Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

П. А. ПОЛУШИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Владимир 2018

УДК 621.391.8
ББК 32.84
П53

Рецензенты:
Доктор технических наук, доцент
доцент кафедры инфокоммуникаций и радиофизики
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова
А. Л. Приоров

Доктор технических наук, доцент
профессор кафедры биомедицинских и электронных
средств и технологий Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. П. Крылов

Полушин, П. А.
П53 Математический аппарат теории сигналов и систем : учеб. пособие / П. А. Полушин ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 87 с.
ISBN 978-5-9984-0887-8

Курс «Математический аппарат теории сигналов и систем» посвящен изучению студентами современных математических методов исследования и расчета процессов, протекающих в современных радиоэлектронных системах. Учебное пособие состоит из двух разделов. Первый посвящен методам решения интегральных уравнений и может считаться продолжением изучения раздела решений дифференциальных уравнений, который осваивают бакалавры. Второй раздел связан с решением вариационных задач. Он является обобщением и углублением методов поиска экстремумов в задачах различного класса и путей нахождения оптимальных функциональных зависимостей.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлению 11.04.01 «Радиотехника».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 621.391.8
ББК 32.84

ISBN 978-5-9984-0887-8

ВВЕДЕНИЕ

Комплекс научных знаний, которыми должен обладать современный исследователь, включает в себя очень широкий спектр различных методов и средств. Часть из них дает возможность планировать и рассчитывать результаты экспериментов. Другие методы позволяют проектировать новую аппаратуру и прогнозировать ожидаемые характеристики ее работы. Некоторые методы могут указать новые и зачастую неожиданные решения и наметить дальнейшие направления работы.

Базовые методы современных математических знаний студенты получают при изучении курса высшей математики в рамках бакалавриата. Они выступают математической основой их будущей работы, как технических специалистов. Однако для более продвинутой научной деятельности по анализу современных сложных сигналов и разработке аппаратуры для их обработки, а также для научных исследований, этого объема математического аппарата может не хватать.

В связи с этим курс дисциплины «Математический аппарат теории сигналов и систем призван восполнить уровень знаний современной математики, связанный с радиотехническими задачами.

В рамках дисциплины изучаются два важных направления математики – интегральные уравнения и вариационное исчисление. Теория решения интегральных уравнений является продолжением теории решения дифференциальных уравнений, которую студенты изучают в рамках бакалавриата. Она обобщает возможности анализа сложных методов обработки сигналов, которые в упрощенной форме студенты изучали в некоторых специальных дисциплинах.

Вариационное исчисление позволяет анализировать очень широкий круг оптимизационных задач по нахождению оптимальных и экстремальных решений.

1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральное уравнение – уравнение, где неизвестная функция входит под знак интеграла ([1-3]).

1.1. Линейные интегральные уравнения

Условимся, что

$f(t)$ – известная функция.

$\varphi(t)$ – неизвестная искомая функция.

Интегральное уравнение называется линейным, если неизвестная функция, входящая в него, линейна.

Классическая запись линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t),$$

где λ – параметр, задающий семейство решений интегральных уравнений;

$k(t,S)$ – ядро интегрального уравнения.

Функция $f(t)$ существует в пределах $a \le t \le b$.

Функция $k(t,S)$ существует в пределах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases}.$$

1.2. Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = f(t)$ – интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t)$ – интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

a и b могут быть конечными или бесконечными.

Условия существования решений уравнений:
f(t) – непрерывна на интервале *a, b*.

$$\int_a^b \left| f(t) \right|^2 dt < +\infty .$$

$k(t,S)$ – непрерывна в интервалах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases};$$

Если ядра удовлетворяют вышеприведенным условиям, то ядра называются фредгольмовыми. Если $f(t) \equiv 0$, то такое интегральное уравнение называется однородным:

$$0 = \varphi(t) + \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS .$$

1.3. Интегральные уравнения Вольтерра

1. 1-го рода

$$\int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t) .$$

2. 2-го рода

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t) .$$

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным. При определенных ограничениях, уравнения Вольтерра упрощенно рассматривают уравнениями Фредгольма. Если модифицировать ядра следующим образом

$$H(t,S) = \begin{Bmatrix} k(t,S), & S \le t \\ 0 \quad , & S > t \end{Bmatrix},$$

то мы придем к записи интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b H(t,S)\varphi(S)dS + f(t) .$$

1.4. Виды нелинейных интегральных уравнений

1. Интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(t)=\int_a^b k\left[t,S,\varphi(S)\right]dS.$$

Если неизвестная функция входит внутрь ядра, то такие уравнения называются уравнениями Урысона.

2. Уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(t)=\int_a^b k(t,S)F\left[S,\varphi(S)\right]dS,$$

где $k(t,S)$ – обычное фредгольмовое ядро.

3. Уравнения Ляпунова – Лихтенштейна.

Они включают в себя существенно нелинейные функции.

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b k_1(t,S)\varphi(S)dS+\mu\int_a^b\int_a^b k_2(t,S,z)\varphi(S)\varphi(z)dSdz.$$

4. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра.

$$\varphi(t)=\int_a^t k\left[t,S,\varphi(S)\right]dS.$$

Примеры.

1. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{jxy}f(y)dy.$

Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

$$k(x,y)=\frac{e^{ixy}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Решение его имеет вид:

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}g(x)dx.$$

2. $\dfrac{dx(t)}{dt}=F[t,x(t)].$

Проинтегрируем обе части этого выражения по t:

$$x(t)=x_0+\int_a^t F[t,x(t)]dt;$$

$$x(a)=x_0.$$

3. Общая задача решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_n(t)x(t) = F(t);$$
$$x(a) = c_0;$$
$$x'(a) = c_1;$$
$$\dots$$
$$x^{(n-1)}(a) = c_{n-1}.$$

Рассмотрим n=2:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = F(t);$$
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \varphi(t);$$
$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \varphi(S)\,dS + C_1;$$
$$\int_0^t dt\int_0^t dt\dots\int_0^t f(t)\,dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-S)^{n-1} f(S)\,dS;$$
$$x(t) = \int_0^t (t-S)\varphi(S)\,dS + C_1 t + C_0.$$

Подставим в исходное дифференциальное уравнение:

$$\varphi(t) + \int_0^t \left[a_1(t) + a_2(t)(t-S)\right]\varphi(S)\,dS = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t).$$

Обозначим

$$k(t,S) = -\left[a_1(t) + a_2(t)(t-S)\right];$$
$$f(t) = F(t) - C_1 a_1(t) - C_1 t a_2(t) - C_0 a_2(t);$$

Интегральное уравнение Вольтера 2-го рода

$$\varphi(t) = \int_0^t k(t,S)\varphi(S) + f(t).$$

Во многих случаях ядро $k(t,S)=k(t\text{-}S)$ (пропорционально разности аргументов), тогда уравнение Вольтера называется интегральным уравнением типа свертки.

Интегральное уравнение Абеля:

$$f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(S)}{\sqrt{x-S}}\,dS .$$

Если неизвестная функция входит и под знак производной и под знак интеграла, то такое уравнение называется интегро-дифференциальное (ИДУ).

1.5. Методы Фредгольма

В начале века Фредгольм наиболее полно исследовал интегро-дифференциальные уравнения.

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b k(t,S)\varphi(S)+f(t).$$

Решение этого уравнения рассматривается как аналог решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. В результате решение получается приблизительным, зависящим от n. Чем больше n, тем больше приближение ([1,4]).

Решение состоит из нескольких этапов:

1. Интеграл заменяется конечной суммой.
2. Весь отрезок [a,b] разбивается на n равных частей $\delta=\dfrac{b-a}{n}$.

3. Внутри каждого интервала j выбирается некоторая точка S_j. Получаем набор функций $\varphi(S_j)=\varphi_j$. Ищем не непрерывную функцию, а набор дискретов S_j.

$$\varphi(t)\cong\lambda\sum_{j=1}^{n} k(t,S_j)\varphi_j\delta+f(t);$$

$$\varphi(S_j)=\lambda\sum_{j=1}^{n} k(S_i,S_j)\varphi_j\delta+f(S_j).$$

Обозначим

$$f(S_i)=f_i,\ k(S_i,S_j)=k_{ij};$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi_i\cong\lambda\delta\sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j+f_i\\ \vdots\end{matrix}\right\}\quad i=1\div n,$$

где n – число линейных алгебраических уравнений.

$$\varphi_i - \lambda\delta\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j = f_i \;;$$

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\delta k_{11} & -\lambda\delta k_{12} & \cdots & -\lambda\delta k_{1n} \\ -k_{21} & 1-\lambda\delta k_{22} & \cdots & -\lambda\delta k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta k_{n1} & -\lambda\delta k_{n2} & \cdots & 1-\lambda\delta k_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda) \neq 0$: система имеет решение при любых f_i и имеется решение интегрального уравнения при любых *f(t)*.

1.6. Резольвента Фредгольма

Пусть мы получили $\varphi(S_j)$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\varphi(t) \cong \lambda\sum_{j=1}^{n} k(t, S_j)\varphi(S_j)\delta + f(t).$$

Или иначе можно считать, что мы получили решение уравнения в следующем обобщенном виде:

$$\varphi(t) \cong f(t) + \lambda\frac{Q(t, S_1, S_2 \ldots S_n, \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

где Q - результат вычисления решения одним из методов.

При $n \to \infty$: $Q(t, S_1 \ldots S_n, \lambda) \to \int_a^b D(t, S, \lambda)\, f(S)\,dS$.

При непрерывном ядре $k(t,S)$ и свободном члене $f(t)$:

$$D_n(\lambda) \to D(\lambda).$$

Резольвента

$$R(t, S, \lambda) = \frac{D(t, S, \lambda)}{D(\lambda)}.$$

Конечное решение интегрального уравнения записывается в очень компактной форме:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b R(t, S, \lambda)\, f(S)\,dS.$$

Резольвента не зависит от свободного члена, а определяется только ядром. Резольвента используется в ситуациях, когда исследуется отклик одного и того же объекта на много различных воздействий (*f(S)*), что позволяет упростить решение ([1, 4, 6]).

$$R = \frac{D(t, s, \lambda)}{D(\lambda)};$$

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\delta K_{11} & \ldots & -\lambda\delta K_{1n} \\ -\lambda\delta K_{21} & \ldots & -\lambda\delta K_{2n} \\ ------ & ------ & ------ \\ -\lambda\delta K_{n1} & \ldots & 1 - \lambda\delta K_{nn} \end{vmatrix} = (-\lambda\delta)^n \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} + \varepsilon & \ldots & K_{2n} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} + \varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda\delta)^n F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon)$ – определитель матрицы – степенная функция с максимально возможной степенью *n*. Следовательно ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(\varepsilon) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\varepsilon + \frac{F''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^n;$$

$$F^{(\ell)}(0) = \frac{dF^{(\ell)}(\varepsilon)}{d\varepsilon^{\ell}}, \text{ при } \varepsilon = 0.$$

При дифференцировании определителя он превращается в сумму определителей, но порядок его уменьшается на единицу.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} = \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{12} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} + \varepsilon & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} + \varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22} + \varepsilon & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} + \varepsilon \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & 0 & K_{1n} \\ K_{21} & 1 & K_{2n} \\ K_{31} & 0 & K_{33} + \varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} + \varepsilon & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} + \varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} + \varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} + \varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha 1 = 1}^{3} \sum_{\alpha 2 = 1}^{3} \begin{vmatrix} K_{\alpha 1 \alpha 2} + \varepsilon & K_{\alpha 1 \alpha 2} \\ K_{\alpha 1 \alpha 2} & K_{\alpha 1 \alpha 2} \end{vmatrix}.$$

$$D_n(\lambda)=1+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-\lambda\delta)^m}{m!}[\sum_{\alpha 1}^{n}...\sum_{\alpha m=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1}+\varepsilon & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2}+\varepsilon & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha m\alpha m}+\varepsilon \end{vmatrix};$$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n}K_{\alpha 1\alpha 2}\delta=\sum_{j=1}^{n}K(S_jS_j)\delta\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b K(S,S)dS,$$

где $K(t,S)$ – след ядра.

Фредгольм показал, что при $n\to\infty$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n}...\sum_{\alpha m=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix}\delta^m\to C_m=$$

$$=\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix}d\alpha_1...d\alpha_m,$$

где $D(\lambda)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}C_m\lambda^m$ – определитель Фредгольма.

Повторяя аналогичные рассуждения мы получим выражения

$$D(t,S,\lambda)=\sum(-1)^m\frac{\lambda^m}{m!}B_m(t,S);$$

$$B_m(t,S)=\int_a^b...\int_a^b\begin{vmatrix} K(t,S) & K(t,\alpha_2) & .... & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,S) & K(\alpha_1,\alpha_1) & .... & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K(\alpha_m,S) & K(\alpha_m,\alpha_1 & .... & K(\alpha_m\alpha_m) \end{vmatrix}d\alpha_1...d\alpha_m;$$

$$C_n=\int_a^b B_{n-1}(t,t)dt;$$

$$B_0=K(t,S),$$

где $D(t,S,\lambda)$ – минор определителя Фредгольма.

$R(t,S,\lambda)=\dfrac{D(t,S,\lambda)}{D(\lambda)}$ – резольвента не зависит от свободного члена, а определяется ядром уравнения.

Все рассматривалось для тех случаев, когда $D(\lambda)\neq 0$. Те значения λ для которых $D(\lambda)\neq 0$ называются регулярными. Те значения λ для которых $D(\lambda)=0$ называются характеристическими.

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,S)\varphi(S)dS+f(t).$$

Предположим, что $f(t)\equiv 0$.

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,S,\lambda)f(S)dS.$$

Рассмотрим два случая:

1. λ-регулярное $\to D(\lambda)\neq 0\to\varphi(t)\equiv 0$.
2. λ-характеристическое$\to D(\lambda)=0\to\varphi(t)\neq 0$.

Пример.

Имеется ядро интегрального уравнения

$$K(t,S)=e^{t-s}.$$

Построить его резольвенту.

$$0\le t\le 1,\ 0\le S\le 1,\ a=0,\ b=1.$$

$$C_i=?,\quad B_i=?$$

$$C_0=1,\quad B_0(t,S)=e^{t-S};$$

$$C_1=\int_0^1 B_0(\alpha_1,\alpha_1)d\alpha_1=1;$$

$$B_1(t,S)=\int_0^1\begin{vmatrix}e^te^S & e^te^{-\alpha 1}\\ e^{\alpha 1}e^{-S} & e^{\alpha 1}e^{-\alpha 1}\end{vmatrix}d\alpha_1=e^t\int_0^1 e^{\alpha 1}\begin{vmatrix}e^{-S} & e^{-\alpha 1}\\ e^{-S} & e^{-\alpha 1}\end{vmatrix}d\alpha=0;$$

$$C_2=\int_0^1 B_1(\alpha_1,\alpha_1)d\alpha_1=0;$$

$$B_k,C_k=0;$$

$$K>1;$$

Остальные $B_k,C_k=0$.

$$D(\lambda)=1-\lambda;$$
$$D(t,S,\lambda)=e^{t-S};$$
$$R(t,S,\lambda)=\frac{e^{t-S}}{1-\lambda};$$
$$\varphi(t)=f(t)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t-S}f(S)dS,$$

где $\lambda_c=1$ – единственное собственное число.

$$\varphi(t)=\int_0^1 e^{t-S}\varphi(S)dS,$$

где $K_c(t,S)=e^{t-S}$ – единственная собственная функция.

1.7. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения вырождено, то решение его гораздо проще ([1, 3]).

$$k(t,S)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)b_j(S).$$

Если ядро такого вида, то оно вырождено.

Предполагается, что функции линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода можно выразить следующим образом:

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^{n}a_j(t)b_j(S)\varphi(S)dS+f(t)=\lambda\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\int_a^b b_j(S)\varphi(S)+f(t)=$$
$$=\lambda\sum_{j=1}^{n}C_ja_j(t)+f(t),$$

где $C_j=\int_a^b b_j(S)\phi(S)dS$.

Эта запись говорит о том, что решение интегрального уравнения сводится к определению константы C_j.

Умножим на b_j и проинтегрируем по t:

$$\underbrace{\int_a^b\varphi(t)b_i(t)dt}_{C_i}=\underbrace{\int_a^b f(t)b_i(t)dt}_{f_i}+\lambda\sum_{j=1}^{n}C_j\underbrace{\int_a^b a_j(t)b_i(t)dt}_{k_{ij}};$$

$$C_i = f_i + \lambda\sum_{j=1}^{n} C_j k_{ij} \;\; ; \;\; \Rightarrow \;\; \begin{cases} C_1 = f_1 + \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{j1} \\ C_2 = f_2 + \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{j2} \\ \vdots \\ C_n = f_n + \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{jn} \end{cases}.$$

Эта запись справедлива для всех индексов.

$$C_i - \lambda\sum_{j=1}^{n} C_j k_{ij} = f_i \;;\; i = 1 \div n;$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $D \neq 0$, то находим решение обычными способами.

Вычислив коэффициенты, подставляем в уравнение.

Пример.

$$\varphi(t) = 1 + \lambda\int_0^1 (t-S)\varphi(S)\,dS\,;$$

$$k(t,S) = t - S;\;\; a_1(t) = t;\;\; a_2(t) = 1;\;\; b_1(S) = 1;\;\; b_2(S) = -S;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda t\int_0^1 \varphi(S)\,dS + \lambda\int_0^1 (-S)\varphi(S)\,dS\;;$$

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(S)\,dS; \quad C_2 = \int_0^1 (-S)\varphi(S)\,dS;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda C_1 t + \lambda C_2.$$

Умножим обе части первого уравнения на b_1 и проинтегрируем по t:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \varphi(t)\,dt = \int\limits_0^1 dt + \lambda C_1\int\limits_0^1 t\,dt + \lambda\int\limits_0^1 dt \\ \int\limits_0^1 (-1)\varphi(t)\,dt = \int\limits_0^1 (-t)\,dt + \lambda C_1\int\limits_0^1 \left(-t^2\right)dt + \lambda C_2\int\limits_0^1 (-t)\,dt \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)-\lambda C_2 = 1 \\ C_1\frac{\lambda}{3}+\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases};$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{2}; & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} \quad ; & 1+\frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1+\frac{\lambda^2}{12}.$$

Это интегральное уравнение всегда имеет решение, так как $D\neq 0$ всегда при действительных λ.

$$C_1 = \frac{12}{12+\lambda^2}; \quad C_2 = -\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2};$$

$$\varphi(t) = \frac{6(2-2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}.$$

Резольвента таких уравнений всегда дробно-рациональная функция.

1.8. Использование вырожденных ядер для приблизительного решения интегральных уравнений

Пусть имеем некоторое интегральное уравнение, у которого ядро *k(t,S)* – вырожденное.

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b k(t,S)\varphi(S)\,dS + f(t).$$

На интервале интегрирования не вырожденное ядро заменяют вырожденным приблизительным. При этом решение получается достаточно близким к истинному решению. Чем ближе приближение, тем точнее решение ([2, 4]).

Используются различные аппроксимации. Проще всего заменять суммой или тригонометрическими функциями.

Пример.

$$\varphi(t) = \int_0^1 t\left(1-e^{tS}\right)\varphi(S)\,dS + e^t - t.$$

Точное решение $\varphi(t)\equiv 1$.

$$k_b(t,S) = -t^2 S - \frac{t^3 S^2}{2} - \frac{t^4 S^3}{6};$$

$$\varphi(t) = e^t - t - 0{,}5t^2 - 0{,}17t^3 - 0{,}04t^4.$$

На интервале [0;1] отклонение от точного решения составляет всего 0,8 %.

1.9. Принцип последовательных приближений («сжатых отображений»)

Строится последовательность функций. Первая функция – произвольная. А потом из нее строится следующая функция, и т.д.

Необходимо выполнение следующих условий:

1) Чтобы в квадрате $a \le t,\ S \le b$ ядро $k(t,S)$ было непрерывно и ограничено.

2) $|k(t,S)|$ всегда не бесконечно;

$$M_0 = \max_{t,S \in a \div b} |k(t,S)|;$$

$$\lambda < \frac{1}{M_0(b-a)}.$$

Если все эти условия выполнены, то ряд последовательных приближений строится по следующему правилу:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi_n(S)\,dS + f(t).$$

Пример.

С помощью рассмотренного метода решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 tS\varphi(S)\,dS.$$

Ядро $K(t,S) = tS$ – функция непрерывная.

$$\max_{t,S \in 0,1} |K(t,S)| = 1 = M_0.$$

Проверяем применимость метода

$$\frac{1}{M_0(b-a)} - 1 > \frac{L}{2} = \lambda.$$

Первую функцию возьмем $\varphi_0(t) = 0$.

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\varphi_0(S)dS = \frac{5}{6}t;$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\frac{5}{6}SdS = \frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6});$$

$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+...+\frac{1}{6^{n-1}}) = t(1-\frac{1}{6^n});$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = t.$$

Удачный выбор приближения может сократить время приближения.

1.10. Применение метода приближенных решений для решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$\varphi(t) = \lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS + f(t)$ – интегральное уравнение Вольтерра.

Эти уравнения можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма, если $K(t,S) = 0$ при $S > t$. Отличие состоит в том, что сравнение с λ не нужно (λ – любое).

Пример.

Найти неизвестную функцию φ:

$$\varphi(t) = t - \int_a^t (t-S)\varphi(S)dS$$

Решение.

Положим $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi_1(t) = t$.

$$\varphi_2(t) = t - \int_a^t (t-S)SdS = t - \frac{t^3}{3!}$$

$$...$$

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \sin t.$$

1.11. Применение метода приближенных решений для решения некоторых видов нелинейных интегральных уравнений

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K\left[t,S,\varphi(S)\right]dS+f(t).$$

Условия применимости метода ([1]):

1. $f(t)$ должна быть непрерывной функцией, $K(t,S,\varphi(S))$ должна быть непрерывной функцией по всем трем аргументам.

2. Ядро должно удовлетворять условиям Липшица:

$$\left|K(t,S,Z_2)-K(t,S,Z_1)\right|\le L\left|Z_2-Z_1\right|,$$

где L – постоянная Липшица.

$$\left|\lambda\right|<\frac{1}{L(b-a)}.$$

L обычно берут минимально возможной.

$$L_{\min}=\min\frac{\left|K(t,S,Z_2-K(t,S,Z_1)\right|}{\left|Z_2-Z_1\right|}.$$

Пример.

Решить интегральное уравнение вида

$$\varphi(t)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+\varphi^2(S)}+1.$$

Условие выполняется:

$$\left|\lambda\right|<\frac{1}{L\left(b-a\right)};$$

$$\varphi_0\left(t\right)=1;\quad \varphi_1\left(t\right)=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+1}dS+1=1;\quad \varphi_2\left(t\right)=1;\quad \varphi_3\left(\mathrm{t}\right)=1.$$

Если ядро *k(t,S,z)* имеет ограниченную производную по *z*, то *L* можно выбрать из условия:

$$\left.\frac{dk}{dz}\right|_{a\le t,S\le b}\le L.$$

1.12. Решение системы интегральных уравнений

Ввести можно по аналогии с алгебраическими уравнениями.

$$\begin{cases} xy + tg\,\dfrac{x}{y} = 1 \\ \ln\left(x+y\right) = 3 \end{cases}.$$

Бывают случаи, когда требуется найти несколько неизвестных функций, которые:

1) Определяются интегральными соотношениями.
2) Еще и определенным образом связаны между собой.

Запись, описывающая их, называется системой интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1\left(t\right) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{1j}\left(t,S\right)\varphi_j\left(S\right)dS + f_1\left(t\right) \\ \varphi_2\left(t\right) = \lambda \sum k_{2j}\left(t,S\right)\varphi_j\left(S\right)dS + f_2\left(t\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_N\left(t\right) = \lambda \sum k_{Nj}\left(t,S\right)\varphi_j\left(S\right)dS + f_N\left(t\right) \end{cases}.$$

Обычно рассматривается $m=N$. В этом случае эффективен следующий метод:

От набора $f_1(t)\ldots f_N(t)$, $a \le t \le b$, переходят к $F(t)$, $a \le t \le a + N(b-a)$.

От набора $\varphi_1 \ldots \varphi_N$ переходят к Φ.

$$k_C\left(t,S\right) = k_{ij}\left[t-\left(i-1\right)\left(b-a\right), S-\left(j-1\right)\left(b-a\right)\right],$$

при

$$\begin{cases} a+\left(i-1\right)\left(b-a\right) \le t < a + i\left(b-a\right) \\ a+\left(j-1\right)\left(b-a\right) \le t < a + j\left(b-a\right) \end{cases}.$$

$$\Phi\left(t\right) = \varphi_i\left[t-\left(i-1\right)\left(b-a\right)\right],$$

на интервале

$$a+\left(i-1\right)\left(b-a\right) \le t < a + i\left(b-a\right).$$

Можно записать одним уравнением всю систему:

$$\Phi(t) = \lambda \int\limits_{a}^{a+N(b-a)} k_C(t,S)\Phi(S)dS + F(t).$$

1.13. Использование линейных операторов

Оператор – это любое действие, преобразующее элементы одного множества в элементы другого множества $E_0 \to E_1$ ([4]).

Оператор называется линейным, если выполняются 2 условия:

1) $A(x+y) = A(x) + A(y)$.

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x);\ \ \alpha - const.$

$y(t) = \int\limits_a^b k(t,S)x(S)dS$ – интегральный оператор Фредгольма над *x*.

Совокупность линейных операторов образует линейное пространство операторов. Оператор, переводящий элементы множества в самого себя ($E \to E$) называется единичным оператором и обозначается *I*. $Ix \to x$. Если обратный оператор существует, то применение его к исходному оператору должно давать единичный оператор: $A^{-1}A=I$. $I+A$ – всегда имеет обратный оператор.

$$S = (I + A)^{-1};$$

$$S(I + A) = I;$$

$$S = (I + A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \ldots.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t) = \lambda\int\limits_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t);$$

$A\varphi = \int\limits_a^b k(t,S)\varphi(S)dS$ – обозначение операции.

В операторной форме исходное интегральное уравнение:

$$U = \lambda A\varphi + f.$$

Перенося $A\varphi$ влево и вынося φ за скобки:

$$(I - \lambda A)\varphi = f.$$

При определенных условиях решение интегрального уравнения имеет вид:

$$\varphi = \left(I - \lambda A\right)^{-1} f.$$

Используя свойство:

$\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f$ – ряд Неймана.

1) ряд должен быть сходящимся.

2) необходимо выполнение неравенства.

$$\lambda < \frac{1}{\left[\max\limits_{t,S \in a \div b} k\left(t,S\right)\right]\left(b-a\right)};$$

$$A^2 f = A\left(Af\right) = \int_a^b k\left(t,S\right)\left[\int_a^b k\left(S,\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau\right] dS = \int_a^b\int_a^b k\left(t,S\right) k\left(S,\tau\right) f\left(\tau\right) dS d\tau =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b k\left(t,S\right) k\left(S,\tau\right) dS\right] f\left(\tau\right) d\tau = \int_a^b k_2\left(t,S\right) f\left(S\right) dS,$$

где $k_2\left(t,\tau\right) = \int_a^b k\left(t,S\right) k\left(S,\tau\right) dS$ – повторное ядро (итерированное ядро).

$$A^3 f = \int_a^b\left[\int_a^b K(t,S) K_2(S,\tau) dS\right] f(\tau) d\tau = \int_a^b K_3,(t,S) f(S) dS;$$

$$K_3(t,S) = \int_a^b K(t,S) K_2(S,\tau) d\tau;$$

$$K_n(t,S) = \int_a^b K(t,S) K_{n-1}(S,\tau) d\tau;$$

$$A^n f = \int_a^b K_n(t,S) f(S) dS;$$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_1(t,S) f(S) dS + \lambda^2 \int_a^b K_2(t,S) f(S) dS +$$

$$+\lambda^3 \int_a^b K_3(t,S) f(S) dS + \ldots = f(t) + \lambda \int_a^b \left[K_1(t,S) + \lambda K_2(t,S) + \lambda^2 K_3(t,S) + \ldots\right] \times$$

$$\times f(s) dS;$$

$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,S,\lambda) f(S) dS$ – нахождение $\varphi(t)$ через резольвенту.

Резольвента определяется следующим образом:

$$R(t,S,\lambda)=K_1(t,S)+\lambda K_2(t,S)+\lambda^2 K_3(t,S)+...$$

$$R(t,S,\lambda)=K(t,S)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)R(\tau,S,\lambda)d\tau\,;$$

$$R(t,S,\lambda)=K(t,S)+\lambda\int_a^b K(\tau,S)R(t,\tau,\lambda)d\tau\,.$$

Для резольвенты справедливо следующее выражение:

$$R(t,S,\lambda_1)-R(t,S,\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b R(t,\tau,\lambda_2)R(\tau,S,\lambda_1)d\tau\,;$$

$$R(t,S,0)=K(t,S)\,;$$

$$\frac{\partial R(t,S,\lambda)}{d\lambda}=\int_a^b R(t,\tau,\lambda)R(\tau,S,\lambda)d\tau\,;$$

Все полученные результаты в этом методе применимы для уравнений Вольтерра.

Примеры.

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^1 tS\varphi(S)dS+f(t);$$

$$K(t,S)=tS\,,\ a=0,\quad b=1;$$

$$\max\left|K(t,S)\right|=1 \quad \text{при} \quad 0\le t,S\le 1\,.$$

Найдем последовательность интегрированных ядер

$$K_1(t,S)=tS\,;$$

$$K_2(t,S)=\int_0^1 K(t,\tau)K(\tau,S)d\tau=\int_0^1 t\tau\tau d\tau=\frac{ts}{3};$$

$$K_3(t,S)=\frac{tS}{3^2}\,;$$

$$K_n(t,S)=\frac{tS}{3^{n-1}}\,;$$

$$R(t,S,\lambda)=ts+\frac{\lambda}{3}tS+\frac{\lambda^2}{3^2}+...+\frac{\lambda^n}{3^n}tS+...+=\frac{3tS}{3-\lambda}\,;$$

Это справедливо при $|\lambda|<3$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^1\frac{3tS}{3-\lambda}f(S)dS\,.$$

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^{t} + \int_{0}^{t} e^{t-S}\varphi(S)dS\,;$$

$$\lambda = 1;$$

$$K_1(t,S) = e^{t-S};$$

$$K_2(t,S) = \int_{S}^{t} e^{t-\tau}e^{\tau-S}d\tau = e^{t-S}(t-S);$$

$$K_3(t,S) = e^{t-S}\ \frac{(t-S)^2}{2!};$$

$$K_n(t,S) = e^{t-S}\ \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$R(t,S,1) = e^{t-S} + \ldots + e^{t-S}\ \frac{(t-S)^{n-1}}{n!} + \ldots + = e^{2(t-S)};$$

$\varphi(t) = e^{t} + \int_{0}^{t} e^{2(t-S)}e^{S}dS = e^{2t}$ – решение интегрального уравнения.

1.14. Интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность

$$K(t,S) = \frac{H(t,S)}{(t-S)^{\alpha}};$$

$$0 < \alpha < 1;$$

$$\int_{0}^{t} \frac{\varphi(S)}{\sqrt{t-S}}\,dS = f(t).$$

Общий вид уравнения:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_{a}^{t} \frac{H(t,S)}{(t-S)^{\alpha}}\varphi(S)dS\,;$$

$$a \le t \le b,\ S < t,\ \alpha \ge \frac{1}{2}.$$

Для решения используют следующие процедуры:

1. Вычисляют интегрированные ядра

$$K_2(t,S);\quad K_3(t,S);$$

$$K_2(t,S)=\int_S^t \frac{H(t,\tau)H(\tau,S)}{(t-\tau)^{\alpha}(t-S)^{\alpha}}=(t-S)^{1-2\alpha}F_2(t,S);$$

$$K_3(t,S)=(t-S)^{2-3\alpha}F_3(t,S);$$

$$K_4(t,S)=(t-S)^{3-4\alpha}F_4(t,S).$$

Рано или поздно мы дойдем до такой итерации (n), где неинтегрируемый компонент станет интегрируемым ([1]).

2. Исходное уравнение приводим к интегральному уравнению с интегрированными ядрами, путем свертывания обеих частей с функцией $\lambda K(t,S)$.

К обеим частям уравнения применяем интегральный оператор вида

$$\lambda\int_a^t K(t,S)(\cdot)dS;$$

$$\lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS=\lambda\int_a^t K(t,S)f(S)dS+\lambda^2\int_a^t K(t,S)[\int_a^S K(S,\tau)\varphi(\tau)d\tau]\times$$

$$\times dS=\lambda\int_a^t K(t,S)f(S)dS+\lambda^2\int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS.$$

$$\lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS=\varphi(t)-f(t);$$

$$\varphi(t)=\lambda^2\int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS+f_2(t);$$

$$f_2(t)=f(t)+\lambda\int_a^t K(t,S)f(S)dS;$$

$$\varphi(t)=\lambda^3\int_a^t K_3(t,S)\varphi(S)dS+f_3(t);$$

$$f_3(t)=f_2(t)+\lambda\int_a^t K(t,S)f_2(S)dS.$$

Будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до того n, которое нашли на 1-м этапе.

$$\varphi(t)=\lambda^n\int_a^t K_n(t,S)\varphi(S)dS+f_n(t).$$

1.15. Уравнение типа свертки

Это такие интегральные уравнения, ядро которых зависит от разности аргументов. Они имеют следующий вид:

$$\varphi(t)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty}k(t-S)\varphi(S)\,dS+f(t).$$

Для решения уравнений типа свертки используется преобразование Фурье в следующей форме:

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt;$$

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

Введем понятие свертка функций. Она представляет из себя следующее:

$$\Psi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)\,f_2(\tau-t)\,dt=f_1*f_2.$$

* – обозначение свертки;

Интегральный оператор Фурье будем обозначать $F(*)$.

$$F(\omega)=F\left[f(t)\right]=Ff.$$

Преобразование Фурье от свертки функций равно произведению отдельных преобразований Фурье от каждой функции:

$$F\left[f_1*f_2\right]=\sqrt{2\pi}F\left[f_1\right]\cdot F\left[f_2\right].$$

Пример.

$$\varphi(t)=\lambda\int k(t-S)\varphi(S)\,dS+f(t).$$

Обозначим

$$F[\varphi]=\Phi;\quad F[f]=F;\quad F[k]=K.$$

Тогда после преобразования Фурье:

$$\Phi(\omega)=\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega)+F(\omega).$$

Отсюда можно найти $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega)=\frac{F(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)}.$$

Взяв обратное преобразование Фурье, мы получаем нашу функцию:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{j\omega t}}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)} d\omega.$$

Пусть $R(t, \lambda)$ – это обратное преобразование Фурье от следующей функции:

$$\frac{K(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)};$$

$$R(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда решение можно найти по формуле:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(t - S, \lambda) f(S) dS.$$

1.16. Применение метода свертки для решения интегральных уравнений 1-го рода

Бывают уравнения типа свертки и 1-го рода, то есть неизвестная функция есть только под знаком интеграла. Здесь также применим этот метод:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t - S) \varphi(S) dS = f(t).$$

Преобразовав, получим:

$$\sqrt{2\pi} K(\omega) \Phi(\omega) = F(\omega).$$

Откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Лапласа можно также применять как и Фурье, но нужно всегда при решении проверять область определения.

Пример.

$$\varphi(t)=t+\int_0^t \sin(t-S)\varphi(S)\,dS.$$

L{}* – так будем обозначать преобразование Лапласа.

Известно:

$$L\{t\}=\frac{1}{p^2};\quad L\{\sin t\}=\frac{1}{p^2+1};\quad L\{\varphi\}=\Phi(p).$$

Взяв преобразование Лапласа от $\varphi(t)$, получим:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{\Phi(p)}{p^2+1};\quad \Rightarrow\quad \Phi(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}.$$

Решение:

$$\varphi(t)=t+\frac{t^3}{3!}.$$

Решение системы интегральных уравнений

Пусть имеем систему *N* интегральных уравнений следующего вида:

$$\varphi(t)=f_i(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^t k_{ij}(t-S)\varphi_j(S)\,dS;\quad i=1\div n.$$

Применим ко всем уравнениям этой системы преобразование Лапласа:

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(p)\Phi_j(p).$$

Решив эту систему алгебраических уравнений в виде набора изображений и найдя от них оригиналы, мы найдем решение:

$$\Phi_i(p)\Rightarrow\varphi_i(t).$$

Пример.

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t \varphi(S)\varphi(t-S)\,dS+f(t).$$

Это нелинейное уравнение типа свертки. Применим преобразование Лапласа к обеим частям этого уравнения:

$$\Phi(p)=\lambda\Phi^2(p)+F(p).$$

Это квадратное уравнение, его решение:

$$\Phi(p)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda F(p)}}{2\lambda}\quad\Rightarrow\quad\phi(t).$$

1.17. Решение интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

Пусть дано следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}}+\dots+a_n\varphi(t)+\sum_{m=0}^{l}\int_0^t k_m(t-S)\left[\frac{d^m\varphi(S)}{dS^m}\right]dS=f(t).$$

Набор начальных условий:

$$\varphi(0)=\varphi_0;\quad \varphi'(0)=\varphi'_0;\quad \dots\quad \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}.$$

Используется следующее свойство преобразования Лапласа:

$$\frac{d^k\varphi}{dt^k}\Rightarrow p^k\Phi(p)-p^{k-1}\varphi_0-p^{k-2}\varphi'_0-p^{k-3}\varphi''_0-\dots-\varphi'^{(k-1)}_0.$$

Применим это к нашему уравнению:

$$\int_0^t k_m(t-S)\varphi^m(S)dS\Rightarrow k_m(p)\left[p^m\Phi(p)-p^{m-1}\varphi_0-\dots-\varphi_0^{(m-1)}\right].$$

Теперь общее уравнение превращается в следующий вид:

$$\Phi(p)\cdot\left[p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n+\sum_{m=0}^{l}k_m(p)p^m\right]=F(p).$$

Отсюда изображение искомой функции:

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\dots+a_n+\sum_{m=0}^{l}k_m(p)p^m}.$$

φ'

Преобразование Меллина

Пусть есть некая функция $f(t)$ и для нее справедливо следующее:

$$\int_0^\infty |f(t)|t^{\sigma-1}dt<+\infty.$$

Для такой функции есть преобразование Меллина:

$$\begin{aligned}F(S)&=\int_0^\infty f(t)t^{S-1}dt\\ f(t)&=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(S)t^{-S}dS\end{aligned},\quad t>0.$$

Преобразование Меллина устанавливает однозначную взаимосвязь между 2-мя функциями. Интеграл берется на комплексной плоскости вверх и вниз ([4]).

Пример.

Гамма-функция. С помощью преобразования Меллина гамма-функция вводится следующим образом:

$$\Gamma(S) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{S-1} dt;$$

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \Gamma(S) t^{-S} dS; \;\; \text{c} > 0.$$

Преобразование Меллина во многом похоже на преобразование Лапласа:

$$\begin{array}{l} \Phi(p) \xrightarrow{\text{Преобразование Лапласа}} \phi(t) \\ \Downarrow \;\; p = S \\ \Phi(p) \xleftarrow{\text{Преобразование Меллина}} f(t) \end{array}.$$

Есть следующая взаимосвязь:

$$\varphi(t) = f\left(e^{-t}\right).$$

1.18. Применение преобразования Меллина для решения интегральных уравнений

$$M\left\{\int_0^{\infty} f(t)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\} = F(S)\Phi(S);$$

$$F(S) = M\left\{f(t)\right\};$$

$$\Phi = M\left\{\varphi(t)\right\}.$$

Это свойство используется для решения интегрального уравнения вида:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}. \qquad (*)$$

Преобразование Меллина используется для решения уравнений типа (∗). Условие применимости этих функций состоит в том, чтобы они допускали от себя преобразование Меллина. Обозначим преобразование Меллина от $f(x)$ через $M\{f(x)\}=F(S)$, а преобразование Меллина от $K(z)$ – $M\{K(z)\}=K(S)$. Функции $F(S)$ и $K(S)$ должны иметь общую область аналитичности. Применим преобразование Меллина к обеим частям уравнения (∗).

$$\Phi(S)=F(S)+K(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S)=\frac{F(S)}{1-K(S)}\to\Phi(t).$$

Пример.

Пусть имеем интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x)=e^{-\alpha x}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad \alpha>0;$$

$$M\left\{e^{-\alpha x}\right\}=\int_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}x^{S-1}dx=\alpha^{-S}\int_{0}^{+\infty}e^{-z}z^{S-1}dz=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}}=F(S)\ , \quad (S>0);$$

$$z=\alpha x;$$

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\Gamma(S)=K(S)\quad , \quad S>0;$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}}+\frac{1}{2}\Gamma(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(S)\right]}\overset{M}{\leftrightarrow}\varphi(t).$$

1.19. Симметричные интегральные уравнения

Симметричными называются интегральные уравнения вида ([1-4]):

$$K(t,S)=K(S,t);$$

$$K(t,S)=t^{2}S^{2}.$$

Если ядро комплексно-значное, то

$$K(t,S)=K^{*}(S,t);$$

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,S)\varphi(S) + f(t);$$

$A\varphi = \int_a^b K(t,S)\varphi(S)$ – линейный оператор под функцией φ.

Если бы $f(t) \equiv 0$, то соответствующее интегральное уравнение стало бы однородным. При этом можно записать следующее: $\varphi = \lambda A\varphi$. Выяснили, что такое однородное уравнение имеет ограниченное число решений. Эти решения представляют собой набор некоторых функций $\{\varphi_c\}$. Они называются собственными функциями. Они однозначно соответствуют собственным числам.

Если мы рассматриваем симметричные ядра, то справедливы следующие свойства:

1. Любое ядро имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Причем все собственные числа действительны.

2. У каждого собственного числа может быть по несколько собственных функций.

3. Собственные функции из различных наборов всегда ортогональны между собой. Хотя внутри набора, они необязательно ортогональны.

В каждом наборе количество функций можно оценить из следующего неравенства:

$$n_{ф} \le \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \left|K(t,S)\right|^2 dtdS.$$

На первом этапе находятся собственные числа и собственные функции уравнения $\varphi = \lambda A\varphi$.

На втором этапе добиваются, чтобы и внутри наборов функции между собой тоже стали ортогональными.

Функции $A(t), B(t)$ называются ортогональными, если

$$\int_a^b A(t)B(t)dt = 0.$$

Функции подвергают процедуре ортогонализации. Процедура состоит в несколько этапов.

1. Выбираем первую функцию, равную $\psi_1 = \varphi_{i1}(t)$. На основании ее формируем следующую

$$\omega_1(t)=\frac{\psi_1(t)}{\sqrt{\int\limits_a^b \psi_1^2(t)dt}}.$$

2. $\psi_2=\varphi_{i2}(t)-\omega_1(t)\int\limits_a^b \omega_1(t)\varphi_{i2}(t)dt$;

$$\omega_2(t)=\frac{\psi_2(t)}{\sqrt{\int\limits_a^b \psi_2^2(t)dt}}.$$

Получаем вторую функцию из нового набора.

3. $\psi_3=\varphi_{i3}(t)-\omega_1(t)\int\limits_a^b \omega_i(t)\varphi_{i3}(t)dt-\omega_2\int\limits_a^b \omega_2\varphi_{i3}dt$;

$$\omega_3(t)=\frac{\psi_3(t)}{\sqrt{\int\limits_a^b \psi_3^2(t)dt}}\to\omega_3(t);$$

...

$$\psi_k=\varphi_{ik}(t)-\omega_1(t)\int\limits_a^b \omega_i(t)\varphi_{ik}(t)dt-\omega_2\int\limits_a^b \omega_2\varphi_{ik}dt-\omega_{k-1}\int\limits_a^b \omega_{k-1}\varphi_{ik-1}dt;$$

$$\omega_k(t)=\frac{\psi_k(t)}{\sqrt{\int\limits_a^b \psi_k^2(t)dt}}\to\omega_3(t),$$

и т.д. пока не дойдем до последней функции из этого набора.

$\int\limits_a^b \omega_i\omega_j dt=0$ – условие ортогональности.

$\int\limits_a^b \omega_i^2 dt=1$ – условие нормированности.

Для удобства сделаем следующие замены:

Для $\lambda\neq 0$:

Поделим все на λ, обозначим $\mu={}^1\!/_\lambda$.

Вводим

$$g(t)=-{}^1\!/_\lambda\, f(t).$$

Наше интегральное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\int\limits_a^b k(t,S)\varphi(S)dS-\mu\varphi(t)=g(t).$$

Или в операторной форме:

$$A\varphi - \mu\varphi = g.$$

Наше исходное уравнение привели к стандартной форме записи для операторного линейного уравнения. Имеется возможность применить все выводы теории линейных операторов.

Можно считать, что спектр оператора состоит из $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_3$. Возможны две ситуации:

Ситуация № 1: Наши конкретные $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ не равны ни одному из собственных чисел, то есть $\mu \neq \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$. Теория линейных операторов сразу дает решение интегрального уравнения в виде следующей формулы:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_j \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t),$$

где $g_i = \int_a^b g(t) \varphi_i(t) dt;$

$\varphi_{jc}(t)$ – собственная функция ядра К.

Ситуация № 2: λ совпадает с одной из собственных чисел $\mu = \mu_k$. Подразумевается, что свободный член не является одной из собственных функций ядра, потому что в противном случае его можно было бы включить в ядро и уравнение стало бы однородным.

Если у собственного числа одна собственная функция, то решение дается следующим уравнением:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j \neq k} \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t) + C\varphi_{ck}(t).$$

То есть формула несколько модифицировалась. Здесь не присутствует та собственная функция, которая соответствует нашему собственному числу. С – произвольная константа, которую нужно определять из других условий.

Когда у собственного числа несколько собственных функций, то в этом случае:

1) нужно проделать процедуру ортоганализации ($\varphi_i \to \omega_i$).

2) формула будет следующая:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j \neq k} \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t) + C_1\omega_1(t) + C_2\omega_2(t) + \ldots + C_m\omega_m(t),$$

где $\omega_1 \div \omega_\mu$ соответствуют λ_k, то есть их появляется несколько и каждый с определенной константой.
Подставив обозначения из прежнего уравнения для решения уравнения с симметричными ядрами имеем:

$$\underline{\lambda \neq \lambda_k:}$$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_j \frac{f_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_{jc}(t) - f(t);$$

$$f_j = \int_a^b f(t) \varphi_j(t) dt;$$

$$\underline{\lambda = \lambda_k:}$$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{j \neq k} \frac{f_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_{jc}(t) - f(t) + C_1\omega_1(t) + C_2\omega_2(t) + \ldots + C_m\omega_m(t).$$

Физический смысл. Собственные числа – это аналог резонансных частот системы, а аналог λ – текучая частота. Амплитуда результирующего колебания описывается второй формулой.

1.20. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным

Некоторые интегральные уравнения можно привести к симметричным и далее воспользоваться полученными результатами ([1, 2]).

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\, p(S) \varphi(S) dS + f(t),$$

где k – ядро действительное симметричное.

Предполагается, что на $[a,b]$ - $p(S) > 0$. Тогда умножим обе части на $\sqrt{p(t)}$ и введем следующее обозначение:

$$\Psi(t) = \lambda \int_a^b L(t,S) \Psi(S) dS + \sqrt{p(t)} f(t).$$

Это стандартная запись интегрального уравнения с симметричным ядром, находится $\Psi(t)$, а потом $\varphi(t)$.

$\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS = f(t)$ – уравнение Вольтерра.

Дополнительное условие:

Для того чтобы решение получилось непрерывным, необходимо чтобы $f(a)=0$. Для решения такого уравнения продифференцируем обе части уравнения по *t*.

$$K(t,t)\varphi(t)+\int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[K(t,S)\right]\varphi(S)dS=\frac{\partial}{\partial t}f(t).$$

Предполагаем, что $K(t,t)\neq 0$.

Обозначим $\frac{\partial}{\partial t}K(t,S)=K_t^{'}(t,S)$ и $\frac{\partial}{\partial t}f(t)=f_t^{'}(t)$.

$$\varphi(t)+\int_a^t \frac{K^{'}(t,S)}{K(t,t)}\varphi(S)dS=\frac{f_t^{'}(t)}{K(t,t)}.$$

Может оказаться, что $K(t,t)\equiv 0$, тогда мы получаем

$$\int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[K(t,S)\right]\varphi(S)dS=\frac{d}{dt}f(t).$$

В этом случае вновь обе части дифференцируются по *t*.

$$K_t^{'}(t,t)\varphi(t)+\int_a^t \frac{\partial^2 K(t,S)}{\partial t^2}\varphi(S)dS=f_t^{''}(t);$$

$$K_t^{'}(t,t)\neq 0.$$

Уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS=f(t). \tag{1}$$

Даже при хорошем ядре уравнение Фредгольма первого рода может не иметь решения. Пусть ядро представляет собой степенную функцию:

$$k(t,S)=a_0(S)t^m+a_1(S)t^{m-1}+\ldots+a_m(S).$$

Не трудно показать, что

$$t^m\int_a^b a_0(S)\varphi(S)dS+t^{m-1}\int_a^b a_1(S)\varphi(S)dS+\ldots+\int_a^b a_m(S)\varphi(S)dS=$$

$$=t^m b_0+t^{m-1}b_1+\ldots+b_m.$$

Поэтому если $f(t)=\sin t$, то при конечном числе m левая часть никогда не будет равна sin*t*. Поэтому уравнение не имеет решения.

Для симметричных ядер можно попытаться искать выход в следующем варианте: теорема Гильберта – Шмидта. По ней требуется, чтобы *f(t)* разлагалась по собственным функциям ядра, то есть чтобы

$$f(t) = \sum_i a_i \varphi_{ic}(t); \tag{2}$$

$$a_i = \int_a^b f(t)\varphi_{ic}(t)\,dt.$$

В этом случае этот метод применим.

Гильберт и Шмидт предложили искать решение в виде разложения собственных функций ядра, но с другими коэффициентами.

$$\varphi(t) = \sum_i c_i \varphi_{ic}(t). \tag{3}$$

Если уравнение (3) подставить в уравнение Фредгольма первого рода (1), сравнить с (2) и вспомнить свойства собственных функций, то получим:

$\dfrac{c_i}{\lambda_i} = a_i$, где λ_i – собственные числа.

Таким образом окончательное решение:

$$\varphi(t) = \sum_i a_i \lambda_i \varphi_{ic}(t).$$

1.21. Использование метода последовательных приближений для решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

Пусть $\lambda_{\min}$ – минимальное по абсолютной величине собственное число. Тогда, если $0 < |\lambda| < 2|\lambda_{\min}|$, то решение можно искать в виде итерационной процедуры следующего вида:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t);$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t) + \lambda\left[f(t) - \int_a^b k(t,S)\varphi_{n-1}(S)\,dS \right].$$

То есть алгоритм упрощенно можно показать так:

1) $k(t,S) \to \{\lambda_i\} \to \lambda_{\min}$.

2) выбор $\varphi_0(t)$ и λ.

3) итерации.

1.22. Метод с использованием производящей функции

Предполагается, что, во-первых, ядро k – симметрично. Во-вторых, что оно представляет собой какую-либо из производящих функций. Функция $G(t,z)$ называется производящей функцией для некой системы исходной функции:

$$G(t,z) \leftarrow \{g_0(z), g_1(z), ...\}.$$

В-третьих, если ее можно представить следующим образом:

$$G(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(z) t^n.$$

И, в-четвертых, все функции являются ортогональными:

$$\int_a^b g_i(z) g_j(z) dz = 0, \quad i \neq j.$$

Решение можно искать в виде:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t).$$

Подставим в наше выражение

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(S) t^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(S)\right] dS =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b g_n(S) g_k(S) dS\right] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n a_n G_n,$$

где $G_n = \int_a^b g_n^2(S) dS$.

Надо найти a_n. Продифференцируем $f(t)$ k раз и подставим $t=0$:

$$\left.\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = C_k a_k G_k k!;$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + ...$$

$$y'(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + ... \Big|_{t=0} = b_1;$$

$$a_k = \frac{\left. f^{(k)}(t)\right|_{t=0}}{C_k G_k k!}.$$

Подставляем в $\varphi(t) = \sum a_k g_k(t)$.

1.23. Нефредгольмовы интегральные уравнения

Мы всегда рассматривали ядра:

$$\int_a^b\int_a^b \left|k\left(t,S\right)\right|^2 dtdS < +\infty.$$

Если это условие не выполняется, то у ядра собственные числа – не набор целых чисел, а непрерывные области и собственные функции – совокупность непрерывных функций.

Пример.

$$\varphi(t) = \lambda\int_{-D}^{D} e^{-|t-S|}\varphi(S)dS\,.$$

Проверим является ли оно фредгольмовым.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(t,S)\right|^2 dtdS = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-S|}dS\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-S)}dS + \int_{t}^{\infty} e^{-2(S-t)}dS\right]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt\cdot 1 = \infty\,.$$

Уравнение не фредгольмовое.

$$\varphi_1(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt}\,,$$

$$l = \sqrt{1-2\lambda}\,,\ \lambda > 0\,.$$

$$\varphi_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos\omega x dx\,.$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi_1(\omega)\cos\omega x dx\,.$$

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\varphi_1(t) + \varphi(t)\right]\cos\omega x dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xtdt\,.$$

$$\psi(t) = \lambda\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xtdt\,.$$

При $\lambda = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|K|^2\, dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos^2 x + dxdt = \infty\,.$$

1.24. Применение преобразования Гильберта для решения интегральных уравнений

Каждая из двух функций может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода. Тогда вторая функция будет решением этого интегрального уравнения. Это используется для решения более сложных интегральных уравнений ([2, 4]).

Обозначим через $f(x) = \mathrm{H}\left[\varphi(t)\right] = \frac{1}{\pi} V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$ преобразование Гильберта над функцией φ. Этот метод используется для решения интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x).$$

С учетом введенного обозначения можно записать

$$\varphi(x) - \lambda\pi\mathrm{H}[\varphi] = f(x). \qquad (*)$$

Применим еще раз к обеим частям уравнения преобразование Гильберта.

$$\mathrm{H}[\varphi] - \lambda\pi\varphi = \mathrm{H}[f]; \qquad \mathrm{H}\{\mathrm{H}[\varphi]\} = -\varphi.$$

Выразим $\mathrm{H}[\varphi]$ и подставим в (*):

$$\varphi - \lambda\pi\mathrm{H}[f] + \lambda^2\pi^2\varphi = f(x).$$

Выразим φ:

$$\varphi\left(1 + \lambda^2\pi^2\right) = f(x) + \lambda\pi\mathrm{H}[f];$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \lambda\pi\mathrm{H}[f]}{1 + \lambda^2\pi^2}; \qquad 1 + \lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Преобразование Гильберта можно применять и в более сложных случаях, когда ядро вида

$$k(x, y) = \frac{1}{y-x} + k_0(x, y);$$

$$\varphi - \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x, y)\varphi(y) dy = f(x).$$

Иногда преобразование Гильберта рассматривают в следующем виде:

$$\begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(t)\, ctg\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \\ \varphi(x) = -\dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \Psi(t)\, ctg\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \end{cases}.$$

1.25. Нелинейные интегральные уравнения

Решение нелинейных интегральных уравнений гораздо сложнее ([1-4]). Ранее, мы рассматривали решение интегрального уравнения вида:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k\left[t, S, \varphi(S)\right] dS + f(t),$$

про которые говорили, что если выполняется условие Липшица: $|\lambda| < \dfrac{1}{L(b-a)}$, то его можно решить с помощью метода последовательного приближения.

Рассмотрим интегральное уравнение Гамерштейна:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t, S)\, \Psi\left[S, \varphi(S)\right] dS + f(t),$$

где $k(t, S)$ – ядро.

Должно выполняться следующее условие:

$$\left| \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \right| < |\lambda|_{\min}.$$

Решение этого интегрального уравнения можно искать методом последовательного приближения. φ_0 выбирается произвольно и строится ряд приближений:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S)\, \Psi\left[S, \varphi_0(S)\right] dS + f(x);$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S)\, \Psi\left[S, \varphi_1(S)\right] dS + f(x);$$

$$\varphi_3(x) = \lambda \int_a^b k(x,S)\,\Psi\left[S, \varphi_2(S)\right] dS + f(x);$$

. . . .

$$\varphi_n(x) = \lambda \int_a^b k(x,S)\,\Psi\left[S, \varphi_{n-1}(S)\right] dS + f(x);$$

$$\varphi_{Ц-�}(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

1.26. Применение вырожденных ядер для решения уравнений Гаммерштейна

Если ядро вырожденное, то есть его можно представить в виде:

$$k(t,S) = \sum_{i=1}^{m} a_i(t)\, b_i(S),$$

то решение зачастую проще.

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(t) \int_a^b b_i(S)\,\Psi\left[S, \varphi(S)\right] dS + f(t);$$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{m} a_i(t) C_i + f(t), \qquad (*)$$

где $C_i = \int_a^b b_i(S)\,\Psi\left[S, \varphi(S)\right] dS.$

Подставим наше выражение (*) в исходное интегральное уравнение:

$$\int_a^b b_j(S)\psi(S, \sum_{i=1}^{m} c_i a_i(S) + f(S))dS = c_j\,,\ j = 1 \div m\,.$$

Здесь функции известны, следовательно интеграл можно найти. Если решение системы, вновь полученных нелинейных алгебраических уравнений существует, то это значит, что существует набор коэффициентов $\left\{c_1^{\Delta} \div c_m^{\Delta}\right\}$, таких, что их подстановка в соответствующее уравнение превращает его в верное тождество $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i^{\Delta} a_i(t) + f(t)$. Может получиться, что таких наборов $\left\{c_1^{\Delta} \div c_m^{\Delta}\right\}$ будет несколько.

Примеры.

1. Пусть имеем интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 t^2 S \varphi^2(t) dt,$$

где $K(t,S) = t^2 S$ – вырожденное ядро, состоящее из одного члена. Следовательно, коэффициент c будет один.

$$c = \int_0^1 S\varphi^2(S) dS \qquad (*)$$

$$\varphi(t) = \lambda c t^2;$$

$$c = \int_0^1 c^2 \lambda^2 S^4(S) dS = \frac{c^2 \lambda^2}{6}.$$

Нетрудно видеть, что решений у этого алгебраического уравнения два:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{6}{\lambda^2}.$$

Поэтому и у интегрального уравнения два решения:

$$\varphi_1(t) \equiv 0$$

$$\varphi_2(t) = \frac{6}{\lambda^2}.$$

2. $\varphi(t) = \int_0^1 a(t) a(S) \varphi(S) \sin\left(\frac{\varphi(S)}{a(S)}\right) dS.$

$a(t) > 0$ на интервале $0 \div 1$.

Проделав аналогичные преобразования можно получить уравнения относительно c.

$$1 = \int_0^1 a^2(S) \sin c dS;$$

$$1 = \sin c \int_0^1 a^2(S) dS.$$

Может оказаться:

а) $\int_0^1 a^2(S) dS < 1.$

б) $\int\limits_0^1 a^2(S)dS > 1$. Тогда,

$$\sin c = \frac{1}{\int\limits_0^1 a^2(S)dS};$$

$$c = \left\{\begin{matrix} \arcsin c = \dfrac{1}{\int\limits_0^1 a^2(S)dS} + 2\pi n \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\int\limits_0^1 a^2(S)dS} + 2\pi n \end{matrix}\right\}.$$

3. $\varphi(t) = 1 + \lambda\int\limits_0^1 \varphi^2(S)dS$.

$$c = \int\limits_0^1 \varphi^2(S)dS;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c. \qquad (*)$$

Подставим в исходное, получим

$$\lambda^2 c^2 + (2\lambda - 1)c + 1 = 0.$$

В отношении c, мы имеем следующее:

$$c = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}.$$

Подставим его в $(*)$, получим

$$\varphi_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Для уравнения Гаммерштейна с невырожденным ядром, можно подобрать вырожденное ядро, которое на интервале интегрирования будет достаточно точно аппроксимировать невырожденное. В этом случае решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно рассматривать как приближенное решение интегрального уравнения с невырожденным ядром.

Контрольные вопросы

1. Какие интегральные уравнения относятся к линейным и почему?
2. Чем различаются интегральные уравнения Фредгольма и интегральные уравнения Вольтера?
3. Чем различаются интегральные уравнения Фредгольма первого и второго рода?
4. Условия существования решения у интегральных уравнений Фредгольма?
5. Какие интегральные уравнения называются однородными?
6. Как можно перейти от интегрального уравнения Вольтера к интегральному уравнению Фредгольма?
7. Привести основные виды нелинейных интегральных уравнений.
8. Что такое «интегро-дифференциальные уравнения»?
9. В чем заключается «классический» метод Фредгольма для решения интегральных уравнений?
10. Что такое «резольвента Фредгольма» и как она используется?
11. В чем преимущества использования резольвенты Фредгольма?
12. Что такое «интегральные уравнения с вырожденным ядром»?
13. В чем заключается упрощение решения интегральных уравнений с вырожденным ядром по сравнению с классическим методом решения интегральных уравнений?
14. Как использовать вырожденные ядра для приблизительного решения интегральных уравнений и какие аппроксимации при этом могут быть использованы?
15. В чем заключается принцип последовательных приближений и в чем состоят условия его применимости?
16. Как использовать метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений Вольтерра?
17. Для решения каких нелинейных интегральных уравнений можно использовать метод последовательных приближений и как это осуществить?

18. Что такое «системы интегральных уравнений» и как от них переходят к одиночному интегральному уравнению?

19. Почему теория линейных операторов моет быть использована для решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтера?

20. Что такое повторные итерированные ядра?

21. Что такое «слабая особенность ядер интегральных уравнений»?

22. Какой вид имеют уравнения типа свертки и какой физический смысл они несут?

23. Какие свойства преобразования Фурье используются при решении интегральных уравнений типа свертки?

24. Как использовать метод свертки для решения интегральных уравнений первого рода?

25. Как решать интегро-дифференциальные уравнения типа свертки?

26. В чем состоит преобразование Меллина, для решения каких интегральных уравнений оно применимо и как это делается?

27. Что такое «симметричные интегральные уравнения» и какой физической ситуации они соответствуют?

28. Какова последовательность операций при решении симметричных интегральных уравнений?

29. Какие интегральные уравнения приводятся к симметричному виду?

30. Что такое «производящая функция» и как она используется для решения интегральных уравнений?

31. Что такое «Нефредгольмовы интегральные уравнения»?

32. Как можно использовать преобразования Гильберта для решен7ия интегральных уравнений?

33. Как можно решать интегральные уравнения Гаммерштейна?

2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

2.1. Метод множителей Лагранжа

Вариационное исчисление – это область математики, занимающаяся нахождением максимумов и минимумов функций ([3, 5-7]). Если находится экстремум при каких-то условиях, то такие задачи называются условными.

$$Z = f(x_1, ..., x_n).$$

Дополнительные условия требуют, чтобы их формализовали (т.е. преобразовали в набор функций относительно x).

$$\left\{\begin{matrix} \varphi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ --------- \\ \varphi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{matrix}\right\}, \text{ при } m<n.$$

Это типовая постановка задачи. Такие задачи решаются двумя способами.

Способ 1.

1. Из одного уравнения связи выражается одна из переменных $x_1 \leftarrow \varphi_1(x_1, ..., x_n)$.

Полученное x_1 подставляется в целевую функцию и в $\varphi_2 ... \varphi_m$.

2. Выражается $x_2 \leftarrow \varphi_2$. Подставляется в f, $\varphi_3 ... \varphi_m$, и т.д. Так делается m раз. Получается $f(x_{n-m}, ..., x_n)$, а условий не остается вообще.

3. Ищется безусловный экстремум и подставляется в обратном порядке в условия связи.

Условия применимости:

1. Необходимо чтобы функции $f\left(x_1 \div x_n\right)$ и $\varphi\left(x_1 \div x_m\right)$ были непрерывные и имели непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$; $i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$.

2. Во всей области определения x, ранг матрицы должен быть не меньше m.

Составляется квадратная матрица.

а) составляется функция Лагранжа, вида

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

где λ_i – неопределенные множители Лагранжа (неизвестные коэффициенты)

б) Составляется n уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \varphi_1 \left(x_1 ... x_n \right) = 0 \\ \varphi_2 \left(x_1 ... x_n \right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m \left(x_1 ... x_n \right) = 0 \end{cases}.$$

Таким образом мы имеем m+n уравнений и m+n неизвестных. Решаем эту систему. Точки, в которых производная функции f по всем аргументам $x_1 ... x_n$ равна нулю, называются стационарными точками. Если одно решение, то он называется глобальным экстремумом. Если несколько решений, то у функции несколько экстремумов. Полученные наборы x указывают координаты экстремума. Но на этом дело не исчерпывается. После этого необходимо проверять каждый экстремум. Возможно 3 варианта:

1) Максимум.

2) Минимум.

3) Седловая точка.

Проверка производится следующим образом:

Строится квадратичная форма

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Delta x_i \Delta x_k\Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^\nabla \\ x_2 = x_2^\nabla \\ \vdots \\ x_n = x_n^\nabla}} .$$

Если в некоторой малой окрестности квадратичная форма

$d^2\Phi > 0$ – то мы нашли максимум,

$d^2\Phi < 0$ – то мы имеем минимум,

$d^2\Phi >< 0$ – седловая точка.

Пример 1

Дана функция

$$z = (x-1)^2 + (y+1)^2 .$$

Найти экстремум при условии

$$\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) = 0; \quad x^\nabla = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y+1) = 0; \quad y^\nabla = -1;$$

$$z_{ex} = z_{\min} = 0.$$

Из условия выразим y:

$$y = 1 - x;$$

$$z = (x-1)^2 + (2-x)^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) + 2(2-x) = 0; \quad x^\nabla = 1,5; \quad y^\nabla = -0,5;$$

$$z_{\min} = 1/2.$$

Примеры 2. *(Способ 2).*

$$f(x, y, z) = xyz;$$

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0;$$

$$\varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0;$$

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - z - 8 = 0 \end{cases};$$

$$\lambda_1 = \frac{11}{32}; \; \lambda_2 = \frac{231}{32}; \; x^{\nabla} = \frac{11}{4}; \; y^{\nabla} = -\frac{5}{2}; \; z^{\nabla} = -\frac{11}{4}; \; f_{ex} = \frac{605}{32};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = z; \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = y; \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = x;$$

$$d^2\Phi = 2xdydz - 2ydxdy + 2zdxdy;$$

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases};$$

$$dy = 0; \quad dx = dz;$$

$$d^2\Phi = 2y^{\nabla} dx^2.$$

При любом знаке *x* квадратичная больше нуля, то есть это минимум.

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 = -5dx^2 < 0.$$

2.2. Функционал

Пусть дан некоторый класс *M* функций *y(x)*. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие некоторое число *J*, то говорят, что в классе *M* определен функционал *J*.

$$J = J\left[y(x)\right].$$

Класс *M*, в котором определен этот функционал, называется областью задания функционала.

Пример 1.

Пусть M – совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[0{,}1]$. Определенный интеграл будет функционалом :

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^1 y(x)\,dx;$$

$$y(x)=c \quad\rightarrow\quad J=c;$$

$$y(x)=e^x \quad\rightarrow\quad J=e-1;$$

$$y(x)=\cos\pi x \quad\rightarrow\quad J=0.$$

Пример 2.

Пусть M – класс функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $x_0\in[a,b]$, тогда функционалом можно считать следующее:

$$J=y'(x_0);\quad a=1;\quad b=3;\quad x_0=2;$$

$$y(x)=x^2 \quad\rightarrow\quad J=4;$$

$$y(x)=\ln(1+x) \quad\rightarrow\quad J=\frac{1}{3}.$$

2.3. Вариации

Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя некоторыми функционалами, обе принадлежат классу M.

$$\delta y=y(x)-y(x_0).$$

Если функция y k-раз дифференцируема, то говорят, про вариацию порядка k.

$$(\delta y)^{(k)}=\delta y^{(k)}(x)=y^{(k)}(x)-y^{(k)}(x_0).$$

Говорят, что функции $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле нулевого порядка, если на рассмотренном отрезке $[a,b]$ выполняется условие: $|y(x)-y_1(x)|$ – мал. Геометрически это означает, что на рассмотренном участке функции близки по аргументам. Близость первого порядка – если мала не только их разность, но и разность между их производными.

$$\begin{cases} \left|y(x)-y_1(x)\right| \\ \left|y'(x)-y'(x)\right| \end{cases} \text{ - мала.}$$

Близость *k*-го порядка – добавляется условие:

$$\left|y^{(K)}(x)-y_1^{(K)}(x)\right| \text{ - мала.}$$

Вывод. Если выполняется близость *k*-го порядка, то выполняется и близость предыдущего порядка.

Пример.

Имеются кривые $y(x)=\frac{\sin^2}{n}$ и $y_1(x)\equiv 0$. Рассмотрим их на интервале $[0,\pi]$. Можно утверждать, что они близки в смысле нулевого порядка при больших n.

$$\left|y(x)-y_1(x)\right|=\left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

А в смысле первого порядка близости нет.

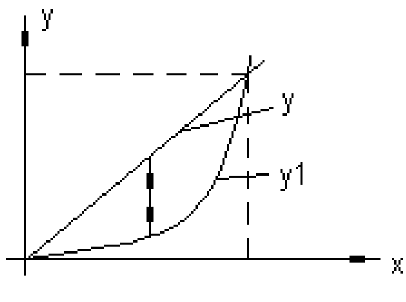
$$\left|y'(x)-y_1'(x)\right|=n\left|\cos n^2 x\right|;$$

$$x=\frac{2\pi}{n^2}.$$

Расстоянием между кривыми $y=f(x)$, $y_1=f_1(x)$ на отрезке $a\div b$ (считаем обе функции непрерывными) называется неотрицательное число ρ, равное максимуму модуля разности между ними на этом отрезке.

Пример.

Имеются функции $y=x$ и $y_1=x^2$, $a\div b=0\div 1$.



$$\rho_1(x) = y - y_1 = x - x^2;$$

$$\frac{d\rho_1}{dx} = 1 - 2x;$$

$$1 - 2x = 0;$$

$$x = \frac{1}{2};$$

$$\rho = \frac{1}{4}.$$

Расстоянием *n*-го порядка между кривыми называется наибольший из максимумов из следующих величин:

$$|f(x) - f_1(x)|$$

$$|f'(x) - f_1'(x)|$$

$$\ldots$$

$$\left|f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x)\right|,$$

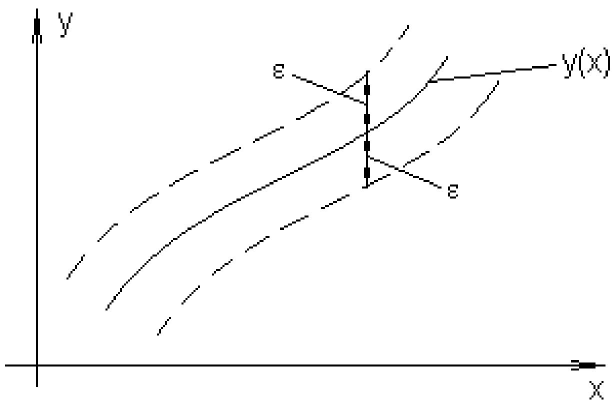
на отрезке $[a,b]$.

$$\rho_n = \rho_n\left[f(x), f_1(x)\right] = \max_{0\le k\le n}\max_{a\le x\le b}\left|f^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x)\right|.$$

ε окрестностью *n*-го порядка кривой $y(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется совокупность кривых $f_1(x)$, расстояние *n*-го порядка которых от исходной кривой $y(x)$ меньше ε.

$$\rho_n = \rho_n\left[y(x), f_1(x)\right] < \varepsilon.$$

Окружность нулевого порядка называется сильной окружностью. Окружность первого порядка – слабой окружностью. Физический смысл сильной окружности – это совокупность всех непрерывных кривых, которые можно здесь провести.



Функционал $J[y(x)]$ в классе функций M называется непрерывным, при $y = y_0(x)$, в смысле близости n-го порядка, если для любого ε, можно подобрать такое число $\eta > 0$, чтобы выполнялось условие:

$$\rho_n\left[y(x), y_0(x)\right] < \eta;$$

$$\left|J[y(x)] - J[y_0(x)]\right| < \varepsilon.$$

В противном случае, он разрывный. Функционал называется линейным, если для него справедливы все свойства линейных операторов.

2.4. Простейшая задача вариационного исчисления

Данная вариационная задача является базовой для последующих подходов ([3, 5-7])

$$J[y] = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx,$$

где F – известная функция;

y – неизвестная, кусочно-гладкая функция.

Требуется найти минимум этого функционала, среди всех кусочно-гладких функций y.

Условия:

1. Функция F должна соединять точки x_1 и x_2.

2. Необходимо чтобы $F(x, y, y') = F(X, Y, Z)$ была непрерывна по всем трем аргументам, а также чтобы были непрерывны все производные до третьего порядка.

Минимум (максимум) функционала $J[y]$, достигаемый в сильной (слабой) окрестности функции $y_0(x)$ называется сильным (слабым) минимумом (максимумом) функционала $J[y]$. Экстремум функционала $J[y]$ по всей совокупности функций y на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

2.5. Необходимое условие экстремума. 1-я и 2-я вариации функционала

Пусть $\eta(x)$ – некая произвольная кусочно-гладкая функция, которая удовлетворяет условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Тогда введем функцию

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

где α – некоторый параметр.

Тогда совокупность всех возможных функций $\tilde{y}(x)$ описывает слабую окрестность функции *y*.

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, \tilde{y}, y^{'})dx.$$

Примем во внимание, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(x) = y(x_1) = y \\ \tilde{y}(x_2) = y(x_2) = y_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, y + \alpha\eta, y^{'} + \alpha\eta^{'})dx = \Phi(\alpha).$$

Показано, что $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(\alpha)}{\partial\alpha} = 0, & \text{при } \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial^2\Phi(\alpha)}{\partial\alpha^2} \geq 0, & \text{при } \alpha = 0 \end{cases};$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int_{x1}^{x2} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta + \frac{\partial}{\partial(y^{'})} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta \right] dx = 0.$$

Производная $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ в точке $\alpha = 0$ называется первой вариацией функционала $J[y]$ и обозначается

$$\delta J = \frac{d\Phi}{d\alpha}|_{\alpha=0}.$$

Вторая производная называется второй вариацией.

$$\delta^2 J = \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}|_{\alpha=0}.$$

Для того чтобы найденная функция y давала минимум (максимум) $J[y]$ необходимо чтобы

$$\begin{cases} \delta J = 0 \\ \delta^2 J > 0 - \text{минимум} \\ \delta^2 J < 0 - \text{максимум} \end{cases}.$$

Если выражение (*) проинтегрировать по частям, то получим:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial (y')} - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx \right] \eta' dx = 0.$$

Это выражение мы получили для произвольных η. Из этого следует что

$$F_{y'} - \int_{x_1}^{x} F_y dx \equiv C.$$

Это уравнение Эйлера – Лагранжа в интегральной форме.

$$\frac{\partial F}{\partial (y')} = F_{y'}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_y;$$

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0. \qquad (**)$$

Выражение (**) является основным уравнением вариационного исчисления. Оно же является первым необходимым экстремумом.

Гладкая функция *y(x)*, являющаяся решением этого уравнения называется экстремальной. Экстремали называют также лагранжевыми кривыми. Экстремаль, удовлетворяющая (**), удовлетворяет:

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] - F_x = 0.$$

Кроме этого, применяется развернутая форма записи:

$$y'' F_{yy'} + y' F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0;$$

$$F_{y'y'} = \frac{d}{d(y')}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F_{y'y} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F(x, y, y') = F(X, Y, Z).$$

Хотя аргументы и связаны между собой, но когда мы производим дифференцирование по одному из аргументов, считаем, что он независимый.

Замечания.

1. Эта формула дает решение с точностью до двух констант, а они определяются из граничных условий.
2. Может оказаться, что при конкретных граничных условиях нет решений или бесконечное множество.

Примеры.

1) Дан функционал:

$$J\left[y(x)\right]=\int_1^2\left[y'^2-2xy\right]dx,\ y(1)=0,\ y(2)=-1;$$

$$F\left(x,y,y'\right)=y'^2-2xy;$$

$$F_{y'}=\frac{d}{d\left(y'\right)}F=2y';$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(2y'\right)=2y'';\ \ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=-2x;\ \ -2x-2y''=0;\ \ y+x=0;$$

$$y=-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases}C_1+C_2=\dfrac{1}{6}\\ 2C_1+C_2=\dfrac{2}{6}\end{cases};$$

$$C_1=\frac{1}{6};\ \ C_2=0;\ \ y=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right).$$

2) Найти экстремум функционала:

$$J\left[y(x)\right]=\int_1^3\left(3x-y\right)y\,dx.$$

Граничные условия:

$y(1)=1;\ y(3)=4{,}5.$

Уравнения Эйлера, в этом случае будут следующими:

$$3x-2y=0;$$

$$y(x)=1{,}5x.$$

Не трудно убедиться, что полученная экстремаль не удовлетворяет первому граничному условию. Значит задача решений не имеет.

3) Найти экстеремаль функционала:

$$J\left[y(x)\right] = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right) dx.$$

$y(0)=1;\ y(2\pi)=1;\ y''+y=0;$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y = \cos x + C \sin x.$$

Экстремалью являются все эти функции при любом C. То есть имеем бесконечное множество решений.

2.6. Теорема Вейерштрасса – Эрдмана

Пусть $y(x)$ – решение уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Тогда, если F имеет частные производные до 2-го порядка включительно, то во всех точках, где выполняется $\dfrac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$, функция $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную, а значит в этой точке нет излома. Если $\dfrac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = 0$, то в этой точке излом. Линии составленные из кусков экстремалей, удовлетворяющие условию $\dfrac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$ называются ломаными экстремалями.

Условие Лежандра. Во всех точках линии $y(x)$, доставляющей минимум функционалу J, должно выполняться условие:

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ – минимум.

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ – максимум.

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

Условие Вейерштрасса: Если y – минимум (максимум), то

$$F(x, y, z) - F(x, y, y') - (z - y') F_{y'}(x, y, y') \geq 0,\ (\leq 0),$$

для произвольных z во всех точках этого интеграла.

2.7. Случаи упрощения или понижения порядка уравнения Эйлера

$F\left(x, y, y'\right)$.

Ситуация № 1.

F не зависит от y'.

$$F_y = 0.$$

Возможности здесь меньше. Поэтому часто возникают ситуации, когда из-за граничных условий нет решения.

Пример.

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^{\pi/2} y(2x-y)\,dx,\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ 2x-2y=0,\ y=x.$$

Ситуация №2.

$$F\left(x, y, y'\right)=M\left(x,y\right)+N\left(x,y\right)y'.$$

Уравнение Эйлера превращается в более простое:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0.$$

Бывают ситуации, когда в какой-то области это уравнение тождественно равно нулю. Это означает, что в пределах этой области функция $J[y]$ – постоянна.

Пример.

$$J\left[y(x)\right]=\int_a^b \left(y^2+2yy'x\right)dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B;$$

$$F=y^2+2yy'\left(y^2\right)+y'(2y);$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y;\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0.$$

Ситуация №3.

F зависит только от у.

$$y''Fy'y'=0.$$

Не трудно получить, что общим решением является:

$$y = C_1 x + C_2;$$

где C_1, C_2 – произвольные константы.

Пример.

Найти экстремум функционала.

$$J\left[y(x)\right] = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}\,dx;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B;$$

$$y''(x) = 0; \quad y = C_1 x + C_2; \quad y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

Ситуация №4.

F не зависит от y.

$$F = F(x, y').$$

В этом случае уравнение Эйлера преобразуется:

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(x, y') = 0; \quad F_{y'}(x, y') = C_1.$$

Пример.

Даны 2 точки $A(1,3)$, $B(2,3)$. Среди всевозможных кривых, соединяющих эти 2 точки, найти ту среди которых может достигаться экстремум следующего функционала:

$$J\left[y(x)\right] = \int_a^b y'(x)\left[1 + x^2 y'(x)\right]dx.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx} F_y(x, y') = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0;$$

$$1 + 2x^2 y' = C; \quad y' = \frac{C - 1}{2x^2};$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2; \quad C_1 = \frac{1 - C}{2};$$

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 \end{cases}; \qquad y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

Ситуация №5.

F не зависит от x в явном виде.

$$F = F\left(y, y'\right).$$

В данном случае уравнение примет вид:

$$F_y - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Умножим все на *y’’*:

$$y' F_y - y'^2 F_{y'y} - y'' y' F_{y'y'} = 0;$$

$$F_y = \frac{dF}{dy} = \frac{dy}{dx}\frac{dF}{dx};$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \frac{dy}{dx} F_y + \frac{d\left(y'\right)}{dx} F_{y'} - \frac{d\left(y'\right)}{dx} F_{y'} - y' \frac{dy}{dx} F_{y'y} - y' \frac{d\left(y'\right)}{dx} F_{y'} = 0;$$

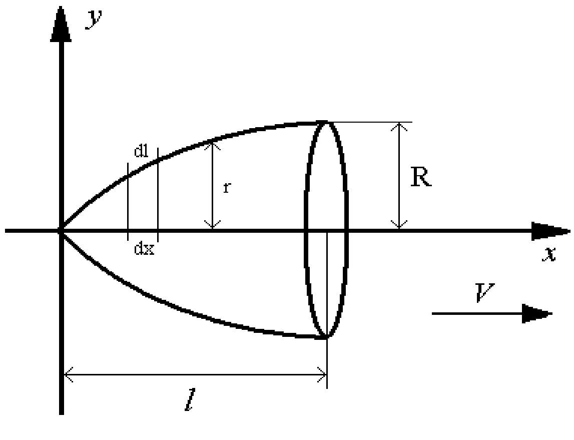
$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0,$$

где $F - y' F_{y'} = 0$.

Это уравнение решается разделением переменных.

Пример.

Поток газа, в нем движется тело. Какова должна быть форма тела, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление?



Если плотность газа мала и мы далеки от скорости звука, то угол падения равен углу отражения.

$$p = 2\rho V^2 \sin^2 \theta$$

$$dl = \left(1 + y'\right)^{1/2} dx; \quad r = y(x).$$

На такое кольцо действует сила:

$$dF = 2\rho V^2 \sin^2 \theta \left[2\pi y \left(1 + y'^2\right)^{1/2} \right] \sin\theta;$$

$$F = \int_0^l dF.$$

Упрощенное решение: $\sin\theta = \dfrac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}} \approx y'$, тогда сила, тормозящее тело

$$F = 4\pi\rho V^2 \int_0^l y'^3\, y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(l) = R.$$

Уравнение Эйлера:

$$y'^3 - 3\frac{d}{dx}\left(yy'^2\right) = 0.$$

Умножим обе части на *y'*. Левая часть становится производной от выражения $y'^3 y$. Интегрируем:

$$y'^3\, y = C; \; y' = \frac{C_1}{\sqrt[3]{y}}; \; y = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4},$$

подставляя начальные условия: $y = R\left(\dfrac{x}{C}\right)^{3/4}$.

2.8. Инвариантность уравнений Эйлера

Если функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F\left(x, y, y'\right) dx,$$

преобразуется посредством замены независимой переменной *x* или одновременной заменой *x* и *y*, то экстремаль по-прежнему находится с помощью уравнений Эйлера, но составленного из преобразованного уравнения ([5, 6]).

Пусть *x* и *y* являются функциями новых переменных.

$$x = x(U,V); \quad y = y(U,V).$$

Причем соблюдается условие взаимной независимости функций:

$$x = x(U,V), y = y(U,V);$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U}; & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U}; & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\int F\left(x, y, y'\right)dx = \int F\left[x(U,V), y(U,V), \frac{\frac{\partial y}{\partial U} + \frac{\partial y}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}}{\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial}{\partial}}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}\right)dU =$$

$$= \int \Phi\left(U,V,V'\right)dU .$$

Определяются формулы для новой экстремали.

$$\Phi_V - \frac{d}{dU}\Phi_{V'} = 0.$$

Она связана со старым экстремумом.

Пример.

Найти экструмум у функционала

$$J\left[y\right] = \int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}y'^2 - e^x y^2\right)dx .$$

Уравнение Эйлера для подинтегральной функции:

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0 .$$

Делаем замену переменных $(x = \ln U;\quad y = V)$. Тогда исходный функционал преобразуется к виду:

$$J\left[V\right] = \int_0^2\left(e^{-\ln U}U^2V'^2 - e^{\ln U}V^2\right)\frac{dU}{U} = \int_0^2\left(V'^2 - V^2\right)dU.$$

Для такого функционала уравнение Эйлера существенно проще:

$$V'' + V = 0;$$

$$V = C_1\cos U + C_2\sin U.$$

Делая обратную подстановку:

$$y = C_1\cos e^x + C_2\sin e^x .$$

2.9. Вариационные задачи в параметрической форме

Во многих практических приложениях для удобства необходимо использовать параметрическое задание линий.

$$\begin{cases} x = \varphi\left(t\right) \\ y = \psi\left(t\right) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1.$$

Предполагается, что φ и ψ – непрерывны и имеют непрерывные производные или хотя бы кусочно-линейные. Необходимо, чтобы обе производные одновременно не обращались в нуль.

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 0.$$

Эллипс может задаваться различными видами параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad -\pi \le t \le \pi,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\left(1 - z^2\right)}{1 + z^2} \\ y = \dfrac{2bz}{1 + z^2} \end{cases}, \qquad -\infty \le z \le +\infty.$$

При неправильном подходе можно найти не истинный экстремум функционала. Зависит не от *y*, а от формы параметрического представления. Чтобы этого не случилось необходимо и достаточно чтобы подинтегральная функция не содержала *t* в явном виде.

$$F\left(x, y, kx', ky'\right) = kF\left(x, y, x', y'\right).$$

Такая функция называется положительная однородная функция первой степени по аргументам *x’,y’*:

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad y = \frac{dy}{dt}.$$

Если некоторая линия L, определена системой:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

где *t* меняется на интервале $t_0 \le t \le t_1$, то эти функции удовлетворяют следующим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dx'}\right] = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dy'}\right] = 0 \end{cases}.$$

Эти уравнения и являются ключом к отысканию функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Каждая из этих уравнений является следствием другого уравнения. Для этих ситуаций существует вейерштрассова форма уравнений Эйлера:

$$\frac{1}{r}=\frac{F_{y'x}-F_{x'y}}{F_1\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}};\qquad F_1=\frac{F_{x'x'}}{y'^2}=\frac{F_{y'y'}}{x'^2}=\frac{F_{y'x'}}{y'x'},$$

где r – радиус кривизны экстремали.

Пример.

Найти экстремаль функционала.

$$J=\int_{0,0}^{x,y} y^2 y'^2\,dx;\qquad \begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, чтобы исключить зависимость от t.

$$y^2y'^2\,dx=y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=y^2\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt=y^2\frac{y'^2_t}{x'^2_t}x'_t\,dt=y^2\frac{y'^2_t}{x'_t}dt.$$

Рассмотрим первое уравнений Эйлера:

$$F_x=\frac{d}{dx}\left(y^2\frac{y'^2}{x'}\right)=0;\quad F_{x'}=\frac{d}{dx'}\left(y^2\frac{y'^2}{x'}\right)=-\frac{y^2y'^2}{x'^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(y^2\frac{y'^2}{x'^2}\right)=0;\qquad \left(y^2\frac{y'^2}{x'^2}\right)=C_1;\ \ C_2=0;;\ y\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1};$$

$$y^2=2\sqrt{C_1}x+C_2.$$

Она должна проходить через соответствующие граничные точки:

$$y^2=\left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)x,$$

где y_1, x_1 – координаты точки.

Это уравнение параболы «в бок».

2.10. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

Формулы, зависящие от производных высших порядков. Минимизация функционала вида:

$$J\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y,y',...,y^{(n)}\right]dx.$$

Функция *F* должна быть дифференцируема по всем переменным n+2 раза. Здесь граничное условие тоже существует. Граничные условия разваливаются на набор:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y'_0 \\ y''(x_0)=y''_0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases};\qquad \begin{cases} y(x_1)=y_1 \\ y'(x_1)=y'_1 \\ y''(x_1)=y''_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)} \end{cases}.$$

Считаем граничные условия на обоих концах заданными. Необходимо решить уравнение Эйлера – Пуассона:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}-...+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}=0.$$

Пример.

Найти экстремаль функционала:

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^1\left(720x^2y-y''\right)dx.$$

Граничные условия:

$$y(0)=0;\, y'(0)=1;$$
$$y(1)=0;\; y'(1)=1.$$

Не трудно получить уравнение Эйлера – Пуассона:

$$720x^2+\frac{d^2}{dx^2}(-2y'')=0;\quad y''=360x^2;$$

$$y=x^6+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4.$$

Подставляем граничные условия:

$$C_1=-2;\; C_2=0;\;\; C_3=1;\;\; C_4=0;$$

$$y(x)=x^6-2x^3+x.$$

2.11. Функционалы, зависящие от m функций

Граничные условия должны задаваться по всем функциям. Обозначим их следующим образом:

$$y_k(x_0)=y_k^{(0)};\ y_k(x_1)=y_k^{(1)};\ k=1\div m.$$

Требуется найти экстремум следующего функционала

$$J[y_1...y_m]=\int\limits_{x0}^{x1}F(x,y_1,...,y_m,y_1^{'},...,y_m^{'})dx.$$

Для того, чтобы это сделать необходимо решить систему:

$$\begin{cases} F_{y1}-\dfrac{d}{dx}F_{y_1^{'}}=0 \\ F_{y1}-\dfrac{d}{dx}F_{y_2^{'}}=0 \\ ---------- \\ F_{y_m}-\dfrac{d}{dx}F_{y_m^{'}}=0 \end{cases}.$$

Пример.

Найти экстремум функционала

$$J[y(x),z(x)]=\int\limits_1^2(y'^2+z^2+z'^2)dx.$$

Граничные условия:

$$y(1)=1;\ y(2)=2;\ z(1)=0;\ z(2)=1.$$

Система дифференциальных уравнений для этого функционала будет иметь вид:

$$\begin{cases} y''=0 \\ z-z''=0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} y=c_1x+c_2 \\ z=c_3e^x-c_4e^{-x} \end{cases}.$$

Для набора c можно получить следующие выражения:

$$c_1=1;$$

$$c_2=0;$$

$$c_3 = \frac{1}{e^2-1}; c_4 = \frac{e^2}{e^2-1}.$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{sh(x-1)}{sh1} \cdot \end{cases}$$

В общем случае может оказаться, что граничных условий не хватает чтобы определить все *c*, тогда в решении некоторые *c* остаются произвольными.

2.12. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Для простоты рассмотрим функционалы функций, зависящих от 2-х переменных.

Пусть функция $Z(x, y)$ зависит от 2-х переменных. Физический смысл $Z(x, y)$ – это некоторая произвольная поверхность. Таким образом, соответствующий функционал можно записать в виде:

$$J[Z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy .$$

Чтобы задача имела решение *F* должна быть трижды дифференцированная функция. Будем считать, что искомая функция *Z* в области *D* непрерывна вместе со всеми производными до 2-го порядка включительно. Пусть область *D* имеет границу *Г*. Здесь мы будем вынуждены задавать граничные условия по всей области *Г*. Для того, чтобы поверхность $Z(x, y)$ обеспечивала экстремум функционала необходимо чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера – Остроградского:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\} = 0,$$

где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$; $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_q\right\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Пример.

Найти экстремум функционала вида

$$J[Z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$$

Решение.

Подинтегральная функция имеет вид

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2.$$

Отсюда нетрудно получить уравнение Эйлера – Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2p) - \frac{\partial}{\partial y}(-2q) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Далее решение стандартное!

Пусть искомая функция Z является функцией N переменных:

$$Z = Z(x_1, x_2, ..., x_N).$$

Имеем

$$J[Z(x_1, x_2 ... x_N)] = \int_D ... \int_D F(x_1, x_2, ... x_N, z, p, p_2, ..., p_N) dx_1 dx_2 ... dx_N.$$

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k},\ k = 1 \div n.$$

Уравнение Эйлера – Остроградского имеет вид:

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{F_{p_i}\right\} = 0;$$

$$F_z - \sum_{i=1}^{n}(F_{x_i p_i} + F_{zp_i} p_i + F_{p_i p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i}) = 0.$$

В этой ситуации Γ не линия, а некоторая многомерная граница многомерной области.

Условный экстремум

Вариационная задача, в которой находится экстремум функционала на искомую функцию называется задачей на условный экстремум ([3, 5-7]).

1. Изопериметрическая задача.

Пусть даны 2 функции: $F(x, y, y'), G(x, y, y')$. Предполагается, что они имеют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков на рассматриваемом интервале $x_0 \le x \le x_1$, при любом y'. Пусть функционал определяется следующим выражением:

$$K[y] = \int\limits_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l, \qquad (*)$$

где l – заданное значение.

Изопериметрическая задача сводится к следующим действиям.

Определяется экстремум функционала J.

$$J[y] = \int\limits_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx \to extr. \qquad (**)$$

При решении такой проблемы используется *теорема Эйлера*:

Если кривая $y = y(x)$ дает условный экстремум функционалу

$$J[y] = \int\limits_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx,$$

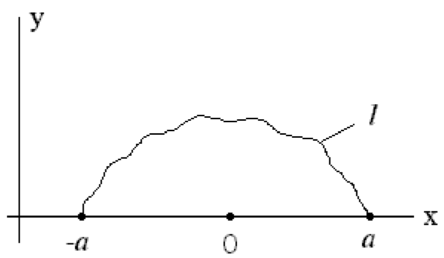
при условии

$$K[y] = \int\limits_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$$

и $y(x)$ не является экстремалью функционала $K[y]$, то существует такая const λ, что кривая $y(x)$ есть безусловная экстремаль функционала

$$L = \int\limits_{x0}^{x1} [F(x, y, y')dx + \lambda G(x, y, y')]dx.$$

Пример.



$y(-a) = y(a) = 0$.

Дана длина линии $l > 2a$.

Требуется найти такую функцию $y(x)$, чтобы площадь, охватываемая кривой *l* была максимальна.

Решение.

Задача сводится к отысканию экстремума выражения:

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx;$$

$$y(-a) = y(0) = 0; K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l;$$

$$H = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1+y'^2};$$

$$L = \int_{-a}^{a} H(x, y, y')dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 1;$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + c_1;$$

$(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2$ – уравнение фрагмента окружности.

2.13. Закон взаимности изопериметрических задач

$$\left.\begin{array}{l} J[y] \to extr \\ K[y] = const \end{array}\right\} y - ?$$

Те же самые экстремали *y* окажутся решением другой задачи.

$$\left.\begin{array}{l} K[y] \to extr \\ J[y] = const \end{array}\right\}$$

Случай 1.2.

Условий несколько.

Если функция $y(x)$ дает функционалу $J_0[y]$ условный экстремум при условиях

$$\begin{cases} J_1[y] = l_1 \\ J_2[y] = l_2 \\ ------ \\ J_k[y] = l_k \end{cases},$$

то существует такой набор const $\{\lambda_i\}$, $i = 0 \div k$, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_k^2 = 1$, что кривая y дает безусловный экстремум для функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} (\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_k F_k) dx;$$

$$J_i[y] = \int_{x0}^{x1} F_i(x, y, y')dx.$$

Случай 1.3.

Изопериметрическими называют и следующие задачи

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_1, y_2 ... y_n, y_1', y_2' ... y_n')dx,$$

при условиях

$$\begin{cases} \int_{x0}^{x1} G_1(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_1 \\ \int_{x0}^{x1} G_2(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_2 \\ ---------------- \\ \int_{x0}^{x1} G_m(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_m \end{cases}.$$

Требования на непрерывность функции такие же.

Решение.

Для получения решения составляют функционал

$$\Phi[y_1 \div y_n] = \int_{x0}^{x1} \left(F_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx.$$

Его решают обычным способом на поиск безусловного экстремума.

Пример.

Найти экстремаль функционала следующего вида:

$$J[y(x), Z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)dx;$$

$$\begin{cases} y(0)=0, & z(0)=0 \\ y(1)=1, & z(1)=1 \end{cases};$$

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)dx = 2;$$

$$\Phi = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)]dx;$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(2y' + 2\lambda y' - \lambda x) = 0 \\ -4 - \dfrac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\lambda z') = 0 \end{cases};$$

Ее решение

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + 2c_1 x}{4(1+\lambda)} + c_2 \\ z(x) = \dfrac{c_3 x}{2(1-\lambda)} + c_4 \end{cases};$$

Расчет граничных условий дает следующее:

$$c_1 = \frac{3\lambda + 4}{2},\ c_2 = 0,\ c_3 = 2(1-\lambda),\ c_4 = 0;$$

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda)} \\ z(x) = x \end{cases};$$

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2 + 46\lambda + 24) = 48(\lambda^2 + 2\lambda + 1);$$

$$\lambda_1 = -\frac{10}{11};$$

$\lambda_1 = -\dfrac{12}{11}$ – не удовлетворяет исходному изопериметрическому условию

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{7x - 5x^2}{2} \\ z(x) = x \end{cases}.$$

2.14. Задача Лагранжа

Это тоже задачи на условный экстремум.

Постановка задачи.

Найти функции $y_1, y_2, ..., y_n$, обеспечивающие экстремум функционала:

$$J\left[y_1 \div y_n\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, ... y_n, y'_1, ... y'_n\right) dx,$$

при граничных условиях:

$$y_j\left(x_0\right) = y_{j0}; \quad y_j\left(x_1\right) = y_{j1}; \quad j = 1 \div n.$$

Дополнительные условия, которые относятся не к функционалам от искомых функций, а к соотношениям между ними:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m = \varphi_m\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) = 0 \end{cases}, \qquad m<n.$$

Для поиска решения пользуются следующей теоремой.

Теорема: функции $y_1, y_2, ..., y_n$, реализующие экстремум функционала J при наборе условий φ_i,, $i=1\div m$, удовлетворяют при соответствующем выборе множителя $\lambda_i(x)$, $i=1\div m$, уравнениям Эйлера для следующего функционала:

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left(x\right)\varphi_i \right] dx.$$

$\varphi_i=0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала J^*, если аргументами функционала считать не только функции $y_1\left(x\right) \div y_n\left(x\right)$, но и функции $\lambda_1\left(x\right) \div \lambda_m\left(x\right)$. Обозначим

$$F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i = \Phi\left(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n\right).$$

Тогда и функции $y_j(x)$ и функции $\lambda_i(x)$ опеределяются из совместного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{y_i} - \dfrac{d}{dx}\Phi_{y'_j} = 0; & (j = 1...n) \\ \varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0; & (i = 1...m) \end{cases}.$$

Пример.

Дана поверхность, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$15x - 7y + z - 22 = 0.$$

На ней даны две точки: $A(1;-1;0)$; $B(2;1;-1)$. Найти уравнение линии кротчайшего расстояния.

Решение.

На любой поверхности, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$ расстояние между точками $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ определяется по формуле:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx;\ y=y(x);\ z=z(x) \text{ – линии поверхности.}$$

Найти min l при граничных условиях A и B и дополнительном условии, описывающем плоскость:

$$x_0=1;\ x_1=2;\ \varphi(x,y,z) \text{ – уравнение плоскости.}$$

Составим вспомогательный функционал вида:

$$J^* = \int_1^2 [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)]dx.$$

Выпишем из него уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} \lambda(x)(-7) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \\ \lambda(x)\cdot 1 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \\ 15x - 7y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$

Умножим 2-е уравнение на 7 и сложим с первым:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0;$$

$$\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1;\quad z'=7y'-15;$$

$$y(x)=C_3x+C_2;\ C_3=2;\ C_2=-3;$$

$$\begin{cases} y(x)=2x-3 \\ z(x)=1-x \end{cases};$$

$$\lambda(x)\equiv 0;\quad l=\sqrt{6}.$$

Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две заданные ее точки.

Вариационные задачи с переменными границами.

Это класс задач, когда пределы интеграла не являются постоянными (5, 6]).

1. Простейшая задача с подвижными концами.

Пусть $F(x,y,y')$ – трижды дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Пусть в плоскости XOY заданы две кривые:

$$y_0=\varphi(x);$$

$$y_1=\psi(x).$$

Рассмотрим функционал:

$$J[y]=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,dx.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых *y(x)* таких, что их концы лежат на этих линиях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:*

Пусть кривая *y(x)* дает экстремум функционалу

$$J[y]=\int_{\gamma}F(x,y,y')\,dx.$$

Среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда $y(x)$ тоже называется экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида:

$$\begin{cases} \left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}=0 \\ \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}=0 \end{cases}.$$

Эти условия трансверсальности и есть способы нахождения экстремали. Решение с использованием этой теоремы находится следующей последовательностью действий:

1. Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера обычным способом, считая границы неподвижными. При этом мы получим $y=f(x,c_1,c_2)$.

2. Используем два уравнения трансверсальности и два новых уравнения.

$$f(x_0,c_1,c_2)=\varphi(x_0);$$
$$f(x_0,c_1,c_2)=\varphi(x_0).$$

Мы получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными.

3. Решая эту систему мы находим const c_1,c_2,x_0,x_1.

Пример.

Найти наикратчайшее расстояние между двумя линиями, которые задаются следующими уравнениями:

$$y=x^2,\ x-y=5.$$

Решение.

Оно сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$J=\int_{x0}^{x1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$$\varphi(x)=x^2;$$
$$\psi(x)=x-5.$$

1. Решаем исходное уравнение Эйлера, считая граничные точки как бы фиксированными: $y = c_1 x + c_2$. Условие трансверсальности для этой ситуации имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0, \quad \text{при } x = x_0 \\ \left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0, \quad \text{при } x = x_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c_1 x_0 + c_1 = x_0^2 \\ c_1 x_1 + c_1 = x_1 - 5 \end{cases};$$

$$y' = c_1;$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+c_1^2} + (2x_0 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1+c_1^2} + (1 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \end{cases};$$

$$c_1 = -1; \quad c_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_0 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = \frac{23}{8}.$$

Экстремум достигается на функции $y = -x + 3/4$. При этом минимальное расстояние равно $l = \int\limits_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+(-1)^2}\,,\ dx = \sqrt{2}x \Big|_{1/2}^{23/8} = \dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

2.15. Задача для 3-мерного пространства

Для этой задачи линии находятся в 3-х мерном пространстве, т.е. необходимо найти функционал вида:

$$J[y,z] = \int\limits_{x0}^{x1} F(x, y, z, y', z')dx.$$

При этом считаем, что хотя бы одна из граничных точек перемещается по заданной кривой. Тогда экстремум функционала J может достигаться лишь на кривых, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}.$$

Для простоты будем считать, что точка *A* закреплена неподвижно, а точка *B* может перемещаться по кривой, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases};$$

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x, y, z).$$

В этом случае условие трансверсальности примет вид:

$$F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_1.$$

Если же и точка *B* перемещается по кривой, то это значит, что положение точки *A* можно определить системой:

$$\begin{cases} y = \tilde{\varphi}(x) \\ z = \tilde{\psi}(x) \end{cases}.$$

Условие трансверсальности для точки А имеет вид:

$$F - (\tilde{\varphi} - y')F_{y'} + (\tilde{\psi} - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_0.$$

Пример.

Найти кратчайшее расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}.$$

Решение.

Задача сводится к отысканию интеграла

$$J[y,z] = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

при условии что x_1 лежит на линии. Можно записать

$$\begin{cases} \varphi(x) = mx + p \\ \psi(x) = nx + q \end{cases}.$$

Общее решение в этом случае имеет вид:

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}+(m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+(n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0,$$

при $x = x_1$

Для облегчения решения учтем, что $y'=c_1, z'=c_3$. Подставляя это в условие трансверсальности и упрощая, получаем $1+mc_1+nc_3=0$. Необходимо учесть, что искомая экстремаль должна проходить через точку m, а следовательно, порождать систему уравнений:

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3x + c_4 \end{cases}.$$

Другой конец перемещается по прямой, значит точка x_1 связана системой:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2 = mx_1 + p \\ c_3x_1 + c_4 = nx_1 + q \end{cases}.$$

Таким образом, имеется 5 уравнений и 5 неизвестных x_1, c_1, c_2, c_3, c_4. Решая эти уравнения, получаем:

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0-p) + n(z_0-q)}{1+n^2+m^2};$$

$$c_1 = \frac{mx_0 + mn(z_0-q) - (1+n^2)(y_0-p)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0};$$

$$c_2 = \frac{nx_0 + mn(y_0-p) - (1+m^2)(z_0-q)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0}.$$

Пусть одна из точек неподвижна $A(x_0, y_0, z_0)$. Другая точка может перемещаться по некоторой поверхности, уравнение которой задается уравнением $z=\varphi(x,y)$. В этом случае условие трансверсальности принимает вид:

$$\begin{cases} \left[F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left[F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y\right]\Big|_{x=x_1} = 0 \end{cases};$$

Эти условия, совместно с уравнением $z=\varphi(x,y)$ дают возможность найти две произвольные константы в уравнении Эйлера, а другие две константы определяются из условия прохождения экстремали через неподвижную точку A.

Пример.

Дана точка $A(1,1,1)$, дана сфера, поверхность которой описывается уравнением $x^2+y^2+z^2=1$. Найти кротчайшее расстояние от точки до сферы.

Решение.

Задача сводится к исследованию на экстремум следующего функционала:

$$J[y,z]=\int_{x_1}^{1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx.$$

Экстремум в общем виде дается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} y=C_1x+C_2 \\ z=C_3x+C_4 \end{cases}.$$

Условие трансверсальности примет вид:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-z'\right)\cdot\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0 \\ \left[\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\cdot\dfrac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]\Bigg|_{x=x_1}=0 \end{cases}$$

.

Отсюда получается следующее:

$$\begin{cases} z_1+C_3x_1=0 \\ C_1z_1-C_3y_1=0 \end{cases},$$

где x_1,y_2,z_1 – координаты точки B. Они нам пока не известны.

$$\begin{cases} y_1=C_1x_1+C_2 \\ z_1=C_3x_1+C_4 \end{cases};$$

$$C_1=1;\ C_2=0;C_3=1;C_4=0.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} y(x) = y = x \\ z(x) = z = x \end{cases}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое «вариационное исчисление» и какого рода задачи оно призвано решать?
2. Что такое «условный экстремум функции» и какие два метода позволяют его найти?
3. В чем заключается метод непосредственного определения условного экстремума функции?
4. В чем заключается метод множителей Лагранжа для определений условного экстремума функции?
5. Каковы условия применимости методов поиска условного экстремума функций?
6. Как определяются минимум, максимум и седловые точки функций?
7. Что такое «функционал»?
8. Что такое «первая и вторая вариации»?
9. Что такое «расстояние между функциями»?
10. В чем состоит «простейшая задача» вариационного исчисления?
11. Последовательность решения простейшей задачи вариационного исчисления?
12. Необходимые условия экстремума?
13. Как использовать теорему Вейерштрасса-Эрдмана?
14. Случаи понижения порядка уравнения Эйлера.
15. В чем состоит инвариантность уравнений Эйлера?
16. Как решаются уравнения Эйлера в параметрической форме и в чем состоят ограничения при решении?
17. В чем состоят особенности решения функционалов, зависящих от производных высших порядков?

18. В чем состоят особенности решения функционалов, зависящих от m функций?

19. В чем состоят особенности решения функционалов, зависящих от функций нескольких независимых переменных?

20. Особенности решения вариационных задач на условный экстремум.

21. В чем заключается закон взаимности изопериметрических задач?

22. Метод Лагранжа при нахождении экстремалей

23. Как решаются вариационные задачи для трехмерного пространства?

24. Какой физический смысл имеют условия трансверсальности?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистратура как форма образования, следующая за бакалавриатом, служит для дальнейшего обучения на основе знаний, полученных бакалаврами. По роду из будущей работы особо актуальными являются знания современного математического аппарата, на котором основаны расчеты при создании новой аппаратуры и анализе эффективности ее работы. Это необходимо для понимания принципов работы оборудования, его особенностей, а также текущих и принципиально достижимых возможностей.

В связи с этим приобретает принципиальную важность научной подготовки магистров получение ими фундаментальных знаний по различным направлениям науки, которые в дальнейшем помогут внедрять и осваивать наиболее современные виды оборудования.

Магистрант в процессе обучения должен освоить методы использования соответствующей справочной литературы и других источников технической информации, включая электронные источники, а также принципов математического аппарата теории сигналов и систем.

При изучении материалов дисциплины наряду с теоретическими знаниями студенты приобретут и соответствующие им практические.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Краснов М. Л. Интегральные уравнения (Введение в теорию) / Главная редакция физико-математической литературы. – М. : Наука, 1975.

2. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения. Задачи и решения. – М. : Наука, 1976.

3. Корн. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1970.

4. Маделунг Э. Математический аппарат физики – М. : Наука, 1978.

5. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М. : Наука, 1973.

6. Цлаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М. : Наука, 1970.

7. Полушин П. А. Вариационное исчисление. Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500. – Владимир : ВлГУ, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПОЛУШИН Петр Алексеевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в печать 26.06.18.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 5,12. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.