Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра автоматических и мехатронных систем

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Методические указания

Часть 1

. Составитель: Новикова Н.А.

Владимир 2005

УДК 519(0.75)

Математические основы теории автоматического управления. Методическое пособие. Часть 1. / Сост. Новикова Н. А. Владимир, 2005. 42с.

Разработаны в соответствии с Государственным образовательным стандартом Министерства образования Российской Федерации по специальности 071800 "Мехатроника".

В методических указаниях изложены основы математического аппарата, используемого в теории автоматического управления. В первой части приведены необходимые сведения из теории функций комплексного переменного. Изложение вопросов математики сопровождается рассмотрением основных задач теории автоматического управления.

Методические указания подготовлены для студентов специальности 071800 дневной формы обучения, а также ориентированы на студентов заочной формы обучения и студентов Центра профессионального образования инвалидов.

Ил.13. Библиогр.: 8 назв.

УДК 519.(075)

ВВЕДЕНИЕ

Квалификация современного специалиста по автоматическому управлению в значительной степени определяется уровнем его математических знаний, поскольку овладеть теорией автоматического управления и разработанными на ее основе методами проектирования автоматических систем невозможно без знаний математического аппарата. Курс высшей математики не в полной мере удовлетворяет требованиям подготовки специалистов, связанных задачами автоматического управления. В связи с этим в учебный план специальности 071800 «Мехатроника» наряду с общим курсом высшей математики введены дополнительные разделы.

Данное методическое пособие содержит некоторые разделы математического аппарата, знание которого необходимо студентам для последующего изучения курса «Теория автоматического управления». Первая часть пособия включает основные сведения из теории функций комплексного переменного, широко применяемой в теории автоматического управления. Изложение теоретического материала сопровождается примерами.

Пособие предназначено для студентов технических специальностей, изучающих теорию систем автоматического управления.

1. Комплексные числа и функции комплексного переменного

1.1 Комплексные числа и действия над ними

Число $z = x + j\,y$, где x и y – любые действительные числа, а j – мнимая единица называется комплексным числом. Действительные числа x и y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Два комплексных числа считаются равными, если равны порознь их действительные и мнимые части, т. е. равенство

$$x_1 + jy_1 = x_2 + jy_2$$

равносильно двум равенствам:

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2.$$

Можно установить взаимно однозначное соответствие между всевозможными точками плоскости с одной стороны и всевозможными комплексными числами с другой. Для этого по оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа, а по оси ординат мнимая. Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать точка на плоскости, а каждой точке на плоскости – комплексное число (рис.1)

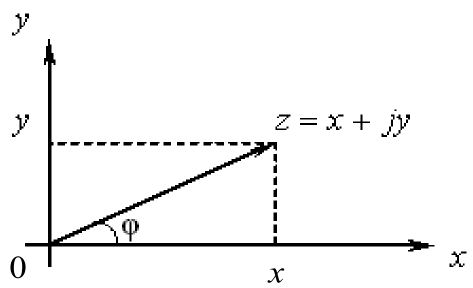


Рис.1

Комплексные числа можно изображать и в виде векторов на плоскости («комплексной плоскости»). Проекции вектора, начало которого совмещено с началом координат, а конец с данной точкой, соответствуют действительной и мнимой частям комплексного числа. Действительные числа располагаются на действительной оси OX. Комплексные числа, действительные части которых равны нулю (чисто мнимые числа) изображаются в виде точек, лежащих на оси OY (мнимой оси). Положение точки, изображающей комплексное число можно определить с помощью полярных координат r и φ (рис.1), т.е. с помощью длины вектора, соответствующего комплексному числу, и величине угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси. Числа r и φ называются соответственно модуль и аргумент комплексного числа и обозначаются $r = |z|, \varphi = Arg z$. Модуль действительного числа совпадает с абсолютной величиной этого числа. Модулем мнимого числа является абсолютная величина его мнимой части. Если $z = x + jy$, то

$$y = r\sin\varphi = |z|\,Arg z; \quad x = r\cos\varphi = |z|\cos Arg z, \qquad (1.1)$$

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg Arg z = tg\varphi = \frac{y}{x}, \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Величина *Arg z* многозначна и определена лишь с точностью до целого кратного числа 2π. Главное значение величины *Arg z* заключено в пределах $-\pi < Arg\, z < \pi$ и обозначается *arg z.*

Если z –действительное положительное число, то arg z = 0; если z – действительное отрицательное число, то $arg\, z = \pi$; если z –мнимое число с положительной мнимой частью, то $arg\, z = \frac{\pi}{2}$; если z – мнимое число с отрицательной мнимой частью, то $arg\, z = -\frac{\pi}{2}$. При $z = 0$ величина *arg z* не имеет смысла.

Пользуясь формулами (1.1) всякое комплексное число, отличное от нуля, можно представить в так называемой тригонометрической форме:

$$z = x + jy = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = r(\cos\varphi + j\sin\varphi). \qquad (1.2)$$

С помощью формулы Эйлера $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ можно перейти от тригонометрической формы (1.2) к показательной

$$z = re^{j\varphi}.$$

Два комплексных числа, имеющих одну и ту же действительную часть, а мнимые части, равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку, называются взаимно сопряженными. Число,,_сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Если $z = x + jy$, то $\bar{z} = x - jy$. Из этого определения следует, что если $w = \bar{z}$, то $z = \bar{w}$, и, следовательно, $\bar{\bar{z}} = z$.

Модули взаимно сопряженных чисел одинаковы, а аргументы отличаются только знаком:

$$|\bar{z}| = |z|; \; Arg\, z = -\,Arg\,\bar{z}.$$

Сопряженные комплексные числа изображаются точками, симметричными, относительно действительной оси.

Сложение и умножение комплексных чисел производится по правилам сложения и умножения алгебраических многочленов, с учетом того, что $j^2 = -1$ (следовательно, $j^3 = -j; j^4 = 1; j^5 = j$ и т.д.). При записи результата действий, произведенных над комплексными числами, следует отделить действительную часть от мнимой, т.е. собрать отдельно члены, не содержащие множителя j, и члены, содержащие этот множитель:

$$(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2),$$

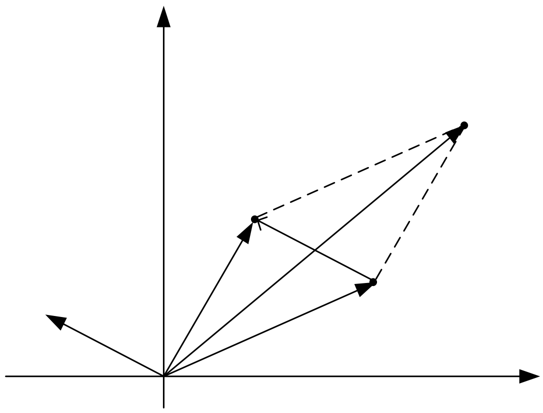
$$(x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел является действительным числом, равным квадрату модуля этих чисел $(x + jy) \cdot (x - jy) = x^2 + y^2$, иначе $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Сумма двух взаимно сопряженных комплексных чисел также является действительным числом $(x + jy) + (x - jy) = 2x$, т.е. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$. Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т.е.

$$(x_1 + jy_1) - (x_2 + jy_2) = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2).$$

Итак, при сложении и вычитании комплексных чисел отдельно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части. Если изобразить комплексные числа с помощью векторов, то их сложение и вычитание сводится к сложению или вычитанию векторов, изображающих эти числа (Рис. 2).



Модуль комплексного числа равен длине соответствующего вектора, поэтому модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

Применив это равенство несколько раз, получим

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

Знак равенства имеет место, когда векторы, изображающие числа $z_1, z_2, ..., z_n$ лежат на одной прямой и направлены в одну и ту же сторону, т.е. когда $\arg z_1 = \arg z_2 = ... = \arg z_n$. Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, изображающие эти числа (рис. 2)

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)}.$$

Пусть z_1 - данное комплексное число (данная точка), ρ - данное действительное положительное число. Совокупность точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = \rho$, образует окружность с центром в точке z_1 радиуса ρ. Неравенство $|z - z_1| < \rho$ определяет множество точек, лежащих внутри этой окружности (внутренность круга), а неравенство $|z - z_1| > \rho$ - множество точек лежащих вне окружности (внешность круга).

Деление определяется как действие, обратное умножению. Используя свойства сопряженных чисел удобнее всего деление комплексных чисел производить следующим образом: сначала умножить делимое и делитель на число, сопряженное делителю, в результате чего делитель станет действительным положительным числом, а затем произвести деление действительной и мнимой частей отдельно:

$$\frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

При тригонометрической форме записи комплексных чисел:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1); z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2),$$

тогда получим:

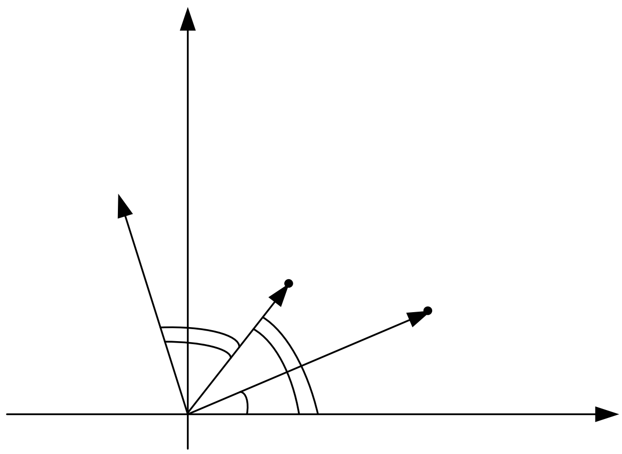
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + \\ + j(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)] = \\ = r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2 + 2\kappa\pi(\kappa = 0, \pm1, \pm2...)$$

Вектор, изображающий произведение $z_1 \cdot z_2$ может быть получен из вектора, изображающего число z_1, поворотом на угол φ_2, образуемым вектором z_2 с положительным направлением действительной оси, и умножением его длины на длину вектора z_2.(рис. 3).



Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2),$$

приводит к формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

т.е. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};.$ $\quad Arg\frac{z_1}{z_2} = Argz_1 - Argz_2.$

Из правила умножения следует правило возведения в целую положительную степень: если

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi),$$

то $\quad z^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi)$

т.е. $\quad \left|z^n\right| = |z|^n;\ Argz^n = nArgz + 2\kappa\pi,$

где κ - любое целое число ($\kappa = 0, \pm1, \pm2...$). Эти формулы справедливы и при целом отрицательном n, что следует из правила деления комплексных чисел.

Извлечь корень целой положительной степени n из числа z – значит найти такое число $\omega = \sqrt[n]{z}$, n – я степень которого равна z. В соответствии с правилом возведения в степень имеем (при $z \neq 0$):

$$|\omega|^n = |z|, \quad nArg\omega = Argz + 2k\pi \quad \text{(k=0,1,2,…)}.$$

Если обозначить
$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi), \omega = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$, то получим

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2\kappa\pi \quad (\kappa = 0, \pm1, \pm2, ...).$$

Т.к. r и ρ положительные числа, то первое из этих равенств однозначно определяет ρ :

$$\rho = (\sqrt[n]{r}),$$

где скобки в правой и левой части обозначают, что берется арифметическое (действительное и положительное) значения корня. Из второго равенства находим

$$\theta = \frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n},$$

Тогда окончательно получим

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = (\sqrt[n]{r})(\cos\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n}). \qquad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что имеется n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$,, которые можно получить, полагая $k = 0,1,2,...,n-1$, несмотря на то, что k – любое целое число.

Действительно, два значения k, отличающиеся друг от друга на n, а значит и на любое кратное n число, дают при подстановке в (1.5) одно и то же значение, т.к. если $k' - k = n$, то

$$\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2(k' - k)\pi}{n} = 2\pi,$$

следовательно

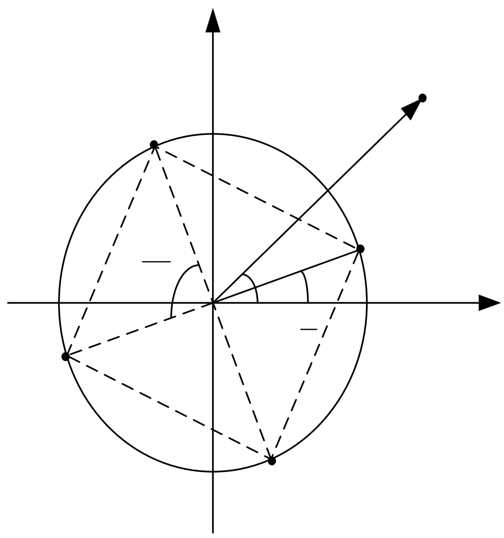
$$\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n}; \sin\frac{\varphi + 2k'\pi}{n} = \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Как следует из (5) все n различных значений величины $\sqrt[n]{z}$ имеют один и тот же модуль, равный $(\sqrt[n]{|z|})$. А т.к.

$$\frac{\varphi + 2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

(аргументы двух значений $\sqrt[n]{z}$, соответствующих значениям k и k+1 отличаются один от другого на $\frac{2\pi}{n}$), то точки соответствующие значениям $\sqrt[n]{z}$, являются вершинами правильного n–угольника, вписанного в окружность радиуса $(\sqrt[n]{|z|})$ с центром в начале координат. Способ построения точек, соответствующих значениям $\sqrt[n]{z}$ таков: из начала координат (рис.4), как из центра, описывается окружность, радиус которой равен $(\sqrt[n]{|z|})$..

Если $\arg z = \varphi$, то из начала координат проводится луч под углом $\dfrac{\varphi}{n}$ к положительному направлению действительной оси; на пересечении этого луча с окружностью находим точку, соответствующую одному из значений $\sqrt[n]{z}$ (для k =0); вписав в окружность правильный n – угольник так, чтобы одной из его вершин была найденная точка, построим точки, соответствующие остальным значениям корня.



Пример1.1 Вычислить все значения $\sqrt[3]{-8}$.

$\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8})(\cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{3} + j\sin\dfrac{\pi + 2k\pi}{3})$. При k = 0, 1, 2 получим

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + j\sqrt{3}, \\ -2, \\ 1 - j\sqrt{3}. \end{cases}$$

1.2. Последовательности комплексных чисел и функции комплексного переменного

Внутренность круга радиуса ρ с центром в данной точке z_0, т.е. совокупность точек, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \rho$, называется ρ – окрестностью точки_z_0. Вообще, под окрестностью точки понимают не обязательно круговую область, а любую область, внутри которой лежит точка z_0.

Число z_0 называется пределом последовательности комплексных чисел $z_1, z_2, ..., z_n, ...$:, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$,

если для любого положительного числа ε можно подобрать такое число N (N зависит от ε), что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Иначе говоря, равенство $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ означает, что как бы мала ни была ε – окрестность точки z_0 вне этой окрестности может остаться лишь конечное число точек этой последовательности, так как все точки z_n последовательности, начиная с номера $n = N$, попадут внутрь этой ε – окрестности.

Если $z_n = x_n + jy_n$ и $z_0 = x_0 + jy_0$, то, учитывая равенство

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2},$$

нетрудно заметить (непосредственно из определения), что существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ равносильно существованию двух пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Пусть последовательность $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ такова, что модули всех её членов, начиная с некоторого, становятся больше любого, сколь угодно большого положительного числа (т.е. как бы велико ни было положительное число M, к нему можно подобрать такое N, что $|z_n| > M$, при $n \geq N$). Тогда последовательность, очевидно, предела не имеет и в этом случае принято считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, и говорить, что предел последовательности бесконечен, а для его изображения дополнить плоскость точкой, которую называют бесконечно удаленной. Окрестностью бесконечно удаленной точки называют внешность круга достаточно большого радиуса. Если радиус этого круга равен R, а центр находится в точке $z = 0$, то множество точек, образующих окрестность бесконечно удаленной точки, определяется неравенством $|z| > R$. Чем больше радиус круга, тем «меньше» окрестность бесконечно удаленной точки, являющаяся внешностью этого круга.

Сравнивая определения равенства $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ с определением окрестности бесконечно удаленной точки, видно, что если предел последовательности бесконечен, то как бы «мала» ни была окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. как бы велик ни был радиус R круга, внешностью которого эта окрестность является, все точки последовательности $z_1, z_2, ..., z_n, ...$

за исключением конечного их числа (все точки z_n начиная с $n = N$) попадут внутрь этой окрестности.

Во многих случаях представляет интерес вопрос о том, существует ли конечный предел последовательности. Последовательность, имеющую конечный предел, называют сходящейся. Комплексную плоскость, дополненную бесконечно удаленной точкой, называют расширенной плоскостью.

Определение функции комплексного переменного аналогично определению функции действительного переменного: на некотором множестве точек, изображающих значение комплексной переменной z, задана (определена) функция $w = f(z)$, если каждой точке z этого множества поставлено в соответствие одно (в случае однозначной функции) значение w.

Например, функция $w = z^2$ однозначна и определена вовсей плоскости, так как с помощью формулы, по которой производится возведение в степень комплексного числа, всякому комплексному числу z соответствует и при том только одно значение z^2. Функция $w = Argz$ многозначна и определена на всей плоскости за исключением точки $z = 0$.

Так как задание комплексного числа z равносильно заданию двух действительных чисел x и y, являющихся соответственно его действительной и мнимой частями ($z = x + jy$), а числу w однозначно соответствует пара действительных чисел u и v ($w = u + jv$), то зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z равносильна двум зависимостям :

$$u = u(x, y) \quad \text{и} \quad v = v(x, y), \tag{1.6}$$

определяющим действительные величины u и v как функции действительных переменных x и y.

Например, если $w = z^2$, то, полагая $z = x + jy$ и $w = u + jv$, получим

$$u + jv = (x + jy)^2 = (x^2 - y^2) + 2jxy,$$

и, следовательно, равенство $w = z^2$ равносильно равенствам

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy.$$

Если значения переменной z изображать с помощью точек некоторой плоскости (плоскости z), а значения функции w с помощью точек другой плоскости (плоскости w), то функция $w = f(z)$ устанавливает соответствие между точками плоскости z, в которых эта функция определена, и точками плоскости w. То есть функция $w = f(z)$ осуществляет отображение точек плоскости z на соответствующие точки плоскости w.

Обозначим через g множество точек плоскости z, на которых определена функция $w = f(z)$, а через G – множество тех точек плоскости w, на которые с помощью функции $w = f(z)$ отображаются точки множества g. Точки множества G называются образами соответствующих точек множества g при отображении $w = f(z)$, а точки множества g – прообразами соответствующих точек множества G. Выбрав какую–либо определенную точку множества G, найдем те точки множества g, которые отобразились в выбранную точку, то есть все прообразы выбранной точки. Таким образом, каждой точке множества G будет соответствовать одна или несколько точек множества g. В соответствии с определением функции это будет означать, что на множестве G определена некоторая функция $z = \varphi(w)$, которую называют обратной по отношению к функции $w = f(z)$.

Если функция $w = f(z)$ однозначна, то каждой точке плоскости z, в которой функция определена, соответствует одна точка плоскости w. Пусть при этом некоторое множество точек g плоскости z отображается взаимно однозначно на некоторое множество G плоскости w, то есть функция $w = f(z)$ такова, что не только каждой точке множества g соответствует одна и только одна точка множества G, но и обратно каждой точке множества G, соответствует в точности одна точка множества g. Тогда функция $z = \varphi(w)$, определенная на множестве G и отображающая его на множество g, обратная по отношению к функции $w = f(z)$ также является однозначной. В этом случае говорят, что функция $w = f(z)$ однолистна на множестве g.

Пример 1.1Функция $w = z^2$ осуществляет однозначное отображение внутренности круга g плоскости z с центром в начале координат и радиусом, равным 2 на внутренность круга G плоскости w с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Это отображение области g на область G однозначно, но не взаимнооднозначно. Действительно, функция $w = z^2$ однозначна и каждой точке z соответствует единственная точка w, но каждой точке w, лежащей внутри круга G, за исключением точки $w = 0$, соответствуют две точки круга g, симметричные относительно начала координат, так как если $z_1 = -z_2$ и $z_1^2 = w$, то $z_2^2 = z_1^2 = w$. Следовательно, функция $z = \sqrt{w}$, осуществляющая отображение области G на область g, обратная по отношению к функции $w = z^2$ многозначна (двузначна).

Пример 1.2 Функция $w = z^2$ отображает сектор g, точки которого определены неравенствами $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$; $|z| < 1$;

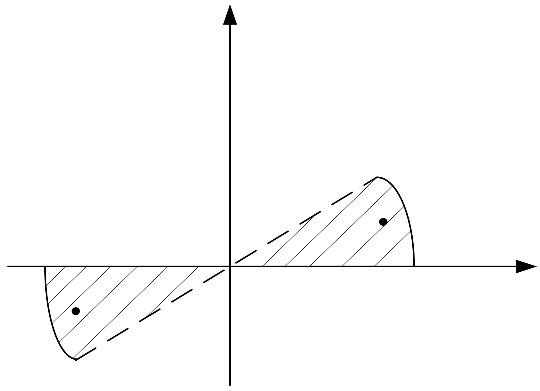


Рис.5

на сектор G (Рис.6) $\quad 0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}.\left|w\right|<1$

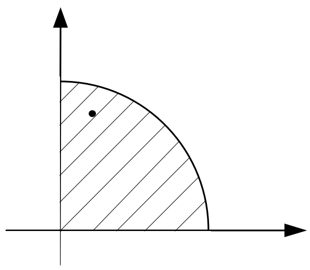


Рис.6

Это следует из того, что $\arg\left(z^2\right)=2\arg z$ и $\left|z^2\right|=\left|z\right|^2$. Это отображение взаимно однозначно, так как хотя функция $z=\sqrt{w}$, обратная по отношению к данной двузначна, все же из двух точек z_1 и z_2 ($z_2=-z_1$), соответствующих точке w области G, лишь одна принадлежит области g.

Число w_0 называется пределом функции $f(z)$ при z, стремящемся к z_0: $\quad w_0=\lim\limits_{z\to z_0} f\left(z\right)$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности точки w_0, можно найти такую δ-окрестность точки z_0, что для всех точек z этой δ-окрестности (кроме быть может самой точки z_0) соответствующие значения функции $f(z)$ будут изображаться точками ε- окрестности точки w_0. Если z_0 и w_0 - конечные числа, это определение равносильно следующему. Равенство $w_0=\lim\limits_{z\to z_0} f\left(z\right)$ означает, что как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать такое положительное число δ, что для всех значений $z(z \neq z_0)$, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Введенное определение предела функции ничем не отличается от определения предела функции действительного переменного, следовательно, все теоремы о пределах и бесконечно малых, доказываемые в курсе математического анализа остаются в силе для функции комплексного переменного. Функция $f(z)$ называется бесконечно малой в окрестности точки z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если функция $f(z)$ определена в точке z_0 и в некоторой ее окрестности и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не только существует, но и равен значению функции $f(z)$ в точке z_0:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

В соответствии с определением предела, это означает, что функции $w = f(z)$ непрерывна в точке z_0, если как бы мало ни было положительное число ε, к нему можно подобрать такое число $\delta > 0$, что из неравенства

$$|z - z_0| < \delta,$$

следует, что

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Если обозначить $z - z_0 = \Delta z$, $w - w_0 = \Delta w$ (Δz-приращение независимой переменной, Δw-приращение функции), то последние неравенства заменяются соответственно неравенствами

$$|\Delta z| < \delta \ ,$$

$$|\Delta w| < \varepsilon .$$

и определение непрерывности в точке z_0 функции $w = f(z)$, определенной в некоторой окрестности этой точки, сводится к тому, что в точке z_0 выполняется неравенство

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0 .$$

Так как данное определение непрерывности совпадает с определением непрерывности для функции действительного переменного, то доказываемые в курсе математического анализа теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения, частного непрерывных функций, а также непрерывной функции от непрерывной функции остаются в силе для функции комплексного переменного.

Как показано ранее равенство $w = f(z)$, где $w = u + jv$, $z = x + jy$, равносильно системе равенств:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y).$$

Если $z_0 = x_0 + jy_0$, то

$$f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + j[v(x, y) - v(x_0, y_0)]$$

и $|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{[u(x, y) - u(x_0, y_0)]^2 + [v(x, y) - v(x_0, y_0)]^2}$.

Из определения непрерывности функции $f(z)$ в точке *z* следует, что если точка (x, y) находится в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0), то выполняются неравенства

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

которые означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Таким образом, из непрерывности функции комплексного переменного следует непрерывность ее действительной и мнимой частей как функций двух действительных переменных *x* и *y*. Справедливо и обратное утверждение: непрерывность функций $u(x,y)$ и $v(x, y)$ влечет за собой непрерывность функции $f(z)$.

Основные свойства непрерывных функций комплексного перменного (анологично функциям действительного пременного):

Пример 1.3 Определить является ли непрерывной функция $w = z^2$.

Имеем: $w = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j2xy$.

Тогда3 $u(x, y) = x^2 - y^2$; $v(x, y) = 2xy$. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$- непрерывные функции аргументов *x* и *y*, следовательно, функция $f(z) = z^2$ непрерывна при любых *z*.

1.3 Основные трансцендентные функции

Ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots \ , \qquad (1.7)$$

так же как и ряд с действительными числами, называется сходящимся, если существует конечный предел его конечный суммы

$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$

при $n \to \infty$. Этот предел называется суммой ряда

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n .$$

Ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда сходится как ряд

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \,, \tag{1.8}$$

членами которого являются действительные части членов ряда (1.7), так и ряд

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots, \tag{1.9}$$

составленный из мнимых частей членов ряда (1.7).

Если сходится ряд $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$, составленный из модулей комплексных чисел ряда (1.7), то ряд (1.7) также сходится и называется абсолютно сходящимся.

Определения суммы, разности, произведения двух рядов и теоремы сходимости суммы, разности и произведения рядов не отличаются от соответствующих определений и теорем для рядов с действительными членами.

Показательная функция.

Если показатель степени является комплексным числом, определение степени a^z, вводимое в алгебре, теряет смысл. Точно так же известные из тригонометрии определения тригонометрических функций $\sin z, \cos z, ctgz$ не применимы при комплексных значениях z. Учитывая известные для действительных значений x разложения функций $e^x, \sin x, \cos x$ в степенные ряды, положим по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \tag{1.10}$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{1.11}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{1.12}$$

Ряды, стоящие в правых частях этих равенств, сходятся, и при том абсолютно при любом комплексном значении z.

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ связаны между собой формулой Эйлера:

$$e^{jz} = \cos z + j \sin z. \tag{1.13}$$

Если в формуле Эйлера заменить z на $-z$, получим

$$e^{-jz} = \cos z - j \sin z \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) получим

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \tag{1.15}$$

$$\sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}. \tag{1.16}$$

Формула Эйлера позволяет перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной:

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi}. \tag{1.17}$$

Если x_1 и x_2 действительные числа, то известно, что

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Аналогично для комплексных чисел

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

справедливо для любых комплексных чисел z_1 и z_2. В частности, если $z = x + jy$, где x и y – действительные числа, то

$$e^{z} = e^{x + jy} = e^{x} \cdot e^{jy}.$$

С учетом (1.13)

$$e^{jy} = \cos y + j\sin y,$$

следовательно

$$e^{z} = e^{x}(\cos y = j\sin y). \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что $\left|e^{z}\right| = e^{x}$ и одно из значений $Arge^{z}$ равно y.

Равенство (1.18) позволяет вычислить значение показательной функции при любых комплексных значениях показателя.

Например,

1) $e^{2-3j} = e^{2}(\cos 3 - j\sin 3)$;

2) $e^{\pi j} = -1$;

3) $e^{\frac{\pi}{2}j} = j$.

Из равенства(1.18) следует, что функция e^{z} периодична и имеет период $2\pi j$:

$$e^{z + 2\pi j} = e^{z}.$$

Действительно, если $z = x + jy$ то

$$e^{z+2\pi j} = e^{x}\left[\cos(y + 2\pi) + j(\sin y + 2\pi)\right] = e^{x}(\cos y + j\sin y) = e^{z}.$$

Тригонометрические функции.

Формула (1.18) позволяет вычислять значения показательной функции, а формулы (1.15) и (1.16) используют для вычисления $\cos z$ и $\sin z$ при любом комплексном z.

Так как показательная функция имеет период $2\pi j$, правые части равенств (1.15) и (1.16) не изменятся при замене z на $z+2\pi$:

$$e^{j(z+2\pi)} = e^{jz+2\pi j} = e^{jz},$$

$$e^{-j(z+2\pi)} = e^{-jz-2\pi j} = e^{-jz},$$

следовательно,

$$\cos(z+2\pi) = \cos z, \ \sin(z+2\pi) = \sin z.$$

То есть определенные с помощью (1.15) и (1.16) функции $\cos z$ и $\sin z$ периодичны и имеют, как и в случае действительного аргумента, период 2π.

Для функций $\sin z$ и $\cos z$ при любых комплексных z сохраняется основное связывающее их тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Действительно,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}\right)^2 + \left(\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{e^{2jz} - 2 + e^{-2jz}}{4} + \frac{e^{2jz} + 2 + e^{2jz}}{4} = 1.$$

Сохраняются также и другие основные тригонометрические тождества:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2.$$

Функции tgz и $ctgz$ определяются с помощью равенств

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{j\left(e^{jz} + e^{-jz}\right)}, \tag{1.19}$$

$$ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{j\left(e^{jz} + e^{-jz}\right)}{e^{jz} - e^{-jz}}. \tag{1.20}$$

Гиперболические функции shz, chz, thz, $cthz$ определяются равенствами

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$thz = \frac{shz}{chz}, \qquad cthz = \frac{chz}{shz}.$$

Принимая во внимание (1.15), (1.16), (1.19) и (1.20) гиперболические функции легко можно выразить через тригонометрические:

$$shz = -j \sin jz, \quad chz = \cos jz,$$

$$thz = -jtgjz, \qquad cthz = jctgz.$$

Из этих тождеств следует, в частности, периодичность гиперболических функций, причем периоды *shz* и *chz* равным $2\pi j$, а *thz* и *cthz* равны πj.

Пример 1.4 Найти: $\cos j$.

Принимая во внимание, что $\cos z = \dfrac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$, получим

$$\cos j = \frac{e^{j^2} + e^{-j^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e}{2} \approx 1{,}543.$$

то есть $\cos j$ - действительное число, большее 1, тогда как при x действительном всегда $|\cos x| \le 1$.

Пример 1.5 Найти: $\sin(1+2j)$.

$$\sin(1+2j) = \sin 1 \cdot \cos 2j + \cos 1 \cdot \sin 2j;$$

$$\cos 2j = \frac{e^{2j^2} + e^{-2j^2}}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2};$$

$$\sin 2j = \frac{e^{-2} - e^2}{2j} = -j\frac{e^{-2} - e^2}{2};$$

$$\sin(1+2j) = \frac{e^{-2} + e^2}{2}\sin 1 - j\cos 1\frac{e^{-2} - e^2}{2}$$

(аргумент под знаком $\sin$ и $\cos$ измеряется в радианах).

Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, где $z \ne 0$, то w называется логарифмом числа z и обозначается

$$w = Lnz .$$

Если $w = u + jv$, то из формулы (1.18) следует, что $\left|e^w\right| = e^u$ и $Arge^w = v + 2k\pi \ (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Так как в рассматриваемом случае $e^w = z$, то $e^u = |z|$ или

$$u = \ln|z|$$

($|z|$ - действительное положительное число и здесь имеется в виду обычное определение логарифма), и

$$v = Argz .$$

Следовательно

$$Lnz = \ln|z| + jArgz = \ln|z| + j\arg z + 2k\pi j \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \quad (1.21)$$

Ввиду многозначности величины *Argz*, логарифм является многозначной функцией (действительная часть определяется однозначно, а мнимая содержит неопределенное слагаемое, кратное 2π).

Символом $\ln z$ обозначают главное значение логарифма любого комплексного числа $\ln z = \ln|z| + j\arg z$.

Пример 1.6 Найти $\ln(-1)$ и $Ln(-1)$

Модуль числа -1 равен 1, а главное значение аргумента равно π, следовательно

$$\ln(-1) = \ln 1 + \pi j = \pi j,$$

$$Ln(-1) = \pi j + 2k\pi j = (2k+1)\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Пример 1.7. Вычислить $\ln j$ и Lnj

$|j| = 1$, $\arg j = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно,

$$\ln j = \ln 1 + \frac{\pi}{2} j = \frac{\pi}{2} j,$$

$$Lnj = \frac{\pi}{2} j + 2k\pi j = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Пример 1.8 Найти $\ln(3+4j)$ и $Ln(3+4j)$.

$$|3+4j| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\arg(3+4j) = arctg\dfrac{4}{3}$, следовательно, $\ln(3+4j) = \ln 5 + j\,arctg\dfrac{4}{3}$,

$$Ln(3+4j) = \ln 5 + j\,arctg\frac{4}{3} + 2k\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Свойства логарифмической функции комплексного переменного:

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2;$$

$$Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2;$$

$$Ln(z^n) = nLnz + 2k\pi j \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...);$$

$$Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} Lnz.$$

Формула (1.18) служит для возведения в комплексную степень числа *e*. Чтобы перейти к определению возведения в степень любого комплексного числа отметим, что в силу определения логарифмической функции

$$e^{Lna} = a,$$

для любого комплексного *a*.

Для действительных a и z при $a \geq 0$, справедливо тождество

$$a^z = e^{zLna} \quad .$$

Будем считать, что

$$a^z = e^{zLna} \qquad (1.22)$$

для любых комплексных a и z, и тем самым определим a^z при любых комплексных a и z, где a, z – комплексные числа.

Равенство (21) многозначно в силу многозначности Lna. Его главным значением называют то, которое получается при подстановке в правую часть (1.22) $\ln a$ вместо Lna.

Пример 1.9 Найти j^j.

$$j^j = e^{jLnj} = e^{j\left(\frac{\pi}{2}j + 2k\pi j\right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Главное значение $j^j = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Пример 1.10 Найти: 2^{1+j}.

$$2^{1+j} = e^{(1+j)Ln2} = e^{(1+j)(\ln 2 + 2k\pi j)} =$$

$$= e^{j(\ln 2 + 2k\pi) + (\ln 2 - 2k\pi)} = e^{\ln 2 - 2k\pi}(\cos\ln 2 + j\sin\ln 2)$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

2. Дифференцирование и интегрирование функций комплексного переменного

2.1 Производная

Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного совпадают с соответствующими определениями для функций действительного переменного. Поэтому почти все основные теоремы и формулы дифференциального исчисления без изменения распространяются на функции комплексного переменного.

Однако дифференцируемые функции комплексного переменного по сравнению с дифференцируемыми функциями действительного переменного обладают многими дополнительными свойствами. Причина появления этих дополнительных свойств заключается в том, что условие для существования производной функции комплексного переменного является более ограниченным, чем условие существования производной функции действительного переменного.

Дадим независимому переменному $z = x + jy$ приращение $\Delta z = \Delta x + j\Delta y$ и вычислим, вызванное этим приращением приращение Δw однозначной функции $w = f(z)$: $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Если существует предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при стремлении Δz к нулю по любому закону, то этот предел называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$, w', $\frac{dw}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$: $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Требование существования предела $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ и его независимости от_закона стремления Δz к нулю накладывает на функцию $f(z)$ более сильные ограничения, чем аналогичное требование для функции $y=\varphi(x)$ действительного переменного x. Так если функция $y=\varphi(x)$ имеет производную, то это значит, что существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при приближении точки $x+\Delta x$ к точке x по двум направлениям: слева (при $\Delta x<0$) и справа (при $\Delta x>0$), и что пределы эти совпадают. Требование существования производной функции $f(z)$ комплексного переменного означает существование предела отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при приближении точки $z+\Delta z$ к точке z по любому пути, в частности по любому из бесконечного множества различных лучей, и совпадение всех этих пределов.

Пусть

$$f(z)=u(x,y)+jv(x,y) \quad \text{и} \quad \Delta z=\Delta x+j\Delta y,$$

тогда

$$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)=[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+$$
$$+j[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]=\Delta u+j\Delta v,$$

где

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),$$
$$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y).$$

В этих обозначениях

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u+j\Delta v}{\Delta x+j\Delta y}. \qquad (2.1)$$

Пусть функция $f(z)$ имеет производную в точке z, тогда предел (2.1) существует и не зависит от закона стремления к нулю $\Delta z=\Delta x+j\Delta y$. В частности, при $\Delta z=\Delta x$, то есть при приближении точки $z+\Delta z$ к точке z по прямой параллельной оси OX (рис.7).

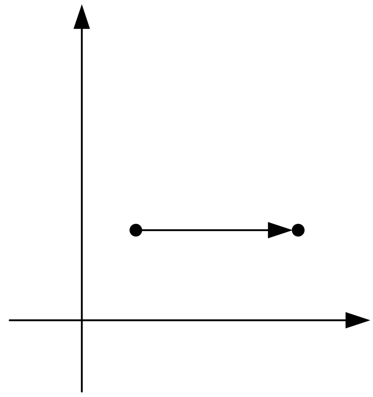


Рис.7

С учетом (2.1) получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + j\frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2)$$

Выбрав $\Delta z = j\Delta y$, то есть точка $z + \Delta z$ стремится к точке z по прямой, параллельной оси OY (Рис8.), получим

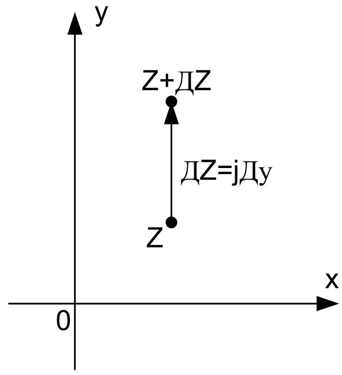


Рис.8

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + j\Delta v}{j\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \left(-j\frac{\Delta u}{\Delta y} + j\frac{\Delta v}{\Delta y} \right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.3)$$

Так как предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ не должен зависеть от закона стремления Δz к нулю, то из (2.2) и(2.3) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.4)$$

Условия (2.4) называются условиями Коши–Римана или условиями Даламбера–Эйлера и должны быть выполнены в каждой точке, в которой функция $f(z) = u + jv$ имеет производную (дифференцируема). Эти условия при некоторых добавочных ограничениях не только необходимы, но и достаточны для дифференцируемости функции $f(z)$. Используя условия Коши–Римана, можем записать:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - j\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (2.5)$$

Если функция дифференцируема не только в данной точке, но и в некоторой ее окрестности, то она называется аналитической в данной точке.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области, называется аналитической или голоморфной в этой области.

Точки плоскости *z*, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называются правильными. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической (в частности, в которых $f(z)$ не определена) называются особыми точками.

Пример 2.1 Является ли функция $w = z^2$ аналитической?

Если $w = z^2$, то $u + jv = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$ и $u = x^2 - y^2$; $v = 2xy$ откуда находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Условия (2.4) выполнены во всех точках плоскости, следовательно, функция z^2 является аналитической во всей плоскости.

Пример 2.2 Является функция $w = e^z$ аналитической?

$$w = e^z; u + jv = e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y);$$

$$u = e^x \cos y; v = e^x \sin y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следовательно, условия Коши–Римана выполнены в каждой точке, и функция e^z является аналитической во всей плоскости.

Пример 2.3 Является аналитической функция $w = \bar{z}$?

$$w = \bar{z};\ u = x;\ v = -y;\ \frac{\partial u}{\partial x} = 1; \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Следовательно, первое условие Коши–Римана не выполнено. Функция $w = \bar{z}$ не дифференцируема ни в одной точке плоскости.

Пример 2.4 Является ли функция $w = z \cdot \operatorname{Re} z$ аналитической?

$$w = z \cdot \operatorname{Re} z = u + jv = (x + jy)x = x^2 + jxy$$

$$u = x^2; v = xy;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial v}{\partial y} = x; \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = y.$$

Условия (2.4) выполняются только в точках x=0, y=0. Следовательно, функция $z \operatorname{Re} z$ дифференцируема только в одной точке $z = 0$, и ни в какой точке не является аналитической.

Правила дифференцирования функции комплексного переменного:

1. Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций, то есть

$$[f(z) + g(z)]' = f'(z) + g'(z).$$

2. Производная произведения двух функций равна произведению производной от первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй

$$[f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

3. Производная дроби это дробь, числитель которой равен разности между произведением производной числителя на знаменатель и произведением производной знаменателя на числитель. Знаменатель производной равен квадрату знаменателя, то есть

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}.$$

4. Производная от сложной функции равна:

$$\{f[g(z)]\}'_{z=z_0} = f'[g(z_0)] \cdot g'(z_0).$$

2.2 Гармонические функции

Многие задачи, встречающиеся в технике, приводят к уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0,$$

называемого уравнением Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Действительная и мнимая части функции $f(z)=u+jv$, аналитической в некоторой области *D,* является в этой области решением уравнения Лапласа. Действительно, функции u и v связаны в области D условиями Коши–Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Дифференцируя первое тождество по x, а второе по y и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Дифференцируя первое тождество по y, а второе по x и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0./$$

Решения уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$

называются гармоническими функциями. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Однако, если $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются произвольно выбранными гармоническими функциями, функция $[u(x,y)+jv(x,y)]$, вообще говоря, не будет аналитической функцией, так как условия Коши–Римана, как правило, не будут выполняться. Аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ можно получить, если произвольно задав одну из двух гармонических функций $u(x,y)$ или $v(x,y)$, и подобрать другую так, чтобы удовлетворялись условия Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

То есть вторая функция определяется по ее двум частным производным, или что то же самое, по ее полному дифференциалу. Полный дифференциал определяется с точностью до постоянного слагаемого. Следовательно, аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого определяется своей действительной или мнимой частью.

Две гармонические функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, следовательно, являющиеся действительной или мнимой частями некоторой аналитической функции $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, называются сопряженными.

Пример 2.5 Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

Так как $\frac{\partial v}{\partial x} = 4x + 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -4y$, то из условий Коши–Римана находим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x - 1; \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4y.. \tag{2.7}$$

Из (2.7) получим:

$$u = \int -4y dx = -4xy + \varphi(y), \tag{2.8}$$

где $\varphi(y)$-пока произвольная функция. Для определения $\varphi(y)$ дифференцируем (2.8) по y и подставляем в (2.6)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -4x + \varphi'(y) = -4x - 1,$$

откуда $\varphi'(y) = -1, \varphi(y) = -y + c$. Следовательно, $u = -4xy - y + c$.
Окончательно получаем

$$w = u + jv = -4xy - y + c + j\left(2x^2 - 2y^2 + x\right) =$$
$$+ 2j\left(x^2 - y^2 + 2jxy\right) + j(x + jy) + c = 2jz^2 + jz + c.$$

2.3 Интеграл от функции комплексного переменного

Предположим, что в плоскости z задана замкнутая или незамкнутая дуга C, которую будем считать гладкой или кусочно-гладкой. Дуга называется гладкой, если в каждой ее точке можно провести касательную, причем направление касательной непрерывно при движении точки по кривой. Дуга непрерывной кривой, состоящая из конечного числа гладких дуг, называется кусочно-гладкой.

Граничные точки кривой C обозначим z_0 и Z (Рис.9). Если кривая замкнута, то $z_0 = Z$. Одну из точек, например, z_0 будем считать начальной, а другую – конечной. Таким образом, установим положительное направление на кривой C (на рис. – стрелка). Предположим, что функция $f(z)$ непрерывна во всех точках дуги C.

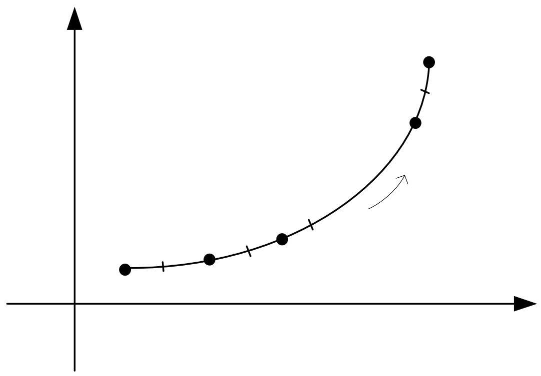


Рис.9

Разобьем дугу C произвольным образом на n «элементарных дуг» и занумеруем деления точками $z_1, z_2, ..., z_n = z$. Введем обозначения от начальной точки к конечной $z_1 - z_0 = \Delta z, z_2 - z_1 = \Delta z_2, ..., z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$. Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в точку z_k, а $|z_k|$-длина этого вектора, то есть длина хорды, стягивающей соответствующую элементарную дугу. Внутри, или на одном из концов каждой элементарной дуги выберем по одной точке и обозначим эти точки $a_1, a_2, ..., a_n$ (точка a_k находится на элементарной дуге с концами в точках z_{k-1} и z_k).

Составим сумму:

$$f(a_1)\Delta z_1 + f(a_2)\Delta z_2 + ... + f(a_n)\Delta z_n. \qquad (2.9)$$

Предел этой суммы, вычисленный при условии, что $n \to \infty$ и длина наибольшей из элементарных дуг, стремится к нулю(то есть стремится к нулю максимальная из величин $|z_k|$) называется интегралом функции $f(z)$ по дуге C и обозначается

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max|z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\Delta z_k \qquad (2.10)$$

Основные свойства интеграла функции комплексного переменного

1. $\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1 dz \pm \int_C f_2 dz$.

2. $\int\limits_C kf(z)dz = k\int\limits_C f(z)dz$,

k – действительная или комплексная постоянная.

3. Если дуга $\overline{C}$ геометрически совпадает с дугой C, но имеет противоположное направление, то

$$\int\limits_{\overline{C}} f(z)dz = -\int\limits_C f(z)dz$$

так как при замене C на $\overline{C}$ все множители Δz_k в правой части (2.10) изменяют знаки на противоположные.

4. Если дуга C состоит из дуг $C_1, C_2, ..., C_n$ (Рис.10), то

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{C_n} f(z)dz.$$

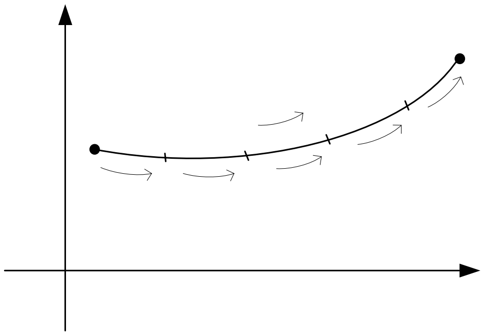


Рис.10

5. $\int\limits_C dz = Z - z_0$,

так как при $f(z) \equiv 1$, сумма в правой части (2.10) имеет вид

$$\Delta z_1 + \Delta z_2 + ... + \Delta z_n = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + ... + (z_n - z_{n-1}) =$$
$$= z_n - z_0 = Z - z_0.$$

5. Если $|f(z)| < M$, во всех точках дуги C и длина дуги C равна l, то

$$\left|\int\limits_C f(z)dz\right| \le M \cdot l.$$

Действительно

$$\left|\sum_{k=1}^n f(a_k)\Delta z_k\right| \le \sum_{k=1}^n |f(a_k)| \cdot |z_k| \le M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \le M \cdot l,$$

так как сумма $\sum\limits_{k=1}^n |\Delta z_k|$ равна длине ломаной, вписанной в дугу C, и поэтому не больше чем длина l дуги C.

Вычисление интеграла сводится к вычислению криволинейных интегралов от действительных функций действительных переменных. Пусть

$$f(z)=u+jv,\ z=x+jy,$$

где u и v – функции переменных x и y: $u=u(x,y), v=v(x,y)$.

Тогда

$$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_C u(x,y)dx-v(x,y)dy+j\int\limits_C v(x,y)dx+u(x,y)dy \qquad (2.11)$$

Так как подинтегральное выражение можно представить в виде: $f(z)dz=(u+jv)(dx+jdy)=udx-vdy+j(vdx+udy)$.

Если дуга C задана параметрическими уравнениями:

$$x=x(t) \text{ и } y=y(t) \qquad (2.12),$$

а начальная и конечная точки дуги соответствуют при этом значениям параметра $t=t_0$ и $t=T$:

$$z_0=x(t_0)+jy(t_0),\ Z=x(T)+jy(T),$$

то можно свести вычисление криволинейных интегралов в (2.11) к вычислению определенных интегралов с нижним пределом t_0 и верхним T (следует из правила вычисления криволинейного интегралов).

Так как уравнения (12) равносильны одному уравнению

$$z=z(t) \qquad (2.13),$$

где $z(t)=x(t)+jy(t)$, то для вычисления $\int\limits_C f(z)dz$ достаточно подставить в подинтегральную функцию вместо z $z(t)$ из (2.13),а вместо dz – дифференциал этой функции. Следовательно, интеграл по комплексному переменному можно вычислять пользуясь формулой

$$\int\limits_C f(z)dz=\int\limits_{t_0}^{T} f[z(t)]z'(t)dt \qquad (2.14)$$

Пример 2.6 Вычислить интеграл $\int\limits_C \operatorname{Re} z dz$;

где дуга C – отрезок прямой, соединяющий точку 0 с точкой $1+j$.

Уравнение отрезка, соединяющего точки 0 и $1+j$ в параметрической форме, имеет вид

$x=t;\ y=t,$

а в комплексной форме

$z=(1+j)t,$

где действительная переменная t изменяется от 0 до 1. Находим далее

$$dz=(1+j)dt.$$

$$\int_C \operatorname{Re} z dz = \int_0^1 \operatorname{Re}[(1+j)t](1+j)dt = (1+t)\int_0^1 t dt =$$

$$= \frac{(1+j)}{2} t^2 \Big|_0^1 = \frac{1+j}{2}.$$

2.4 Теорема Коши.

Если функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G, ограниченной замкнутым контуром C, а также в точках этого контура, то

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Доказательство теоремы проведем в дополнительном предположении о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в ограниченной им односвязной области. Используем равенство:

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + j\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Покажем, что криволинейные интегралы второго рода $\int_C udx - vdy$ и $\int_C udy + vdx$ по замкнутому контуру равны нулю. Для равенства нулю криволинейных интегралов требуется, чтобы:

1. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имели непрерывные частные производные в области G;

2. Всюду в области G выполнялись неравенства

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ и } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (2.15)$$

Первое условие выполняется в силу предположения о непрерывности производной $f'(z)$. Равенства (2.15) совпадают с условиями Коши–Римана и выполняются в области G, так как функция $f(z)$ по условию теоремы аналитическая в этой области. Таким образом, криволинейные интегралы $\int_C udx - vdy = 0$ и $\int_C udy + vdx = 0$, следовательно $\int_C f(z)dz \equiv 0$.

Можно доказать теорему Коши и без предположения о непрерывности производной $f'(z)$ на контуре C и в области, ограниченной данным контуром, однако, доказательство при этом осложнится.

Рассмотрим многосвязную область G, ограниченную внешним контуром C и внутренними контурами C_1 и C_2 (для определенности возьмем трехсвязную область Рис.11).

Граница области состоит из внешнего контура C и двух внутренних контуров C_1 и C_2. Соединим контуры C, C_1, C_2 дугами γ_1 и γ_2. Обозначим через Г сложный замкнутый контур, состоящий из контуров C , C_1, C_2 и дуг γ_1 и γ_2 Область, ограниченная контуром Γ, будет односвязной и в силу теоремы Коши $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$

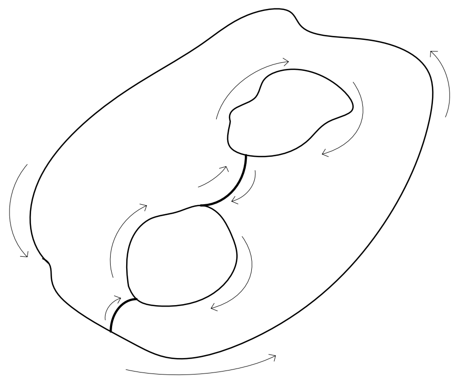


Рис.11

Контур Г будем обходить в таком направлении, при котором область G остается слева (положительное направление обхода). При этом обходе дуги γ_1 и γ_2 будут проходиться дважды в противоположных направлениях, в силу чего интегралы по каждой из дуг взаимно уничтожаются, и мы получим

$$\int\limits_{C} f(z)dz + \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz = 0 .$$

Здесь внешний контур C обходится против часовой стрелки, а внутренние - по часовой стрелке. Получаем формулировку теоремы Коши для многосвязного контура. Изменив направление обхода внутренних контуров C_1 и C_2, получим

$$\int\limits_{C} f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz + \int\limits_{C_2} f(z)dz , \qquad (2.16)$$

где все контуры, как внутренние, так и внешний обходятся против часовой стрелки. Очевидно, что равенство (2.16) сохранится и в случае, если все контуры будут обходиться по часовой стрелке.

Теорема Коши для многосвязной области может быть сформулирована следующим образом: если функция $f(z)$ аналитическая в многосвязной замкнутой области G, то интеграл от этой функции по внешнему контуру, ограничивающему область, равен сумме интегралов по всем внутренним контурам (при этом все контуры обходят в одном направлении (либо по часовой стрелке, либо против)

В частности, если $f(z)$ аналитическая в кольце между замкнутыми контурами C_1 и C_2 и на самих этих контурах, то $\int\limits_{C_1} f(z)dz = \int\limits_{C_2} f(z)dz$.

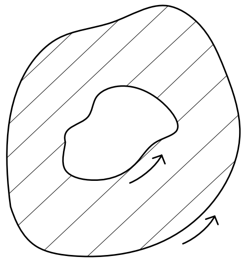


Рис.12

Если интеграл от функции $f(z)$ по всему замкнутому контуру, расположенному в некоторой области *G*, равен нулю, то интеграл по всякой дуге, находящейся внутри области *G*, зависит только от положения начальной и конечной точек этой дуги, и, следовательно, одинаков для всех дуг, имеющих общую начальную и конечную точки. Другими словами в этом случае интеграл не зависит от пути интегрирования.

Действительно, если дуги C_1 и C_2 имеют общую начальную точку z_0 и общую конечную точку *Z*, то величина

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz - \int\limits_{C_2} f(z)dz \tag{2.17}$$

представляет собой интеграл от функции $f(z)$ по замкнутому контуру *C*, состоящему из дуги C_1 и дуги $\overline{C_2}$, геометрически совпадающей с дугой C_2, но противоположной по направлению. Если интеграл равен нулю, то равна нулю и разность (2.17), откуда

$$\int\limits_{C_1} f(z)dz = \int\limits_{C_2} f(z)dz.$$

Таким образом, из теоремы Коши следует, что если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области *G*, то для любой дуги *C* (не замкнутой), принадлежащей *G*, интеграл от $f(z)$ по *C* зависит только от начальной z_0 и конечной *Z* точек дуги *C*, следовательно для этого интеграла можно использовать обозначение

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz. \tag{2.18}$$

Во избежании путаницы переменную интегрирования обозначают другой буквой (ξ), то есть обычно пользуются обозначением $\int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi$.

Если зафиксировать точку z_0, а z изменять в области G, то интеграл (2.18) будет функцией от z, обозначим эту функцию $F(z)$.

Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области G, содержащей точки z_0 и Z, причем величина z_0 - постоянна, а Z- изменяется, то в этой области функция

$$F(Z) = \int\limits_{z_0}^{Z} f(z)dz \tag{2.19}$$

является аналитической и $\dfrac{dF(Z)}{dZ} = f(Z)$.

Функция $F(Z)$ называется первообразной для функции $f(Z)$, если $F'(Z) = f(Z)$.

Если две функции имеют в некоторой области одинаковые производные, то в этой области разность между этими функциями постоянна, то есть две первообразные от одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянную величину.

Формула Ньютона – Лейбница.

Если функция $F(z)$-некоторая первообразная от аналитической функции $f(z)$, то есть $F'(z) = f(z)$, то справедлива формула

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz = F(z) - F(z_0) \tag{2.20}$$

Эта формула совпадает с известной формулой Ньютона – Лейбница из интегрального исчисления, то есть контурный интеграл от аналитической функции в односвязной области равен приращению первообразной этой функции на пути интегрирования.

2.5 Интегральная формула Коши

Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области G (односвязной или многосвязной) и C – граница области. Оказывается, что значения функции $f(z)$ в любой точке z области G можно вычислить, зная только значения $f(z)$ на границе C этой области по формуле

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z}. \tag{2.21}$$

Здесь граница *C* обходится в положительном направлении (то есть так, что область *G* остается все время слева).

Интеграл в правой части (2.21) называется интегралом Коши, а сама формула носит название интегральной формулы Коши.

Для вычисления интеграла Коши нужно знать значения $f(\xi)$ функции $f(z)$ на границе *C*, отсюда и следует, что аналитическая в замкнутой области *G* функция, полностью определяется своими значениями на границе области. С помощью формулы Коши можно вычислять некоторые контурные интегралы по замкнутым контурам.

Пример 2.7 Вычислить $\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-2j)}$, где *C* – окружность радиусом 2, с центром в точке $3j$.

Функция $f(z)=\frac{e^z}{z}$ - аналитична внутри круга, ограниченного окружностью *C*, поэтому применим интегральную формулу Коши (роль ζ – играет *z*, а роль *z* – число $2j$).

$$\int\limits_C \frac{e^z dz}{z(z-2j)} = \int\limits_C \frac{f(z)dz}{z-2j} = 2\pi j f(2j) = 2\pi j\frac{e^{2j}}{2j} = \pi(\cos 2 + j\sin 2).$$

Применяя интегральную формулу Коши, можно доказать, что:

1. Производная аналитической функции, также является аналитической функцией, причем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^2} \tag{2.22}$$

2. При любом целом положительном *n*

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi j} = \int\limits_C \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}. \tag{2.23}$$

Из аналитичности функции в некоторой точке, то есть из существования первой производной данной функции в какой – либо окрестности этой точки, следует существование в окрестности той же точки производных данной функции любого порядка, а, следовательно, и аналитичность этих производных.

Пример 2.8 Вычислить $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z-j)^3}dz$, где *C* – замкнутый контур, обходящий точку *j* один раз.

Применяя формулу (2.23) к функции $f(z)=\cos z$, получим: $\int\limits_C \frac{\cos z}{(z-j)^2}dz=\frac{2\pi j}{2!}\frac{d^2\cos z}{dz}\Big|_{z=j}=-\pi j\cos j$.

Пример 2.9 Вычислить $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}$, где C – окружность радиуса 1 с центром в точке j.

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z+j)(z-j)};$$

$f(z)=\frac{1}{z+j}$ - аналитична в круге, ограниченном C, поэтому, применяя интегральную формулу Коши, имеем $\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1}=\int\limits_C \frac{dz}{(z+j)(z-j)}dz=2\pi j f(j)=\frac{2\pi j}{j+j}=\pi$.

3. Теория вычетов

3.1 Изолированные особые точки

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ является аналитической, называются правильными точками. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются особыми точками (в частности точки, в которых функция не определена).

Особая точка $z=a$ называется изолированной, если в некоторой окрестности этой точки функция $f(z)$ не имеет других особых точек. То есть когда в некоторой окрестности точки $z=a$, $f(z)$ аналитична всюду, кроме самой точки $z=a$.

Изолированная особая точка $z=a$ называется устранимой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)=A\neq\infty$.

Изолированная особая точка $z=a$ называется полюсом, если $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, то есть модуль $f(z)$ неограниченно возрастает при $z\to a$. Если точка $z=a$ является полюсом функции $f(z)$, то она является нулем функции $\frac{1}{f(z)}$.

Изолированная особая точка называется существенно особой, если не существует $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

Если $f(a)=0$, то точка a называется нулем функции $f(z)$ и $f(z)$ можно разложить в ряд $f(z)=c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots$.
Если $f(z)$ можно разложить в степенной ряд

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\ldots \qquad (3.1)$$

то точка a называется нулем функции $f(z)$ порядка или кратности *n*. Разложение (3.1) можно записать в виде

$$f(z)=(z-a)^n\cdot\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-a)+\ldots$
Для функции $\varphi(z)$ точка a уже не является нулем, так как $\varphi(a)=c_n\neq 0$.

Точка z называется полюсом порядка n функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\dfrac{1}{f(z)}$. В случае $n=1$ полюс называется простым. Точка $z=a$ тогда и только тогда является нулем порядка n функции $\dfrac{1}{f(z)}$, когда $\dfrac{1}{f(z)}=(z-a)^n\varphi(z)$, где $\varphi(a)\neq 0$ (функция $\varphi(z)$ аналитична при $z=a$).

Если положить $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$, то точка $z=a$ тогда и только тогда является полюсом порядка n функции $f(z)$, когда $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^n},$$

где $\psi(z)$ также аналитична при $z=a$ и $\psi(a)\neq 0$.

Пример 1. Найти все особые точки функций и определить их тип:

1) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)^3}\rightarrow$точка $z=-2$ - является полюсом третьего порядка для $f(z)$.

2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+4}\rightarrow$ так как $z^2+4=(z-2j)(z+2j)$, то точки $z=\pm 2j$ - полюсы первого порядка.

3) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$

Так как $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$, то

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots + \frac{1}{z^n n!} + \ldots$$

этот ряд сходится всюду кроме точки $z = 0$, то есть точка $z = 0$ является существенно особой точкой функции $e^{\frac{1}{z}}$.

3.1 Основная теорема о вычетах

Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ $(a \neq \infty)$ называется число $\frac{1}{2\pi j}\int\limits_C f(z)dz$, где C – достаточно малая окружность $|z - a| = \rho$, такая, что в круге $|z - a| \leq \rho$ нет других особых точек, кроме точки $z = a$. В этом случае величина вычета не зависит от величины радиуса ρ.

Обозначают вычет функции $f(z)$ в точке $z = a$ следующим образом:

$$\operatorname{Re} sf(z)\big|_{z=a}$$

(начальные буквы французского слова *residu* – вычет).

Если a является правильной точкой функции $f(z)$, то вычет функции относительно правильной точки равен_нулю (это следует, например, из теоремы Коши).

Если a – полюс или существенно особая точка функции $f(z)$, то вычет относительно нее может быть отличным от нуля, но может оказаться и равным нулю. Для бесконечно удаленной точки $z = \infty$ вычет определяется формулой

$$\operatorname{Re} sf(z)\big|_{z=\infty} = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_C f(z)dz,$$

где C – окружность достаточно большого радиуса, с центром в начале координат, обход которой производится по часовой стрелке (чтобы бесконечно удаленная точка оставалась слева).

Если бесконечно удаленная точка функции $f(z)$ правильная, то вычет относительно нее не обязательно равен нулю. Так, например, $f(z) = \frac{1}{z}$ не имеет особенностей в точке $z = \infty$, но вычет $f(z)$ $\operatorname{Re} sf(z)\big|_{z=\infty} = -1$.

Пусть C_0 - простой замкнутый контур, на котором функция $f(z)$ аналитична. Допустим, что внутри контура C_0 функция $f(z)$ аналитична всюду, за исключением *n* изолированных точек $a_1, a_2, ..., a_n$. Окружим эти точки, лежащие внутри C_0, окружностями $C_1, C_2, ..., C_n$ (Рис.13) столь малых радиусов, чтобы внутри каждой из этих окружностей находилось лишь по одной особой точке функции $f(z)$ и чтобы никакие две из этих окружностей не имели общих точек. Тогда в силу теоремы Коши для составного контура, получим

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C_0} f(z)dz = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C_2} f(z)dz + ... + \int\limits_{C_n} f(z)dz,$$

где при интегрировании все контуры обходятся против часовой стрелки.

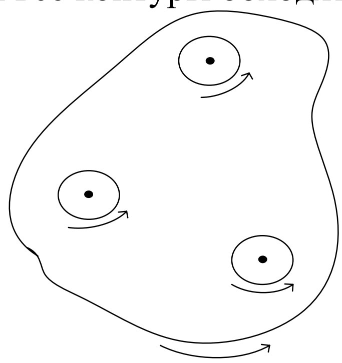


Рис.13

Следовательно, величина $\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C_0} f(z)dz$ равна сумме вычетов функции $f(z)$ относительно всех особых точек этой функции внутри контура C_0:

$$\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re} sF(z)\Big|_{z=a_k}.$$

3.3 Вычет относительно полюса

Если точка *a* является простым полюсом функции $f(z)$ то

$$\operatorname{Re} sF(z)\Big|_{z=a} = \lim_{z\to a}\left[(z-a)f(z)\right].$$

Иногда для вычисления вычета относительно простого полюса более удобна другая формула. Пусть точка $z=a$ – простой полюс функции $f(z)$ и $f(z)$ представляет собой отношение двух функций $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$.

$f_1(z)$ и $f_2(z)$ - функции аналитические в точке z=a , причем для функции $f_2(z)$ точка a является нулем первого порядка, и $f_1(a) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{Re} sf(z)\big|_{z-a} = \lim_{z \to a}\left[(z-a)\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \lim_{z \to a}\frac{f_1(z)}{\dfrac{f_2(z)}{z-a}} = \frac{f(a)}{\lim\limits_{z \to a}\dfrac{f(z)}{z-a}}.$$

Но так как $f_2(a)=0$ в соответствии с определением производной то

$$\lim_{z \to a}\frac{f_2(z)}{z-a} = \lim_{z \to a}\frac{f_2(z)-f_2(a)}{z-a} = f_2'(a).$$

Тогда окончательно получим

$$\operatorname{Re} sf(z)\Big|_{z \to a} = \frac{f_1(a)}{f_2'(a)}.$$

Пример 3.1 Вычислить вычет $f(z)=\dfrac{z^2}{z-2}$ относительно точки z=2.

Точка z=2 простой полюс $f(z)$, следовательно

$$\operatorname{Re} sf(z)\big|_{z-2} = \lim_{z \to 2}\left[(z-2)\frac{z^2}{z-2}\right] = 4.$$

Пример 3.2 Вычислить вычет $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$ относительно z=0.

$$\operatorname{Re} s\frac{1}{\sin z}\big|_{z=0} = \lim \lim_{z \to 0}(z \cdot \frac{1}{\sin z}) = 1.$$

Пример 3.3 Вычислить $\operatorname{Re} sctgz\big|_{z=0}$.

$ctgz = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Точка z=0 является нулем первого порядка для функции $sinz$, тогда $\operatorname{Re} sctgz\big|_{z=0} = \dfrac{\cos 0}{\cos 0} = 1$.

Библиографический список

1. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексной переменнойю. М., «Наука», 1970.
2. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в примерах и задачах. М., «Высшая школа», 1971.
3. Иванов В.А., Чемоданов Б.К., Медведев В.С. Математические основы теории автоматического регулирования. М., «Высшая школа», 1971.
4. Жевержеев В.Ф., Кольницкий Л.А. Специальный курс математики для ВТУЗов., М., «Высшая школа», 1970.
5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М., «Наука», 1970.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. «Наука», 1967.
7. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление . Физматгиз, 1961.
8. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Физматгиз, 1960.

ОГЛАВЛЕНИЕ