{5}{13}$,

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{52}\cdot\sqrt{52}\cdot\dfrac{5}{13}=10$,

$AB=\sqrt{(-3-7)^2+(-1-11)^2}=\sqrt{100+144}=\sqrt{244}$,

$p_{\Delta ABC}=CA+CB+AB=\sqrt{52}+\sqrt{52}+\sqrt{244}=2\sqrt{13}+2\sqrt{13}+2\sqrt{61}=$
$=2\sqrt{13}+2\sqrt{61}$.

Векторное произведение векторов

Определение. **Векторным произведением** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{a}\times\vec{b}$, такой что:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b}$,

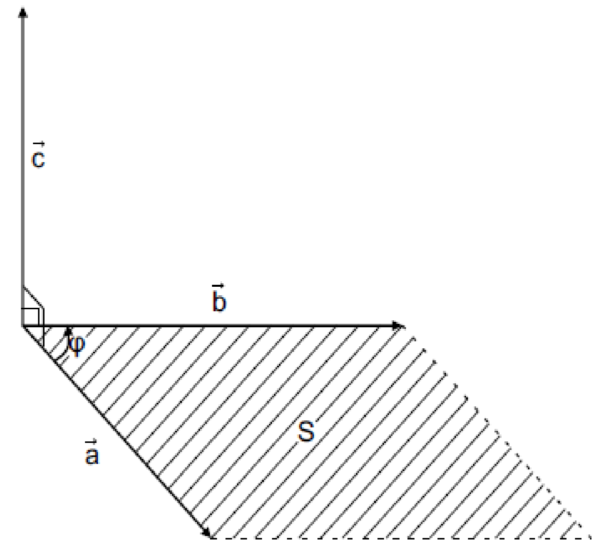

Рис. 3

3. Если «смотреть» из конца вектора $\vec{c}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки. Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ таких векторов называется правой (рис. 3).

Из условия 1) следует, что $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$,
3. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,
4. $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Теорема 6.1. Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Пример. Найти площадь треугольника *ABC*, если $A(-1;-1;1)$, $B(1;-3;4)$, $C(3;-1;-5)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \{2;-2;3\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{4;0;-6\}$.

Тогда

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & 3\\ 4 & 0 & -6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=12\vec{i}+24\vec{j}+8\vec{k},$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=14.$$

Смешанное произведение векторов

Определение. **Смешанным произведением** трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{c}$ на векторное произведение первых двух. Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, т. е. $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Теорема 6.2. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему *V* параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая и со знаком «–» в противном случае.

Следствие 1. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен модулю смешанного произведения этих векторов (рис. 4).

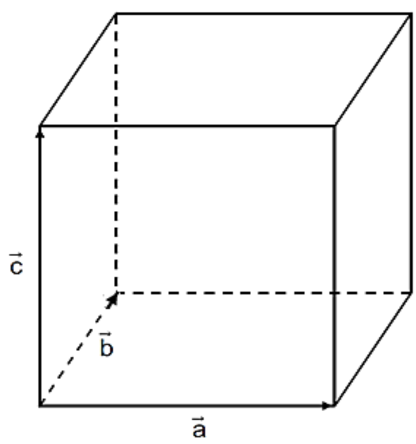

Рис. 4

Следствие 2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0$.

Следствие 3. Если поменять местами два вектора, то смешанное произведение изменит лишь знак:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}=-\vec{b}\cdot\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}\cdot\vec{b}=-\vec{c}\cdot\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Теорема 6.3. Если $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3,y_3,z_3\}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Пример. Найти объем пирамиды *ABCD*, если $A(-2;-1;-2)$, $B(-1;1;-4)$, $C(-12;-3;9)$, $D(1;-4;1)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{1;\,2;\,-2\}$, $\overrightarrow{AC}=\{-10;\,-2;\,11\}$, $\overrightarrow{AD}=\{3;\,-3;\,3\}$. Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -10 & -2 & 11\\ 3 & -3 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-2 & 11\\ -3 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & 11\\ 3 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-10 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-6+33-2(-30-33)-2(30+6)=81,$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\frac{81}{6}=13{,}5.$$

7. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Из курса элементарной математики известно уравнение прямой, пересекающей ось Oy:

$$y=kx+b, \tag{4}$$

где $k=\operatorname{tg}\varphi$, φ – угол между прямой и положительным направлением оси Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рис 5).

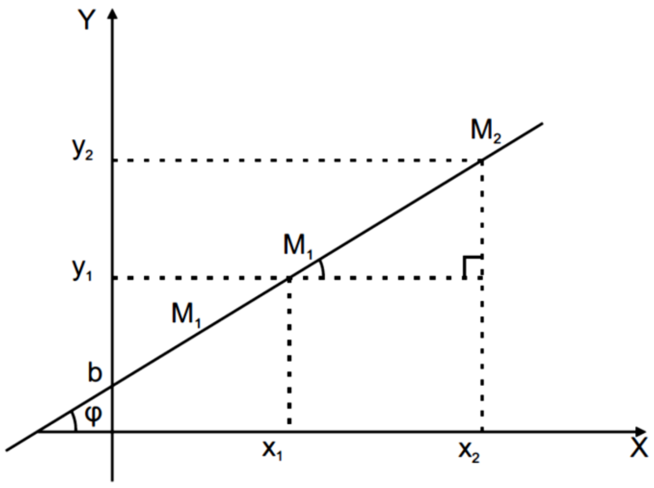

Рис. 5

Уравнение (4) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha=0°$, $k=\operatorname{tg}0°=0$ и уравнение (4) принимает вид $y=b$. Уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(a;\,0)$, имеет вид $x=a$.

Выразим угловой коэффициент прямой через координаты двух ее различных точек $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$. Имеем $y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$. Вычитая первое равенство из второго, получим $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$, откуда находим

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{5}$$

Пусть задан коэффициент k и точка $M_1(x_1, y_1)$ прямой. Зафиксируем произвольную точку $M(x, y)$ прямой. Положим в формуле (5) $x = x_2$, $y = y_2$, найдем

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{6}$$

Уравнение (6) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Составим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$, то уравнение (6) с учетом (5) запишется в виде

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$ или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{7}$$

Уравнение (7) называется уравнением прямой, проходящей через две заданные точки.

Обозначив равные отношения в (7) через t, получим $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$, $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ или

$$\begin{cases} x = x \ \ + t\,(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t\,(y_2 - y_1), \end{cases} \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{8}$$

Уравнения (8) называются параметрическими уравнениями прямой.

Рассмотрим общее уравнение первой степени относительно прямоугольных декартовых координат

$$Ax + By + C = 0, \tag{9}$$

где A и B одновременно не равны нулю.

Теорема. Каждое уравнение первой степени относительно прямоугольных декартовых координат определяет прямую. Обратно, каждая прямая на плоскости в фиксированной системе координат задается уравнением (9).

Уравнение (9), в котором A и B одновременно не равны нулю, называется общим уравнением прямой.

Замечание. Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат прямой. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ называется направляющим вектором прямой. Уравнение (7) можно записать $\frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{p_2}$, где

$p_1 = x_2 - x_1$, $p_2 = y_2 - y_1$. Или $p_2(x - x_1) = p_1(y - y_1)$, $p_2x - p_1y + p_1y_1 - p_2x_1 = 0$. Заметим, что вектор $\vec{n} = \{p_2, -p_1\}$ ортогонален вектору $\vec{p} = \{p_1, p_2\}$, следовательно, коэффициенты A и B в общем уравнении прямой определяют координаты нормального вектора прямой. Поэтому уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \tag{10}$$

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Рассмотрим две прямые, заданные уравнениями $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$. Углом между прямыми называется угол φ, на который нужно повернуть первую прямую до совпадения со второй. Тангенс этого угла

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Отсюда следует, что $l_1 \| l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример. Даны координаты вершин треугольника $A(7;11)$, $B(-3;1)$, $C(1;7)$. Найти:

1) уравнения сторон *AB, AC, BC;*

2) уравнение высоты *BH;*

3) длину высоты *BH;*

4) уравнение медианы *AE.*

Решение. 1. По формуле (7) имеем:

(AB): $\dfrac{x-7}{-3-7} = \dfrac{y-11}{1-11}$, $\dfrac{x-7}{-10} = \dfrac{y-11}{-10}$, $x - 7 = y - 11$, $x - y + 4 = 0$;

(AC): $\dfrac{x-7}{1-7} = \dfrac{y-11}{7-11}$, $\dfrac{x-7}{-6} = \dfrac{y-11}{-4}$, $2(x-7) = 3(y-11)$, $2x - 3y + 19 = 0$;

(BC): $\dfrac{x+3}{1+3}=\dfrac{y-1}{7-1}$, $\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-1}{6}$, $3(x+3)=2(y-1)$, $3x-2y+11=0$.

2. Вектор $\overrightarrow{AC}=\{-6,-4\}$ будет нормальным вектором высоты *BH*, поэтому согласно уравнению (10):

$-6(x+3)=-4(y-1)$, $3(x+3)=2(y-1)$, $3x-2y+11=0$;

3. Длину высоты *BH* найдем как расстояние от точки *B* до прямой *AC*:

$$BH=\frac{|2\cdot(-3)-3\cdot 1+19|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{10}{\sqrt{13}};$$

4. Найдем координаты точки *E* – середины отрезка *BC:*

$x_E=\dfrac{x_A+x_C}{2}=\dfrac{7+1}{2}=4$, $y_E=\dfrac{y_A+y_C}{2}=\dfrac{11+7}{2}=9$, тогда уравнение *AE:*

$\dfrac{x-7}{4-7}=\dfrac{y-11}{9-11}$, $\dfrac{x-7}{-3}=\dfrac{y-11}{-2}$, $2(x-7)=3(y-11)$, $2x-3y+19=0$.

8. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Составим уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{n}=\{A, B, C\}$ (рис. 6). Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z)$ данной плоскости. Тогда $\vec{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$, следовательно, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ или в координатах

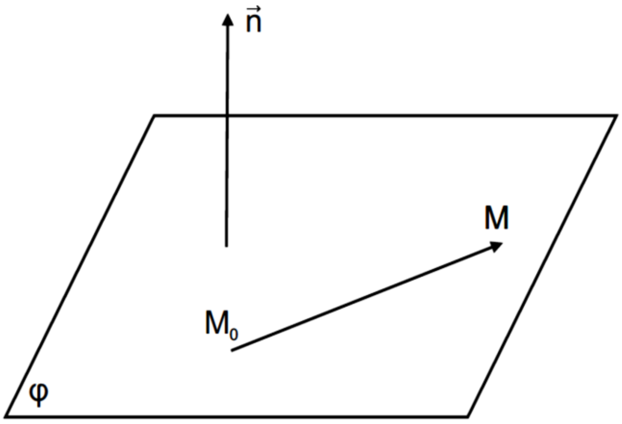

Рис. 6

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) можно переписать в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (12)$$

где $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$. Уравнение (12), в котором *A, B* и *C* одновременно не равны нулю, называется *общим уравнением плоскости*.

Составим уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам

$\vec{p}=\{p_1,p_2,p_3\}$ и $\vec{q}=\{q_1,q_2,q_3\}$. Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_0M},\ \vec{p},\vec{q}$ компланарны, следовательно, их смешанное произведение равно нулю или в координатах:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

Пусть задана плоскость $\alpha: Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\notin\alpha$. Расстояние от точки M_0 до плоскости α:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{14}$$

Пример 1. Задана плоскость α: $18x-y-6z-26=0$ и точка $M(-1;\ 1;\ 2)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно плоскости α. Найти расстояние между плоскостями.

Решение. Нормальный вектор плоскости α $\vec{n}=\{18;-1;-6\}$ будет и нормальным вектором искомой плоскости, а так как она проходит через точку $M(-1;1;2)$, то согласно уравнению (11) имеем

$18(x+1)-(y-1)-6(z-2)=0$,

$18x-y-6z+31=0$.

Расстояние между плоскостями найдем как расстояние от точки $M(-1;1;2)$ до плоскости α по формуле (14):

$$d=\frac{|18\cdot(-1)-1-6\cdot2-26|}{\sqrt{18^2+(-1)^2+(-6)^2}}=\frac{57}{19}=3$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;\ -1;\ 1)$ и $M_2(-1;\ 11;\ -11)$ перпендикулярно заданной плоскости α: $12x-15y-16z-8=0$.

Решение. Нормальный вектор плоскости α $\vec{n}=\{12;-15;-16\}$ будет направляющим вектором искомой плоскости. Также вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=$ $=\{-1;12;-12\}$ будет направляющим вектором искомой плоскости.

Следовательно, согласно уравнению (13) имеем

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 12 & -15 & -16 \\ -1 & 12 & -12 \end{vmatrix}=0,\quad x\cdot\begin{vmatrix} -15 & -16 \\ 12 & -12 \end{vmatrix}-(y+1)\cdot\begin{vmatrix} 12 & -16 \\ -1 & -12 \end{vmatrix}+(z-1)\cdot\begin{vmatrix} 12 & -15 \\ -1 & 12 \end{vmatrix}=0,$$

$$372x+160(y+1)+129(z-1)=0,$$
$$372x+160y+129z+31=0.$$

9. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Составим уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{p}=\{p_1, p_2, p_3\}$. Отложим от точки M_0 вектор $\overrightarrow{M_0P}=\vec{p}$. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой l, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0 (рис. 7). Тогда $\vec{r}=\vec{r}_0+t\,\vec{p}$. Это уравнение называется векторно-параметрическим уравнением прямой в пространстве.

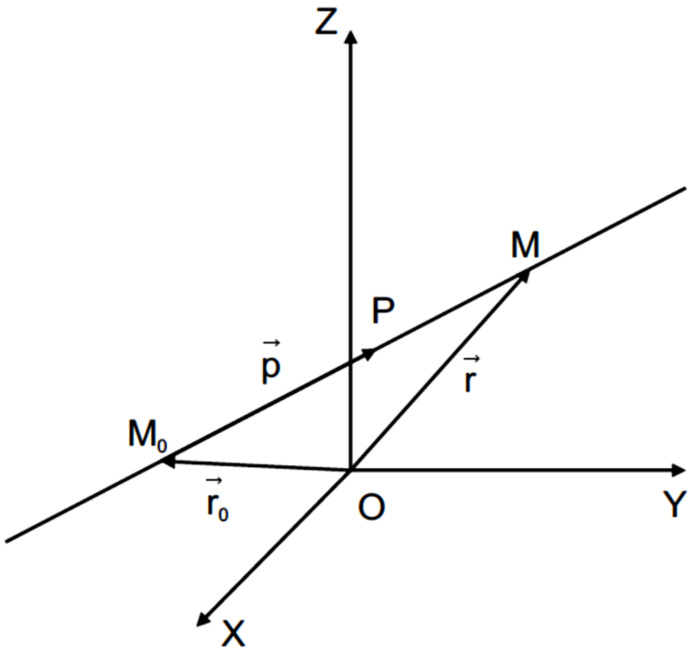

Рис. 7

Так как $\vec{r}=\{x, y, z\}$, $\vec{r}_0=\{x_0, y_0, z_0\}$, то из предыдущего уравнения получим

$$\begin{cases} x=x_0+tp_1 \\ y=y_0+tp_2 \\ z=z_0+tp_3 \end{cases}.$$

Эти уравнения называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве. Разрешив каждое из них относительно t и приравняв, получим

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}. \tag{15}$$

Уравнения (15) называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

Угол между двумя прямыми $l_1: \dfrac{x-x_1}{p_1}=\dfrac{y-y_1}{p_2}=\dfrac{z-z_1}{p_3}$ и

$$l_2: \frac{x-x_2}{q_1}=\frac{y-y_2}{q_2}=\frac{z-z_2}{q_3} \tag{16}$$

равен углу между их направляющими векторами, а его косинус

$$\cos\varphi = \frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

Условие перпендикулярности прямых $p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3 = 0$.

Условие параллельности прямых $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3}$

Взаимное расположение прямых в пространстве

Рассмотрим прямые l_1 и l_2, заданные уравнением (16). Точка $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l_1$, точка $M_2(x_2, y_2, z_2) \in l_2$. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Очевидно, что прямые l_1 и l_2 будут скрещивающимися тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{p}, \vec{q}$ не компланарны, т. е. $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{p}\cdot\vec{q} \neq 0$ или

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$.

Угол между прямой и плоскостью

Пусть задана плоскость $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $l: \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{p_2} = \frac{z - z_1}{p_3}$. Нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \{A; B; C\}$, направляющий вектор прямой $\vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\}$. Угол между прямой и плоскостью (рис. 8) равен $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$, где β – угол между нормальным вектором $\vec{n}$ и направляющим вектором $\vec{p}$, тогда

$$\sin\varphi = |\cos\theta| = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{p}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}. \tag{17}$$

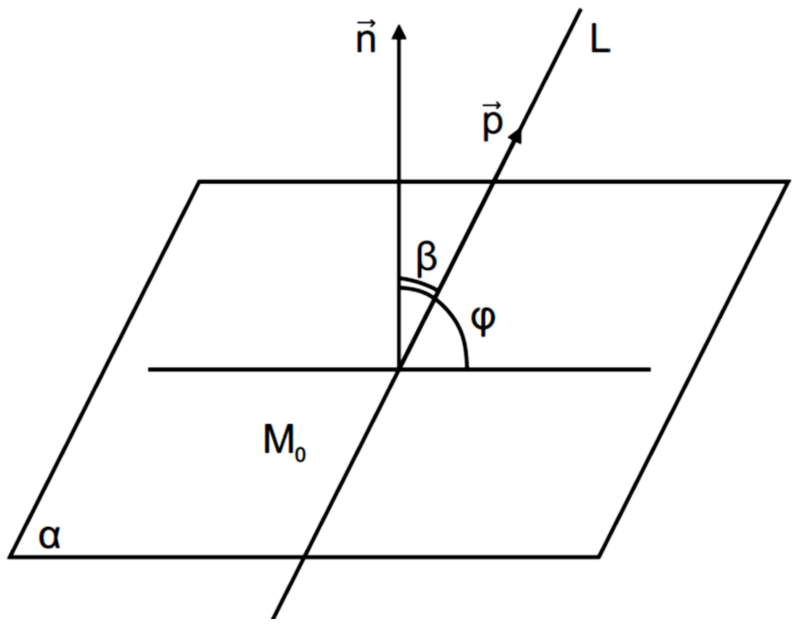

Рис. 8

Взаимное расположение прямой и плоскости:

1) $l \parallel \alpha \Leftrightarrow \varphi = 0^\circ, \quad \sin\varphi = 0, \quad Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$;

2) $l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{n} \parallel \vec{p}, \quad \dfrac{A}{p_1} = \dfrac{B}{p_2} = \dfrac{C}{p_3}$;

3) $l \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \end{cases}.$

Пример 1. Даны прямая *l*: $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-2}$ и точка *M* (–3; 1; 1).

Написать:

1) уравнение плоскости α, проходящей через прямую *l* и точку *M*;

2) уравнение плоскости β, проходящей через точку *M* перпендикулярно прямой *l*;

3) канонические уравнения прямой *h*, проходящей через точку *M* перпендикулярно прямой *l*.

Решение. 1. Направляющий вектор прямой $\vec{p} = \{-1;\ 2; -2\}$ будет и направляющим вектором плоскости α. Точка $M_1(-2;\ 1;\ 2) \in l$, следовательно, и плоскости α. Поэтому вектор $\overrightarrow{M_1M} = \{-1;\ 0;\ -1\}$ будет также направляющим вектором плоскости α. Согласно уравнению (13) имеем

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad (x+3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-2(x+3) + y - 1 + 2(z-1) = 0, \ -2x + y + 2z - 9 = 0.$$

2. Так как прямая l перпендикулярна плоскости β, то направляющий вектор прямой $\vec{p} = \{-1;\ 2; -2\}$ будет нормальным вектором плоскости β. Следовательно, согласно уравнению (11) имеем

$$-(x+3) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0,$$

$$-x + 2y - 2z - 3 = 0.$$

3. Нормальный вектор плоскости α равен $\overrightarrow{n_\alpha} = \{-2;\ 1;\ 2\}$, нормальный вектор плоскости β равен $\overrightarrow{n_\beta} = \{-1;\ 2;\ -2\}$. Тогда направляющий вектор прямой h:

$$\overrightarrow{p_h} = \overrightarrow{n_\alpha} \times \overrightarrow{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой h, проходящей через точку M, имеют вид

$$\frac{x+2}{-6} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-2}{-3} \text{ или } \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

Пример 2. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(-1;\ 1;\ 2)$, $A_2(3;\ 3;\ -2)$, $A_3(-5;\ 5;\ 0)$ и $A_4(1;\ 7;\ 4)$. Найти:

1) угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды;

4) уравнение плоскости грани $A_1A_2A_3$;

5) угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение. 1. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = \{4;\ 2;\ -4\}$ и $\overrightarrow{A_1A_4} = \{-2;\ 6;\ 2\}$.

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{4\cdot(-2)+2\cdot 6+(-4)\cdot 2}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}\sqrt{(-2)^2+6^2+2^2}} = \frac{-4}{6\sqrt{44}} = \frac{-1}{3\sqrt{11}},$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3\sqrt{11}}\right) \approx 96^\circ.$$

2. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-4; 4; -2\}$ и вычислим векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 24\vec{j} + 24\vec{k}.$$

Тогда $S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+24^2} = 18.$

3. $V_{A_1A_2A_3A_4} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \frac{1}{6}\left|\{12; 24; 24\}\cdot\{-2; 6; 2\}\right| =$

$= \frac{1}{6}\left|-24+144+48\right| = 28.$

4. Вектор $\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3} = 12\vec{i} + 24\vec{j} + 24\vec{k} = 12\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ будет нормальным вектором плоскости $A_1A_2A_3$, поэтому ее уравнение согласно формуле (11) может быть записано в виде

$$x+1+2(y-1)+2(z-2)=0,$$

$$x+2y+2z-5=0.$$

5. Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ найдем по формуле (17):

$$\sin\beta == \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}\right|}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot(-2)+2\cdot 6+2\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\sqrt{44}} = \frac{14}{6\sqrt{11}} = \frac{7}{3\sqrt{11}},$$

$$\beta = \arcsin\frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 45^\circ.$$

6. Вектор $\vec{n} = \left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ будет направляющим вектором высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, поэтому согласно уравнению (15) уравнение этой прямой имеет вид

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-4}{2}.$$

10. ПОНЯТИЕ МНОЖЕСТВА. НАТУРАЛЬНЫЕ, ЦЕЛЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Под **множеством** понимается некоторый набор предметов произвольной природы. Множества обозначают прописными буквами $A, B, \ldots$, предметы, из которых состоит множество, называются его элементами и обозначаются $a,\ b,\ \ldots$. Например, $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ – множество однозначных чисел.

Запись $a \in A$ означает, что a есть элемент множества A. Запись $a \notin A$ означает, что a не принадлежит A.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается $\varnothing$.

Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B($a \in A \Rightarrow a \in B$), то A называется **подмножеством** множества B и в этом случае пишут $A \subset B$. По определению $\varnothing \subset A$, каково бы ни было A.

Два множества A и B считаются равными, если состоят из одних и тех же элементов, то есть $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств: $A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$.

Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству B: $A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$.

Аналогично определяется объединение и пересечение любого, в том числе и бесконечного числа множеств.

Изучение математического анализа мы начнем с построения множества $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. В курсе элементарной математики, изучаемом в школе, последовательно появляются:

множество $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел: $\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел $\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$,

множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел $\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{m}{n},\quad m, n \in \mathrm{Z},\ n \neq 0\right\}$.

Очевидно, что $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Во множестве $\boldsymbol{Q}$ определены алгебраические операции «+» и «·» вместе с обратными операциями вычитания и деления, за исключением деления на нуль. Они подчиняются известным законам. Множество $\boldsymbol{Q}$ упорядочено отношением ≤. Рациональные числа удобно изображать точками числовой прямой (оси). Рациональные точки расположены на числовой оси всюду плотно, т. е. каковы бы ни были рациональные числа r_1 и r_2, найдется рациональное число $r \in (r_1, r_2)$, например, $r = \frac{r_1 + r_2}{2}$ – середина отрезка $[r_1, r_2]$. Несмотря на это, рациональных чисел недостаточно для того, чтобы снабдить каждую точку числовой прямой рациональным числом, иначе говоря, снабдить каждый отрезок рациональной длиной. Рассмотрим квадрат со стороной 1. Его диагональ $\sqrt{2}$. Пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$, причем дробь несократима. Тогда $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $2n^2 = m^2 \Rightarrow m^2$ – четное, т. е. m – четное, $m = 2k$. Поэтому $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ – четное, т. е. n – четное, что противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Таким образом, $\sqrt{2} \notin \boldsymbol{Q}$.

Поэтому возникает необходимость пополнения множества $\boldsymbol{Q}$ новыми числами. Из курса элементарной математики известно, что всякое рациональное число можно представить десятичной дробью, конечной, либо бесконечной, но обязательно периодической. Так, $\frac{3}{4} = 0{,}75$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}(3)$ и т. д.

Определение. **Действительным числом** называется произвольная бесконечная десятичная дробь, то есть $x = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots$ (где из двух знаков «±» берется один).

Множество действительных чисел обозначается $\boldsymbol{R}$. Если дробь из $\boldsymbol{R}$ периодична, то будем считать ее представлением рационального числа. Тем самым $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. Непериодическую дробь будем называть иррациональным числом. Таково, например, число $x = 0{,}1010010001\ldots$

11. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В дальнейшем будем использовать обозначения: $\forall$ – любой, $\exists$ – существует, $\Rightarrow$ – импликация, $\Leftrightarrow$ – равносильность.

Определение. Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному правилу действительное число x_n, то множество занумерованных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ называется **числовой последовательностью** и обозначается $\{x_n\}$, а x_n называется общим членом последовательности.

Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \ldots; \frac{n}{n+1}; \ldots\right\}$.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует номер N, зависящий от ε такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Для рассмотренных примеров $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Числовая последовательность называется сходящейся, если имеет предел и расходящейся в противном случае.

Теорема 11.1. Сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Теорема 11.2. Сходящаяся последовательность будет ограниченной, то есть существует число $M > 0$ такое, что $|x_n| \le M$ для всех номеров n.

Теорема 11.3. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то их сумма, произведение и частное имеют пределы, причем

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} kx_n = k\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \quad k=\text{const}$.

Примеры.

1. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{5n^2+4n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{4}{n}}=\frac{2}{5}.$$

Правило. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, нужно и числитель и знаменатель разделить на высшую степень n в знаменателе.

2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{5n^2+4n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{4}{n}}=0.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{5n+4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-3+5n}{5+\frac{4}{n}}=\infty.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2+(3n-5)^2}{(n+2)^3-(n-2)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Воспользуемся формулами сокращенного умножения:

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$,

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2+b^3$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2+(3n-5)^2}{(n+2)^3-(n-2)^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+1+9n^2-30n+25}{n^3+6n^2+12n+8-\left(n^3-6n^2+12n-8\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{13n^2-26n+26}{12n^2+16}=\frac{13}{12}.$$

Монотонные последовательности. Число *e*

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется:

невозрастающей, если $x_{n+1}\le x_n \quad \forall n\in \boldsymbol{N}$;

неубывающей, если $x_{n+1}\ge x_n \quad \forall n\in \boldsymbol{N}$;

убывающей, если $x_{n+1}< x_n \quad \forall n\in \boldsymbol{N}$;

возрастающей, если $x_{n+1}> x_n \quad \forall n\in \boldsymbol{N}$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, убывающие и возрастающие последовательности – *строго монотонными.*

Теорема Вейерштрасса. Всякая неубывающая ограниченная сверху последовательность сходится. Всякая невозрастающая ограниченная снизу последовательность сходится.

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$x_1 = 2$, $x_2 = 2{,}25$, $x_3 = \frac{64}{27} \approx 2{,}37, \ldots$

Теорема 11.4. Последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Следуя Эйлеру, предел этой последовательности обозначают *e*. Известно, что *e* = 2,718281828459045… Постоянную *e* называют неперовым числом, или числом Д. Непера.

Пример. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+5}{13n-10}\right)^{n-3}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+5}{13n-10}\right)^{n-3} = \left(1^{\infty}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n-10+15}{13n-10}\right)^{n-3} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{13n-10}{13n-10}+\frac{15}{13n-10}\right)^{n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{15}{13n-10}\right)^{n-3} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15n-45}{13n-10}} = e^{\frac{15}{13}}.$$

12. ФУНКЦИИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть X и Y – какие-либо непустые множества.

Определение. **Функцией** называется правило, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.

Пишут $y = f(x)$, или $f : X \to Y$.

Множество X называется областью определения функции, x – независимая переменная или аргумент, $y = f(x)$ – значение функции. Множество $f(X)$ называется множеством значений функции.

Если $f(X)=Y$, то отображение $f: X \to Y$ называется сюръективным. Отображение $f: X \to Y$ называется инъективным, если $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. В этом случае можно определить обратную функцию $f^{-1}: Y \to X$, $f^{-1}(y) = x \in X$ такому, что $f(x) = y$.

В зависимости от природы множеств X и Y функции присваивают то или иное название. Если Y – числовое множество, то функцию называют числовой, или скалярной. Если к тому же и X – числовое множество, то функцию называют числовой функцией одной переменной. Если $X \subset \mathbf{R}$, а Y – множество всех векторов на плоскости или в пространстве, то функцию называют вектор-функцией скалярного аргумента. Числовую последовательность можно рассматривать как функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения в **R**.

Способы задания функции:

1. Аналитический (с помощью одной или нескольких формул).

Например, $y = \begin{cases} \sin x, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

Множество значений независимой переменной x, при которых формула имеет смысл, называется естественной областью определения. По умолчанию всегда будем считать, что функция рассматривается на всей естественной области определения.

2. Словесный.

Например, функция Дирихле $y = \begin{cases} 0, & x - \textit{иррационально} \\ 1, & x - \textit{рационально}. \end{cases}$

3. Табличный.

4. Графический.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $\{(x, f(x)) : x \in X\}$. График обладает свойством: любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает график не более чем в одной точке.

Определение. Пусть $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. **Сложной функцией** (композицией) функций f и g называется функция $g \circ f$, определяемая правилом

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Перечислим так называемые основные элементарные функции: степенная функция $x^{\alpha} (\alpha \neq 0)$, показательная функция a^x $(a > 0, a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x\, (a > 0, a \neq 1)$, тригонометрические функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические функции $\arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$.

Определение. **Элементарной функцией** называется функция, которая выражается через основные элементарные функции с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Определение. Окрестностью точки $a \in \mathbf{R}$ называется любой конечный интервал $(\alpha; \beta)$, содержащий точку a. Произвольную окрестность точки a будем обозначать $O(a)$. Если задано число $\varepsilon > 0$, то под ε-окрестностью $O_{\varepsilon}(a)$ точки a будем понимать интервал $(a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Такую окрестность называют проколотой.

Определение. Число b называется **пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Рассматриваются также односторонние пределы функции – правый и левый пределы.

Определение. Число b называется **правым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$.

Определение. Число b называется **левым пределом функции** $y = f(x)$ **в точке** a, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$.

Теорема 12.1 (сведение предела функции к пределу последовательности).

Для того чтобы $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \to a, \quad x_n \neq a$, выполнялось $f(x_n)\to b, \quad n\to\infty$.

Для предела функции в точке справедливы теоремы, аналогичные теоремам о пределах последовательности.

Теорема 12.2. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует, то он единственный.

Теорема 12.3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=d$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=b\pm d$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=b\cdot d$, в частности, $\lim\limits_{x\to a}\big(c\cdot f(x)\big)=c\cdot b$, где c = const;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{d}, \quad d\neq 0$.

Теорема 12.4 (предел сложной функции).

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=y_0$, причем для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 имеем $g(x)\neq y_0$ и пусть $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=b$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))=b$.

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

Решение. Подставим – 1 вместо x, получим и в числителе и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, нужно и числитель и знаменатель разложить на множители и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{x^2(x+2)-(x+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+2)}{(x^2-1)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$.

Решение. Подставим 3 вместо x, получим и в числителе и в знаменателе 0. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$, нужно числитель и знаменатель умножить на выражение, сопряженное числителю, и на неполный квадрат суммы выражения, стоящего в знаменателе, и воспользоваться формулами сокращенного умножения:

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$,

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3-b^3$.

Получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3+2x}-3\right)\left(\sqrt{3+2x}+3\right)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4\right)}{\left(\sqrt{3+2x}+3\right)\left(\sqrt[3]{x+5}-2\right)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3+2x-9)\left(\sqrt[3]{(x+5)^2}+2\sqrt[3]{x+5}+4\right)}{\left(\sqrt{3+2x}+3\right)(x+5-8)}=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-6)(4+4+4)}{(3+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\cdot 12}{6(x-3)}=4.$$

13. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Первым замечательным пределом называется предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{18}$$

Из соотношения (18) вытекают соотношения:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Вторым замечательным пределом называется предельное соотношение

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e. \tag{19}$$

Из соотношения (19) вытекают соотношения:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

Определение. Определенная в некоторой проколотой окрестности точки a функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** в точке a, если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Свойства бесконечно малых функций:

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке a, то в этой точке функции $k\cdot\alpha(x)$, $\alpha(x)\pm\beta(x)$, $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ также будут бесконечно малыми.

Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке a, $\beta(x)$ ограниченная, то $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ будет бесконечно малой в точке a.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке a.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=K\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка.

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, в этом случае пишут $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Исходя из замечательных пределов и следствий из них получаем следующую таблицу эквивалентностей при $x\to 0$:

1. $\sin x\sim x$;
2. $\mathrm{tg}\, x\sim x$;
3. $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$;

4. $\arcsin x \sim x$;
5. $\operatorname{arctg} x \sim x$;
6. $e^x - 1 \sim x$;
7. $a^x - 1 \sim x \ln a$;
8. $\ln(1+x) \sim x$;
9. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

Теорема. Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бесконечно малые функции в точке a, причем $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}$.

Эта теорема дает право при вычислении предела одночлена, то есть произведения или частного, заменять сомножители или числитель со знаменателем эквивалентными функциями. Самая распространенная ошибка при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего выражения, эквивалентной функцией (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{4x^2} - 1}{\sin 3x \cdot \operatorname{tg} 2x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{3x \cdot 2x} = \dfrac{2}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4} - 2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x}{2\sqrt{2x+1} - 2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x}{2\left((1+2x)^{\frac{1}{2}} - 1\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x}{2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 2x} = -\dfrac{3}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \dfrac{x^2}{2}}{\cos x \cdot x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{1}{2}$,

но ошибочно $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = 0$.

14. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ. ТОЧКИ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Согласно определению предела это означает, что

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Примеры:

1. $y = \sin x$ непрерывна, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Действительно, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \delta = \varepsilon$.

2. $y = x$ непрерывна, $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ для $\forall x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение. Заданная на множестве D функция $f(x)$ называется непрерывной на нем, если она непрерывна по этому множеству в любой его точке. Совокупность всех непрерывных на множестве D функций будем обозначать $C(D)$.

Теорема 14.1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны также и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x_0) \ne 0\right)$.

Теорема 14.2. Пусть функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $h = g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g\left(f(x)\right)$ непрерывна в точке x_0.

Примеры:

1. Так как $y = x$ непрерывна при $\forall x \in \boldsymbol{R}$, то непрерывна функция $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

2. $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ непрерывна как сложная функция.

Определение. Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется разрывной в точке x_0. Точка x_0 называется точкой разрыва функции.

Мы будем называть точками разрыва функции точки, в которых функция не определена, но которые являются предельными точками области определения, то есть точки, в любой окрестности которых есть хотя бы одна точка из области определения, отличная от данной.

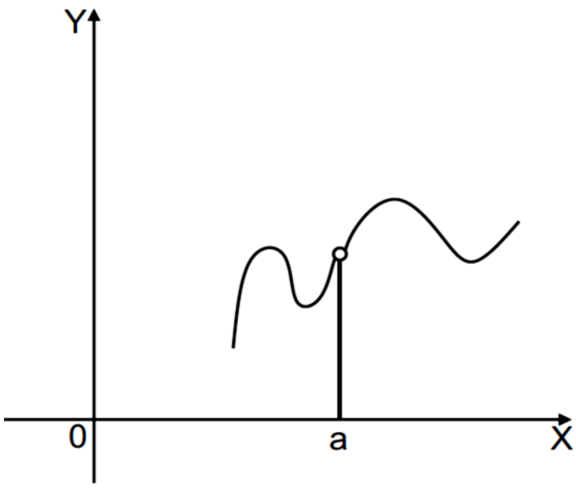

Рис. 9

Рассмотрим возможные типы точек разрыва функции:

1. Устранимая точка разрыва.

Определение. Точка x_0 называется **устранимой точкой разрыва** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ существует, но функция $f(x)$ либо не определена в точке x_0, либо $f(x_0) \neq a$ (рис. 9).

Например, функция $y = \dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$, но $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Эту функцию легко сделать непрерывной, положив

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

В общем случае этот разрыв можно устранить, положив значение функции $f(x)$ в точке x_0 равным ее предельному значению

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0 \\ a, & x = x_0 \end{cases}.$$

2. Точка разрыва первого рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва I рода**, если в этой точке существуют конечные разрывы слева и справа, но они не равны между собой, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$.

Например, функция $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв I рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, а $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ (рис. 10).

Функция в точке разрыва I рода делает скачок, величина скачка равна $\left| \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) \right|$.

3. Точка разрыва второго рода.

Определение. Точка x_0 называется **точкой разрыва II рода**, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞.

Например, $y = e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв II рода, так как $\lim\limits_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (рис. 11).

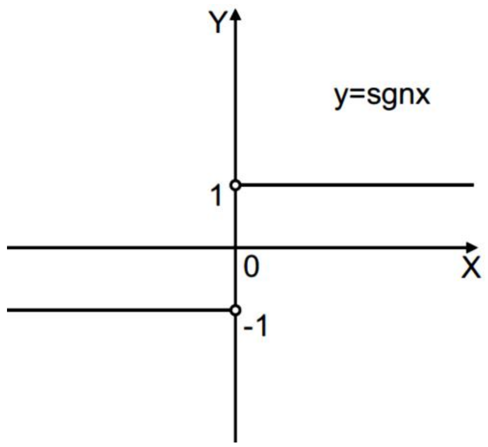

Рис. 10

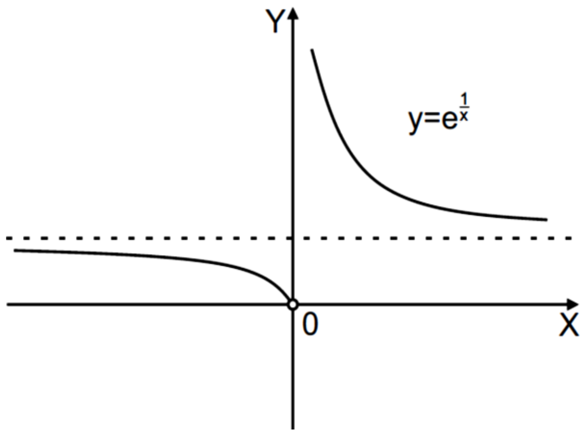

Рис. 11

Пример. Исследовать точки разрыва функции $y = \dfrac{x}{\sin x}$ и построить схематический чертеж в окрестности исследуемой точки.

Решение. Функция не определена в точках, в которых $\sin x = 0$, то есть, $x = \pi n \quad n \in \mathbf{Z}$. Рассмотрим сначала точку $x = 0$. Так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$, то $x = 0$ – устранимая точка разрыва. Теперь рассмотрим точки $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. Так как

$\lim\limits_{x \to 2\pi n+} \dfrac{x}{\sin x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2\pi n-} \dfrac{x}{\sin x} = -\infty$, то точки $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ будут точками разрыва второго рода. Аналогично для точек $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ имеем $\lim\limits_{x \to (\pi + 2\pi n)+} \dfrac{x}{\sin x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to (\pi + 2\pi n)-} \dfrac{x}{\sin x} = +\infty$. Следовательно, точки $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$ также являются точками разрыва второго рода.

График функции $y = \dfrac{x}{\sin x}$ приведен на рис. 12.

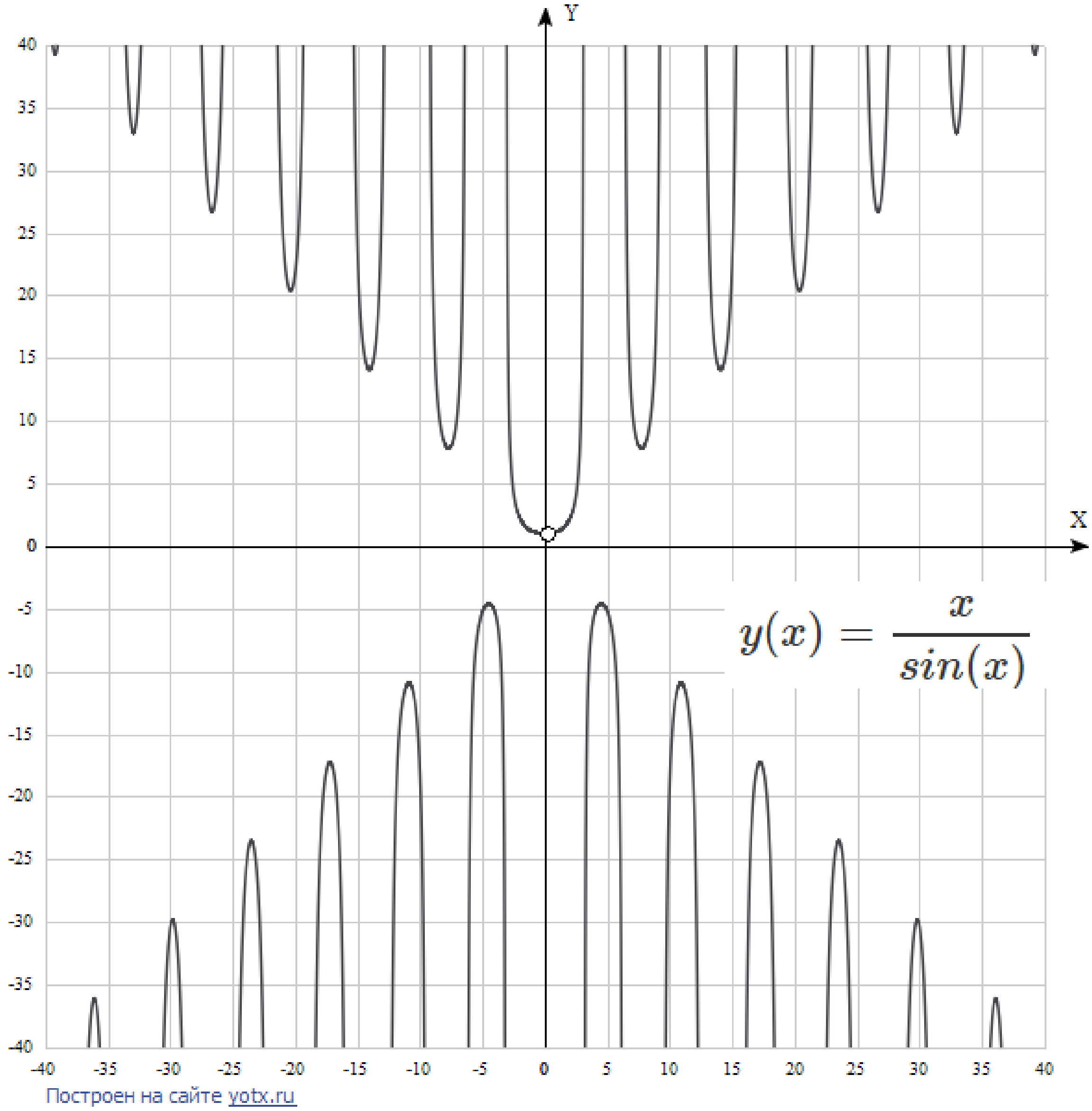

Рис. 12

15. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Сформулируем теоремы, выражающие основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

Первая теорема Больцано-Коши (об обращении в нуль непрерывной на отрезке функции)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает разные по знаку значения, т. е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда существует точка $c\in(a, b)$, в которой функция обращается в нуль $f(c)=0$.

Вторая теорема Больцано-Коши (о промежуточном значении непрерывной функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем $f(a)=A$, $f(b)=B$. Пусть далее C – любое число, заключенное между A и B. Тогда найдется точка $c\in[a, b]$ такая, что $f(c)=C$.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной на отрезке функции)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она ограничена на этом отрезке, то есть существует число $M>0$ такое, что $\left|f(x)\right|\le M \quad \forall x\in[a, b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной на отрезке функции своего наибольшего и наименьшего значений)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

16. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке (a, b). Фиксируем любое значение $x_0\in(a, b)$ и пусть $x\in(a, b)$. Тогда $x-x_0=\Delta x$ называется приращением аргумента. Приращением функции в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – число, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.

Рассмотрим в данной фиксированной точке x_0 отношение приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (20)$$

Отношение (20) называется разностным отношением. Так как значение x_0 фиксировано, то разностное отношение представляет собой функцию аргумента Δx.

Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ в данной фиксированной точке x_0 называется предел разностного отношения (20) при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует). Производную обозначают

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема 16.1. Для того чтобы функция была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела производную, при этом $f'(x_0) = A$, т. е. $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Первое слагаемое в последнем равенстве является при $\Delta x \to 0$ главной линейной частью приращения функции и называется **дифференциалом функции.** Дифференциал обозначается $df(x_0)$, таким образом $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$. Символ Δx заменяется символом dx, который называется дифференциалом независимой переменной x. Под дифференциалом независимой переменной x можно понимать любое (не зависящее от x) число. Договоримся в дальнейшем брать это число равным приращению Δx независимой переменной. Это позволяет переписать формулу для дифференциала в виде $dy = f'(x)dx$.

Правила дифференцирования суммы, произведения, частного и сложной функции

Теорема 16.2. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в этой точке дифференцируемы также и функции

$u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (при условии $v(x) \neq 0$), причем справедливы формулы:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Следствие. $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где $c = \text{const}$.

Теорема 16.3. Если функция $y = g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = g(x_0)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $(f(g(x_0)))' = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$.

Производные основных элементарных функций

1. $(c)' = 0$	9. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	10. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5. $(e^x)' = e^x$	13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a$	14. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Замечание. В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции табличные формулы можно переписать, например:

$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$, $\left(\mathrm{tg}\,u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ и т. п. Здесь $u = u(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования суммы и частного, учитывая, что $\sin\sqrt{3} - \mathrm{const}$, поэтому $\left(\sin\sqrt{3}\right)' = 0,$ имеем

$$y' = \left(\sin\sqrt{3}\right)' + \left(\frac{\sin^2 2x}{3\cos 4x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left(\sin^2 2x\right)' \cdot \cos 4x - \left(\cos 4x\right)' \cdot \sin^2 2x}{\cos^2 4x} =$$

$$= \frac{2\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot 4 \cdot \sin^2 2x}{3\cos^2 4x} =$$

$$= \frac{2\sin 4x \cdot \cos 4x + 4\sin 4x \cdot \sin^2 2x}{3\cos^2 4x} =$$

$$= \frac{2\sin 4x\left(\cos 4x + 2\sin^2 2x\right)}{3\cos^2 4x} = \frac{2\sin 4x\left(\cos 4x + 1 - \cos 4x\right)}{3\cos^2 4x} = \frac{2\sin 4x}{3\cos^2 4x}.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = \left(2x^2 + 3x - 1\right)e^{4x}$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем

$$y' = \left(2x^2 + 3x - 1\right)' \cdot e^{4x} + \left(2x^2 + 3x - 1\right)\left(e^{4x}\right)' =$$

$= (4x + 3) \cdot e^{4x} + \left(2x^2 + 3x - 1\right) \cdot 4e^{4x} = e^{4x}\left(8x^2 + 16x - 1\right)$. Тогда дифференциал функции равен $dy = e^{4x}\left(8x^2 + 16x - 1\right)dx$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке равно $f\left(x_0 + \Delta x\right) - f(x_0) = f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем Δx, справедливо приближенное равенство $\Delta y \approx dy$, т. е. $f\left(x_0 + \Delta x\right) \approx f(x_0) + f'\left(x_0\right) \cdot \Delta x$.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt{101}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{x}$. Положим $x_0=100$, $\Delta x=1$. Тогда $y(x_0)=\sqrt{100}=10$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{100}}=0{,}05$.

Следовательно, $\sqrt{101}\approx 10+0{,}05\cdot 1=10{,}05$.

Логарифмическая производная

Пусть функция $y=f(x)$ положительна и дифференцируема в данной точке *x*. Тогда в этой точке существует $\ln y=\ln f(x)$ и можно вычислить производную этой функции в данной точке *x*: $\dfrac{y'}{y}=\left(\ln f(x)\right)'$. Величина, определяемая этой формулой, называется логарифмической производной функции $y=f(x)$ в данной точке *x*.

Вычислим логарифмическую производную показательно-степенной функции $y=u(x)^{v(x)}$. Эта функция определена и непрерывна при всех *x*, для которых $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и $u(x)>0$. Потребуем, чтобы $u(x)$ и $v(x)$ были дифференцируемы для рассматриваемых значений *x*. Тогда $\ln y=\ln u(x)^{v(x)}$, $\ln y=v(x)\cdot\ln u(x)$, $\dfrac{y'}{y}=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, $y'=\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\dfrac{u'(x)}{u(x)}\right)u(x)^{v(x)}$.

Пример. Найти производную функции $y=x^x$.

Решение. Прологарифмируем функцию $\ln y=\ln x^x$, $\ln y=x\ln x$. Теперь дифференцируем обе части

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x},\quad y'=(\ln x+1)x^x.$$

17. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть на плоскости дана кривая, M_0 – некоторая точка кривой. Пусть M – близкая к M_0 точка на кривой. Прямую M_0M называют секущей. Если точку M_0 неограниченно приближать к точке M_0 по кривой, то секущая будет поворачиваться вокруг M_0.

Касательной к кривой в точке M_0 называют прямую, проходящую через точку M_0, если она является предельным положением секущей, когда $M \to M_0$.

Пусть в некоторой системе координат xOy кривая является графиком функции $y = f(x)$, x_0 – абсцисса точки M_0, $x = x_0 + \Delta x$ – абсцисса точки M. При $x \to x_0$ $(\Delta x \to 0)$ точка M стремится к точке M_0. Слова «прямая (T) является предельным положением секущей (S)» будем понимать в том смысле, что угловой коэффициент k_s прямой (S) стремится к угловому коэффициенту k прямой (T) при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} k_s = k$. Так как $k_s = \mathrm{tg}\,\beta$, $k = \mathrm{tg}\,\varphi$, то это равносильно тому, что $\lim\limits_{x \to x_0} \beta = \varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 13).

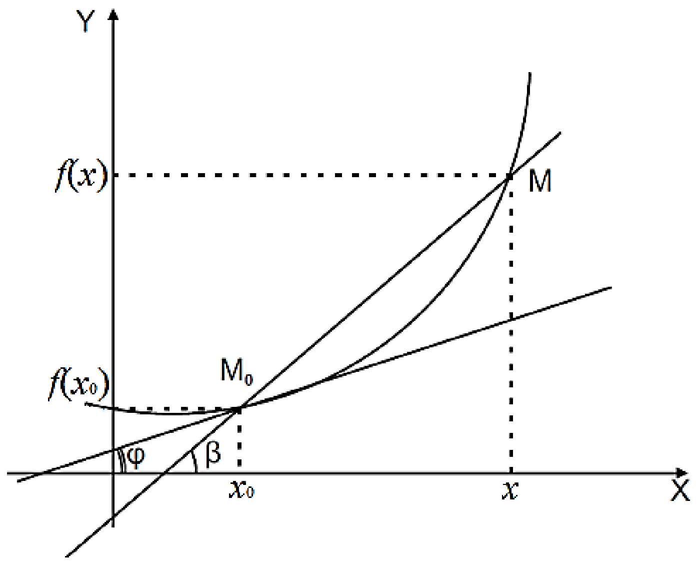

Рис. 13

Поскольку

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \qquad (21)$$

то окончательно приходим к определению: невертикальная прямая (T) с угловым коэффициентом k, проходящая через точку $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, есть **касательная к графику функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Таким образом, уравнение касательной: $y = f'(x_0)\cdot x + b$. Так как $M_0(x_0, f(x_0))$ принадлежит касательной, то $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$, $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Следовательно, уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0). \tag{22}$$

Таким образом, доказана **теорема 17.1**:

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в этой точке существует касательная к графику функции, которая задается уравнением (22). Если же предел в (21) равен $+\infty$ или $-\infty$, то касательной по определению будем считать проходящую через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ вертикальную прямую $x = x_0$.

Нормалью к кривой в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку, перпендикулярная касательной. Угловые коэффициенты перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$. Поэтому уравнение

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \tag{23}$$

при условии, что $f'(x_0) \neq 0$ есть уравнение нормали в точке x_0.

Пример. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$ в точке $x_0 = 1$.

Решение.

$$y(x_0) = 14\sqrt{1} - 15\sqrt[3]{1} + 2 = 1,$$

$$y' = 14\left(\sqrt{x}\right)' - 15\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (2)' = \frac{14}{2\sqrt{x}} - 15\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{\sqrt{x}} - 5x^{-\frac{2}{3}},$$

$$y'(x_0) = \frac{7}{\sqrt{1}} - 5\cdot 1^{-\frac{2}{3}} = 2.$$

Согласно (22) уравнение касательной $y = 1 + 2(x-1)$, $y = 2x - 1$.

Согласно (23) уравнение нормали $y = 1 - \frac{1}{2}(x-1)$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

18. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда производная $f'(x)$ представляет собой функцию, определенную на (a, b). Может случиться, что эта функция $f'(x)$ имеет производную в некоторой точке $x \in (a, b)$. Тогда эта производная называется **второй производной,** или **производной второго порядка** функции $f(x)$ в точке x, и обозначается $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$, или $\dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df}{dx}\right)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и всех последующих порядков: $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, … $f^{(m)}(x) = \left(f^{(m-1)}(x)\right)'$. Штрихи для обозначения производных выше третьего порядка не применяют. Используют либо римские цифры, либо арабские цифры в скобках.

Производные *n*-го порядка некоторых функций

1. $y = x^{\alpha}\ \left(x > 0, \alpha \in R\right)$,

$y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$,…, $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

2. $y = a^x\ \left(a > 0, a \neq 1\right)$,

$y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$,…, $y^{(n)} = a^x \ln^n a$.

В частности, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

3. $y = \ln x$,

$y' = \dfrac{1}{x}$, $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y''' = \dfrac{1\cdot 2}{x^3}$, $y^{(4)} = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$, … , $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

4. $y = \sin x$,

$y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, … ,

$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. $y = \cos x$,

$y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример. Найти производную n-го порядка функции $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Решение. $y' = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, $y'' = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$, $y''' = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+1)^4}$, …, $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Формула Лейбница для *n*-й производной произведения двух функций

Теорема 18.1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют n-е производные, тогда справедлива формула

$$(u\cdot v)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v + n\cdot u^{(n-1)}\cdot v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}\cdot v'' + \ldots +$$

$$+\frac{n!}{k!(n-k)!}u^{(n-k)}\cdot v^{(k)} + \ldots + n\cdot u'\cdot v^{(n-1)} + u\cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)}, \qquad (24)$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты, которые могут быть найдены с помощью треугольника Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}$$

………………………..

Пример. Найти производную пятого порядка функции

$y = (x^2 + 3x + 1)\cdot e^{2x}$.

Решение. По формуле (24) имеем

$$(u\cdot v)^{(5)} = u^{(5)}\cdot v + 5\cdot u^{(4)}\cdot v' + 10u'''\cdot v'' + 10u''\cdot v''' + 5u'\cdot v^{(4)} + u\cdot v^{(5)}. \qquad (25)$$

Положим $u(x) = x^2 + 3x + 1$, тогда $u' = 2x+3$, $u'' = 2$, $u''' = u^{(4)} = u^{(5)} = 0$, $v(x) = e^{2x}$, тогда $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 4e^{2x}$, $v''' = 8e^{2x}$, $v^{(4)} = 16e^{2x}$, $v^{(5)} = 32e^{2x}$.

Подставим найденные производные в (25), получим

$$(y)^{(5)} = 10 \cdot 2 \cdot 8e^{2x} + 5(2x+3) \cdot 16e^{2x} + \left(x^2 + 3x + 1\right) \cdot 32e^{2x} =$$
$$= 16e^{2x}\left(2x^2 + 6x + 2 + 10x + 15 + 10\right) = 16e^{2x}\left(2x^2 + 16x + 27\right).$$

19. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ И НЕЯВНО

Рассмотрим еще один способ задания функции. Пусть x и y заданы как функции некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta. \qquad (26)$$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, тогда выразив из первого уравнения системы (26) t через x и подставив во второе, получим $y = \psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$. Если вторая функция имеет обратную, то разрешив второе уравнение относительно $t = \psi^{-1}(y)$ и подставив в первое, получим $x = \varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)$. Система (26), в которой одна из функций имеет обратную, задает некоторую функцию y от x или x от y. Такой способ задания функции называется **параметрическим**.

Например,

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 < t < +\infty.$$

Выразив из первого уравнения $t = \sqrt{x}$ и подставив во второе, получим $y = \sin\sqrt{x}$.

Любую обычную функцию $y = f(x)$ можно считать заданной параметрически: $x = t$, $y = f(t)$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют нужное число производных по переменной t в рассматриваемой области изменения этой переменной. Кроме того, функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию в окрестности рассматриваемой точки $t = \varphi^{-1}(x)$. Поставим задачу о вычислении производных y по x. Будем обозначать их y'_x, y''_{xx}, …

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

При этом берем dy и dx в одной и той же точке t и для одного и того же dt.

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}.$$

Пример. Найти первую и вторую производную функции, заданной параметрически

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad -\infty<t<+\infty.$$

Кривая, определяемая этими уравнениями, называется циклоидой.

Решение.

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\,\frac{t}{2}\quad (t\neq 2\pi n,\ n\in Z),$$

$$y''_{xx}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}\cdot a\cdot 2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Функция y есть **неявная функция** от x, если она задана уравнением $f(x,y)=0$, не разрешенным относительно y. Например, $e^{xy}-x-y=0$, $\sqrt[x]{y}-\sqrt[y]{x}=0$. Чтобы найти производную y'_x, дифференцируют обе части равенства по x, помня, что y есть функция от x, а затем разрешают полученное равенство относительно искомой производной. Как правило, она будет зависеть от x и y: $y'_x=\varphi(x,\,y)$. Вторую производную от неявной функции находят, дифференцируя функцию $\varphi(x,\,y)$ по x, помня, что y есть функция от x: $y''=F\left(x,\,y,\,y'_x\right)$. Заменяя здесь y'_x через $\varphi(x,\,y)$, получают выражение второй производной через x и y: $y''=F\left(x,\,y,\,\varphi(x,y)\right)$.

Пример. Найти первую производную функции, заданной неявно $e^{xy}-x-y=0$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства по x, помня, что y есть функция от x:

$$e^{xy}\left(y + x \cdot y'\right) - 1 - y' = 0,\ e^{xy} x \cdot y' - y' = 1 - ye^{xy},\ y'\left(e^{xy} x - 1\right) = 1 - ye^{xy},$$

$$y' = \frac{1 - ye^{xy}}{e^{xy} x - 1}.$$

20. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дифференциальное исчисление представляет собой универсальный инструмент исследования поведения функции.

Определение. Пусть x_0 – внутренняя точка области определения функции $y = f(x)$. Функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если найдется некоторая окрестность этой точки, в которой $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ ($f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$).

Лемма 20.1 (достаточное условие возрастания или убывания функции).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то эта функция возрастает (убывает) в точке x_0.

Замечание. Положительность (отрицательность) производной $f'(x_0)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $y = f(x)$ в точке x_0. В качестве примера укажем на функцию $y = x^3$, которая возрастает в точке $x = 0$ и тем не менее имеет в этой точке производную $f'(0) = 0$.

Определение. Точка x_0 называется **точкой локального максимума (минимума)** функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $\left(f(x) \ge f(x_0)\right)$. Если для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left(f(x) > f(x_0)\right)$, то x_0 называется **точкой строго локального максимума (минимума).**

Точки максимума или минимума функции называются точками экстремума.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными**.

Теорема Ферма имеет простой геометрический смысл: если в точке кривой $y = f(x)$, которой соответствует локальный экстремум функции $y = f(x)$, существует касательная, то она параллельна оси Ox.

Теорема Ролля

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема хотя бы на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c, в которой $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля имеет простой геометрический смысл: если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси Ox.

Следующая теорема – важнейшая среди всех теорем дифференциального исчисления.

Теорема Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$. Говорят, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b), если для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Неубывающие или невозрастающие функции называются монотонными, а возрастающие или убывающие функции – строго монотонными.

Из теоремы Лагранжа можно вывести условия монотонности функции на интервале.

Теорема 20.2. Для того чтобы функция $f(x)$ не убывала (не возрастала) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$ на интервале (a, b).

Теорема 20.3. Для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) \ge 0$ $\left(f'(x_0) \le 0\right)$ на интервале (a, b) и не обращалась тождественно в нуль ни на каком интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

Отсюда имеем. Для того чтобы функция $f(x)$ возрастала (убывала) на интервале (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x_0) > 0$ $\left(f'(x_0) < 0\right)$ для всех $x \in (a, b)$.

Теорема Коши

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \ne 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда на интервале (a, b) существует точка c такая, что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Теорема 20.4 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены на некотором интервале $(a - \delta, a + \delta)$ и дифференцируемы на нем за исключением, быть может, точки $x = a$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \ne 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Замечание 1. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции, то правило Лопиталя можно применять повторно. При этом получим

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Замечание 2. Первое правило Лопиталя легко переносится на случай, когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Пример. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

Теорема 20.5 (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

1) определены и дифференцируемы в проколотой окрестности точки $x=a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

3) $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности точки a.

Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем имеет место равенство $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример. Вычислить предел по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

Раскрытие неопределенностей других видов

Кроме рассмотренных выше неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\frac{\infty}{\infty}$, часто встречаются неопределенности следующих видов: $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^∞), (0^0), (∞^0).

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right),$$ или

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)$$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}\right)=\lim_{x\to a}\left(\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/f(x)\cdot 1/g(x)}\right)=\left(\frac{0}{0}\right).$$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to a}e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)},$$

$$\lim_{x\to a} g(x)\cdot\ln\left(f(x)\right)=\left(\infty\cdot 0\right).$$

Аналогично раскрываются неопределенности вида (0^0) и (∞^0).

Примеры.

1) $$\lim_{x\to 0+}\left(\sqrt{x}\cdot\ln x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)}=-2\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0.$$

2) $$\lim_{x\to 0+} x^x=\left(0^0\right)=\lim_{x\to 0+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\ln x},$$

Вычислим

$$\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot\ln x\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0+} x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+} x^x=e^0=1$.

21. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

Сформулируем несколько достаточных условий достижения функцией локального экстремума в заданной точке.

Теорема 21.1 (первое достаточное условие экстремума).

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т. е. $f'(x_0)=0$). Тогда: 1) если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то x_0 – точка строго локального максимума; 2) если $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то x_0 – точка строго локального минимума; 3) если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 21.2.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если при переходе через точку x_0 слева направо производная меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то x_0 – точка строго локального максимума (локального минимума). Если при переходе через точку x_0 производная не меняет знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема 21.3 (второе достаточное условие экстремума).

Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда: 1) если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка строго локального минимума; 2) если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка строго локального максимума.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$, проходящая через любую точку $M(x, f(x))$ этого графика $(a < x < b)$, причем эта касательная не параллельна оси Oy.

Определение. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вниз** (**выпуклой вверх**) на (a, b), если график этой функции расположен не ниже (не выше) касательной, проведенной к графику в любой точке этого интервала. На рис. 14 изображен график функции, выпуклой вниз, а на рис. 15 – график функции, выпуклой вверх.

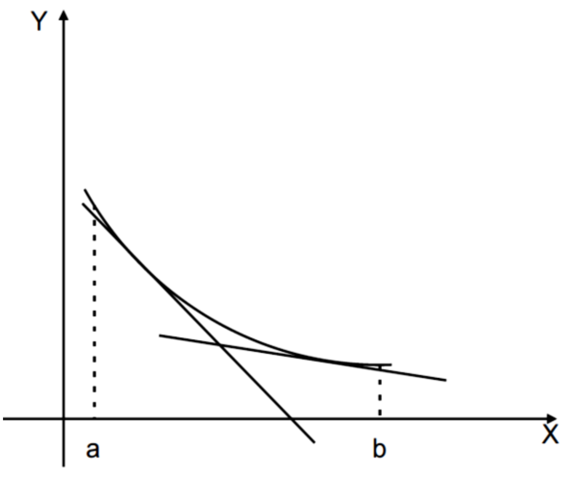

Рис. 14

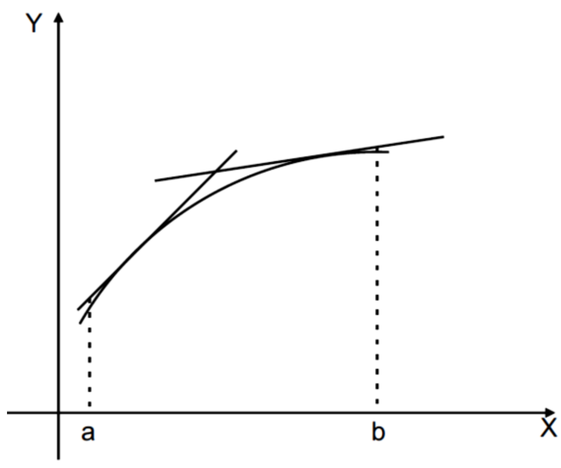

Рис. 15

Теорема 21.4. Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) конечную вторую производную и $f''(x) \geq 0$ $\left(f''(x) \leq 0\right)$ для всех $x \in (a, b)$, то функция выпукла вниз (выпукла вверх) на этом интервале.

Определение. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется точкой перегиба дифференцируемой функции $y = f(x)$, если существует проколотая окрестность этой точки такая, что график функции имеет в левой и правой полуокрестностях разные направления выпуклости.

Теорема 21.5 (необходимое условие точки перегиба).

Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0 и x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 21.6 (первое достаточное условие точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки x_0 и $f''(x)$ имеет в ней разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$. Тогда если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, то x_0 – точка перегиба.

Теорема 21.7 (второе достаточное условие точки перегиба).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 – точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Определение. Прямая $x = a$ на плоскости xOy называется **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Например, график функции $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 16) имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, ибо $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена при сколь угодно больших значениях x.

Определение. Прямая $y = kx + b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ $x \to +\infty$, если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

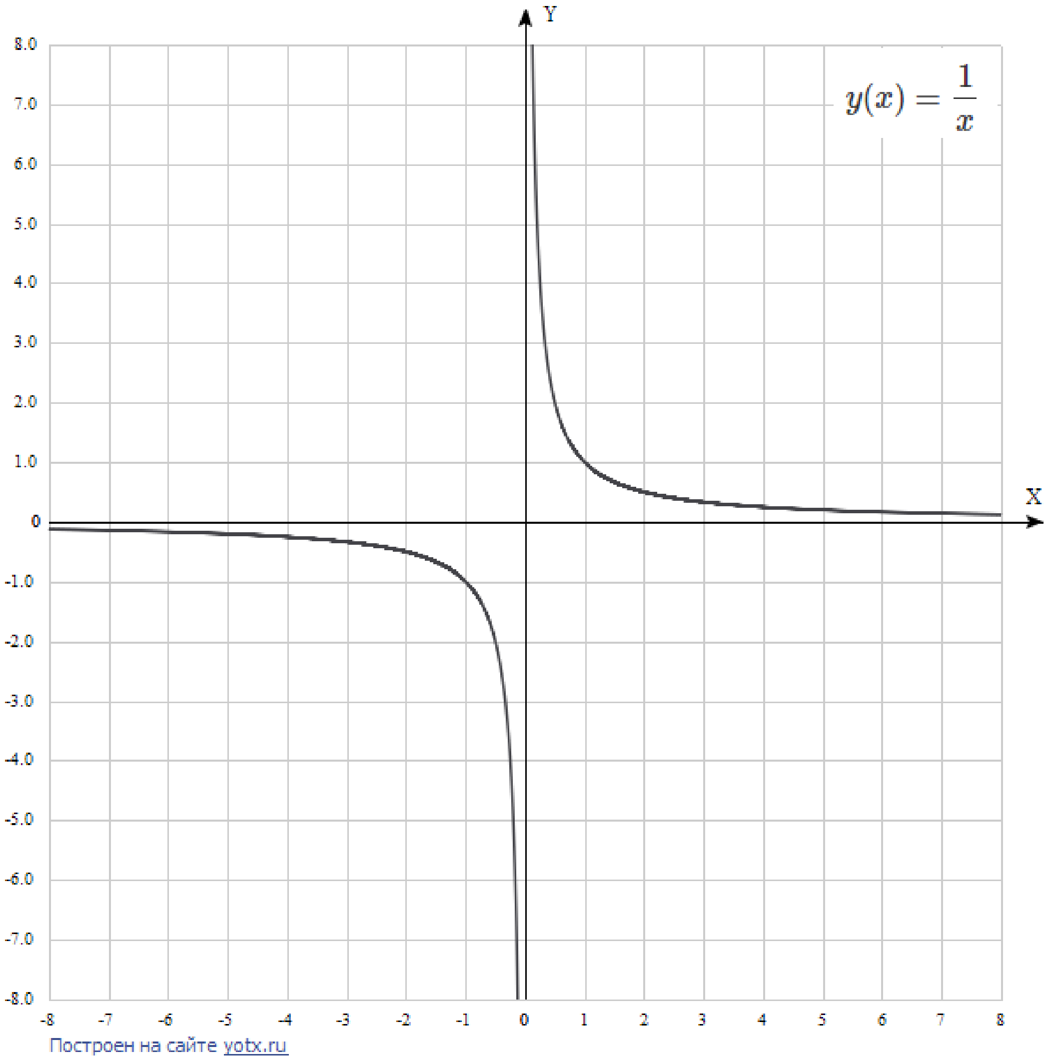

Рис. 16

Теорема 21.8. Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ графика функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = b$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$. При $k = 0$ $y = b$ − горизонтальная асимптота, $b = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Область определения функции.
2. Исследование на четность, нечетность.
3. Точки пересечения с осями координат.

4. Исследование на монотонность и точки экстремума.

5. Исследование на выпуклость и точки перегиба.

6. Нахождение вертикальных, наклонных асимптот.

7. График функции.

Пример. Провести полное исследование и построить график функции $y=\dfrac{3x^2-6x}{x-1}$.

1. $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

2. Функция общего вида, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Если $x=0$, то $y=0$; $y=0$ при $3x^2-6x=0$, $3x(x-2)=0$, т. е. при $x = 0$ или $x = 2$. График функции проходит через точки (0; 0) и (2; 0).

4. $y'=\dfrac{(6x-6)(x-1)-(3x^2-6x)}{(x-1)^2}=\dfrac{6x^2-12x+6-3x^2+6x}{(x-1)^2}=\dfrac{3x^2-6x+6}{(x-1)^2}=$
$=\dfrac{3(x^2-2x+2)}{(x-1)^2}$, $y'=0$ при $x^2-2x+2=0$, $D=4-8=-4<0$, т. е. производная в нуль не обращается, поэтому точек экстремума нет. Так как $y'>0$ на всей области определения, то функция монотонно возрастает на $D(y)=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

5. $y''=3\cdot\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=6\cdot\dfrac{(x-1)^2-(x^2-2x+2)}{(x-1)^3}=\dfrac{-6}{(x-1)^3}$,
$y''\neq 0$, следовательно, точек перегиба нет, y'' не определена в точке $x = 1$. Если $x < 1$, то $y''>0$, следовательно, функция выпукла вниз на $(-\infty;1)$. Если $x > 1$, то $y''<0$, следовательно, функция выпукла вверх на $(1;+\infty)$.

6. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{3x^2-6x+6}{x-1}=-\infty$,
следовательно, $x=1-$ вертикальная асимптота.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+6}{x^2-x}=3,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-6x+6}{x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-6x+6-3x^2+3x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+6}{x-1}=-3,$$

следовательно, $y=3x-3$ наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

7. График функции представлен на рис. 17.

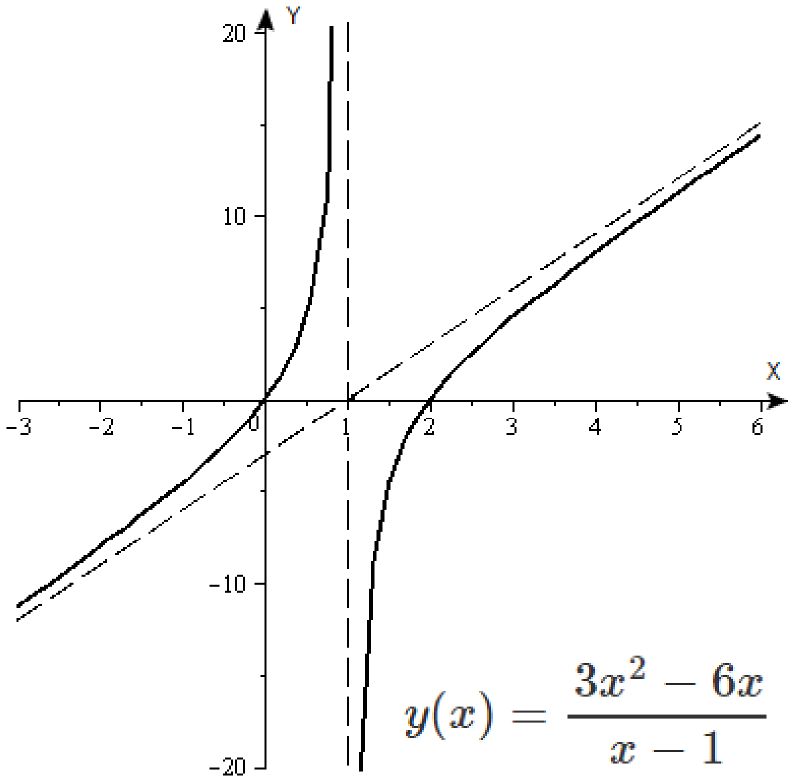

Рис. 17

22. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную и непрерывную на отрезке $[a, b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса функция $y = f(x)$ достигает в некоторой точке $[a, b]$ своего наибольшего (наименьшего) значения. Наибольшее (наименьшее) значение функции $y = f(x)$ может достигаться либо во внутренней точке отрезка $[a, b]$ (тогда оно совпадает с одним из локальных максимумов (минимумов) функции $y = f(x)$), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Отсюда вытекает правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке:

1) найти производную;

2) найти точки локального экстремума и выбрать среди них те, которые принадлежат $[a, b]$;

3) вычислить значения функции в этих точках и в граничных точках и выбрать среди них наибольшее и наименьшее значения.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{4}{x^2} - 8x - 15$ на отрезке $\left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Решение. $y' = \frac{-8}{x^3} - 8$, $\frac{-8}{x^3} - 8 = 0$, $\frac{-8}{x^3} = 8$, $x^3 = -1$, $x = -1 \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

y' не определена в $x = 0 \notin \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$.

Вычисляем $y(-2) = \frac{4}{4} + 16 - 15 = 2$,

$y(-1) = \frac{4}{1} + 8 - 15 = -3$,

$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot 4 + 4 - 15 = 5$,

следовательно, $\max\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x) = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 5$, $\min\limits_{\left[-2;-\frac{1}{2}\right]} y(x) = y(-1) = -3$ (рис. 18).

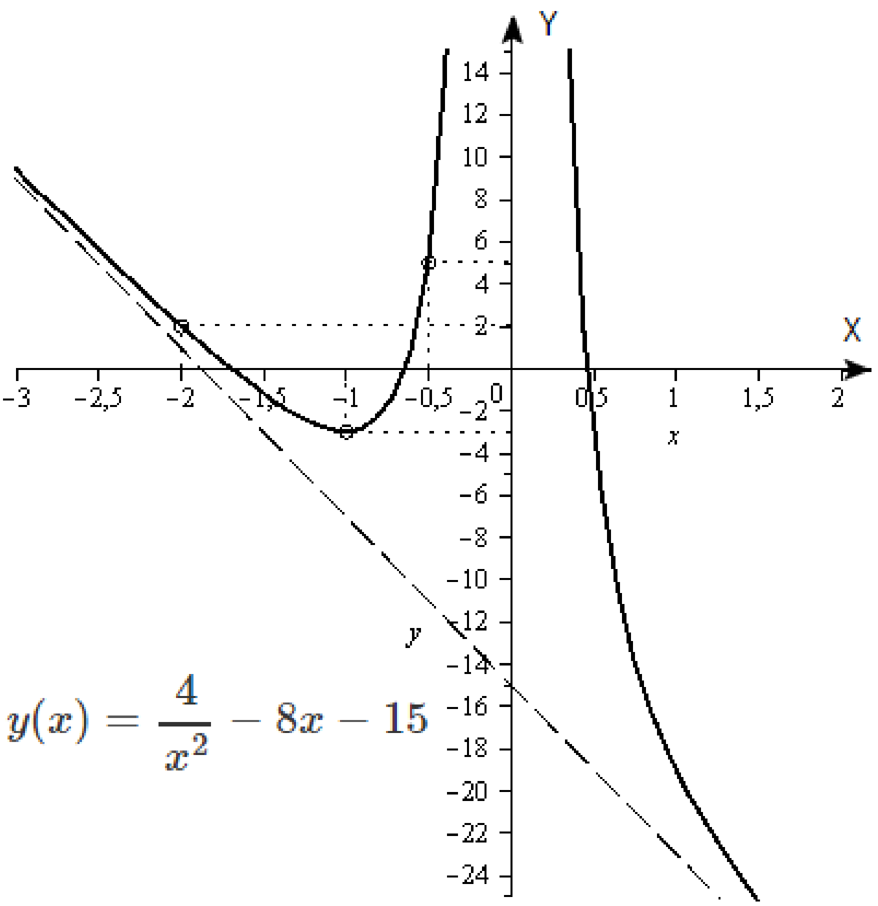

Рис. 18

Контрольная работа № 1. «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ЛИНЕЙНАЯ И ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА»

1. Найти значение матричного многочлена $f(A)=2A^2-3A+7E$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ -7 & 3 & -2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 9 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -6 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -3 & -4 & 6 \\ -7 & -3 & 5 \\ -4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \\ 9 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ 9 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 \\ 4 & 5 & 0 \\ 9 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 9 \\ -5 & 3 & 3 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} -9 & -9 & 0 \\ -1 & -9 & -2 \\ 5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 7 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & -8 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} -8 & 8 & -6 \\ -7 & -6 & -7 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -9 \\ 9 & -9 & -7 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \\ -6 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 \\ -5 & 1 & -1 \\ 6 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & -5 & -7 \\ 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & -2 & -7 \\ 6 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -9 & 7 & -3 \\ 6 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 8 \\ -1 & -3 & -3 \\ 9 & -8 & -8 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} -7 & -3 & -7 \\ 9 & -6 & 4 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} -9 & -8 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -7 & -7 & -6 \end{pmatrix}$

2. Вычислить определитель четвертого порядка

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -10 \\ 4 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 22 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 8 & 31 \\ 7 & 8 & -1 & 26 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 22 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -9 & -4 \\ 8 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & -1 & 4 & 30 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 & 13 \\ 3 & 2 & 5 & 23 \\ 9 & -1 & 7 & 62 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 8 & -8 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 7 & -12 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 8 & -6 & 7 & 9 \\ 5 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 1 & 10 & 8 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & -1 & 29 \\ 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 & -13 \\ 2 & -3 & 5 & 13 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & -15 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & -1 & 2 & 17 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -7 & -13 \\ 2 & 1 & 4 & 17 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -7 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 17 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ 5 & 1 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 14 \\ 2 & -1 & 4 & 10 \\ 8 & 3 & -2 & 22 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 9 & -6 & 5 & -11 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 5 & 23 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 8 & -10 & 1 & 24 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & -4 \\ 3 & -2 & 7 & -5 \\ 2 & 5 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & -22 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 41 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -7 & 12 \\ 3 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 7 & -3 & 20 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 25 \\ 1 & 3 & -1 & -13 \\ 5 & -1 & 4 & 17 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & 7 & 1 & 13 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. Для матрицы из задания 1 найти обратную матрицу и сделать проверку.

4. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где

1. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

4. $A=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & -6\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & -5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & -7\end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -7\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}6 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix}7 & 1\\ -6 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 6 & -2\end{pmatrix}$

30. $A=\begin{pmatrix}9 & 1\\ -8 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 5 & -2\end{pmatrix}$.

5. Найти ранг матрицы и указать один из базисных миноров

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & -3\\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11\\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3\end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & -7 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 6 & -4\\ -1 & 2 & -1 & -10 & 5\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 4\\ 7 & 8 & 9 & -7\end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 6 & 1 & -2\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 2\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -4 & 3\\ 5 & -2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ 9. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 3 & 8 & 2 & -19\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix}1 & -3 & 1 & -14 & 22\\ -2 & 1 & 3 & 3 & -9\\ -4 & -3 & 11 & -19 & 17\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}1 & 7 & -3\\ 3 & -1 & 4\\ 5 & 13 & -2\end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 1 & 3 & -1\\ 6 & 2 & 3\end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix}-1 & 7 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 9 & 0\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & -10 \end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ 18. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 20. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 21. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ 23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -7 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 10 & 11 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 26. $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 27. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 13 & -2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ 30. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$

6. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса, по формулам Крамера и матричным методом:

1. $\begin{cases} 3x+7y-z=-2 \\ x+4y+5z=3 \\ 2x-y+3z=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 4x-y+2z=5 \\ x+3y-z=2 \\ 3x+2y+7z=19 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+y-z=14 \\ 2x-y+4z=10 \\ 8x+3y-2z=22 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 5x+y-2z=-7 \\ 3x+7y+z=13 \\ 2x-3y+4z=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ 2x+y-z=10 \\ -x+7y+2z=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x-2y+7z=25 \\ x+3y-z=-13 \\ 5x-y+4z=17 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x+5y-7z=12 \\ 3x-y+4z=7 \\ x+7y-3z=20 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x+4y-z=9 \\ 3x+2y+z=-9 \\ 5x+y-4z=-6 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+y-3z=-22 \\ 4x+3y+z=2 \\ 3x-y+5z=41 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x+3y-5z=-4 \\ 3x-2y+7z=-5 \\ 2x+5y-z=10 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x+2y-7z=3 \\ 5x-3y+z=5 \\ 2x+4y+5z=17 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 5x-y-3z=0 \\ 3x+2y-7z=-13 \\ 2x+y+4z=17 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x-2y+5z=-7 \\ 3x+5y-2z=-1 \\ 2x+3y+z=-7 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+5y-z=-15 \\ 3x+2y+4z=8 \\ 5x-y+2z=17 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 8x-10y+z=24 \\ 5x+y+3z=3 \\ 2x+3y-5z=11 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -5x+4y-z=-13 \\ 2x-3y+5z=13 \\ x+4y-z=5 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x-3y+4z=-4 \\ 3x+3y+5z=23 \\ -2x+y+3z=6 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x-y+4z=1 \\ 7x+3y-z=29 \\ 2x+y+5z=9 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x-6y+5z=-11 \\ 3x+2y-z=3 \\ 4x-y+z=-2 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 8x-6y+7z=9 \\ 5x+2y-z=6 \\ -3x+y+10z=8 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 4x-7y+5z=-3 \\ 2x-2y+3z=0 \\ 5x+z=5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x+5y-9z=-4 \\ 8x-y+z=0 \\ 5x+3y-z=2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x-y+8z=-8 \\ 3x+y+2z=2 \\ x+5y+7z=-12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 9x-7y+z=18 \\ 6x+5y-2z=27 \\ 2x-3y-7z=17 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 10x-y+z=9 \\ x+5y-3z=8 \\ 3x+2y-4z=3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x+7y-2z=4 \\ 2x-5y+8z=31 \\ 7x+8y-z=26 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x-y+10z=13 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 9x-y+7z=62 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x+2y-z=1 \\ 3x-y+4z=22 \\ 2x+4y-z=1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 5x-y+2z=16 \\ 3x+2y-z=3 \\ 9x-y+4z=30 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x-y+z=10 \\ 3x+y-4z=-10 \\ 4x+3y-3z=0 \end{cases}$

7. Используя критерий Кронекера – Капелли, исследовать совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решить ее

1. $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4=2 \\ 3x_1-5x_2-x_3+2x_4=-1 \\ 6x_1-11x_2-3x_3+x_4=2 \\ -2x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3-x_4=8 \\ 3x_1-2x_2+x_3-3x_4=7 \\ 2x_1-x_2-5x_4=6 \\ 5x_1-3x_2+x_3-8x_4=1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=3 \\ 4x_1-2x_2+3x_3+7x_4=1 \\ 8x_1-6x_2-x_3-5x_4=9 \\ 7x_1-3x_2+7x_3+17x_4=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-2x_3=1 \\ 5x_1+3x_2-7x_3=1 \\ -x_1+x_2-5x_3=-5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

8. Даны три точки $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$, $(x_C; y_C)$. Требуется:

1) проверить, что эти точки не лежат на одной прямой, т. е. образуют треугольник;

2) вычислить параметры треугольника (площадь, периметр, величину угла *C*);

3) написать уравнения сторон *AB, AC, BC;*

4) написать уравнение высоты *BH;*

5) найти длину высоты *BH;*

6) написать уравнение медианы *AE.*

Вариант	x_A	y_A	x_B	y_B	x_C	y_C
1	15	–13	7	–13	14	14
2	24	1	18	7	12	–5
3	6	21	0	21	–1	14
4	–1	–1	–19	–2	–10	–5
5	1	–3	–17	9	–10	8
6	1	–8	7	–2	13	–4
7	–18	2	–10	–6	–4	0
8	–4	5	–12	5	–8	7
9	–15	14	–7	–10	–5	4
10	–6	–19	0	–19	1	–12
11	–15	13	–7	13	–14	14
12	–23	–2	–5	–2	–14	1
13	–4	–22	2	–22	–1	–13
14	11	6	17	0	3	–2
15	–22	8	–16	2	–10	14
16	5	21	–13	9	–2	12
17	7	2	–9	18	–5	6
18	14	1	20	–5	8	–1
19	15	11	21	11	14	12
20	–3	20	3	20	4	13
21	–4	9	–12	–15	–2	–5
22	2	–18	20	–12	6	–14
23	16	16	8	16	7	13
24	–2	–5	–8	–5	–9	–6
25	18	9	6	3	10	3
26	7	11	–3	1	1	7
27	–16	–4	2	–10	–2	–6
28	–5	–19	–13	–19	–9	–11
29	3	–13	21	–1	10	–4
30	8	–18	0	6	10	–4

9. Даны декартовы прямоугольные координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) угол α между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) объем пирамиды;

4) уравнение плоскости грани $A_1A_2A_3$;

5) угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;

6) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Вариант	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(–2; 0; 2)	(2; 3; 14)	(–6; –3; 14)	(1; –4; 14)
2	(–1; –1; 0)	(11; 2; –4)	(11; –4; 4)	(1; 3; 3)
3	(–2; 0; 0)	(–1; 2; –2)	(–12; –2; 11)	(1; –3; 3)
4	(–2; 0; 1)	(0; 1; –1)	(–4; 2; 0)	(–1; 3; 2)
5	(2; –1; 1)	(1; 1; –1)	(4; –2; –1)	(2; 3; 2)
6	(2; 1; –2)	(4; –4; 12)	(–8; –10; 0)	(3; –3; –1)
7	(–2; –1; –2)	(–1; 1; 0)	(0; –3; –1)	(1; 0; –3)
8	(0; 1; 1)	(2; 0; –1)	(2; –9; –10)	(2; –2; 6)
9	(–2; 0; 2)	(–4; –1; 4)	(0; –2; 3)	(0; 5; 5)
10	(–2; 2; 0)	(12; 4; 5)	(–4; –9; 10)	(0; –4; –2)
11	(0; 1; 1)	(2; –4; –13)	(10; 12; 3)	(3; –1; 0)
12	(1; 2; –2)	(3; 3; –4)	(2; 4; 0)	(3; –3; 2)
13	(0; –1; 2)	(12; –21; 11)	(16; –22; 14)	(–3; 0; 6)
14	(0; –1; 2)	(–1; –3; 4)	(–5; 13; 0)	(3; 4; 1)
15	(–2; 0; –2)	(–3; 2; –4)	(–7; –14; 0)	(–1; 2; 7)
16	(2; 0; –2)	(–2; 8; –3)	(9; 4; 2)	(10; 1; –8)
17	(0; –2; –2)	(–4; 10; –5)	(–12; 6; –11)	(–9; 6; 10)
18	(–2; 1; 0)	(–4; 0; –2)	(–12; –10; 2)	(–2; 2; 7)
19	(2; 2; 0)	(4; 3; 2)	(–8; –9; 2)	(2; –2; –1)
20	(2; 1; 2)	(–3; –13; 4)	(12; –1; 13)	(–1; 3; 7)
21	(–1; 1; 0)	(0; 3; 2)	(1; 2; –2)	(5; –3; –2)
22	(3; 0; 2)	(2; 2; 0)	(5; –1; 0)	(3; 4; 3)
23	(–1; 2; 0)	(1; 3; 2)	(–6; 4; –14)	(–1; 5; 3)
24	(2; 2; 1)	(4; –3; 15)	(–8; –9; 3)	(3; –2; 2)
25	(2; 0; –2)	(6; 2; –6)	(–2; 4; –4)	(–2; –10; –8)
26	(1; 0; 2)	(4; 3; –2)	(–4; 5; 0)	(2; 7; 4)
27	(–1; 1; 2)	(3; 3; –2)	(–5; 5; 0)	(1; 7; 4)
28	(–1; 3; 2)	(1; 4; 4)	(–6; 5; –12)	(–1; 6; 5)
29	(–1; –2; –2)	(1; –1; –4)	(0; 0; 0)	(4; –3; 4)
30	(–2; –1; –2)	(–1; 1; –4)	(–12; –3; 9)	(1; –4; 1)

10. Задана плоскость α и точка M. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M параллельно плоскости α. Найти расстояние между плоскостями.

Вариант	Плоскость α	M
1	$11x-16y-8z-16=0$	(1; 1; 0)
2	$-3x-6y+2z-1=0$	(2; 2; –1)
3	$3x+4y+3=0$	(1; –1; 1)
4	$-10x-25y+2z+3=0$	(–2; 0; 2)
5	$9x-2y-6z+6=0$	(2; 1; 0)
6	$-6x-13y-18z+22=0$	(–1; 0;–1)
7	$-13x-16y+4z-24=0$	(2; 0; 2)
8	$19x-4y+8z+20=0$	(2; 2; –1)
9	$-18x-3y-14z+24=0$	(0; 2; –2)
10	$-x-4y+8z+18=0$	(–1; –2; 0)
11	$20x+21z+10=0$	(2; 2; –1)
12	$15x+12y-16z-23=0$	(–1; –1; 0)
13	$-9x+8y-12z+11=0$	(–2; 0; 1)
14	$-6x-17y+6z-5=0$	(–2; 0; 2)
15	$-12x+12y-21z-3=0$	(0; –2; 0)
16	$-8x-12y+9z+9=0$	(–1; 0; 0)
17	$-4x-8y+z+6=0$	(–1; –1; 0)
18	$6x-22y-3z-14=0$	(–1; 0; 1)
19	$-7x-4y+4z+17=0$	(–2; –1; –2)
20	$13x-4y-16z-5=0$	(2; 0; 0)
21	$x+4y+8z+19=0$	(0; 2; 0)
22	$4x+20y+5z+10=0$	(1; –2; 1)
23	$-3x+14y-18z-19=0$	(–2; –2; –1)
24	$-3x-4y-12z+12=0$	(2; 1; –2)
25	$x+4y+8z+26=0$	(1; 0; 0)
26	$12x-21y+16z+9=0$	(–1; 0; 2)
27	$20x+9y-12z+9=0$	(2; 0; 2)
28	$16x+12y-21z-13=0$	(–1; 0; 0)
29	$11x+16y-8z+20=0$	(2; 0; 0)
30	$18x-y-6z-26=0$	(–1; 1; 2)

11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости α.

Вариант	Плоскость α	M_1	M_2
1	$-20x-9y+12z-24=0$	(2; 2; 0)	(14; 1; 12)
2	$4x+3y-12z-6=0$	(–2; 2; 2)	(–5; –14; 26)
3	$18x+y+6z-8=0$	(–1; 2; 0)	(–2; –16; 6)
4	$2x+3y-6z-17=0$	(2; 1; –2)	(–4; –1; –5)
5	$x+2y+2z+19=0$	(1; 1; 1)	(–1; 0; 3)
6	$15x-12y-16z+23=0$	(2; 0; –1)	(5; –12; –5)
7	$-12x-16y-15z+22=0$	(0; 2; 1)	(–11; –22; –11)
8	$6x-6y+17z+16=0$	(–1; 1; 0)	(–2; –17; –6)
9	$15x-12y-16z-8=0$	(0; –1; 1)	(12; 2; 5)
10	$14x-23y-2z+27=0$	(1; –1; –2)	(–6; –3; –28)
11	$16x+12y-15z-14=0$	(1; 0; 1)	(13; –1; 13)
12	$7x+22y+14z+10=0$	(1; 1; –2)	(3; 15; –25)
13	$16x-12y+15z-4=0$	(0; –1; –1)	(3; –17; –25)
14	$10x+2y-25z+27=0$	(0; 2; 1)	(10; –23; 3)
15	$11x+12y-24z+3=0$	(1; –1; –1)	(2; –13; –13)
16	$3x+12y+4z+10=0$	(0; 1; 1)	(3; –11; 5)
17	$24x+11y-12z+24=0$	(0; –2; –1)	(–12; –5; –5)
18	$2x-2y-z-25=0$	(–1; 0; –1)	(1; 1; 1)
19	$-2x-10y-10z+9=0$	(1; 0; –2)	(2; 2; –4)
20	$6x-6y-7z-8=0$	(0; –2; 1)	(2; 7; –5)
21	$-11x-2y+10z-14=0$	(2; 1; 0)	(0; 2; –2)
22	$6x+6y+17z-17=0$	(0; –2; –2)	(1; –20; 4)
23	$9x-20y+12z+6=0$	(–2; 1; –1)	(–6; 13; –4)
24	$10x-11y+2z+1=0$	(0; 1; –1)	(2; 0; –3)
25	$2x-y-2z+27=0$	(–1; 0; –2)	(–2; 2; –4)
26	$-10x-11y-2z+7=0$	(–2; 1; 0)	(3; –1; –14)
27	$11x+24y-12z-8=0$	(–1; –2; 1)	(–25; 1; –15)
28	$-24x-3y-16z-25=0$	(–2; 0; –2)	(–1; 12; –14)
29	$12x-15y-16z-8=0$	(0; –1; 1)	(–1; 11; –11)
30	$9x-12y-20z+6=0$	(–2; 0; 1)	(22; 3; –15)

12. Даны прямая *l* и точка *M*. Написать:

1) уравнение плоскости α, проходящей через прямую *l* и точку *M*;

2) уравнение плоскости β, проходящей через точку *M* перпендикулярно прямой *l*;

3) канонические уравнения прямой *h*, проходящей через точку *M* перпендикулярно прямой *l*.

Вариант	Прямая *l*	*M*
1	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$	(2; 0; 2)
2	$\frac{x}{4}=\frac{y}{-7}=\frac{z-1}{-4}$	(1; –1; –3)
3	$\frac{x}{25}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-10}$	(1; –3; 1)
4	$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-1}{11}$	(–4; 1; 2)
5	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-2}$	(–1; 3; –1)
6	$\frac{x}{-25}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{10}$	(–1; 0; 0)
7	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{-2}$	(–1; 1; 0)
8	$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-2}$	(3; 2; –1)
9	$\frac{x+1}{18}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-6}$	(0; –1; 0)
10	$\frac{x+2}{10}=\frac{y+1}{-11}=\frac{z+1}{-2}$	(–1; –3; –3)
11	$\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$	(–2; 2; –4)
12	$\frac{x+2}{1}=\frac{y}{8}=\frac{z+1}{-4}$	(–1; 1; –1)
13	$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z+1}{-11}$	(2; 1; –3)
14	$\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{14}$	(1; 3; 0)
15	$\frac{x+2}{-2}=\frac{y+2}{-14}=\frac{z+1}{5}$	(–1; –2; 0)

Окончание табл.

Вариант	Прямая l	M
16	$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-2}{-14}$	(0; 1; –2)
17	$\frac{x-2}{-9}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{6}$	(1; 0; –2)
18	$\frac{x+2}{9}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{6}$	(–1; –1; –2)
19	$\frac{x+2}{16}=\frac{y+2}{12}=\frac{z+2}{15}$	(2; 1; –1)
20	$\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{4}$	(–1; 0; 0)
21	$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{14}=\frac{z-1}{-5}$	(1; 2; 0)
22	$\frac{x-1}{12}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+1}{4}$	(1; 0; –5)
23	$\frac{x-2}{-7}=\frac{y}{-4}=\frac{z+2}{4}$	(1; –4; –1)
24	$\frac{x}{-5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{14}$	(–1; 1; 1)
25	$\frac{x-1}{-6}=\frac{y}{18}=\frac{z}{-1}$	(1; 1; –1)
26	$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$	(2; –5; 0)
27	$\frac{x}{6}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-18}$	(0; –1; 1)
28	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{2}$	(–3; 1; –2)
29	$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-2}$	(–3; 1; 1)
30	$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z-2}{-14}$	(2; 0; 0)

Контрольная работа № 2. «ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Вычислить предел последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3-n)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(n-2)^3-(n+2)^3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(4-n)^2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+2)^2+(2n+1)^2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n^3-2n}{(n+2)^2+(n+1)^3}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2+(n-4)^2}{(4-n)^2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+10)^2+(3n-1)^2}{(n+6)^3-(n-6)^3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n}{(4n+1)^2+(n-1)^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)^2+(3n-1)^2}{(n+4)^3-(n-4)^3}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2+(n-2)^2}{(n+6)^3-n^3}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n+1)^2+(n-2)^2}{(n+2)^3-n^3}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)^2+(2n-1)^2}{(n+1)^3-n^3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(3n-1)^2}{(n+5)^3-n^3}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5n+1)^2+(n-1)^2}{n^3-(n-1)^3}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n+1)^3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2+(n-1)^2}{n^3-(n+2)^3}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n-6)^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+7)^2+(2n-1)^2}{n^3-(n-6)^3}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2-(n-2)^2}{n^3-(n+3)^3}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^3-2n}{(n-2)^2+(2n+1)^3}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^2+(3n-4)^2}{(5-n)^2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-5)^2-(n-4)^2}{(6-n)^2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)^2+(n-4)^2}{(4-n)^2}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-7)^2-(n+1)^2}{(n-1)^2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+7)^2-(n-2)^2}{(4n-1)^2}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-7)^2-(2n+1)^2}{(3n-1)^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-5)^2-(4n+1)^2}{(3n+1)^2}$

2. Вычислить предел последовательности

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^4}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{1-n}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^3}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{n+1}$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^{n}$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$

3. Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$

6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(3x+1)}{x+x^5}$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

15. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$

16. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

18. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$

23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^5}$

29. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2-3x+18}{x^3-5x^2+3x+9}$

4. Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{7+2x}-5}{\sqrt{x}-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{x}-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{2+x}-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{\sqrt{12-x}-3}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{7+x}-2}{\sqrt[3]{x-5}+2}$

7. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{4+2x}-6}{\sqrt{x}-4}$

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6+2x}-2}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+3x}-1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{6+x}-1}{\sqrt[3]{x-3}+2}$

11. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7-x}-3}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

12. $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{\sqrt{8+x}-1}{\sqrt[3]{x-1}+2}$

13. $\lim\limits_{x\to -9}\dfrac{\sqrt{10+x}-1}{\sqrt[3]{x+1}+2}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

15. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[3]{x-8}-2}$

16. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{\sqrt[3]{x}+2}$

17. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{\sqrt[3]{x}-1}$

19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{10+x}-3}{\sqrt[3]{x}+1}$

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{6+x}-2}{\sqrt[3]{x-6}+2}$

21. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt[3]{x-26}+3}$

22. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{2x-1}-7}{\sqrt{x}-5}$

23. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{7+3x}-1}{\sqrt[3]{2x+3}+1}$

24. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+2x}-3}{\sqrt[3]{x+5}-2}$

25. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{20+x}-5}{\sqrt[3]{x-4}-1}$

26. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+4x}-1}{\sqrt[3]{x-7}+2}$

27. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{9+x}-1}{\sqrt[3]{x}+2}$

28. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{6+x}-4}{\sqrt[3]{x-2}-2}$

29. $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{\sqrt{5+x}-4}{\sqrt[3]{x-3}-2}$

30. $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt[3]{x+2}-3}$

5. Вычислить предел функции, используя таблицу эквивалентностей:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{tg\, 2x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg\, 2\pi x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x+1}-2}{\ln(1+4x)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 2x}{\sin 2\pi x}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin \pi x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x\cdot tg\, 5x}{\arcsin 2x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sqrt{8x+4}-2}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\sin x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3arctg\, x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x}{\ln(1+2x)}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin 3x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{e^{3x}-1}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\sin 2x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\left(e^{3x}-1\right)^2}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\ln(e-x)-1}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+1)}{2-\sqrt{2x^2+4}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, 3x}{\ln(x+1)}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4\pi x}-1}{\sqrt[3]{8+24x}-2}$

6. Вычислить предел функции

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2}{tg3x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\arcsin 2x)^{\frac{2}{e^{4x}-1}}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg4x)^{\frac{1}{\ln(1+2x)}}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{2}{arctg^2 3x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+tg^2 x)^{\frac{1}{\cos 2x-1}}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^x)^{\frac{1}{\ln(1+4x)}}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\cdot tg\,x)^{\frac{1}{\arcsin^2 2x}}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}(1-tg3x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x}-1}}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}(2-5^x)^{\frac{1}{arctg5x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{ctg\,x}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin 4x)^{\frac{1}{\ln(1-3x)}}$

14. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\ln(1+3x)}}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{\ln(1-3x^2)}}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^x)^{\frac{1}{\sqrt{1+2x}-1}}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x)^{\frac{1}{4^x-1}}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{1-\cos 4x}}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x^2)^{\frac{1}{tg^2 x}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(1-4x^2)}}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x^2)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^x)^{\frac{1}{\sin 5x}}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{2x})^{\frac{1}{tg4x}}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin^2 x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x^2)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x^2)^{\frac{1}{tg^2 4x}}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin 5x^2)^{\frac{1}{\ln(1-x^2)}}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}(1-6x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}(1+8x^2)^{\frac{1}{arctg^2 2x}}$

7. Исследовать точки разрыва функции и построить схематический чертеж в окрестности исследуемой точки

1. $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

2. $y=2^{\frac{1}{x}}$

3. $y=e^{\frac{1}{x+1}}$

4. $y=\dfrac{e^x-1}{x}$

5. $y=arctg\,\dfrac{1}{x}$

6. $y=\dfrac{2^x-1}{x}$

7. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

8. $y=\dfrac{|x|}{x}$

9. $y=\dfrac{5^x-1}{x}$

10. $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$

11. $y=e^{\frac{1}{x^2}}$

12. $y=\dfrac{x}{x-4}$

13. $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$

14. $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}$

15. $y=5^{\frac{1}{x+3}}$

16. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

17. $y=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$

18. $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$

19. $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

20. $y=\dfrac{1}{\ln x}$

21. $y=\begin{cases} x+1, & x\le 1\\ 3-x^2, & x>1\end{cases}$

22. $y=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2, & x\le 2\\ x, & x>2\end{cases}$

23. $y=\begin{cases} 2x+5, & x<-1\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge -1\end{cases}$

24. $y=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\le x\le 1\\ 4-2x, & 1<x<2{,}5\\ 2x-7, & x\ge 2{,}5\end{cases}$

25. $y=\begin{cases} -x, & x\le -1\\ \dfrac{2}{x-1}, & x>-1\end{cases}$

26. $y=\begin{cases} 1-x^2, & x<0\\ (x-1)^2, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & x>2{,}5\end{cases}$

27. $y=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$

28. $y=\dfrac{2|x-1|}{x^2-x^3}$

29. $y=3^{\frac{1}{x}}-1$

30. $y=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$

8. Найти производную функции

1. $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$

2. $y=\cos\ln 2-\dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 6x}$

3. $y=tg\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 4x}{4\cos 8x}$

4. $y=ctg\sqrt[3]{5}-\dfrac{\cos^2 4x}{8\sin 8x}$

5. $y=\dfrac{\cos\sin 5\cdot\sin^2 2x}{2\cos 4x}$

6. $y=\dfrac{\sin\cos 3\cdot\cos^2 2x}{4\sin 4x}$

7. $y=\dfrac{\cos\ln 7\cdot\sin^2 7x}{7\cos 14x}$

8. $y=ctg 2-\dfrac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$

9. $y=ctg\cos 2+\dfrac{\sin^2 6x}{6\cos 12x}$

10. $y=\sqrt[3]{ctg 2}-\dfrac{\cos^2 10x}{20\sin 20x}$

11. $y=\dfrac{1}{3}\cos tg\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 10x}{10\cos 20x}$

12. $y=\ln\sin\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos^2 12x}{24\sin 24x}$

13. $y=8\sin ctg 3+\dfrac{\sin^2 5x}{5\cos 10x}$

14. $y=\dfrac{\cos ctg 3\cdot\cos^2 14x}{28\sin 28x}$

15. $y=\dfrac{\cos tg 3\cdot\sin^2 15x}{15\cos 30x}$

16. $y=\dfrac{\sin tg 7\cdot\cos^2 16x}{32\sin 32x}$

17. $y=\dfrac{ctg\sin 3\cdot\sin^2 17x}{17\cos 34x}$

18. $y=\dfrac{\sqrt[5]{ctg 2}\cdot\cos^2 18x}{36\sin 36x}$

19. $y=\dfrac{tg\ln 2\cdot\sin^2 19x}{19s\cos 38x}$

20. $y=ctg\cos 5-\dfrac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$

21. $y=\sqrt{tg 4}+\dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$

22. $y=\cos\ln 13-\dfrac{\cos^2 22x}{44\sin 44x}$

23. $y=\ln\cos\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$

24. $y=ctg\sin\dfrac{1}{13}-\dfrac{\cos^2 24x}{48\sin 48x}$

25. $y=\sin\ln\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$

26. $y=\sqrt[3]{\cos\sqrt{2}}-\dfrac{\cos^2 26x}{52\sin 52x}$

27. $y=\sqrt[7]{tg\cos 2}+\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$

28. $y=\sin\sqrt[3]{tg 2}-\dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$

29. $y=\cos^2\sin 3+\dfrac{\sin^2 29x}{29\cos 58x}$

30. $y=\sin^3\cos 2-\dfrac{\cos^2 30x}{60\sin 60x}$

9. Найти дифференциал функции

1. $y=\left(2x^2+3x-1\right)e^{4x}$
2. $y=\left(-x^2+4x-2\right)e^{2x}$
3. $y=\left(3x^3-4x+5\right)e^{x}$
4. $y=\left(x^4-2x^2+7\right)e^{3x}$
5. $y=\left(-x^2+3x\right)e^{5x}$
6. $y=\left(2x^3+3x^2-1\right)e^{2x}$
7. $y=\left(10x^2+3x\right)e^{7x}$
8. $y=\left(4x^2-3x+5\right)e^{3x}$
9. $y=\left(2x^4+3x^3-1\right)e^{2x}$
10. $y=\left(2x^2+3x+1\right)e^{5x}$
11. $y=\left(4x^2-3x+4\right)e^{6x}$
12. $y=\left(2x^3+3x^2-1\right)e^{3x}$
13. $y=\left(x^2-3x-9\right)e^{3x}$
14. $y=\left(10x^2-3x+8\right)e^{9x}$
15. $y=\left(7x^2-3x+6\right)e^{2x}$
16. $y=\left(2x^2+4x-6\right)e^{x/2}$
17. $y=\left(2x^4+3x^3-1\right)e^{2x}$
18. $y=\left(2x^2+3x\right)e^{5x}$
19. $y=\left(x^2+8x-2\right)e^{x/2}$
20. $y=\left(-x^2+5x-8\right)e^{3x}$
21. $y=\left(x^3+3x^2-1\right)e^{5x}$
22. $y=\left(8x^2+4x-1\right)e^{3x}$
23. $y=\left(5x^2-7x-1\right)e^{6x}$
24. $y=\left(-8x^2+3x-6\right)e^{2x}$
25. $y=\left(5x^2+3x-7\right)e^{8x}$
26. $y=\left(4x^2+3x+9\right)e^{5x}$
27. $y=\left(-3x^2+3x-1\right)e^{6x}$
28. $y=\left(6x^2+3x-8\right)e^{4x}$
29. $y=\left(x^2+5x-7\right)e^{2x}$
30. $y=\left(5x^2+7x-9\right)e^{4x}$

10. Вычислить приближенно с помощью дифференциала

1. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7{,}76$
2. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$; $x=1{,}012$
3. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$; $x=0{,}98$
4. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=27{,}54$
5. $y=\arcsin x$; $x=0{,}08$
6. $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$; $x=0{,}97$
7. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=26{,}46$
8. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=7{,}64$
9. $y=\sqrt{4x-1}$; $x=2{,}56$
10. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$; $x=1{,}016$
11. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8{,}36$
12. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x=4{,}16$
13. $y=x^7$; $x=2{,}002$
14. $y=\sqrt{4x-3}$; $x=1{,}78$

15. $y=\sqrt{x^2+x+3}$; $x=1{,}97$

16. $y=x^{11}$; $x=1{,}021$

17. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=1{,}21$

18. $y=x^{21}$; $x=0{,}998$

19. $y=\sqrt[3]{x^2}$; $x=1{,}03$

20. $y=x^6$; $x=2{,}01$

21. $y=\sqrt[3]{x}$; $x=8{,}24$

22. $y=x^7$; $x=1{,}996$

23. $y=\sqrt{x^3}$; $x=0{,}98$

24. $y=x^5$; $x=2{,}997$

25. $y=\sqrt[5]{x^2}$; $x=1{,}03$

26. $y=x^4$; $x=3{,}998$

27. $y=\sqrt{1+x+\sin x}$; $x=0{,}01$

28. $y=\sqrt[3]{3x+\cos x}$; $x=0{,}01$

29. $y=\sqrt[4]{2x-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$; $x=1{,}02$

30. $y=\sqrt{x^2+5}$; $x=1{,}58$

11. Найти производную функции

1. $y=(x+1)^{arctg\,x}$
2. $y=(\sin x)^x$
3. $y=(x+5)^{\arcsin x}$
4. $y=(x+7)^{e^x}$
5. $y=(\cos x)^{tg\,x}$
6. $y=(x-1)^{ctg\,x}$
7. $y=(x^2+3)^{\sin x}$
8. $y=(x+5)^{\cos x}$
9. $y=(x^4+3)^{\ln x}$
10. $y=(x+1)^{3^x}$
11. $y=(x^2+4)^{\sqrt{x}}$
12. $y=(x^2+1)^{\arcsin x}$
13. $y=(x+9)^{\arccos x}$
14. $y=(x+8)^{arctg\,x}$
15. $y=(x+6)^{arcctg\,x}$
16. $y=(x)^{e^x}$
17. $y=(x+2)^{5^x}$
18. $y=(x+3)^{x^4}$
19. $y=(x+8)^{x/2}$
20. $y=(x+5)^{3x}$
21. $y=(x+3)^{\log_5 x}$
22. $y=(x+4)^{x+4}$
23. $y=(x)^{x^2}$
24. $y=(x^2+3)^{2x}$
25. $y=(x+7)^{8x}$
26. $y=(4x+3)^{5x}$
27. $y=(3x-1)^{x^3}$
28. $y=(3x-8)^{x^4}$
29. $y=(5x-7)^{x^2}$
30. $y=(7x-9)^{x^7}$.

12. Найти производную функции, заданной параметрически

1. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4 \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a\sin^2 t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t} \\ y = \frac{t-1}{t} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \frac{t^3+1}{t^2-1} \\ y = \frac{1}{t^2-1} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2tg\,t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = t - t^4 \\ y = t^2 - t^3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = arctg\,t \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4 \frac{t}{2} \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 4(2 + \cos t) \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = arctg\,t \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \ln\sin t \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \frac{1 + \ln t}{t^2} \\ y = \frac{3 + 2\ln t}{t} \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 2e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = 2\ln ctg\, t + 1 \\ y = tg\, t + ctg\, t \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = tg\, t \\ y = \dfrac{1}{\sin 2t} \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \sqrt{t-2} \\ y = \ln(t-2) \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$

13. Найти производную y'_x функции $y(x)$, заданной неявно

1. $e^{x+y} = xy$
2. $y = 1 + xe^y$
3. $e^{2xy} = x^2 + y^2$
4. $x\sin y - y\sin x = 0$
5. $e^x - e^y = y - x$
6. $x + y = e^{x-y}$
7. $x^3 + y^3 = 3xy$
8. $x + y = e^{x+y}$
9. $ye^x + e^y = 0$
10. $x + y = e^{x-y}$
11. $\ln(x+y) = x + y$
12. $x^4 + y^4 = 4xy$
13. $x\cos y - y\sin x = 0$
14. $x^y = y^x$
15. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$
16. $x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 = 0$
17. $x\sin y - y\cos x = 0$
18. $\ln(x-y) = x - y$
19. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$
20. $e^y = x^2 y$
21. $arctg\, y = x + y$
22. $\cos(x+y) = x + y$
23. $\sin(x+y) = x + y$
24. $y\ln x - x\ln y = x + y$
25. $\cos(xy) = y$
26. $\sin(xy) = y$
27. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$
28. $x^2 + y^2 = 2xy$
29. $e^{x-y} = xy$
30. $xy = arctg\dfrac{x}{y}$.

14. По формуле Лейбница найти производную указанного порядка

1. $y=\left(2x^2+3x-1\right)\sin x$, $y'''=?$
2. $y=\left(-x^2+2\right)\cos x$, $y^{(4)}=?$
3. $y=(4x+5)\ln x$, $y'''=?$
4. $y=\left(2x^2+7\right)e^{2x}$, $y^{(4)}=?$
5. $y=(-x+3)\cos 5x$, $y'''=?$
6. $y=\left(3x^2-1\right)\ln x$, $y'''=?$
7. $y=\left(10x^2+3x\right)2^x$, $y^{(4)}=?$
8. $y=(3x+5)3^x$, $y'''=?$
9. $y=\left(3x^3-1\right)\sin 2x$, $y^{(4)}=?$
10. $y=(3x+1)e^{5x}$, $y^{(4)}=?$
11. $y=(3x+4)2^x$, $y'''=?$
12. $y=\left(3x^2-1\right)e^{3x}$, $y^{(4)}=?$
13. $y=(3x-9)4^x$, $y^{(4)}=?$
14. $y=\left(10x^2+8\right)\sin x$, $y'''=?$
15. $y=\left(7x^2+6\right)e^{2x}$, $y^{(4)}=?$
16. $y=\left(2x^2+6\right)e^{x/2}$, $y^{(4)}=?$
17. $y=\left(3x^3-1\right)e^{2x}$, $y^{(4)}=?$
18. $y=\left(2x^2+3x\right)e^{5x}$, $y^{(4)}=?$
19. $y=\left(x^2+2\right)\cos x$, $y^{(4)}=?$
20. $y=\left(-x^2+8\right)e^{3x}$, $y^{(4)}=?$
21. $y=\left(3x^2-1\right)\ln x$, $y'''=?$
22. $y=\left(8x^2+1\right)e^{3x}$, $y^{(4)}=?$
23. $y=\left(5x^2-1\right)4^x$, $y'''=?$
24. $y=\left(-8x^2+6\right)2^x$, $y^{(4)}=?$
25. $y=(3x-7)e^{2x}$, $y^{(5)}=?$
26. $y=(3x+9)e^{3x}$, $y^{(5)}=?$
27. $y=(5x-1)3^x$, $y^{(4)}=?$
28. $y=(6x+3)4^x$, $y^{(4)}=?$
29. $y=(5x-7)e^{2x}$, $y^{(5)}=?$
30. $y=(7x-9)e^{4x}$, $y^{(4)}=?$

15. Составить уравнение касательной и нормали к графику функции в заданной точке

1. $y=\left(4x-x^2\right)/4$; 2
2. $y=x-x^3$; –1
3. $y=x+\sqrt{x^3}$; 1
4. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 4
5. $y=2x^2-3x+1$; 1
6. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$; 64
7. $y=2x^2+3$; –1
8. $y=2x^2+3x-1$; –2
9. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$; 4
10. $y=\sqrt[3]{x^2}-20$; –8
11. $y=8\sqrt[4]{x}-70$; 16
12. $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$; 3
13. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$; 2
14. $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1}$; 1

15. $y = x^2 - 4x$; 1

16. $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^4 + 1}$; 1

17. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$; 1

18. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; –2

19. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; 1

20. $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$; 1

21. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}$; 1

22. $y = \dfrac{x^2}{10} + 3$; 2

23. $y = 2x + \dfrac{1}{x}$; 1

24. $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$; 1

25. $y = \dfrac{1}{3x + 2}$; 2

26. $y = \dfrac{1}{3}\left(x^2 - 3x + 3\right)$; 3

27. $y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right)$; 1

28. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2$; 1

29. $y = \dfrac{1}{3}\left(3x - 2x^3\right)$; 1

30. $y = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - 2x - 3\right)$; 4

16. Вычислить предел по правилу Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - tg\, x}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \dfrac{x^2}{2} - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 2x - \sin x}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - e^{-2x}}{2arctg\, x - \sin x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6^{2x} - 7^{-2x}}{\sin 3x - x}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - arctg\, 3x}$

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 5^{3x}}{arctg\, x + x^3}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{12^x - 5^{-3x}}{2\arcsin x - x}$

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{3x}}{arctg\, x - x^2}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{5x} - e^x}{\arcsin x + x^3}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x - tg\,2x}$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{tg 2x - \sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x - tg 2x}$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x - \sin 5x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin 2x}$

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+tg\,x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x - tg\,x}$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x - 2x}$

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x}$

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2tg\,x - arctg\,x}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{arctg 2x - 7x}$

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x - tg\,x}$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 2x + tg\,x}$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{tg 2x}$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin 2x - tg\,x}$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin 2x - tg\,x}$

17. Провести полное исследование и построить график функции

1. $y=\dfrac{3x^2-6x}{x-1}$

2. $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x}$

3. $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

5. $y=\dfrac{4x-8}{(x-1)^2}$

6. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

7. $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

8. $y=\dfrac{x+\sqrt{2}}{x^2-1}$

9. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$

10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

11. $y=\dfrac{x-1}{(2x-1)(2-x)}$

12. $y=\dfrac{8x-2x^2}{(x-2)^2}$

13. $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$

14. $y=(x-1)^2e^x$

15. $y = -\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

16. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

17. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

18. $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$

19. $y = \dfrac{x^2+8}{(x+2)^2}$

20. $y = \sqrt{4x^2+7}$

21. $y = (x-1)e^{1-x}$

22. $y = \dfrac{x^2-8}{(x-1)^2}$

23. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

24. $y = \dfrac{18x-3x^2}{(x-3)^2}$

25. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

26. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$

27. $y = \dfrac{2x-1}{x^2}$

28. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

29. $y = \dfrac{(2x+1)x}{(x+3)(1-x)}$

30. $y = (3x+5)e^{3x-2}$

18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке

1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, [1; 4]
2. $y = 4 - x - + \dfrac{4}{x^2}$, [1; 4]
3. $y = 2\sqrt{x} - x$, [0; 4]
4. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, [1; 9]
5. $y = \dfrac{10}{1+x^2}$, [0; 3]
6. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59$, [2; 4]
7. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$, [–4; 2]
16. $y = (x+4)^2(x+3) - 6$, [–5; –3,5]
17. $y = x^3 - 6x^2$, [–4; 3]
18. $y = 6x - x\sqrt{x} + 1$, [9; 25]
19. $y = 4 + x + \dfrac{4}{x}$, [–4; –1]
20. $y = 3x^5 - 20x^3 - 54$, [–4; –1]
21. $y = (x+3)^2(x+5) - 1$, [–4; –1]
22. $y = (x-2)^2(x-4) + 5$, [1; 3]

8. $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$, $[-4; -1]$

9. $y=2\sqrt{x-1}-x+2$, $[1; 5]$

10. $y=8x+\dfrac{4}{x^2}-15$, $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$

11. $y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$, $\left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$

12. $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-3x+1$, $[1; 9]$

13. $y=x+\dfrac{36}{x}$, $[1; 9]$

14. $y=\dfrac{x^2+25}{x}$, $[-10; -1]$

15. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$, $[-1; 7]$

23. $y=x^5-5x^3-20x$, $[-6; 1]$

24. $y=3x-2x\sqrt{x}$, $[0; 4]$

25. $y=x\sqrt{x}-3x+1$, $[1; 9]$

26. $y=\dfrac{x^2+25}{x}$, $[1; 10]$

27. $y=-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x+1$, $[1; 9]$

28. $y=3x-2x^{\frac{3}{2}}$, $[0; 4]$

29. $y=x^{\frac{3}{2}}-3x+1$, $[1; 9]$

30. $y=5+9x-\dfrac{x^3}{3}$, $[-3; 3]$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Матрицы, виды матриц. Линейные операции над матрицами и их свойства.
2. Умножение матриц. Транспонирование матрицы. Свойства операции транспонирования.
3. Определители. Свойства определителей.
4. Практическое вычисление определителей. Теорема Лапласа.
5. Обратная матрица. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы.
6. Системы линейных уравнений. Критерий совместности системы линейных уравнений.
7. Способы решения систем линейных уравнений: метод Гаусса, формулы Крамера, метод обратной матрицы.
8. Векторы. Линейные операции над векторами. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.
9. Векторное произведение векторов.

10. Смешанное произведение векторов.

11. Прямая на плоскости: виды уравнений прямой, угол между прямыми, расстояние от точки до прямой.

12. Плоскость в пространстве: виды уравнений плоскости, взаимное расположение двух плоскостей, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

13. Прямая в пространстве: виды уравнений прямой, взаимное расположение прямых. Угол между прямой и плоскостью.

14. Множества, операции над множествами.

15. Натуральные, целые и рациональные числа. Иррациональность $\sqrt{2}$. Определение действительного числа.

16. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

17. Предел суммы, произведения и частного двух сходящихся последовательностей.

18. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e.

19. Функции. Основные понятия. Способы задания. Композиция функций. Элементарные функции.

20. Предел функции в точке. Сведение предела функции к пределу последовательности. Предел сложной функции.

21. Первый замечательный предел и следствия из него.

22. Второй замечательный предел и следствия из него.

23. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых функций. Таблица эквивалентностей.

24. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва.

25. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

26. Производная и дифференциал функции. Связь между ними.

27. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной. Уравнение нормали.

28. Правила дифференцирования суммы, произведения и частного.

29. Дифференцирование сложной функции.

30. Таблица производных основных элементарных функций.

31. Логарифмическая производная.

32. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

33. Производные высших порядков. Производные n-го порядка функций x^α, a^x, e^x, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$.

34. Формула Лейбница n-й производной произведения двух функций.

35. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.

36. Достаточное условие возрастания или убывания функции. Теорема Ферма.

37. Теорема Ролля.

38. Теорема Лагранжа.

39. Следствия из теоремы Лагранжа: необходимые и достаточные условия постоянства и монотонности функции.

40. Теорема Коши.

41. Первое и второе правила Лопиталя. Раскрытие неопределенностей других видов $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0

42. Достаточные условия экстремума функции.

43. Выпуклость графика функции.

44. Точки перегиба. Необходимое и достаточные условия точек перегиба.

45. Асимптоты графика функции.

46. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опыт показал, что для студентов заочной формы обучения значительную трудность представляет решение задач. Поэтому главное внимание в пособии уделено подробному решению типовых примеров и задач из контрольных работ. Объяснения к решениям направлены на формирование у обучающихся научного стиля изложения, умения выражать свои мысли.

В наше время будущие инженеры, экономисты, строители нуждаются в серьёзной математической подготовке. Этим и определяется место математики в системе высшего образования. Изучение математики способствует усвоению современного стиля научного мышления и является условием его применения в конкретных науках.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бугров, Я. С.* Высшая математика : учеб. для вузов. В 3 т. Т. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовничего. – 6-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-8421-4.

2. *Фихтенгольц, Г. М.* Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1.

3. *Ильин, В. А.* Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Физматлит, 2014. – Ч. 1. – 648 с. – ISBN 978-5-9221-0902-4.

4. *Архипов, Г. И.* Лекции по математическому анализу : учеб. для вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков ; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2004. – 640 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-8334-X.

5. *Валиков, К. В.* Лекции по математическому анализу. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / К. В. Валиков ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс, 2004. – 200 с. – ISBN 5-89368-479-6.

6. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу : пособие для ун-тов, пед. вузов. В 2 ч. Ч. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий ; под ред. В. А. Садовничего. – 4-е изд., испр. – М. : Дрофа, 2001. – 725 с. – (Высшее образование: Современный учебник). – ISBN 5-7107-4294-5.

7. *Кузнецов, Л. А.* Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 3-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2005. – 240 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 5-8114-0574-X.

8. *Дубровин, Н. И.* Задачник по математике. 1 семестр / Н. И. Дубровин, А. Ю. Тухтамирзаев. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2011. – 67 с. – ISBN 978-5-9984-0159-9.

9. *Лунгу, К. Н.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 8-е изд., доп. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 576 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-8112-3681-7.

Учебное издание

КРАШЕНИННИКОВА Ольга Витальевна

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ

Учебно-практическое пособие

Редактор Е. В. Невская
Технический редактор А. В. Родина
Корректоры: О. В. Балашова, Н. В. Пустовойтова
Компьютерная верстка Е. А. Герасиной
Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 27.12.18.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,74. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.