Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. Г. ЧЕРНОВ

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕНЕНИЯ

Учебное пособие

Владимир 2018

УДК 004.032=510.3
ББК 32.81+22.12
Ч-49

Рецензенты:
Доктор физико-математических наук, профессор
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Н. И. Дубровин

Доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки Российской Федерации
зав. кафедрой информатики Санкт-Петербургского государственного
экономического университета
В. В. Трофимов

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Чернов, В. Г.
Ч-49 Нечеткие множества. Основы теории и применения : учеб. пособие / В. Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 156 с.
ISBN 978-5-9984-0869-4

Изложены основы теории нечетких множеств, нечеткой логики, методы выполнения арифметических операций над нечеткими числами. Рассмотрено применение нечетких множеств для решения задач многокритериального альтернативного выбора. Приведены примеры задач из различных прикладных областей, а также для самостоятельного решения. Описаны программные системы для работы с нечеткими множествами.

Предназначено для студентов и магистрантов, обучающихся по направлению 09.03.03 – Прикладная информатика, может быть использовано студентами родственных специальностей.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Табл. 12. Ил. 76. Библиогр.: 31 назв.

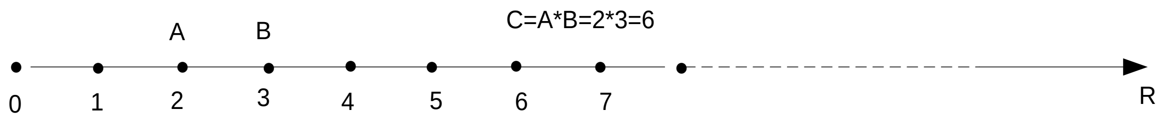
УДК 004.032=510.3
ББК 32.81+22.12

ISBN 978-5-9984-0869-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Со школьной скамьи нас приучали к точности и строгости расчетов, выполняющихся при решении различных задач. Числа, которые использовались в таких расчетах, и их результаты можно представить как точки на числовой оси.



Однако за исключением специалистов, которые профессионально занимаются измерениями, мало кто задумывается о том, действительно ли мы оперируем точечными числами и получаем результат в таком же виде.

Можно привести несколько примеров. Предположим, что измеряется длина некоторого предмета и был получен результат 3 м. Является ли он точечным числом? Очевидно, что нет, так как при использовании более точного измерителя получим 3,1 м, и этот процесс мы можем продолжать далее.

Аналогичный пример из физики приводит А. И. Орлов: «Зададимся вопросом: можно ли указать длину предмета (для определенности в метрах) с точностью до тридцатого знака после запятой? Вещество состоит из атомов, атомы из электронов, протонов и нейтронов. Можно ли указать абсолютно точно положение электрона? В квантовой механике есть замечательное утверждение – принцип неопределенности: произведение неопределенности в определении импульса частицы на неопределенность в определении ее положения всегда больше конкретной величины – постоянной Планка. Импульс электрона в атоме не может достигать сколь угодно высоких значений, таким образом, неопределенность импульса ограничена. Стало быть, неопределенность в положении электрона всегда больше некоторой величины – примерно 10^{-10} метра. Иными словами, неустранимая не-точность подстерегает нас уже в десятом знаке после запятой, так что о тридцатом не может быть и речи. Отсюда недалеко до вывода: длину любого тела следует задавать не одним определенным числом, а совокупностью чисел с размытыми границами».

Можно привести еще один пример из повседневной жизни, который свидетельствует о том, что точечные числовые оценки совершенно не обязательны для решения некоторых задач. Когда на улице мы спрашиваем, где находится интересующий нас объект, то получаем ответ: «Примерно через 20 м». Ориентируясь на эту приблизительную оценку, мы действительно можем найти то, что нас интересует. А что могло бы быть, если мы попросили определить это расстояние хотя бы с точностью до сантиметра? Таким образом, возникает ситуация, в которой оказывается справедливым принцип несовместимости, сформулированный Л. Заде: «По мере возрастания сложности системы наша способность формулировать точные, содержащие смысл утверждения о ее поведении уменьшается вплоть до некоторого порога, за которым точность и смысл становятся взаимоисключающими» [1 – 3]. Именно Л. Заде предложил выход из этой ситуации, создав теорию нечетких множеств.

Л. Заде

Настоящее пособие посвящено основам теории нечетких множеств, поэтому ее отдельные положения приведены в ограниченном объеме только с целью введения необходимых понятий и операций. Более глубокое рассмотрение теории нечетких множеств можно найти, например, в работах [4 – 6], которые составляют очень незначительную часть от громадного количества работ, посвященных этой очень популярной в настоящее время теории.

С целью наиболее понятного объяснения особенностей нечетких множеств изложение основных положений их теории в ряде случаев будет вестись параллельно с классическими множествами.

1. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА И НЕЧЕТКИЕ ЧИСЛА

1.1. Нечеткие множества. Основные положения

Понятие множества – одно из фундаментальных в математике. Ему трудно дать четкое определение, используя элементарные понятия. Поэтому ограничимся описательным объяснением.

Множеством называется совокупность определенных вполне различаемых объектов, рассматриваемых как единое целое. Общим обозначением множества служит пара фигурных скобок { }, внутри которых перечислены элементы множества. Для обозначения конкретного множества используют различные прописные буквы A, B, C, …, например $A = \{a_1, a_2, ...\}$. Если множество конечное, т. е. существует натуральное число n, определяющее число элементов множества, то можно использовать более компактную запись $A = \{a_i : i = \overline{1,n}\}$.

Множество X является подмножеством множества Y, если любой элемент множества X принадлежит и множеству Y, $X \subseteq Y$, что читается как Y содержит X. Символ $\subseteq$ означает включение. Если желают подчеркнуть, что Y содержит и другие элементы, кроме элементов из X, используют символ строгого включения $\subset$, $X \subset Y$.

Важным понятием теории множеств принято считать понятие пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Пустое множество обозначают символом $\varnothing$, $B = \varnothing$.

В конкретных математических областях бывает полезно ввести в рассмотрение столь обширное множество U, что все рассматриваемые множества окажутся его подмножествами. Такое множество U принято называть универсальным, или универсумом. Отметим, что «универсальное множество» – понятие относительное и часто даже явно не определяется, а просто подразумевается.

Определение 1.1. Универсальным множеством, или универсумом, называется множество всех возможных элементов, имеющих смысл в рассматриваемой задаче.

Пусть U универсальное множество, A – подмножество U: $A \subset U$.

Если элемент x множества U есть элемент подмножества A или, как говорят, принадлежит A, то обычно его обозначают с помощью символа $x \in A$.

Для выражения этой принадлежности можно использовать и другое понятие – *характеристическую функцию* $\chi_A(x)$, значения которой указывают, является ли (да или нет) x элементом A (рис. 1.1).

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A, \\ 0, \text{ если } x \notin A. \end{cases}$$

Например, для множества A чисел $2 \le x \le 4$ характеристическая функция имеет вид, представленный на рис. 1.2.

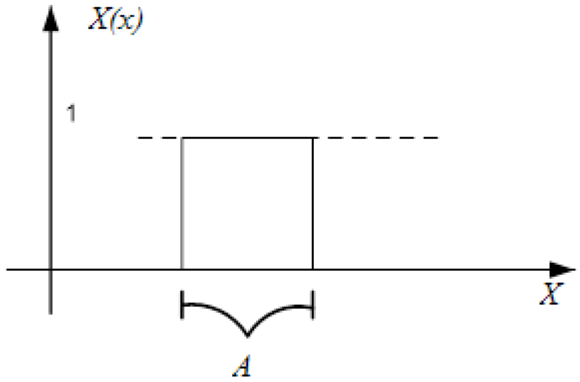


Рис. 1.1. График характеристической функции $\chi_A(x)$

Рис. 1.2. График характеристической функции множества A

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений.

Естественно, что при таком подходе нет места предположению, что x находится приблизительно в пределах от 2 до 4. Для разрешения этой ситуации Л. Заде расширил двузначную оценку 0 или 1 до неограниченной многозначной оценки выше 0 и ниже 1 на [0, 1] и впервые ввел понятие нечеткого множества, заменив характеристическую функцию на функцию принадлежности, которая может принимать любые значения в интервале [0, 1] для $x \in A$. В соответствии с этим элемент x_i множества U может не принадлежать A $(\mu_A = 0)$, может быть элементом A в небольшой степени (μ_A близко к нулю), может более или менее принадлежать A (μ_A не слишком близко к 0, не слишком близко к единице), может быть в значительной степени элементом A (μ_A близко к единице) или, наконец, может быть элементом $A(\mu_A = 1)$. С точки зрения характеристической функции нечеткие множества есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0, 1]. Множество значений x, на котором определена функция принадлежности, получило название нечеткого множества.

Пусть U – универсальное множество, тогда нечетким множеством $\tilde{A}$ на множестве U называется совокупность пар вида $\tilde{A}=\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)/x\right\}$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности.

Чаще всего определение нечеткого множества объясняют следующим образом: величина $\mu_{\tilde{A}}(x)$ обозначает субъективную оценку степени принадлежности x множеству $\tilde{A}$, например, $\mu_{\tilde{A}}(x)$ = 0,8 означает, что x на 80 % принадлежит $\tilde{A}$.

Теперь предположение, что x приблизительно лежит в пределах от 2 до 4, может быть представлено соответствующей функцией принадлежности (рис. 1.3).

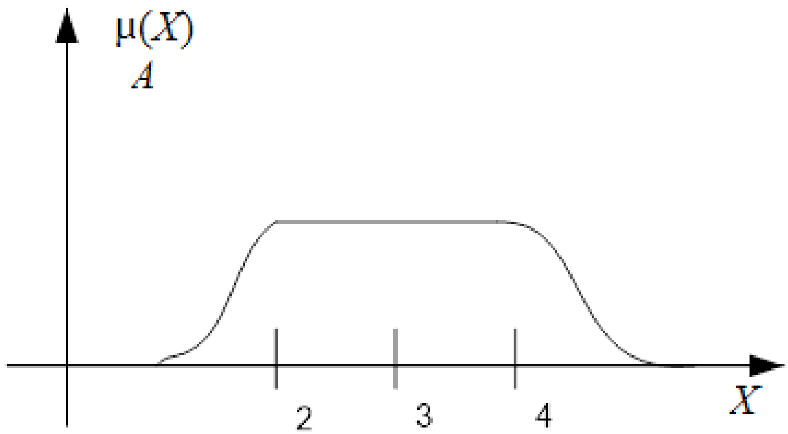


Рис. 1.3. График функции принадлежности

Правила и методы построения функций принадлежности с учетом особенностей решаемых задач подробно описаны в целом ряде работ [5 – 10]. В настоящем пособии эти вопросы будут рассматриваться по мере необходимости.

1.2. Методы построения функций принадлежности

Понятие «функция принадлежности» – одно из базовых в теории нечетких множеств, поэтому вопрос о возможных методах ее построения имеет важное значение. Здесь необходимо отметить два обстоятельства. Функция принадлежности нечеткого множества определяется вне самой теории нечетких множеств, т. е. проверить корректность построения функции принадлежности невозможно методами самой теории. Насколько удачно выбран тип функции принадлежности, можно видеть в конце решения задачи. С одной стороны, указанное обстоятельство критиками теории нечетких множеств рассматривается как существенный недостаток, с другой – функция принадлежности – это способ формализации нечетких субъективных утверждений или оценок, и доказать справедливость или несправедливость этих оценок можно лишь в процессе или по окончании решения задачи. Второе обстоятельство состоит в том, что введенное в начале рассмотрения определение нечеткого множества не накладывает ограничений на выбор вида функции принадлежности. Вместе с тем удобно использовать такие варианты функций принадлежности, которые допускают аналитическое представление, что позволяет более эффективно расходовать вычислительные ресурсы. Кроме того, определенные типы функций принадлежности являются стандартными в ряде соответствующих программных средств.

Функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – это некоторая невероятностная субъективная мера нечеткости, определяемая в результате опроса экспертов о степени соответствия элемента x понятию, формализуемому нечетким множеством $\tilde{A}$. В отличие от вероятностной меры, которая считается оценкой стохастической неопределенности, имеющей дело с неоднозначностью наступления некоторого события в различные моменты времени, нечеткая мера выступает численной оценкой лингвистической неопределенности, связанной с неоднозначностью и расплывчатостью категорий человеческого мышления. При построении функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ с каждым нечетким множеством $\tilde{A}$ ассоциируется некоторое свойство, признак или атрибут R, который характеризует некоторую совокупность объектов X. Чем в большей степени конкретный объект $x \in X$ обладает этим свойством R, тем более близко к единице соответствующее значение μ $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Если элемент $x \in X$ определенно обладает этим свойством R, то $\mu_{\tilde{A}}(x)=1$, если же $x \in X$ определенно не обладает этим свойством R, то $\mu_{\tilde{A}}(x)=0$.

Примечание. Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о нечетких множествах, то вместо обозначения $\tilde{A}$ будем использовать просто A.

1.2.1. Правила построения функций принадлежности

Несмотря на то что функции принадлежности строятся на основе экспертных заключений, для исключения произвола были сформулированы некоторые правила, которых необходимо придерживаться.

Прежде чем переходить непосредственно к построению функций принадлежности, следует задать универсальное множество, к которому принадлежит соответствующее нечеткое множество. Выбор универсального множества определяется характером решаемой задачи и типом нечеткой переменной. В некоторых случаях бывает удобно использовать в качестве универсального множества отрезки [0, 1] или [–1, 1]. В большинстве задач универсальное множество определяется на некоторой числовой оси. При расположении нечетких множеств на универсальном придерживаются принципа естественной упорядоченности, когда нечеткие множества, соответствующие лингвистическим значениям «малое», «низкое», «плохое» и т. п., располагаются в левой части области определения универсального множества, соответствующие значениям «большое», «высокое», «хорошее» и т. п. – в правой части.

Для обеспечения общности дальнейшего изложения будем использовать числовую нумерацию термов α_1, …, α_k. Тогда терм, который имеет носитель, расположенный левее, получает меньший номер. В работе [8] даны строгие в математическом отношении формулировки правил, которые следует учитывать при построении функций принадлежности. В данном изложении ограничимся словесными формулировками. Запрещается для крайних термов использовать функции принадлежности (в данном случае α_1 и α_5) в виде колоколообразных кривых, что обусловлено расположением этих термов в упорядоченном множестве. Соответствующие функции принадлежности могут иметь *S*-образный или *Z*-образный (сигмоидальный) вид (рис. 1.4).

Запрещается существование в базовом множестве *T* пар термов типов α_1, α_2 и α_2, α_3, поскольку в первом случае отсутствует естественная разграниченность понятий, аппроксимируемых термами, а во втором участку $[a, b]$ из области определения не соответствует никакое понятие. Поскольку каждое понятие имеет хотя бы один типичный объект, обозначаемый этим понятием, введено условие, запрещающее наличие в множестве термов типа α_4. Для обеспечения условия разграниченности понятий рекомендуется, чтобы для двух соседних понятий α_i, α_{i+1} максимум функции принадлежности совпадал с минимумом функции принадлежности, а их пересечение находилось бы на уровне 0,5. Надо отметить, что для некоторых вариантов функций принадлежности последние условия точно не выполняются.

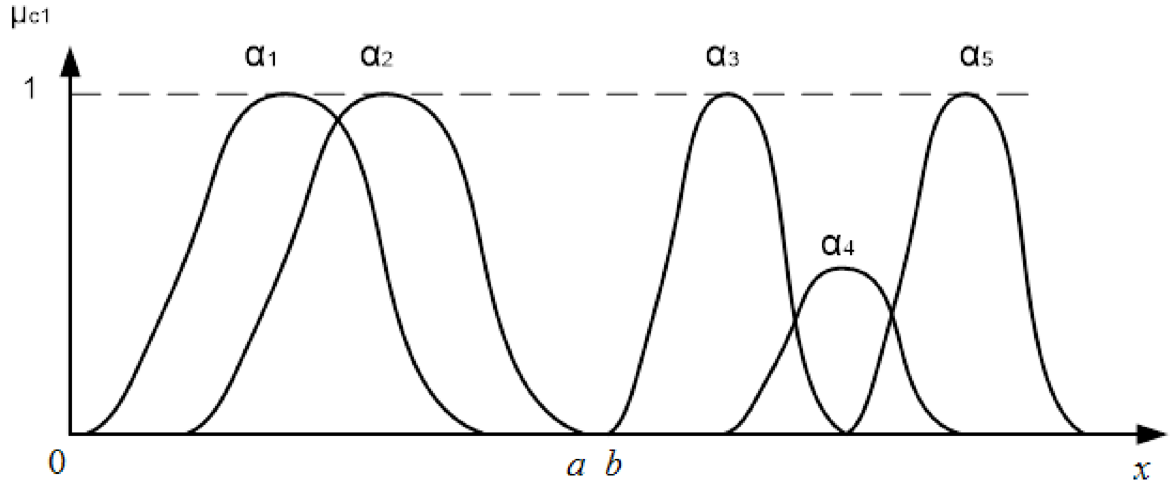


Рис. 1.4. Запрещенные термы

Типизация функций принадлежности в контексте решаемой задачи существенно упрощает соответствующие аналитические и численные расчеты при применении методов теории нечетких множеств.

Выделяют кусочно-линейные, типовые функции принадлежности [5, 10], к которым относятся треугольные и трапецеидальные функции принадлежности, использующиеся для задания неопределенностей типа «приблизительно равно», «среднее значение», «расположен в интервале», «подобен объекту», «похож на предмет» и т. п. (рис. 1.5).

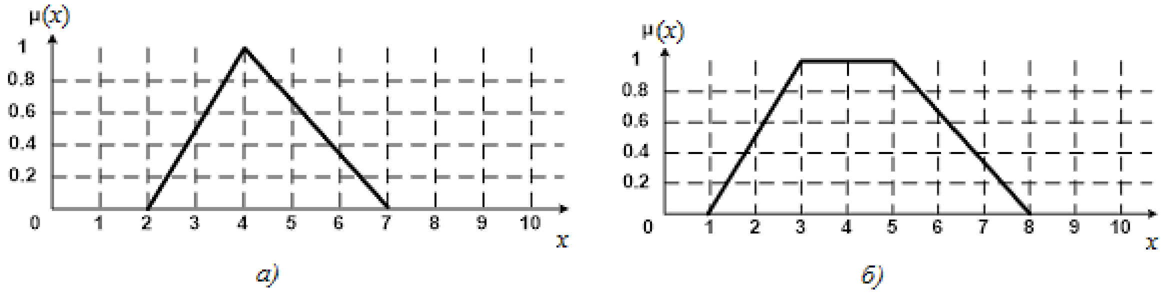


Рис. 1.5. Графики треугольной (а), трапецеидальной (б) функций принадлежности

Аналитический вид этих функций:

треугольная функция принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b}, a\le x\le c\\ 0, c\le x\end{cases},$$

трапецеидальная функция принадлежности

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, d\le x\le c\\ 0, d\le x\end{cases},$$

где a, b, c, d – некоторые числовые параметры $a \le b \le c \le d$.

Достоинства кусочно-линейных функций принадлежности [8]:

1. Для их задания требуется малый объем данных.

2. Простота модификации параметров (модальных значений) функции принадлежности на основе измеряемых значений входных и выходных величин системы.

3. Возможность получения в рамках модели отображения «вход→выход» в виде гиперповерхности, состоящей из линейных участков.

4. Легко обеспечивается выполнение условия пересечения функций принадлежности, соответствующих соседним лингвистическим значениям в точке 0,5.

Недостатки кусочно-линейных функций принадлежности

1. Кусочно-линейные функции принадлежности не являются непрерывно дифференцируемыми. Соответственно модель системы, содержащая подобные функции, также не является непрерывно дифференцируемой. В некоторых работах высказывается мнение о том, что отсутствие непрерывной дифференцируемости функций принадлежности усложняет процесс адаптации (обучения) нечетких моделей [11].

Вместе с тем результаты исследований позволяют утверждать, что модели с функциями принадлежности рассмотренного вида все же обладают хорошими адаптивными свойствами [12].

Z-образные функции принадлежности используются для задания неопределенностей типа «малое количество», «небольшое значение», «незначительная величина», «низкий уровень» и т. п.

На рис. 1.6 приведен вид *Z*-образной функции принадлежности, имеющей следующее аналитическое представление:

$$f_{Z1}(x,\ a,b)=\begin{cases} 1, & x<a \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right), & a\le x\le b \\ 0, & x>b \end{cases}.$$

S-образные функции принадлежности используются для задания неопределенностей типа «большое количество», «большое значение», «значительная величина», «высокий уровень» и т. п. (рис. 1.7).

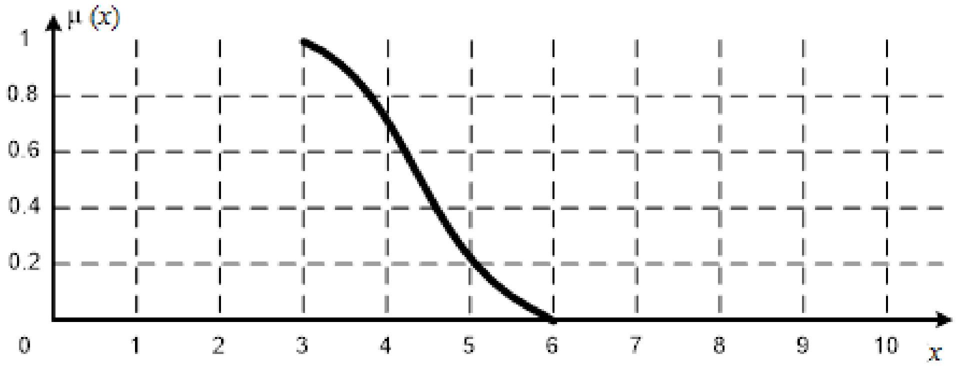


Рис. 1.6. График Z-образной функции

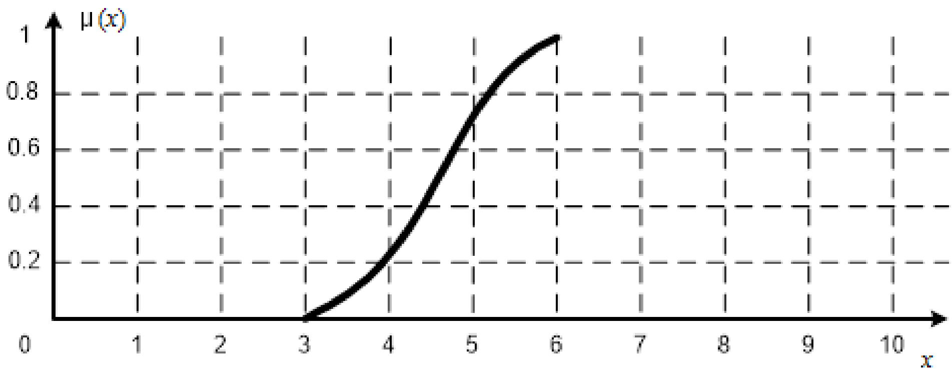


Рис. 1.7. S-образная функция принадлежности

В качестве *Z*-образной или *S*-образной функции принадлежности могут использоваться и соответствующие фрагменты треугольных и трапецеидальных функций. В некоторых работах по теории нечетких множеств *Z*- и *S*-образные функции принадлежности называют сигмоидальными [9].

К типу П-образных функций принадлежности можно отнести целый класс кривых, которые по своей форме напоминают колокол, сглаженную трапецию или букву П. В общем случае П-образные функции принадлежности могут быть получены как композиция *Z*- и *S*-образных функций принадлежности

$$\mu_{\Pi}(x, a, b, c, d) = \mu_S(x, a, b) * \mu_Z(x, c, d),$$

где *a, b, c, d* – некоторые числовые параметры, принимающие произвольные действительные значения и упорядоченные отношением $a < b < c < d$, а знак * обозначает обычное арифметическое произведение значений соответствующих функций. Один из вариантов П-образной функции принадлежности представлен на рис. 1.8. Очевидно, что ее вид будет зависеть от значений параметров *a, b, c, d*.

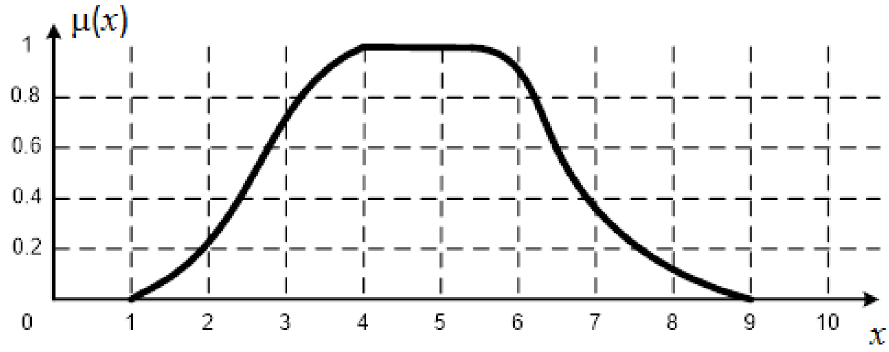


Рис. 1.8. Колоколообразная функция

Колоколообразная (*bell-shaped*) функция в общем случае задается аналитически следующим выражением:

$$f_{\Pi_4}(x,\ a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\dfrac{x - c}{a}\right|^{2b}},$$

К П-образному типу относится и хорошо известная в теории вероятностей функция плотности нормального распределения (гауссова функция) $f_{\Pi_5}(x,\ \sigma, c) = e^{\dfrac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$ при условии $\sqrt{2\pi}\sigma = 1$.

П-образные функции используются для задания неопределенностей типа «приблизительно в пределах от и до», «примерно равно», «около» и т. п.

Достоинства П-образных функций принадлежности:

1. Использование П-образных функций обеспечивает получение гладких, непрерывно дифференцируемых гиперповерхностей отклика нечеткой модели.

2. Являясь непрерывно и бесконечно дифференцируемыми (бесконечная дифференцируемость означает наличие производной любого порядка), П-образные функции дают возможность проведения теоретического анализа нечетких систем [13].

Недостатки П-образных функций принадлежности:

1. Использование П-образных функций принадлежности предполагает задание бо́льшего, чем для кусочно-линейных функций, числа параметров, что усложняет настройку нечеткой модели.

2. Некоторые из П-образных функций, в частности гауссова функция, имеют неограниченный носитель, означая, что любой элемент x области определения X будет принадлежать любому нечеткому множеству, задаваемому с помощью этой функции, и это может не соответствовать представлениям эксперта о моделируемой системе. Вместе с тем степени принадлежности элементов x, находящихся далеко от центра, например гауссовой функции, пренебрежимо малы, вследствие чего на практике можно считать, что имеется ограниченный носитель.

Существует множество других функций принадлежности нечетких множеств, заданных как композиции вышеупомянутых базовых функций (двойная гауссова, двойная сигмоидальная и т. п.) либо как комбинации по участкам возрастания и убывания (сигмоидально-гауссова, сплайн-треугольная и т. п.).

К настоящему времени накоплен достаточно широкий набор различных вариантов функций принадлежности для самых разнообразных нечетких утверждений [5 – 8] (табл. 1.1). Безусловно, выбор функции принадлежности и ее параметров определяется в бо́льшей степени опытом, интуицией и другими субъективными факторами лица, принимающего решения (ЛПР).

Таблица 1.1. Функции принадлежности для различных утверждений

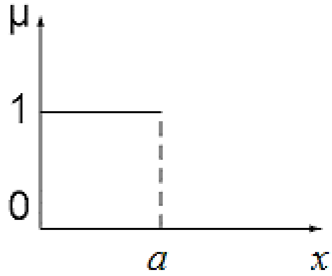
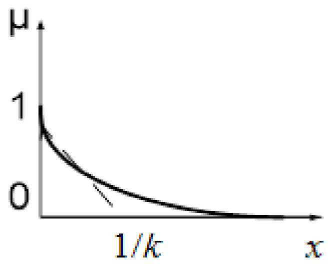
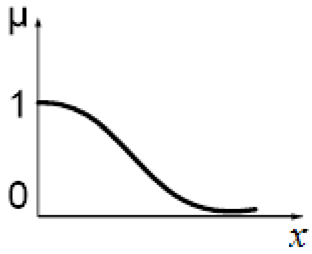
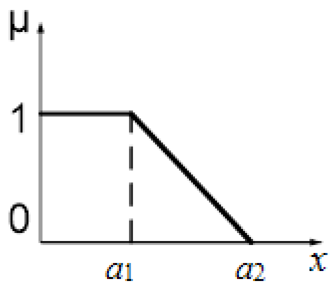
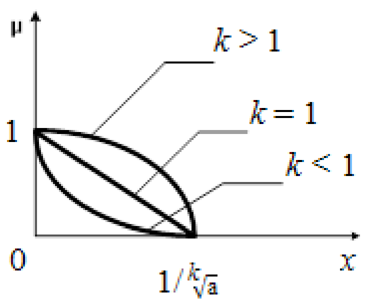
График	**Формула**
Функции степеней принадлежности утверждения «величина *x* малая»	
	$\mu(x) = \begin{cases} 1,\ 0 \le x \le a, \\ 0,\ x > a \end{cases}$
	$\mu(x) = e^{-kx},\ k > 0$
	$\mu(x) = e^{-kx^2},\ k > 0$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1,\ \ 0 \le x \le a_1, \\ \dfrac{a_2 - x}{a_2 - a_1},\ \ a_1 \le x \le a_2, \\ 0,\ \ a_2 < x \end{cases}$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1 - ax^k,\ a \le 1/\sqrt[k]{a}, \\ 0,\ 1/\sqrt[k]{a} \end{cases}$

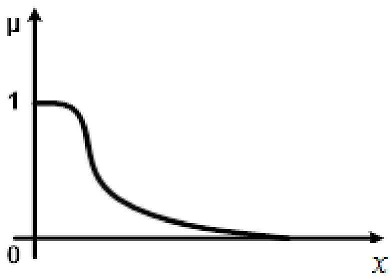
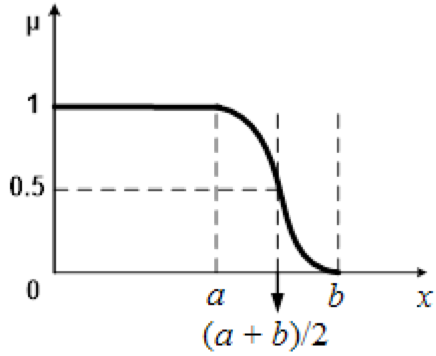
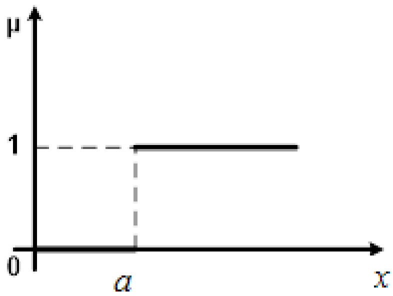
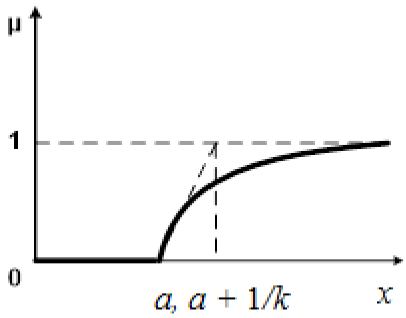
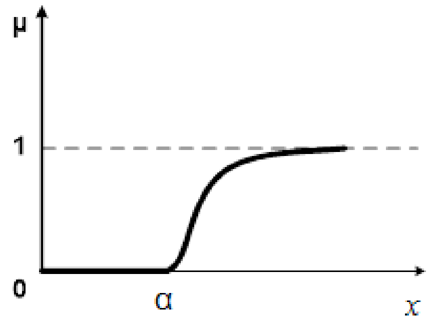
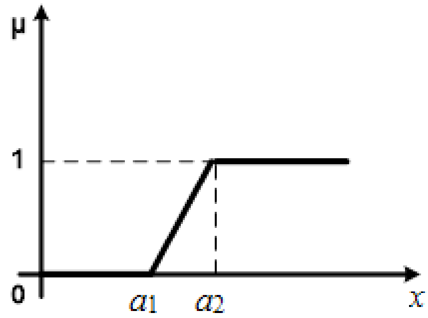
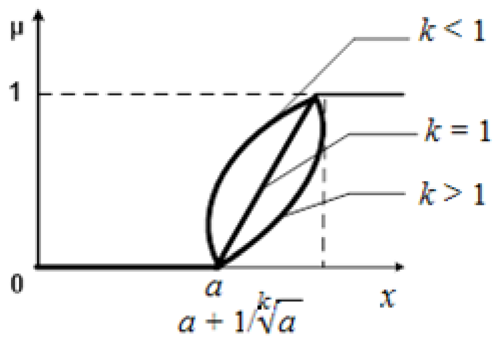
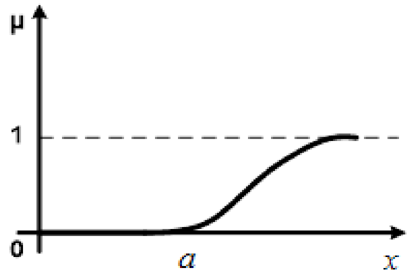
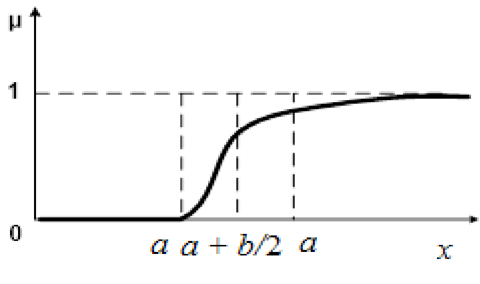
График	**Формула**
	$\mu(x) = 1/(1 + kx^2),\ k > 1$
	$\mu(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a, \\ 0{,}5 - 0{,}5\sin\{\pi[x - (a+b)/2]/(b-a)\}, \\ a \le x \le b, \\ 0, & b \le x \end{cases}$
Функции степеней принадлежности утверждения «величина *x* большая»	
	$\mu(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ 0 \le x \le a, \\ 1,\ x > a \end{array}\right.$
	$\mu(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ 0 \le x \le a, \\ 1 - e^{-k(x-a)},\ a \le x,\ k > 0 \end{array}\right.$

График	Формула
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a,\\ z-e^{-k(x-a)^2},\ a\le x,\ k>0\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ \ 0\le x\le a_1,\\ (x-a_1)/(a_2-a_1),\ a_1\le x\le a_2,\\ 1,\ a_2<x\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a_1,\\ a(x-a)^k,\ a\le x\le a+1/\sqrt[k]{a},\\ 1,\ a+1/\sqrt[k]{a}\le x\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ \ 0\le x\le a,\\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)},\ a\le x\le\infty\end{cases}$
	$\mu(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x\le a,\\ 0{,}5+0{,}5\cdot\sin\{\pi[x-(a+b)/2]/(b-a)\},a\le x\le b,\\ 1,\ a\le x\end{cases}$

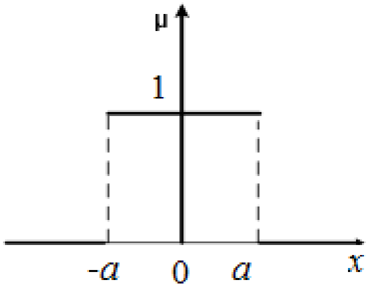
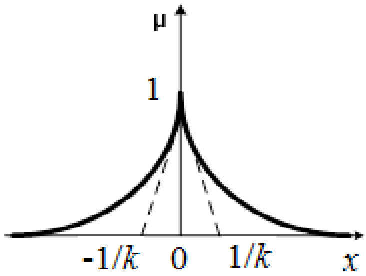
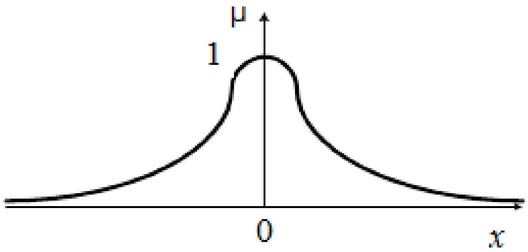
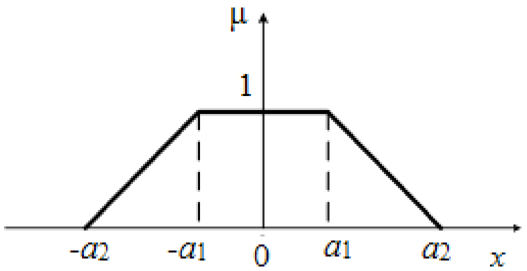
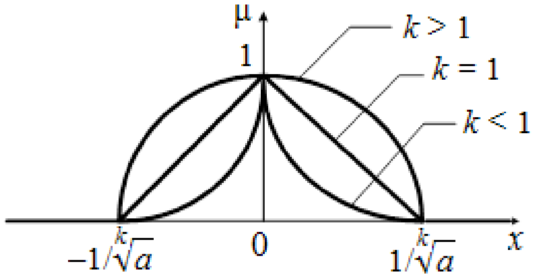
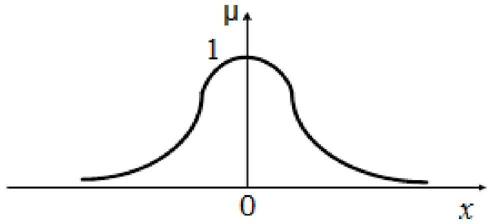
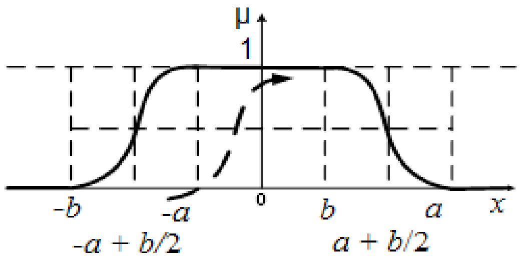
<table>
<tr><th>График</th><th>Формула</th></tr>
<tr><td colspan="2">Функции степеней принадлежности утверждения «величина |x| малая»</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\mu(x)=\left[\begin{array}{l}0,\ -\infty<x<-a,\\ 1,\ \ -a\le x\le a,\\ 0,\ \ a<x<\infty\end{array}\right.$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\mu(x)=\left[\begin{array}{l}e^{kx},\ -\infty<x\le 0,\\ e^{-kx},\ 0\le x<\infty,\ k>1\end{array}\right.$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\mu(x)=e^{-kx^2}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\mu(x)=\left[\begin{array}{l}0,\ -\infty\le x\le -a_2,\\ (a_2+x)/(a_2-a_1),\ -a_2\le x\le -a_1,\\ 1,\ -a_1\le x\le a_1,\\ (a_2-x)/(a_2-a_1),\ a_1\le x\le a_2,\\ 0,\ a_2\le x<\infty\end{array}\right.$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$\mu(x)=\left[\begin{array}{l}0,-\infty<x\le 1/\sqrt[k]{a},\\ 1-a(-x)^k,\ -1/\sqrt[k]{a};\le x\le 0,\\ 1-a(x)^k,\ 0\le x\le 1/\sqrt[k]{a},\\ 0,\ 1/\sqrt[k]{a},\le x\le\infty\end{array}\right.$$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

График	**Формула**
	$\mu(x) = 1/(a + kx^2),\ k > 1$
	$\mu(x) = \begin{cases} 0,\ -\infty < x \le -b, \\ 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sin\{\pi[x + (a+b)/2]/(b-a)\}, -b \le x \le -a, \\ 1,\ -a \le x \le a, \\ 0{,}5 + 0{,}5 \cdot \sin\{\pi[x + (a+b)/2]/(b-a)\},\ a \le x \le b, \\ 0,\ b \le x < \infty \end{cases}$

1.2.2. Методы построения функций принадлежности

Все методы построения функций принадлежности можно разделить на две группы: прямые и косвенные (рис. 1.9).

Рис. 1.9. Методы построения функций принадлежности

Прямые методы характеризуются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функции принадлежности $\mu_A(x)$, характеризующей элемент x.

Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве элементов X следующим образом [5, 6]:

1. Для любых $x_1, x_2 \in X$ $\mu_A(x_1) < \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_2 предпочтительнее x_1, т. е. в большей степени характеризуется свойством A.

2. Для любых $x_1, x_2 \in X$ $\mu_A(x_1) = \mu_A(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 безразличны относительно свойства A.

Как правило, прямые методы задания функции принадлежности используются для измеримых понятий, таких как скорость, время, расстояние, давление, температура и т. д., или когда выделяются полярные значения.

Разновидностями прямых методов можно назвать прямые групповые методы, когда, например, группе экспертов предъявляют конкретный объект, и каждый должен дать один из двух ответов: принадлежит или нет этот объект к заданному множеству. Тогда число утвердительных ответов, деленное на общее число экспертов, дает значение функции принадлежности объекта к данному нечеткому множеству. Прямыми методами являются также непосредственное задание функции принадлежности таблицей, графиком или формулой. Например, выбор некоторого варианта функции принадлежности из таблицы с последующим расчетом ее параметров относится к прямым методам.

Из анализа результатов исследований и решения практических задач, связанных с необходимостью обрабатывать информацию, известно, что прямые методы в основном используются в качестве вспомогательных, так как характеризуются большой долей субъективизма.

Косвенные методы построения значений функции принадлежности используются в случаях, когда нет элементарных измеримых свойств, через которые определяются нечеткие множества.

В косвенных методах значения функции принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить ранее сформулированные условия. Экспертная информация служит только исходной для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру ее обработки. К таким методам относятся статистический, метод парных сравнений, экспертных оценок и ряд других. Далее рассмотрен наиболее часто используемый *метод парных сравнений*.

Метод построения функции принадлежности на основе парных сравнений получил весьма широкое распространение в силу достаточно простой реализации. Этот метод основан на обработке матриц оценок, отражающих мнение эксперта об относительной принадлежности элементов множеству или степени выраженности у них свойства, формализуемого множеством [14]. Степень принадлежности элементов множеству определяется посредством парных сравнений. Для сравнения элементов используется так называемая шкала Саати (табл. 1.2).

Таблица 1.2. Шкала для построения матриц парных сравнений

Оценка важности	Качественная оценка	Примечание
1	Одинаковая значимость	По данному критерию альтернативы имеют одинаковый ранг
3	Слабое превосходство	Соображения о предпочтении одной альтернативы перед другой малоубедительной
5	Сильное (или существенное) превосходство	Имеются надежные доказательства существенного превосходства одной альтернативы
7	Очевидное превосходство	Существуют убедительные свидетельства в пользу одной альтернативы
9	Абсолютное превосходство	Свидетельство в пользу предпочтения одной альтернативы перед другой в высшей степени убедительно
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними оценками	Используются, когда необходим компромисс

Известно несколько методов построения функции принадлежности на основе матриц парных сравнений. Пусть $M = \left\| m_{ij} \right\| i, j = \overline{1, N}$ – матрица парных сравнений, построенная в соответствии со шкалой Саати. Число m_{ij} показывает, во сколько раз, по мнению эксперта,

$\mu_x(x_i)$ больше $\mu_x(x_j)$. Для определения $\mu_x(x_i)$ необходимо зафиксировать произвольно выбранный столбец j матрицы M и вычислить отношения $\mu_x(x_i) = \dfrac{m_{ij}}{\sum\limits_i m_{ij}}$.

Пример 1.1. Пусть для описания расстояния между двумя точками применяется лингвистическая переменная «расстояние» с множеством базовых значений T = {малое, среднее, большое}.

Пусть базовое множество $B = \{1, 2, 3, 6, 8\}$. Требуется определить значения функции принадлежности для терма «малое». Опросом экспертов получена следующая матрица парных сравнений

$$M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 3 & 6 & 8 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Выбираем первый столбец матрицы, тогда значения функции принадлежности рассчитываются по следующим соотношениям:

$$\mu_x(1) = \frac{m_{11}}{\sum\limits_i m_{i1}} = \frac{1}{1+1/5+1/6+1/7} = 0,64,$$

$$\mu_x(6) = 0,11,$$

$$\mu_x(3) = 0,16,\ \ \mu_x(8) = 0,08,$$

$$\mu_x(x) = \{0,64/1,\ 0,16/3,\ 0,11/6,\ 0,08/8\}.$$

Недостаток описанного метода заключается в неоднозначности получения значений функции принадлежности, так как они зависят от выбора столбца, на основе которого выполняется расчет.

Задание 1.1

Проведите расчет значений функций принадлежности, используя данные примера, выбрав для расчета другие столбцы матрицы парных сравнений. Сравните полученные результаты.

Задание 1.2

Задано базовое множество $B = \{3, 6, 8, 10, 13\}$. Используя описанный выше метод, построить несколько вариантов функции принадлежности для терма «большое». Сравнить полученные результаты.

Однозначное определение значения функции принадлежности получается, если их вычислять как координаты собственного вектора матрицы парного сравнения на основе следующих соотношений:

$$M\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega} \text{ или } (M - \lambda E)\vec{\omega} = 0,$$

$$\det(M - \lambda E) = 0,$$

$$\|M - \lambda_{\max} E\|\vec{\omega} = 0,$$

где $\lambda_{\max}$ – собственное число матрицы парных сравнений, вычисленное по данному соотношению.

Координаты собственного вектора $\vec{\omega}$ находят путем решения приведенной выше системы линейных уравнений при замене одного произвольно выбранного уравнения, условие нормировки $\sum\limits_i \vec{\omega_i} = 1$. Подробные примеры расчетов по этому методу приведены в [6, 7]. Основным недостатком метода можно считать большой объем вычислений.

Возможны упрощенные методы расчета координат собственного вектора матрицы парных сравнений. Так, ненормированная оценка координаты собственного вектора может быть рассчитана по формуле $\hat{w}_i = \sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}}$, $i = \overline{1,n}$, нормированная $\overline{w}_i = \hat{w}_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{w}_i$.

Оценка собственного числа с достаточной степенью точности может быть вычислена по следующей схеме. Сначала суммируется каждый столбец матрицы парных сравнений, затем сумма первого столбца умножается на величину первой компоненты нормализованного собственного вектора, сумма второго столбца – на вторую компоненту и т. д. Затем полученные числа суммируются.

Существенным достоинством метода парных сравнений считается возможность контролирования качества построения матрицы парных сравнений, так как согласно теории матриц $\lambda_{\max} \to n$, где n – число столбцов (строк) матрицы. В упрощенном варианте, если $|\lambda_{\max} - n| \le 0{,}1$, то матрица построена корректно.

Задание 1.3

Базовое множество представляет собой расстояние между некоторыми объектами $B = \{9, 15, 21, 28\}$ единиц длины. Для построения функции принадлежности терма «небольшое» были привлечены два эксперта, которые построили матрицы парных сравнений

$$M = \begin{array}{c|cccc|} & 9 & 15 & 21 & 28 \\ 9 & 1 & 5 & 6 & 7 \\ 15 & 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 21 & 1/6 & 1/4 & 1 & 4 \\ 28 & 1/7 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{array},$$

$$M = \begin{array}{c|cccc|} & 9 & 15 & 21 & 28 \\ 9 & 1 & 4 & 6 & 7 \\ 15 & 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 21 & 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 28 & 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{array}.$$

Требуется рассчитать по упрощенной схеме значения функций принадлежности, оценить качество экспертных оценок.

1.2.3. Рекомендации по выбору вида функции принадлежности

Выбор функции принадлежности в значительной мере определяется объемом имеющейся информации о моделируемой системе, а также качеством имеющихся в распоряжении исследователя методов настройки модели.

Малый объем информации о системе. При малом объеме имеющейся информации о системе следует использовать простейшие кусочно-линейные функции принадлежности, состоящие из прямолинейных участков, для нахождения параметров которых требуется значительно меньшее по сравнению с остальными функциями принадлежности количество информации.

Большой объем информации о системе. Наличие большого объема информации о системе в форме измеренных входных и выходных данных дает возможность идентификации большего числа параметров нечеткой модели, что позволяет использовать более сложные функции принадлежности, такие как П-образные, и тем самым приводит к моделям наиболее точным, чем в случае простых функций, состоящих из прямолинейных участков. Вместе с тем для идентификации большого числа параметров нечеткой модели требуются высокоэффективные методы ее адаптации (настройки), которые не всегда имеются в распоряжении исследователя. Опыт ряда исследователей позволяет говорить о преимуществе в данной ситуации более простых, состоящих из прямолинейных участков функций принадлежности, упрощающих процесс настройки (обучения) нечеткой модели, обеспечивая при этом ее высокую точность [9, 13].

Некоторые исследователи рекомендуют на начальном этапе построения модели использовать простейшие функции принадлежности, а на последующих этапах проводить тестирование модели с применением более сложных функций для того, чтобы проверить, не приводят ли эти функции к повышению точности модели [15]. Также отметим, что существующее мнение [15, 16] о том, что вид и форма функции принадлежности не оказывают существенного влияния на точность и качество нечеткой модели, является неверным – об этом также свидетельствуют результаты исследований, приведенные, в частности, в [13, 17].

1.3. Основные операции над нечеткими множествами

Для нечетких множеств определено достаточно много различных операций [4 – 10], часть из которых справедлива и для классических множеств. Следует отметить, что при выполнении различных операций над нечеткими множествами необходимые преобразования выполняются над соответствующими функциями принадлежности. Для описания этих операций необходимо дать еще несколько определений.

Определение 1.2. **Высотой** нечеткого множества A называется верхняя граница его функции принадлежности $H_A = \sup\limits_{x \in U}(\mu_A(x))$.

Если высота нечеткого множества равна единице, то говорим, что оно **нормально.** Нечеткое множество A можно **нормализовать** (т. е. сделать нормальным) следующим образом: $\mu'_A = \dfrac{\mu_A(x)}{H_A}$.

Множество A с функцией принадлежности μ'_A будет нормальным. Далее будем говорить о множествах высоты $H_A = 1$.

Определение 1.3. **Носителем** нечеткого множества называется четкое подмножество универсального множества, элементы которого имеют ненулевые степени принадлежности: $\mathrm{supp}(A) = \{x : \mu_A(x) > 0\}$. Нечеткое множество называется **пустым,** если его носитель является пустым множеством.

Определение 1.4. **Ядром** нечеткого множества называется четкое подмножество универсального множества, элементы которого имеют степени принадлежности, равные единице $\mathrm{core}(A) = \{x : \mu_A(x) = 1\}$.

Определение 1.5. **α-сечением** (или множеством **α-уровня)** нечеткого множества называется четкое подмножество множества U, элементы которого имеют степени принадлежности, бо́льшие или равные $a : A_a = \{x : \mu_A(x) > a\}$, $\alpha \in [0, 1]$. Значение α называют **α-уровнем.** Носитель (ядро) можно рассматривать как сечение нечеткого множества на нулевом α-уровне (рис. 1.10).

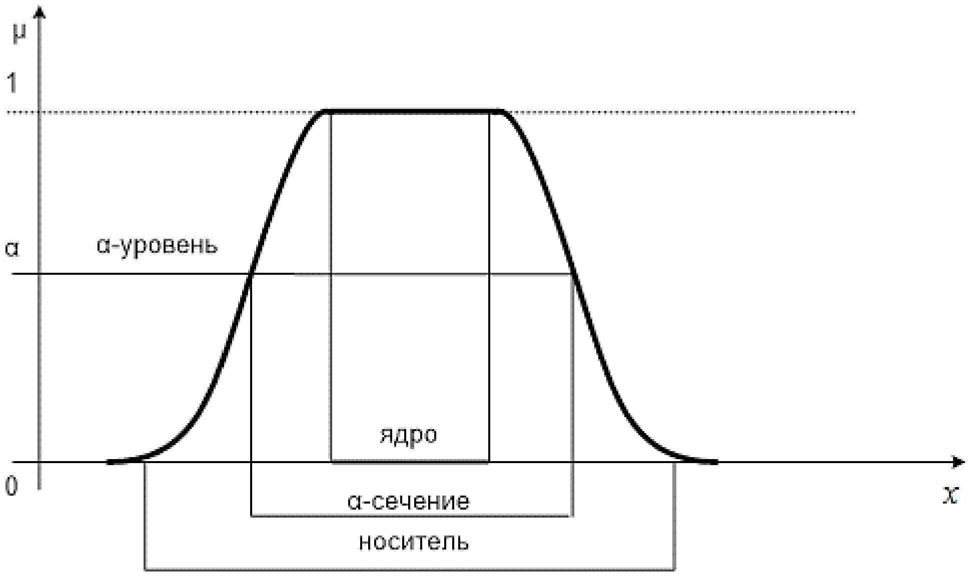


Рис. 1.10. Носитель, ядро, α*-сечение,* α*-уровень*

Операции над нечеткими множествами. Прежде чем рассматривать операции над нечеткими множествами, необходимо сделать ряд замечаний, которые будут способствовать как пониманию сути этих операций, так и корректному их применению.

В первую очередь необходимо иметь в виду, что нечеткие множества – это обобщение классических множеств. Поскольку можно допустить самые различные варианты подобного обобщения, то отсюда следует принципиальная возможность неоднозначности различных определений, имеющих аналогии в классической теории множеств и представляющих практический интерес. Применительно к операциям над нечеткими множествами это означает, что любое определение той или иной операции должно быть справедливо в том частном случае, когда вместо нечетких множеств используются классические множества. Иначе говоря, эти определения должны превращаться в известные определения теоретико-множественных операций, если используемые в них функции принадлежности заменить на характеристические.

Во-вторых, следует иметь в виду, что сравнение нечетких множеств и выполнение над ними различных операций будет возможно, когда соответствующие нечеткие множества определены на одном и том же универсуме.

В-третьих, говоря о соответствии нечетких множеств и функций принадлежности, следует понимать это соответствие в форме математического изоморфизма, так как одна и та же функция принадлежности может описывать различные качественные понятия. При этом, хотя одно и то же нечеткое множество, точнее, то или иное свойство в форме нечеткого множества может быть представлено различными функциями, отражающими субъективные предпочтения, с формальной точки зрения мы должны будем говорить о различных нечетких множествах.

Пусть A и B – нечеткие множества с функциями принадлежности μ_A и μ_B соответственно, принадлежащие одному и тому же универсальному множеству U.

Определение 1.6. Будем говорить, что A **содержится** в B, если $\forall x \in U : \mu_A(x) \le \mu_B(x),$ и обозначает $A \subset B$.

Определение 1.7. Будем говорить, что A и B **равны** тогда и только тогда, когда $\forall x \in U : \mu_A(x) = \mu_B(x),$ и обозначают $A = B$.

Определение 1.8. В теории нечетких множеств в отличие от классических возможно несколько определений операции дополнения, обозначаемых $\bar{A}$ или $\neg A$ [18] (рис. 1.11):

– классическое дополнение $\forall x \in U : \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x);$

– дополнение по Ягеру $\mu_{\bar{A}}(x) = \sqrt[w]{1 - \mu_A(x)^w},\ -1 < w < \infty,$ при $w = 2$ имеем квадратичное дополнение;

– дополнение по Сугено $\mu_{\bar{A}}(x) = \dfrac{1 - \mu_A(x)}{1 + w\mu_A(x)}.$

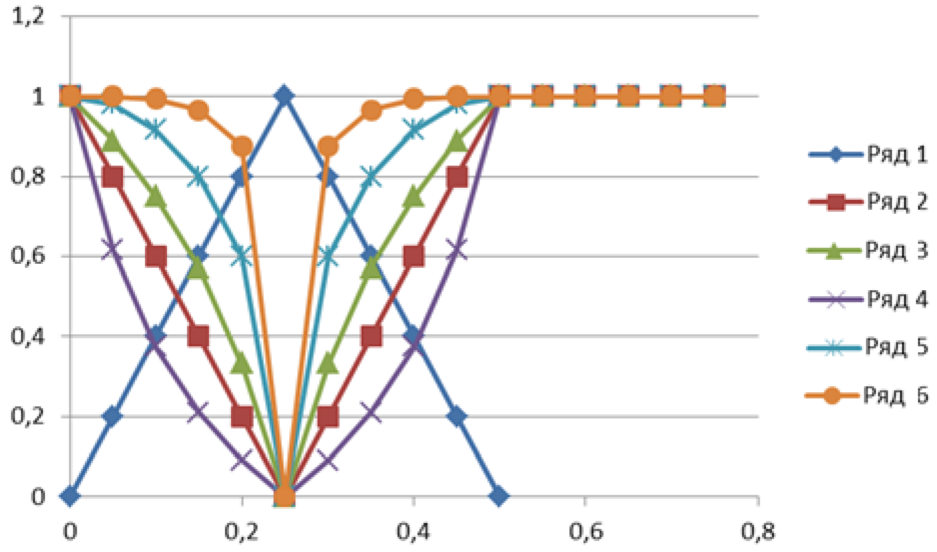


Рис. 1.11. Нечеткое множество и его дополнение: ряды 1 – исходная функция принадлежности; 2 – классическое дополнение; 3 – дополнение по Сугено w = –0,5; 4 – дополнение по Сугено w = 1,5; 5 – дополнение Ягера w = 2; 6 – дополнение Ягера w = 4

Очевидно, что при переходе от функции принадлежности к характеристической функции все варианты сходятся к одному результату – классического определения дополнения.

Определение 1.9. В работе [2] Л. Заде предложил вычислять значение функции принадлежности пересечения нечетких множеств $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ с использованием операции min (рис. 1.12).

$\forall x \in U : \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ (рис. 1.12, *а*).

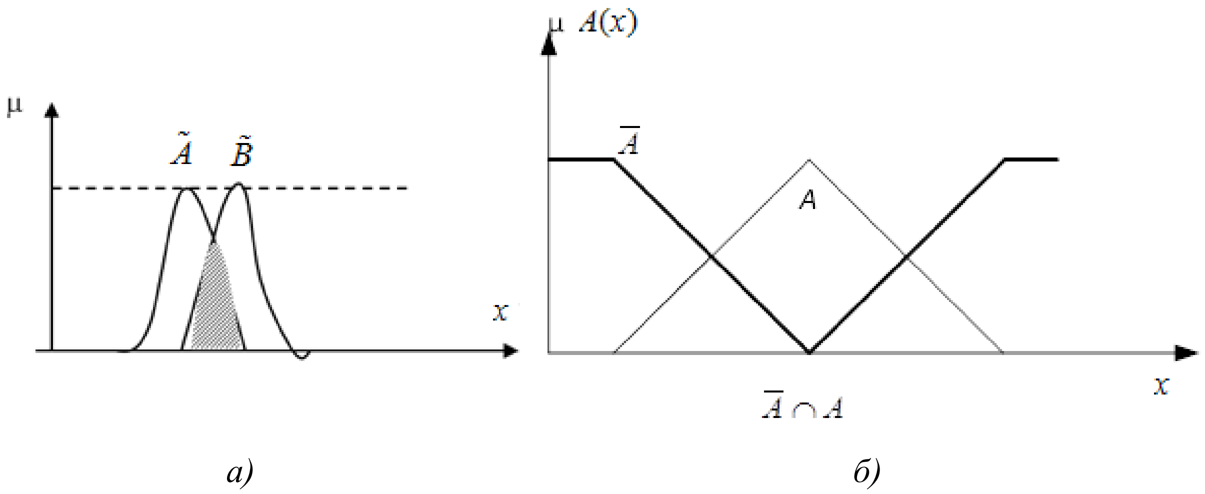


Рис. 1.12. Пересечение двух нечетких множеств А и В $\bar{A} \cap A$

Заметим, что согласно этому определению пересечение множества и его дополнения для различных вариантов определения дополнения не обязательно пустое (рис. 1.12, *б*). Данный оператор был первым оператором, использовавшимся для расширения операции пересечения обычных (классических) множеств на случай нечетких множеств.

Альтернативным вариантом реализации оператора пересечения, который в некоторых работах называют оператором PROD (логическое произведение) [9], является произведение функций принадлежности $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x), \forall x\in U$.

Для четких множеств оба варианта реализации операции пересечения дают одинаковые результаты, но для нечетких множеств результат их использования будет отличаться.

Пример 1.2. Пусть два эксперта оценили некоторую величину нечеткими множествами *A* и *B*. На основе их различающихся оценок необходимо построить совокупную оценку, которая учитывала бы мнения обоих экспертов. В качестве такой совокупной оценки зачастую логично брать пересечение нечетких множеств оценок экспертов (рис. 1.13, *а*).

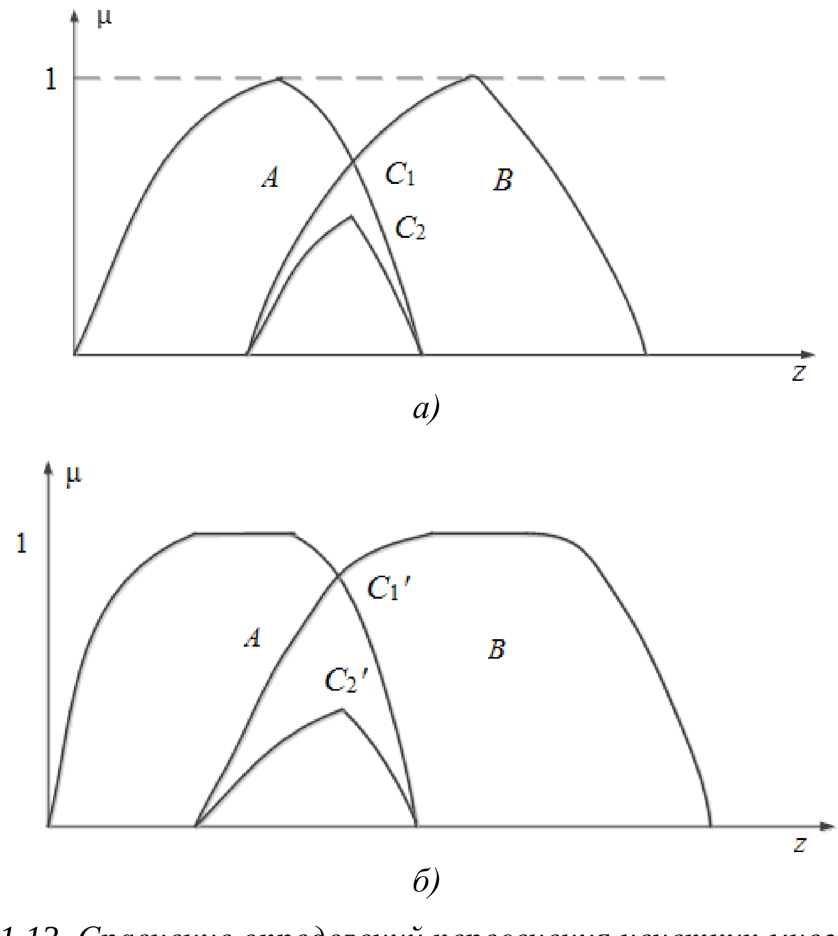
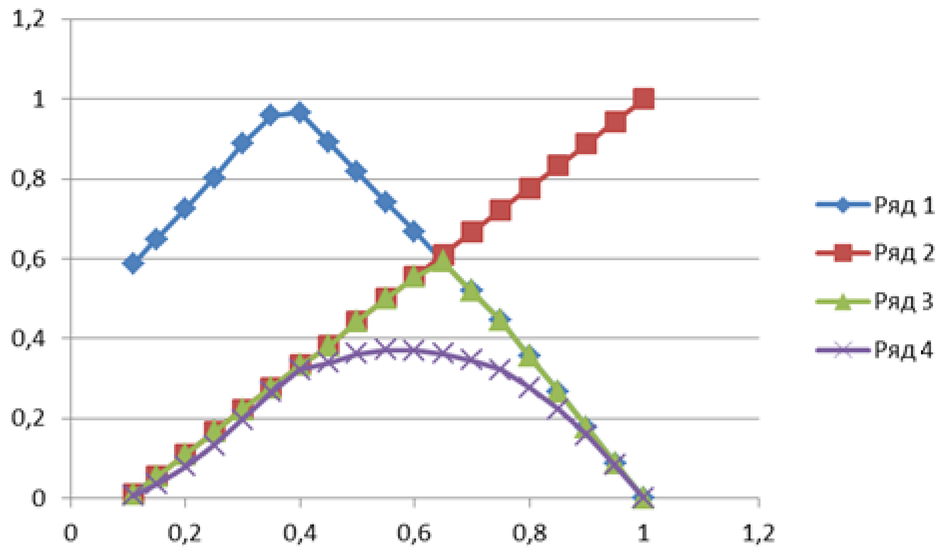


Рис. 1.13. Сравнение определений пересечения нечетких множеств

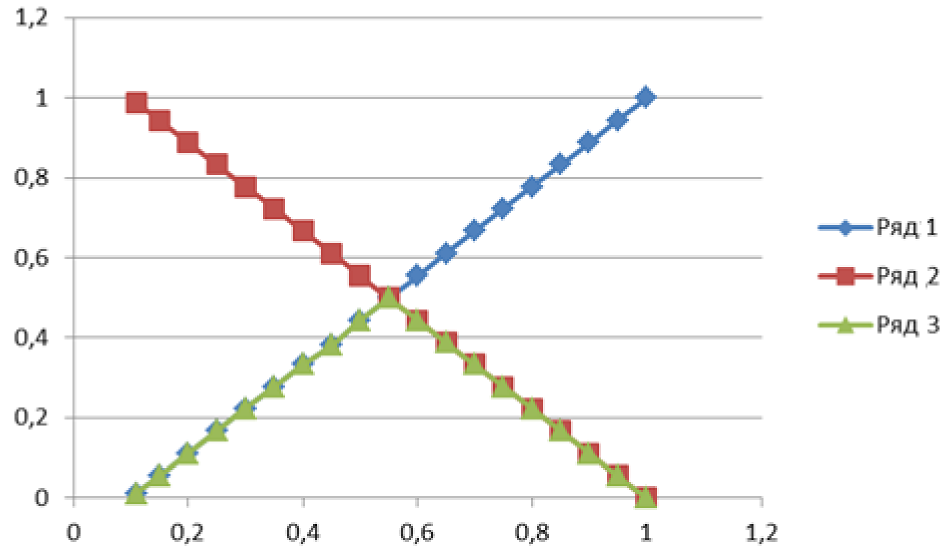
На рис. 1.13, *а* изображены исходные оценки, совокупная оценка C_1, если для определения пересечения берется минимум функций принадлежности, и совокупная оценка C_2, если берется их произведение. В данном примере определение пересечения через произведение функций принадлежности может оказаться наиболее удобным, так как такое произведение наиболее чувствительно к оценкам экспертов. Действительно, пусть исходные оценки изменились, как показано на рис. 1.13, *б,* что может соответствовать общему уменьшению уверенности экспертов. Из рисунка видно, что, несмотря на это, совокупная оценка для первого определения C_1 не изменилась. Для второго определения достоверность совокупной оценки C_2' уменьшилась, т. е. $C_2' < C_2$, что адекватно отражает уменьшение уверенности экспертов. Рассмотренный пример доказывает, что необходимо принимать то определение пересечения нечетких множеств, которое лучше соответствует содержательной интерпретации конкретной задачи.

Другая ситуация, возникающая при использовании оператора min, представлена на рис. 1.14. Этот пример показывает, что использование min в качестве основы операции пересечения нечетких множеств приводит к потере части информации, поскольку данный оператор учитывает только то, что одна степень принадлежности меньше другой без учета значения их разности. Для сравнения на рис. 1.14, *а* приведены результаты использования оператора min (ряд 3) при формализации операции пересечения двух нечетких (ряд 1) и (ряд 2) и оператора умножения (ряд 4), а на рис. 1.14, *б* применение оператора min (ряд 3) двух нечетких множеств с другими функциями принадлежности (ряд 1) и (ряд 2). Нетрудно видеть, что оператор min дает одинаковые результаты, хотя функции принадлежности исходных множеств различны. По этой причине для моделей систем, использующих оператор min, обычно характерны нечувствительность к малым изменениям значений входных величин, а также резкие изменения выходного значения при превышении некоторого порогового уровня входных значений.

Использование оператора min может иметь преимущества для тех систем, в которых метод обработки информации близок к логическому (большинство зависимостей между входными и выходным величинами системы носят логический характер). Преимуществом использования умножения является то, что значение $\mu_{A \cap B}(x)$ имеет количественную зависимость от фактических значений обеих функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ (за исключением случая равенства одной из функций нулю). Очевидно, что потеря информации здесь не так существенна, как для оператора min, когда значение $\mu_{A \cap B}(x)$ зависит лишь от меньшего в пределах заданной области изменения (x) значения компонентов $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$. В пользу использования оператора min можно привести следующее соображение.



а)



б)

Рис. 1.14. Потеря информации при использовании оператора min

Для пересечения обыкновенных множеств выполняется свойство поглощения: из того, что $A \subset B$ следует, что $A \cap B = А$. Это свойство остается верным для нечетких множеств, если пересечение определяется через минимум функций принадлежности, но нарушается, если пересечение определяется через произведение. Рассмотрение возможности использования в качестве основы для реализации пересечения нечетких множеств операторов как min, так и умножения указывает на неоднозначность способа выполнения данной операции. О том, каким должен быть этот способ, имеется множество мнений, в связи с чем на практике оператор ∩ зачастую выбирается интуитивно, исходя из опыта, на основе каких-либо гипотез или же методом проб. Использование любого из известных операторов пересечения в зависимости от конкретного приложения может приводить как к хорошим, так и плохим результатам. В дальнейшем мы будем использовать только определение пересечения нечетких множеств через оператор min.

Определение 1.10. Определим объединение $A \cup B$ как наименьшее нечеткое множество, содержащее как A, так и B:

$$\forall x \in U : \mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x)\mu_B(x)\}.$$

Альтернативным вариантом реализации операции объединения является алгебраическое объединение

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x).$$

Кроме приведенных вариантов определения операции объединения нечетких множеств, известны и другие, описание которых можно найти в [5]. Следует отметить, что для любых нечетких множеств операторы min и max являются единственно возможными операторами пересечения и объединения при выполнении следующих свойств:

– коммутативность $\min(\mu_A, \mu_B) = \min(\mu_B, \mu_A)$, $\max(\mu_A, \mu_B) = \max(\mu_B, \mu_A)$;

– ассоциативность $\min(\mu_A, \min(\mu_B, \mu_C)) = \min(\min(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$, $\max(\mu_A, \max(\mu_B, \mu_C)) = \max(\max(\mu_A, \mu_B), \mu_C))$;

– дистрибутивность $\min(\mu_A, \max(\mu_B, \mu_C)) = \max(\min(\mu_A, \mu_B), \min(\mu_A, \mu_C))$, $\max(\mu_A, \min(\mu_B, \mu_C)) = \min(\max(\mu_A, \mu_B), \max(\mu_A, \mu_C)$;

– монотонность $\mu_A \le \mu_C$, $\mu_B \le \mu_D \rightarrow \min(\mu_A, \mu_B) \le \min(\mu_C, \mu_D)$, $\max(\mu_A, \mu_B) \le \max(\mu_C, \mu_D)$, $\mu_A < \mu_B \rightarrow \min(\mu_A, \mu_A) < \min(\mu_B, \mu_B)$, $\max(\mu_A, \mu_A) < \max(\mu_B, \mu_B) \rightarrow \min(\mu_A, \mu_B) \le \min(\mu_C, \mu_D)$, $\max(\mu_A, \mu_B) \le \max(\mu_C, \mu_D)$.

Дефаззификация в задачах, при решении которых используются нечеткие множества – это процедура нахождения обычного (не нечеткого) значения, которое может быть использовано внешними по отношению к системе элементами. Для реализации дефаззификации применяют несколько методов.

1. ***Метод максимума***. Наиболее простым признан метод максимума функции принадлежности (рис. 1.15).

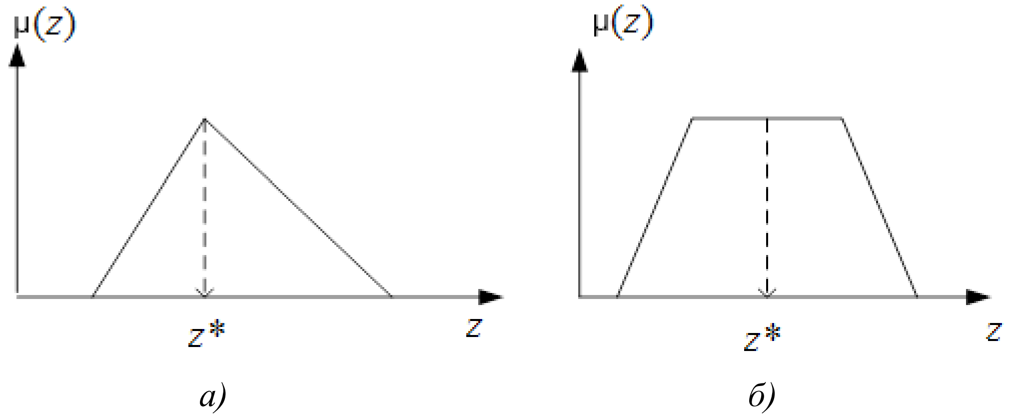


Рис. 1.15. Дефаззификация по максимуму функции принадлежности

В этом случае для унимодальной функции принадлежности результат дефаззификации определяется по координате ее максимума (рис. 1.15, *а*), для трапецеидальных – по середине верхнего основания (рис. 1.15, *б*). Для функций принадлежности с несколькими экстремумами метод максимума не дает однозначного решения.

2. ***Метод центра площади.*** Искомое значение z^* находится из уравнения $\int_{\min Z}^{z^*} \mu(z)dz = \int_{z^*}^{\max Z} \mu(z)dz.$ Иными словами, определяется абсцисса прямой, делящей площадь по кривой функции принадлежности на две равные части. Метод центра площади неудобен при реализации, не может быть использован, если функция принадлежности задана дискретными значениями, и является неоднозначным, так как возможно построение нескольких прямых (биссектрис площади), делящих площадь на равные части.

3. ***Метод центра тяжести.*** Идея этого метода состоит в том, что функцию принадлежности рассматривают как систему материальных точек, массы которых равны значениям функции принадлежности. Известно, что координата центра тяжести представляет собой обобщенную характеристику системы материальных точек.

Для непрерывных функций принадлежности координата центра тяжести выражается соотношением

$$CG = z^* = \frac{\int_{\min Z}^{\max Z} z \cdot \mu(z)dz}{\int_{\min Z}^{\max Z} \mu(z)dz}.$$

Для дискретных функций $CG = z^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} z_i \mu(z_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu(z_i)}$ (CG – Centre of Gravity).

Возможны также и другие методы дефаззификации, описание которых приведено в [5].

1.4. Нечеткие числа

Нечеткое число – это нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел, имеющее нормальную и выпуклую функцию принадлежности, т. е. такую, что существует значение носителя, в котором функция принадлежности равна единице, а также при отступлении от своего максимума влево или вправо функция принадлежности не возрастает (рис. 1.16).

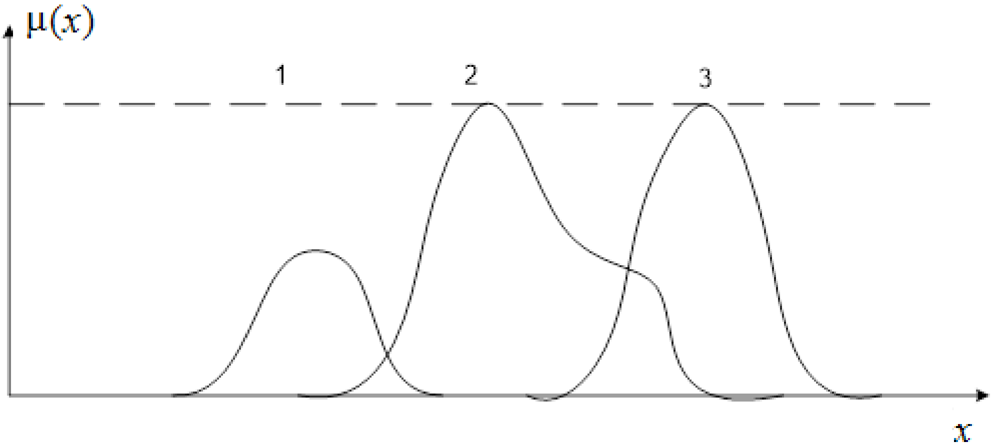


Рис. 1.16. Нечеткие числа: 1 – нечеткое выпуклое; 2 – нечеткое нормальное; 3 – нечеткое нормальное выпуклое

Нечеткое число A на действительной прямой называется нормальным, если $\max \mu_A(x) = 1$.

Нечеткое число A унимодально, если условие $\mu_A(x) = 1$ справедливо только для одной точки действительной оси. Выпуклое нечеткое число A называется нечетким нулем, если $\mu_A(0) = \sup_x(\mu_A(x))$. Подмножество $S_A \subseteq R$ называется носителем нечеткого числа A, если $S_A = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Нечеткое число A положительно, если $\forall x \in S_A, x > 0,$ и отрицательно, если $\forall x \in S_A, x < 0.$ Согласно принципу обобщения Заде было введено понятие арифметических операций на множестве нечетких чисел. Для произвольных нечетких чисел A, B, C и для любых чисел x, y, $z \in R$ справедливо $C = A \circ B \Leftrightarrow \sup_{z = x \circ y} \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\}$, где $\circ$ – знак арифметической операции.

Расширенные бинарные арифметические операции (сложение, умножение и пр.) для нечетких чисел определяются через соответствующие операции для четких чисел с использованием принципа обобщения следующим образом:

$$C = A \tilde{+} B \Leftrightarrow \sup_{z=x+y} \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\},$$

$$C = A \tilde{-} B \Leftrightarrow \sup_{z=x-y} \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\},$$

$$C = A \tilde{\cdot} B \Leftrightarrow \sup_{z=x\cdot y} \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\},$$

$$C = A \tilde{\div} B \Leftrightarrow \sup_{z=x\div y} \{\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)\}.$$

Анализ свойств арифметических операций над нечеткими числами показал, что нечеткое число не имеет противоположного и обратного чисел, сложение и умножение коммутативны, ассоциативны и в общем случае не дистрибутивны.

При решении задач математического моделирования нечетких систем можно использовать нечеткие числа (L-R)-типа, которые предполагают более простую интерпретацию расширенных бинарных отношений.

1.4.1. Алгоритм выполнения арифметических операций над нечеткими числами с (L-R)-аппроксимацией

Нечеткие числа (L-R)-типа – это разновидность нечетких чисел специального вида, т. е. задаваемых по определенным правилам с целью снижения объема вычислений при операциях над ними [5]. Для нечетких чисел (L-R)-типа левые ветви функций принадлежности операндов $\tilde{A}$ и $\vec{B}$ аппроксимируются одной монотонно возрастающей функцией L, зависящей от двух параметров, подбираемых для каждого операнда в отдельности $L(a_L, a^*)$ и $L(b_L, b^*)$. Аналогично для правых ветвей и монотонно убывающей функции R имеем $R(a^*, a_R)$, $R(b^*, b_R)$. Полученные аппроксимации называются L-R нечеткими числами и обозначаются (a_L, a^*, a_R), (b_L, b^*, b_R).

Очевидно, что к классу (L-R)-функций относятся функции, графики которых имеют вид, приведенный на рис. 1.17.

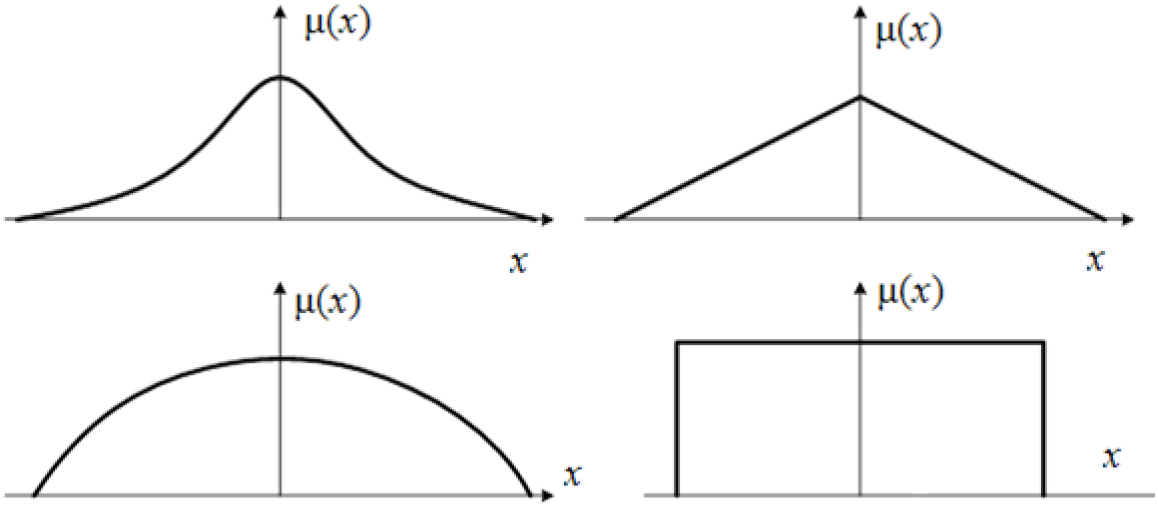


Рис. 1.17. Нечеткие числа (L-R)-типа

Примерами аналитического задания (L-R)-функций могут быть $L(x) = e^{-|x|^p}$, $p \ge 0$; $R(x) = 1/(1+|x|^p)$, $p \ge 0$ и т. д.

Доказано, что результат сложения и вычитания L-R нечетких чисел есть также L-R нечеткое число. Результат умножения и деления L-R нечетких чисел будет L-R нечетким числом лишь приблизительно [15]. L-R-аппроксимация полезна тем, что сами функции L и R в промежуточных вычислениях не участвуют, а используются лишь при получении окончательного результата.

При решении практических задач наибольшее применение нашли простейшие частные случаи нечетких чисел и нечетких интервалов, получившие свое название по виду их функций принадлежности. Эти нечеткие числа и интервалы можно рассматривать как частный случай нечетких чисел и интервалов (L-R)-типа, если в качестве соответствующих функций L-типа и R-типа использовать их предельные случаи, а именно линейные функции (треугольные или трапецеидальные). При этом важным обстоятельством будет то, что треугольные нечеткие числа однозначно задаются тройкой (a_L, a^*, a_R), а трапецеидальные четверкой (a_L, a_1, a_2, a_R), где a_1, a_2 – координаты верхнего основания трапеции, т. е. отпадает необходимость вычисления промежуточных значений результатов арифметических операций.

Рассмотрим выполнение арифметических операций над треугольными L-R нечеткими числами (рис. 1.18). Для треугольной функции принадлежности нечеткое число $x \approx x^*$ представляется следующим соотношением:

$$\tilde{x}^* = \int_{x_L}^{x^*} (x - x_L)/x + \int_{x^*}^{x_R} (x_R - x)/x,$$

где знак $\int$ означает объединение по всем $x \in [x_L, x^*]$ и $x \in [x^*, x_R]$ соответственно.

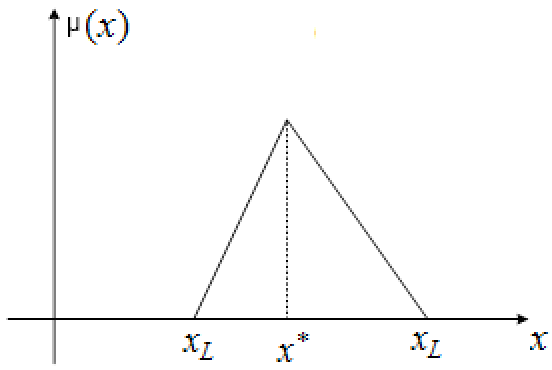


Рис. 1.18. Нечеткое треугольное число

Пусть имеются два нечетких числа

$$\tilde{x}_1^* = \int_{x_{L1}}^{x_1^*} (x - x_{L1})/x + \int_{x_1^*}^{x_{R1}} (x_{R1} - x)/x \text{ и } \tilde{x}_2^* = \int_{x_{L2}}^{x_2^*} (x - x_{L2})/x + \int_{x_2^*}^{x_{R2}} (x_{R2} - x)/x.$$

Суммой чисел $\tilde{x}_1^*$ и $\tilde{x}_2^*$ назовем число $\tilde{x}_3^*$ такое, что

$$\tilde{x}_3^* = \int_{x_{L3}}^{x_3^*} \mu_{x_3}(x)/x + \int_{x_3^*}^{x_{R3}} \mu_{x_3}(x)/x, \qquad (1.1)$$

где $x_{L3} = x_{L1} + x_{L2}$; $x_{R3} = x_{R1} + x_{R2}$; $x_3^* = x_1^* + x_2^*$.

Для треугольных функций принадлежности слагаемых функция принадлежности суммы также будет треугольной и представляться уравнением $\mu(x) = a_0 + kx$. Для определения значений a_0 и k необходимо для $x_{L3} \le x \le x_3^*$ решить систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 + kx = 1 \text{ при } x = x_3^* = x_1^* + x_2^*, \\ a_0 + kx = 0 \text{ при } x = x_{L3} = x_{L1} + x_{L2}, \end{cases}$$

откуда $a_0 = -\dfrac{x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$, $k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{L3}}$ и соответственно $\mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}}$.

Для ${x^*}_3 \le x \le x_{R3}^*$ $a_0 + kx = 1$ при $x = x_3^*$,

$a_0 + kx = 0$ при $x = x_{R3}$.

Тогда $a_0 = -\dfrac{x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$, $k = \dfrac{1}{x_3^* - x_{R3}}$ и $\mu_{x_3}(x) = \dfrac{x - x_{R3}}{x_3^* - x_{R3}}$.

Таким образом, $\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \dfrac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \dfrac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x$.

Аналогично для операции вычитания

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{x - x_{L3}}{x_3^* - x_{L3}} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{x_{R3} - x}{x_{R3} - x_3} \Big/ x,$$

$$x_{L3} = x_{L1} - x_{R2}, \quad x_{R3} = x_{R1} - x_{L2}, \quad x_3^* = x_1^* - x_2^*. \tag{1.2}$$

Для операций умножения и деления, предполагая сохраняемость треугольной функции принадлежности, в работе [7] получены следующие соотношения:

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_{L3}}}{\sqrt{x_3^*} - \sqrt{x_{L3}}} \Bigg/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{\sqrt{x_{R3}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x_{R3}} - \sqrt{x_3}} \Bigg/ x,$$

$$x_{L3} = x_{L1} x_{L2}, \quad x_{R3} = x_{R1} x_{R2}, \quad x_3^* = x_1^* x_2^*. \tag{1.3}$$

Результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + k_1 \sqrt{x}$,

$$\tilde{x}_3^* = \int\limits_{x_{L3}}^{x_3^*} \frac{(x - x_{L3}) x_3^*}{(x_3 - x_{L3}) x} \Big/ x + \int\limits_{x_3^*}^{x_{R3}} \frac{(x_{R3} - x) x_3^*}{(x_{R3} - x_3^*) x} \Big/ x, \tag{1.4}$$

где $x_{L3} = \dfrac{x_{L1}}{x_{R2}}, x_{R3} = \dfrac{x_{R1}}{x_{L2}}, x_3^* = \dfrac{x_1^*}{x_2^*}$, результирующая функция принадлежности $\mu_{x_3}(x) = a_0 + \dfrac{k_1}{x}$.

В отношении двух последних операций целесообразно сделать следующее замечание. Операции умножения и деления – операции нелинейные, поэтому предположение о сохранении вида функции принадлежности в общем случае не выполняется. В то же время во многих практических задачах результирующая функция принадлежности после выполнения операций умножения и деления близка к треугольной, что позволяет аппроксимировать результат, приводя его к треугольному виду.

Отметим еще одну особенность непрерывных нормальных выпуклых нечетких чисел: найти нечеткое число и его правую и левую границы можно, не проводя лингвистического анализа, поскольку точно известно, при каком x функция принадлежности равна 1, а при каких x она равна нулю. Поэтому арифметические вычисления над нечеткими числами в (L-R) представлении выполняются с использованием соотношений (1.1) – (1.4), с помощью которых вычисляются левая и правая границы результата и его центр, а затем к этим точкам «привязывается» соответствующая функция принадлежности. На рис. 1.19 представлен пример сложения двух треугольных нечетких чисел A = 3 с границами (2, 3, 4), B = 6 с границами (5, 6, 7). Аналогично действуют и для других арифметических операций.

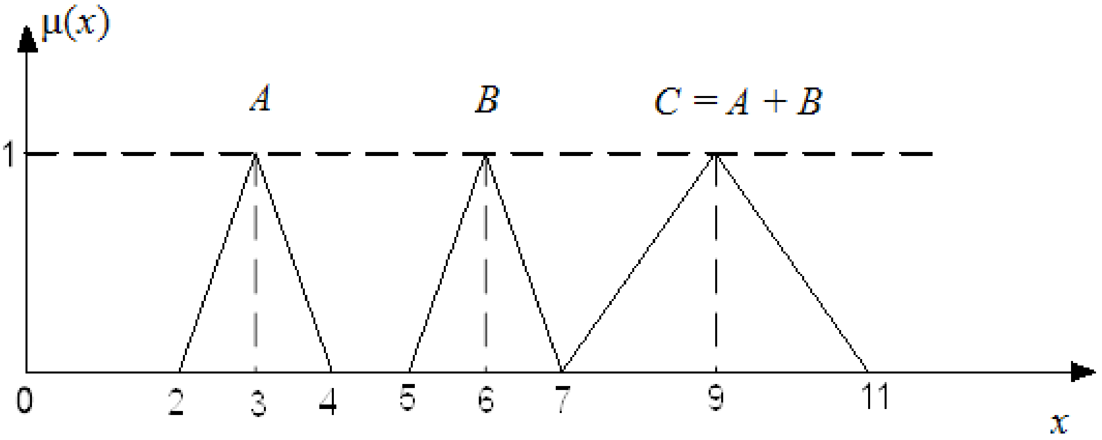


Рис. 1.19. Пример сложения двух треугольных нечетких чисел

1.4.2. Арифметические операции над нечеткими числами с использованием уровневых множеств

В основу данного подхода к выполнению операций над нечеткими числами положено то, что нечеткое число может быть дискретизировано по конечному числу α-уровней, когда каждому уровню α_i ставится в соответствие множество

$$X_{\alpha_i} = \left\{ x_{\alpha_i 1},\, x_{\alpha_i 2}, \ldots,\, x_{\alpha_i n} \right\},$$

$$\mu\left(x_{\alpha_i j} \right) \ge \alpha_i \;,\; j = \overline{1, n},$$

а также разложено на выпуклые, возможно, ненормализованные нечеткие подмножества (рис. 1.20).

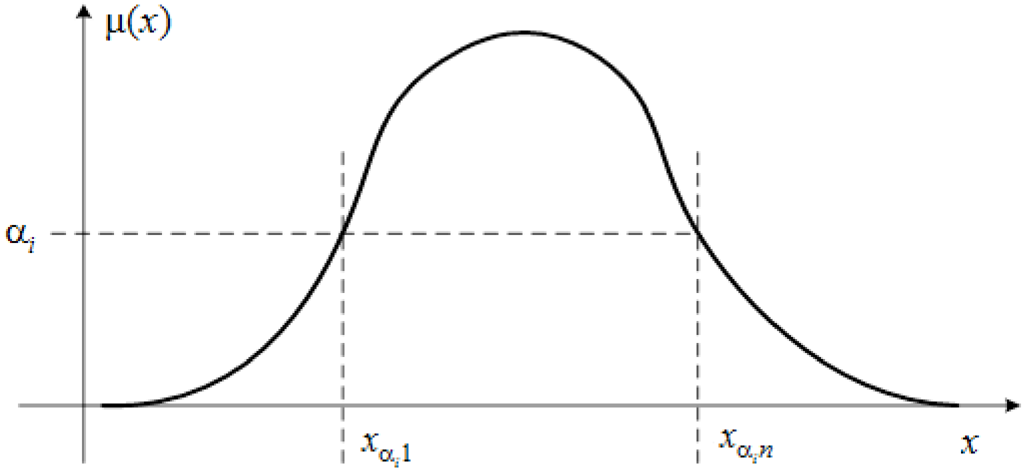


Рис. 1.20. Дискретизация нечеткого числа по α*-уровню*

Для операций с использованием уровневых множеств накладывается дополнительное ограничение, что эти нечеткие подмножества должны иметь функции принадлежности либо строго убывающие, либо строго возрастающие, либо постоянные (рис. 1.21). Эти ограничения объясняются тем, что если рассматривать только монотонные (только возрастающие или только убывающие) операции*, то для этих операций на участках одинаковой монотонности функций принадлежности результат может быть получен без дополнительного лингвистического анализа.

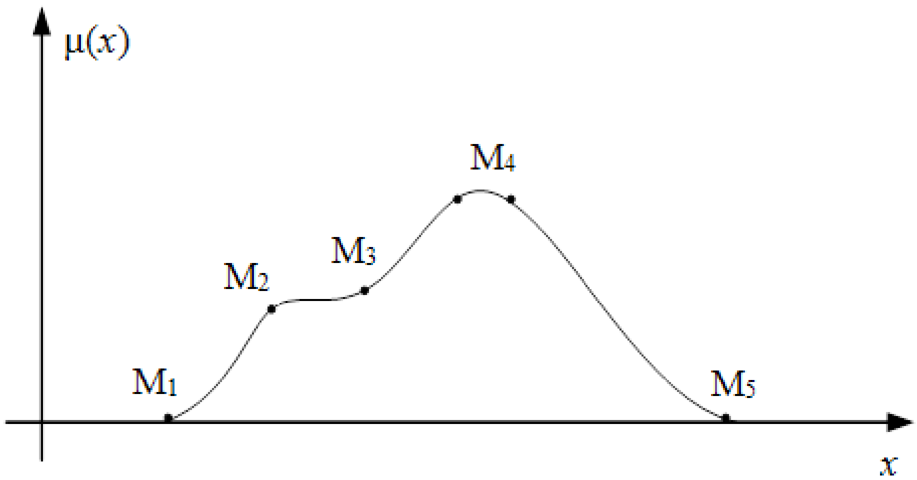


Рис. 1.21. Нечеткое число

---

* Бинарная операция * называется возрастающей, если для $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2$ ⇒ ⇒ $x_1 * x_2 > y_1 * y_2$, и убывающей, если для $x_1 > y_1$ и $x_2 > y_2$ ⇒ $x_1 * x_2 < y_1 * y_2$.

Пусть нечеткие числа $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ представлены в виде α-уровневых подмножеств, для которых функции принадлежности имеют одинаковый характер монотонности:

$$\tilde{X} = \left\{ X_{\alpha_i} \right\}, \quad \tilde{Y} = \left\{ Y_{\alpha_i} \right\},$$

$$\tilde{X} = \left\{ \left(x_{\alpha_i 1}, \ldots, x_{\alpha_i n_i} \right) \right\}, \quad i = 1, \overline{I},$$

$$\tilde{Y} = \left\{ \left(y_{\alpha_j 1}, \ldots, y_{\alpha_j m_j} \right) \right\}, \quad j = 1, J,$$

$$\mu\left(x_{\alpha_i k} \right) \geq \alpha_i, \quad i = 1, \overline{J}, \quad k = 1, n_i,$$

$$\mu\left(y_{\alpha_{ji} q} \right) \geq \alpha_j, \; i = \overline{1, J}, \quad q = 1, m_j.$$

Операции выполняются над абсциссами точек, находящихся на одинаковых α-уровнях и имеющих одинаковые участки монотонности функций принадлежности.

Рассмотрим для простоты один α-уровень α_i и три значения аргумента $x_{\alpha_{ij}}$ и $y_{\alpha_{ij}}$, $j = 1, 2, 3$ (рис. 1.22).

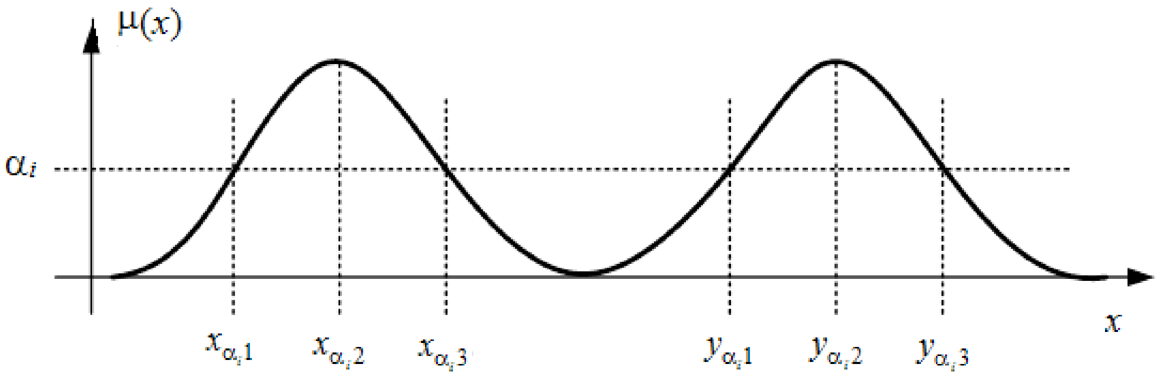


Рис. 1.22. α-*уровень нечетких чисел*

$$\tilde{X}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}\left(x_{\alpha_i 1} \right) / x_{\alpha_i 1}, \; \mu_{\alpha_i 2}\left(x_{\alpha_i 2} \right) / x_{\alpha_i 2}, \; \mu_{\alpha_i 3}\left(x_{\alpha_i 3} \right) / x_{\alpha_i 3} \right\},$$

$$\tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1}\left(y_{\alpha_i 1} \right) / y_{\alpha_i 1}, \; \mu_{\alpha_i 2}\left(y_{\alpha_i 2} \right) / y_{\alpha_i 2}, \; \mu_{\alpha_i 3}\left(y_{\alpha_i 3} \right) / y_{\alpha_i 3} \right\}.$$

Тогда для строго возрастающих или строго убывающих операций, какими являются сложение и умножение, справедливы соотношения

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i} \times \tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1} \Big/ \left(x_{\alpha_i 1} \times y_{\alpha_i 1} \right),\ \mu_{\alpha_i 2} \Big/ \left(x_{\alpha_i 2} \cdot y_{\alpha_i 2} \right),\ \mu_{\alpha_i 3} \Big/ \left(x_{\alpha_i 3} \times y_{\alpha_i 3} \right) \right\}, \quad (1.5)$$

$$\tilde{Z}_{\alpha_i} = \tilde{X}_{\alpha_i} \times \tilde{Y}_{\alpha_i} = \left\{ \mu_{\alpha_i 1} \Big/ \left(x_{\alpha_i 1} + y_{\alpha_i 1} \right),\ \mu_{\alpha_i 2} \Big/ \left(x_{\alpha_i 2} + y_{\alpha_i 2} \right),\ \mu_{\alpha_i 3} \Big/ \left(x_{\alpha_i 3} + y_{\alpha_i 3} \right) \right\}. \quad (1.6)$$

Операции вычитания и деления не являются строго возрастающими или строго убывающими, поэтому их вначале надо представить в виде $\tilde{X} - \tilde{Y} = \tilde{X} + (-\tilde{Y})$, $\tilde{X}/\tilde{Y} = \tilde{X}\left(1/\tilde{Y}\right)$, а затем может использоваться соотношение (1.5) или (1.6).

Основным ограничением при использовании данного метода реализации нечетких множеств выступает требование участков одинаковой монотонности функций принадлежности для участников операций.

1.4.3. Операции над нечеткими числами на основе принципа нечеткого обобщения Л. Заде

Другой подход к реализации операций над нечеткими числами основан на использовании дискретных значений функций принадлежности нечетких чисел и операций над ними [19]. Расширенные бинарные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление и др.) для нечетких чисел определяются через соответствующие операции для четких чисел с использованием принципа нечеткого обобщения Л. Заде следующим образом.

Пусть A, B и C – нечеткие числа, заданные своими функциями принадлежности $\mu_A(x), \mu_B(y), \mu_C(z), \forall x, y, z \in R$. Тогда результат произвольной бинарной операции над нечеткими числами на основе принципа обобщения Л. Заде запишем следующим образом: $C = A \tilde{*} B$ с функцией принадлежности

$$\mu_C(z) = \mu_{A \tilde{*} B}(z) = \sup_{z = x * y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)),$$

где * – обозначение нечеткой операции, соответствующей операции * над обычными числами; $\wedge$ – операция минимум.

Операции над нечеткими числами на основе принципа нечеткого обобщения Л. Заде вычисляются в соответствии со следующими выражениями.

Сложение $C = A \tilde{+} B$ с функцией принадлежности

$$\mu_C(z) = \mu_{A \tilde{+} B}(z) = \sup_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Вычитание $C = A \tilde{-} B$ с функцией принадлежности

$$\mu_C(z) = \mu_{A \tilde{*} B}(z) = \sup_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Умножение $C = A \tilde{*} B$ с функцией принадлежности

$$\mu_C(z) = \mu_{A \tilde{*} B}(z) = \sup_{z=x*y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

Деление $C = A \tilde{/} B$ с функцией принадлежности

$$\mu_C(z) = \mu_{A \tilde{/} B}(z) = \sup_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)).$$

2. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ РАБОТЫ С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Все существующие в настоящее время программные пакеты для работы с нечеткими множествами можно разделить на три группы:

– средства вычислений с нечеткими числами, куда можно отнести электронную таблицу FuziCalc [20] и надстройку Fuzzy for Excel для известной электронной таблицы Excel;

– средства моделирования процессов и технических устройств, основанных на использовании аппарата теории нечетких множеств: Fuzzy Logic Toolbox Matlab, CubiCalc [4, 5];

– средства проектирования нечетких контроллеров Trace Mode (фирма «AdAstra»), FuzzyTech (фирма «Inform Software Corporation») [5].

Для предварительного изучения операций с нечеткими множествами, проведения вычислений с нечеткими числами и частично моделирования наиболее удобной и простой представляется электронная таблица FuziCalc, методы работы с которой и будут рассмотрены далее.

Задание 2.1. Изучение электронной таблицы FuziCalc

Нечеткая электронная таблица FuziCalc (FC) представляет собой электронную таблицу, аналогичную по организации MS Office Excel, но вместо обычных чисел работает с нечеткими числами, т. е. на основе fuzzy-технологий. Поскольку FC появилась достаточно давно, то при работе с ней в современных операционных системах (ОС) возникают проблемы совместимости: практически все операционные системы, используемые на сегодняшний день, 64-разрядные (Win 7, 8, 10), а FC разрабатывалась для 32-разрядной ОС (Win XP). Для решения данной проблемы можно в среде Win 7 организовать виртуальную машину с предустановленной на ней Win XP, на которую в дальнейшем можно поставить саму FC. Подробное описание организации виртуальной машины представлено в приложении. Рабочая среда таблицы приведена на рис. 2.1.

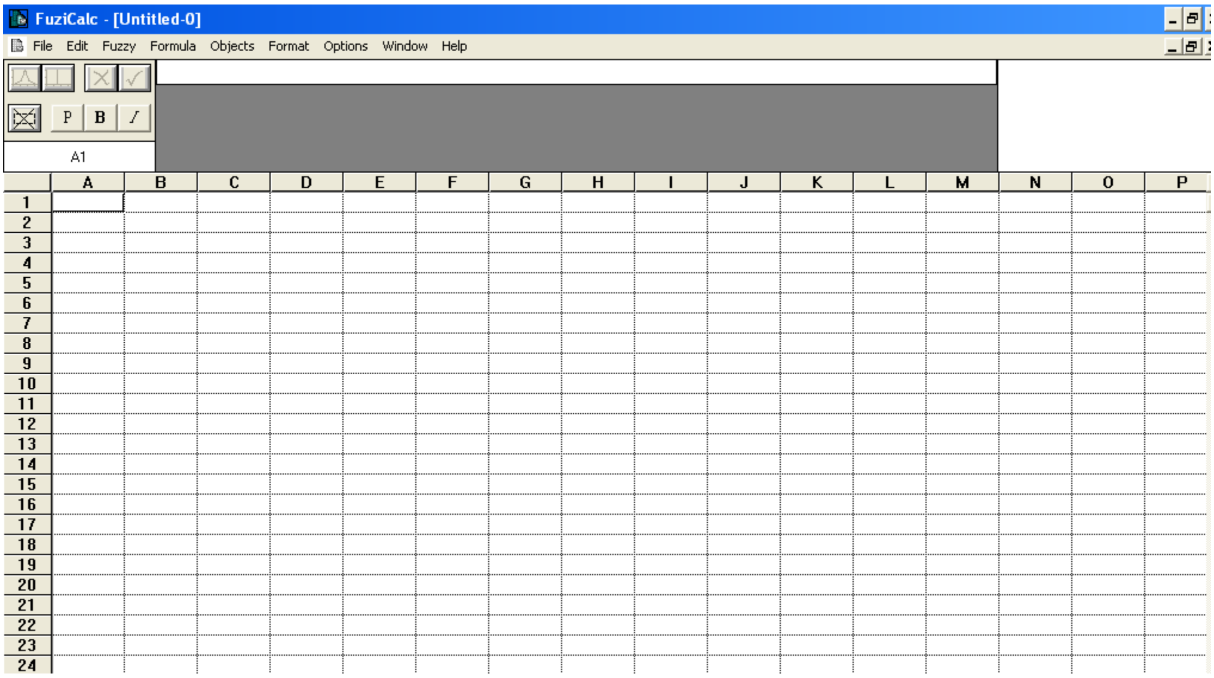


Рис. 2.1. Рабочая среда таблицы

Ввод в таблицу нечетких чисел выполняется в следующей последовательности.

1. Выбирается ячейка таблицы, в которой предполагается размещение нечеткого числа (А.1).

2. На панели инструментов щелчком мыши активируется панель Fuzzy, в выпадающем меню которой активируется панель Fuzzyfy…, в результате чего появляется форма для ввода нечеткого числа (рис. 2.2), в которой в строку Low вводится значение левой границы нечеткого числа, Best – центра, High – правой границы. Например, нечеткое число «примерно 36» будет введено следующим образом (рис. 2.3).

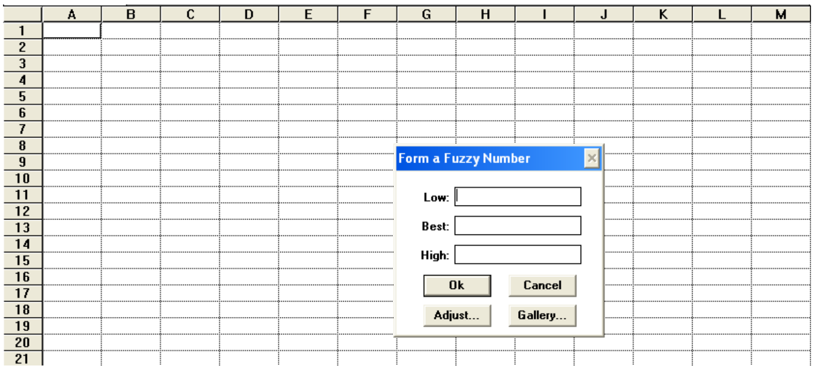


Рис. 2.2. Форма ввода нечетного числа

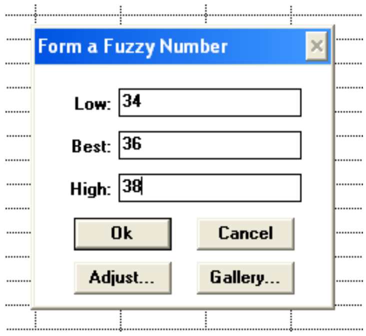
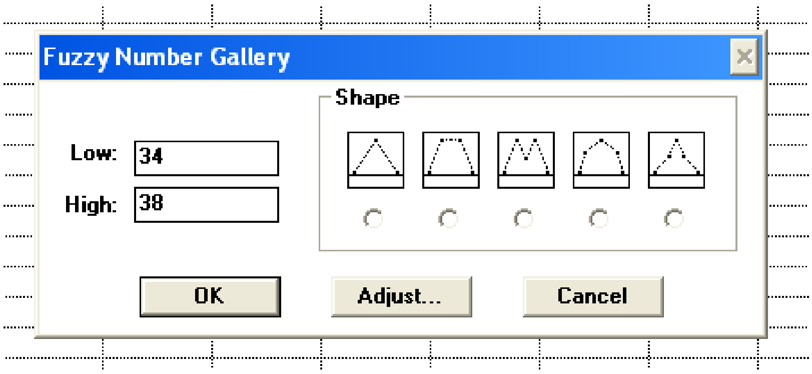
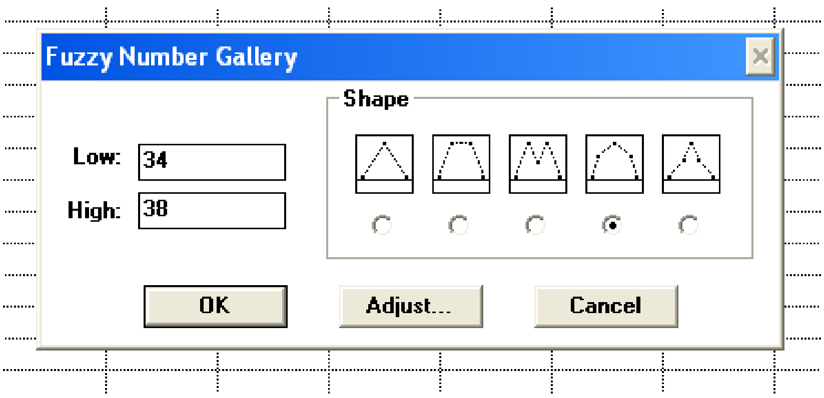


Рис. 2.3. Ввод числа «примерно 36»

Если предполагается, что нечеткое число имеет треугольную функцию принадлежности (число в LR-представлении), надо щелкнуть мышью по клавише Ok. Если предполагается использовать нечеткие числа с другими функциями принадлежности, то надо щелкнуть по клавише Gallery, в результате чего появится набор возможных функций принадлежности, из которого надо выбрать желаемую щелчком под соответствующим изображением и затем щелкнуть по клавише Ok (рис. 2.4, *а*).



а)



б)

Рис. 2.4. Выбор функции принадлежности

На рис. 2.4, *б* показан выбор функции принадлежности типа «тент», в результате в ячейку А.1 таблицы будет введено нечеткое число «примерно 36» с соответствующей функцией принадлежности (рис. 2.5). График, представленный на рис. 2.5, получается двойным щелчком по соответствующей ячейке (А.1) таблицы, на которой точками обозначены существенные координаты функции принадлежности нечеткого числа, изменяя которые можно редактировать вид функции принадлежности (рис. 2.6).

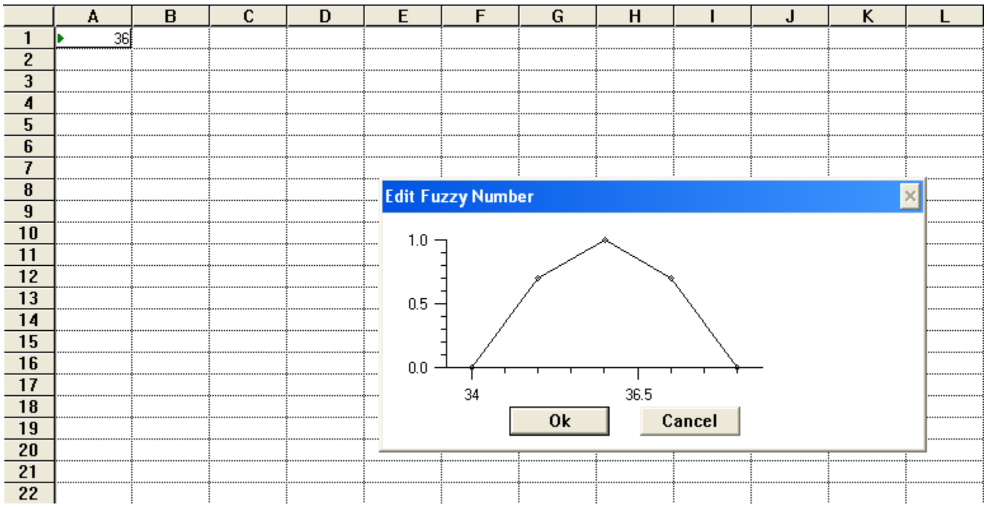


Рис. 2.5. График заданной ранее функции

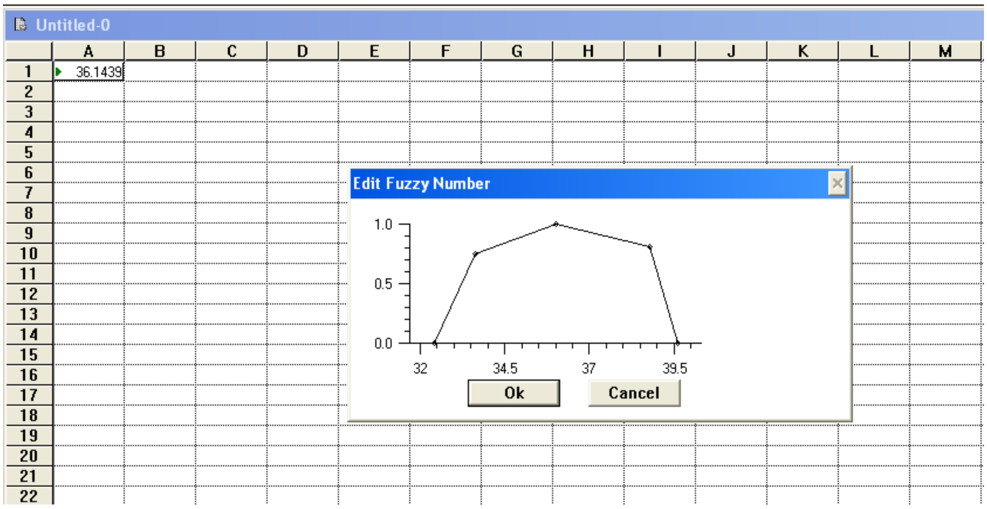


Рис. 2.6. Редактирование вида функции принадлежности

Необходимо отметить, что в клетке таблицы представляется не центральное значение нечеткого числа, а значение, соответствующее координате центра тяжести функции принадлежности, которая для симметричных функций принадлежности совпадает с координатой максимума.

Выполнение простейших арифметических операций

Рассмотрим простейшую операцию сложения двух нечетких чисел. Для этого в ячейки таблицы следует поместить слагаемые согласно ранее изложенной методике (рис. 2.7).

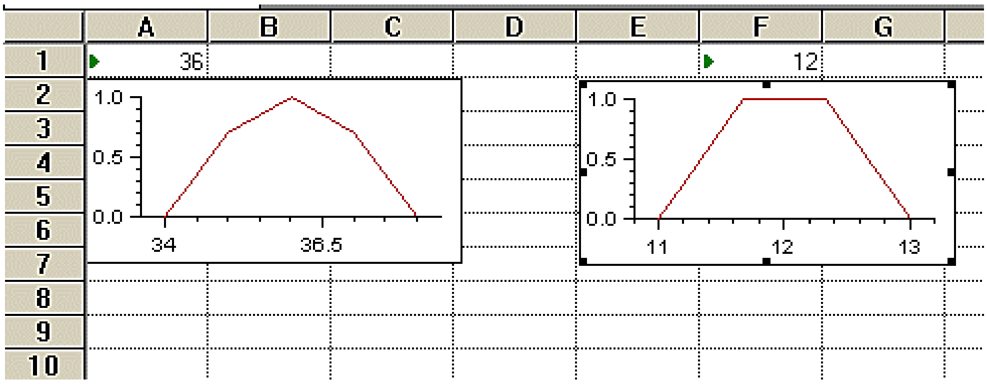


Рис. 2.7. Представление двух нечетких чисел

На рис. 2.7 представлены два нечетких числа (ячейки A.1 и F.1). Необходимо найти их сумму, которую поместить в ячейку D.9 (рис. 2.8).

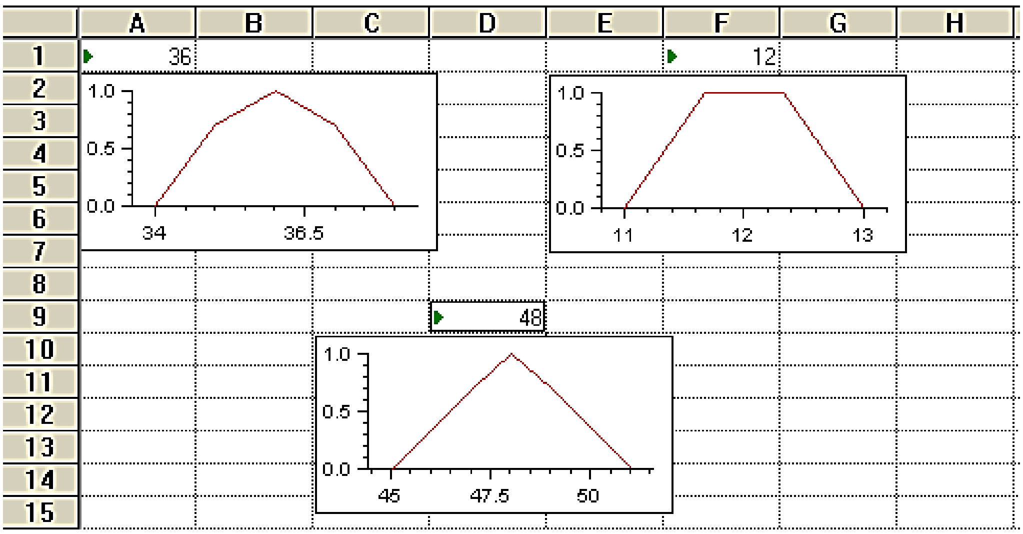


Рис. 2.8. Размещение суммы нечетких чисел

Для получения результата в командную строку необходимо ввести соответствующую формулу так, как это делается в любой электронной таблице. Ввод любой формулы начинается знаком «=». Графики операндов и результата выводятся в поле таблицы после одиночного щелчка по соответствующей ячейке таблицы, выбора на панели инструментов клавиши Object и активации в выпадающем меню New Fuzzy Graph. В этом случае на экран выводятся графики функций принадлежности в стандартной форме.

Для получения других вариантов графического представления нужно дважды щелкнуть мышью по соответствующему графику, в результате чего появится вспомогательная панель Fuzzy Graph (рис. 2.9), на которой выбирается клавиша Gallery, после чего появится панель Fuzzy Graph Gallery, где представлены варианты цветового оформления. Если ограничиваемся плоскими фигурами, то выбираем нужный цвет и щелкаем по клавише Ok. Для получения цветной заливки изображения активируется клавиша Next и появляется набор возможных вариантов (рис. 2.10).

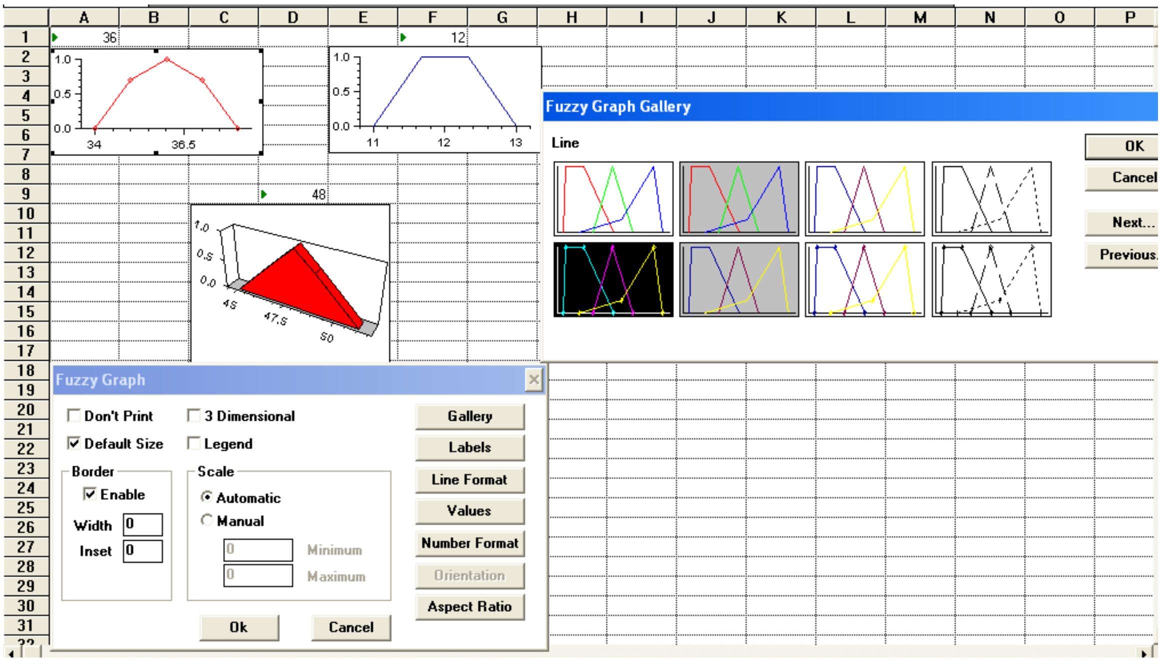


Рис. 2.9. Варианты графических представлений

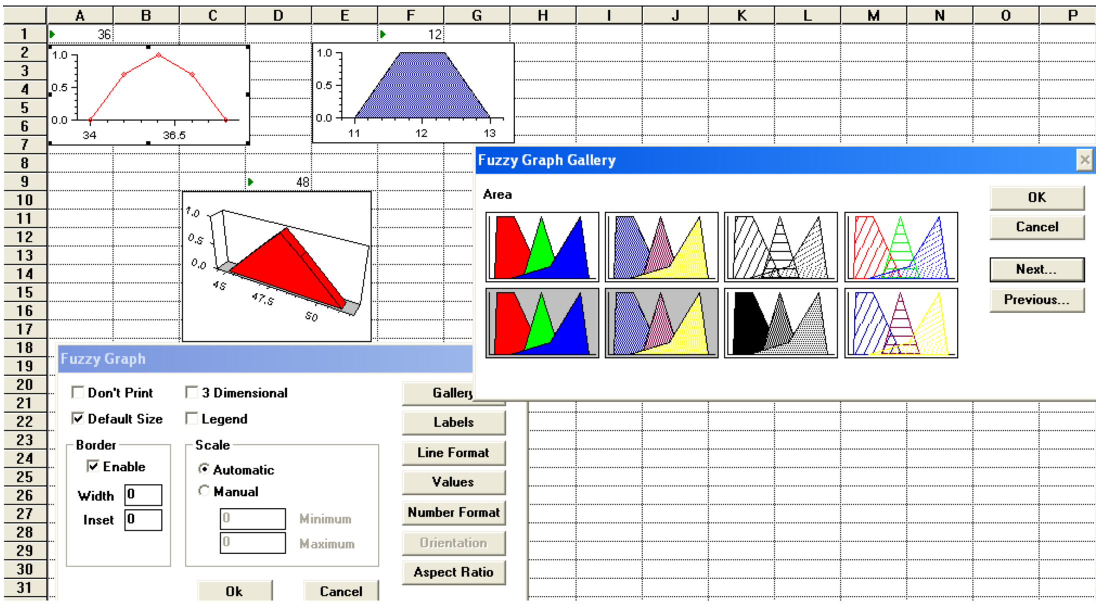


Рис. 2.10. Доступные варианты цветового отображения

Для получения трехмерного изображения нужно еще раз щелкнуть по клавише Next, после чего появится набор возможных вариантов (рис. 2.11).

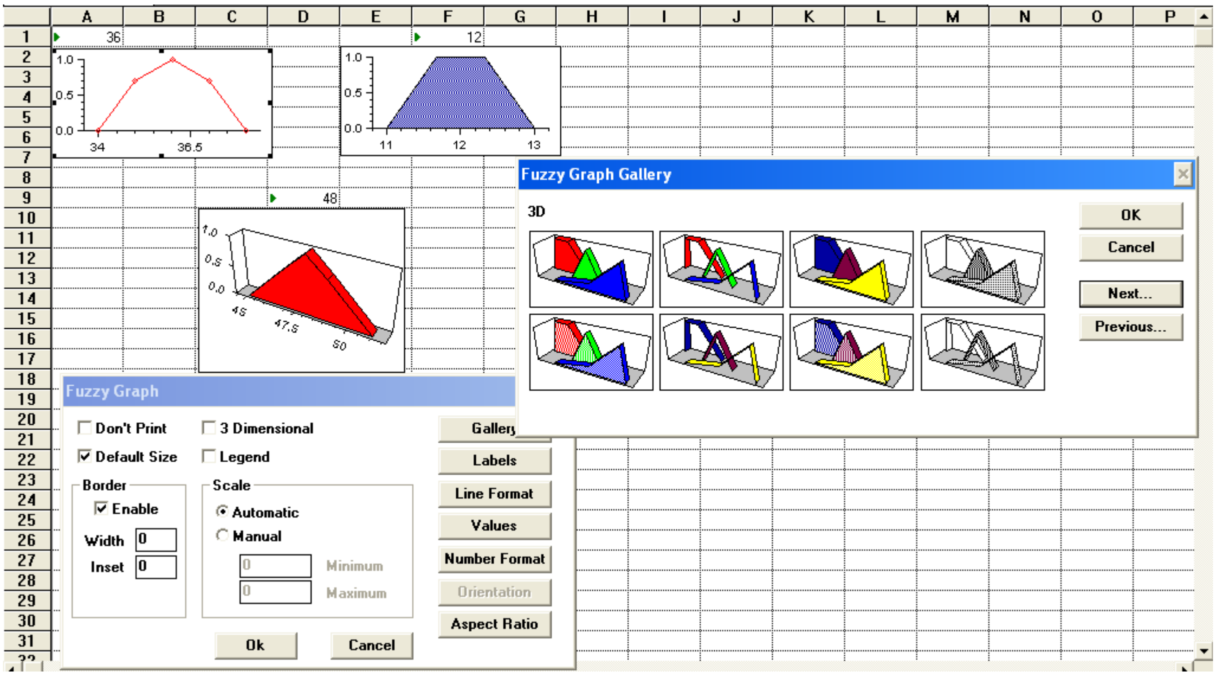


Рис. 2.11. Доступные варианты трехмерного отображения

Другие вычисления выполняются практически аналогично.

Пример 2.1. Решение бизнес-задачи. Менеджер планирует деятельность фирмы, работающей на рынке недвижимости, на следующий год. Целевая функция задачи – оценить диапазон прибыли, на который можно рассчитывать. Для решения задачи существуют четыре нечетких утверждения, выявленные из результатов деятельности фирмы в прошлые годы.

1. В течение года в фирму обращается примерно 75 клиентов.

2. Из потенциальных клиентов примерно 30 % совершают сделки.

3. Стоимость недвижимости, фигурирующей в сделках, составляет примерно 142 815 руб.

4. За проведенную сделку берут комиссию примерно 5,5 %.

Если вычислить ожидаемую прибыль обычным способом, то получим $P = 75 \cdot 0{,}3 \cdot 142\,815 \cdot 0{,}055 = 176\,733$ руб.

При этом менеджер предполагает:

– когда он рассчитывает на 75 возможных клиентов, то понимает, что это количество вполне вероятно может быть точно не реализовано. В то же время за последние годы количество клиентов никогда не было меньше 67 и не превышало 87;

– как правило, сделки совершают не менее 25 – 35 % клиентов, но никогда не было меньше 10 % и больше 50 %;

– стоимость недвижимости, проданной фирмой, обычно распределяется так, что чаще всего это диапазон от 138 000 до 140 000 руб. Существует возможность и большего значения, но оно никогда не было больше 160 000 руб.;

– размер комиссионных тоже не постоянный, обычно 5 – 6 %, но никогда не бывает меньше 4 % и больше 7 %.

Описанная ситуация представлена на рис. 2.12.

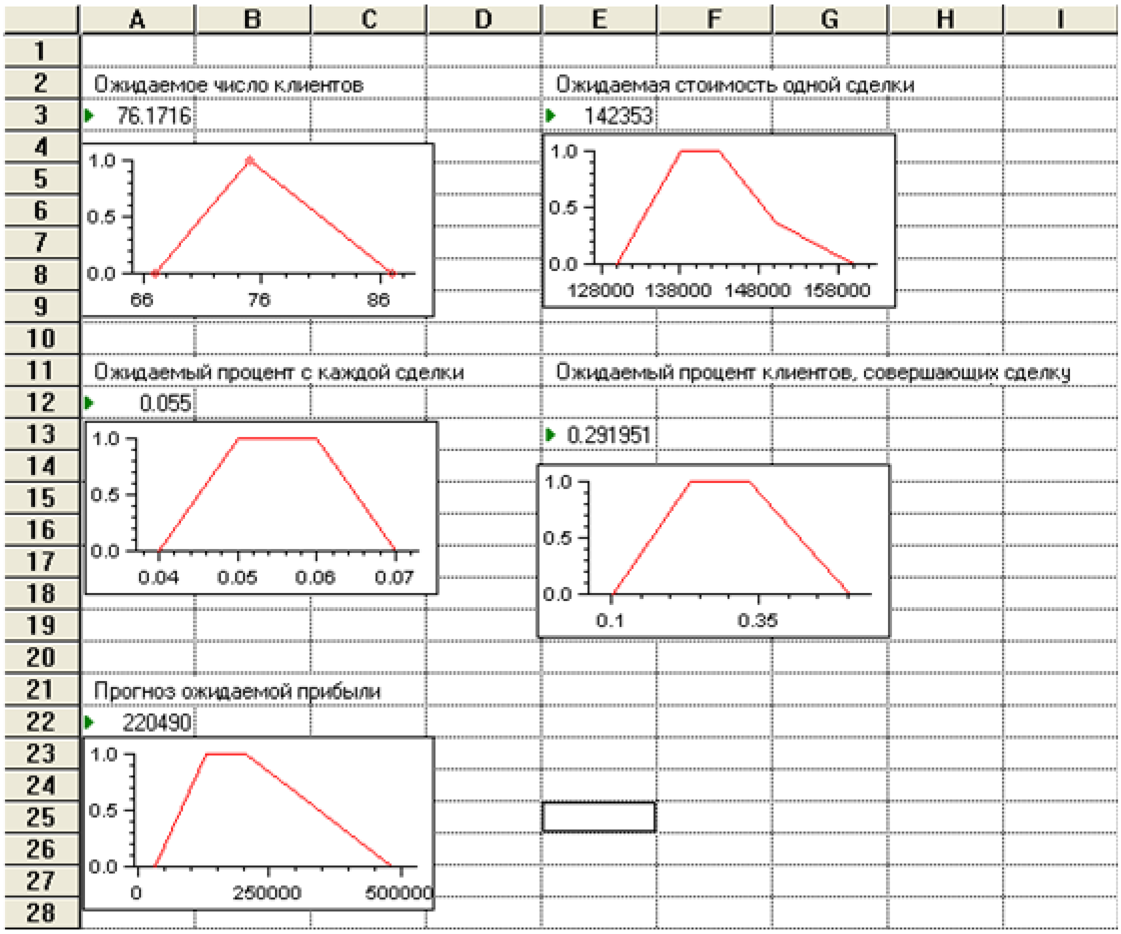


Рис. 2.12. Отображение описанной ситуации

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что, очевидно, фирма получит прибыль в диапазоне от 130 000 до 206 000 руб. (рис. 2.13).

Для этих величин значение функции принадлежности результата наибольшее и равно единице. Ценность такого расчета состоит в том, что менеджер может оценить объем прибыли для нелучших условий (пессимистический вариант) и в том случае, когда условия для бизнеса будут наиболее благоприятными (оптимистический вариант).

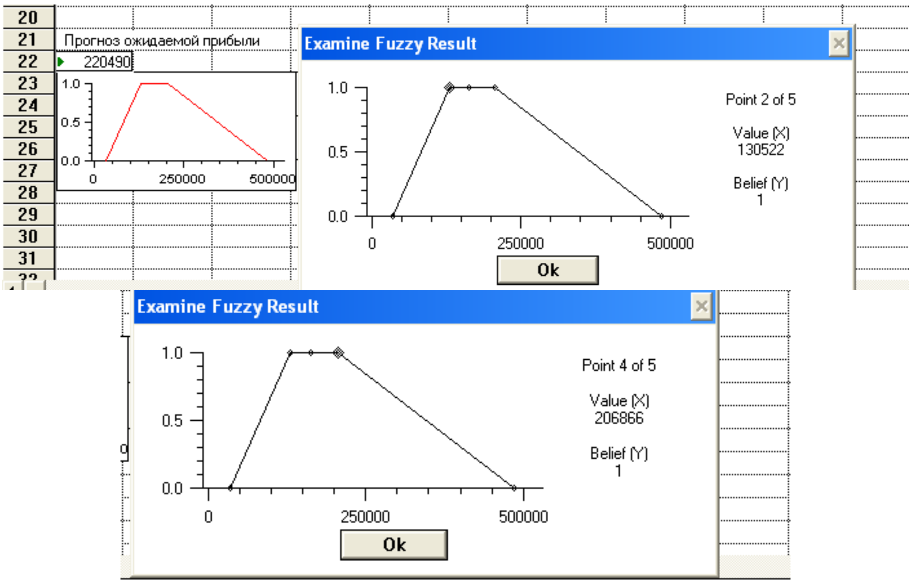


Рис. 2.13. Результат решения

Задание 2.2 *(для самостоятельной работы)*

1. Руководствуясь вышеизложенным материалом, провести решение описанной в примере задачи для получения первоначальных навыков работы с таблицей FuziCalc.

2. Разработать собственную задачу и провести ее решение.

3. Подготовить отчет.

Логические операции над нечеткими множествами (числами)

Для нечетких чисел определены следующие основные операции:

– пересечение $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$;

– объединение $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$;

– дополнение $\bar{\tilde{A}}$.

Выполнение этих операций для нечетких множеств состоит в преобразовании соответствующих функций принадлежности:

– для пересечения $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} \cap \mu_{\tilde{B}}$, при этом возможны два вида формализации: через операцию min $\mu_{\tilde{C}} = \min\{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}\}$ или операцию умножения $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} \cdot \mu_{\tilde{B}}$;

– для объединения $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} \cup \mu_{\tilde{B}}$, при этом возможны следующие формализации: через операцию max $\mu_{\tilde{C}} = \max\{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{B}}\}$, операцию сложения $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}}, \text{ если } \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} \le 1, \\ 1, \text{ если } \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} > 1 \end{cases}$, через операцию ограниченной суммы $\mu_{\tilde{C}} = \mu_{\tilde{A}} + \mu_{\tilde{B}} - \mu_{\tilde{A}} \cdot \mu_{\tilde{B}}$;

– для дополнения $\mu_{\bar{\tilde{A}}} = 1 - \mu_{\tilde{A}}$.

В таблице FuziCalc для выполнения операции пересечения предусмотрена специальная функция FzIntsct, для объединения – FzUnion. Специальной функции для реализации операции дополнения нечеткого множества в таблице FuziCalc не предусмотрено, поэтому ее приходится программировать пользователю.

Для осуществления указанных операций в таблице должны быть выбраны соответствующие операнды, которые заданы в ячейках A.3 (нечеткое множество A) и D.3 (нечеткое множество B), определенные в диапазоне (0,1). Для проведения соответствующей операции необходимо активировать клавишу Formula на панели инструментов. В выпадающем меню активируется опция Paste Function…, после чего появляется список функций, реализуемый в таблице FuziCalc (рис. 2.14). На этом же рисунке представлены результаты реализации операций пересечения и объединения.

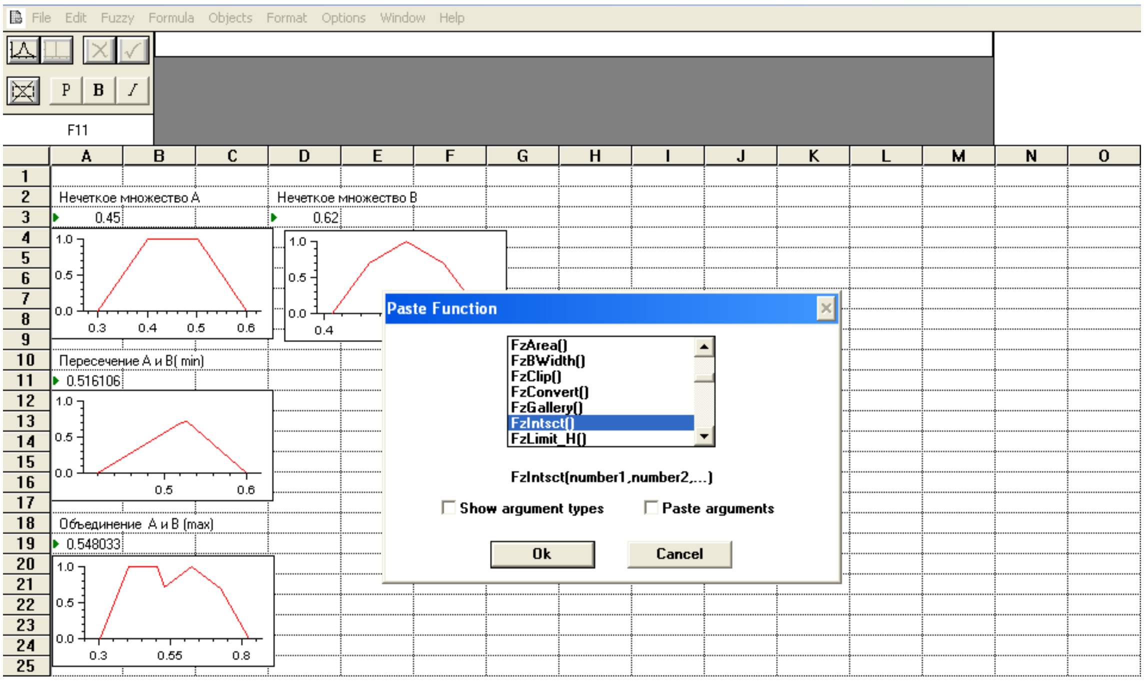


Рис. 2.14. Список функций

Поскольку таблица FuziCalc преимущественно рассчитана на вычисления, в ней отсутствует возможность непосредственной реализации операции дополнения. Поэтому она программируется пользователем с использованием дополнительных процедур.

В простейших случаях возможно непосредственное построение дополнения. На рис. 2.15 представлено нечеткое множество с треугольной функцией принадлежности, определенной на универсальном множестве (0,1). Тогда функция принадлежности дополнения может быть получена преобразованием двугорбой функции принадлежности (см. рис. 2.15).

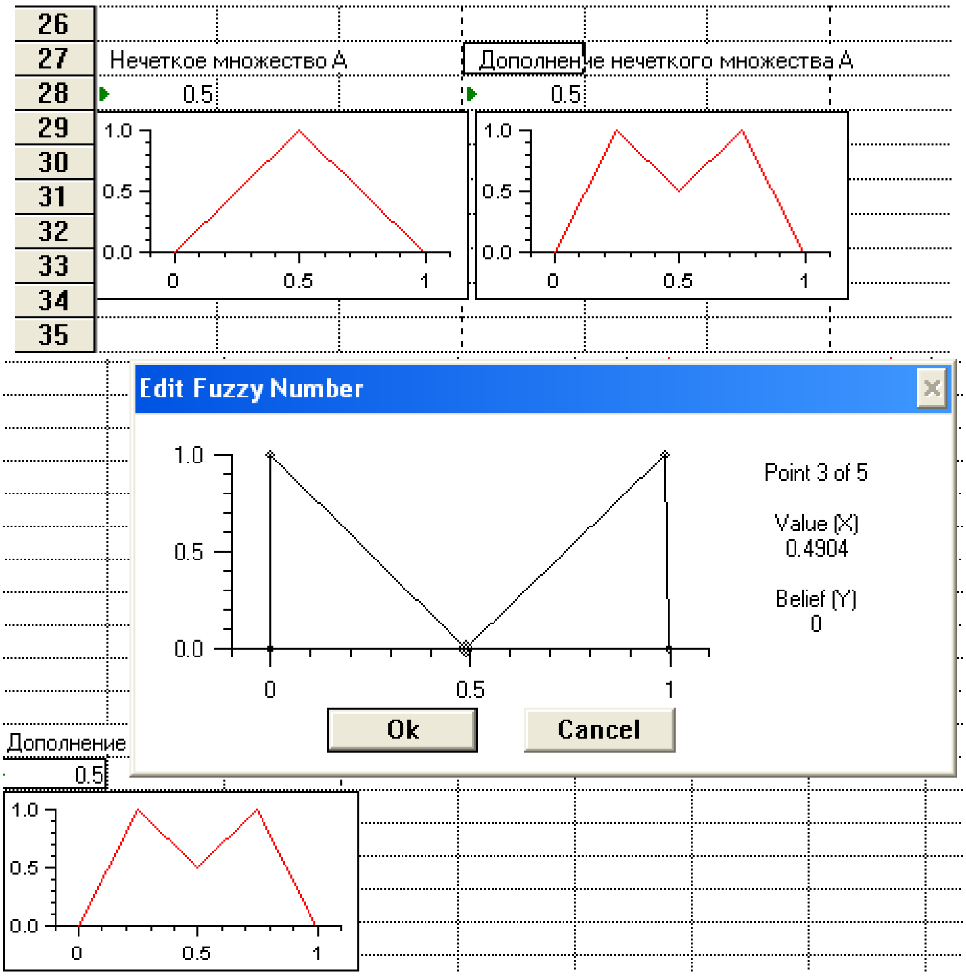


Рис. 2.15. Двугорбая функция принадлежности

Когда такие простые преобразования невозможны, дополнение можно получить с помощью вспомогательных нечетких множеств и соответствующих операций над ними либо использовать дополнение Ягера и Сугено (см. п. 1.3 «Основные операции над нечеткими множествами»).

На рис. 2.16 представлены вспомогательные множества A1, A2, A3, к которым применяется операция FzUnion. Нетрудно увидеть, что в результате будет построено дополнение нечеткого множества A.

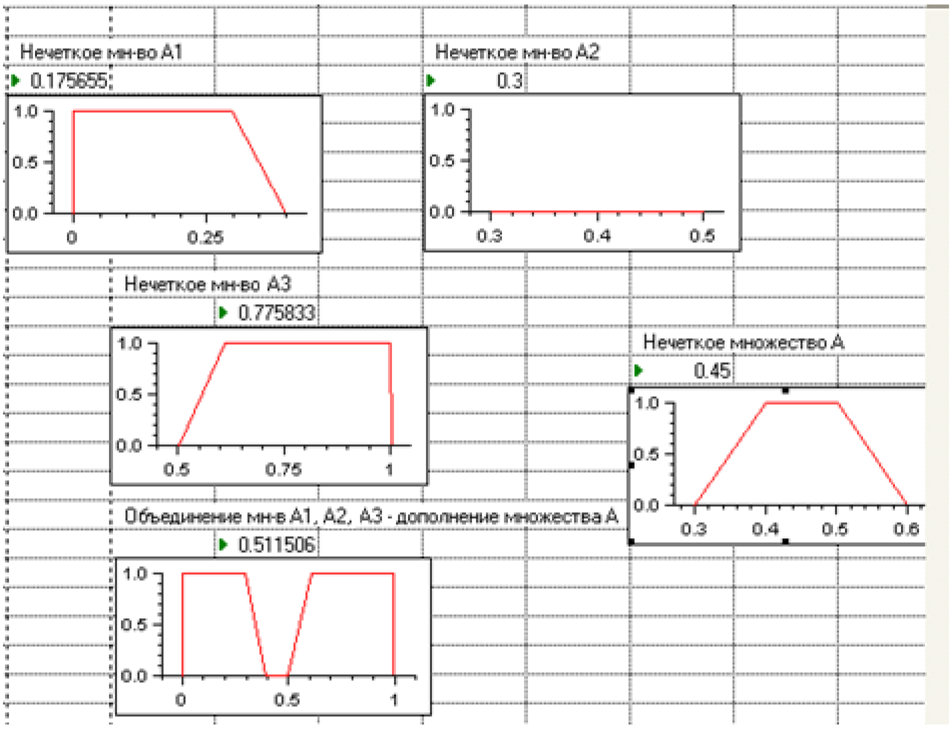


Рис. 2.16. Вспомогательные множества

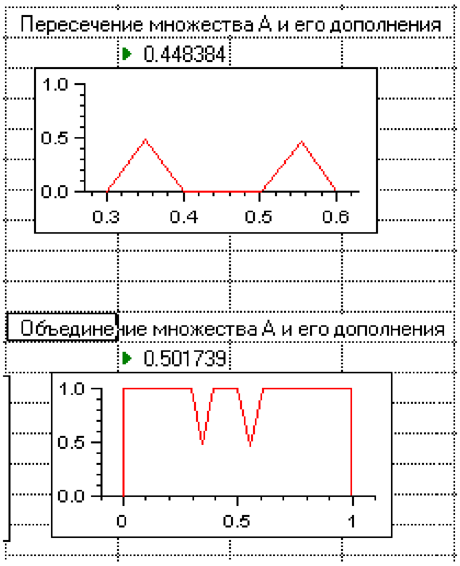


Рис. 2.17. Отсутствие принципа исключения третьего

Отметим очень важную особенность нечетких множеств, которая составляет их принципиальное отличие от классических множеств. В классической теории множеств выполняются следующие соотношения: $A \cap \bar{A} = 0$ (0 – пустое множество); $A \cup \bar{A} = U$ (U – универсальное множество), иными словами, пересечение множества с его собственным дополнением всегда ложно, а объединение всегда истинно. Это свойство известно еще как «принцип исключения третьего». Для нечетких множеств это свойство не выполняется $A \cap \bar{A} \neq 0$, $A \cup \bar{A} \neq U$ (рис. 2.17).

Задание 2.3. Основные свойства операций над нечеткими множествами

Известно, что операции объединения и пересечения четких множеств являются коммутативными, ассоциативными и обладают свойствами дистрибутивности по отношению друг к другу. Используя описанные операции над нечеткими множествами и средства их реализации в электронной таблице FuziCalc, проверить выполнение свойств 1 – 4.

1. $\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A};$

2. $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}, \tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A};$

3. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C}$, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C}$.

4. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$.

Задание 2.4. Особенности нечеткой арифметики

Выполнение арифметических операций с нечеткими числами имеет ряд особенностей, которые связаны с тем, что пары операций «сложение – вычитание» и «умножение – деление» не позволяют отыскать соответственно противоположное и обратное нечеткое число, кроме того, $(\tilde{A} - \tilde{B}) + \tilde{B} \neq \tilde{A}$, $(\tilde{A} / \tilde{B})\tilde{B} \neq \tilde{A}$. Эти обстоятельства не позволяют получить точное решение нечетких уравнений.

Для проверки этого утверждения предлагается решить простое нечеткое уравнение $\tilde{A}x + \tilde{B} = \tilde{C}$, задав самостоятельно значения его коэффициентов, а затем проверить путем обратной подстановки, является ли найденное решение точным.

Пример 2.2. Оценка недвижимости. Оценка недвижимости – особая сфера профессиональной деятельности на рынке недвижимого имущества и в то же время необходимый момент при совершении практически любой операции с недвижимостью, начиная от куплипродажи или сдачи в аренду, завершая принятием решений о реализации проектов строительства или реконструкции, включении объектов недвижимости в уставной капитал, выкупе государством объектов недвижимости.

Оценка – сложный процесс, состоящий в определении денежного эквивалента стоимости объекта недвижимости. При оценке недвижимости используют различные подходы: доходный, рыночный и затратный.

Доходный подход в отличие от рыночного и затратного направлен на получение данных об объекте недвижимости с точки зрения инвестора. Объект недвижимости в этом случае рассматривается только как источник дохода. К недостаткам данного подхода относится построение всех расчетов на основе прогнозных данных и предварительных заключений экспертов. В этих условиях целесообразно применение нечетких чисел и нечетких вычислений.

Пусть имеется некоторый объект недвижимости. Для оценки нам необходимо сравнить его хотя бы с одним аналогичным объектом.

Примерные критерии оценки таковы:

– местоположение;
– удаленность от транспортных магистралей;
– наличие вспомогательных помещений;
– общее состояние;
– внутренняя отделка;
– наличие территории для парковки и т. п;
– другие критерии по выбору оценщика.

Вес каждого критерия оценщик выбирает самостоятельно. Пример представлен в оценочной табл. 2.1.

Таблица 2.1. Оценочная таблица представлений

1	Критерий	Вес	Объект оценки	Аналог1	Аналог2	Аналог3
2	Местоположение	0.25	4	4	5	3
3	Удаленность транспортных магистралей	0.15	5	4	3	4
4	Наличие вспомогательных помещений	0.2	4	5	3	5
5	Общее состояние	0.15	3	4	4	5
6	Внутренняя отделка	0.1	5	5	4	5
7	Наличие территорий для парковки	0.1	4	3	4	5
8	Другие критерии	0.05	4	5	3	4
9	Цена		?	365	320	370
10			1.00586	1.00586	1.25732	0.754393
11			0.754393	0.603515	0.452636	0.603515
12			0.804686	1.00586	0.603515	1.00586
13			0.452636	0.603515	0.603515	0.754393
14			0.502929	0.502929	0.402343	0.502929
15			0.402343	0.301757	0.402343	0.502929
16			0.201172	0.251464	0.150879	0.201172
17	Сумма		4.12402	4.2749	3.87255	4.32519

Все оценки имеют вид нечетких треугольных чисел. Умножая оценки по критериям на соответствующие веса и затем суммируя полученные значения, определим предполагаемые оценки аналогов. Зная их цены, можем спрогнозировать искомую цену объекта по формуле

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i / C_i}{n} C,$$

где P – стоимость оцениваемого объекта; P_i – известные цены аналогичных объектов недвижимости; C_i – оценки этих объектов; C – оценка этого объекта.

Для применения доходного метода вместо цены объекта сравниваются арендные ставки. В результате получаем вероятную арендную ставку, а также потенциальную стоимость объекта (табл. 2.2).

Таблица 2.2. Результирующая таблица

Площадь		609	650	595	600	
Ставка аренды			600	550	630	
		142679	140.354	142.025	145.658	
		588.412				
Потенциальный валовой доход		358343				
Коэффициент недоиспользования	20%	71668.6				
Действительный валовой доход		286674				
Операционные расходы	20%	57334.9				
Чистый операционный доход		229340				
Стоимость объекта		819070				

Умножая площадь на ставку аренды, получаем потенциальный валовой доход. Затем вычитаем из дохода 20 % – нормативный коэффициент недоиспользования, получаем действительный валовой доход, вычитаем еще 20 % на операционные расходы, получаем чистый операционный доход.

Затем делим полученный результат на коэффициент капитализации, обычно принимаемый за 0,28, и получаем стоимость объекта.

Задание 2.5

1. Выполнить расчеты по приведенному примеру.
2. Выбрать другой вариант функций принадлежности. Провести расчеты и сравнить полученные результаты.
3. Разработать собственный пример и провести расчеты.
4. Подготовить отчет.

Задание 2.6. Расчет ожидаемого дохода от продажи продукции

Компании, производящей некоторую продукцию, например стальные трубы, необходимо оценить величину чистого приведенного дохода с учетом прогнозируемого объема и цены продаж. Предполагается, что в первый год ожидается объем продаж в диапазоне 93 – 113 т., во второй – 172 – 212 т., в третий – 160 – 220 т. Цена продаж планируется в диапазоне 296 – 326 тыс. руб. за тонну.

Чистый приведенный доход рассчитывается по формуле $NPV = \sum_{k=1}^{3} \frac{C_k}{(1+r)^k}$, где $C_k = V_k \cdot S$, V_k – предполагаемый объем продаж в k-периоде; S – предполагаемая цена продаж; r – ставка дисконтирования, учитывающая уровень инфляции, обычно может находиться в пределах от 0,06 до 0,1.

Для оценки значения чистого приведенного дохода все параметры расчета представляются нечеткими числами, вид функций принадлежности выбирается самостоятельно.

3. НЕЧЕТКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В литературе по теории нечетких множеств обычно используется термин «нечеткие отношения», допуская при этом смешивание двух понятий из теории множеств: «отображение» и «отношение». На наш взгляд, будет более корректным в математическом смысле разделить эти понятия и в теории нечетких множеств. Для того чтобы обосновать предлагаемый подход, приведем определения отображения и отношения множеств из классической теории.

Пусть $X = \{x_i : i = \overline{1, I}\}$ и $Y = \{y_j : j = \overline{1, J}\}$ некоторые множества и $\Gamma \subseteq X \times Y$ соответствие, определенное на прямом произведении множеств X и Y, т. е. для каждого $x_i \in X$ существует $y_j \in Y$ такое, что $(x_i, y_j) \in \Gamma$. Такое всюду определенное соответствие называется отображением X в Y и может быть записано как $\Gamma{:}X \to Y$ [11, 12]. Важным частным случаем отображения является отображение множества самого на себя $\Gamma{:}X \to X$, которое получило название «отношение».

Для того чтобы различить отображение и отношение, для последнего используют символ R (*relation*) $R{:}X \to X$ или $R{:}X$. В классической теории множеств термин «отношение» используется для обозначения различных видов отображения множества самого на себя. Отметим, что в ряде работ нечеткое отображение представляется как многомерное нечеткое отношение, собственно нечеткое отношение как унитарное нечеткое отношение.

Следует отметить, что понятия нечеткого отображения и нечеткого отношения наряду с понятием нечеткого множества следует отнести к фундаментальным основам всей теории нечетких множеств.

3.1. Нечеткое отображение и способы его задания

В общем случае нечетким отображением, заданным на универсальных множествах U_1, U_2, ..., U_n, называется некоторое фиксированное нечеткое подмножество декартова произведения $U_1 \times U_2 \times, ..., \times U_n$. Так же как и в случае обычных множеств, чтобы охарактеризовать количество универсальных множеств, на основе которых строится то или иное нечеткое отображение, принято называть нечеткое отображение между элементами двух универсальных множеств бинарным, между элементами трех множеств – тернарным, в общем случае – n-арным. При этом на вид и форму функций принадлежности нечеткого отображения предварительно не накладывается никаких ограничений.

Для простоты дальнейшего изложения будем рассматривать бинарные отображения. Это не ограничивает общности рассмотрения, так как приводимые соотношения легко обобщаются на любое число универсальных множеств.

Пусть U_1 и U_2 универсальные множества. Если U является декартовым произведением $U = U_1 \times U_2$, то нечеткое отображение определяется как нечеткое подмножество универсального множества U $\mu_{\tilde{\Gamma}}: U_1 \times U_2 \to [0, 1]$.

Значение $\mu_{\tilde{\Gamma}}(u_i,\, u_j)$ для конкретной пары $(u_i,\, u_j) \in U_1 \times U_2$ характеризует субъективную степень выполнения соответствия $u_i \tilde{\Gamma} u_j$. Существует несколько форм задания отображений. Задание отображения $\tilde{\Gamma}$ на множестве U может быть выполнено перечислением всех пар $(u_i, u_j) \in U$ $(i, j = \overline{1, n})$, для которых выполняется отношение $\tilde{\Gamma}$. Кроме того, отображения могут задаваться в виде матриц и графов.

Пример 3.1. Сотрудниками ведущей консалтинговой компании США Бостонской консультационной группы (БКГ) для оценки стратегических бизнес-единиц (СБЕ) разработана система оценок

$C = \{c_1$ = «звезды», c_2 = «денежные дойные коровы», c_3 = «вопросительные знаки», c_4 = «собаки»$\}$. Пусть множество анализируемых СБЕ состоит из трех элементов СБЕ = {сбе$_1$, сбе$_2$, сбе$_3$}. Тогда нечеткое отображение множества СБЕ на множество оценок, представляющее прогноз перспектив развития стратегических бизнес-единиц, может быть, например, задано матрицей (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Множество стратегических бизнес-единиц

СБЕ	c_1	c_2	c_3	c_4
сбе$_1$	0,4	0,3	0,1	0,1
сбе$_2$	0,1	0,3	0,6	0,5
сбе$_3$	0,4	0,3	0,2	0,7

Носителем нечеткого отображения $\tilde{\Gamma} \subseteq X \times Y$ называют подмножество декартова произведения $X \times Y$ вида $\text{Supp}\tilde{\Gamma} = \{\frac{(x_i, x_j)}{x_i, x_j} \in X \times$ $\times\, Y, \mu_{\tilde{\Gamma}}(x_i,\ y_j) > 0)\}$. Носитель нечеткого отображения следует понимать как множество пар на $X \times Y$, для которых может быть установлено соответствие $x_i \tilde{\Gamma}_{y_j}$.

В практических приложениях встречаются задачи, когда непосредственное построение нечеткого отображения затруднено или, возможно, приведет к неудовлетворительным решениям из-за некорректного выбора оценок, определяющих степень выраженности соответствия, представляемого отображением.

Пример 3.2. Предположим, необходимо построить нечеткое отображение, которое содержательно описывает упрощенную ситуацию поиска неисправности в автомобиле. С этой целью в качестве первого универсума рассмотрим множество предпосылок или причин неисправности, в котором x_1 – неисправность аккумулятора, x_2 – неисправность карбюратора, x_3 – низкое качество бензина, x_4 – неисправность системы зажигания. В качестве второго универсума рассмотрим множество заключений или проявлений неисправности, где y_1 – двигатель не запускается, y_2 – двигатель работает неустойчиво, y_3 – двигатель не развивает полной мощности. При этом между каждым элементом множества предпосылок и каждым элементом множества следствий существует некоторая причинная взаимосвязь.

Особенность построения нечеткой модели для описываемой ситуации заключается в том, что рассматриваемая причинная взаимосвязь не является однозначной. Более того, исходя из субъективного опыта конкретного механика, марки автомобиля, условий его эксплуатации и учета других факторов, эта причинная взаимосвязь наиболее адекватно может быть представлена в виде бинарного нечеткого отображения, заданного на базисных множествах X и Y. В этом случае функция принадлежности этого бинарного нечеткого отображения количественно описывает степень уверенности в том, что та или иная причина неисправности может привести к тому или иному следствию.

Применительно к нашему примеру конкретное нечеткое отображение может быть записано в форме списка следующим образом: $= \{(<x_1, y_1>, 1), (<x_1, y_2>, 0{,}1), (<x_1, y_3>, 0{,}2), (<x_2, y_1>, 0{,}8), (<x_2, y_2>, 0{,}9), (<x_2, y_3>, 1), (<x_3, y_1>, 0{,}7), (<x_3, y_2>, 0{,}8), (<x_3, y_3>, 0{,}5), (<x_4, y_1>, 1), (<x_4, y_2>, 0{,}5), (<x_4, y_3>, 0{,}2)\}$. Поскольку нечеткое отображение бинарное и конечное, оно может быть представлено в форме табл. 3.2.

Таблица 3.2. Нечеткое отображение для диагностики неисправности в автомобиле

Причина неисправности	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0,1	0,2
x_2	0,8	0,9	1
x_3	0,7	0,8	0,5
x_4	1	0,5	0,2

Для того чтобы представить это нечеткое отображение в форме нечеткого графа, изобразим на плоскости его вершины, в качестве которых выступают элементы множеств X и Y. Соединим эти вершины дугами, направленными от вершин, соответствующих элементам множества X, к вершинам, соответствующим элементам множества Y. Рядом с каждой из дуг запишем значение ее функции принадлежности. Тем самым получим нечеткий граф рассматриваемого отображения (рис. 3.1).

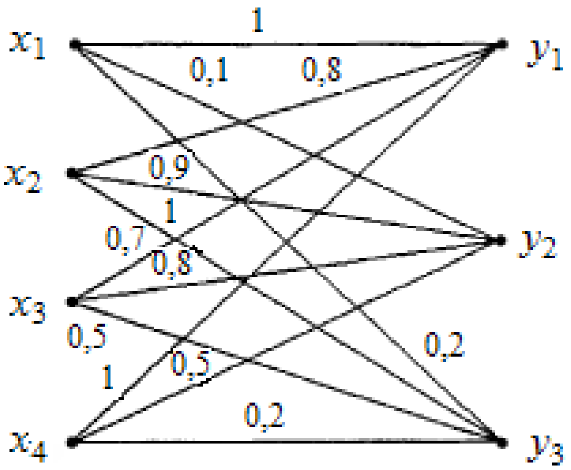


Рис. 3.1. Нечеткий граф отображения (стрелки дуг, направленных от вершин x_i к вершинам y_j, для удобства не указаны)

Что касается аналитического способа представления данного нечеткого отношения, то поскольку отсутствует математическое выражение для записи соответствующей функции принадлежности, использовать этот способ в данном случае не представляется возможным.

Задание 3.1

Модель «продукция / рынок», используемая в стратегическом бизнес-планировании и известная также под названием матрица «продукция / рынок», или «продукция / рыночная определенность», является классической моделью для разработки корпоративной стратегии. Она представляет собой практический инструмент для планирования выпускаемой продукции и рынков ее сбыта в зависимости от степени неопределенности перспектив продажи продукции или возможностей проникновения конкретной продукции на тот или иной рынок. Эта матрица строится исходя из субъективных оценок менеджеров с учетом того обстоятельства, что гораздо проще продать имеющимся покупателям уже известную продукцию, чем совершенно новую или малоизвестную. При этом под продукцией понимаются как товары, так и оказываемые услуги. Исходя из практического опыта также известно, что продавать существующий ассортимент товаров или услуг категориям потребителей, близким к тем, которые уже приобретали их ранее, проще, чем осваивать совершенно новые рынки.

Рассмотренные обстоятельства могут служить основой для задания бинарного нечеткого отображения, заданного на базисных множествах $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. При этом элементы базисных множеств имеют следующий содержательный смысл: x_1 – имеющийся известный рынок, x_2 – новый рынок, связанный с имеющимся, x_3 – совершенно новый рынок, y_1 – продукция, выпускаемая в настоящее время, y_2 – новая продукция, связанная с выпускаемой, y_3 – совершенно новая продукция. Функция принадлежности рассматриваемого бинарного нечеткого отображения количественно описывает степень уверенности в успешной продаже различного типа продукции на том или ином рынке. При этом в стратегическом бизнес-планировании используется следующее конкретное нечеткое отображение, записанное в форме списка: $R = \{(<x_1, y_1>, 0{,}9), (<x_1, y_2>, 0{,}6), (<x_1, y_3>, 0{,}3), (<x_2, y_1>, 0{,}6), (<x_2, y_2>, 0{,}4), (<x_2, y_3>, 0{,}2), (<x_3, y_1>, 0{,}3), (<x_3, y_2>. 0{,}2), (<x_3, y_3>, 0{,}1)\}$. Наиболее часто данная модель представляется в форме табл. 3.3.

Таблица 3.3. Нечеткое отображение модели «Продукция / Рынок»

Рынок сбыта	Продукция, выпускаемая в настоящее время	Новая продукция, связанная с выпускаемой	Совершенно новая продукция
Имеющийся известный рынок	0,9	0,6	0,3
Новый рынок, связанный с имеющимся	0,6	0,4	0,2
Совершенно новый рынок	0,3	0,2	0,1

По данным табл. 3.3 построить матрицу и граф нечеткого отображения.

Пример 3.3. Некоторая фирма предполагает начать выпуск нового изделия. При этом возможны несколько альтернативных вариантов $P = \{P_i : i = \overline{1, I}\}$. На рынок следует представить изделие, которое заинтересует большее число потребителей.

Для оценки изделий эксперты компании разработали систему критериев $C = \{c_j : j = \overline{1, J}\}$, и было построено нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_1 : P \to C$. Отображение будет нечетким, так как для нового изделия оценки критериального соответствия точно определены быть не могут.

Если потенциальным потребителям $X = \{x_k : k = \overline{1, K}\}$ предложить для оценки непосредственно новые изделия, то вполне возможно, что эти оценки будут недостаточно объективными, например, из-за консервативности предпочтений, неспособности оценить новый продукт. Поэтому более объективной будет оценка потенциальными потребителями критериев отбора, поскольку они будут в большей степени соответствовать пользовательским предпочтениям, т. е. будет построено нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_2 : X \to C$.

Для того чтобы получить мнение потенциальных потребителей, надо построить композицию нечетких отображений $\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2 = \tilde{\Gamma}_3 : X \to P$. Методы обработки полученного отображения для определения окончательного решения будут представлены далее.

Рассмотрим варианты формального определения композиции нечеткого отображения. Пусть $\tilde{\Gamma}_1$ – нечеткое отображение $\tilde{\Gamma}_1 : X \to Y$ на $X \times Y$ и $\tilde{\Gamma}_2 : Y \to Z$ на $Y \times Z$. Нечеткое отображение между $\tilde{\Gamma}_3 : X \to Z$, обозначаемое $\tilde{\Gamma}_1 {}^\circ \tilde{\Gamma}_2$, определенное через $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$ соотношением

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2}(x_i,\ Z_k) = \max_i \min_i \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i,\ y_j), \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j,\ z_k)\} \tag{3.1}$$

по всем k, называется «max-min» – композицией отображений $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$. Аналогичным образом может быть построена и «min-max» – композиция отображений $\tilde{\Gamma}_1$ и $\tilde{\Gamma}_2$

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2}(x_i,\ Z_k) = \max_i \min_j \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j),\ \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)\}. \tag{3.2}$$

Поскольку формализацией операций max и min могут быть операции $\cup$ (объединение) и $\cap$ (пересечение) соответственно, то соотношения (3.1) и (3.2) могут быть записаны в следующем виде:

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2}(x_i, Z_k) = \cup_i \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)_{j e \overline{[1, J]}}\}, \tag{3.3}$$

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2}(x_i, Z_k) = \cap_i \{\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_i, y_j) \cap \mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_j, z_k)_{j e \overline{[1, J]}}\}.$$

Как следует из соотношения (3.3), для построения «max-min» – композиции надо построить пересечение (min) элементов первой строки матрицы, задающей отображение $\tilde{\Gamma}_1$, с элементами первого столбца матрицы столбцов матрицы $\tilde{\Gamma}_1$ числу строк матрицы $\tilde{\Gamma}_2$. Известна также и макси-мультипликативная композиция (max-mult), в которой операция пересечения заменяется умножением. Применение различных вариантов композиции нечетких отображений зависит от условий решения задачи и предпочтений лица, принимающего решение. В композиции «max-min» первоначально получаются наихудшие оценки, из которых затем выбирается лучшая; аналогичная ситуация имеет место для композиции «max-mult» с той лишь разницей, что здесь усиливается влияние минимального значения оценки. В композиции «min-max» первоначально ориентируются на наилучшие оценки, что характерно для оптимистической позиции, затем проявляется некоторая осторожность и в качестве окончательной оценки выбирается худший вариант среди лучших.

$\tilde{\Gamma}_1$			
	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0

$\tilde{\Gamma}_2$				
	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

$\tilde{\Gamma}_1 \circ \tilde{\Gamma}_2$				
	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,1	0,7
x_2	0,9	0,5	1	0,5

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1\circ\tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_1) = [\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_1)\cap\mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_1, z_1)]\cup[\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_2)\cap\mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_2, z_1)]\cup$$
$$\cup[\mu_{\tilde{\Gamma}_1}(x_1, y_3)\cup\mu_{\tilde{\Gamma}_2}(y_3, z_1)] = (0{,}1\cap 0{,}9)\cup(0{,}7\cap 0{,}3)\cup(0{,}4\cap 0{,}1) =$$
$$= 0{,}1\cup 0{,}3\cup 0{,}1 = 0{,}3;$$
$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1\circ\tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_2) = (0{,}1\cap 0)\cup(0{,}7\cap 0{,}6)\cup(0{,}4\cap 1) = 0\cup 0{,}6\cup 0{,}4 = 0{,}6;$$
$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1\circ\tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_3) = 0{,}1;$$
……………….;

……………….;

$$\mu_{\tilde{\Gamma}_1\circ\tilde{\Gamma}_2}(x_1, z_5) = 0{,}5.$$

Задание 3.2

По данным примера 3.3 построить композиции «min-max» и «max-mult». Сравнить полученные результаты.

Задание 3.3

Идентификация состояния здания. В результате каких-то воздействий (например, землетрясения) строительные конструкции получают различные повреждения. Пусть $Y = \{y_1, y_2, ..., y_l\}$ – множество видов потенциально возможных повреждений. Например, y_1 – усталостное, или разрывное повреждение, y_2 – пластическая деформация, y_3 – нестабильность, y_4 – прогрессирующее разрушение. Для этих повреждений может быть построено множество признаков $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Например, x_1 – много трещин, x_2 – большие трещины, x_3 – чрезмерная деформация.

Пусть $Z = \{z_1, z_2, ..., z_m\}$ – оценки возможного состояния сооружения, например, «состояние сильного повреждения». Не исключены ситуации, когда оценка потенциально возможного повреждения затруднена или невозможна, например, надо разбирать конструкцию, эксперты не могут попасть внутрь сооружения по соображениям безопасности. В то же время экспертам доступны некоторые признаки $x_i \in X$. На основе профессиональных знаний эксперты могут указать соответствие между множествами $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ и $Y = \{y_1, y_2, ..., y_l\}$, т. е. задать отображение из X в $\Gamma: X \to Y$.

Однако точно оценить параметры этого отображения невозможно и поэтому его следует рассматривать как нечеткое $\tilde{\Gamma}: X \to Y$.

Кроме того, эксперты могут задать и нечеткое отображение $\tilde{S}: Y \to Z$, устанавливающее соответствие между потенциально возможными повреждениями и общим состоянием сооружения.

Поскольку эксперты могут оценить только признаки, то необходимо установить соответствие между множеством признаков и множеством, характеризующим общее состояние сооружения, что можно сделать с помощью композиции $\tilde{\Gamma} \circ \tilde{S}$.

Пусть, например, заданы отображение $\tilde{\Gamma}$ (табл. 3.4) и отображение $\tilde{S}$ (табл. 3.5).

Таблица 3.4. Нечеткое отображение повреждения – деформации

Признаки повреждения		Признаки деформации			
		y_1 – усталость и разрыв	y_2 – пластическая деформация	y_3 – нестабильность	y_4 – прогрессирующее разрушение
$\tilde{\Gamma}$	x_1 – много трещин	0,9	0,2	0,4	0,4
	x_2 – большие трещины	0,8	0,3	0,7	0,8
	x_3 – чрезмерная деформация	0,3	0,8	0,9	0,7

Таблица 3.5. Нечеткое отображение деформации – степень повреждения

Признаки деформации		Состояние сильного повреждения Z
$\tilde{S}$	y_1	0,4
	y_2	0,3
	y_3	0,8
	y_4	1

Используя приведенные выше данные, построить «min-max», «max-min» и «max-mult»-композиции нечетких отображений $\tilde{\Gamma} \circ \tilde{S}$, определить наиболее возможный уровень повреждения конструкции в зависимости от уровня выявленных трещин, сопоставить результаты различных композиций.

Задание 3.4

Рассмотрим типичную ситуацию, связанную с консалтингом в области выбора профессии для последующего обучения и получения соответствующей специальности. С этой целью построим нечеткую модель, основанную на двух бинарных нечетких отображениях $\tilde{S}$ и $\tilde{T}$. Первое из этих нечетких отношений строится на двух базисных множествах X и Y, а второе – на двух базисных множествах Y и Z. Здесь X описывает множество специальностей, по которым проводится набор на обучение, Y – множество психофизиологических характеристик, а Z – множество кандидатов на обучение. В интересуемом нас контексте нечеткое отображение $\tilde{s}$ содержательно описывает психофизиологическое профилирование специальностей, а $\tilde{T}$ – психофизиологическое профилирование кандидатов на обучение. Для конкретности пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}\}$ и $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$. Элементы универсумов имеют следующий содержательный смысл: x_1 – менеджер, x_2 – программист, x_3 – водитель, x_4 – секретарь-референт, x_5 – переводчик; y_1 – быстрота и гибкость мышления, y_2 – умение быстро принимать решения, y_3 – устойчивость и концентрация внимания, y_4 –зрительная память, y_5 – быстрота реакции, y_6 – двигательная память, y_7 – физическая выносливость, y_8 – координация движений, y_9 – эмоционально-волевая устойчивость, y_{10} – ответственность; z_1 – Петров, z_2 – Иванов, z_3 – Сидоров, z_4 – Васильева, z_5 – Григорьева. Конкретные значения функций принадлежности и рассматриваемых нечетких отображений представлены в табл. 3.6 и 3.7.

Таблица 3.6. Нечеткое отображение $\tilde{S}$ профилирования специальностей обучения

Психофизиологическая характеристика	Специальность				
	Менеджер	Программист	Водитель	Секретарь	Переводчик
Быстрота и гибкость мышления	0,9	0,8	0,3	0,5	0,7
Умение быстро принимать решения	0,9	0,5	0,9	0,4	0,8
Устойчивость и концентрация внимания	0,8	0,9	0,6	0,5	0,8
Зрительная память	0,4	0,3	0,5	0,5	0,2
Быстрота реакции	0,5	0,1	0,9	0,2	0,6
Двигательная память	0,3	0,2	0,8	0,2	0,2
Физическая выносливость	0,6	0,2	0,9	0,3	0,2
Координация движений	0,2	0,2	0,8	0,3	0,3
Эмоционально-волевая устойчивость	0,9	0,5	0,6	0,9	0,3
Ответственность	0,8	0,5	0,3	0,8	0,2

Таблица 3.7. Нечеткое отображение $\tilde{T}$ профилирования кандидатов на обучение

Психофизиологическая характеристика	Петров	Иванов	Сидоров	Васильева	Григорьева
Быстрота и гибкость мышления	0,9	0,8	0,7	0,9	1
Умение быстро принимать решения	0,6	0,4	0,8	0,5	0,6
Устойчивость и концентрация внимания	0,5	0,2	0,3	0,8	0,7
Зрительная память	0,5	0,9	0,5	0,8	0,4
Быстрота реакции	1	0,6	0,5	0,7	0,4
Двигательная память	0,4	0,5	1	0,7	0,8
Физическая выносливость	0,5	0,8	0,9	0,5	0,4
Координация движений	0,5	0,6	0,7	0,6	0,5
Эмоционально-волевая устойчивость	0,8	1	0,2	0,5	0,6
Ответственность	0,3	0,5	0,9	0,6	0,8

Матрицы нечетких отображений $\tilde{S}$ и $\tilde{T}$.

$$M_s = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.8 & 0.4 & 0.5 & 0.3 & 0.6 & 0.2 & 0.9 & 0.8 \\ 0.8 & 0.5 & 0.9 & 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.9 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 0.8 & 0.9 & 0.8 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.8 & 0.8 & 0.2 & 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.2 \end{vmatrix},$$

$$M_t = \begin{vmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.7 \\ 0.5 & 0.9 & 0.5 & 0.8 & 0.4 \\ 1 & 0.6 & 0.5 & 0.7 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.5 & 0.8 & 0.9 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.6 & 0.5 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.5 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.9 & 0.6 & 0.8 \end{vmatrix}.$$

Рассматриваемые нечеткие отображения удовлетворяют формальным требованиям, необходимым для построения их нечеткой композиции, на основе которой можно будет определить, какой из кандидатов наилучшим образом соответствует определенной профессии. Необходимо построить композицию нечетких отображений $\tilde{S} \circ \tilde{T}$.

Задание 3.5

Построить «min-max», «max-min» и «max-mult»-композиции нечетких отображений $\tilde{S}$ и $\tilde{T}$. Сравнить полученные результаты.

Частным случаем отображения множеств является отображение множества самого на себя, и в этом случае говорят об отношении множеств. Нечеткие отношения, т. е. отображение нечеткого множества самого на себя, являющиеся частным случаем нечетких отображений, встречаются в большом количестве задач из различных прикладных областей. Поэтому целесообразно более подробно рассмотреть основные вопросы, связанные с применением и преобразованиями именно нечетких отношений.

3.2. Нечеткие отношения

Понятие нечеткого отношения наряду с понятием самого́ нечеткого множества следует отнести к фундаментальным основам всей теории нечетких множеств. На основе нечетких отношений определяется целый ряд дополнительных понятий, используемых для построения нечетких моделей сложных систем. Нечеткое отношение обобщает понятие обычного отношения и часто заменяется терминами «нечеткая связь», «ассоциация», «взаимосвязь, или соотношение».

Параметры различных систем могут быть связаны между собой различного рода отношениями. Выделение отношений осуществляется по заранее выбранному признаку. Если нас интересует влияние параметра системы на ее производительность или качество выпускаемой продукции, то данная связь может быть описана различного вида отношениями: «влияет», «не влияет», «сильно влияет», «слабо влияет» и т. д. Наиболее распространенная форма задания отношений – словесное описание. Общепринятая формализация отношений осуществляется в соответствии со следующим определением: *отношением R на множестве U называется подмножество R множества U, определяемое декартовым произведением.*

Простейшими отношениями следует назвать такие, для которых можно четко указать, выполняются они или нет для элементов некоторых множеств X_1 и X_2.

В тех случаях, когда связи между параметрами системы выражены нечетко, целесообразно формализовать отношения в соответствии со следующим определением: *если множество U конечно и невелико, нечеткое отношение* $\tilde{R}$ *удобно задавать в матричном виде*. В этом случае матрица отношения представляет собой квадратную матрицу, строки и столбцы которой помечены элементами $u \in U$, и на пересечении строки u_i и столбца u_j записано значение $r_{ij} = \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j)$.

Пример 3.4. Пусть $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Определим на множестве U нечеткое отношение $\tilde{R}$ «намного больше». Матрица такого отношения может иметь следующий вид:

	1	3	5	7	9
1	0	0	0	0	0
3	0.2	0	0	0	0
5	0.1	0	0	0	0
7	0.8	0.4	0	0	0
9	1	0.8	0.5	0	0

Наглядностью обладает задание нечеткого отношения в виде нечеткого графа

$$\tilde{G} = (\tilde{U}, \tilde{V}),$$

где $\tilde{U} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ – множество вершин;

$$\tilde{V} = \left\{ \middle\rangle \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j)/(u_i, u_j) \middle\langle, \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j) > 0 \right\};$$

$(U_i, U_j) \in U$ – множество нечетких дуг (рис. 3.2). Очевидно, что как и в случае нечетких множеств, обычное четкое отношение можно рассматривать как частный случай нечеткого отношения, функция принадлежности которого принимает два значения: 0 и 1.

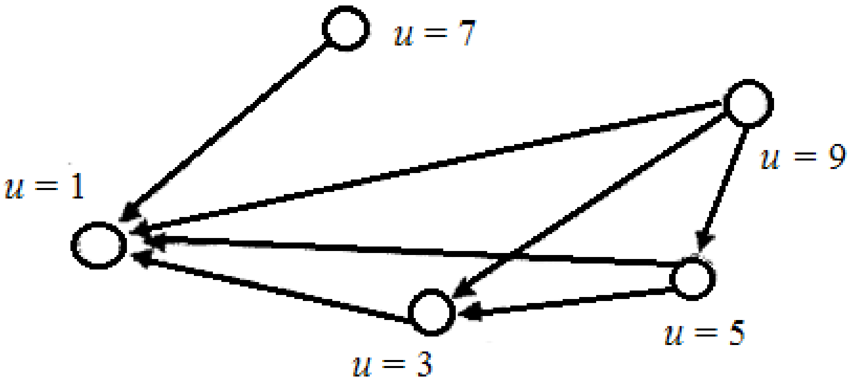


Рис. 3.2. Нечеткое отношение в виде нечетного графа

Дадим некоторые определения, характеризующие нечеткие отношения. Носителем нечеткого отношения $\tilde{R}$ на множестве U называют подмножество декартова произведения $U \times U$ вида

$\mathrm{Supp}\tilde{R} = \{((u_i, u_j))/((u_i, u_j)) \in U \cdot U, \mu_{\tilde{R}}(u_i,\ u_j) > 0\}$.

Носитель нечеткого отношения следует понимать как отношение на множестве U, связывающее все пары(u_i, u_j), для которых степень выполнения данного нечеткого отношения не равна нулю.

Для нашего примера

(u_1, u_3), (u_1, u_5), (u_1, u_7), (u_1, u_9), (u_3, u_5), (u_3, u_7), (u_3, u_9), (u_5, u_9).

По аналогии с нечеткими множествами определяется и множество α-уровня нечеткого отношения, т. е.

$R_\alpha = \{(u_i, u_j) \in U \cdot U,\ \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j) > \alpha\}$.

Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $\tilde{R}$ называется четкое (обычное) отношение R_α такое, что

$$R_\alpha = \begin{Bmatrix} 1, \text{если } \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j) \geq \alpha \\ 0, \text{если } \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j) < \alpha \end{Bmatrix}.$$

Очевидно, что из $\alpha_1 \leq \alpha_2$ следует $R_{\alpha_1} \geq R_{\alpha_2}$.

Теорема декомпозиции

Любое нечеткое отношение $\tilde{R}$ можно представить в виде $R = \bigcup\limits_{\alpha} \alpha \times R_\alpha,\ \ 0 < \alpha < 1,$ где $\alpha \times R_\alpha$ означает, что все элементы R_β умножаются на α.

Перейдем к рассмотрению операций над нечеткими отношениями, некоторые из которых представляют собой аналоги операций над нечеткими множествами, а некоторые присущи только нечетким отношениям:

1. Пересечением $\tilde{P} \cap \tilde{Q}$ нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое отношение, определяемое функцией принадлежности

$\mu_{\tilde{P}\cap\tilde{Q}}(u_i, u_j) = \mu_{\tilde{P}}(u_i, u_j) \wedge \mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j) = \min_{u_i u_j \in U}\{\mu_{\tilde{P}}((u_i, u_j), \mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j))\}$.

Пример 3.5. На универсальном числовом множестве $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ заданы нечеткие отношения $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$. Содержательный смысл отношения $\tilde{P}$ – «натуральное число x приближенно равно числу x_j» представлен матрицей

$$M_{\tilde{P}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отношения $\tilde{Q}$ – «натуральное число x значительно превосходит натуральное число x_j»

$$M_{\tilde{Q}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{Vmatrix},$$

пересечение этих отношений

$$M_{\tilde{P}\cap\tilde{Q}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Содержательно соответствует одновременному выполнению двух условий: «натуральное число x приближенно равно числу x_j» и «натуральное число x значительно превосходит натуральное число x_j».

2. Объединением нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{P} \cup \tilde{Q}$, определяемое функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{P}\cup\tilde{Q}}(u_i,\, u_j) = \mu_{\tilde{P}}(u_i, u_j) \vee \mu_{\tilde{Q}}(u_i\,, u_j) = \max\{\mu_{\tilde{P}}(u_i,\, u_j), \mu_{\tilde{Q}}(u_i,\, u_j), 0\}.$$

3. Разностью нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{\Omega}$, определяемое функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{\Omega}}(u_i, u_j) = \max_{\forall (u_i, u_j) \in U \times U} \left\{ \mu_{\tilde{P}}(u_i, u_j) - \mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j),\, 0 \right\}. \qquad (3.4)$$

В соотношении (3.4) под знаком max применяется обычная операция арифметической разности. Операция разности двух нечетких множеств, определенная соотношением (3.4), по аналогии с обычными множествами может также обозначаться знаком «/» $\tilde{\Omega} = \tilde{P}/\tilde{Q}$.

Для приведенного выше примера

$$M_{\tilde{\Omega}=}\begin{Vmatrix}1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.6 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0\\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0\end{Vmatrix},$$

которая содержательно соответствует выполнению двух условий: ««натуральное число x приближенно равно числу x_j» и «натуральное число x не превосходит значительно натуральное число x_j».

Симметрической разностью нечетких отношений $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ на $U \times U$ называют нечеткое бинарное отношение $\tilde{\theta} = \tilde{P} \dot{-} \tilde{Q}$, определяемое функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\theta}}(u_i, u_j) = [\mu_{\tilde{P}}(u_i, u_j) - \mu_{\tilde{\sigma}}(u_i, u_j)]$. Справедливо следующее соотношение: $\tilde{P} \dot{-} \tilde{Q} = (\tilde{P}/\tilde{Q}) \cup (\tilde{Q}/\tilde{P})$, т. е. симметрическая разность двух нечетких отношений равна объединению двух разностей нечетких отношений.

4. Дополнением нечеткого отношения $\tilde{R} \subseteq U \times U$ называют отношение $R\,\tilde{\tilde{R}}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{\tilde{R}}}(u_i, u_j) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j)$; $\forall u_i,\ u_j \in U \times U$.

5. Обратным отношением к отношению $\tilde{R}$ называют отношение $\tilde{R}^{-1}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(u_i, u_j) = 1 - \mu_{\tilde{R}}(u_i, u_j)$; $\forall u_i, u_j \in U \times U$.

Очевидно, что матрица $M^{-1}(\tilde{R})$ является транспонированной $M(\tilde{R})$.

Отношение $\tilde{R}_1$ включено в отношение $\tilde{R}$, если множество пар, для которых выполняется отношение $\tilde{R}_1$, находится в множестве пар, для которых выполняется отношение $\tilde{R}$. Так, например, отношение между параметрами Z_1 и Z_2, характеризуемое термином «много меньше», включено в отношение, характеризуемое понятием «меньше». Отметим, что обратное утверждение может не выполняться. Тот факт, что отношение $\tilde{R}_1$ включено в отношение $\tilde{R}$, обозначают следующим образом: $\tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}$.

Для нечетких отношений сохраняют свой смысл альтернативные и дополнительные операции над нечеткими множествами, описание которых приведено в [5].

На этапе формализации качественной информации важную роль играют отношения эквивалентности, порядка и доминирования. С помощью отношения эквивалентности могут выделяться классы свойств исследуемых объектов или систем, которые можно назвать в некотором смысле равноценными. Это отношение оказывается полезным для выявления во множестве первичных терминов подмножества терминов-синонимов. Отношение эквивалентности может также интерпретироваться как взаимозаменяемость. Отношение порядка определяет некоторый порядок расположения элементов множеств. Так, например, мы различаем понятия «раньше» и «позже» в случаях, когда элементами множества являются состояния динамической системы. Отношение доминирования имеет место, когда элементы некоторого множества в чем-то превосходят элементы другого. Так, победившая спортивная команда находится в отношении доминирования с побежденной.

Для того чтобы установить характер отношения между элементами множеств, проверяют выполнение соответствующих свойств. В контексте нечеткого моделирования наибольший интерес представляют свойства нечетких бинарных отношений, которые обобщают известные свойства обычных отношений. К этим свойствам относятся рефлексивность, симметричность и транзитивность.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, обладает свойством рефлексивности, если выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_i) = 1$. Нетрудно видеть, что в матрице рефлексивного нечеткого отношения $\tilde{Q}$ все элементы главной диагонали равны единице.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{ \mu\big(u_i, u_j\big)/\big(u_i, u_j\big)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, обладает свойством антирефлексивности, если выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_i) = 0$. Нетрудно видеть, что в матрице рефлексивного нечеткого отношения $\tilde{Q}$ все элементы главной диагонали равны нулю. Очевидно, что дополнение рефлексивного отношения антирефлексивно.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{ \mu\big(u_i, u_j\big)/\big(u_i, u_j\big)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, называется симметричным, если для любой пары $\big(u_i, u_j\big)$ выполняется равенство $\mu_{\tilde{Q}}\big(u_i, u_j\big) = \mu_{\tilde{Q}}\big(u_j, u_i\big)$ для $\forall\big(u_i, u_j\big) \in U \times U$.

Заметим, что матрица симметричного нечеткого отношения симметрична относительно главной диагонали.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, называется асимметричным, если выполняется следующее условие: $\min\{\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j), (u_j, u_i)\} = 0$ для $\forall(u_i, u_j) \in U \times U$. Следует указать, что все элементы главной диагонали матрицы нечеткого асимметричного отношения равны нулю. Кроме того, один из двух (а может быть и оба) элементов, симметричных относительно главной диагонали, должен быть равен нулю. Асимметричным является отношение «много больше».

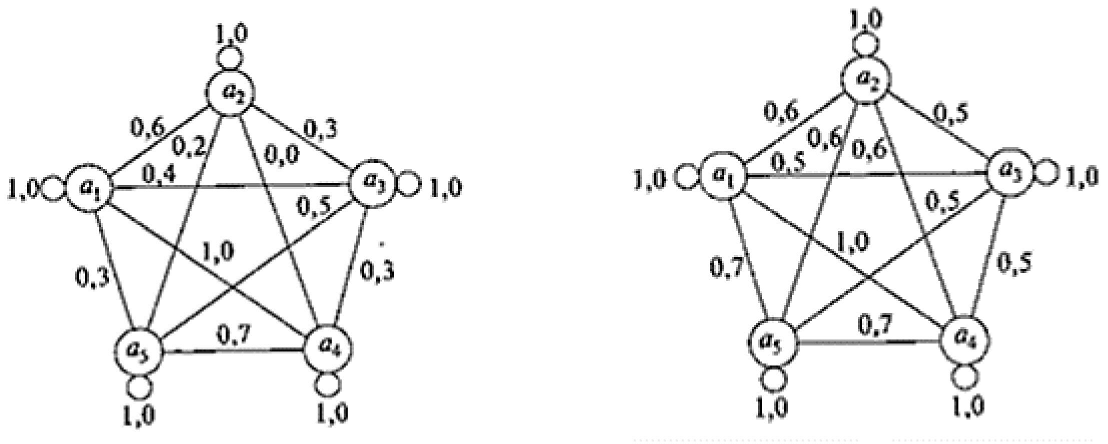
Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, называется антисимметричным, если выполняется следующее условие: $\min\{\mu_{\tilde{Q}}(u_i, u_j), (u_j, u_i)\} = 0$ для $\forall(u_i, u_j) \in U \times U$, причем $x_i \neq x_j$.

Бинарное нечеткое $\tilde{Q} = \{\mu(u_i, u_j)/(u_i, u_j)\}$ отношение, заданное на $U \times U$, называется транзитивным (max-min транзитивность), если выполняется следующее условие: $\mu_Q(x_i, x_j) \geq$ $\geq \max_{x_i e U}\{\min[\mu_Q(u_i, u_j), \mu_Q(u_j, u_k)]\}$ для $\forall(u_i, u_j) \in U \times U$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Данное отношение используется для формализации понятий типа «похоже на», «подобен» и т. п. В понятиях типа «похоже на», «подобен» выделяют свойства симметричности. Нечеткое отношение неэквивалентности двойственно нечеткому отношению эквивалентности, т. е. эти отношения могут быть получены друг из друга с помощью операции дополнения. Если для нечеткого отношения эквивалентности задана функция принадлежности $\mu_{\tilde{k}}(u_i, u_j)$, то функция принадлежности нечеткого отношения неэквивалентности $\mu_{R_{\text{нэ}}}(u_i, u_j) = 1 - \mu_{\tilde{R}_{\text{э}}}(u_i, u_j), \forall(u_i, u_j) \in U \times U$.

Нечеткое отношение неэквивалентности антирефлексивно, симметрично и min-max транзитивно, т. е. в определении свойства транзитивности надо поменять местами операции max и min.

Нечеткое отношение сходства характеризуется рефлексивностью и симметричностью, но не требует транзитивности. Нечеткое отношение различия (несходства), двойственное нечеткому отношению сходства $\mu_{\tilde{R}_{\text{нс}}}(u_i, u_j) = 1 - \mu_{\tilde{R}_{\text{с}}}(u_i, u_j), \forall(u_i, u_j) \in U \times U$, антирефлексивно и симметрично. Графы отношений сходства и эквивалентности приведены на рис. 3.3.



а) б)

Рис. 3.3. Графы нечетких отношений сходства (а) и эквивалентности (б)

Отношение доминирования характеризуется свойствами антирефлексивности и асимметричности. Частным случаем отношения доминирования является отношение порядка, для которого дополнительно выполняется свойство транзитивности.

3.3. Композиция нечетких отношений

Поскольку нечеткие отношения могут быть заданы в матричной форме, то, как это следует из определения нечеткого отношения, соответствующая матрица имеет квадратную форму. В теории матриц определена операция умножения квадратных матриц

$$C = A \cdot B,\ c_{ij} = \sum_{j-1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \qquad (3.5)$$

на основе которой может быть построено несколько вариантов композиции нечетких отношений.

Максиминное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, которые определены на множестве *U*, обозначается $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ и задается функцией принадлежности $\mu_{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2}(u_1, u_2)$, вычисляемой следующим образом:

$$\mu_{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2}(u_1, u_2) = \mathrm{Sup}\{\min(\mu_{\widetilde{R_1}}(u_1, z), \mu_{\widetilde{R_1}}(z, u_2))\}, \qquad (3.6)$$

где $\mu_{\widetilde{R_1}}$, $\mu_{\widetilde{R_2}}$ – функции принадлежности нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ соответственно.

Например, пусть заданы два универсальных множества $U_1 = U_2 =$ $= (1, 2, 3)$. На множестве $U_1 \times U_2$ определены нечеткие отношения

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \end{bmatrix};\ R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как нечеткие отношения заданы в матричном виде, то максиминное произведение в данном случае представляет собой операцию, аналогичную умножению матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используют операции нахождения минимального ($\wedge$ – пересечение) и максимального ($\vee$ – объединение) элементов соответственно и с учетом (3.5) соотношение (3.6) может быть записано следующим образом:

$$\mu_{\tilde{R}_1,\tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcup_{j-1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \cap \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Для приведенного примера максиминное произведение имеет вид

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Минимаксное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ на множестве U определяется функцией принадлежности, вычисляемой по соотношению

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_1, u_2) = \inf\{\max(\mu_{R_1}(u_1, z), \mu_{R_1}(z, u_2))\} \text{ или}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcap_{j-1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \cup \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Минимаксное произведение представляет собой операцию, аналогичную операции умножения матриц, но вместо арифметических операций умножения и сложения используются операции $\wedge$ и $\vee$. Например, для предыдущего примера минимаксное произведение в матричном виде равно

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.4 & 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}.$$

Максимультипликативное произведение нечетких отношений $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$, заданных на множестве U, определяется функцией принадлежности

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(u_1, u_2) = \sup\{(\mu_{R_1}(u_1, z), \mu_{R_1}(z, u_2))\},$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(u_{ik}) = \bigcup_{j-1}^{n} \mu_{\tilde{R}_1}(u_{ij}) \mu_{\tilde{R}_2}(u_{jk}).$$

Для исходных данных примера максимультипликативное произведение нечетких отношений равно

$$\begin{bmatrix} 0{,}28 & 0{,}3 & 0.7 \\ 0{,}56 & 0{,}24 & 0{,}56 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}28 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что различные композиции нечетких отношений могут сохранять или не сохранять свойства исходных отношений. Так, если исходные отношения рефлексивны и симметричны, то композиции max-min и max-mult сохраняют оба свойства, а композиция min-max – нет. Если исходные нечеткие отношения антирефлексивны, то это свойство сохраняет только композиция min-max. Выбор той или иной композиции при решении практических задач определяется требованиями, которым должно удовлетворять решение задачи. Поэтому в каждом конкретном случае данный вопрос требует особого рассмотрения. Более подробное рассмотрение нечетких отношений приведено в [5].

Задание 3.6

Определить, какими свойствами обладают нечеткие отношения, заданные матрицами:

$$M_{\tilde{P}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.8 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$M_{\tilde{\Omega}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.8 & 0.5\ 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & 1 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Задание 3.7

Для нечетких отношений, заданных матрицами (задание 3.6), построить композиции min-max, max-min, max-mult. Определить, какими свойствами будут обладать новые нечеткие отношения.

4. ОСНОВЫ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

Алгебра логики (булева алгебра) – это раздел математики, возникший в XIX веке благодаря усилиям английского математика Дж. Буля. Поначалу булева алгебра не имела никакого практического значения. Однако уже в XX веке ее положения нашли применение в описании функционирования и разработке различных электронных схем. Законы и аппарат алгебры логики стали использоваться при проектировании различных частей компьютеров (память, процессор), хотя это не единственная сфера применения данной науки.

Алгебра логики изучает методы установления истинности или ложности сложных логических высказываний с помощью алгебраических методов.

Булева алгебра делает это таким образом, что сложное логическое высказывание описывается функцией, результатом вычисления которой может быть либо истина, либо ложь (1 либо 0). При этом аргументы функции (простые высказывания) также могут иметь только два значения: 0 либо 1. Классическая булевская логика, оперирующая только понятиями «истина» или «ложь», по существу сводит реальный мир к «черно-белому» представлению и игнорирует проблему неопределенности в человеческих суждениях.

Для того чтобы получить возможность отражать эту неопределенность, необходима логическая система, в которой, кроме понятий «истина» или «ложь», можно было бы использовать и некоторые дополнительные значения истинности. Одним из первых такую систему предложил польский математик Ян Лукасевич. В логике Лукасевича использовались три значения истинности: «0 – ложь», «1 – истина», «0,5 – возможно». В качестве высказываний с истинностным значением «возможно» могут выступать и такие, которые относятся к будущим моментам времени. Техническая реализация логики Лукасевича затрудняется отсутствием в настоящее время электронных компонент с тремя устойчивыми состояниями. Как известно, основой современных компьютеров является триггер-элемент с двумя устойчивыми состояниями.

Л. Заде наряду с понятием нечеткого множества предложил обобщение классической логики на основе бесконечного множества значений истинности. В предложенном Л. Заде варианте нечеткой логики множество истинностных значений расширяется до интервала [0, 1], что позволяет присваивать высказыванию любое значение истинности. Соответствующее численное значение будет количественной оценкой степени истинности высказывания, относительно которого нельзя с полной уверенностью делать заключение о его истинности или ложности.

Для задания нечеткой истинности Л. Заде предложил следующие функции принадлежности термов «истинно» и «ложно»:

$$\mu_{\text{истинно}}(u)\begin{cases}0, \quad 0 \le u \le a,\\ 2\left(\dfrac{u-a}{1-a}\right)^2, a < u < \dfrac{a+1}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{u-1}{1-a}\right)^2, \dfrac{a+1}{2} < u \le 1.\end{cases}$$

$$\mu_{\text{ложно}}(u) = \mu_{\text{истинно}}(1-u),$$

где $a \in [0, 1]$ – параметр, определяющий носители нечетких множеств «истинно» и «ложно». Для нечеткого множества «истинно» носителем будет интервал $[a, 1]$, а для нечеткого множества «ложно» – $[0, a]$.

Возможные варианты функции принадлежности нечетких термов «истинно» и «ложно» изображены на рис. 4.1. Они построены при значении параметра a = 0,4. Как видно, графики функций принадлежности термов «истинно» и «ложно» представляют собой зеркальные отображения.

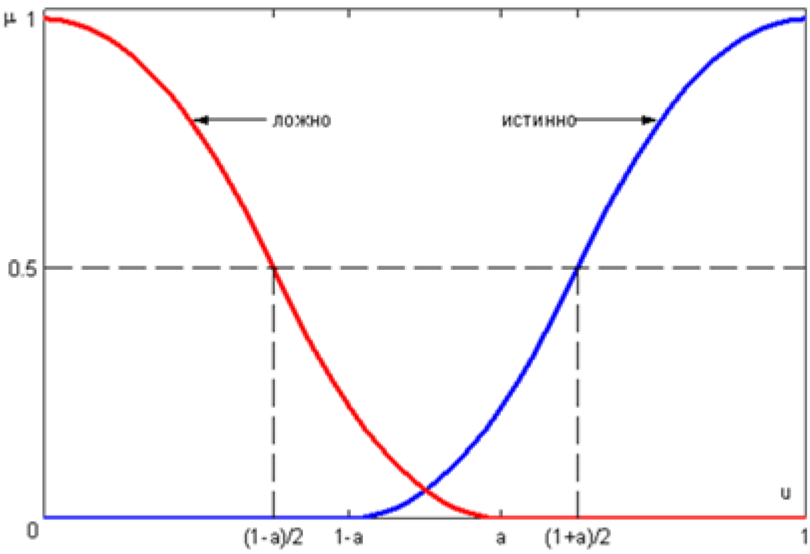


Рис. 4.1.Функции принадлежности нечетких термов

В отличие от классической булевской логики в нечеткой возможны различные уровни истинности или ложности логического высказывания, для задания которых используются логические модификаторы. Модификаторы «более – менее» и «очень» часто применяют к нечеткими множествами «истинно» и «ложно», получая таким образом новые термы «очень ложно», «более – менее ложно», «более – менее истинно», «очень истинно», «очень, очень истинно», «очень, очень ложно» и т. п. Функции принадлежности новых термов получают, выполняя операции концентрации и размытия нечетких множеств «истинно» и «ложно». Тогда функции принадлежности термов «очень, очень ложно», «очень ложно», «более – менее ложно», «более – менее истинно», «истинно», «очень истинно» и «очень, очень истинно» задаются следующим образом (рис. 4.2):

$$\mu_{\text{очень ложно}} = (\mu_{\text{ложно}} = (u))^2,$$
$$\mu_{\text{очень, очень ложно}} = (\mu_{\text{очень ложно}}(u))^2,$$
$$\mu_{\text{более}-\text{менее истинно}}(u) = (\mu_{\text{истинно}}(u))^{\frac{1}{2}},$$
$$\mu_{\text{очень истинно}}(\mathrm{u}) = (\mu_{\text{истинно}}(u))^2.$$

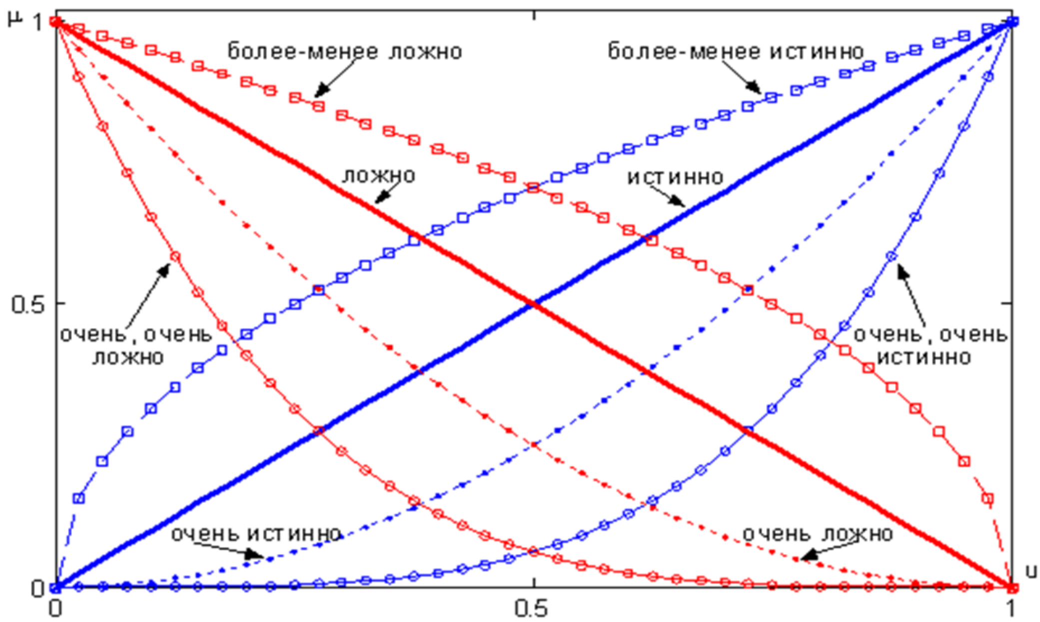


Рис. 4.2. Функции принадлежности нечетких термов и их модификации

4.1. Основные операции над нечеткими логическими переменными

Обозначим нечеткие логические переменные через $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, а функции принадлежности, задающие истинностные значения этих переменных, через $\mu_{\tilde{A}}\ (u)$ и $\mu_{\tilde{B}}(u)$, $u \in [0, 1]$. Для нечетких логических переменных, также как и для булевских, определены операции конъюнкции (И), дизъюнкции (ИЛИ), отрицания или дополнения

(НЕ). Отличие заключается в том, что для операций для нечетких логических переменных не используются таблицы истинности, так как значения истинности логических переменных и операций над ними только в предельных случаях принимают значения 0 или 1. В общем случае это может быть любое значение из отрезка [0, 1]. Нечеткие логические операции конъюнкции (И), дизъюнкции (ИЛИ), логического отрицания (НЕ) выполняются по следующим правилам:

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(u) = \min(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)); \quad (4.1)$$

$$\mu\tilde{A}\vee\tilde{B}^{(u)} = \max(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u); \quad (4.2)$$

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(u). \quad (4.3)$$

Легко проверить, что для крайних случаев, когда значения переменных исключительно 1 или 0, приведенные выше функции дают таблицы истинности операций классической логики.

Для нечетких логических операций по аналогии с операциями над нечеткими множествами справедливы и альтернативные формулы [5]. Нечеткие подмножества некоторого универсального множества относительно операций объединения, пересечения и дополнения, определенных соотношениями (4.1) – (4.3), удовлетворяют следующим свойствам:

1. Идемпотентность $A \cup A = A \cap A \neq 0$ при $A \neq 0$.
2. Коммутативность $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
3. Ассоциативность $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C =$ $= A \cap (B \cap C)$.
4. Дистрибутивность $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$.
5. Поглощаемость $A \cup (B \cap A) = A$. Это свойство можно записать в другой форме, а именно: $\max\left(\mu_A, \min(\mu_{\text{A}}, \mu_{\text{B}})\right) = \mu_{\text{A}}$.
6. Единственность обратного $\bar{\bar{A}} = A$.
7. Правила Моргана $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}, (\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Необходимо отметить, что для нечетких логических операций не выполняется имеющий место в булевской логике принцип исключения третьего, т. е. $\tilde{A} \wedge (\neg\tilde{A}) \neq \varnothing$, при $\tilde{A} \neq \varnothing$, $\tilde{A} \vee (\neg\tilde{A}) \neq U$, где U – универсальное множество.

В классической логике большое значение имеет операция «логическое следование (импликация)», которая связывает два логических выражения с помощью условного высказывания «если..., то…». Кроме того, при построении высказывания могут использоваться выражения «из... следует», «... влечет». Импликацию принято обозначать $A \rightarrow B$. В классической логике справедливо соотношение $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$ и соответствующая таблица истинности, приведенная ниже.

Таблица истинности

A	B	$F{=}A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Нечеткая импликация нечетких высказываний A и B обозначается $A \rightarrow B$. Это бинарная логическая операция, результат которой является нечетким высказыванием «из A следует B», «если A, то B». В отличие от классической импликации известно большое число формул для вычисления значения истинности нечеткой импликации [5, 9]. Большое количество работ по изучению различных вариантов нечеткой импликации обусловлено тем, что понятие нечеткой импликации признано ключевым при нечетких выводах и принятии решений в нечетких условиях. Наиболее часто используются классическая импликация Л. Заде, которая остается справедливой в случае обычных высказываний:

$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\min[\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)], 1 - \mu_{\tilde{A}}(u)\}$;

классическая нечеткая импликация для случая $\mu_{\tilde{A}}(u) \geq \mu_{\tilde{B}}(u)$;

$\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\}, \max\{1 - \mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\}$;

нечеткая импликация И. Мамдани: $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{B}}(u)\}$;

нечеткая импликация Я. Лукасевича: $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1{,}1 - \mu_{\tilde{A}}(u) + {}+\mu_{\tilde{B}}(u)\}$.

Хотя указанные варианты импликации находят наибольшее применение при решении прикладных задач, остальные способы вычисления нечеткой импликации в отдельных ситуациях оказываются более эффективными с вычислительной точки зрения [9]. Необходимо также отметить, что импликация Мамдани удобна тем, что она сохраняет вид функции принадлежности и позволяет выделить каждое преобразование и процесс его построения даже из информации в табличной форме (рис. 4.3).

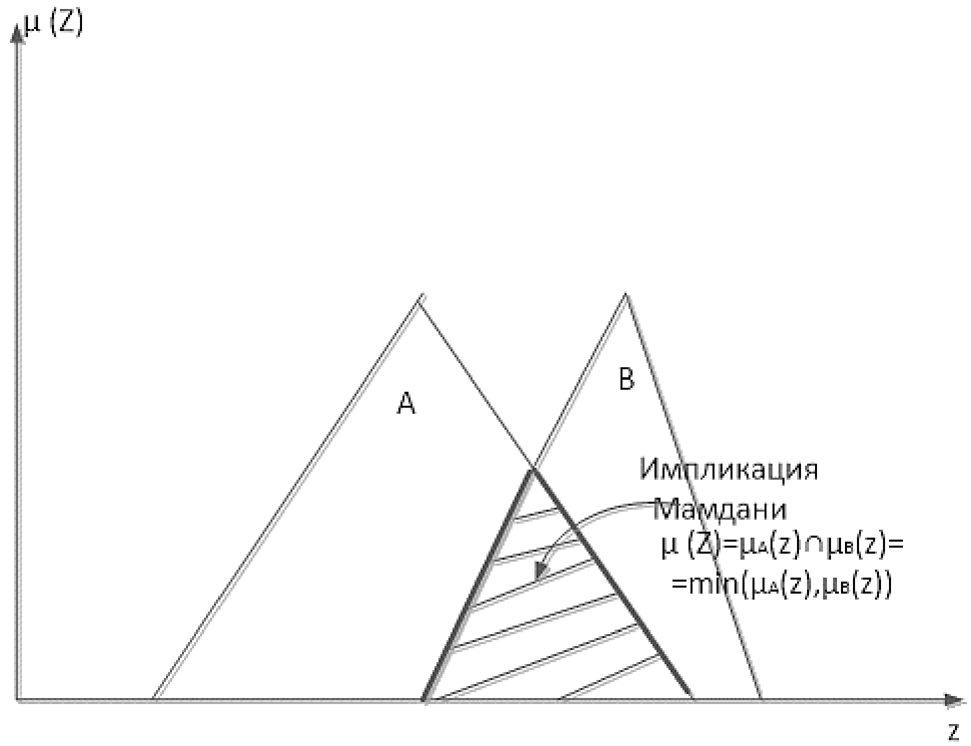


Рис. 4.3. Импликация Мамдани

Среди недостатков этого правила можно отметить коммутативность, отсутствие разницы между выражениями типа ($A \cap B$)→C и A→(B→C), невозможность использовать связку «ИЛИ» вместо «И» при интерпретации связки «ИНАЧЕ» для получения протокола применения правил: правило 1, иначе правило 2, иначе... Другие правила лишены этого недостатка за счет того, что каждому правилу нельзя сопоставить его область влияния. Например, арифметические связки в импликации Лукасевича $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1{,}1 - \mu_{\tilde{A}}(u) + \mu_{\tilde{B}}(u)\}$ приводят к получению новых значений функции принадлежности, что требует выполнения аппроксимации (рис. 4.4).

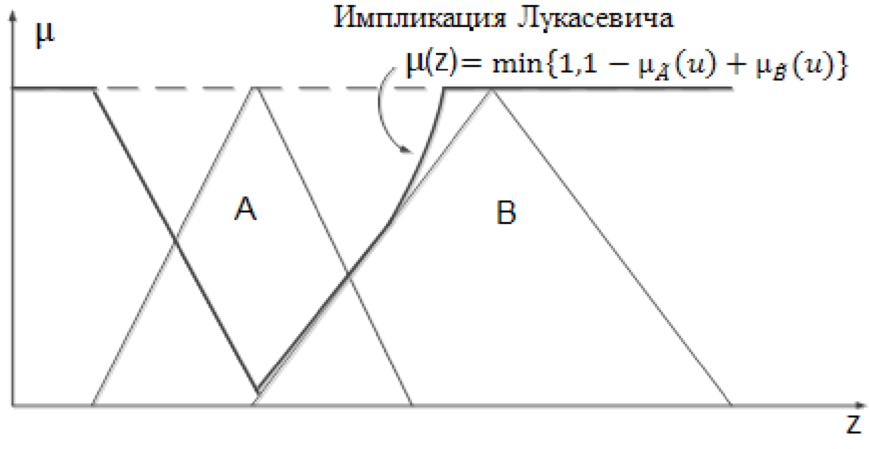


Рис. 4.4. Импликация Лукасевича

Правило $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \max\{\mu_{\tilde{A}}(u),\ \mu_{\tilde{B}}(u)\}, \max\{1 - \mu_{\tilde{A}}(u),\ \mu_{\tilde{B}}(u)\}$ лишено всех указанных недостатков и является наиболее «человеческим» по природе, так как, если предпосылка A дает следствие B, то предпосылка A, близкая к A, дает следствие B_1, близкое к B [5]. Это свойство особенно важно для систем с участием «человеческого фактора», где все ситуации не могут быть заданы с помощью набора правил.

Нечеткая импликация играет важную роль в процессе нечетких логических рассуждений. Так же как и в математической логике, первый ее операнд (нечеткое высказывание) называется посылкой, или антецедентом, а второй – заключением, или консеквентом.

Отметим, что операции над нечеткими логическими переменными могут быть реализованы на компьютерах с архитектурой фон Неймана. Кроме того, известны способы реализации операций нечеткой логики с помощью достаточно простых аналоговых электронных схем [21].

4.2. Нечеткие выводы

В системах нечеткого вывода условия и заключения формулируются в виде нечетких высказываний относительно тех или иных лингвистических переменных. Поскольку понятие нечеткого лингвистического высказывания имеет фундаментальное значение для систем нечеткого вывода, необходимо определить это понятие.

Нечеткими высказываниями назовем высказывания следующего вида:

1) высказывание <β есть α>, где β – наименование лингвистической переменной, представляющей некоторый объект или параметр реальной действительности, относительно которой высказывается утверждение α, являющееся ее нечеткой оценкой (например, «риск большой»);

2) высказывания вида <β есть *m*α>, <β есть *Q*α>, <*Q*β есть *m*α>, <*m*β есть *Q*α>, при этом *m* называется модификатором (ему соответствуют такие слова, как ОЧЕНЬ, БОЛЕЕ ИЛИ МЕНЕЕ, НЕЗНАЧИТЕЛЬНЫЙ, СРЕДНИЙ и др.), *Q* – квантификатором (ему соответствуют слова типа БОЛЬШИНСТВО, МНОГО, НЕСКОЛЬКО, ОЧЕНЬ МАЛО и др.);

3) высказывания, образованные из высказываний 1-го и 2-го видов и союзов И, ИЛИ, ЕСЛИ…, ТО…, ЕСЛИ…, ТО…, ИНАЧЕ….

Необходимо отметить, что отождествление данных союзов с логическими операциями конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и импликации в строгом смысле возможно только при предварительном рассмотрении вопроса коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности высказываний, образующих предложения. Нечеткое высказывание 3-го вида, представляющее частный случай нечеткой продукции, назовем нечетким условным высказыванием. Некоторое согласованное множество отдельных нечетких условных высказываний можно рассматривать как систему нечетких правил вывода. Базы правил нечеткой логики подобно традиционным экспертным системам основываются на базе знаний, построенной на основе человеческого опыта. В то же время отмечаются существенные отличия в обработке и характеристиках этих знаний.

Основная задача нечеткого вывода заключается в том, чтобы на основе некоторых нечетких высказываний с известной степенью истинности, которые находятся в условной части правил вывода, оценить степень истинности других нечетких высказываний, являющихся заключением (следствием) данного правила.

Нетрудно заметить, что взаимосвязь между условием и заключением в нечетком условном высказывании в общем случае представляет собой некоторое бинарное соответствие на декартовом произведении универсальных множеств соответствующих высказываний. Пусть нечеткое множество интерпретируется как условие некоторого нечеткого условного высказывания $\tilde{A}=\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in X$, а нечеткое множество $\tilde{B}=\{\mu_{\tilde{B}}(y)\}$, $y \in Y$ как заключение этого же высказывания. При этом универсальные множества *X* и *Y* будем рассматривать как подмножества универсального множества *U*. Для подавляющего большинства практических задач с достаточной степенью строгости нечеткое условное высказывание можно рассматривать как нечеткую импликацию. Тогда задача обработки нечеткого условного высказывания сводится к задаче обработки нечеткой импликации по одной из известных формул.

4.3. Процесс нечеткого условного вывода

Системы нечеткого вывода предназначены для преобразования значений входных переменных процесса управления в выходные переменные на основе использования правил нечеткого условного вывода.

Информация, которая поступает на вход системы нечеткого вывода, может быть получена в различной форме. В системах управления – это измеренные некоторым образом входные переменные, соответствующие реальным переменным процесса управления. На выходе системы нечеткого вывода должны быть сформированы выходные переменные, соответствующие управляющим переменным процесса управления.

Получение заключений в системах нечеткого вывода базируется на разделении процесса вывода на ряд последовательных этапов, реализация которых выполняется на основе рассмотренных ранее основных положений нечеткой логики (рис. 4.5).

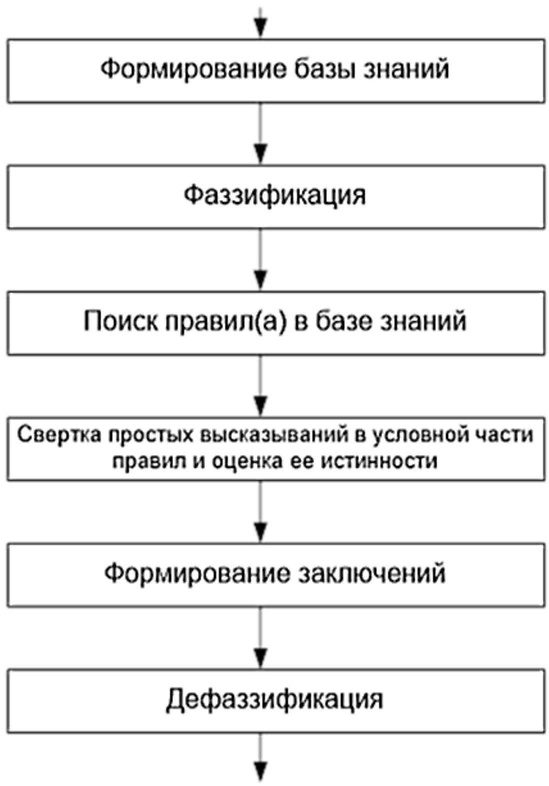


Рис. 4.5. Последовательность нечеткого условного вывода

Основной компонентой, которая во многом определяет получаемое качество управления (принятия решения), будет база знаний системы нечеткого условного вывода, которая представляет собой множество согласованных правил нечеткого условного вывода. Процесс построения базы знаний должен рассматриваться отдельно. Здесь же отметим только основные условия, которые должны быть выполнены при ее построении: правила, образующие базу знаний системы, не должны быть противоречивыми; система правил должна быть полной и неизбыточной.

Непротиворечивость системы правил означает, что в ней не должны присутствовать правила, в которых одинаковым нечетким высказываниям в условной части соответствуют различные или взаимоисключающие нечеткие выводы. Степень непротиворечивости i-го и k-го правил «если $A_{i(k)}$, то $B_{i(k)}$» можно задавать величиной

$$C_{ik} = \left| \max_x(\mu_{A_i}(x) \wedge \mu_{A_k}(x)) - \max_y(\mu_{B_i}(y) \wedge \mu_{B_k}(y)) \right|.$$

Суммируя по k, получаем оценку непротиворечивости i-го правила в системе $C_i = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}, 1 < i < N, k \neq i$. Если эта оценка превосходит некоторое пороговое значение, то правило из системы удаляется.

Полнота базы нечетких правил обеспечивается выполнением следующих условий:

– существует хотя бы одно правило для каждого базового терма выходной переменной;

– для любого терма входной переменной имеется хотя бы одно правило, в которое этот терм входит в качестве предпосылки.

Наиболее часто требование **полноты** для системы «если A_i, то B_i», $i = 1, 2, ..., n$, сводится к $X = \bigcup_{i=1}^{N} \mathrm{Supp} A_i$, где Supp A_i – носитель нечеткого множества A_i.

Содержательно это означает, что для каждого текущего состояния x процесса существует хотя бы одно управляющее правило, посылка которого имеет ненулевую степень принадлежности для x. В противном случае база правил считается неполной. Методы построения базы правил систем нечеткого условного вывода в целом аналогичны методам построения баз продукционных правил для экспертных систем.

Фаззификация. Цель этапа фаззификации – установление соответствия между текущим (обычно числовым) значением конкретной входной переменной системы нечеткого вывода и ее соответствующим лингвистическим значением, представленным функцией принадлежности.

До начала этапа фаззификации определяются области определения всех входных переменных $D(x_i)$, где $x_i \in D(x_i)$ – входная переменная системы, являющихся по сути универсальными множествами, на которых будут определяться лингвистические значения и соответствующие им нечеткие множества.

В общем случае входной переменной $x_i \in D(x_i)$ может быть поставлено в соответствие терм-множество лингвистических значений $T_x = \{\tau_j \coloneqq \overline{1, J_x}\}$, множество имен лингвистической переменной $L_{x_j} = \{l_j; j = \overline{1, J_{x_j}}$ и соответствующие нечеткие множества $\tilde{A} = \{\mu_{l_j}(x_i)/x_i \in D(x_i): j = \overline{1, J_{x_i}}\}$, где J_{x_i} – число лингвистических значений входной переменной X_i. Формально процедура фаззификации состоит в проверке выполнения условий «α есть β», содержащихся в правилах условного нечеткого вывода, находящихся в базе знаний системы. Просто и наглядно ее можно представить в графической форме (рис. 4.6).

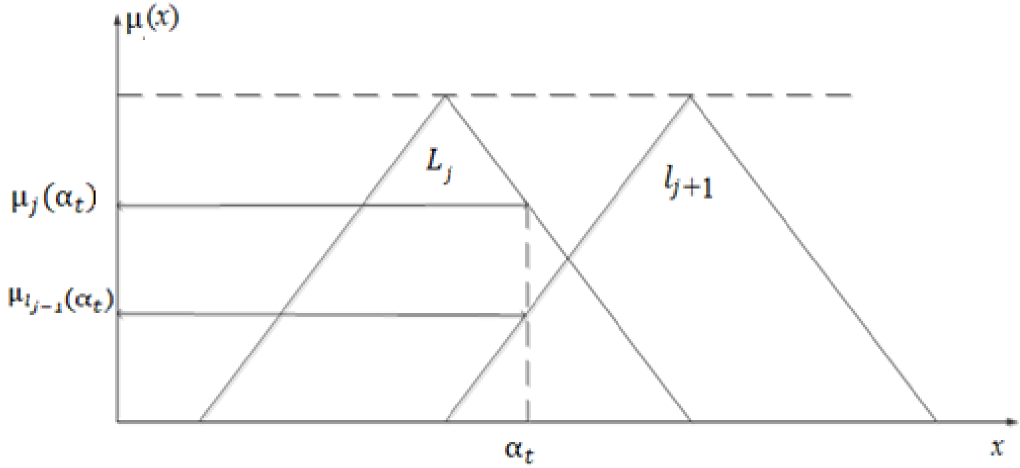


Рис. 4.6. Процедура фаззификации

Процедуру фаззификации можно проиллюстрировать и другим рисунком (рис. 4.7).

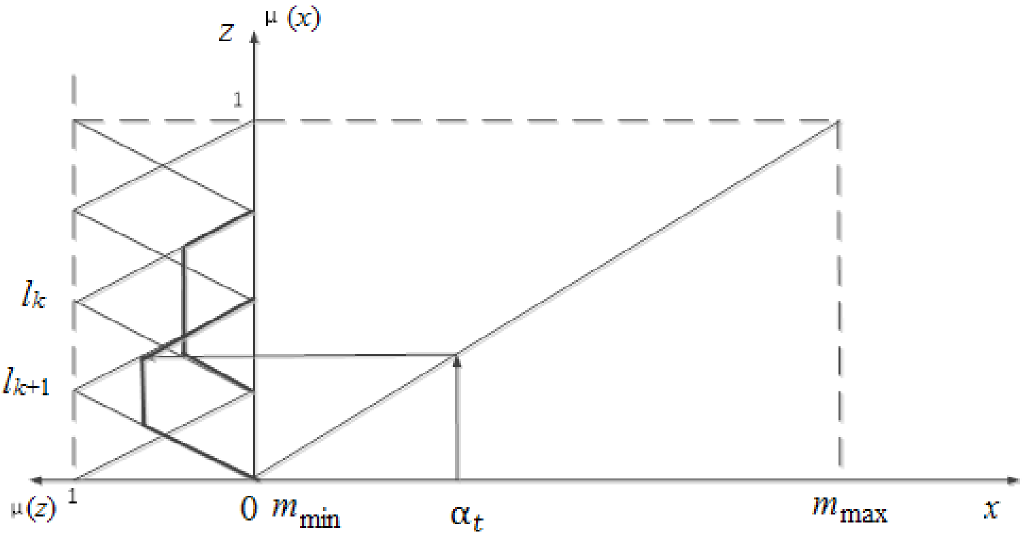


Рис. 4.7. Фаззификация

Отличие метода, представленного на рис. 4.7, состоит в том, что значения аргументов соответствующих функций принадлежности находятся в диапазоне [0, 1]. Значение функции принадлежности можно интерпретировать как оценку истинности выполнения нечеткого высказывания, поэтому в данном случае (см. рис. 4.6) истинность высказывания <x_i есть l_j> больше истинности высказывания <x_i есть l_{j+1}>, $\mu_j(\alpha_t) > \mu_{l_{j-1}}$. Таким образом, при фаззификации возможно получение двух результатов, что определяет возможность использования нескольких правил нечеткого условного вывода при получении окончательного заключения. Поэтому при построении системы должно быть принято решение, как будут применяться результаты фаззификации: использоваться один результат или оба.

Процесс фаззификации для конкретной входной переменной считается законченным, когда будут проверены все соответствующие ей возможные лингвистические значения. Однако в этом нет необходимости, так как если соблюдаются правила построения исходных функций принадлежности, то текущее значение входной переменной может идентифицироваться только с двумя соседними лингвистическими значениями.

Определение подходящего правила. Для выработки заключения в базе знаний системы необходимо выбрать те правила условного нечеткого вывода, у которых в условной части содержатся высказывания, где присутствует входная переменная с установленным в процессе фаззификации лингвистическим значением. В зависимости от того, какое соглашение принято относительно использования результатов фаззификации, будет выбрано различное число правил вывода, которые потенциально могут рассматриваться как подходящие для получения заключения. Необходимо отметить, что задача поиска правил имеет самостоятельное значение, так как эффективность алгоритма поиска непосредственно скажется на эффективности всей системы в целом. Особенно важно время поиска правил для нечетких систем управления техническими объектами, когда задача управления решается в реальном масштабе времени, и время, отводимое на выработку управляющего воздействия, ограничено условиями динамики управляемого процесса.

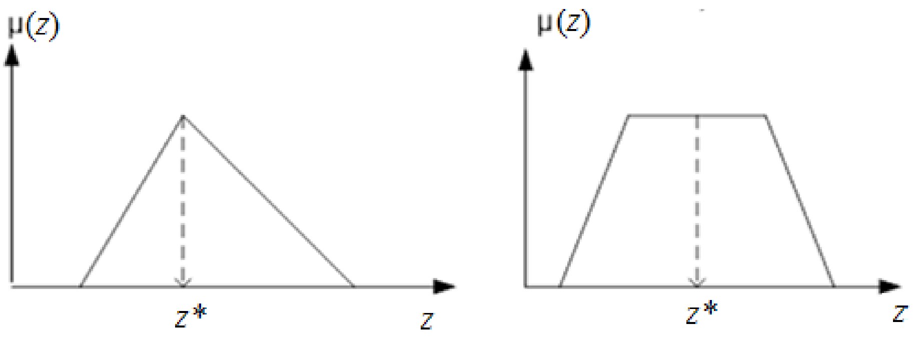
В зависимости от конкретной задачи условная часть правил нечеткого вывода может иметь вид простых нечетких высказываний вида 1 (см. п. 4.2) или сложных высказываний вида 3. В первом случае сразу выполняется вычисление импликации по одной из известных заранее выбранных формул. Во втором случае составное высказывание подвергается агрегированию с использованием нечеткой конъюнкции для связки «И», нечеткой дизъюнкции для «ИЛИ», кроме того, может использоваться нечеткое дополнение для «НЕ». В результате сложное высказывание вида 3 преобразуется в эквивалентное простое вида 1 с соответствующим значением истинности.

Формирование заключения (вывода) состоит в вычислении нечеткой импликации по выбранной формуле. В результате получается нечеткое множество, представляющее множество возможных решений (выводов), соответствующих данному правилу. Как уже отмечалось, возможно выполнение нескольких правил нечеткого вывода, тогда интегральный вывод будет получен как композиция выводов отдельных правил.

Дефаззификация. Дефаззификация в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру нахождения единственного решения на множестве допустимых, полученном после обработки правил нечеткого вывода.

Применяемые в современных системах управления устройства и механизмы способны воспринимать команды управления в форме количественных значений соответствующих управляющих переменных. Именно по этой причине необходимо преобразовать нечеткие множества в некоторые конкретные количественные значения переменных (crisp value). Поэтому дефаззификацию называют также приведением к четкости. Для выполнения дефаззификации используют различные методы, выбор которых во многом определяется видом функций принадлежности нечетких множеств, представляющих результат обработки правил нечеткого условного вывода.

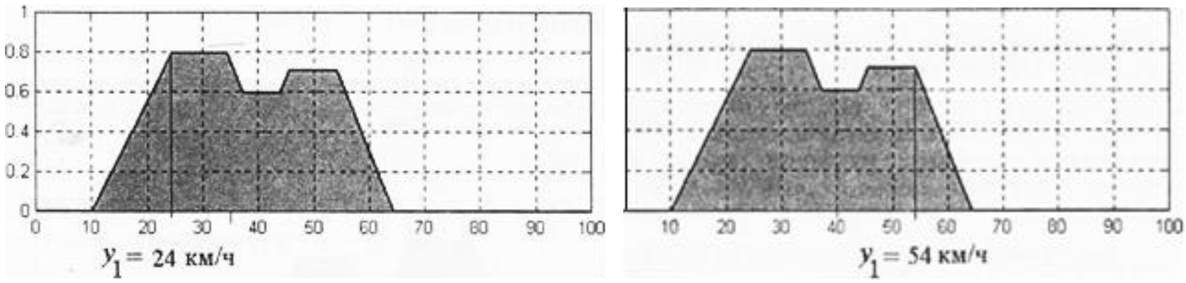
Для унимодальных функций принадлежности используется метод максимума, когда результат дефаззификации определяется по максимуму функции принадлежности (рис. 4.8, *а*), для трапецеидальных функций результат определяется по середине верхнего основания. Возможно также использование оценки Чью-Парка [7] $z^* = (a_1 (i, j) + a_2 (i, j) + a_3 (i, j) + a_4 (i, j))/4 + w (a_2 (i, j) + a_3 (i, j))/2$, $0 \le w \le 1$, где $a_1 (i, j)$, $a_4 (i, j)$, $a_2 (i, j)$, $a_3 (i, j))$ – координаты нижнего и верхнего оснований трапецеидальной функции принадлежности; при симметричной трапецеидальной функции принадлежности параметр $w = 1$.



а) *б)*

Рис. 4.8. Дефаззификация по максимуму

Если полученная функция принадлежности не является унимодальной (рис. 4.8, *б*), то для дефаззификации используют метод левого (*LM, Left Most Maximum*) или правого (*RM, Right Most Maximum*) модального значения (рис. 4.9, *а, б*).



а) *б)*

Рис. 4.9. Дефаззфикация по левому (а) и правому (б) модальному значению

В случае левого модального значения в качестве значения выходной переменной выбирается наименьшая (левая) координата максимума функции принадлежности, в случае правого модального значения – наибольшая (правая) координата максимума функции принадлежности.

Метод центра площади. Искомое значение z^* рассчитывается из уравнения

$$\int_{\min Z}^{*} \mu(Z)dz = \int_{*}^{\max Z} \mu(Z)dz.$$

Иными словами, определяется абсцисса прямой, делящей площадь по кривой функции принадлежности на две равные части. Метод центра площадей неудобен при реализации, не может быть использован, если функция принадлежности задана дискретными значениями, и считается неоднозначным, так как возможно построение нескольких прямых (биссектрис площади), делящих площадь на равные части.

Метод центра тяжести. Идея этого метода состоит в том, что функцию принадлежности рассматривают как систему материальных точек, массы которых равны значениям функции принадлежности. Известно, что координата центра тяжести является обобщенной, однозначно определяемой характеристикой системы материальных точек [20].

Для непрерывных функций принадлежности координата центра тяжести рассчитывается соотношением

$$CG = z^* = \frac{\int_{\min Z}^{\max Z} Z \cdot \mu(z)dz}{\int_{\min Z}^{\max Z} \mu(z)dz};$$

для дискретных функций

$$CG = z^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i \mu(z_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu(z_i)}, \text{(CG – Centre of Gravity)}.$$

Отметим, что в практических приложениях наиболее часто используют дефаззификацию на основе модальных значений в силу простоты их реализации.

5. АЛГОРИТМЫ НЕЧЕТКОГО УСЛОВНОГО ВЫВОДА

Алгоритмы нечеткого условного вывода различаются видом используемых правил, логических операций, методами композиции и дефаззификации. Наиболее известны алгоритмы Мамдани, Такаги – Сугено, Ларсена, Сукамото.

5.1. Алгоритм Мамдани

В 1975 году Ибрагим Мамдани (рис. 5.1) (Ebrahim Mamdani) из лондонского колледжа королевы Марии (Queen Mary College) спроектировал первый функционирующий на основе алгебры Заде контроллер, управляющий паровой турбиной (стоит заметить, что принципы построения его алгоритмики стали каноническими и увековечены общепринятым среди специалистов названием Mamdani-type controller).

Рис. 5.1. Ибрагим Мамдани

Здесь необходимо отметить, что впоследствии для развития нечетких систем большую роль сыграла так называемая FAT-теорема (Fuzzy Approximation Theorem), доказанная Б. Коско (B. Kosko) в 1993 году (рис. 5.2), согласно которой любая математическая система может быть аппроксимирована системой, основанной на нечеткой логике.

Рис. 5.2. Барт Коско

В общем случае база правил алгоритма Мамдани содержит правила вида

P_k: «если $<y_1 = A_{1k}>$ and $<y_2 = A_{2k}>$ and $\ldots <y_{nk} = A_{nk}>$, то $<z = B_k>$. Для упрощения изложения рассмотрим базу правил вида

P_1: если $x = A_1$ и $y = B_1$, то $z = C_1$;

P_2: если $x = A_2$ и $y = B_2$, то $z = C_2$.

По алгоритму Мамдани для текущих значений входных переменных x_1 и y_1 выполняется фаззификация, в результате которой определяется истинность отдельных условий в условной части правила. Затем производится их агрегирование и вычисляется результирующая истинность условной части правила. Поскольку в рассматриваемых правилах используется логическая связка «И», то для агрегирования используется операция min (рис. 5.3).

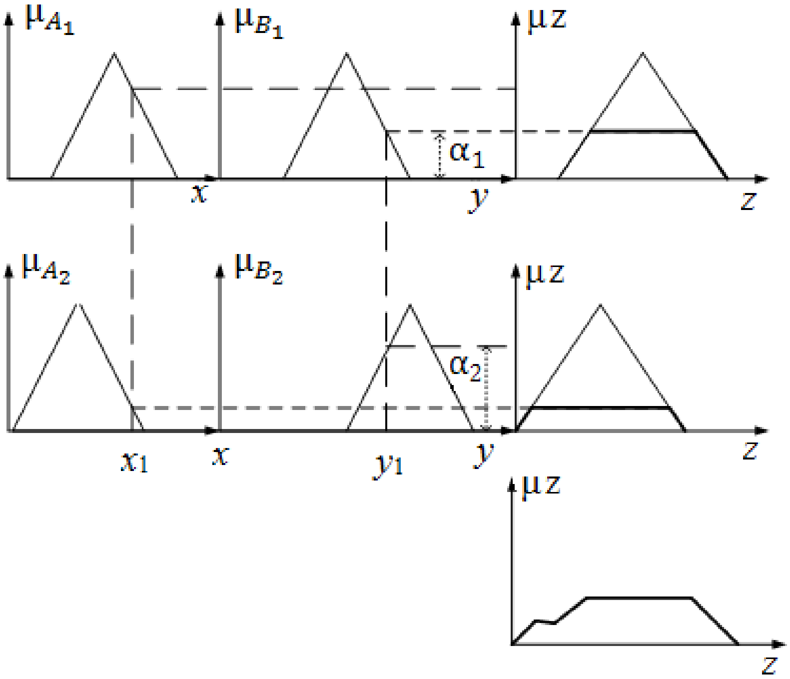


Рис. 5.3. Алгоритм Мамдани

$\alpha_1 = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{B_1}(y_1))$, $\alpha_2 = \min(\mu_{A_2}(x_1), \mu_{B_2}(y_1))$.

Нечеткий вывод по каждому правилу согласно алгоритму Мамдани рассчитывается как

$\mu_{r_1}(z) = \min(\alpha_1, \mu_{c_1}(z))$, $\mu_{r_2}(z) = \min(\alpha_2, \mu_{c_2}(z))$.

Композиционный вывод получается как объединение отдельных выводов $\mu = \max[\mu_{r_1}(z), \mu_{r_2}(z)]$ (см. рис. 5.3).

Дефаззификация может выполняться по любому из известных методов.

5.2. Алгоритм Ларсена

Алгоритм Ларсена (Larsen) отличается от алгоритма Мамдани методом формирования вывода по каждому из правил (рис. 5.4) $\mu_{r_1}(z) = \alpha_1 \cdot \mu_{c_1}(z)$, $\mu_{r_2}(z) = \alpha_2 \cdot \mu_{c_2}(z)$.

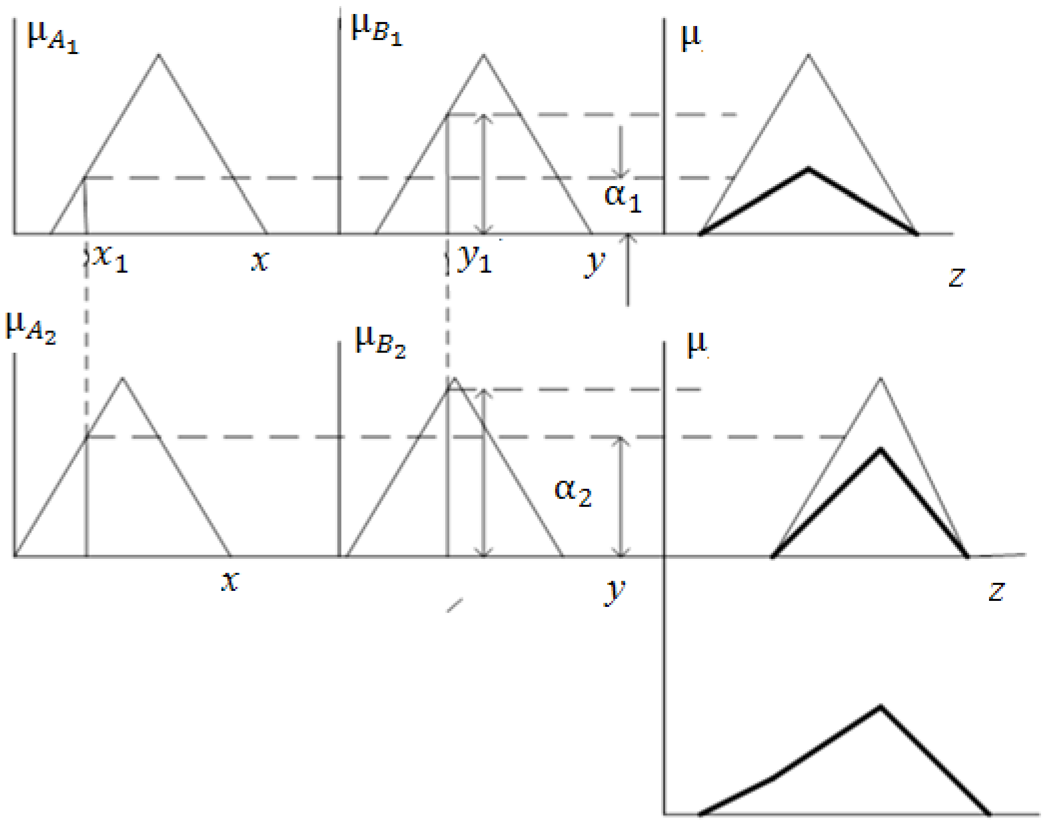


Рис. 5.4. Алгоритм Ларсена

Композиция выводов выполняется так же, как и в алгоритме Мамдани $\mu = \max[\mu_{r_1}(z),\ \mu_{r_2}(z)]$.

5.3. Алгоритм Сукамото

В алгоритме Сукамото (Tsukamoto) определение истинности выполнения условной части правил и получение соответствующих нечетких выводов осуществляется так же, как и в алгоритме Мамдани (рис. 5.5).

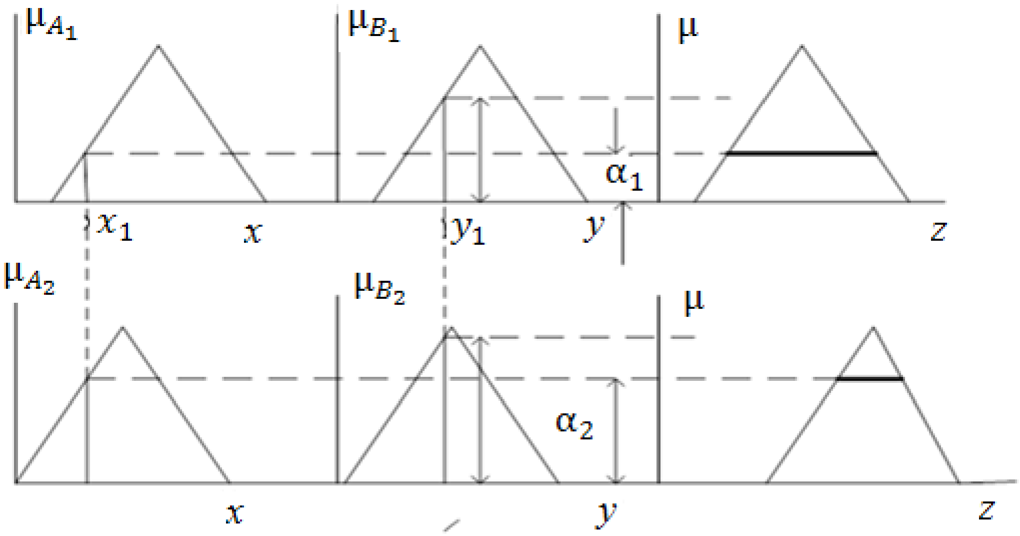


Рис. 5.5. Алгоритм Сукамото

Отличие состоит в том, что дефаззификации подвергается каждый нечеткий вывод, а интегральный вывод определяется как средневзвешенный $Z^{\cdot} = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, где z_1, z_2 – результаты дефаззификаци нечетких выводов по правилам P_1 и P_2.

5.4. Алгоритм Такаги – Сугено

В алгоритме, предложенном Такаги – Сугено (рис. 5.6), в отличие от других используется набор правил следующего вида:

P_1: если x есть A_1 и y есть B_1, то $z = a_1x+b_1y$,

P_2: если x есть A_2 и y есть B_2, то $z = a_2x+b_2y$.

Введение нечеткости выполняется так же, как и в алгоритме Мамдани.

Нечеткий вывод. Находятся уровни «отсечения» для предпосылок каждого правила с использованием операции min: $\mu_{A_1}\{(x_0), \mu_{B_1}(y_0)\}$, $\alpha_2 = \min\{\mu_{A_2}(x_0), \mu_{B_2}(y_0)\}$. Затем определяются выводы по каждому из правил $z_1^* = a_1x_0 + b_1y_0$ и $z_2^* = a_2x_0 + b_2y_0$ (рис. 5.7).

Композиция выводов рассчитывается как $Z^* = \dfrac{a_1 z_1^* + a_2 z_2^*}{a_1 + a_2}$.

а) *б)*

Рис. 5.6. Такаги (а), Сугено (б)

Рассмотрим несколько примеров применения алгоритмов нечеткого условного вывода.

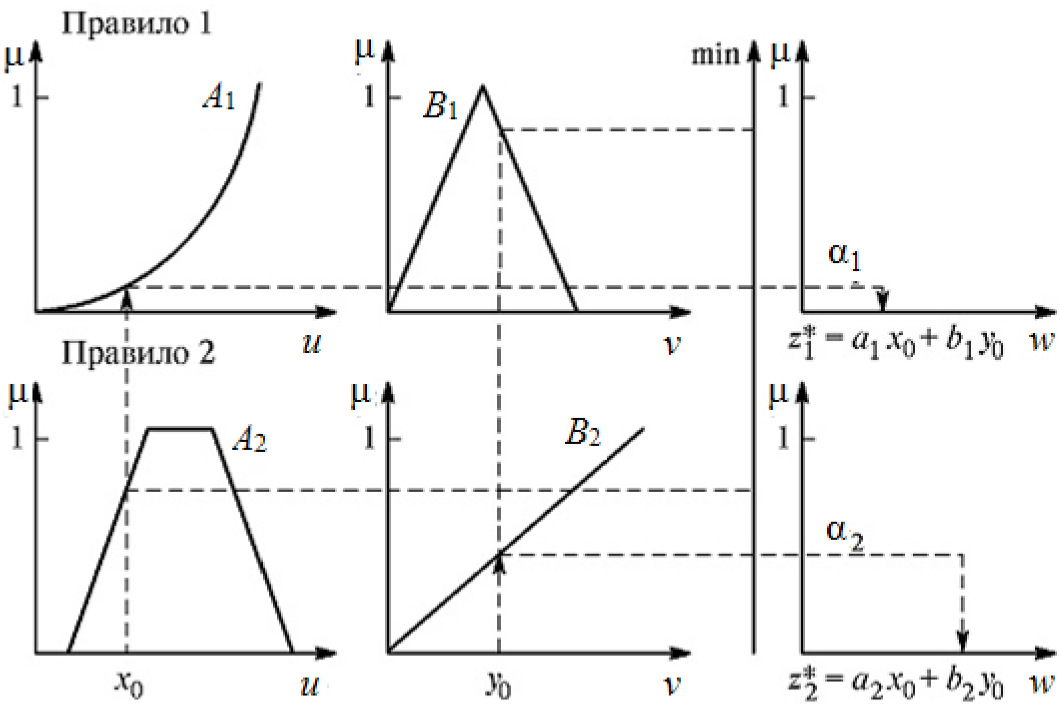


Рис. 5.7. Алгоритм Такаги – Сугено

Пример 5.1. В системе управления используются правила следующего вида (рис. 5.8):

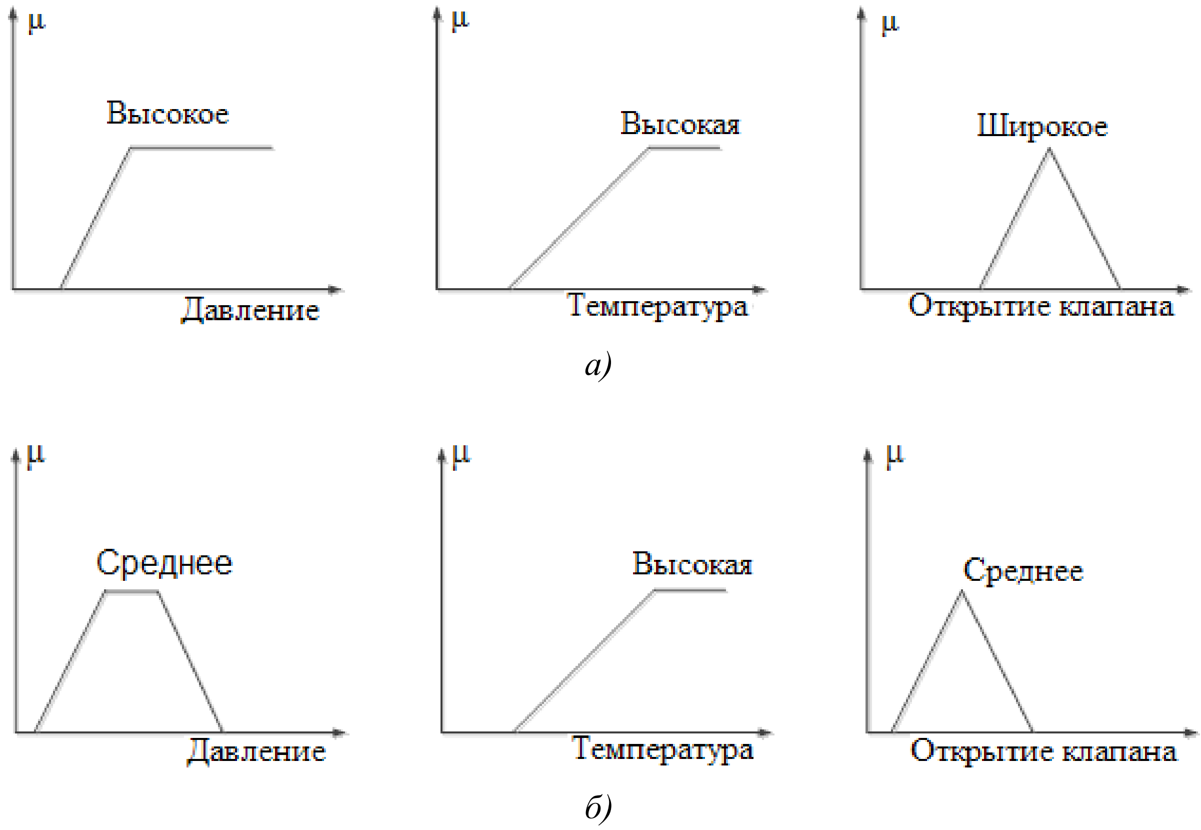


Рис. 5.8. Правила управления и функции принадлежности: P_1: если «высокое давление» и «высокая температура», – «широкое открытие клапана» (а); P_2: если «среднее давление» и «высокая температура», то «среднее открытие клапана» (б)

Обработка правил P_1 и P_2 и получение композиционного вывода представлены на рис. 5.9, 5.10 и 5.11.

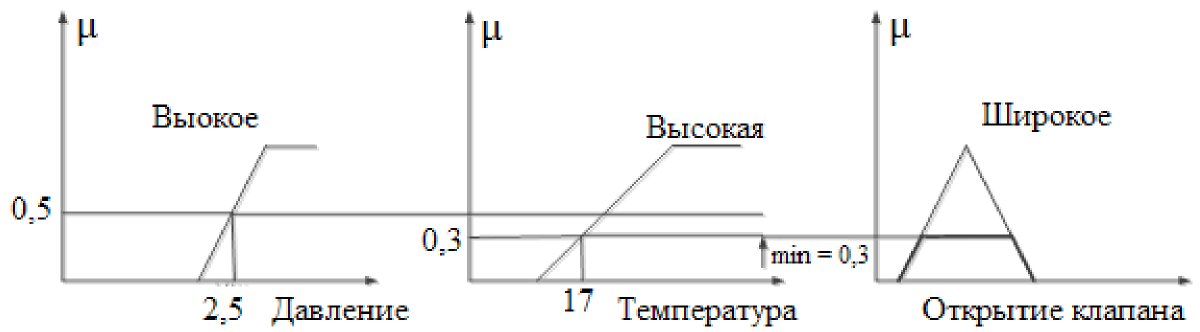


Рис. 5.9. Обработка правила P_1, давление – 2,5 бар, температура – 17 °С

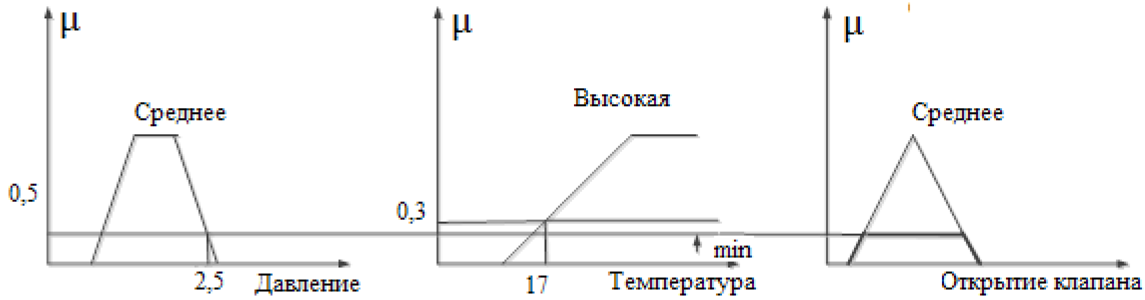


Рис. 5.10. Обработка правила P_2, давление – 2,5 бар, температура – 17 ºС.

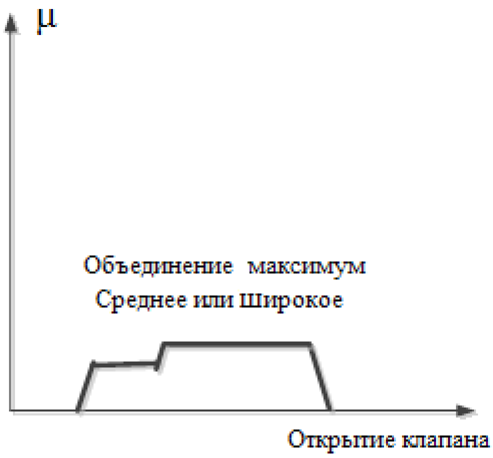
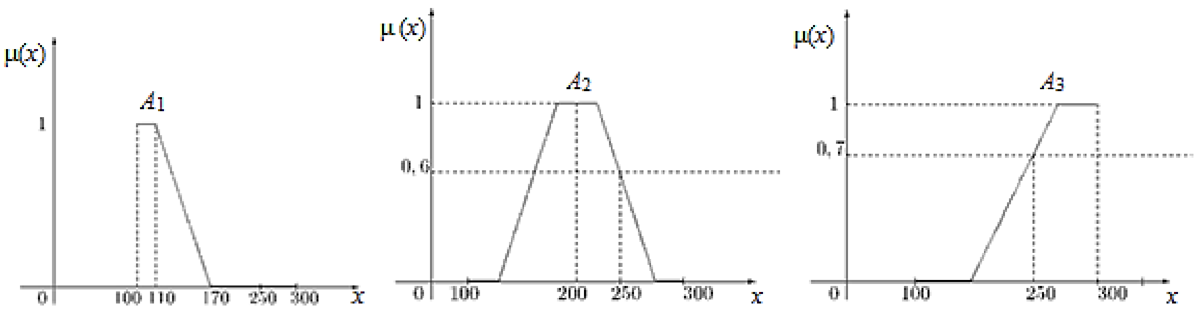


Рис. 5.11. Композиция правил

Пример 5.2. Рассмотрим в упрощенном варианте задачу покупки акций. Цена акций некоторой компании определяется с помощью понятий «низкая цена», «умеренная цена», «высокая цена», при этом минимальная цена равна 100 денежным единицам, а максимальная – 300 денежным единицам. Каждому лингвистическому значению поставим в соответствие нечеткое множество, например, как показано на рис. 5.12, определенное на универсальном множестве $U_1 = [100, 300]$.



а) *б)* *в)*

Рис. 5.12. Нечеткие множества «цена акции», A_1 – «низкая цена», A_2 – «средняя цена», A_3 – «высокая цена»

Отметим, что могут быть и другие варианты функций принадлежности, вид которых будет определяться представлениями эксперта. В данном случае выбор определяется лишь простотой графического представления. Решение данной задачи состоит в определении количества акций, заданного на универсальном множестве U_2 = [0, 25], которое следует купить в зависимости от текущей цены. Соответствующие нечеткие множества представлены на рис. 5.13.

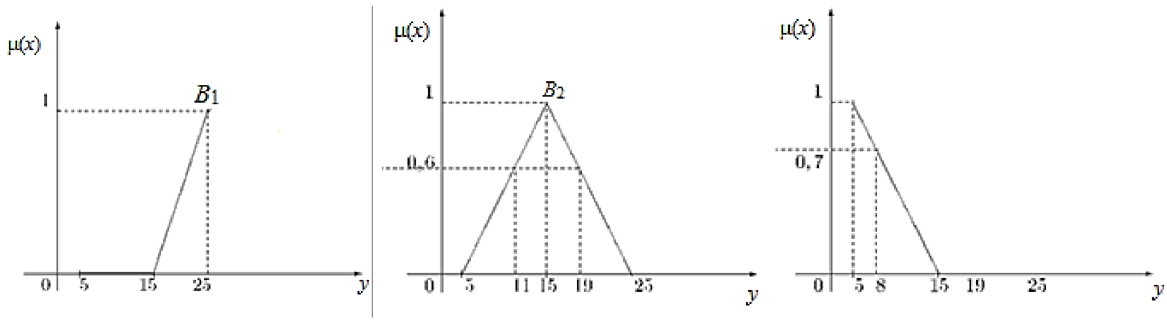


Рис. 5.13. Варианты нечетких множеств «количество покупаемых акций»

5.5. Алгоритм Лукасевича

Рис. 5.14. Ян Лукасевич

Предложенная Я. Лукасевичем (рис. 5.14) формула для вычисления импликации нашла применение в теории нечетких множеств, где она приобрела другой вид $\tilde{A} \Rightarrow \tilde{B} = \min\{1, 1 - \mu_{\tilde{A}}(u) + \mu_{\tilde{B}}(u)\}$, но сохранила название.

Рассмотрим алгоритм нечеткого вывода на основе импликации Лукасевича [3]. Пусть имеются входные переменные X = [10, 20], Y = [20, 40] и выходная Z = [20, 40], соответствующие термы

$$T_Z = \{\text{около } 20, \text{около } 30, \text{около } 40\} = \{L_{z1},\ L_{z2},\ L_{z3}\},$$

$$T_x = \{\text{около } 10, \text{около } 20\} = \{L_{x1},\ L_{x2}\},$$

$$T_y = \{\text{около } 20, \text{около } 40\} = \{L_{y1},\ L_{y2}\}.$$

Соответствующие функции принадлежности представлены на рис. 5.15.

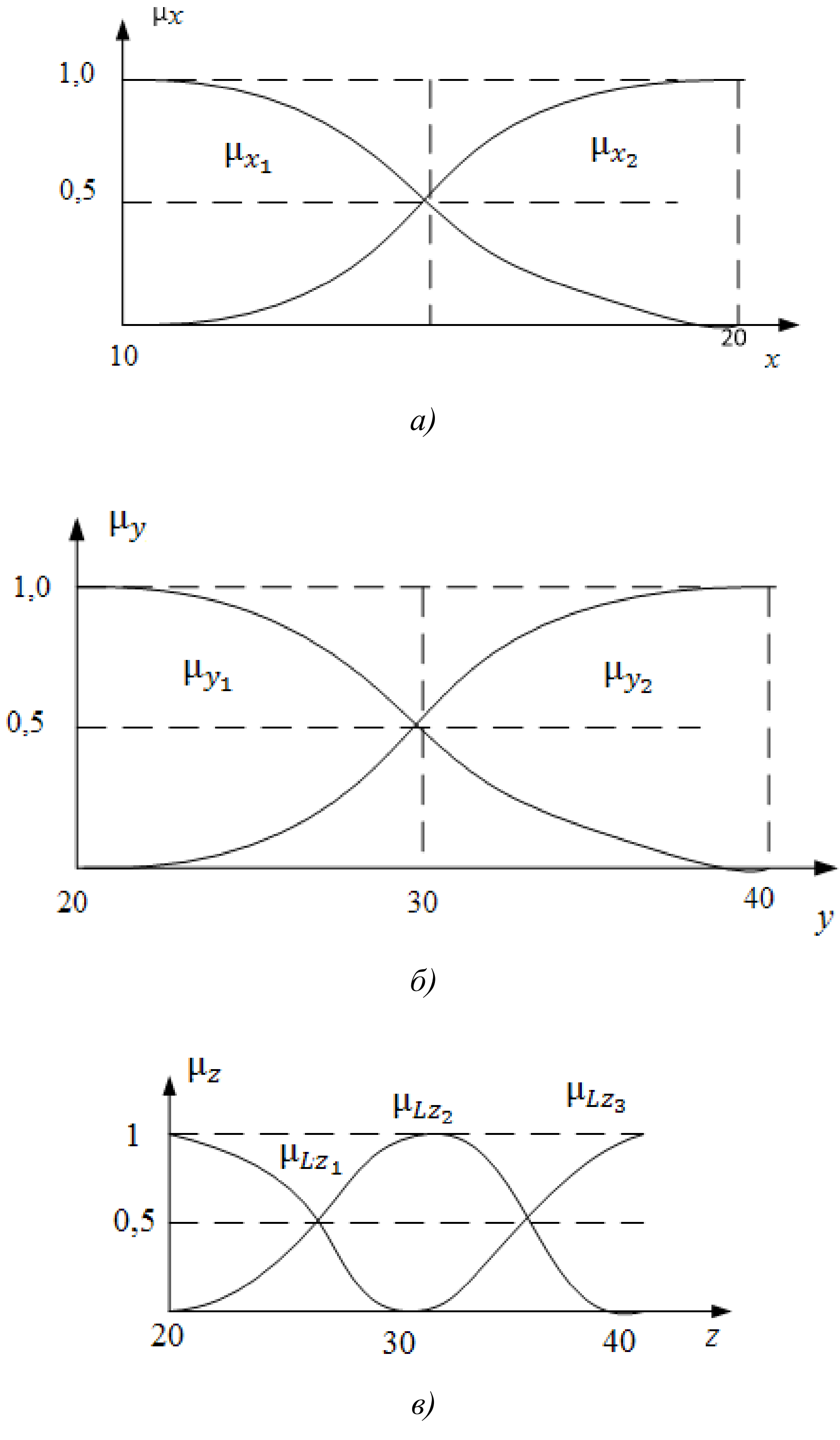


Рис. 5.15. Функции принадлежности термов входных (а), (б) и выходной (в) переменных

База знаний состоит из следующих правил условного логического вывода:

1. Если $x = \langle L_{x1} \rangle$ и $y = \langle L_{y1} \rangle$, то $z = \langle L_{z1} \rangle$.

2. Если [x = <L_{x2}> и y = <L_{y1}>] или [x = <L_{x1}> и y = <L_{y2}>], то z = <L_{z2} >;

3. Если x = <L_{x2}> и y = <L_{y2}>, то z = <L_{z3}>.

С учетом структуры условной части правил импликация Лукасевича для каждого правила 1 – 3 имеет вид:

$$\mu^1 = \min[1,1 - \min(\mu_{Lx1}(x), \mu_{Ly1}(y)) + \mu_{Lz1}]; \qquad (5.1)$$

$$\mu^2 = \min[1,1 - \max[\min(\mu_{Lx2}(x), \mu_{Ly1}(y)), \min(\mu_{Lx1}(x), \mu_{Ly2}(y))] + \\ + \mu_{Lz2}(z)]; \qquad (5.2)$$

$$\mu^3 = \min[1,1 - \min(\mu_{Lx2}(x), \mu_{Ly2}(y)) + \mu_{Lz3}(z)]. \qquad (5.3)$$

Правила 1 – 3 могут выполняться с различной степенью истинности. Интегральный вывод в данном случае выполняется с помощью операции min

$$\mu' = \mu^1 \wedge \mu^2 \wedge \mu^3 = \min\{\mu^1, \mu^2, \mu^3\}. \qquad (5.4)$$

Конечно, возможны и другие варианты, например, использовать операцию max.

Пусть x = 14, y = 27. Подставив в выражения (5.1) – (5.4) соответствующие значения x и y, получим:

$\mu_{Lx1}(x) = 0{,}7,\ \mu_{Lx2}(x) = 0{,}3,\ \mu_{Ly1}(y) = 0{,}58,\ \mu_{Ly2}(y) = 0{,}44.$

Подставляя эти значения в соотношения (5.1) – (5.4), получим:

$\mu^1 = \min[1,1 - 0{,}58 + \mu_{Lz1}(z)] = \min[1, 0{,}42 + \mu_{Lz1}(z)];$

$\mu^2 = \min[1,1 - 0{,}44 + \mu_{Lz2}(z)] = \min[1, 0{,}56 + \mu_{Lz2}(z)]\ ;$

$\mu^3 = \min(1,1 - 0{,}3 + \mu_{Lz3}(z)) = \min(1{,}07 + \mu_{Lz3}(z)).$

Соответствующие функции принадлежности представлены на рис. 5.16.

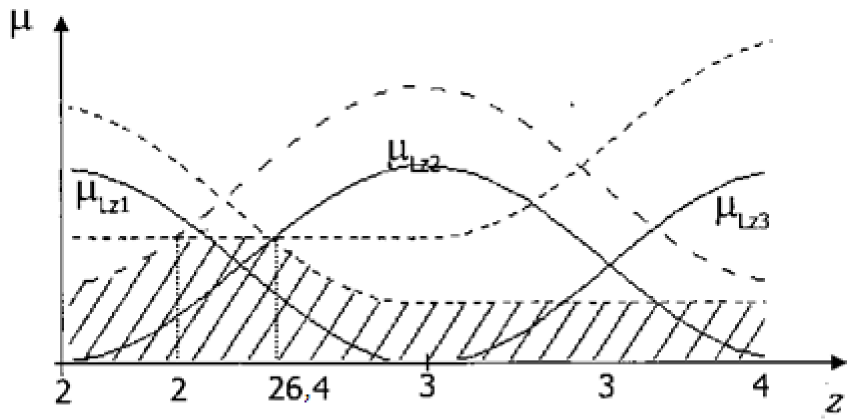


Рис. 5.16. Функции принадлежности, рассчитанные по правилу Лукасевича

На рис. 5.16 заштрихованная область – это пересечение нечетких множеств, представляющих возможные решения по правилам (5.1) – (5.4) соответственно. Для нахождения итогового решения необходимо выполнить дефаззификацию. Например, если использовать дефаззификацию по максимуму, значение выходной переменной можно определить как $z = (23 + 26{,}4)/2 = 24{,}7$.

Задание. Моделирование алгоритмов Мамдани и Сукамото

Порядок выполнения работы

1. Используются два правила:

P_1: если $x = A_1$ и $y = B_1$, то $z = D_1$;

P_2: если $x = A_2$ и $y = B_2$, то $z = D_2$.

2. Применяя средства FuziCalc, построить функции принадлежности нечетких множеств A_1, A_2, B_1, B_2, D_1, D_2.

3. Задать значения входных переменных x_t и y_t.

4. Используя функцию FzAlpha(), для выбранных значений входных переменных x_t и y_t определить значения функций принадлежности $\mu_{A1}(x_t) = \alpha_1$; $\mu_{A2}(x_t) = \alpha_2$; $\mu_{B1}(y_t) = \beta_1$; $\mu_{B2}(y_t) = \beta_2$.

5. Используя функцию Min_C(), вычислить:

$\sigma_1 = \min\{\mu_{A1}(x_t), \mu_{B1}(y_t)\} = \min\{\alpha_1, \beta_1\}$,

$\sigma_2 = \min\{\mu_{A2}(x_t), \mu_{B2}(y_t)\} = \min\{\alpha_2, \beta_2\}$.

6. Применяя функцию FzClip(), вычислить функции принадлежности вывода по правилам P_1, P_2.

7. Используя функцию FzUnion(), построить интегральную оценку вывода. Наилучшее значение вывода z^* будет представлено значением в соответствующей ячейке таблицы FuziCalc.

8. Для алгоритма Сукамото, используя функцию FzAlpha(), вычислить значения функций принадлежности, полученные в п. 6.

9. Вычислить значение z^* по формуле взвешенного среднего.

10. Сопоставить результаты, полученные по алгоритмам Мамдани и Сукамото.

11. Пример выполнения задания представлен на рис. 5.17.

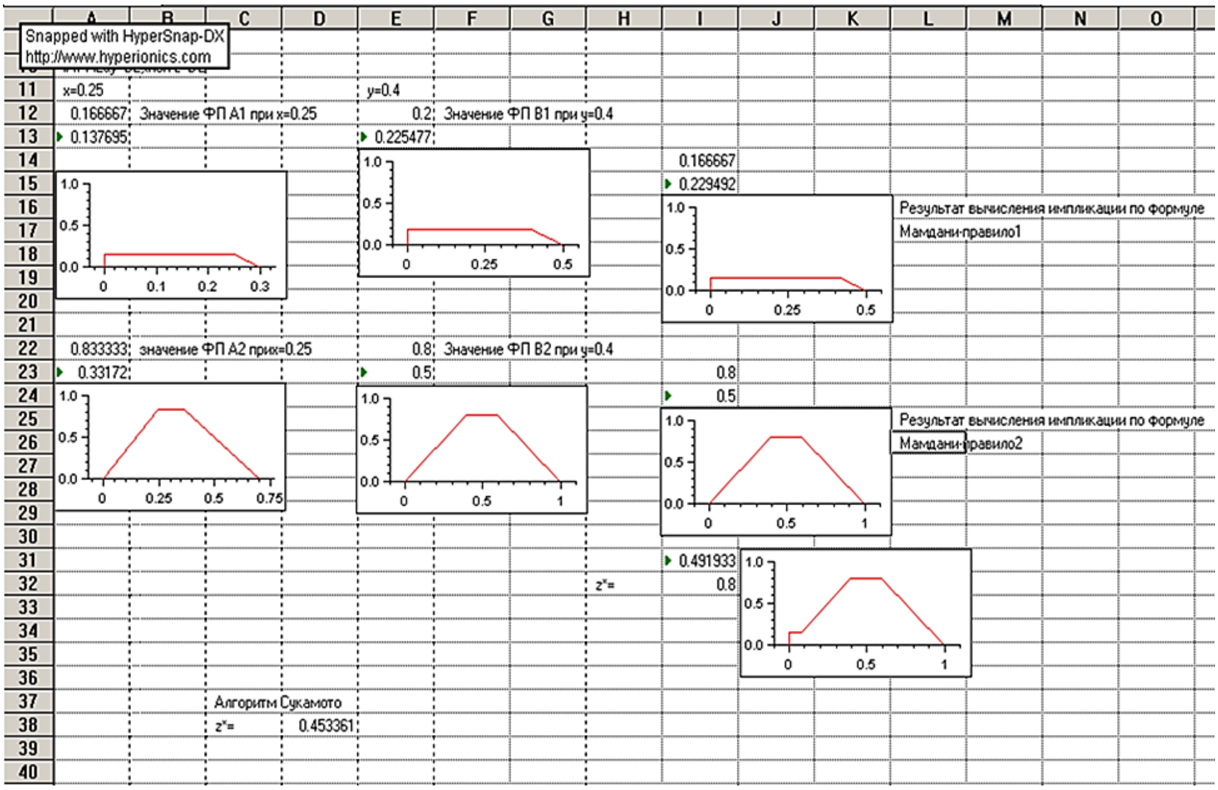


Рис. 5.17. Пример моделирования

6. МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Задачи принятия решений представляют обширный класс задач, относящихся к исследованию операций. В зависимости от исходной формулировки они могут решаться методами теории игр и статистических решений. Отдельный класс составляют задачи многокритериального альтернативного выбора, когда на некотором множестве допустимых (возможных) альтернативных решений $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$ необходимо выбрать альтернативу, наилучшим образом соответствующую требованиям заранее установленной системы критериев оценки $C = \{c_j : j = \overline{1, N}\}$.

Пользуясь терминологией теории множеств, для решения задачи многокритериального альтернативного выбора необходимо построить отношение предпочтения на множестве возможных альтернатив с учетом их соответствия требованиям критериев оценки. Задача осложняется тем, что требования критериев практически всегда остаются противоречивыми, и на множестве альтернатив невозможно найти альтернативу, которая будет лучше остальных по всем критериям одновременно. Очевидно, что в этих условиях выбор наилучшего решения возможен только как компромисс, когда наилучшей альтернативой будет считаться та, у которой самая предпочтительная интегральная оценка по всему множеству критериев. Если оценки соответствия альтернатив требованиям критериев можно считать точно определенными, то задача решается известными методами многокритериальной оптимизации [30].

Однако существует большой класс задач, когда оценки критериального соответствия могут быть заданы только приблизительно, либо имеются обоснованные сомнения в точности числовых значений, либо оценки вообще могут быть заданы только в виде лингвистических утверждений типа «большое соответствие», «незначительное соответствие» и т. п. В этих условиях для решения задач многокритериального альтернативного выбора вполне обосновано использование аппарата нечетких множеств.

Описание в форме нечетких множеств гораздо менее требовательно к квалификации экспертов и зачастую точнее отражает суть дела и имеющуюся у лица, принимающего решения, информацию. Конечно, за это удобство приходится «платить». Предлагаемые теорией решения, основанные на нечеткой информации, и сами несут на себе печать нечеткости. Они могут рассматриваться лишь как рекомендации для лица, принимающего решения, требуя от него выбора одного из предлагаемых вариантов. Тем не менее, даже этот факт можно рассматривать как достоинство теории: он показывает, как увеличение информированности ЛПР сказывается на достоверности и правильности принимаемых решений.

В настоящее время все методы применения нечетких множеств для решения указанных задач можно разделить на методы на основе отношений нечеткого предпочтения, критериальной свертки, правил нечеткого вывода.

В этом порядке и будем их рассматривать.

6.1. Принятие решения на основе отношений нечеткого предпочтения

На множестве возможных альтернативных решений $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$ задано нечеткое отношение предпочтения $\tilde{R}$ с функцией принадлежности $\mu(a_i, a_j)$

$\tilde{R} = \{\mu(a_i, a_j)/(a_i, a_j) \in A \times A\}$.

Нечеткое отношение предпочтения определяется лицом, принимающим решение, либо на основе собственных субъективных предпочтений, либо опроса экспертов, обладающих знаниями в данной предметной области. Для любой пары альтернатив$\forall(a_i, a_j) \in A \times A$ значение $\mu(a_i, a_j)$ понимается как значение истинности утверждения «a_i не хуже a_j». В сокращенном варианте это записывается $a_i \geq a_j$ или $a_i \succ a_j$. Значение $\mu(a_i, a_j) = 0$ означает, что альтернативы несравнимы. В зависимости от смыслового содержания отношения значение функций принадлежности для пары (a_i, a_i) может быть равно единице – отношение «примерно эквивалентно» – или нулю – «отношение предпочтения», так как альтернативы не может быть хуже или лучше самой себя.

Задача принятия решения заключается в рациональном выборе наиболее предпочтительной альтернативы на множестве A, на котором задано нечеткое отношение $\tilde{R}$.

Алгоритм решения задачи состоит из нескольких этапов:

1. Строится отношение строгого предпочтения $\tilde{R}_s$, ассоциированное с исходным отношением $\tilde{R}$, функция принадлежности которого

$$\mu_s(a_i, a_j) = \begin{cases} \mu_{\tilde{R}}(a_i, a_j) - \mu_{\tilde{R}}(a_j, a_i), \ \mu_{\tilde{R}}(a_i, a_j) > \mu_{\tilde{R}}(a_j, a_i), \\ 0, \mu_{\tilde{R}}(a_i, a_j) \leq \mu_{\tilde{R}}(a_j, a_i). \end{cases} \qquad (6.1)$$

2. Строится нечеткое подмножество $\tilde{A}_{ND} \subset \tilde{A}$ недоминируемых альтернатив, ассоциированное с $\tilde{R}$, включающее только те альтернативы, которые не доминируются никакими другими. Функция принадлежности $\tilde{A}_{ND}$ определяется соотношением

$$\mu_{\tilde{A}_{ND}}(a_i) = \min_j \left\{1 - \mu_S(a_j, a_i)\right\} = 1 - \max_j \left\{\mu_S(a_j, a_i)\right\}. \qquad (6.2)$$

Если $\mu_{\tilde{A}_{ND}}(a_i)=\alpha,\ 0\le\alpha\le 1$, это означает, что никакая альтернатива не может быть лучше a_i со степенью доминирования α, иначе говоря, a_i может доминироваться другими альтернативами, но со степенью не выше 1 – α. Рационально в качестве наилучшей выбирать альтернативу, имеющую наибольшую принадлежность множеству $\tilde{A}_{ND}$.

3. Выбирается альтернатива a^*, для которой $\mu_{\tilde{A}_{ND}}(a^*)=\max$, $a^*=\arg\max\limits_i \mu_{\tilde{A}_{ND}}(a_i)$.

Эта альтернатива и дает решение задачи. Возможно, что наибольшую степень доминирования имеет не одна, а несколько альтернатив, тогда ЛПР выбирает одну исходя из своих предпочтений или расширяет (изменяет) состав экспертов для уточнения исходных данных, и решение повторяется.

Пример 6.1. На множестве альтернатив $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ отношение $\tilde{R}$ задано матрицей

$$M_{\tilde{R}}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.8 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица, представляющая отношение строгого предпочтения, в соответствии с формулой (6.1) будет иметь вид

$$M_{\tilde{R}_s}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Вычисления по соотношению (6.2) предполагают сначала нахождение наибольших элементов в каждом столбце матрицы $M_{\tilde{R}_s}$, т. е. {1, 0,4, 0,3, 1}, а затем – соответствующего значения функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}_{ND}}(a_i)=\{0,\ 0{,}6,\ 0{,}7,\ 0\}$. Отсюда следует, что наилучшей альтернативой будет a_3.

Пример 6.2. На множестве альтернатив $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ отношение $\tilde{R}$ задано матрицей

$$M_{\tilde{R}} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица, представляющая отношение строгого предпочтения, в соответствии с формулой (6.1) будет иметь вид

$$M_{\tilde{R}_s} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Вычисления по соотношению (6.2) предполагают сначала нахождение наибольших элементов в каждом столбце матрицы $M_{\widetilde{R_s}}$, т. е. $\{0{,}4,\ 1,\ 1,\ 0{,}4\}$, а затем – соответствующего значения функции принадлежности $\mu_{\tilde{A}_{ND}}(a_i) = \{0{,}6,\ 0,\ 0,\ 0{,}6\}$. Отсюда следует, что две альтернативы a_1 и a_4 могут рассматриваться как равноценные [30].

Задание 6.1

Для ситуаций, заданных матрицами отношения, найти наилучшую альтернативу:

$$M_{\tilde{R}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0.15 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad M_{\tilde{R}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.7 & 0.85 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.65 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$M_{\tilde{R}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.65 & 0.65 & 0.15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0..5 & 1 \end{Vmatrix}, \quad M_{\tilde{R}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.55 & 1 & 0 \\ 0.65 & 0.7 & 0.15 & 1 \end{Vmatrix}.$$

6.2. Многокритериальная оценка и выбор альтернатив на основе нечетких множеств

Рассматривается метод анализа альтернатив, когда критериальные оценки задаются как степени соответствия альтернатив требованиям критериев оценки. Имеется множество альтернатив $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$, для оценки которых задано множество критериев $C = \{c_j : j = \overline{1, N}\}$.

Для каждого критерия c_j может быть построено нечеткое множество $c_j = \{\mu_{c_j}(a_1)/a_1, \mu_{c_j}(a_2)/a_2, \dots, \mu_{c_j}(a_M)/a_M\}$, где $\mu_{c_j}(a_i) \in [0,1]$. Оценка альтернативы a_i по критерию c_j характеризует степень соответствия альтернативы понятию, определяемому критерием c_j. Если критерии имеют одинаковую значимость, то правило для выбора наилучшей альтернативы может быть записано в виде пересечения соответствующих нечетких множеств: $D = c_1 \cap c_2 \cap \dots \cap c_N$. В разделе, где рассматривались операции над нечеткими множествами, пересечение нечетких множеств обычно формализуется операцией min, выполняемой над их функциями принадлежности, $\mu_D(a_i) = \min\limits_{i=\overline{1,M}} \mu_{c_j}(a_i)$, $j = \overline{1, N}$. В качестве лучшей выбирается альтернатива a^*, имеющая наибольшее значение функции принадлежности $\mu_D(a^*) = \max\limits_{i=\overline{1,M}} \mu_D(a_i)$.

В случае, если критерии c_j имеют различную важность, каждому из них приписывается число $\alpha_j \geq 0$ (чем важнее критерий, тем больше α_j, и правило выбора принимает вид $D = c_1^{\alpha_1} \cap c_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap c_N^{\alpha_n}$). Обычно предполагается, что весовые коэффициенты α_j удовлетворяют условию нормировки $\sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j = 1$. Значения весовых коэффициентов могут назначаться непосредственно экспертами, но в данном случае велики влияние их субъективных предпочтений и вероятность ошибок. Чаще используют метод парных сравнений, когда значения весовых коэффициентов определяются как значения координат собственного вектора матрицы парных сравнений. В этом случае возможен контроль корректности полученных значений весовых коэффициентов по отношению согласованности [31].

Пример 6.3. Критерии равной важности. Заданы множества альтернатив $A = \{a_i, i = 1, \dots, 5\}$ и критериев $C = \{c_j, j = 1, \dots, 6\}$. Экспертами определены нечеткие оценки критериального соответствия:

$C_1 = \{0{,}4/a_1, 0{,}9/a_2, 0{,}9/a_3, 0{,}3/a_4, 0{,}5/a_5\}$;

$C_2 = \{0{,}7/a_1, 0{,}8/a_2, 0{,}6/a_3, 0{,}9/a_4, 0{,}6/a_5\}$;

$C_3 = \{0{,}7/a_1, 0{,}4/a_2, 0{,}2/a_3, 0{,}5/a_4, 0{,}8/a_5\}$;

$C_4 = \{0{,}8/a_1, 0{,}5/a_2, 0{,}4/a_3, 0{,}7/a_4, 0{,}5/a_5\}$;

$C_5 = \{0{,}9/a_1, 0{,}9/a_2, 0{,}4/a_3, 0{,}7/a_4, 0{,}6/a_5\}$;

$C_6 = \{0{,}9/a_1, 0{,}4/a_2, 0{,}8/a_3, 0{,}7/a_4, 0{,}5/a_5\}$.

Тогда правило выбора имеет вид:

D = {min (0,6, 0,7, 0,7, 0,8, 0,9, 0,9)/a_1; min (0,9, 0,8, 0,4, 0,5, 0,9, 0,4)/a_2; min (0,9, 0,6, 0,2, 0,4, 0,4, 0,8)/a_3; min (0,3, 0,9, 0,5, 0,7, 0,7, 0,7)/a_4; min (0,5, 0,6, 0,8, 0,5, 0,6, 0,5)/a_5} = {0,6/a_1, 0,4/a_2, 0,2/a_3, 0,3/a_4, 0,5/a_5)}.

Очевидно, что наилучшей альтернативой будет a_1.

Пример 6.4. Критерий различной важности. Для простоты сократим число критериев до трех, а число альтернатив – до четырех. Нечеткие множества, характеризующие альтернативные варианты с точки зрения различных критериев:

c_1 = {0,5/a_1, 0,7/a_2, 0,3/a_3, 0,6/a_4}, c_2 = {0,5/a_1, 0,4/a_2, 0,8/a_3, 0,4/a_4}, c_3 = {0,5/a_1, 0,7/a_2, 0,3/a_3, 0,6/a_4}.

Критерии имеют различную важность, результаты их попарного сравнения представлены матрицей и таблицей.

$$B = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1/9 \\ 3 & 9 & 1 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Шкала оценок важности критериев

Относительная важность критериев c_i и c_j	Значение важности b_{ij}
Равная важность	1
Немного важнее	3
Важнее	5
Заметно важнее	7
Намного важнее	9
Промежуточные значения	2, 4, 6, 8

Собственный вектор матрицы B: w_1 = 0,06; w_2 = 0,27; w_3 = 0,67. С учетом весовых коэффициентов нечеткие множества c_i, i = 1, 2, 3 приобретают вид

c_1 = {$0{,}5^{0{,}06}$/a_1, $0{,}7^{0{,}06}$/a_2, $0{,}3^{0{,}06}$/a_3, $0{,}6^{0{,}06}$/a_4} = {0,95/a_1, 0,98/a_2, 0,93/a_3, 0,97/a_4}.

Для остальных критериев запишем сразу окончательный результат

c_2 = {0,83/a_1, 0,78/a_2, 0,94/a_3, 0,78/a_4}; c_3 = {0,34/a_1, 0,21/a_2, 0,71/a_3, 0,93/a_4}.

Получим множество

D = {0,34/a_1; 0,21/a_2; 0,71/a_3; 0,93/a_4}.

Максимальное значение принадлежности имеет альтернатива a_4, ее и следует выбрать в качестве решения.

Необходимо отметить, что введение весовых коэффициентов может изменить результат решения задачи. Рассмотрим следующий пример.

Пример 6.5. Ситуация принятия решения задана следующим набором

	c_1	c_2	c_3	min
a_1	0,3	0,6	0,8	0,3
a_2	0,9	0,4	0,2	0,2
a_3	0,7	0,5	0,4	0,4

1. Критерии считаются равноценными. Столбец min содержит результат операции пересечения. Очевидно, что в данном случае наилучшей альтернативой должна быть признана альтернатива a_3.

2. Будем считать, что критерии имеют различную значимость, определяемую весовыми коэффициентами из примера 6.4 $w_1 = 0,06$; $w_2 = 0,27$; $w_3 = 0,67$.

С учетом весовых коэффициентов исходная матрица приводится к виду

	c_1	c_2	c_3	min
a_1	1,230309	0,871166	0,861133	0,861133
a_2	0,993698	0,780829	0,340165	0,340165
a_3	0,978827	0,82932	0,541228	0,541228

Очевидно, что в этом случае наилучшей должна быть признана альтернатива a_1.

Приведенный пример наглядно показывает, что к введению и определению весовых коэффициентов для критериев надо относиться предельно аккуратно.

Задание 6.2

Решить задачу выбора наилучшей альтернативы при исходных данных, приведенных ниже. Задачи решать при одинаковой и различной значимости критериев. Значения весовых коэффициентов могут назначаться произвольно, но при обязательном выполнении условий нормировки либо с помощью метода парных сравнений. Расчет координат собственного вектора можно выполнять по упрощенному алгоритму.

A/C	c_1	c_2	c_3
a_1	0,2	0,5	0,8
a_2	0,6	0,4	0,5
a_3	0,3	0,7	0,6
a_4	0,2	0,8	0,4

A/C	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0,2	0,6	0,3	0,2
a_2	0,5	0,4	0,7	0,8
a_3	0,8	0,5	0,6	0,4

A/C	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	0,5	0,4	0,3	0,7	0,6
a_2	0,6	0,2	0,4	0,3	0,5
a_3	0,2	0,7	0,3	0,5	0,4
a_4	0,7	0,3	0,4	0,4	0,4

A/C	c_1	c_2	c_3	c_4
a_1	0,5	0,6	0,2	0,7
a_2	0,4	0,2	0,7	0,3
a_3	0,3	0,4	0,3	0,4
a_4	0,7	0,3	0,5	0,4
a_5	0,6	0,5	0,4	0,4

6.3. Многокритериальная оценка и выбор альтернатив с использованием правил нечеткого условного вывода

В предыдущем разделе исходная формулировка задачи многокритериального альтернативного выбора имела матричную форму. В то же время может оказаться более удобной первоначальная формулировка задачи в виде нечетких условных высказываний. В их левой условной части представлены экспертные оценки удовлетворения некоторой альтернативы требованиям критериев, а в правой части условного высказывания – нечеткий вывод о приемлемости данной альтернативы. Такие правила составляются для каждой альтернативы, и в совокупности они образуют базу знаний системы нечеткого условного вывода для задачи многокритериального альтернативного выбора.

Выбор наилучшей альтернативы из множества $A = \{a_i : i = \overline{1, M}\}$ выполняется на основе системы критериев $C = \left\{c_j : j = \overline{1, N}\right\}$, т. е. лингвистических переменных, определенных на базовых множествах U_1, U_2, ..., U_N соответственно. Например, переменная c_1 «квартирная плата» может иметь значение НИЗКАЯ, а переменная c_2 «положение квартиры» – значение ХОРОШЕЕ и т. п. Набор из нескольких критериев с соответствующими значениями характеризует представления ЛПР об удовлетворительности (приемлемости) решения. Переменная S «удовлетворительность» также является лингвистической. Пример высказывания: d_1: «Если c_1 = НИЗКАЯ и c_2 = ХОРОШЕЕ, то S = ВЫСОКАЯ». Для каждого критерия c_j строится свое множество лингвистических значений $L_j = \{l_k^j : k = \overline{1, K_j}\}$, $j = \overline{1, N}$, формализуемых нечеткими множествами $M(L_j) = \{\mu_{l_k^j}(u_j)/u_j)\}, k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J}$.

В общем случае высказывание d_q имеет вид $q = \overline{1, Q}$, где Q – количество правил нечеткого условного вывода, используемых в решении задачи.

$$d_q\text{: <Если } c_1 = l_q^1 \text{ и } c_2 = l_q^2 \text{ и ... } c_N = l_q^N \text{, то } S = l_q^s\text{>,} \tag{6.3}$$

где l_q^s –линвистическая оценка вывода, соответствующая правилу d_q, которая формализуется нечетким множеством $\mu_{l_q^s}(u_s)$, $u_s \in [0, 1]$.

Отметим, что условная часть правила может быть представлена разнообразными составными высказываниями, содержать модификаторы и квантификаторы, что определяется содержанием задачи.

Согласно описанному ранее алгоритму в процессе обработки правил осуществляется свертка критериев в условной части, характер которой определяется структурой последней. В любом случае сложное правило нечеткого условного вывода сводится к простому виду

$$d_q\text{: <Если } X_q = R_q\text{, то } S = l_q^s\text{>,} \tag{6.4}$$

где X_q и R_q – обобщенный критерий и обобщенное лингвистическое значение соответственно, полученные в результате свертки критериев в условной части правила нечеткого вывода. В общем случае для решения задачи должна быть построена база знаний, состоящая из правил вида (6.4), т. е. построено множество $D = \{d_q : q = \overline{1, Q}\}$.

Следующим этапом обработки правил вида (6.4) будет вычисление нечеткой импликации по любой из известных формул. Основанием для выбора метода вычисления нечеткой импликации могут служить предпочтения лица, принимающего решения (решающего задачу), особенности соответствующих формул, вычислительные затраты, наличие программного обеспечения. Часто в рассматриваемых задачах используют импликацию Лукасевича, и тогда функция принадлежности нечеткого множества, формализующего множество возможных решений, например по правилу (6.4), вычисляется как

$$\mu_{d_q} = \min\left(1{,}1 - \mu_{R_q} + \mu_{l_q^s}\right). \tag{6.5}$$

Значения аргументов всех функций принадлежности находятся в диапазоне [0, 1].

После обработки всех правил вида (6.4) будет получена совокупность нечетких множеств с функциями принадлежности вида (6.5), которая будет определять нечеткие множества, представляющие возможные решения, задаваемые множеством всех правил, входящих в базу знаний системы нечеткого вывода

$M_Q = \{\mu_{d_q}(z)\colon q = \overline{1, Q}, z \in [0, 1]\}$.

Интегральное нечеткое множество возможных решений находится следующим образом:

$$\tilde{R} = \bigcap_{q=1}^{Q} \mu_{d_q}(z) = \min_{q} \mu_{d_q}(z),\ z \in [0, 1]. \tag{6.6}$$

В конечном итоге для каждой альтернативы будут построены нечеткие множества $\tilde{R}_i,\ i = \overline{1, M}$ вида (6.6). Заключительным этапом станет выбор наилучшей альтернативы. Одним из возможных вариантов является определение точечных оценок, получаемых на основе α-разбиения множеств вида (6.6). Для нечеткого множества $\tilde{R}_i$ α-уровневое множество $R_i^{\alpha} = \left\{z / \mu_{d_q}(z) \geq \alpha,\ z \in [0, 1]\right\}$.

Для каждого R_i^{α} можно вычислить среднее число элементов $M(R_i^{\alpha})$:

– для множества из n элементов $M(R_i^{\alpha}) = \sum_{z \in R_i^{\alpha}} z_i / n$;

– для $R_{\alpha} = \{a \leq z \leq b\}$ $M(R_{\alpha}) = (a + b)/2$;

– для $0 \le a_1 \le b_1 \le a_2 \le b_2 \le, \ldots, \le a_n \le b_n \le 1$;

$$R_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i \le z \le b_i);\ M(R_\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i + b_i}{2}(b_i - a_i)}{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)}.$$

Тогда точечное значение для множества $\tilde{R}$ $F(\tilde{R}) = \frac{1}{\alpha_{\max}} \int_0^{\alpha_{\max}} (R_\alpha)\, d\alpha.$ Наилучшая альтернатива будет иметь наибольшее значение точечной оценки $F(\tilde{R})$.

7. ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В настоящее время известно достаточно большое число программных систем для решения различных задач с применением нечетких множеств. Подробное описание этих систем, а также методы их использования для решения конкретных задач изложены в различных источниках. Наиболее полно этот материал приведен в работах [4, 5]. Ниже в сокращенном варианте рассмотрены только основные характеристики этих систем.

7.1. Средства нечеткого управления и моделирования в пакете MATLAB

Пакет MATLAB (MATrix LABoratory) компании MathWoks (США), представляющий собой интегрированную среду для выполнения численных расчетов, компьютерного моделирования и вычислительных экспериментов, содержит широкий набор готовых функций, используемых при анализе и синтезе систем автоматического управления. В пакете имеется набор алгоритмов, образующих так называемый инструментарий, которые могут использоваться для проектирования, анализа и моделирования систем автоматического управления.

Для решения задач методами теории нечетких множеств в пакете MATLAB предусмотрен пакет нечеткой логики Fuzzy Logic Toolbox.

Основные возможности пакета:

– построение систем нечеткого вывода (экспертных систем, регуляторов, аппроксиматоров зависимостей);

– построение адаптивных нечетких систем (гибридных нейронных сетей);

– интерактивное динамическое моделирование в среде Simulink.

Пакет обеспечивает работу:

– в режиме графического интерфейса;

– режиме командной строки;

– с использованием блоков и примеров пакета Simulink.

Нечеткое управление моделируется с помощью системы нечеткого вывода FIS (Fuzzy Inference System) (рис. 7.1), включающей редактор системы нечеткого вывода (FIS-Editor), редактор функций принадлежности (The Member Ship Function Editor), редактор правил (The Rule Editor), подсистем для просмотра правил и схем нечетких выводов (The Rule Viewer), полученных поверхностей (The Surface Viewer).

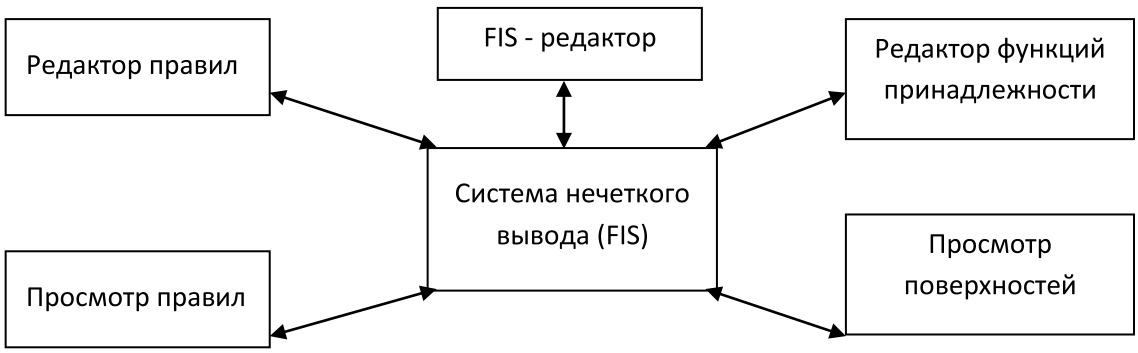


Рис. 7.1. Структура пакета MATLAB

FIS-редактор обеспечивает высокий уровень общения с системой, не имеет ограничений на число входных и выходных переменных, которое ограничивается лишь доступным объемом памяти ЭВМ.

Редактор функций принадлежности используется для задания вида функций принадлежности для каждой переменной, редактор правил – для редактирования текста правил условного логического вывода при описании поведения моделируемой системы.

Просмотрщики правил и поверхностей применяются для визуального контроля. Просмотрщик правил отображает схему нечеткого вывода на последнем этапе и используется как средство диагностики. С его помощью можно, например, увидеть, какие правила активны, или оценить влияние формы отдельной функции принадлежности на результат.

Просмотрщик поверхностей обеспечивает представление на экране зависимости одного выхода от одного или двух входов, а также генерации и построения картины поверхности выхода для системы.

Все компоненты FIS могут взаимодействовать и обмениваться данными в процессе моделирования. В пакете MATLAB возможно использование шести видов функции принадлежности (рис. 7.2):

– треугольной (trimf);

– трапецеидальной (tramf);

– функции принадлежности в виде кривой Гаусса (gaussmf) или составленной из двух кривых Гаусса (gauss2mf);

– колоколообразной (bellmf);

– сигма-функции, предназначенной для воспроизведения несимметричных функций принадлежности: sigmf – функция принадлежности, открытая справа, dsigmf – закрытая функция принадлежности, составленная из разности двух сигма-функций, psigmf – закрытая функция принадлежности, образованная из произведения двух сигма-функций;

– трех функций принадлежности, основанных на полиноминальных кривых: zmf – несимметричная функция принадлежности, открытая слева, smf – несимметричная функция принадлежности, открытая справа, pmf – закрытая функция принадлежности.

Кроме этого пакет MATLAB позволяет пользователю конструировать собственные функции принадлежности.

Система нечеткого моделирования поддерживает два основных оператора, «И» и «ИЛИ». Импликация реализуется через оператор «И», который представлен в двух видах: min и произведение (prod).

«ИЛИ» реализуется через max и probor-оператор вероятного «ИЛИ», известный еще как алгебраическая сумма, и вычисляется по уравнению $\mathrm{probor}(a,\ b) = a + b - ab.$

Кроме этих операций в пакете нечеткой логики Fuzzy Logic Toolbox представлены операции концентрирования и размытия. Пакет нечеткой логики поддерживает также все известные операции над нечеткими отношениями.

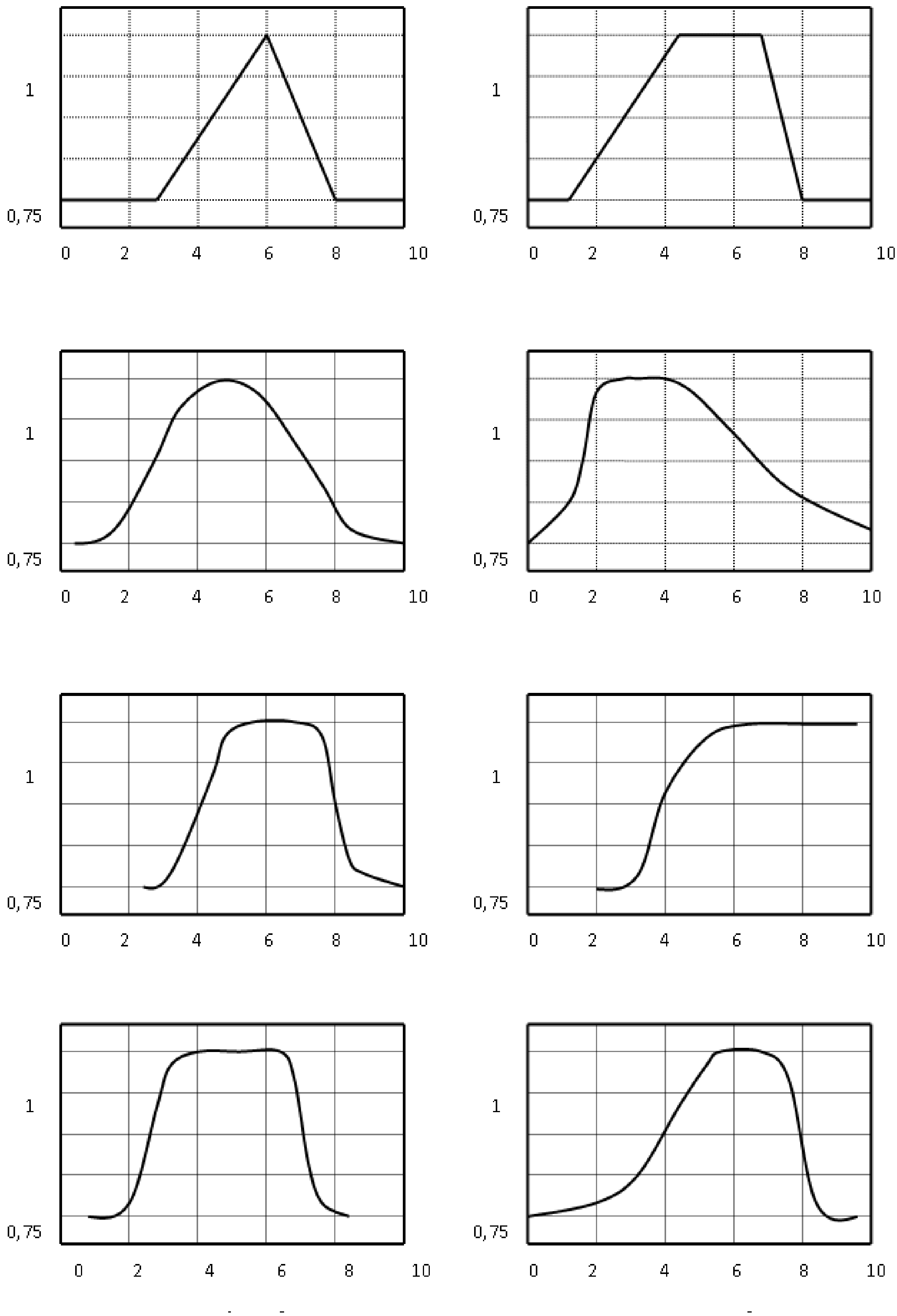


Рис. 7.2. Функции принадлежности, используемые в пакете MATLAB

Для реализации нечетких выводов используются алгоритмы Мамдани и Сугено. В пакете MATLAB имеется внутренний язык программирования, позволяющий программировать алгоритмы для работы с нечеткими множествами, не предусмотренные стандартной конфигурацией [5].

7.2. Пакет нечеткого моделирования fuzzyTECH

Пакет нечеткого моделирования fuzzyTECH – разработанная и постоянно обновляемая программа компании INFORM GmbH (Inform Software Corporation, Германия), предназначенная для решения различных задач нечеткого моделирования. В отличие от MATLAB программа fuzzyTECH служит специализированным средством, которое позволяет разрабатывать и исследовать разнообразные нечеткие модели в графическом режиме, а также преобразовывать их в программный код на одном из языков программирования с возможностью последующей реализации в программируемых микроконтроллерах.

Программу fuzzyTECH можно использовать в качестве сервера или клиента при нечетком управлении удаленными объектами. Важной особенностью программы fuzzyTECH считается возможность автоматической генерации документации для разработанных нечетких моделей в виде текста с иллюстрациями в формате RTF.

Демонстрационная версия программы fuzzyTECH 5.52 доступна в Интернете по адресу: www.fuzzytech.com. Дистрибутив программы в форме самораспаковывающегося архивного файла занимает около 16 Мбайт. Основным ограничением демонстрационной версии программы fuzzyTECH можно назвать отсутствие возможности сохранения проекта и генерации программного кода на том или ином языке программирования. Системные требования для инсталляции программы fuzzyTECH полностью удовлетворяются современными компьютерами.

Хотя программа fuzzyTECH и система MATLAB используют единые принципы нечеткого моделирования, существует несколько принципиальных отличий в реализации систем нечеткого вывода FLS в программе fuzzyTECH от систем FIS в пакете Fuzzy Logic Toolbox. Основные из них изложены ниже.

1. Проект системы нечеткого вывода в fuzzyTECH может иметь несколько блоков правил (RuleBlocks) нечетких продукций, каждый из которых содержит собственные входные и выходные лингвистиче-

ские переменные. При этом отдельные блоки правил соединяются между собой последовательно или параллельно.

2. Кроме входных (Inputs) и выходных (Outputs) лингвистических переменных, проекты fuzzyTECH могут иметь так называемые промежуточные (Intermediates) лингвистические переменные, появляющиеся в тех случаях, когда блоки правил соединяются последовательно, т. е. выход одного блока правил соединяется с входом другого.

3. Все операции по разработке, редактированию, отладке и анализу проектов в программе fuzzyTECH выполняются в графическом интерактивном режиме, при этом для создания прототипов проектов и спецификации их отдельных компонентов могут быть использованы различные мастера (Wizards).

4. На основе разработанного и отлаженного проекта программой fuzzyTECH может быть сгенерирован программный код реализации системы нечеткого вывода на одном из языков программирования (C, Java, MS Visual C++, MS Visual Basic, MS VBA, COBOL, Assembler, язык m-файлов системы MATLAB). В дальнейшем полученные подобным образом листинги программного кода могут быть откомпилированы для той или иной вычислительной платформы и использованы независимо от программы fuzzyTECH для реализации в нечетких микроконтроллерах.

5. В программе fuzzyTECH необходимо в явном виде указывать ограничения на размерность проектов систем нечеткого вывода, которые могут быть реализованы в ее среде. Например, версия программы fuzzyTECH 5.5 Professional имеет следующие количественные ограничения на отдельные компоненты разрабатываемых проектов:

– общее количество лингвистических переменных проекта не должно превышать 255, из них входных – 255 и выходных – 32;

– каждая из лингвистических переменных может иметь не более 32 нечетких термов или не более 255 обычных (Categorical), т. е. не нечетких значений. При этом общее количество термов у всех переменных не должно превышать 65 535;

– общее количество блоков правил нечетких продукций проекта не должно превышать 32. При этом у каждого блока правил может быть не более 11 входных и 11 выходных лингвистических переменных.

Применение в программе fuzzyTECH технологии динамического обмена данными (Dynamic Data Exchange, или сокращенно DDE) позволяет совместно использовать разработанные нечеткие модели с другими программами и инструментами, такими как MS Access, MS Excel, MATLAB. При этом программа fuzzyTECH может выступать как в роли сервера, так и в роли клиента, что существенно расширяет диапазон возможных приложений разрабатываемых нечетких моделей.

Все проекты в среде fuzzyTECH сохраняются в отдельных файлах проектов формата FTL (Fuzzy Technology Language), имеющих расширение ftl. Они представляют собой обычные текстовые файлы, которые можно просматривать и редактировать любым ASCII-редактором (например, MS Notebook). Формат FTL был специально разработан компаниями IntelCorp. и Inform Software Corp. в 1991 году для представления систем нечеткого вывода в форме структурируемого текста.

6. В нечетких проектах fuzzyTECH могут быть использованы различные типы и формы функций принадлежности термов лингвистических переменных. Пользователь может выбрать один из типов:

– *стандартный вариант функции принадлежности* (Standard MBFs), называемый иногда «четырехточечным» вариантом, поскольку основан на использовании четырех характеристических точек или параметров для задания соответствующей функции принадлежности;

– *произвольный вариант функции принадлежности* (Arbitrary MBFs), при нем можно использовать до 16 характеристических точек параметров для задания или аппроксимации соответствующей функции принадлежности;

– *инверсный вариант функции принадлежности* (Inverse MBFs), который может оказаться полезным при определении правил нечетких продукций с отрицанием существующих в проекте термов (inverse terms) для отдельных лингвистических переменных.

Для каждого типа функции принадлежности можно использовать одну из форм, приведенных ниже:

– *линейную* (L-shape), которая предполагает представление функции принадлежности в форме треугольной, трапециевидной функции или их некоторой комбинации;

– *S-образную* (S-shape), предполагающую представление функции принадлежности в форме некоторой *S*-образной, *Z*-образной или П-образной кривой.

В программе fuzzyTECH предусмотрены различные методы фаззификации входных переменных, которые может выбирать пользователь, исходя из специфики решаемой задачи. В программе fuzzyTECH возможны следующие реализации логических операций:

– для логического нечеткого И используется операция min:

– логического нечеткого ИЛИ – операция max;

– логического отрицания НЕ – операция разности.

Для получения интегральных заключений правил нечетких продукций (аккумуляции) можно воспользоваться одним из следующих методов:

– обычным (max), при котором результат нечеткого вывода в блоке n нечетких продукций определяется как объединение нечетких множеств по формуле max;

– граничной суммы (bsum), при котором результат нечеткого вывода в правиле нечетких продукций определяется как объединение нечетких множеств по формуле $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$.

В проектах fuzzyTECH могут быть использованы различные методы дефаззификации выходных переменных. При этом пользователю предоставляется возможность выбора одного из следующих методов дефаззификации:

– стандартного (Center-of-Maximum, или сокращенно CoM), в программе fuzzyTECH метод дефаззификации CoM работает аналогично методу центра тяжести CoG;

– центра площади (Centre-of-Area, или сокращенно CoA);

– среднего максимума (Mean-of-Maximum, или сокращенно MoM), который определяется как арифметическое среднее между левым и правым модальными значениями, при этом в качестве моды нечеткого множества рассматривается максимальное значение его функции принадлежности;

– гиперцентра максимума (Hyper Center-of-Maximum, или сокращенно HyperCoM), который может быть использован только в дополнительных модулях программы fuzzyTECH. Этот метод позволяет учитывать положительные и отрицательные результаты нечетких выводов и в соответствии с этим формирует некоторое оптимальное значение для выходных переменных.

Подробное описание пакета fuzzyTECH и методов его использования представлено в [5].

7.3. Программная система Fexcel (Fuzzy for Excel)

Программная система Fexcel, предназначенная для решения аналитических задач в условиях неопределенности, является программной надстройкой для широко распространенной электронной таблицы Microsoft Excel. Это четвертая версия программного обеспечения, разработанная консалтинговой группой INEX-FT (Украина). Fexcel основан на использовании авторских алгоритмов нечеткой технологии для решения аналитических задач в условиях неопределенности. С помощью Fexcel пользователь может решать три типа аналитических задач:

– любые расчеты с использованием нечетких чисел;

– задачи оценки и классификации альтернатив (задачи соотнесения альтернатив к описанным классам);

– задачи прогнозирования.

Fexcel решает первый тип задач с использованием алгоритма арифметических операций в соответствии с принципом максимума энтропии решения, второй тип задач – с применением нечетких множеств и нечетких мер. Здесь Fexcel обеспечивает создание сетевой структуры критериев оценки и классификации. Третий тип задач Fexcel решает, используя алгоритм прогноза совместного влияния событий. Это принципиально новый алгоритм прогноза. Он отличается от широко распространенных алгоритмов тем, что использует информацию о событиях, которые произошли в прошлом и ожидаются в будущем.

Fexcel создан как обычная надстройка программного обеспечения Microsoft Excel и не требует специальных знаний нечеткой математики. Работа Fexcel скрыта от пользователя, который, однако, должен понимать природу неопределенности в аналитической задаче и иметь некоторые навыки интерпретации нечетких чисел.

Fexcel содержит ряд функций и инструментов (макроопределений). Функции Fexcel обеспечивают создание нечетких чисел и различные операции с ними, а также широкий спектр операций с нечеткими множествами и нечеткими мерами. Большинство функций работает как с нечеткими, так и с обычными числами. Правила вызова и использования функций Fexcel традиционны. Инструменты Fexcel осуществляют визуальный анализ результатов расчетов (включая 3D графику), а также решение задачи прогнозирования и вспомогательных задач.

Fexcel имеет полную и ограниченную версии. Ограниченная версия отличается от полной только диапазоном ячеек (A1:F6), в которых Fexcel поддерживает выполнение функций и инструментов.

Основы построения и ограничения

Fexcel представляет нечеткие числа в виде двух массивов, которые имеют 21 элемент. Носитель нечеткого числа – это массив последовательно возрастающих чисел: от минимального до максимального значения; функция принадлежности – это массив значений уверенности.

Fexcel представляет традиционные числа так же, как нечеткие числа. Для традиционного числа все элементы носителя равны этому числу, а все элементы функции принадлежности равны, кроме одного элемента, который равен единице, т. е. традиционное число является частным случаем нечеткого числа.

Fexcel имеет следующие ограничения на числа:

– числа, модуль которых меньше чем 10^{-10}, трактуются как ноль;

– числа, модуль которых больше чем 10^{16}, являются недопустимыми.

В ячейке рабочего листа Fexcel отображает характеристику нечеткого числа, которая установлена пользователем с помощью инструмента Options. Эти настройки являются глобальными установками Fexcel. При их изменении Fexcel принудительно пересчитывает все открытые рабочие книги. На малопроизводительных компьютерах пересчет может выполняться долгое время. Поэтому изменение настроек рекомендуется делать нечасто. Если пользователь хочет отобразить разные характеристики в различных ячейках, он может воспользоваться вспомогательной функцией FuzzyGetParameter.

Все функции возвращают в ячейку значение характеристики нечеткого числа, которая указана в опциях. В случае ошибок функции Fexcel возвращают #ERROR. Исключением служит функция FuzzyFormula, которая может возвращать несколько отрицательных значений от –1 до –7 в зависимости от типа ошибки. Некоторые функции Fexcel не допускают использования других функций в качестве аргументов.

Инструменты Fexcel вызываются с помощью меню Fuzzy и панели инструментов Fuzzy tools. Fexcel хранит нечеткие числа в ячейках скрытого рабочего листа и автоматически добавляет скрытые листы в рабочую книгу. После переименования рабочего листа пользователь обязательно должен сохранить рабочую книгу. Только при этом условии Fexcel гарантирует корректную работу.

Пользователь не должен использовать имена рабочих листов, которые содержат пробелы, знаки арифметических операций и другие нехарактерные символы. В противном случае Fexcel не гарантирует корректную работу.

Fexcel поддерживает систему ячеек памяти, которые содержат нечеткие числа и сохраняются в двоичных файлах. Ячейки памяти могут использоваться для связи между рабочими книгами и играть роль базы данных с нечеткими числами. Для работы с ячейками памяти Fexcel имеет функции FuzzySetCell и FuzzyGetCell. Однако основное назначение ячеек памяти состоит в обеспечении обмена данными с другими приложениями нечеткой технологии.

Разработчики гарантируют корректную работу Fexcel только в среде Microsoft Windows '98, Microsoft Excel '97 и выше. Fexcel может конфликтовать с некоторыми надстройками для Microsoft Excel. Однако эта ситуация встречается очень редко.

Fexcel использует графическую библиотеку opengl32.dll. При отображении нечетких процессов корректная работа Fexcel может нарушаться из-за несовместимости различных версий этой графической библиотеки. Некорректная работа библиотеки наблюдается также при нарушениях в программном обеспечении видеоадаптера.

Некоторые антивирусные программы и операционные системы семейства Windows NT контролируют запуск макросов и внешних процессов из среды Microsoft Excel. При возникновении проблем с запуском Fexcel в таких системах необходимо обратиться к системному администратору или самостоятельно уточнить параметры доступа.

Пользователь должен осторожно применять функции рандомизации совместно с Fexcel. Некоторые из функций генерируют случайное число в ячейке при любом изменении на рабочем листе. Fexcel использует некоторые возможности Microsoft Excel, основанные на использовании фоновых процессов. Поэтому в расчетах, в которых в начале цепочки вычислений стоит ячейка с функцией рандомизации, могут возникать нарушения синхронизации вычислений. Это приводит к зацикливанию вычислений.

Функции Fuzzy for Excel

Функции для задания нечетких чисел вызываются традиционными средствами Microsoft Excel. Кроме того, Fexcel дает возможность задать их с помощью инструмента Show numbers. Инструмент вызывается из меню Fexcel или панели Fexcel. Однако инструмент не позволяет задавать нечеткие числа в зависимости от содержания других ячеек.

Функции обработки нечетких данных обеспечивают:

– преобразование нечетких данных с помощью арифметических операций;

– преобразование нечетких данных с помощью логических операций;

– изучение результатов обработки нечетких данных.

Эти функции вызываются традиционными средствами Microsoft Excel.

Вспомогательные функции Fexcel предназначены для автоматизации операций с нечеткими числами, которые наиболее часто применяются на практике. Функции используют в качестве одного из параметров ссылку на ячейку, в которой предварительно сформировано нечеткое число. Функции допускают также ссылку на ячейки с традиционными числами. В случае ошибки все функции возвращают #ERROR.

Функции для задания нечетких чисел

FuzzyFigure (Minimum, Maximum, Level, Figure). Minimum, Maximum – это диапазон носителя нечеткого числа. Level – максимальная высота функции принадлежности. Figure – форма функции принадлежности:

– Trapezium,
– LeftTrapezium,
– RightTrapezium,
– Rectangle,
– Triangle,
– LeftTriangle,
– RightTriangle.

Функция задает нечеткое число в виде геометрической фигуры.

FuzzyInterval (Minimum, Maximum) – это диапазон носителя нечеткого числа. Функция задает нечеткое число в виде интервала [Minimum, Maximum]. Такое число моделирует полную неопределенность.

FuzzyNear (Number). Функция задает нечеткое число в виде окрестности числа Number.

FuzzyNearAndLessTo (Number, Maximum). Функция задает нечеткое число в виде окрестности числа Number, которая ограничена справа до числа Maximum.

FuzzyNearAndMoreTo (Number, Minimum). Функция задает нечеткое число в виде окрестности числа Number, которая ограничена слева до числа Minimum.

FuzzyLessThan (Number). Функция задает нечеткое число с семантикой «меньше, чем Number».

FuzzyMoreThan (Number). Функция задает нечеткое число с семантикой «больше, чем Number».

FuzzyLessThanTo (Number, Minimum). Функция задает нечеткое число с комбинацией семантик «меньше, чем Number до Minimum».

FuzzyMoreThanTo (Number, Minimum). Функция задает нечеткое число с комбинацией семантик «больше, чем Number до Minimum».

FuzzyNearFirstOrSecond (NumberOne; NumberTwo). Функция задает нечеткое число в виде присоединенных друг к другу окрестностей числа NumberOne и числа NumberTwo. При перестановке чисел результат не изменяется.

FuzzyNearFromTo (Minimum, Maximum). Функция задает нечеткое число в виде объединения окрестностей числа Minimum и числа Maximum. Результат объединения всегда является выпуклым.

FuzzyMakeFromStatistic (CellsRange). Функция задает нечеткое число как распределение статистической возможности. В основу преобразования статистических данных в нечеткое распределение положены алгоритмы, которые базируются на взаимосвязи распределений вероятности и возможности. Границы диапазона нечеткого числа определяются в соответствии с минимальным и максимальным числами в статистическом ряде.

FuzzyHand («SN», «SF»). Функция позволяет задать нечеткое число произвольной формы. Строка SN описывает носитель нечеткого числа, а строка SF – функцию принадлежности нечеткого числа. Строки содержат последовательность чисел, которые разделены символом ";". Этот символ должен стоять также после последнего числа в строке. Количество чисел в строках составляет более двух и менее 21 и должно совпадать в обеих строках.

FuzzyHandFromCells (Numbers, Functions). Функция позволяет задать нечеткое число произвольной формы. Диапазон ячеек Numbers описывает носитель нечеткого числа, а диапазон ячеек Functions – функцию принадлежности нечеткого числа. Количество чисел в диапазонах – более двух и менее 21. Количество чисел в обоих диапазонах должно совпадать.

Функции обработки нечетких данных

FuzzySum (FuzzyNumbers). Функция суммирует нечеткие и традиционные числа из диапазона ячеек FuzzyNumbers.

FuzzyProduct (FuzzyNumbers). Функция перемножает нечеткие и традиционные числа из диапазона ячеек FuzzyNumbers.

FuzzyAverage (FuzzyNumbers). Функция вычисляет среднее арифметическое нечетких и традиционных чисел из диапазона ячеек FuzzyNumbers.

FuzzyConvolution (FuzzyNumbers, Factors). Функция вычисляет среднее арифметическое нечетких и традиционных чисел из диапазона ячеек FuzzyNumbers с учетом весовых коэффициентов Factors. Количество чисел в обоих диапазонах должно быть одинаковым.

FuzzyGetDiscount (FuzzyNumber, Discount, Degree). Функция дисконтирует число FuzzyNumber с дисконтом Discount и периодом дисконтирования Degree.

FuzzyFormula (A). Функция выполняет произвольную последовательность арифметических операций с нечеткими числами. A – это арифметическое выражение из ячеек с традиционными и нечеткими числами, а также из обычных чисел. Работа функции основана на синтаксическом анализе выражения A. Функция поддерживает все традиционные правила выполнения арифметических операций, для нечетких чисел эти правила допускают:

– деление числа на нечеткий ноль;

– возведение числа в нечеткую степень, которая должна быть только целым числом.

В случае успешного завершения функция FuzzyFormula создает нечеткое число, т. е. результат заданной последовательности арифметических операций. При обнаружении ошибки функция возвращает одно из следующих чисел:

– синтаксическая ошибка в записи формулы;
– нарушение правил выполнения арифметических операций;
– неверная ссылка на ячейку;
– ссылка на пустую ячейку;
– ссылка на ячейку, которая содержит ошибочную функцию;
– нераспознанное имя ячейки;
– системная ошибка или нарушение целостности Fexcel.

FuzzyMax (Numbers). Функция объединяет несколько нечетких чисел из диапазона Numbers.

FuzzyMin (Numbers). Функция вычисляет пересечение нескольких нечетких чисел из диапазона Numbers.

FuzzyEquivalenceSets (SetA, SetB). Функция вычисляет меру совпадения двух множеств из диапазонов SetA и SetB. Указанные множества трактуются как множества, которые содержат только 0 или 1. Мера совпадения – это число, которое является отношением размера пересечения к размеру объединения этих двух множеств. Размеры множеств могут быть не равны друг другу. В этом случае меньшее множество дополняется нулями до размера большего.

FuzzyComplementation (FuzzyNumber). Функция обращает функцию принадлежности нечеткого числа FuzzyNumber.

FuzzyDegreeFunction (FuzzyNumber, Degree). Функция возводит в степень Degree функцию принадлежности нечеткого числа FuzzyNumber. Эта функция используется для сжатия и растяжения функции принадлежности без изменения носителя нечеткого числа.

FuzzyIntersection (FuzzyX1, FuzzyY1, FuzzyX2, FuzzyY2, Coord). Функция возвращает значение одной из координат точки пересечения двух нечетких кривых, которые описаны отрезками с нечеткими координатами. Диапазон ячеек FuzzyX1 описывает множество координат X точек на горизонтальной оси для первой кривой. Диапазон ячеек FuzzyY1 описывает множество координат Y точек на вертикальной оси для первой кривой, диапазоны FuzzyX2 и FuzzyY2 – аналогичные величины для второй кривой. Параметр Coord – это ячейка, содержащая символ «X» или символ «Y». Этот параметр определяет координату точки пересечения, которую функция возвратит в ячейку. Функция может быть использована для моделирования кривых спроса и предложения в маркетинговых исследованиях. Она возвращает #ERROR в случае, если кривые параллельны.

FuzzyIntegral (FuzzyNumber, FuzzyMeasure). Функция рассчитывает нечеткий интеграл на дискретном числовом множестве в случае, когда нечеткая мера FuzzyMeasure и функция принадлежности FuzzyNumber заданы нечеткими числами.

FuzzyIntegralSemantic (Func, Measure). Функция рассчитывает нечеткий интеграл на дискретном лингвистическом множестве от функции Func по нечеткой мере Measure. Функция принадлежности и нечеткая мера задаются как лингвистические множества в виде диапазонов ячеек. Размерности диапазонов должны быть равны.

FuzzyIntegralSemanticFS (Func, Measure, FuzzySet). Функция рассчитывает нечеткий интеграл на нечетком дискретном множестве FuzzySet от функции принадлежности Func по нечеткой мере Measure. Нечеткое множество, функция принадлежности и нечеткая мера задаются как лингвистические множества в виде диапазонов ячеек. Размерности диапазонов должны быть равны. Функция эквивалентна функции FuzzyIntegralSemantic при условии, что принадлежность всех элементов нечеткого множества FuzzySet равна единице. Разница между функциями FuzzyIntegralSemantic и FuzzyIntegralSemanticFS состоит в том, что вторая функция перед интегрированием «ограничивает» подынтегральную функцию с помощью функции принадлежности нечеткого множества FuzzySet.

FuzzyIntegralSemanticExtFS (Func, FuzzySet, FuncOmega, MeasOmega, Matrix). Функция рассчитывает нечеткий интеграл на нечетком дискретном множестве FuzzySet от функции принадлежности Func по расширенной нечеткой мере. Она возвращает значение интеграла от функции Func на нечетком множестве FuzzySet по нечеткой мере, которая формируется с помощью нечеткого интеграла от функции FuncOmega на индексированном нечетком множестве Matrix по нечеткой мере MeasOmega. Параметры Func, FuzzySet, FuncOmega, MeasOmega задаются в виде диапазонов ячеек. Размерности диапазонов Func и FuzzySet должны быть равны. Размерности диапазонов FuncOmega и MeasOmega тоже должны быть одинаковыми. Параметр Matrix задается матрицей, у которой количество столбцов равно размерности параметра Func, а количество строк – размерности параметра FuncOmega. Эта функция эквивалентна нечеткому интегралу Сугено по нечеткой мере, которая задана в другом пространстве. Матрица Matrix обеспечивает связь между пространствами.

FuzzyGetLambdaParameter (Measure). Функция возвращает значение параметра нормировки нечеткой меры Measure, которую необходимо задать в виде диапазона ячеек.

FuzzyGetBearer (FuzzyNumber, Number). Функция возвращает значение носителя нечеткого числа FuzzyNumber с заданным номером Number. Параметр Number должен находиться в диапазоне от 0 до 20.

FuzzyGetNumbers (FuzzyNumber, Level, Character). Функция возвращает максимальное или минимальное значение носителя нечеткого числа FuzzyNumber для заданного уровня уверенности Level. Параметр Character определяет характеристику, которая должна быть возвращена функцией: 1 – минимальное значение; 2 – максимальное значение. Функции FuzzyGetBearer и FuzzyGetNumbers могут использоваться в расчетах, отражающих пессимистическую и оптимистическую точки зрения.

FuzzyGetParameter (FuzzyNumber, Level, Character). Функция возвращает характеристику нечеткого числа FuzzyNumber по уровню уверенности Level. Параметр Character определяет характеристику, которая должна быть возвращена функцией: 1 – число с максимальным уровнем уверенности; 2 – центр тяжести; 3 – максимальное число на уровне уверенности; 4 – минимальное число на уровне уверенности; 5 – диапазон значений. Функция FuzzyGetParameter полезна в случаях, когда для анализа или для использования в расчетах необходимо иметь значения разных параметров нечеткого числа.

FuzzyGetMembership (FuzzyNumber, Number). Функция возвращает значение уверенности носителя нечеткого числа FuzzyNumber по заданному номеру элемента носителя Number. Значение параметра должно находиться в диапазоне [0, 20].

FuzzyGetLevel (FuzzyNumber, Number). Функция возвращает уровень уверенности одного из значений Number нечеткого числа FuzzyNumber. Параметр Number определяет номер дискреты нечеткого числа и должен находиться в диапазоне [0, 20]. Функции FuzzyGetLevel и FuzzyGetMembership могут использоваться для получения отдельных значений уверенности из нечеткого числа, например, для построения графиков, отображающих пессимистическую и оптимистическую точки зрения.

FuzzyGetNumberForRisk (Level, FuzzyNumber). Функция возвращает значение носителя функции риска нечеткого числа FuzzyNumber на уровне Level.

FuzzyGetRiskLessThan (FuzzyNumber, Number). Функция рассчитывает риск того, что нечеткое число FuzzyNumber окажется меньше заданного числа Number.

FuzzyGetRiskMoreThan (FuzzyNumber, Number). Функция рассчитывает риск того, что нечеткое число FuzzyNumber окажется больше заданного числа Number.

Вспомогательные функции

FuzzyCopy (Number). Функция копирует нечеткое число из ячейки, указанной параметром Number.

FuzzySetCell (FileName, CellName, Time, Number). Функция копирует нечеткое число из ячейки рабочего листа Number в нечеткую ячейку памяти под именем CellName из файла FileName. Ячейка из файла индексируется номером Time. Параметр FileName – это строка с именем файла нечетких ячеек памяти. Параметр CellName – строка с именем ячейки из этого файла. Параметр Time должен быть целым числом, которое больше 0. В функции FuzzySetCell параметр FileName задается пустой строкой. В этом случае по умолчанию используется имя файла Fexcel2.fcl, который располагается в директории «…\Windows\System». Если файл, указанный этим параметром, не существует, то он создается автоматически. Нечеткая ячейка памяти, указанная параметром CellName, может уже существовать. В этом случае функция заменяет ее содержимое. В противном случае функция создает нечеткую ячейку памяти автоматически. Если в указанной нечеткой ячейке памяти указанного индекса не существует, то автоматически создается ряд индексов, начиная с последнего существующего и заканчивая индексом, который указан при вызове функции.

FuzzyGetCell (FileName, CellName, Time). Функция копирует нечеткое число из нечеткой ячейки памяти под именем CellName из файла FileName в текущую ячейку рабочего листа. Ячейка из файла индексируется номером Time. Параметр FileName – это строка с именем файла нечетких ячеек памяти. Параметр CellName – строка с именем ячейки из этого файла. Параметр Time должен быть целым числом, которое больше 0. Если указанного индекса не существует, нечеткое число берется из ближайшего индекса.

Нечеткие ячейки памяти представляют собой совокупность нечетких чисел, которые проиндексированы номерами от 0 и больше.

Эти индексы могут использоваться для моделирования временных процессов. Параметр Time указывает, из какого временного индекса ячейки необходимо взять нечеткое число.

Инструменты Fuzzy for Excel

Инструменты Fexcel обеспечивают интерактивное задание и просмотр, а также документирование нечетких чисел, управление отображением параметров нечетких чисел в ячейках рабочего листа и вызов системы помощи.

Доступ к инструментам обеспечивается с помощью меню Fuzzy и панели Fuzzy tools, которые автоматически подключаются к Microsoft Excel при инсталляции Fexcel.

Инструменты Fexcel обеспечивают:

– визуализацию и задание нечетких чисел, расположенных в ячейках рабочего листа (рис. 7.3);

– просмотр нечеткого процесса;

– подготовку диаграмм для их построения средствами Microsoft Excel;

– опции;

– пересылку нечетких чисел в нечеткие ячейки памяти;

– расчет влияния факторов;

– задание времени влияния факторов.

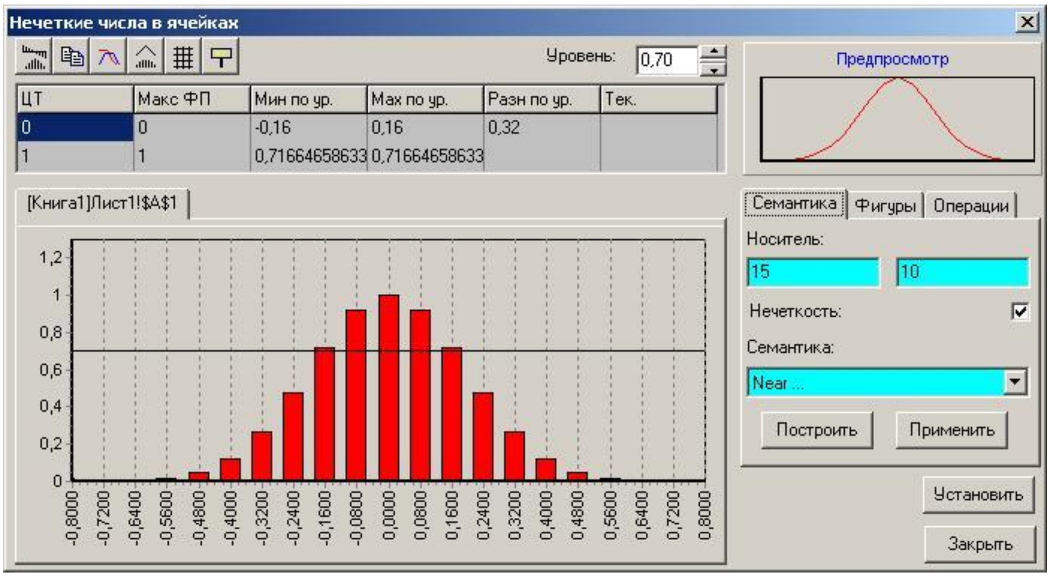


Рис. 7.3. Экранная форма Fexcel

Просмотр и задание нечетких чисел

Инструмент вызывается кнопкой Show на панели инструментов. Он реализован в виде блока диалога, который позволяет:

– анализировать нечеткие числа в выделенных ячейках рабочего листа;

– создавать нечеткие числа в интерактивном режиме без использования соответствующих функций Fexcel;

– сохранять изображения нечетких чисел в буфере обмена Clipboard.

Перед вызовом инструмента пользователь должен выделить одну или несколько ячеек на рабочем листе. В зависимости от содержания выделенных ячеек блок диалога выполнит следующие операции:

– для ячеек с нечеткими или обычными числами блок диалога обеспечит визуализацию и анализ чисел;

– для пустых ячеек, а также ячеек, содержащих функцию FuzzyHand, блок диалога обеспечит создание нечетких или обычных чисел (в нечетком представлении) с помощью кнопки «Установить».

Блок диалога разделен на две части. Левая часть блока предназначена для визуализации чисел и их анализа, правая – для создания чисел с помощью элементов управления, которые работают аналогично функциям для задания нечетких чисел.

Левая часть блока диалога

В верхней части расположена панель инструментов с кнопками:

– «Показать риск-функцию» – включает режим отображения риск-функции нечеткого числа. В этом режиме коррекция нечетких чисел не допускается.

– «Скопировать в Clipboard» – копирует график нечеткого числа в буфер обмена Windows.

– «Показать все сразу» – включает показ всех нечетких чисел (из всех закладок блока) одновременно. В этом режиме коррекция нечетких чисел не допускается.

– «Линии/Столбцы» – переключает отображение нечетких чисел в виде линий или столбцов.

– «Сетка» – включает отображение сетки на графике.

– «Метки» – включает отображение меток со значениями функции принадлежности для каждой дискреты нечетких чисел.

Если кнопка «Показать все сразу» не нажата, то график отображает нечеткое число из текущей закладки. В этом случае таблица, расположенная ниже панели инструментов, отображает параметры нечеткого числа. Первая строка отображает значение числа, вторая – значение функции принадлежности:

«ЦТ» – центр тяжести нечеткого числа;

«Макс. ФП» – максимум функции принадлежности нечеткого числа;

«Мин. по ур.» – минимум функции принадлежности на заданном уровне уверенности;

«Макс. по ур.» – максимум функции принадлежности на заданном уровне уверенности;

«Разн. по ур.» – разность между максимумом и минимумом функции принадлежности на заданном уровне уверенности;

«Тек.» – значение носителя и функции принадлежности, которое соответствует положению курсора мыши на графике.

На панели инструментов также расположено текстовое окно «Уровень», позволяющее установить вручную величину уровня уверенности, который отображен на графике горизонтальной линией. В соответствии с этим уровнем блок диалога рассчитывает параметры нечеткого числа, отображенные в таблице. Изменение уровня уверенности автоматически вызывает пересчет параметров нечеткого числа.

Правая часть блока диалога

Правая часть блока диалога включает график «Предварительный просмотр» и три страницы для задания нечетких чисел.

1. Страница «Семантика» обеспечивает задание нечетких чисел в соответствии с семантической трактовкой. Для задания нечеткого числа пользователь должен установить сначала величину носителя в текстовых окнах с меткой «Носитель», затем выбрать вид семантики и нажать кнопку «Построить». После этого на графике «Предварительный просмотр» будет построено нечеткое число, максимум функции принадлежности которого равен единице. Для присвоения этого числа числу, которое расположено на графике в левой части блока диалога, пользователь должен нажать кнопку «Применить». Перечень видов семантики соответствует функциям задания нечетких чисел.

2. Страница «Фигуры» позволяет задать нечеткие числа в виде геометрических фигур (смотрите функцию FuzzyFigure). Для задания нечеткого числа пользователь должен установить сначала величину

носителя в текстовых окнах с меткой «Носитель», затем выбрать вид геометрической фигуры и нажать кнопку «Построить». После этого на графике «Предварительный просмотр» будет построено нечеткое число. Максимум функции принадлежности этого нечеткого числа пользователь может установить с помощью текстового окна с меткой «Уровень». Для присвоения этого числа числу, расположенному на графике в левой части блока диалога, пользователю следует нажать кнопку «Применить». Перечень видов геометрических фигур также соответствует функциям задания нечетких чисел.

3. Страница «Операции» выполняет две унарные операции над нечеткими числами: обращение функции уверенности; возведение функции уверенности в заданную степень.

Кроме того, страница «Операции» обеспечивает ускоренное задание формы нечеткого числа вручную. Для этого пользователь не обязательно должен задавать величину уверенности для каждой дискреты нечеткого числа. На графике он может задать величину уверенности только для нескольких дискрет, например, с помощью мыши и затем нажать кнопку «Аппроксимация». В этом случае блок диалога автоматически рассчитает величины уверенности для дискрет, которые равны нулю. Расчет выполняется по правилам линейной аппроксимации. Кнопка «Очистка» используется для обнуления функции принадлежности нечеткого числа.

Пользователь может закрыть блок диалога двумя кнопками: «Закрыть» и «Установить». Первая кнопка закрывает блок без изменения ячеек, которые были выделены перед вызовом блока, вторая закрывает блок и автоматически заполняет пустые ячейки из группы выделенных ячеек нечеткими числами, которые были сформированы пользователем. Блок диалога сохраняет эти нечеткие числа с помощью функции FuzzyHand.

Просмотр нечеткого процесса

Инструмент реализован в виде блока диалога и вызывается кнопкой «Show3D». Он показывает последовательность нечетких чисел в виде нечеткого процесса (рис. 7.4). С помощью инструмента пользователь может исследовать изменение во времени любого параметра и анализировать изменение формы и размытости параметра. Перед вызовом блока диалога пользователь должен выделить одну или несколько ячеек с нечеткими или традиционными числами.

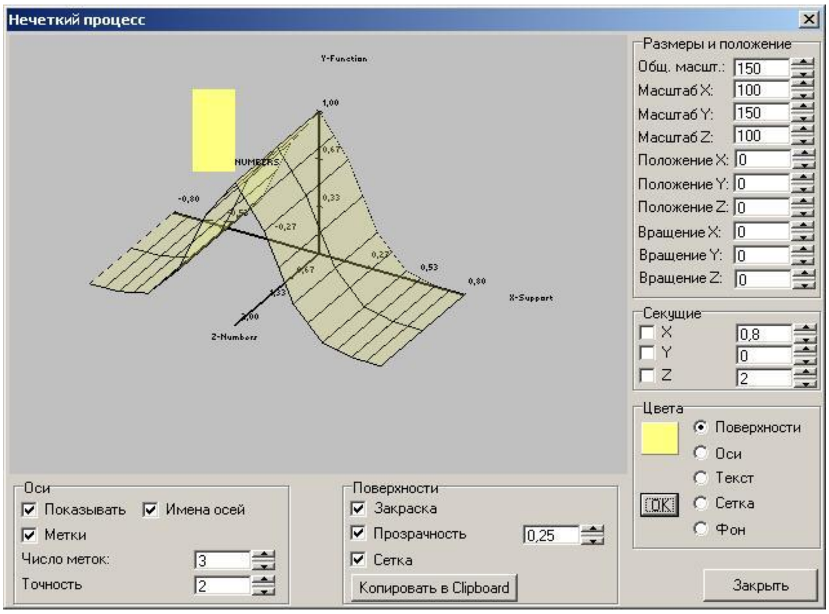


Рис. 7.4. Визуализация процесса решения в Fexcel

Блок диалога имеет две части: графическую и инструментальную.

Графическая часть предназначена для визуализации последовательности чисел и их анализа. Она отображает нечеткие числа в виде трехмерной поверхности в системе следующих координат:

– X – это ось, где расположены носители нечетких чисел;

– Y – ось, на которой строятся функции принадлежности нечетких чисел;

– Z – ось с расположенными на ней нечеткими числами.

Оси графика масштабируются автоматически. Инструментальная часть предназначена для управления графической частью и выполняет следующие функции:

- изменение масштаба графика, перемещение графика вдоль осей, его вращение вокруг осей (группа «Размеры и положение»);
- отображение и изменение положения секущих плоскостей (группа «Секущие»);
- цветовые настройки поверхности, осей, сетки, текста и фона графика (группа «Цвета»);
- изменение режимов и степени закраски поверхности, отображение сетки на поверхности, копирование изображения в Clipboard (группа «Поверхности»);
- изменение параметров осей (группа «Оси»).

Блок диалога закрывается кнопкой «Закрыть».

Подготовка диаграмм Microsoft Excel

Встроенные инструменты Fexcel документируют нечеткие числа в виде изображений. Такие изображения теряют связь с источником данных после построения. Поэтому при пересчете изображения не изменяются автоматически при изменении данных на рабочих листах. Этот инструмент помогает пользователю подготовить данные для построения стандартных диаграмм Microsoft Excel, которые поддерживают автоматическую перестройку графиков при пересчете данных на рабочем листе.

Fexcel сохраняет нечеткие числа в виде строк. Диаграммы Microsoft Excel требуют для отображения два диапазона ячеек, содержащих элементы носителя и функции принадлежности (рис. 7.5). Этот инструмент преобразует строку с нечетким числом в эти два диапазона. Инструмент выполняет преобразование с помощью функций FuzzyGetBearer и FuzzyGetMembership, которые записывают данные в ячейки диапазона.

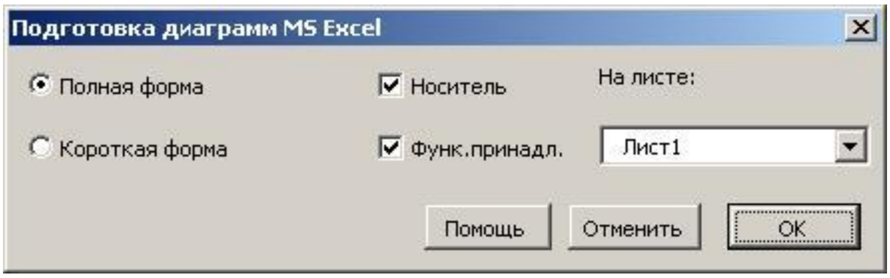


Рис. 7.5. Подготовка диаграмм в Fexcel

Инструмент вызывается кнопкой «Prepare excel diagramm» с помощью панели инструментов или меню. Перед вызовом инструмента пользователь должен выделить ячейки с нечеткими числами, которые необходимо отобразить. Fexcel вызывает блок диалога, в котором пользователь должен установить:

– точность представления чисел (Full означает, что диапазон ячеек будет содержать 21 ячейку, Short означает, что диапазон ячеек будет содержать 11 ячеек);

– компоненты нечетких чисел, которые требуется визуализировать (Carrier или Membership или и то и другое);

– рабочий лист, куда будут помещены данные для построения диаграмм.

При закрытии блока диалога кнопкой OK инструмент помещает функции FuzzyGetBearer и FuzzyGetMembership в конце использованной области рабочего листа, затем выделяет автоматически подготовленный диапазон ячеек. Пользователю остается лишь вызвать стандартный мастер диаграмм.

Опции

Опции Fexcel предназначены для установки параметра нечеткого числа, который отображается в ячейке рабочего листа. Опции вызываются кнопкой «Options» из панели инструментов или меню. В блоке диалога пользователь должен определить параметр, значение которого Fexcel будет отображать в ячейке:

- носитель, соответствующий максимуму функции принадлежности;
- носитель, соответствующий центру тяжести нечеткого числа;
- максимум на заданном уровне уверенности;
- минимум на заданном уровне уверенности.

Два последних параметра рассчитываются в соответствии с установленным уровнем уверенности. Пользователь должен устанавливать значение уровня исходя из реалистичности оценок. Если пользователь склонен к оптимизму, то уровень 0,6 – 0,9 считается наиболее целесообразным. Если пользователь склонен к пессимизму, то необходимо использовать уровень меньше 0,6.

Пересылка нечетких чисел в ячейки памяти

Инструмент предназначен для принудительной пересылки нечетких чисел из ячеек активного рабочего листа в нечеткие ячейки памяти Fexcel и служит для обмена данными с другими приложениями, использующими нечеткую технологию.

Расчет влияния факторов

Расчет влияния факторов – одна из самых существенных доработок Fexcel, которая позволяет увеличить возможности Fexcel относительно решения аналитических задач. Идея инструмента заключается в следующем.

Предположим, что некоторый временной процесс протекает и в прошлом, и в будущем. Он анализируется по одному обобщенному критерию. Например, критериями могут быть обменные курсы валют или котировки ценных бумаг предприятий. Факторы (события) воздействуют на этот процесс. Сила воздействия измеряется как приращение в относительном диапазоне от –10 до +10. Величина –10 означает, что фактор вызывает самое сильное падение критерия. Величина +10 показывает, что фактор вызывает самое сильное увеличение критерия.

Информация о факторах имеет некоторое доверие. Если в один и тот же момент времени действуют несколько факторов, то инструмент рассчитывает их влияние с учетом важностей этих факторов. Сила влияния фактора во времени также может быть непостоянна. Например, она может быть описана трапецией, когда фактор постепенно набирает силу и теряет ее.

Таким образом, факторы имеют следующие характеристики:

– наименование фактора;

– направление влияния фактора (+ или –);

– сила влияния фактора (от 0 до 10);

– доверие к информации о факторе, которое можно также трактовать как возможность появления фактора (от 0 до 1);

– важность фактора (от 0 до 1);

– начало влияния фактора;

– начало влияния фактора в полную силу;

– окончание влияния фактора в полную силу;

– окончание влияния фактора.

Инструмент рассчитывает совместное влияние факторов на критерий процесса. Результат влияния представляется как совокупность нечетких чисел с носителем от –10 (максимальное уменьшение) до +10 (максимальное увеличение). Пользователь может рассчитать влияние факторов в абсолютных величинах, используя дополнительно начальное значение критерия и коэффициент для преобразования шкалы [–10; +10] в абсолютный диапазон изменения критерия.

Перед использованием инструмента пользователь должен сформировать таблицу с параметрами факторов в указанной последовательности. Параметры факторов указывают слева направо, т. е. в столбцах. Между столбцами не должно быть разрывов. Если не задан хотя бы один параметр фактора, инструмент не учитывает фактор. Число факторов должно быть больше двух. Перед использованием инструмента пользователю необходимо выделить всю таблицу факторов, исключая наименование фактора. Инструмент вызывается кнопкой «Рассчитать влияние факторов» или с помощью меню. После вызова инструмента Fexcel вызывает блок диалога (рис. 7.6).

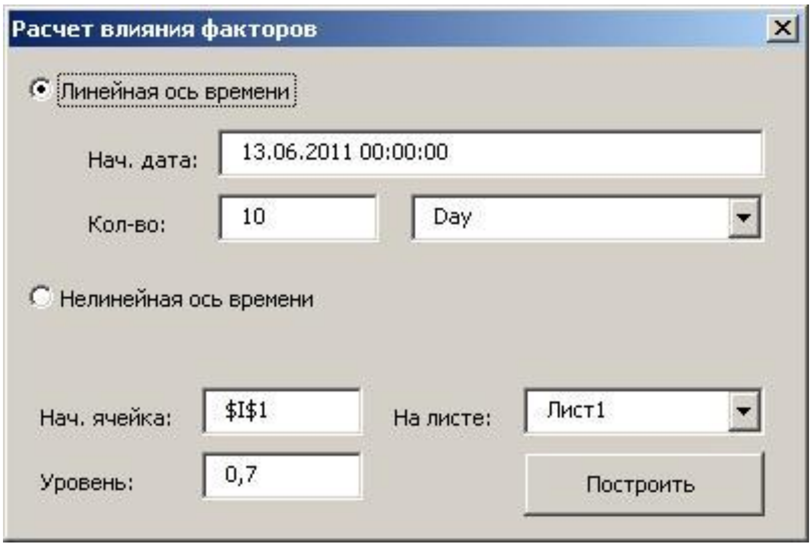


Рис. 7.6. Расчет влияния факторов в Fexcel

В блоке диалога пользователь указывает тип оси времени: линейный или нелинейный. Линейный тип означает, что ось времени разделена на одинаковые интервалы времени. Количество и величину интервалов пользователь должен задать также в блоке диалога. Метки времени определяются в соответствии с указанной начальной датой. Нелинейный тип означает, что ось времени должна быть создана только из тех моментов времени, которые определены в параметрах факторов.

В блоке диалога пользователь также должен указать место рабочей книги, в которое необходимо поместить результаты расчета. По умолчанию инструмент формирует результаты в столбце справа использованного диапазона ячеек на активном рабочем листе.

В результате расчетов инструмент рассчитывает для каждого момента времени следующие данные:

– дату;

– нечеткое число с носителем от –10 до +10, которое описывает тенденцию на указанную дату;

– максимум функции принадлежности нечеткого числа;
– центр тяжести нечеткого числа;
– минимум на уровне уверенности;
– максимум на уровне уверенности;
– разность между максимумом и минимумом.

Задание влияния факторов

Инструмент предназначен для облегчения задания пользователем даты и времени влияния факторов. Время действия факторов определяется четырьмя моментами времени:

– началом влияния фактора;
– началом влияния фактора в полную силу;
– окончанием влияния фактора в полную силу;
– окончанием влияния фактора.

Задание вручную всех перечисленных моментов – процесс долговременный, особенно если факторов много. Поэтому инструмент позволяет установить время влияния фактора исходя из нескольких предопределенных геометрических форм. В этом случае для задания этих четырех моментов времени необходимо определить начальную дату, количество интервалов времени (т. е. продолжительность влияния), величину одного интервала и геометрическую форму влияния.

Инструмент может быть вызван кнопкой «Задать время влияния факторов» или с помощью меню. После вызова инструмента Fexcel вызывает блок диалога (рис. 7.7).

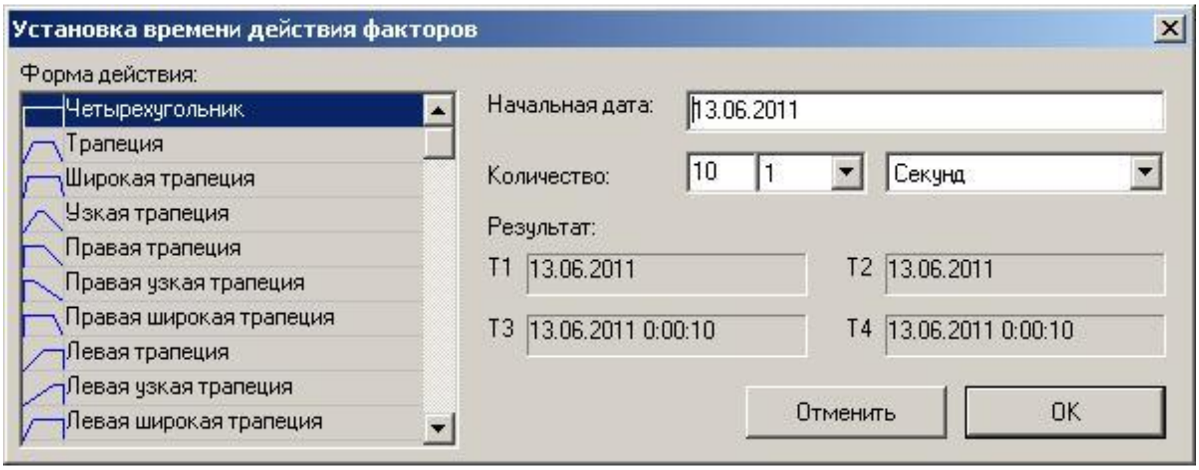


Рис. 7.7. Установка времени действия факторов в Fexcel

Перед вызовом инструмента активизируют ячейку рабочего листа, которая соответствует параметру «Начало влияния фактора». Затем пользователь вызывает инструмент. Если какая-либо дата была установлена ранее в ячейке, то она будет отображена в текстовом поле «Начальная дата». Если дата не была установлена ранее, то в поле инструмент отобразит текущую дату. В блоке диалога пользователь должен установить следующие параметры:

– начальную дату, которая соответствует началу влияния фактора;

– форму влияния фактора;

– количество интервалов времени, в течение которых фактор будет действовать;

– величину одного интервала времени.

При установке количества интервалов времени пользователь может использовать блок списка, содержащий несколько предопределенных значений. При изменении любого параметра блок диалога пересчитывает время влияния фактора автоматически. Четыре момента времени влияния отображаются в соответствующих текстовых полях T1 – T4.

Перечень и краткая характеристика функций Fuzzy for Excel

FuzzyAverage вычисляет среднее из нескольких нечетких чисел.

FuzzyComplementation обращает функцию принадлежности.

FuzzyConvolution вычисляет свертку нескольких нечетких чисел с учетом весовых коэффициентов.

FuzzyCopy копирует нечеткое число из одной ячейки рабочего листа в другую.

FuzzyDegreeFunction возводит функцию принадлежности в заданную степень.

FuzzyEquivalenceSets возвращает меру совпадения двух множеств.

FuzzyFigure задает число в виде геометрической фигуры.

FuzzyFormula вычисляет результат арифметических операций.

FuzzyGetBearer возвращает значение носителя нечеткого числа в соответствии с номером дискреты.

FuzzyGetCell копирует нечеткое число из нечеткой ячейки памяти в ячейку рабочего листа.

FuzzyGetDiscount дисконтирует нечеткое число.

FuzzyGetLevel возвращает значение уверенности носителя числа.

FuzzyGetMembership возвращает значение уверенности носителя числа в соответствии с номером дискреты.

FuzzyGetNumberForRisk возвращает число, которое соответствует заданному уровню риска.

FuzzyGetNumbers возвращает пару обычных чисел, которые соответствуют заданному уровню уверенности.

FuzzyGetParameter возвращает значение заданного параметра нечеткого числа.

FuzzyGetRiskLessThan возвращает риск того, что нечеткое число окажется меньше заданного.

FuzzyGetRiskMoreThan возвращает риск того, что нечеткое число окажется больше заданного.

FuzzyHand задает число произвольной формы в соответствии с параметрами, которые заданы в виде строк.

FuzzyHandFromCells задает число произвольной формы в соответствии с параметрами, которые заданы в виде диапазонов ячеек.

FuzzyIntegral возвращает значение нечеткого интеграла нечеткого числа по нечеткой мере, которая описана нечетким числом.

FuzzyIntegralSemantic возвращает значение нечеткого интеграла функции принадлежности по нечеткой мере на четком множестве.

FuzzyIntegralSemanticFS возвращает значение нечеткого интеграла функции принадлежности по нечеткой мере на нечетком множестве.

FuzzyIntegralSemanticExtFS возвращает значение расширенного нечеткого интеграла функции принадлежности по нечеткой мере, которая индуцирована в другом пространстве.

FuzzyGetLambdaParameter возвращает параметр нормировки нечеткой меры.

FuzzyIntersection возвращает координаты пересечения двух нечетких линий.

FuzzyInterval задает нечеткое число в виде интервала.

FuzzyLessThan задает нечеткое число с семантикой «меньше, чем...».

FuzzyLessThanTo задает нечеткое число с семантикой «меньше, чем... до...».

FuzzyMakeFromStatistic задает число на основе статистической выборки.

FuzzyMax вычисляет объединение нескольких чисел.

FuzzyMin вычисляет пересечение нескольких чисел.

FuzzyMoreThan задает нечеткое число с семантикой «больше, чем...».

FuzzyMoreThanTo задает нечеткое число с семантикой «больше, чем... до...».

FuzzyNear задает нечеткое число с семантикой «около...».

FuzzyNearAndLessTo задает нечеткое число с семантикой «около... и менее до...».

FuzzyNearAndMoreTo задает нечеткое число с семантикой «около... и более до...».

FuzzyNearFirstOrSecond задает нечеткое число с семантикой «около (... или...)».

FuzzyNearFromTo задает число типа «около (от... до...)».

FuzzyProduct вычисляет произведение нескольких чисел.

FuzzySetCell копирует нечеткое число из ячейки рабочего листа в нечеткую ячейку памяти.

FuzzySum вычисляет сумму нескольких чисел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

О нечетких множествах стало известно примерно 50 лет назад из статьи Л. Заде «FuzzySets» в журнале «Information and Control». Теория нечетких множеств, встретившая сначала скептическое отношение, в настоящее время стала эффективным методом моделирования в условиях неопределенности в различных задачах, относящихся к самым разнообразным проблемным областям. Популярность теории нечетких множеств объясняется тем, что нечеткие системы разрабатываются быстрее, они проще и дешевле четких аналогов.

Значимость изучения теории нечетких множеств в настоящее время будет расти в связи с появлением концепций интернет-вещей и цифровой экономики, так как при их реализации необходимы методы описания систем, сочетающих число и слово, сигнал и понятие, восприятие и абстракцию, что может быть реализовано в том числе и с помощью аппарата нечетких множеств.

В книге представлен материал, отобранный из большого количества источников. При этом делается попытка сохранить математическую строгость изложения в доступной для понимания форме. Теоретический материал сопровождается задачами, примерами и упражнениями, направленными на его закрепление. Кроме теоретических вопросов в пособии приведены описания наиболее известных программных систем, предназначенных для нечеткого моделирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zade, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning / L. A. Zade // Information Sciences. – Vol. 8. – 1975. – Pp. 43 – 80.
2. Zade, L. A. Fuzzy sets / L. A. Zade // Information and Control. – Vol. 8. – 1965. – Pp. 338 – 353.
3. Zade, L. A. Fuzzy logic / L. A. Zade // IEEE Transactions on Computers. – Vol. 21. – № 4. – 1988. – Pp. 83 – 93.
4. Штовба, С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB / С. Д. Штовба. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 288 с. – ISBN 5-9351-359-X.
5. Леоненков, А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 736 с. – ISBN 5-94157-087-2.
6. Борисов, В. В. Основы теории нечетких множеств / В. В. Борисов, А. С. Федулов, М. М. Зернов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2014. – Кн. 2. – 98 с. – ISBN 978-5-9912-0372-2.
7. Чернов, В. Г. Основы теории нечетких множеств : учеб. пособие / В. Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 96 с. – ISBN 978-5-9984-0055-1.
8. Малышев, Н. Г. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР / Н. Г. Малышев, Л. С. Берштейн, А. В. Боженюк. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 136 с. – ISBN 5-28301592-0.
9. Пегат, А. Нечеткое моделирование и управление : пер. с англ. / А. Пегат. – 2-е изд., стер. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 798 с. – (Адаптивные и интеллектуальные системы). – ISBN 978-5-9963-1319.
10. Алтунин, А. Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях : монография / А. Е. Алтунин, М. В. Семухин. – М. : Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2000. – 352 с.
11. Aracil, J., Garcia-Cerezo, A., Ollero, A. Fuzzy control of dynamical systems. Stability analysis based on the conicity criterion. Proceedings of the 4th Iternational Fuzzy Systems Association Congress. – Brussels, Belgium, 1991. – Pp. 5 – 8.

12. Anderson, B. Bitmed, R. and others. Stability of adaptive systems: passivity and averaging analysis. MIT Press. – Cambridge, USA. – 1968. – 162 p.

13. Astrom, K. J., Wittenmark, B. Adaptive control. Addison-Wesley. – New' York, USA. – 1989. – 322 p.

14. Борисов, А. Н. Принятие решений на основе нечетких моделей: Примеры использования / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров. – Рига : Зинатне, 1990. – 164 с. – ISBN 6-796-0459-7.

15. Arita, S., Tsutsui, T. Fuzzy logic control of blood pressure through inhalational anesthesia. Proceedings of the First International Conference on Fuzzy Logic and Neural Networks. – Iizuka, Japan. – 1990. – Pp. 545 – 547.

16. Arita, S. Development of an ultrasonic cancer diagnosis system using fuzzy theory. Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems. – Vol. 3. – № 3. – 1991. – Pp. 215 – 230.

17. Assilian, S. Artificial intelligence in the control of real dynamical systems. Ph.D. Thesis. – London University, 1974. – 238 p.

18. Babuska, R., Verbruggen, H. B. A new' identification method for linguistic fuzzy models. Proceedings of the International Conference FUZZ-IEEE/IFES'95. – Yokohama, Japan, 1995. – Pp. 905 – 912.

19. Кофман, А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М. : Радио и связь, 1982. – 432 с.

20. Борисов, В. В. Основы нечеткой арифметики : учеб. пособие для вузов / В. В. Борисов, А. С. Федулов, М. М. Зернов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2014. – 98 с. – ISBN 978-5- 9912-03752-2.

21. Решение бизнес-задач средствами нечеткой алгебры / В. Г. Чернов [и др.]. – М. : Тора-Центр, 1998. – 72 с. – ISBN 5-9-00082-03-2.

22. Чернов, В. Г. Нечеткие контроллеры. Основы теории и построения : учеб. пособие по курсу «Интеллектуальные системы управления» / В. Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2003. – 148 с. – ISBN-5-89368-184-6.

23. Rumelhart, D. E. Learning Internal Representations by Error Propagation / D. E. Rumelhart, G. E. Hilton, R. J. Williams. In Parallel Distributed Processing. – T. 1. – Cambridge : I.T. Press, 1986. – ISBN 5-89368-384-6.

24. Hensel, H., Holzmann, H., Pfeifer, B. M. Optimierung von Fuzzy-Control mit Hilfe Neuronaler Netze. Automatisierungstechnische Praxis. – Vol. 37. – № 11. – 1995. – Pp. 40 – 48.

25. Altrock, C. Fuzzy logic. Band 1 – Technologie. R. Oldenburg Verlag GmbH. – Miinchen, Germany, 1993. – 94 p.

26. Von Altrock, C. Fuzzy logic. Band 3 – Werkzeuge. R. Oldenburg Verlad GmbH. – Miinchen, Germany, 1995. – 103 p.

27. Zimmermann, H. J. Fuzzy sets, decision making, and expert systems. – London : Kluwer Academic Publishers, 1987. – 236 p.

28. Brown, M., Harris, C. Neurofuzzy adaptive modelling and control. Prentice Hall. – New York, USA. – 1994. – 114 p.

29. Baglio, S., Fortuna, L., Graziani, S., Muscato, G. Membership function shape and the dynamic behaviour of fuzzy systems. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. – Vol. 8. – 1994. – Pp. 369 – 377.

30. Chui, Y. C., Chan, S. P. Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion, Engineering Economist. Vol. 39. – 1994. – Pp. 113 – 138.

31. Блюмин, С. Л. Введение в математические методы принятия решений : учеб. пособие / С. Л. Блюмин, И. А. Шуйкова. – Липецк : Липец. гос. пед. ин-т, 1999. – 100 с.

32. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 316 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Создание виртуальной машины в ОС «Windows 7» для работы с нечеткой электронной таблицей FuzzyCalc*

Нечеткая электронная таблица FuzzyCalc (FC) представляет собой электронную таблицу, аналогичную по организации MS Office Excel, но вместо обычных чисел работает с нечеткими числами, т. е. на основе fuzzy-технологий. Поскольку FC появилась достаточно давно, то при работе с ней в современных операционных системах (ОС) возникают проблемы совместимости: практически все операционные системы, используемые на сегодняшний день, 64-разрядные (Win 7, 8), а FC разрабатывалась для 32-разрядной ОС (Win XP).

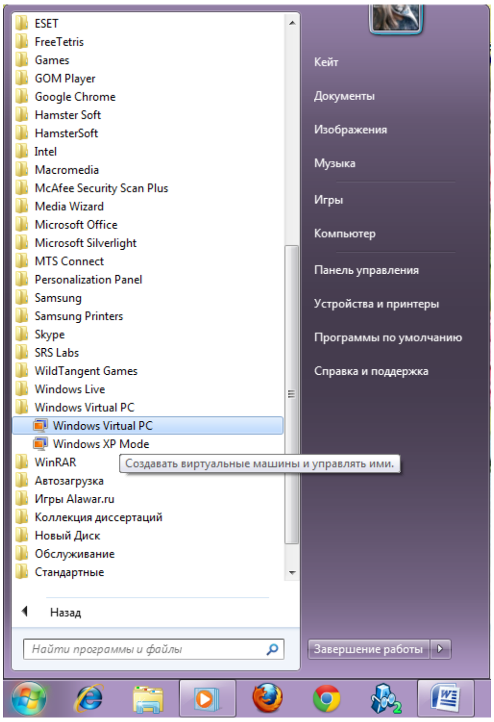


Рис. П1

Для решения данной проблемы можно в среде Win 7 организовать виртуальную машину с предустановленной на ней Win XP, на которую в дальнейшем можно поставить саму FC. Рассмотрим подробно весь процесс создания виртуальной машины на Win 7 (наиболее распространенная ОС).

На начальном этапе необходим «жесткий диск» с установленными Win XP и FuzzyCalc. Из меню «Пуск» заходим в Windows Virtual PC и выбираем пункт «Создать виртуальную машину» (рис. П1, П2).

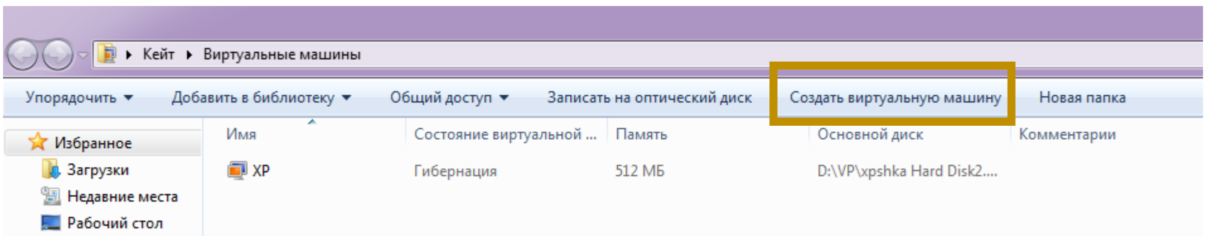


Рис. П2

* Материал подготовлен Е. М. Ремезовой.

Для создания виртуальной машины необходимо задать имя для ее идентификации, а также место ее расположения – как стандартный путь, предложенный системой на диске С:\, так и на любом другом жестком диске по своему усмотрению (рис. П3).

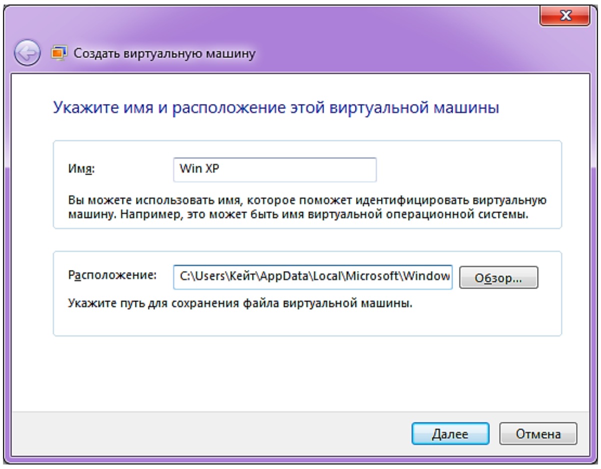


Рис. П3

Далее следует указать параметры памяти и сети, зачастую следует принимать вариант, предложенный самой операционной системой (рис. П4).

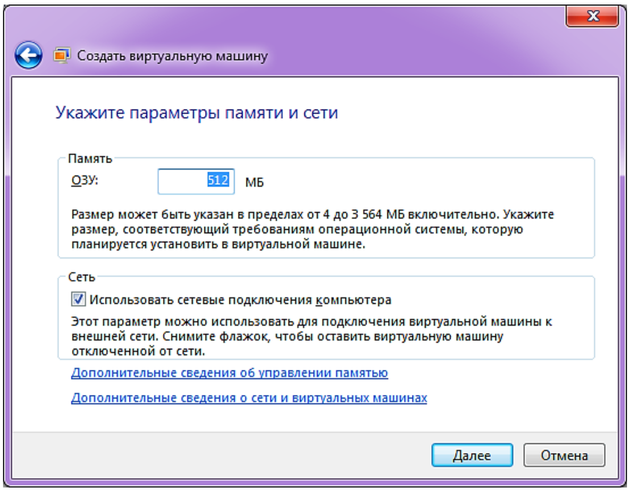


Рис. П4

Для непосредственного создания виртуальной машины в появившемся далее диалоговом окне предлагается добавить виртуальный жесткий диск, для чего существуют три возможных способа (рис. П5):

1) создать динамически расширяемый виртуальный жесткий диск;

2) использовать имеющийся виртуальный жесткий диск;

3) создать виртуальный диск, используя дополнительные параметры.

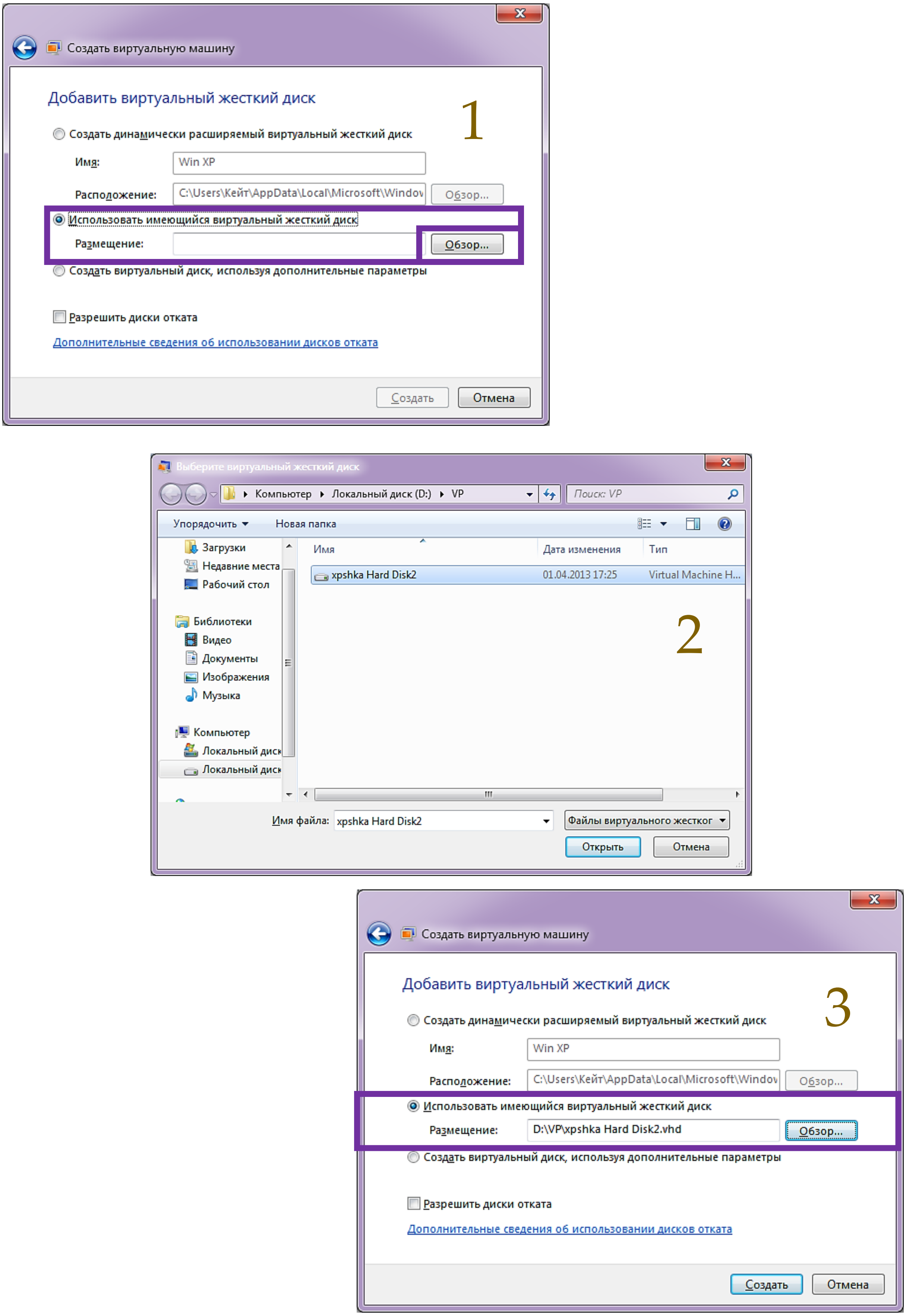

Создать виртуальную машину
Добавить виртуальный жесткий диск
1
Создать динамически расширяемый виртуальный жесткий диск
Имя:
Win XP
Расположение:
C:\Users\Кейт\AppData\Local\Microsoft\Window
Обзор...
Использовать имеющийся виртуальный жесткий диск
Размещение:
Обзор...
Создать виртуальный диск, используя дополнительные параметры
Разрешить диски отката
Дополнительные сведения об использовании дисков отката
Создать
Отмена
Выберите виртуальный жесткий диск
Компьютер ▸ Локальный диск (D:) ▸ VP
Поиск: VP
Упорядочить
Новая папка
Загрузки
Недавние места
Рабочий стол
Библиотеки
Видео
Документы
Изображения
Музыка
Компьютер
Локальный диск
Локальный диск
Имя
Дата изменения
Тип
xpshka Hard Disk2
01.04.2013 17:25
Virtual Machine H...
2
Имя файла:
xpshka Hard Disk2
Файлы виртуального жесткого
Открыть
Отмена
Создать виртуальную машину
Добавить виртуальный жесткий диск
3
Создать динамически расширяемый виртуальный жесткий диск
Имя:
Win XP
Расположение:
C:\Users\Кейт\AppData\Local\Microsoft\Window
Обзор...
Использовать имеющийся виртуальный жесткий диск
Размещение:
D:\VP\xpshka Hard Disk2.vhd
Обзор...
Создать виртуальный диск, используя дополнительные параметры
Разрешить диски отката
Дополнительные сведения об использовании дисков отката
Создать
Отмена

Рис. П5

На этом процесс создания виртуальной машины завершается, после чего ее можно запустить и приступать к работе (рис. П6).

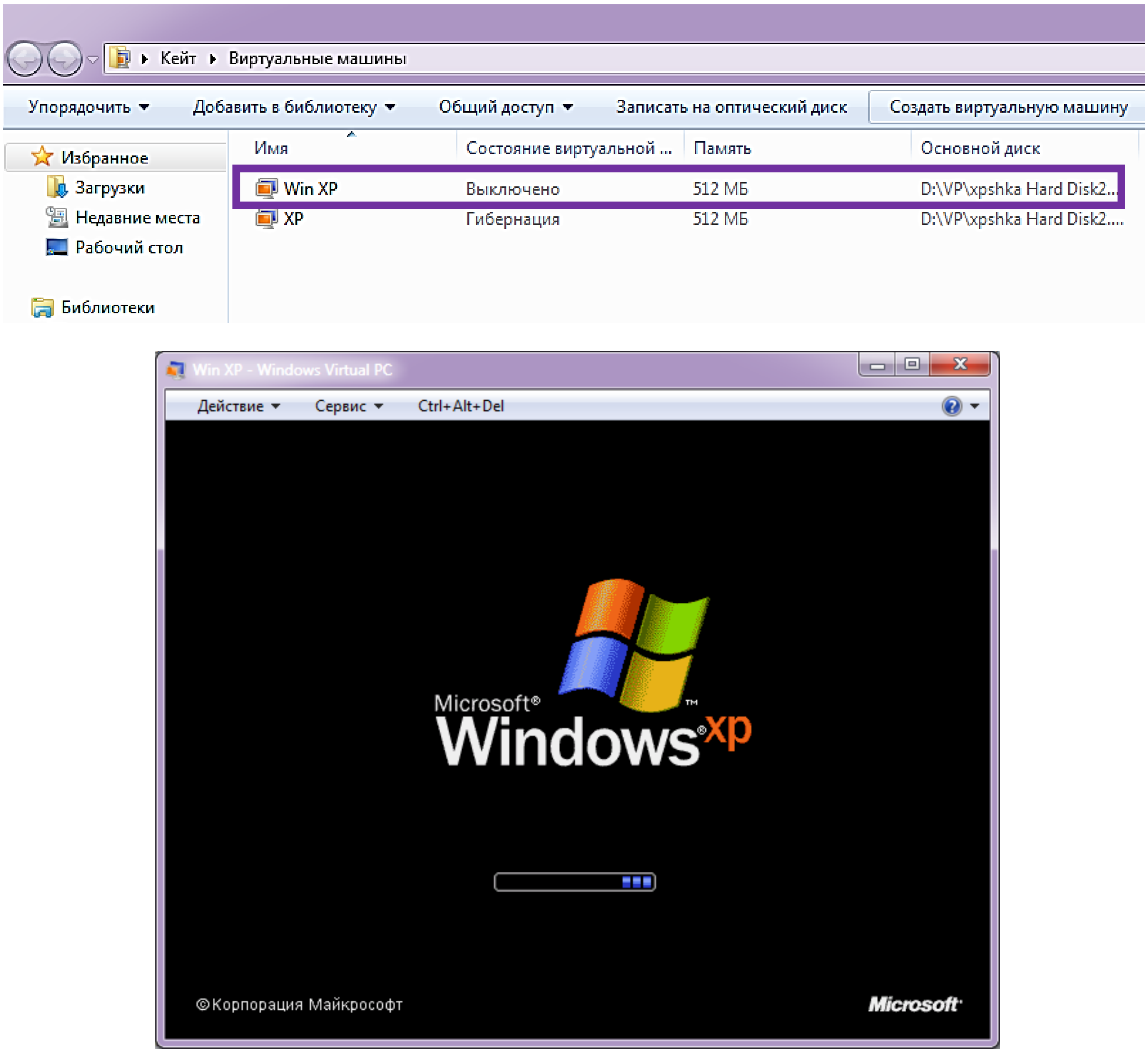


Рис. П6

Учебное издание

ЧЕРНОВ Владимир Георгиевич

НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА.
ОСНОВЫ ТЕОРИИ И ПРИМЕНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина

Технический редактор А. В. Родина

Корректор Н. В. Пустовойтова

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 12.12.18.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,07. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.