Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра радиотехники и радиосистем

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500

Составители
П.А. ПОЛУШИН
Е.А. АРХИПОВ

Владимир 2003

УДК 517.968

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент
Владимирского государственного университета
Л.Н. Фуров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Интегральные уравнения: Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500 / Владим. гос. ун-т; Сост.: П.А. Полушин, Е.А. Архипов. Владимир, 2003. 56 с.

Предназначен для магистров направления 552500. Используется при обучении по дисциплинам «Математический аппарат современной радиотехники» и «История и методология современной радиотехники». Является продолжением изучения интегрального исчисления и решения соответствующих задач и предназначен для дальнейшего углубленного знакомства студентов с современным математическим аппаратом с целью применения в научных исследованиях.

Может использоваться и быть полезен для студентов дневной формы обучения.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.968

Интегральное уравнение – уравнение, где неизвестная функция входит под знак интеграла.

1. Линейные интегральные уравнения

Условимся, что
$f(t)$ – известная функция,
$\varphi(t)$ – неизвестная искомая функция.

Интегральное уравнение называется линейным, если неизвестная функция, входящая в него, линейна.
Классическая запись линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t),$$

где λ – параметр, задающий семейство решений интегральных уравнений;
$k(t,S)$ – ядро интегрального уравнения.
Функция $f(t)$ существует в пределах $a \le t \le b$.
Функция $k(t,S)$ существует в пределах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases}.$$

2. Виды линейных интегральных уравнений

2.1. Уравнения Фредгольма

Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t),$$

a и *b* могут быть конечными или бесконечными.

Условия существования решений уравнений:
f(*t*) – непрерывна на интервале *a, b* и удовлетворяет условию

$$\int_a^b \left| f(t) \right|^2 dt < +\infty,$$

$k(t,S)$ – непрерывна на интервалах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases}$$

и удовлетворяет условию:

$$\int_a^b \int \left| k(t,S) \right|^2 < +\infty.$$

Если ядра удовлетворяют вышеприведенным условиям, то они называются фредгольмовыми. Если $f(t) \equiv 0$, везде на (*a*, *b*), то такое интегральное уравнение называется однородным:

$$0 = \varphi(t) + \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS.$$

В противном случае уравнение – неоднородное.

2.2. Уравнения Вольтерра

Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$\int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным. При определенных ограничениях уравнения Вольтерра рассматривают как уравнения Фредгольма. Если модифицировать ядра следующим образом

$$H(t,S) = \begin{cases} k(t,S), & S \le t \\ 0 \quad , & S > t \end{cases},$$

то можно прийти к записи интегрального уравнения Фредгольма

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b H(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

3. Виды нелинейных интегральных уравнений

3.1. Интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(t) = \int_a^b k[t,S,\varphi(S)]dS.$$

Неизвестная функция входит внутрь ядра, функция *K(x,y,z)* предполагается непрерывной по всем аргументам.

3.2. Уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(t) = \int_a^b k(t,S)F[S,\varphi(S)]dS,$$

где $k(t,S)$ – фредгольмово ядро.

3.3. Уравнения Ляпунова – Лихтенштейна

Они включают в себя существенно нелинейные функции, например:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k_1(t,S)\varphi(S)dS + \mu \int_a^b \int_a^b k_2(t,S,z)\varphi(S)\varphi(z)dSdz.$$

В уравнении могут содержаться члены с еще более высокой степенью нелинейности.

3.4. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра

$$\varphi(t) = \int_a^t k[t,S,\varphi(S)]dS.$$

K(x,y,z) непрерывная функция по всем аргументам.

Примеры.

1. $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{jxy} f(y)dy$.

Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода с ядром

$$k(x,y)=\frac{e^{ixy}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Его решение (получено Фурье в 1811 г.) имеет вид:

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(x)dx.$$

2. К нелинейным интегральным уравнениям Вольтерра приводят решения обыкновенных интегральных уравнений, например (задача Коши):

$$\frac{dx(t)}{dt}=F[t,x(t)]$$

для граничных условий $x(a)=x_0$.

Проинтегрируем обе части этого выражения по t и получим:

$$x(t)=x_0+\int\limits_a^t F[t,x(t)]dt.$$

Выражение представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

3. Общая задача решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_n(t)x(t)=F(t).$$

Начальные условия:

$$x(a)=c_0;$$
$$x'(a)=c_1;$$
$$\dots$$
$$x^{(n-1)}(a)=c_{n-1}.$$

Задача сводится к линейному интегральному уравнению; рассмотрим n = 2:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=F(t).$$

Пусть $\frac{d^2x}{dt^2}=\varphi(t)$, $x(0)=C0$, $x/(0)=C1$;

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^t\varphi(S)dS+C_1.$$

Известно что:

$$\underbrace{\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t}_{n\ \text{раз}} f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-S)^{n-1}f(S)dS.$$

Отсюда: $x(t)=\int_0^t(t-S)\varphi(S)dS+C_1t+C_0$.

После подстановки в исходное дифференциальное уравнение:

$$\varphi(t)+\int_0^t[a_1(t)+a_2(t)(t-S)]\varphi(S)dS=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t)$$

после обозначения:

$$k(t,S)=-[a_1(t)+a_2(t)(t-S)];$$
$$f(t)=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t)$$

получается интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t)=\int_0^t k(t,S)\varphi(S)+f(t),$$

решение которого дает искомую функцию.

Во многих случаях ядро $k(t, S) = k(t-S)$ (пропорционально разности аргументов), тогда уравнение Вольтерра называется интегральным уравнением типа свертки, например, интегральное уравнение Абеля:

$$f(x)=\int_0^x\frac{\varphi(S)}{\sqrt{x-S}}dS.$$

Если неизвестная функция входит и под знак производной, и под знак интеграла, то такое уравнение называется интегро-дифференциальным (ИДУ).

4. Методы Фредгольма

В начале века Фредгольм наиболее полно исследовал интегро-дифференциальные уравнения.

Решение уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t, S)\varphi(S) + f(t)$$

рассматривается как аналог решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. В результате решение получается приблизительным, зависящим от n. Чем больше n, тем больше приближение.

Решение состоит из нескольких этапов:

1. Интеграл заменяется конечной суммой.
2. Весь отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей длиной

$$\delta = \frac{b-a}{n}.$$

3. Внутри каждого интервала j выбирается некоторая точка S_j. Получаем набор функций $\varphi(S_j) = \varphi_j$. Ищется не непрерывная функция, а набор дискретов φ_j

$$\varphi(t) \cong \lambda \sum_{j=1}^{n} k(t, S_j)\varphi_j \delta + f(t);$$

4. t меняется в том же интервале, что и S, поэтому можно выбрать $t_i = S_i$

$$\varphi(S_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} k(S_i, S_j)\varphi_j \delta + f(S_j).$$

Обозначим

$$f(S_i) = f_i\ ,\ k(S_i, S_j) = k_{ij}\ ;$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_i \cong \lambda\delta \sum\limits_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j + f_i \\ \vdots \end{matrix}\right\} \quad i = 1 \div n,$$

где n – число линейных алгебраических уравнений.

5. Перепишем в более привычном виде:

$$\varphi_i - \lambda\delta \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j = f_i.$$

Определитель этой системы

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\delta k_{11} & -\lambda\delta k_{12} & \cdots & -\lambda\delta k_{1n} \\ -k_{21} & 1-\lambda\delta k_{22} & \cdots & -\lambda\delta k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta k_{n1} & -\lambda\delta k_{n2} & \cdots & 1-\lambda\delta k_{nn} \end{vmatrix}.$$ – многочлен относительно λ.

Если $D_n(\lambda) \neq 0$, система имеет решение при любых f_i и имеется решение интегрального уравнения при любых $f(t)$. Решая ее, получают набор $\varphi_j = \varphi_j(S_j)$, который является кусочно-линейной аппроксимацией искомой функции $\varphi_j(S_j)$. Если $D_n(\lambda) = 0$, случай рассматривается особо.

Резольвента Фредгольма

Пусть имеется набор $\varphi(S_j)$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\varphi(t) \cong \lambda \sum_{j=1}^{n} k(t, S_j)\varphi(S_j)\delta + f(t).$$

Полученное решение уравнения можно представить в следующем обобщенном виде:

$$\varphi(t) \cong f(t) + \lambda \frac{Q(t, S_1, S_2 \ldots S_n, \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

где Q – результат вычисления решения системы одним из методов.

При $n \to \infty$, при непрерывном ядре $k(t,S)$ и свободном члене $f(t)$: $Q(t, S_1 \ldots S_n, \lambda) \to \int_a^b D(t, S, \lambda) f(S) dS$.

$$D_n(\lambda) \to D(\lambda).$$

Резольвента Фредгольма – это функция вида:

$$R(t,S,\lambda)=\frac{D(t,S,\lambda)}{D(\lambda)}.$$

С ее использованием конечное решение интегрального уравнения записывается в компактной форме:

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,S,\lambda)f(S)dS.$$

Резольвента не зависит от свободного члена, а определяется только ядром. Резольвента используется в ситуациях, когда исследуется отклик одного и того же объекта на много вариантов различных воздействий ($f(S)$).

$D(\lambda)$ и $D(t,s,\lambda)$ находятся построением их по степеням λ и применением предельного перехода при $n\to\infty$.

Обозначив $K(S_i, S_i) = K_{ij}$, имеем:

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda\delta K_{11} & \ldots & -\lambda\delta K_{1n}\\ -\lambda\delta K_{21} & \ldots & -\lambda\delta K_{2n}\\ -- & -- & --\\ -\lambda\delta K_{n1} & \ldots & 1-\lambda\delta K_{nn}\end{vmatrix}=(-\lambda\delta)^n\begin{vmatrix}K_{11}+\varepsilon & K_{12} & \ldots & K_{1n}\\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon & \ldots & K_{2n}\\ -- & -- & -- & --\\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn}+\varepsilon\end{vmatrix}=$$

$$=(-\lambda\delta)^n F(\varepsilon),$$

где $\varepsilon=-\dfrac{1}{\lambda\delta}$,

$F(\varepsilon)$ – определитель матрицы – степенная функция от ε с максимально возможной степенью n. Следовательно ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(\varepsilon)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}\varepsilon+\frac{F''(0)}{2!}\varepsilon^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^n;$$

$$F^{(\ell)}(0)=\frac{dF^{(\ell)}(\varepsilon)}{d\varepsilon^{\ell}},\ \text{при}\ \varepsilon=0.$$

При дифференцировании определителя он превращается в сумму определителей, но порядок его уменьшается на единицу.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22}+\varepsilon & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & 0 & K_{1n} \\ K_{21} & 1 & K_{2n} \\ K_{31} & 0 & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{23} \\ K_{11} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon \end{vmatrix} =$$

(для удобства можно записать, как):

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha 1=1}^{3}\sum_{\alpha 2=1}^{3}\begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 2}+\varepsilon & K_{\alpha 1\alpha 2} \\ K_{\alpha 1\alpha 2} & K_{\alpha 1\alpha 2} \end{vmatrix}$$

(ε – приравняли нулю)

$$D_n(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-\lambda\delta)^m}{m!} *$$

$$*[\sum_{\alpha 1}^{n}\dots\sum_{\alpha m=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1}+\varepsilon & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2}+\varepsilon & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha m\alpha m}+\varepsilon \end{vmatrix}];$$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n} K_{\alpha 1\alpha 2}\delta = \sum_{j=1}^{n} K(S_j S_j)\delta \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b K(S,S)dS,$$

где $K(t,S)$ – след ядра.

Фредгольм показал, что при $n\to\infty$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n} \dots \sum_{\alpha m=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix} \delta^m \to C_m =$$

$$= \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & \dots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \dots & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix} d\alpha_1 \dots d\alpha_m,$$

где $D(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m$ – определитель Фредгольма.

Повторяя аналогичные рассуждения, можем получить выражения

$$D(t,S,\lambda) = \sum (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(t,S);$$

$$B_m(t,S) = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,S) & K(t,\alpha_2) & \dots & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,S) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \dots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ ---- & ---- & ---- & ---- \\ K(\alpha_m,S) & K(\alpha_m,\alpha_1 & \dots & K(\alpha_m \alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \dots d\alpha_m.$$

Отметим, что

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(t,t)dt;$$

$$B_0 = K(t,S),$$

где $D(t,S,\lambda)$ – минор определителя Фредгольма.

$R(t,S,\lambda) = \frac{D(t,S,\lambda)}{D(\lambda)}$ – резольвента не зависит от свободного члена, а определяется ядром уравнения.

Все рассматривалось для тех случаев, когда $D(\lambda) \neq 0$. Те значения λ, для которых $D(\lambda) \neq 0$ называются регулярными. Те значения λ, для которых $D(\lambda) = 0$, называются характеристическими.

Однородное интегральное уравнение:

$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,S)\varphi(S)dS + f(t)$ получается из неоднородного:

$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int\limits_a^b R(t,S,\lambda) f(S)dS$ при $f(t) = 0$.

Рассмотрим два случая:

1. λ – регулярное $\rightarrow D(\lambda) \neq 0$, тогда $\varphi(t) \equiv 0$.

2. λ – характеристическое $\rightarrow D(\lambda) = 0$. В этом случае возможно решение $t \neq 0$.

<u>Пример.</u>

Имеется ядро интегрального уравнения

$$K(t,S) = e^{t-s}.$$

Построить его резольвенту, при условиях

$$0 \le t \le 1,\ 0 \le S \le 1,\ a = 0,\ b = 1.$$

Находим C_i и B_i

$$C_0 = 1, \quad B_0(t,S) = e^{t-S};$$

$$C_1 = \int\limits_0^1 B_0(\alpha_1, \alpha_1)d\alpha_1 = 1;$$

$$B_1(t,S) = \int\limits_0^1 \begin{vmatrix} e^t e^S & e^t e^{-\alpha 1} \\ e^{\alpha 1} e^{-S} & e^{\alpha 1} e^{-\alpha 1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = e^t \int\limits_0^1 e^{\alpha 1} \begin{vmatrix} e^{-S} & e^{-\alpha 1} \\ e^{-S} & e^{-\alpha 1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = 0;$$

$$C_2 = \int\limits_0^1 B_1(\alpha_1, \alpha_1)d\alpha_1 = 0.$$

Остальные $B_k, C_k = 0$.

Отсюда $$D(\lambda)=1-\lambda;$$

$$D(t,S,\lambda)=e^{t-S};$$

$$R(t,S,\lambda)=\frac{e^{t-S}}{1-\lambda};$$

для $\lambda \neq 1$ решение: $$\varphi(t)= f(t)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t-S} f(S)dS,$$

5. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения вырождено, то решение уравнения гораздо проще.

Вырожденными называются ядра вида:

$$k(t,S)=\sum_{j=1}^{n} a_j(t)b_j(S).$$

Если ядро имеет такой вид, то оно вырождено.

Предполагается, что функции a и b линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода можно выразить следующим образом:

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^{n} a_j(t)b_j(S)\varphi(S)dS+f(t)=\lambda\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\int_a^b b_j(S)\varphi(S)+ f(t)=$$

$$=\lambda\sum_{j=1}^{n} C_j a_j(t)+ f(t), \tag{5.1}$$

где $C_j=\int_a^b b_j(S)\varphi(S)dS$.

Решение интегрального уравнения сводится к определению неизвестных констант C_j.

Умножим обе части на b_j и проинтегрируем по t:

$$\underbrace{\int_a^b \varphi(t)b_i(t)dt}_{C_i} = \underbrace{\int_a^b f(t)b_i(t)dt}_{f_i} + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j \underbrace{\int_a^b a_j(t)b_i(t)dt}_{k_{ij}};$$

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j k_{ij}; \Rightarrow \begin{cases} C_1 = f_1 + \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{j1} \\ C_2 = f_2 + \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{j2} \\ \vdots \\ C_n = f_n + \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} C_j k_{jn} \end{cases}.$$

Эта запись справедлива для всех индексов. Решение системы позволит определить C_i.

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} C_j k_{ij} = f_i;\ i = 1 \div n.$$

Если система неразрешима, то неразрешимо и исходное интегральное уравнение.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} \\ -k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $D \neq 0$, то находим решение обычными способами, т.е. значения коэффициентов C_i.

Вычислив коэффициенты, подставляем в уравнение (5.1) и получаем неизвестную функцию $\varphi(t)$.

Пример. $$\varphi(t)=1+\lambda\int_0^1 (t-S)\varphi(S)dS\,;$$

$$k(t,S)=t-S;\;\; a_1(t)=t;\;\; a_2(t)=1;\;\; b_1(S)=1;\;\; b_2(S)=-S;$$

$$\varphi(t)=1+\lambda t\int_0^1 \varphi(S)dS+\lambda\int_0^1 (-S)\varphi(S)dS\,;$$

$$C_1=\int_0^1 \varphi(S)dS;\quad C_2=\int_0^1 (-S)\varphi(S)dS;$$

$$\varphi(t)=1+\lambda C_1 t+\lambda C_2.$$

Умножим обе части этого уравнения на b_1 и на b_2, проинтегрируем по t:

$$\begin{cases}\int_0^1 \varphi(t)dt=\int_0^1 dt+\lambda C_1\int_0^1 tdt+\lambda\int_0^1 dt\\ \int_0^1 (-1)\varphi(t)dt=\int_0^1 (-t)dt+\lambda C_1\int_0^1 \left(-t^2\right)dt+\lambda C_2\int_0^1 (-t)dt\end{cases};$$

$$\begin{cases}C_1\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)-\lambda C_2=1\\ C_1\dfrac{\lambda}{3}+\left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)C_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases};$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda}{2}; & -\lambda\\ \dfrac{\lambda}{3}\quad ; & 1+\dfrac{\lambda}{2}\end{vmatrix}=1+\frac{\lambda^2}{12}.$$

Это интегральное уравнение всегда имеет решение, так как $D\neq 0$ всегда при действительных λ.

$$C_1=\frac{12}{12+\lambda^2};\quad C_2=-\frac{6+\lambda}{12+\lambda^2};$$

$$\varphi(t)=\frac{6(2-2\lambda t-\lambda)}{12+\lambda^2}.$$

Резольвента таких уравнений всегда дробно-рациональная функция.

6. Использование вырожденных ядер для приблизительного решения интегральных уравнений

Пусть имеем некоторое интегральное уравнение, у которого ядро *k(t,S)* – произвольное невырожденное.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

На интервале интегрирования невырожденное ядро заменяют приближенным вырожденным. При этом приблизительное решение получается достаточно близким к истинному решению. Чем ближе приближение, тем точнее решение.

Используются различные аппроксимации. Чаще всего применяются аппроксимации степенными полиномами или тригонометрическими функциями.

Пример.

$$\varphi(t) = \int_0^1 t\left(1 - e^{tS}\right)\varphi(S)dS + e^t - t.$$

Точное решение $\varphi(t) \equiv 1.$ Получим приближенное решение φП(t) для приближенного ядра

$$k_b(t,S) = -t^2 S - \frac{t^3 S^2}{2} - \frac{t^4 S^3}{6}.$$

Приближенное решение:

$$\varphi(t) = e^t - t - 0{,}5t^2 - 0{,}17t^3 - 0{,}04t^4.$$

На интервале [0;1] отклонение от точного решения составляет всего 0,8 %.

7. Принцип последовательных приближений («сжатых отображений»)

Строится последовательность функций. Первая функция – произвольная. Далее из нее строится следующая функция и т.д.

Необходимо выполнение следующих условий:

1) В квадрате $a \le t, \quad S \le b$ ядро $k(t,S)$ должно быть непрерывным и ограниченым.

2) Обозначим

$$M_0 = \max_{t,S \in a \div b} |k(t,S)|.$$

Должно выполняться условие:

$$\lambda < \frac{1}{M_0(b-a)}.$$

Если это условие выполнено, то ряд последовательных приближений строится по следующему правилу:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi_n(S)dS + f(t).$$

Чем больше номер итерации *n*, тем точнее полученное решение.

<u>Пример.</u>

С помощью рассмотренного метода решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 tS\varphi(S)dS\,.$$

Ядро $K(t,S) = tS$ – функция непрерывная.

$$\max_{t,S\in 0,1}|K(t,S)| = 1 = M_0\,.$$

Проверяем применимость метода

$$\frac{1}{M_0(b-a)} - 1 > \frac{L}{2} = \lambda\,.$$

Оба условия выполняются.

Первую функцию возьмем: $\varphi_0(t) = 0$. Далее:

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\varphi_0(S)dS = \frac{5}{6}t\,;$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\frac{5}{6}SdS = \frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6})\,;$$

$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^{n-1}}) = t(1-\frac{1}{6^n})\,;$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = t\,.$$

Скорость сходимости сильно зависит от начального приближения. Удачный выбор приближения может сократить время решения.

8. Применение метода последовательных приближений для решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS + f(t) \ –$$

интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Подобные уравнения можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма, если $K(t,S) = 0$ при $S > t$. Отличие состоит в том, что сравнение с λ не является необходимым (λ – любое).

<u>Пример.</u>

Найти неизвестную функцию φ, удовлетворяющую уравнению:

$$\varphi(t) = t - \int_a^t (t-S)\varphi(S)dS$$

Решение:

Положим $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi_1(t) = t$.

$$\varphi_2(t) = t - \int_a^t (t-S)SdS = t - \frac{t^3}{3!};$$

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sin t.$$

9. Применение метода приближенных решений для решения некоторых видов нелинейных интегральных уравнений

Пусть имеем уравнение

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K[t, S, \varphi(S)]dS + f(t).$$

Условия применимости метода:

1. $f(t)$ должна быть непрерывной функцией, $K(t, S, \varphi(S))$ должна быть непрерывной функцией по всем трем аргументам.
2. Ядро должно удовлетворять условиям Липшица:

$$\left|K(t, S, Z_2) - K(t, S, Z_1)\right| \le L\left|Z_2 - Z_1\right|,$$

где L – постоянная Липшица, которая удовлетворяет условию:

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}.$$

L обычно берут минимально возможной.

$$L_{\min} = \min\frac{\left|K(t, S, Z_2 - K(t, S, Z_1)\right|}{\left|Z_2 - Z_1\right|}.$$

Тогда решение можно также получить последовательным приближением по формуле:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda\int_a^b K[t, S, \varphi_n(S)]dS + f(t)$$

Начальное приближение $\varphi_0(t)$ – любое.

Пример.

Решить интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+\varphi^2(S)} + 1.$$

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)} = \frac{1}{2},\ L_{\min} = 1;$$

Необходимые условия выполняются.

$$\varphi_0(t) = 1;\ \varphi_1(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+1}dS + 1 = 1;\ \varphi_2(t) = 1;\ \ \varphi_3(\mathrm{t}) = 1.$$

Решение: $\varphi_0(t) = 1$

Если ядро $k(t, S, z)$ имеет ограниченную производную по z, то L можно выбрать из условия:

$$\left|\frac{dk}{dz}\right|_{\substack{a \le t, S \le b, \\ -\infty < z < +\infty}} \le L.$$

10. Решение системы интегральных уравнений

Ввести можно по аналогии с алгебраическими уравнениями. Бывают случаи, когда требуется найти несколько неизвестных функций, которые:

1) Определяются интегральными соотношениями.
2) Определенным образом связаны между собой.

Запись, описывающая их, называется системой интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{1j}(t, S)\varphi_j(S)dS + f_1(t) \\ \varphi_2(t) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{2j}(t, S)\varphi_j(S)dS + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_N(t) = \lambda \sum\limits_{j=1}^{n} k_{Nj}(t, S)\varphi_j(S)dS + f_N(t) \end{cases}.$$

От интервала $a \le t \le b$ переходят к интервалу $a \le t \le a+N(b - a)$.

От набора функций $f_1(t) \dots f_N(t),\ a \le t \le b$, переходят к «единой» функции $F(t)$:

$$F(t) = f_i[t - (i-1)(b-a)].$$

От набора $\varphi_1 \dots \varphi_N$ также переходят к «единой» $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = \varphi_i[t - (i-1)(b-a)],$$

на интервале

$$a + (i-1)(b-a) \le t < a + i(b-a).$$

От набора kij переходят к:

$$k_C(t,S)=k_{ij}[t-(i-1)(b-a),S-(j-1)(b-a)],$$

при

$$\begin{cases} a+(i-1)(b-a)\le t<a+i(b-a) \\ a+(j-1)(b-a)\le S<a+j(b-a) \end{cases}.$$

Тогда можно записать одним уравнением всю систему:

$$\Phi(t)=\lambda\int_a^{a+N(b-a)} k_C(t,S)\Phi(S)dS+F(t).$$

Далее уравнение решается одним из известных способов.

11. Использование линейных операторов

Оператор – это любое действие, преобразующее элементы одного множества в элементы другого множества $E_0 \to E_1$.

Оператор A называется линейным, если выполняются 2 условия:

1) $A(x+y)=A(x)+A(y)$.
2) $A(\alpha x)=\alpha A(x)$; $\alpha -$ const.

$y(t)=\int_a^b k(t,S)x(S)dS$ – интегральный оператор Фредгольма над x.

Совокупность линейных операторов образует линейное пространство операторов. Оператор, переводящий элементы множества в самого себя, ($E\to E$) называется единичным оператором и обозначается I. $Ix\to x$. Если обратный оператор существует, то применение его к исходному оператору должно давать единичный оператор: $A^{-1}A=I$. Оператор $I+A$ – всегда имеет обратный оператор.

$$S=(I+A)^{-1};$$

$$S(I+A)=I;$$

Справедливо разложение (при определенных условиях)

$$S=(I+A)^{-1}=I-A+A^2-A^3+A^4-A^5+\dots$$

Это используется для решения интегральных уравнений.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

Обозначим линейную операцию:

$$A\varphi = \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS .$$

В операторной форме исходное интегральное уравнение:

$$\varphi = \lambda A\varphi + f .$$

Перенося Аφ влево и вынося φ за скобки:

$$(I - \lambda A)\varphi = f .$$

При определенных условиях на норму оператора A решение интегрального уравнения имеет вид:

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f .$$

Известно свойство:

$$\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f + \ldots$$ (ряд Неймана.)

Для этого разложения необходимо:

1) ряд должен быть сходящимся,
2) чтобы выполнялось неравенство:

$$\lambda < \frac{1}{\left[\max\limits_{t,S \in a \div b} k(t,S)\right](b-a)};$$

Рассмотрим степени оператора:

$$A^2 f = A(Af) = \int_a^b k(t,S)\left[\int_a^b k(S,\tau) f(\tau) d\tau\right] dS = \int_a^b\int_a^b k(t,S)k(S,\tau) f(\tau) dS d\tau =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b k(t,S)k(S,\tau) dS\right] f(\tau) d\tau = \int_a^b k_2(t,S) f(S) dS,$$

где $k_2(t,\tau) = \int_a^b k(t,S)k(S,\tau)dS$ – повторное ядро (итерированное ядро).

Аналогично:

$$A^3 f = \int_a^b \left[\int_a^b K(t,S) K_2(S,\tau) dS \right] f(\tau) d\tau = \int_a^b K_3,(t,S) f(S) dS ;$$

$$K_3(t,S) = \int_a^b K(t,S) K_2(S,\tau) d\tau ;$$

$$K_n(t,S) = \int_a^b K(t,S) K_{n-1}(S,\tau) d\tau ;$$

$$A^n f = \int_a^b K_n(t,S) f(S) dS ;$$

тогда

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K_1(t,S) f(S) dS + \lambda^2 \int_a^b K_2(t,S) f(S) dS +$$

$$+ \lambda^3 \int_a^b K_3(t,S) f(S) dS + ... = f(t) + \lambda \int_a^b \left[K_1(t,S) + \lambda K_2(t,S) + \lambda^2 K_3(t,S) + ... \right] \times$$
$$\times f(s) dS .$$

Это можно записать как:

$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,S,\lambda) f(S) dS$ – нахождение $\varphi(t)$ через резольвенту.

Резольвента определяется следующим образом:

$$R(t,S,\lambda) = K_1(t,S) + \lambda K_2(t,S) + \lambda^2 K_3(t,S) + ...$$

Она удовлетворяет таким свойствам:

$$R(t,S,\lambda) = K(t,S) + \lambda \int_a^b K(t,\tau) R(\tau,S,\lambda) d\tau ;$$

$$R(t,S,\lambda) = K(t,S) + \lambda \int_a^b K(\tau,S) R(t,\tau,\lambda) d\tau .$$

Для резольвенты также справедливы следующие выражения:

$$R(t,S,\lambda_1)-R(t,S,\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b R(t,\tau,\lambda_2)R(\tau,S,\lambda_1)d\tau;$$

$$R(t,S,0)=K(t,S);$$

$$\frac{\partial R(t,S,\lambda)}{d\lambda}=\int_a^b R(t,\tau,\lambda)R(\tau,S,\lambda)d\tau;$$

Полученные результаты применимы и для уравнений Вольтерра.

<u>Примеры.</u>

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^1 tS\varphi(S)dS+f(t);$$

$$K(t,S)=tS\ ,\ a=0,\quad b=1;$$

$$\max|K(t,S)|=1\quad \text{при}\quad 0\le t,S\le 1.$$

Условия применимости выполняются.

Найдем последовательность итерированных ядер

$$K_1(t,S)=tS;$$

$$K_2(t,S)=\int_0^1 K(t,\tau)K(\tau,S)d\tau=\int_0^1 t\tau\tau d\tau=\frac{ts}{3};$$

$$K_3(t,S)=\frac{tS}{3^2};$$

$$K_n(t,S)=\frac{tS}{3^{n-1}};$$

$$R(t,S,\lambda)=ts+\frac{\lambda}{3}tS+\frac{\lambda^2}{3^2}+\ldots+\frac{\lambda^n}{3^n}tS+\ldots+=\frac{3tS}{3-\lambda}.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^1\frac{3tS}{3-\lambda}f(S)dS.$$

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{t-S}\varphi(S)dS;$$

$$\lambda = 1;$$

$$K_1(t,S) = e^{t-S};$$

$$K_2(t,S) = \int_S^t e^{t-\tau}e^{\tau-S}d\tau = e^{t-S}(t-S);$$

$$K_3(t,S) = e^{t-S}\frac{(t-S)^2}{2!};$$

$$K_n(t,S) = e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$R(t,S,1) = e^{t-S} + \ldots + e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{n!} + \ldots + = e^{2(t-S)};$$

$$\varphi(t) = e^t + \int_0^t e^{2(t-S)}e^S dS = e^{2t}$$ – решение интегрального уравнения.

12. Интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность

Подобные уравнения имеют ядро вида:

$$K(t,S) = \frac{H(t,S)}{(t-S)^\alpha};$$

$$0 < \alpha < 1;$$

(Например, уравнение Абеля $\int_0^t \frac{\varphi(S)}{\sqrt{t-S}}dS = f(t)$).

Рассмотрим соответствующее уравнение Вольтерра. Общий вид уравнения:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t \frac{H(t,S)}{(t-S)^\alpha}\varphi(S)dS;$$

$$a \le t \le b,\ S < t.$$

При $\alpha \geq \frac{1}{2}$ квадрат ядра – неинтегрируемый, однако решить уравнение можно.

Для решения используют следующие процедуры:

1. Вычисляют итерированные ядра

$$K_2(t,S);\ K_3(t,S), \text{ и т. д.}$$

$$K_2(t,S) = \int_S^t \frac{H(t,\tau)H(\tau,S)}{(t-\tau)^{\alpha}(t-S)^{\alpha}} = (t-S)^{1-2\alpha} F_2(t,S);$$

$$K_3(t,S) = (t-S)^{2-3\alpha} F_3(t,S);$$

$$K_4(t,S) = (t-S)^{3-4\alpha} F_4(t,S).$$

Рано или поздно мы дойдем до такой итерации (n), где неинтегрируемый компонент станет интегрируемым, т. е. $n(1 - \alpha) > 1$.

2. Исходное уравнение приводим к интегральному уравнению с итерированными ядрами путем свертывания обеих частей с функцией $\lambda K(t,S)$. Для этого к обеим частям уравнения применяем интегральный оператор вида

$$\lambda \int_a^t K(t,S)(\cdot)dS;$$

тогда

$$\lambda \int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS = \lambda \int_a^t K(t,S)f(S)dS + \lambda^2 \int_a^t K(t,S)[\int_a^S K(S,\tau)\varphi(\tau)d\tau] \times$$

$$\times dS = \lambda \int_a^t K(t,S)f(S)dS + \lambda^2 \int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS. \qquad (12.1)$$

Но из исходного уравнения

$$\lambda \int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS = \varphi(t) - f(t).$$

Подставим это в (12.1) и получим

$$\varphi(t) = \lambda^2 \int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS + f_2(t),$$

где $f_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,S) f(S) dS$.

Аналогично можно получить:

$$\varphi(t) = \lambda^3 \int_a^t K_3(t,S)\varphi(S)dS + f_3(t),$$

где $f_3(t) = f_2(t) + \lambda \int_a^t K(t,S) f_2(S) dS$.

Будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до того *n*, которое нашли на 1-м этапе. При этом

$$\varphi(t) = \lambda^n \int_a^t K_n(t,S)\varphi(S)dS + f_n(t).$$

Ядро этого уравнения *Kn* – интегрируемое, функцию *fn* можно найти, поэтому полученное уравнение решается обычными методами.

13. Уравнение типа свертки

Это такие интегральные уравнения, ядро которых зависит от разности аргументов. Они имеют следующий вид:

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(t-S)\varphi(S)dS + f(t).$$

13.1. Использование преобразования Фурье в общем случае

Для решения уравнений типа свертки используется преобразование Фурье в следующей форме:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Введем понятие свертка функций. Она представляет из себя следующее:

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t) dt = f_1 * f_2.$$

* – обозначение свертки.

Интегральный оператор Фурье будем обозначать $F(*)$.

$$F(\omega) = F[f(t)] = Ff.$$

Преобразование Фурье от свертки функций равно (с учетом постоянного коэффициента) произведению отдельных преобразований Фурье от каждой функции:

$$F[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int k(t - S)\varphi(S) dS + f(t).$$

и применим к нему преобразование Фурье.

Обозначим $F[\varphi] = \Phi;\ F[f] = F;\ F[k] = K.$

Тогда после преобразования Фурье:

$$\Phi(\omega) = \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)\Phi(\omega) + F(\omega).$$

Отсюда можно найти $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)}.$$

Взяв обратное преобразование Фурье, мы получаем искомую функцию:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{j\omega t}}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)} d\omega.$$

Можно использовать другой путь.

Пусть $R(t, \lambda)$ – это обратное преобразование Фурье от следующей функции:

$$\frac{K(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)};$$

$$R(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi} K(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда решение можно найти по формуле:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(t - S, \lambda) f(S) dS.$$

13.2. Применение метода свертки для решения интегральных уравнений 1-го рода

Пусть необходимо решить уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям и используем свойства свёртки.

Преобразовав, получим:

$$\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega) = F(\omega).$$

Откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Преобразование Лапласа можно также применять как и преобразование Фурье, но нужно всегда при решении проверять область определения.

Пример.

$$\varphi(t) = t + \int_{0}^{t} \sin(t-S)\varphi(S)dS.$$

$L\{*\}$ – обозначим преобразование Лапласа.

Известно:

$$L\{t\} = \frac{1}{p^2}; \quad L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}; \quad L\{\varphi\} = \Phi(p).$$

Применив к уравнению преобразование Лапласа, получим:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{\Phi(p)}{p^2+1}; \;\Rightarrow\; \Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.$$

Решение:

$$\varphi(t) = t + \frac{t^3}{3!}.$$

13.3. Решение системы интегральных уравнений

Пусть имеем систему N интегральных уравнений Вольтерра следующего вида:

$$\varphi(t) = f_i(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_0^t k_{ij}(t-S)\varphi_j(S)dS; \quad i = 1 \div n.$$

Применим ко всем уравнениям этой системы преобразование Лапласа:

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(p)\Phi_j(p).$$

Решив эту систему алгебраических уравнений в виде набора изображений и найдя от них оригиналы, мы получим решение:

$$\Phi_i(p) \Rightarrow \varphi_i(t).$$

13.4. Решение нелинейных интегральных уравнений

Метод применим и для некоторых нелинейных интегральных уравнений. Например:

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^t \varphi(S)\varphi(t-S)dS + f(t).$$

Это нелинейное уравнение типа свертки. Применим преобразование Лапласа к обеим частям этого уравнения:

$$\Phi(p) = \lambda\Phi^2(p) + F(p).$$

Это квадратное уравнение, его решение:

$$\Phi(p) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda F(p)}}{2\lambda}$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, получим $\varphi(t)$.

13.5. Решение интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

Пусть дано следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n} + a_1\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n\varphi(t) + \sum_{m=0}^{l} \int_0^t k_m(t-S)\left[\frac{d^m\varphi(S)}{dS^m}\right]dS = f(t).$$

Обозначим набор начальных условий:

$$\varphi(0)=\varphi_0; \quad \varphi'(0)=\varphi_0'; \quad \ldots \quad \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}.$$

Используется следующее свойство преобразования Лапласа (для произвольной функции φ):

$$\frac{d^k\varphi}{dt^k} \Rightarrow p^k\Phi(p)-p^{k-1}\varphi_0-p^{k-2}\varphi_0'-p^{k-3}\varphi_0''-\ldots-\varphi_0^{(k-1)}.$$

Применим это свойство к нашему уравнению:

$$\int_0^t k_m(t-S)\varphi^m(S)dS \Rightarrow k_m(p)\left[p^m\Phi(p)-p^{m-1}\varphi_0-\ldots-\varphi_0^{(m-1)}\right].$$

Теперь уравнение имеет следующий вид:

$$\Phi(p)\cdot\left[p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum_{m=0}^{l}k_m(p)p^m\right]=F(p).$$

Отсюда изображение искомой функции:

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum\limits_{m=0}^{l}k_m(p)p^m}.$$

Обратное преобразование дает искомую функцию.

13.6. Преобразование Меллина

Пусть есть некая функция $f(t)$ и для нее справедливо следующее:

$$\int_0^\infty |f(t)|t^{\sigma-1}dt<+\infty,$$

где σ – некоторое произвольное число.

Для такой функции известно преобразование Меллина:

$$F(S)=\int_0^\infty f(t)t^{S-1}dt$$

Обратное преобразование

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(S)t^{-S}dS\,,\ t>0.$$

Преобразование Меллина устанавливает однозначную взаимосвязь между 2-мя функциями. Интеграл берется на комплексной плоскости по вертикальной оси.

Пример.

Рассмотрим гамма-функцию. С помощью преобразования Меллина гамма-функция вводится следующим образом:

$$\Gamma(S)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t}t^{S-1}dt;$$

$$e^{-t}=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\Gamma(S)t^{-S}dS;\ \mathrm{c}>0.$$

Преобразование Меллина во многом похоже на преобразование Лапласа:

$$\begin{array}{l}\Phi(p)\xrightarrow{\textit{Преобразование Лапласа}}\varphi(t)\\ \Updownarrow\ p=S \\ \Phi(S)\xleftarrow{\textit{Преобразование Меллина}}f(t)\end{array}.$$

В этом случае между функциями $\varphi(t)$ и $f(t)$ существует взаимосвязь:

$$\varphi(t)=f\left(e^{-t}\right).$$

13.7. Применение преобразования Меллина для решения интегральных уравнений

Используется аналог свёртки:

$$M\left\{\int\limits_{0}^{\infty}f(t)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\}=F(S)\Phi(S);$$

$$F(S)=M\{f(t)\};$$

$$\Phi(S)=M\{\varphi(t)\}.$$

Это свойство используется для решения интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{+\infty} K(\frac{x}{t})\varphi(t)\frac{dt}{t}. \qquad (13.1)$$

Условие применимости состоит в том, чтобы функции допускали преобразование Меллина. Обозначим преобразование Меллина от $f(x)$ через $M\{f(x)\} = F(S)$, а преобразование Меллина от $K(z)$ как $M\{K(z)\} = K(S)$. Функции $F(S)$ и $K(S)$ должны иметь общую область аналитичности. Применим преобразование Меллина к обеим частям уравнения (13.1).

$$\Phi(S) = F(S) + K(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S) = \frac{F(S)}{1 - K(S)}.$$

Обратным преобразованием находим $\varphi(t)$

Пример.

Пусть имеется интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t}, \qquad \alpha > 0.$$

Найдём преобразование Меллина по отдельности от каждой составляющей

$$M\left\{e^{-\alpha x}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}x^{S-1}dx = \alpha^{-S}\int_0^{+\infty} e^{-z}z^{S-1}dz = \frac{\Gamma(S)}{\alpha^S} = F(S), \quad \mathrm{Re}\{S\} > 0.$$

Заменим $z = \alpha x$;

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\} = \frac{1}{2}\Gamma(S) = K(S), \quad \mathrm{Re}\{S\} > 0.$$

Области аналитичности совпадают

$$\Phi(S) = \frac{\Gamma(S)}{\alpha^S} + \frac{1}{2}\Gamma(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S) = \frac{\Gamma(S)}{\alpha^S\left[1 - \frac{1}{2}\Gamma(S)\right]}.$$

Осуществив обратное преобразование Меллина, найдём $\varphi(t)$.

14. Симметричные интегральные уравнения

Симметричными называются интегральные уравнения, для ядер которых справедливо:

$$K(t,S)=K(S,t).$$

Например: $K(t,S)=t^2S^2$.

Если ядро комплексно – значное, то должно выполнятся:

$$K(t,S)=K^*(S,t).$$

Пусть такая функция является ядром уравнения:

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,S)\varphi(S)dS+f(t);$$

$A\varphi=\int_a^b K(t,S)\varphi(S)dS$ – линейный оператор под функцией φ.

Если бы $f(t)\equiv 0$, то соответствующее интегральное уравнение стало бы однородным. При этом можно записать следующее: $\varphi=\lambda A\varphi$. Такое однородное уравнение имеет ограниченное число решений. Эти решения представляют собой набор некоторых функций $\{\varphi_C\}$. Они называются собственными функциями и соответствуют собственным числам ядра – определённым значениям λ.

Для симметричных ядер справедливы следующие свойства:

1. Любое ядро имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Причем все собственные числа действительны.
2. Каждому собственному числу может соответствовать несколько собственных функций (набор собственных функций).
3. Собственные функции из различных наборов всегда ортогональны между собой, хотя внутри набора они необязательно ортогональны.

В каждом наборе количество функций $n_ф$ можно оценить из следующего неравенства:

$$n_ф\le\lambda^2\int_a^b\int_a^b\left|K(t,S)\right|^2 dtdS.$$

Для дальнейшего использования их необходимо ортогонализировать. При этом используется процедура ортогонализации Грама-Шмидта.

На первом этапе находятся собственные числа и собственные функции уравнения $\varphi = \lambda A \varphi$.

На втором этапе добиваются, чтобы и внутри наборов функции между собой тоже стали ортогональными.

Функции $A(t), B(t)$ называются ортогональными, если

$$\int_a^b A(t)B(t)dt = 0.$$

Функции из набора, соответствующего каждому собственному числу, подвергают процедуре ортогонализации. Процедура состоит из нескольких этапов.

1. Выбирается первая функция (нумерация произвольна), равная $\psi_1 = \varphi_{i1}(t)$. На основании ее формируется следующая

$$\omega_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_1^2(t)dt}}.$$

2. $\psi_2 = \varphi_{i2}(t) - \omega_1(t)\int_a^b \omega_1(t)\varphi_{i2}(t)dt$;

$$\omega_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_2^2(t)dt}}.$$

Получаем вторую функцию ω_2 из нового набора.

3. $\psi_3 = \varphi_{i3}(t) - \omega_1(t)\int_a^b \omega_i(t)\varphi_{i3}(t)dt - \omega_2\int_a^b \omega_2\varphi_{i3}dt$;

$$\omega_3(t) = \frac{\psi_3(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_3^2(t)dt}} \to \omega_3(t).$$

Получаем третью функцию ω_3 из набора и т. д.

$$\vdots$$

$$\psi_k = \varphi_{ik}(t) - \omega_1(t)\int_a^b \omega_i(t)\varphi_{ik}(t)dt - \omega_2\int_a^b \omega_2\varphi_{ik}dt - \omega_{k-1}\int_a^b \omega_{k-1}\varphi_{ik-1}dt;$$

$$\omega_k(t) = \frac{\psi_k(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_k^2(t)dt}},$$

Продолжаем, пока не дойдем до последней функции из этого набора.

Для полученных функций справедливо:

$\int_a^b \omega_i\omega_j dt = 0$ – условие ортогональности.

$\int_a^b \omega_i^2 dt = 1$ – условие нормированности.

Для удобства сделаем следующие замены:

(Для $\lambda \neq 0$)

Поделим исходное уравнение на λ, обозначим $\mu = 1/\lambda$, а также

$$g(t) = -1/\lambda\, f(t).$$

Наше интегральное уравнение приобретёт следующий вид:

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS - \mu\varphi(t) = g(t).$$

Или в операторной форме:

$$A\varphi - \mu\varphi = g.$$

Исходное уравнение приведено к стандартной форме записи для операторного линейного уравнения. Имеется возможность применить выводы теории линейных операторов.

Можно считать, что спектр оператора состоит из чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_3$. Возможны две ситуации:

Ситуация №1: Конкретные $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ не равны ни одному из собственных чисел, то есть $\mu \neq \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$. Теория линейных операторов дает единственное решение интегрального уравнения в виде следующей формулы:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_j \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t),$$

где $g_i = \int\limits_a^b g(t) \varphi_i(t) dt;$

$\varphi_{jc}(t)$ – все собственные функции ядра *K*.

Ситуация №2: λ совпадает с одним из собственных чисел λ*к*. При этом $\mu = \mu_k$. Подразумевается, что свободный член не является одной из собственных функций ядра, потому что в противном случае его можно было бы включить в ядро и уравнение стало бы однородным.

Если у собственного числа одна собственная функция, то решение дается следующим уравнением:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j \neq k} \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t) + C \varphi_{ck}(t).$$

C – произвольная константа, которую нужно определять из дополнительных условий.

Когда у собственного числа несколько собственных функций, то в этом случае:

1) Необходимо проделать процедуру ортогонализации ($\varphi_i \to \omega_i$).

2) Решение даётся формулой:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \sum_{j \neq k} \frac{\mu_j g_j}{\mu_j - \mu} \varphi_{jc}(t) - \frac{1}{\mu} g(t) + C_1 \omega_1(t) + C_2 \omega_2(t) + \ldots + C_m \omega_m(t),$$

где $\omega_1 \div \omega_m$ соответствуют λ_k, то есть их несколько и каждая с соответствующей константой $C_1 \div C_m$.

Возвращаясь от μ к λ, имеем:

для $\lambda \neq \lambda_k$:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_j \frac{f_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_{jc}(t) - f(t),$$

где $f_j = \int\limits_a^b f(t)\varphi_j(t)dt;$

для $\lambda = \lambda_k$:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{j \neq k} \frac{f_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_{jc}(t) - f(t) + C_1\omega_1(t) + C_2\omega_2(t) + \ldots + C_m\omega_m(t).$$

<u>Физический смысл.</u> Собственные числа – это аналог резонансных частот системы, а аналог λ – текущая частота.

15. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным

Некоторые интегральные уравнения можно привести к симметричным и далее воспользоваться полученными результатами.

Например, уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t,S)p(S)\varphi(S)dS + f(t),$$

где k – ядро действительное симметричное.

Предполагается, что на $[a,b]$ функция $p(S) > 0$. Умножим обе части на $\sqrt{p(t)}$ и введем следующие обозначения:

$$L(t,S) = k(t,S)\sqrt{p(t)p(S)}; \psi(t) = \sqrt{p(t)}\varphi(t)$$

$$\Psi(t) = \lambda \int\limits_a^b L(t,S)\Psi(S)dS + \sqrt{p(t)}f(t).$$

Это стандартная запись интегрального уравнения с симметричным ядром. Решая его, находят $\Psi(t)$, а затем $\varphi(t)$.

16. Уравнения Вольтерра первого рода

$$\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Предполагается дифференцируемость всех входящих в уравнение функций. Для того, чтобы решение получилось непрерывным, необходимо чтобы $f(a)=0$. Для решения такого уравнения продифференцируем обе части уравнения по *t*. Получим

$$K(t,t)\varphi(t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[K(t,S)\right]\varphi(S)dS = \frac{\partial}{\partial t} f(t).$$

Предполагаем, что $K(t,t) \neq 0$.

Обозначим $\frac{\partial}{\partial t}K(t,S) = K_t^{'}(t,S)$ и $\frac{\partial}{\partial t} f(t) = f_t^{'}(t)$.

$$\varphi(t) + \int_a^t \frac{K^{'}(t,S)}{K(t,t)}\varphi(S)dS = \frac{f_t^{'}(t)}{K(t,t)}.$$

Получили уравнение второго рода, решаемое обычными способами.

Может оказаться, что $K(t,t) \equiv 0$, тогда мы получаем опять уравнение второго рода

$$\int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[K(t,S)\right]\varphi(S)dS = \frac{d}{dt} f(t).$$

В этом случае вновь обе части дифференцируются по *t*.

$$K_t^{'}(t,t)\varphi(t) + \int_a^t \frac{\partial^2 K(t,S)}{\partial t^2}\varphi(S)dS = f_t^{''}(t);$$

Если $K_t^{'}(t,t) \neq 0$, вновь делим на $K'(t,t)$ и приходим к уравнению второго рода. Если же вновь $K'(t,t)$ =0, то процедуру повторяем вновь и т. д.

17. Уравнения Фредгольма первого рода с симметричными ядрами

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = f(t). \qquad (17.1)$$

Даже при "хорошем" ядре уравнение Фредгольма первого рода может не иметь решения. Например, пусть ядро представляет собой степенную функцию с конечным числом членов:

$$k(t,S) = a_0(S)t^m + a_1(S)t^{m-1} + ... + a_m(S).$$

Нетрудно показать, что после подстановки в интеграл получим

$$t^m \int_a^b a_0(S)\varphi(S)dS + t^{m-1}\int_a^b a_1(S)\varphi(S)dS + ... + \int_a^b a_m(S)\varphi(S)dS =$$

$= t^m b_0 + t^{m-1}b_1 + ... + b_m$ – тоже степенная функция с конечным числом членов.

Поэтому если, например, $f(t) = \sin t$, то при конечном числе m при любых коэффициентах левая часть никогда не будет равна sin *t*. Поэтому такое уравнение не имеет решения.

Для симметричных ядер можно попытаться искать решение с помощью теоремы Гильберта-Шмидта. Для этого требуется, чтобы $f(t)$ разлагалась по собственным функциям ядра, то есть чтобы

$$f(t) = \sum_i a_i \varphi_{ic}(t); \qquad (17.2)$$

где коэффициенты $a_i = \int_a^b f(t)\varphi_{ic}(t)dt.$

Гильберт и Шмидт предложили искать решение в виде разложения собственных функций ядра, но с другими коэффициентами.

$$\varphi(t) = \sum_i c_i \varphi_{ic}(t). \qquad (17.3)$$

Если уравнение (17.3) подставить в уравнение Фредгольма первого рода (17.1), сравнить с (17.2), то получим:

$$\frac{c_i}{\lambda_i} = a_i, \text{ где } \lambda_i \text{ – собственные числа.}$$

Таким образом окончательное решение:

$$\varphi(t) = \sum_i a_i \lambda_i \varphi_{ic}(t).$$

18. Использование метода последовательных приближений для решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода

Пусть $\lambda_{\min}$ – минимальное по абсолютной величине собственное число ядра *K(t,S)*. Тогда, если $0<|\lambda|<2|\lambda_{\min}|$, то решение можно искать в виде итерационной процедуры следующего вида:

$$\varphi(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t), \text{ где}$$

$$\varphi_n(t)=\varphi_{n-1}(t)+\lambda\left[f(t)-\int_a^b k(t,S)\varphi_{n-1}(S)dS\right].$$

Начальную функцию $\varphi_0(t)$ можно брать произвольной.

В этом случае алгоритм схематически можно представить в виде:

1) $k(t,S)\to .\{\ \lambda_i\ \}\to\lambda_{\min}$

2) выбор $\varphi_0(t)$ и λ.

3) итерации.

19. Метод с использованием производящей функции

Предполагается, что ядро *k* – симметрично. Кроме этого оно представляет собой какую-либо из производящих функций. Функция $G(t,z)$ называется производящей функцией для некоей системы исходных функций *gi(z)*, т. е.

$$G(t,z)\leftarrow\{\ g_0(z), g_1(z),\dots\ \},$$

если ее можно представить следующим образом:

$$G(t,z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n g_n(z)t^n.$$

Все функции *g(z)* являются ортогональными:

$$\int_a^b g_i(z)g_j(z)dz=0,\quad i\neq j.$$

Решение можно искать в виде:

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t). \tag{19.1}$$

Подставим ядро и искомую функцию в интеграл и преобразуем

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS=\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(S)t^n\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(S)\right]dS=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b g_n(S)g_k(S)dS\right]=\sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n a_n G_n,$$

где $G_n=\int_a^b g_n^2(S)dS$.

Для того, чтобы найти a_n, продифференцируем $f(t)$ k раз и подставим t = 0:

$$\left.\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=C_k a_k G_k k!$$

При этом в разложении останется один коэффициент, что можно проиллюстрировать примером:

$$y(t)=b_0+b_1t+b_2t^2+b_3t^3+\ldots$$

$$y'(t)=b_1+2b_2t+3b_3t^2+\ldots\ \Big|_{t=0}=b_1;$$

$$y''(t)=2b_2$$

....

и т. д.

Таким образом,

$$a_k=\frac{\left.f^{(k)}(t)\right|_{t=0}}{C_k G_k k!}.$$

Подставляем эти коэффициенты в (19.1) и окончательно:

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left.f^{(k)}(t)\right|_{t=0}}{G_k C_k k!}g_k(t).$$

20. Нефредгольмовы интегральные уравнения

Ранее всегда рассматривались ядра, удовлетворяющие условию:

$$\int_a^b\int_a^b \left|k(t,S)\right|^2 dtdS < +\infty.$$

Если это условие не выполняется, то ядру соответствует не набор отдельных собственных чисел, а непрерывные их области и соответствующая им совокупность непрерывных функций.

<u>Пример (уравнение Пикара):</u>

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-D}^{D} e^{-|t-S|}\varphi(S)dS\,.$$

Проверим является ли оно фредгольмовым.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(t,S)\right|^2 dtdS = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-S|}dS\right]dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-S)}dS + \int_{t}^{\infty} e^{-2(S-t)}dS\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt\cdot 1$$

Уравнение не фредгольмовое.

Решение этого уравнения:

$$\varphi_1(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt}\,,$$

$$r = \sqrt{1-2\lambda}\,,\ \lambda > 0\,.$$

Совокупность собственных чисел составляет непрерывное множество.

Рассмотрим дуальную пару функций: непрерывную и интегрируемую функцию $\varphi(t)$ и её косинус-преобразование $\varphi1(\omega)$

$$\varphi_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos\omega x dx\,.$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\varphi_1(\omega)\cos\omega x dx\,.$$

Сформируем из них функцию $\psi(x)$ и перейдём к другим переменным

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\varphi_1(t)+\varphi(t)\right]\cos\omega x dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xtdt\,.$$

Функция $\psi(x)$ – это собственная функция интегрального уравнения:

$$\psi(t)=\lambda\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xt dt,$$

которая соответствует собственному числу:

$$\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Поскольку $\psi(x)$ – произвольная, то при $\lambda=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ интегральное уравнение имеет бесконечно много собственных функций. Это имеет место, т. к. выполняется:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|K|^2\,dxdt=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos^2 x\,dxdt=\infty.$$

21. Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярным интегральным уравнением называется интегральное уравнение, где неизвестная функция входит под сингулярный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ такова, что в окрестности точки x_0 она не ограничена ($f\to\infty$ при $x\to x_0$).

Главным значением по Коши называется предел (если он существует):

$$\lim_{\xi\to 0}\left[\int_a^{x_0-\xi} f(x)\,dx+\int_{x_0+\xi}^{b} f(x)\,dx\right].$$

Имеется ввиду, что $0<\xi<\min\{x0\text{-}a;\ b\text{-}x0\}$.

Интегралы в смысле этого главного значения называются особыми или сингулярными интегралами.

Для них используется обозначение

$$V.p.\int_a^b f(x)dx.$$

$$\int_a^b\frac{dx}{x-c},c\in[a,b]$$

Пример.

Ранее мы уже рассматривали частный случай применения таких интегралов – интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность.

Теперь рассмотрим важный с радиотехнической точки зрения случай.

22. Преобразование Гильберта

Известна интегральная формула Фурье

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]dt$$

Коэффициенты здесь определяются по формулам:

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos ut du$$

$$b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin ut du$$

Интегральную формулу Фурье формально можно считать пределом (при $y \to 0$) выражения $\lim\limits_{y\to 0} U(x,y)$, где:

$$U(x,y) = \int_0^{\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]e^{-yt}dt.$$

Этот интеграл можно считать действительной частью более сложного интеграла:

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} [a(t) - jb(t)]e^{jxt-yt}dt = \int_0^{\infty} [a(t) - jb(t)][\cos xt + j\sin xt]e^{-yt}dt =$$

$$= \int_0^{\infty} [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]e^{-yt}dt - j\int_0^{\infty} [b(t)\cos xt - a(t)\sin xt]e^{-yt}dt =$$

$$= U(x,y) + jV(x,y),$$

где *V(x,y)* – мнимая часть комплексной функции Ф(*x*,*y*).

Найдём предел функции *V(x,y)* при *y*→0 и обозначим:

$$g(x) = -V(x,0) = \int_0^{\infty} [b(t)\cos xt - a(t)\sin xt]dt.$$

Функцию *g(x)* можно выразить через *f(x)*. После подстановки:

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dt\left\{\int_0^{\infty}f(u)\sin\left[(u-x)t\right]dx\right\}.$$

Этот интеграл является сопряженным к интегралу Фурье.

Если повторить всю процедуру, то, вернувшись, исходное выражение мы получим со знаком ″минус″

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dt\left\{\int_0^{\infty}g(u)\sin\left[(u-x)t\right]du\right\}.$$

После нескольких формальных преобразований

$$g(x)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}dt\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sin\left[(u-x)t\right]f(u)du\right\}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left[\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\sin\left\{\left[(u-x)t\right]dt\right\}du\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du.$$

Интеграл можно разделить на две части

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du+$$

$$+\int_{x}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du.$$

Сделаем замену переменного $u-x=t$. В этом случае второй интеграл в сум-ме будет

$$\int_{-\infty}^{x}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du=\int_{-\infty}^{0}\frac{1-\cos\lambda t}{t}f(x+t)dt=$$

Первый интеграл в этом случае:

$$\int_{x}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}f(u)du=\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos\lambda t}{t}f(x+t)dt.$$

После перемены знака (t = -t) получаем:

$$\int_{+\infty}^{0} \frac{1-\cos\lambda(-t)}{-t} f(x-t)d(-t) = \int_{+\infty}^{0} \frac{1-\cos\lambda t}{t} f(x-t)dt =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos\lambda t}{t} f(x-t)dt.$$

Обобщая полученное,

$$g(x) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos\lambda\, t}{t}\left[f(x+t) - f(x-t)\right]dt.$$

Как показано Д. Гильбертом, для достаточно гладких функций *f(x)* часть интеграла, содержащая cos λt, будет стремится к нулю.

Таким образом

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt \\ f(x) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{g(x+t) - g(x-t)}{t} dt \end{cases}$$

Эта двойственность впервые подмечена Д. Гильбертом, и две функции, связанные такими преобразованиями, называются преобразованиями Гильберта.

Чаще их используют в другой форме:

$$g(x) = \frac{1}{\pi} V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x} dt,$$

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} V.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x} dt.$$

23. Применение преобразования Гильберта для решения интегральных уравнений

Каждая из двух формул Гильберта может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода. Тогда другая формула будет решением этого интегрального уравнения.

Обозначим через

$$f(x) = \mathrm{H}[\varphi(t)] = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy -$$

преобразование Гильберта над функцией φ. Метод используется для решения интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x).$$

С учетом введенного обозначения можно записать символически

$$\varphi(x) - \lambda\pi \mathrm{H}[\varphi] = f(x). \qquad (23.1)$$

Применим еще раз к обеим частям уравнения преобразование Гильберта.

$$\mathrm{H}[\varphi] + \lambda\pi\varphi = \mathrm{H}[f].$$

(Мы учли, что $\mathrm{H}\{\mathrm{H}[\varphi]\} = -\varphi.$).

Выразим $\mathrm{H}[\varphi]$ и подставим в (23.1):

$$\varphi - \lambda\pi \mathrm{H}[f] + \lambda^2\pi^2\varphi = f(x).$$

Выразим φ:

$$\varphi\left(1 + \lambda^2\pi^2\right) = f(x) + \lambda\pi \mathrm{H}[f];$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \lambda\pi \mathrm{H}[f]}{1 + \lambda^2\pi^2}; \qquad 1 + \lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Преобразование Гильберта можно применять и в более сложных случаях, когда ядро имеет вид:

$$k(x, y) = \frac{1}{y-x} + k_0(x, y);$$

Иногда преобразование Гильберта используют в следующей форме:

$$\begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(t) \operatorname{ctg}\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \\ \varphi(x) = -\dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \Psi(t) \operatorname{ctg}\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \end{cases}.$$

Формулы применяются в случае, если в интегральное уравнение входит функция ctg. Ход решения аналогичен.

24. Нелинейные интегральные уравнения

Решение нелинейных интегральных уравнений гораздо сложнее. Ранее, мы рассматривали решение интегрального уравнения вида:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k[t, S, \varphi(S)] dS + f(t).$$

Рассмотрим интегральное уравнение Гаммерштейна:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t, S) \Psi[S, \varphi(S)] dS + f(t),$$

где $k(t,S)$, $\Psi(s,z)$ – известные функции, $\phi(s)$– искомая функция.

Должно выполняться следующее условие:

$\left|\dfrac{\partial\, \Psi(x,y)}{\partial y}\right| < |\lambda|_{\min}$ -наименьшее по абсолютной величине собственное число ядра $k(t,s)$.

Решение этого интегрального уравнения также можно искать методом последовательного приближения. Функция φ_0 выбирается произвольно, даже строится ряд приближений:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S) \Psi[S, \varphi_0(S)] dS + f(x);$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S) \Psi[S, \varphi_1(S)] dS + f(x);$$

$$\varphi_3(x)=\lambda\int_a^b k(x,S)\Psi[S,\varphi_2(S)]dS+f(x);$$

. . . .

$$\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b k(x,S)\Psi[S,\varphi_{n-1}(S)]dS+f(x);$$

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

25. Применение вырожденных ядер для решения уравнений Гаммерштейна

Если ядро вырожденное, то есть его можно представить в виде:

$$k(t,S)=\sum_{i=1}^m a_i(t)b_i(S),$$

то исходное интегральное уравнение в этом случае:

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^m a_i(t)\int_a^b b_i(S)\Psi[S,\varphi(S)]dS+f(t),$$

Оно называется вырожденным уравнением Гаммерштейна.

Обозначим:

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^m a_i(t)C_i+f(t), \qquad (25.1)$$

где $C_i=\int_a^b b_i(S)\Psi[S,\varphi(S)]dS.$

Подставим наше выражение (25.1) в исходное интегральное уравнение:

$$\int_a^b b_j(S)\psi(S,\sum_{i=1}^m c_i a_i(S)+f(S))dS=c_j,\ j=1\div m.$$

Здесь функции $\Psi(\cdot\ )$ известны, следовательно интеграл можно найти. Если решение системы вновь полученных нелинейных алгебраических уравнений существует, это значит, что существует набор коэффициентов $\left\{c_1^\Delta\div c_m^\Delta\right\}$, таких, что их подстановка в соответствующее уравнение превращает его в верное тождество $\varphi(t) \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i^{\Delta} a_i(t) + f(t)$. Может получиться, что таких наборов $\left\{c_1^{\Delta} \div c_m^{\Delta}\right\}$ будет несколько, в этом случае существует несколько вариантов φ(t) решения интегрального уравнения.

<u>Примеры.</u>

1. Пусть имеем интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 t^2 S \varphi^2(t) dt,$$

где $K(t,S) = t^2 S$ – вырожденное ядро, состоящее из одного члена. Следовательно существует единственный коэффициент *c*.

$$c = \int_0^1 S \varphi^2(S) dS$$

$$\varphi(t) = \lambda c t^2;$$

$$c = \int_0^1 c^2 \lambda^2 S^4(S) dS = \frac{c^2 \lambda^2}{6}.$$

Нетрудно видеть, что решений у этого алгебраического уравнения два (при любом λ ≠ 0).

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{6}{\lambda^2} \cdot$$

Поэтому и у интегрального уравнения два решения:

$$\varphi_1(t) \equiv 0$$

$$\varphi_2(t) = \frac{6}{\lambda^2} \cdot$$

2. Имеется уравнение:

$$\varphi(t) = \int_0^1 a(t) a(S) \varphi(S) \sin\left(\frac{\varphi(S)}{a(S)}\right) dS$$

($a(t) > 0$ на интервале *t* от 0 до 1).

Проделав аналогичные преобразования, можно получить уравнения относительно коэффициента c.

$$1 = \int_0^1 a^2(S) \sin c dS ;$$

$$1 = \sin c \int_0^1 a^2(S) dS .$$

При этом возможны два варианта:

а) $\int_0^1 a^2(S) dS < 1$ – решения не существует.

б) $\int_0^1 a^2(S) dS > 1$.

Тогда,
$$\sin c = \frac{1}{\int_0^1 a^2(S) dS} ;$$

$$c = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin c = \dfrac{1}{\int_0^1 a^2(S) dS} + 2\pi n \\ \pi - \arcsin \dfrac{1}{\int_0^1 a^2(S) dS} + 2\pi n \end{array} \right\}.$$

Вариантов c бесконечно много, значит, существует бесконечно много решений $\varphi(t)$.

3. Имеется уравнение:

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \varphi^2(S) dS .$$

Пусть $c = \int_0^1 \varphi^2(S) dS$;

тогда $\varphi(t) = 1 + \lambda c$.

Подставив его в исходное уравнение, получим

$$\lambda^2 c^2 + (2\lambda - 1)c + 1 = 0.$$

В отношении *c* имеем следующее:

$$c = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}.$$

Отсюда

$$\varphi_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Для уравнения Гаммерштейна с невырожденным ядром можно подобрать вырожденное ядро, которое на интервале интегрирования будет достаточно точно аппроксимировать невырожденное. В этом случае решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно рассматривать как приближенное решение интегрального уравнения с невырожденным ядром.

Библиографический список

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1988. – 832 с.
2. *Цлар Л.Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 192 с.
3. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
4. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Интегральные уравнения (Задачи и упражнения). – М.: Наука, 1976. – 216 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500

Составители
ПОЛУШИН Петр Алексеевич
АРХИПОВ Евгений Анатольевич

Ответственный за выпуск – зав.кафедрой профессор О.Р. Никитин

Редактор Е.В. Невская
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 07.04.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 100 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.