

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет

В.М. Кислов, Л.Е. Кондратьева, И.А. Черноусова

"РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ"

Практикум

Часть 1

Владимир 2003

УДК 539.3/8
P24

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой строительной механики
Новосибирского государственного
архитектурно-строительного университета
Г.И. Гребенюк

Кандидат технических наук, доцент
Владимирского государственного университета
И.И. Шишов

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Кислов В.М., Кондратьева Л.Е., Черноусова И.А.

P24 Расчет стержневых систем: Практикум: В 2 ч. / Владим. гос.
ун-т. Владимир, 2003. Ч. 1. 62 с.
ISBN

Содержит варианты заданий к курсовым и расчетно-проектировочным работам по сопротивлению материалов и примеры их выполнения. Соответствует программе курса сопротивления материалов.

Предназначен для студентов строительных специальностей очной и очно-заочной форм обучения.

Задания 1, 2 подготовлены В.М. Кисловым и Л.Е. Кондратьевой; задания 3, 4 – В.М. Кисловым и И.А. Черноусовой; введение, заключение, приложение 1 - Л.Е. Кондратьевой; приложения 2 – 6 В.М. Кисловым.

Табл. 4. Ил. 28. Библиогр.: 3 назв.

УДК 539.3/8

ISBN 5-89368-375-7

© Владимирский государственный
университет, 2003

ВВЕДЕНИЕ

Первая часть практикума "Расчет стержневых систем" включает задания и указания по их выполнению по следующим разделам сопротивления материалов:

- геометрические характеристики плоских фигур;
- метод сечений, составляющие внутренних усилий в поперечном сечении стержня, эпюры внутренних усилий;
- расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии и прямом поперечном изгибе.

Во вторую часть практикума планируется включить задания по разделам "Сложное сопротивление", "Расчет неразрезной балки", "Устойчивость стержней", "Продольно-поперечный изгиб" и указания к их выполнению.

Задания практикума предусмотрены индивидуальными. Каждый студент должен выбрать задание в соответствии с вариантом, выданным преподавателем.

Основные требования к выполнению и оформлению работ следующие:

- работа оформляется на одной стороне листа белой бумаги формата А 4;
- вначале необходимо выписать условие задачи в соответствии с индивидуальным вариантом и сделать в едином масштабе чертеж условия задачи, на котором указать численные значения всех необходимых для расчета величин;
- затем необходимо оформить все этапы решения задачи, записав название этапа и подробные пояснения хода решения; результаты вычислений по каждому этапу должны быть выделены;
- все рисунки выполняются с использованием чертежных инструментов, аккуратно;
- титульный лист работы оформляется в соответствии с прил. 1; листы нумеруются и сшиваются.

Задание 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ ФИГУР

Для плоских фигур, изображенных на рис. 1 и 2, требуется определить:

1. положение центра тяжести фигуры;
2. значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральной системы координат;
3. положение главной центральной системы координат;
4. моменты инерции относительно главной центральной системы координат.

Данные для расчета взять из табл. 1 в соответствии с шифром, выданным преподавателем.

Таблица 1

№ П/П	I				II		
	№ схемы	<i>b</i> , см	<i>h</i> , см	№ двутавра	№ швеллера	Равнобокий уголок	Неравнобокий уголок
1	7	30	42	45	33	11/8	5,6/3,6/4
2	14	42	60	27	10	14/10	6,3/4/6
3	8	20	32	50	22	5/5	14/9/10
4	1	44	62	10	8	12,5/10	12,5/8/12
5	6	22	38	30	12	16/12	16/10/12
6	15	29	42	40	36	5,6/4	7/4,5/5
7	2	32	51	12	5	12,5/12	10/6,3/6
8	13	46	64	33	14	7,5/7	7,5/5/8
9	12	24	40	14	24	18/12	7,5/5/6
10	3	34	53	55	6,5	8/7	18/11/12
11	16	48	66	16	16	16/14	16/10/14
12	4	26	34	36	20	6,3/6	8/5/6
13	9	36	44	18	18	9/6	20/12,5/14
14	5	50	70	60	40	7/6	6,3/4/8
15	17	28	36	20	27	14/12	9/5,6/8
16	18	38	46	18	30	10/8	25/16/16
17	10	33	48	22	20	10/12	10/6,3/8
18	20	39	68	24	22	16/14	20/12,5/12
19	11	40	67	36	16a	7,5/5	11/7/8
20	19	37	50	24	18a	8/6	12,5/8/10

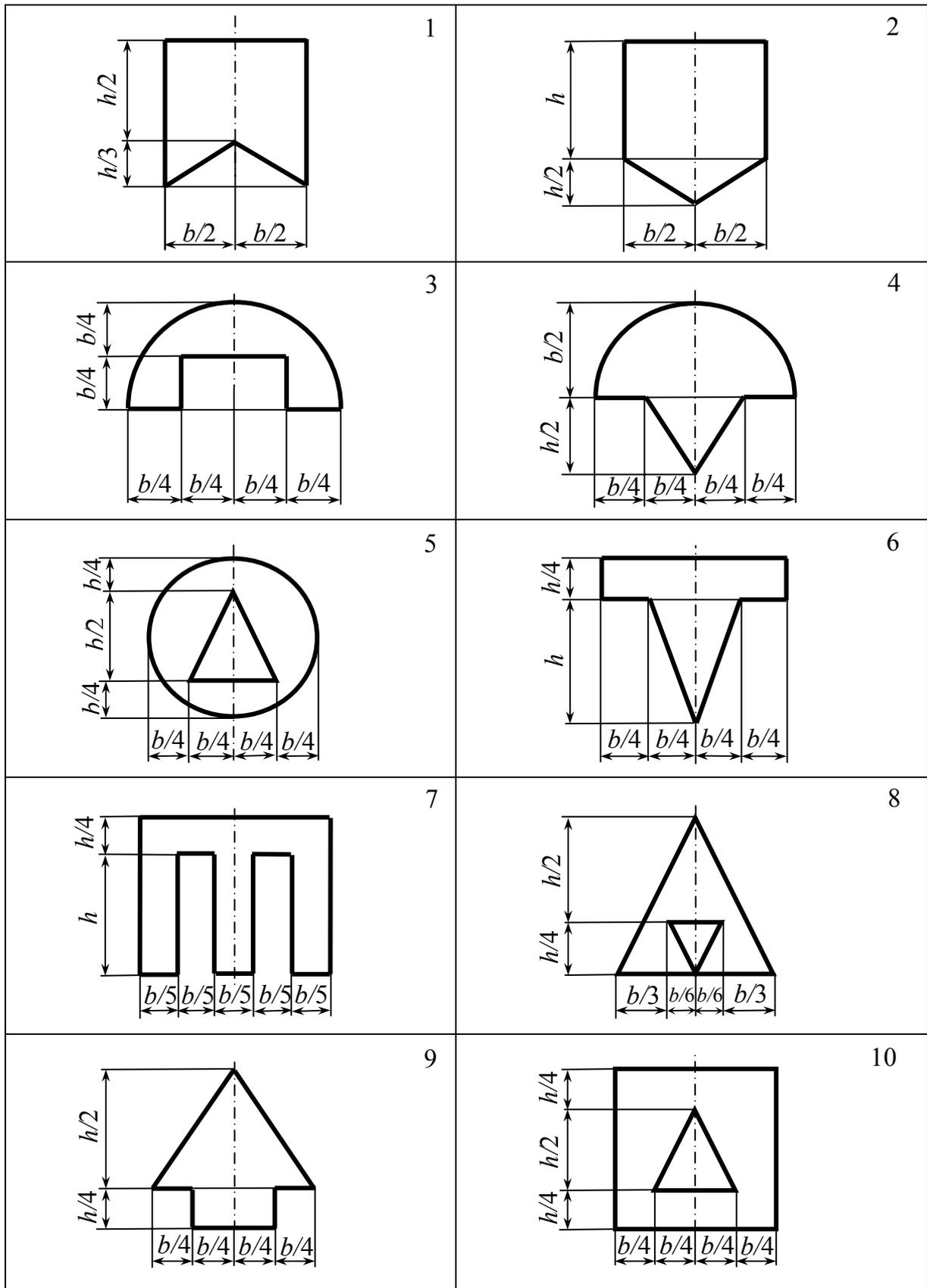
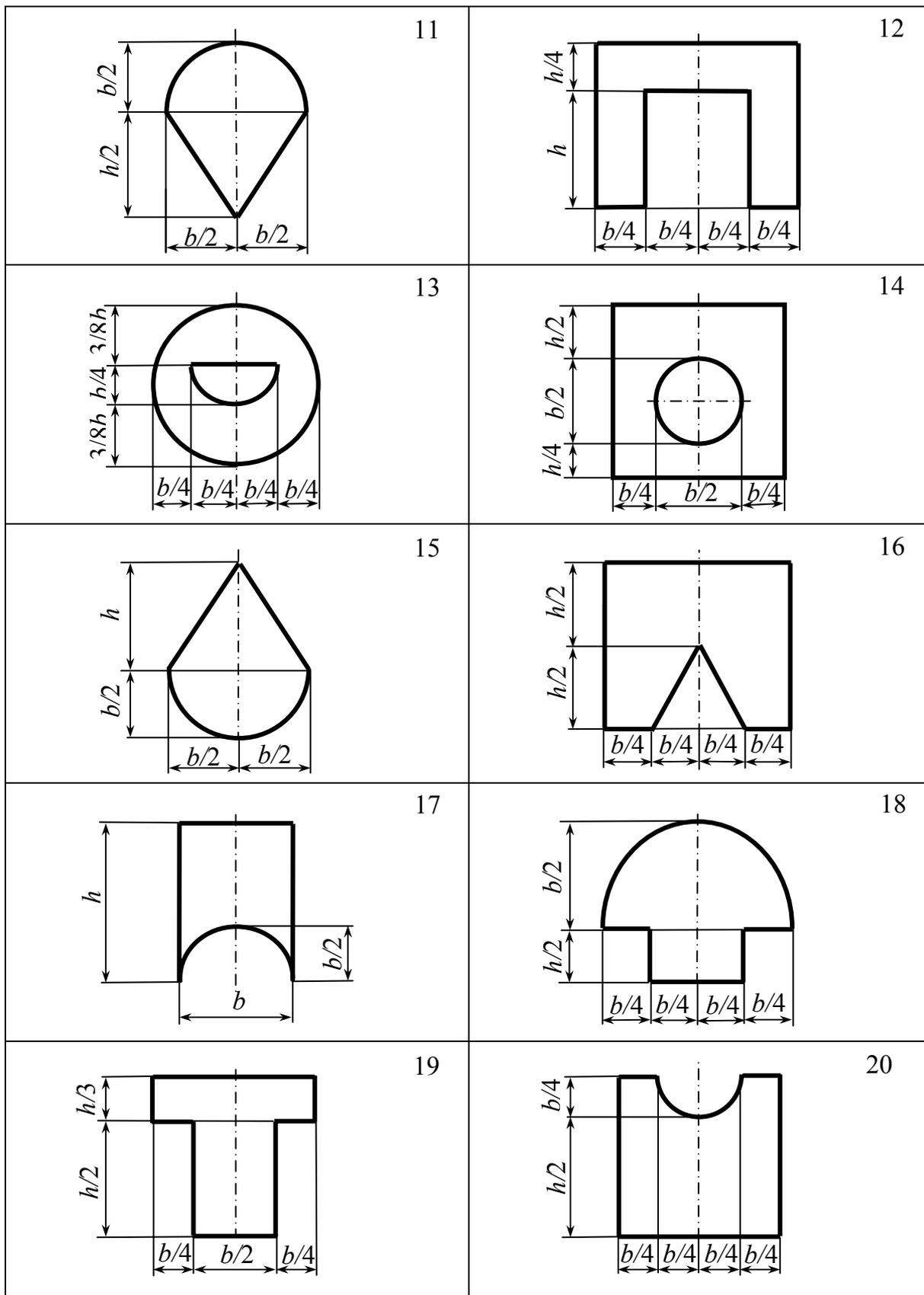
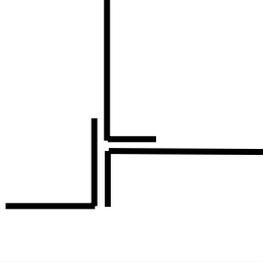
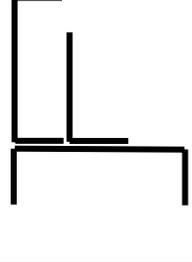
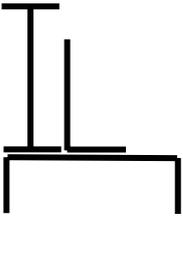
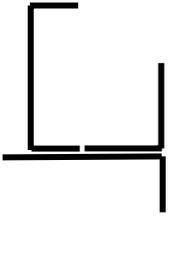
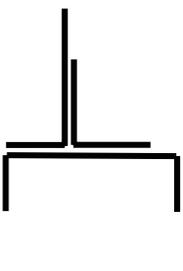
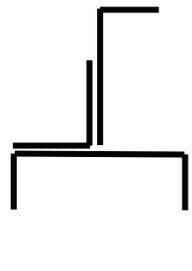
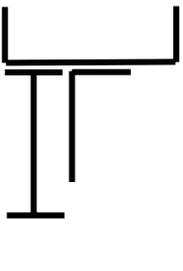
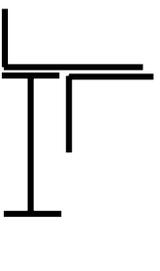
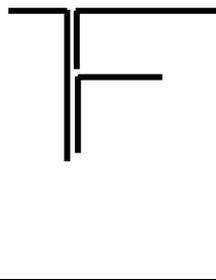
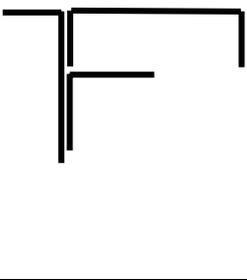


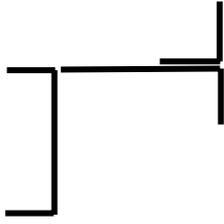
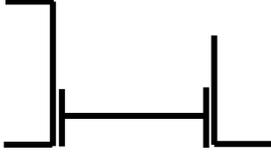
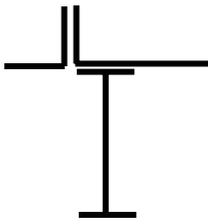
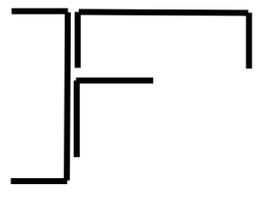
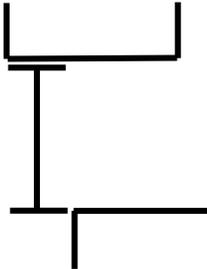
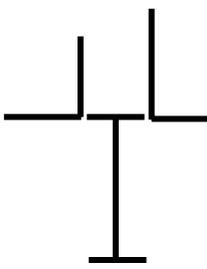
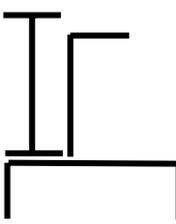
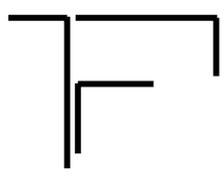
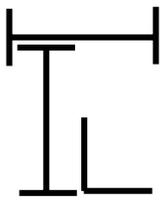
Рис. 1



Окончание рис. 1

<p style="text-align: right;">1</p> 	<p style="text-align: right;">2</p> 
<p style="text-align: right;">3</p> 	<p style="text-align: right;">4</p> 
<p style="text-align: right;">5</p> 	<p style="text-align: right;">6</p> 
<p style="text-align: right;">7</p> 	<p style="text-align: right;">8</p> 
<p style="text-align: right;">9</p> 	<p style="text-align: right;">10</p> 

Puc. 2

<p style="text-align: right;">11</p> 	<p style="text-align: right;">12</p> 
<p style="text-align: right;">13</p> 	<p style="text-align: right;">14</p> 
<p style="text-align: right;">15</p> 	<p style="text-align: right;">16</p> 
<p style="text-align: right;">17</p> 	<p style="text-align: right;">18</p> 
<p style="text-align: right;">19</p> 	<p style="text-align: right;">20</p> 

Окончание рис. 2

Пример

Рассмотрим определение геометрических характеристик фигуры, составленной из швеллера № 22 и неравнобокого уголка 11/7/8 (рис. 3).

Внимание! В качестве единиц измерения длин приняты сантиметры, поэтому в записях расчетов и на рисунках единицы измерения указываться не будут.

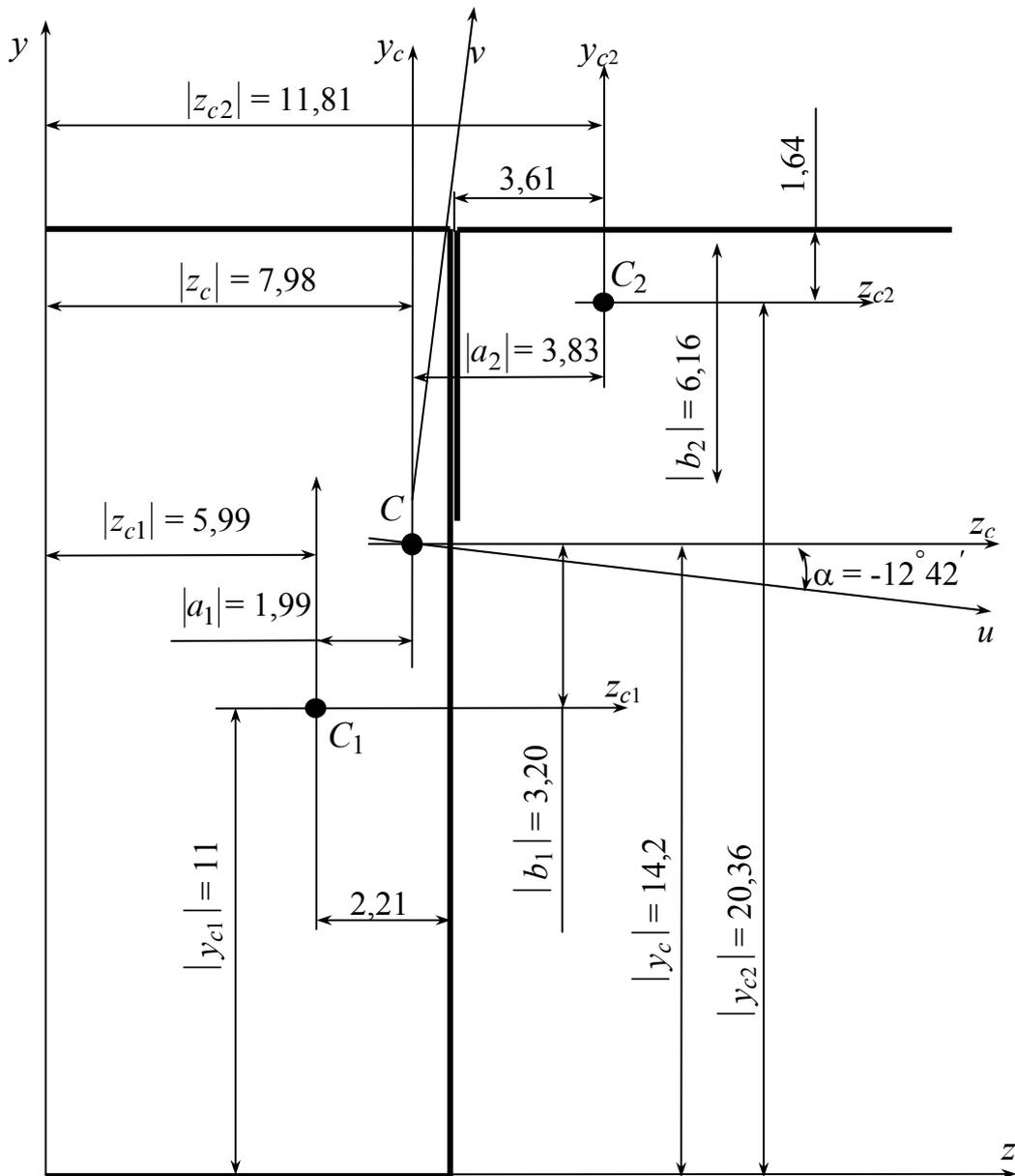


Рис. 3

Перед началом решения задачи надо выписать из сортамента прокатной стали (см. прил. 2 - 5) необходимые геометрические характеристики прокатных профилей.

Для швеллера № 22 (рис. 4, а) из прил. 3 находим: $A = 26,7 \text{ см}^2$, $I_x = 2110 \text{ см}^4$, $I_y = 151 \text{ см}^4$, $b = 8,2 \text{ см}$, $z_0 = 2,21 \text{ см}$.

Для неравнобокого уголка 11/7/8 (рис. 4, б) из прил. 4 находим: $A = 13,9 \text{ см}^2$, $I_x = 172 \text{ см}^4$, $I_y = 54,6 \text{ см}^4$, $b = 7 \text{ см}$, $B = 11 \text{ см}$, $x_0 = 1,64 \text{ см}$, $y_0 = 3,61 \text{ см}$, $I_u = 32,3 \text{ см}^4$, $\text{tg } \alpha = 0,4$.

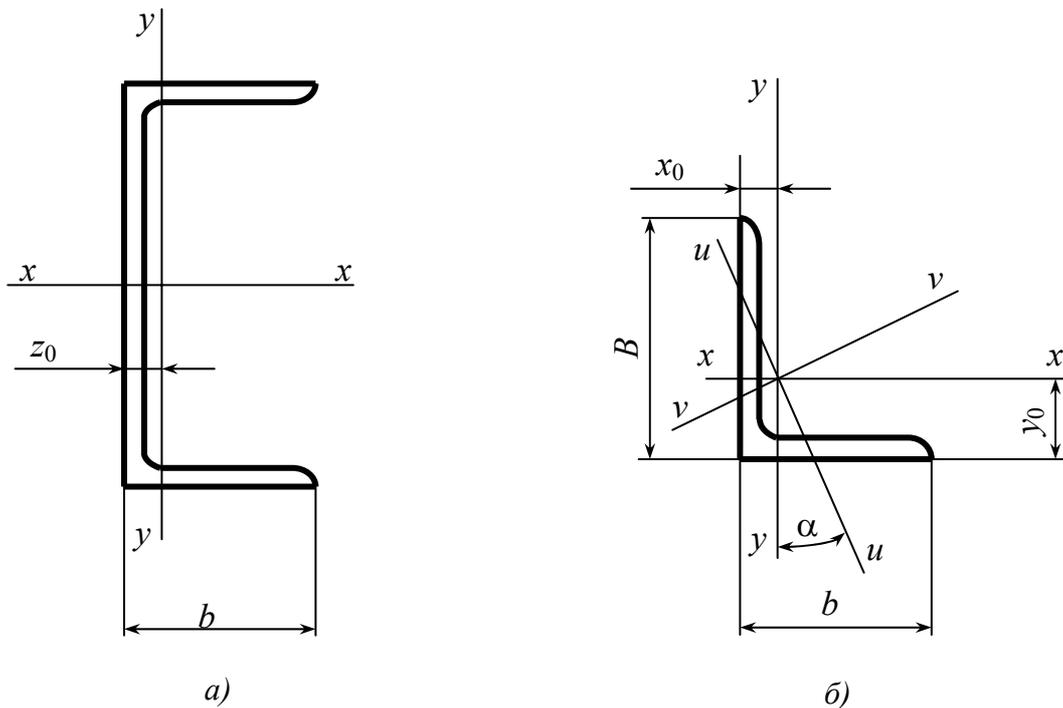


Рис. 4

Затем, учитывая, что расположение швеллера и уголка в нашей фигуре (см. рис. 3) отличается от расположения на рис. 4, а также то, что оси координат в плоскости фигуры обозначены z и y (а не x и y , как в сортаменте), полезно сделать еще один рисунок, где обозначения приведены в соответствие с вышесказанным (рис. 5, а, б).

Тогда геометрические характеристики швеллера № 22 будут следующими: $A = 26,7 \text{ см}^2$, $I_{z_{c1}} = 2110 \text{ см}^4$, $I_{y_{c1}} = 151 \text{ см}^4$, $z_0 = 2,21 \text{ см}$, $I_{z_{c1}y_{c1}} = 0$ (т.к. ось z_{c1} является осью симметрии швеллера), а для уголка 11/7/8 – следующими: $A = 13,9 \text{ см}^2$, $I_{y_{c2}} = 172 \text{ см}^4$, $I_{z_{c2}} = 54,6 \text{ см}^4$, $y_0 = 1,64 \text{ см}$, $z_0 = 3,61 \text{ см}$, $I_u = 32,3 \text{ см}^4$, $\text{tg } \alpha = 0,4$.

Дополнительно найдем центробежный момент инерции уголка относительно осей z_{c2} и y_{c2} . Сначала высчитаем моменты инерции

уголка относительно оси v . Известно, что

$$I_{z_{c2}} + I_{y_{c2}} = I_u + I_v.$$

Тогда

$$I_v = I_{z_{c2}} + I_{y_{c2}} - I_u = 54,6 + 172 - 32,3 = 194,3 \text{ см}^4.$$

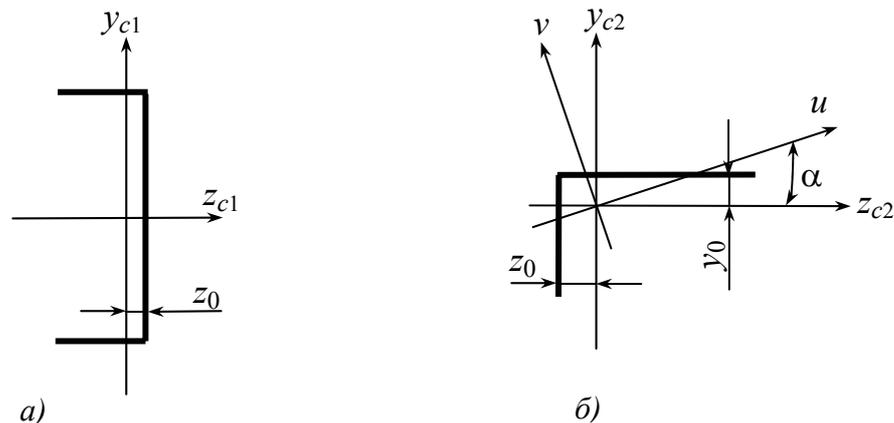


Рис. 5

Формула для определения центробежного момента инерции при повороте осей координат имеет вид

$$I_{z_H y_H} = I_{zy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_y - I_z) \sin 2\alpha,$$

где $I_{z_H y_H}$ - центробежный момент инерции в новой системе координат, образованной поворотом старых осей (z и y) на угол α . Угол α считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки. В качестве новой системы координат для нашего уголка примем оси z_{c2} , y_{c2} , а старой - оси u и v . И тогда

$$I_{z_{c2} y_{c2}} = I_{uv} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(I_v - I_u) \sin 2\alpha.$$

Используем эту формулу, учтя, что угол α будет отрицательным, т.к. поворот осей u и v происходит по часовой стрелке:

$$I_{z_{c2} y_{c2}} = 0 \cos \left[2(-21,8^\circ) \right] - \frac{1}{2}(194,3 - 32,3) \sin 2(-21,8^\circ) = 55,86 \text{ см}^4.$$

Отметим, что в сортаментах прокатной стали некоторых лет издания центробежные моменты инерции уголков относительно осей z , y приведены.

Для определения положения центра тяжести фигуры выбрана вспомогательная система координат (произвольная система координат, в которой будут рассчитываться координаты центра тяжести). Для рассматриваемой фигуры оси y и z вспомогательной системы координат удобно расположить так, чтоб вся фигура оказалась в ее первой четверти (см. рис. 3).

Координаты центра тяжести C сложной фигуры рассчитывают по формулам:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n y_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n z_{c_i} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где n – число простых фигур, на которые разбивается сложная фигура; S_{z_i} , S_{y_i} - статические моменты инерции этих фигур относительно осей z и y соответственно; y_{c_i} , z_{c_i} - координаты центров тяжести простых фигур; A_i - площади этих фигур.

Так как наша фигура состоит из швеллера и неравнобокого уголка, положения центров тяжести которых известны, разбиваем ее на две составляющие: 1 – швеллер, 2 – уголок. Тогда

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{z_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{y_{c1} A_1 + y_{c2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{11 \cdot 26,7 + 20,36 \cdot 13,9}{26,7 + 13,9} = 14,20 \text{ см};$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{y_i}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{z_{c1} A_1 + z_{c2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{5,99 \cdot 26,7 + 11,81 \cdot 13,9}{26,7 + 13,9} = 7,98 \text{ см}.$$

Использованные в выражениях значения координат центров тяжести швеллера и уголка y_{c1} , z_{c1} , y_{c2} , z_{c2} показаны на рис. 3. Там же указаны центр тяжести C всей фигуры и его координаты y_c , z_c .

Затем находим осевые и центробежные моменты инерции сложной фигуры относительно осей y_c , z_c (см. рис. 3) по формулам

$$I_{y_c} = \sum_{i=1}^n I_{y_c}^{(i)}, \quad I_{z_c} = \sum_{i=1}^n I_{z_c}^{(i)}, \quad I_{z_c y_c} = \sum_{i=1}^n I_{z_c y_c}^{(i)}.$$

Осевые и центробежный моменты инерции простых фигур относительно осей y_c , z_c рассчитываются по формулам

$$I_{y_c}^{(i)} = I_{y_{c_i}}^{(i)} + a_i^2 A_i, \quad I_{z_c}^{(i)} = I_{z_{c_i}}^{(i)} + b_i^2 A_i, \quad I_{z_c y_c}^{(i)} = I_{z_{c_i} y_{c_i}}^{(i)} + a_i b_i A_i.$$

Здесь a_i , b_i - координаты z и y соответственно центров тяжести составляющих сложной фигуры в системе координат $z_c y_c$; $I_{y_{c_i}}^{(i)}$, $I_{z_{c_i}}^{(i)}$, $I_{z_{c_i} y_{c_i}}^{(i)}$ - осевые и центробежный моменты инерции простых фигур в своих центральных системах координат $z_{c_i} y_{c_i}$.

Для нашей фигуры

$$I_{y_c}^{(1)} = I_{y_{c1}}^{(1)} + a_1^2 A_1 = 151 + (-1,99)^2 \cdot 26,7 = 256,74 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c}^{(2)} = I_{y_{c2}}^{(2)} + a_2^2 A_2 = 172 + 3,83^2 \cdot 13,9 = 375,90 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c}^{(1)} = I_{z_{c1}}^{(1)} + b_1^2 A_1 = 2110 + (-3,20)^2 \cdot 26,7 = 2383,41 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c}^{(2)} = I_{z_{c2}}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 54,6 + 6,16^2 \cdot 13,9 = 582,04 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c}^{(1)} = I_{z_{c1} y_{c1}}^{(1)} + a_1 b_1 A_1 = 0 + (-1,99) \cdot (-3,20) \cdot 26,7 = 170,03 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c}^{(2)} = I_{z_{c2} y_{c2}}^{(2)} + a_2 b_2 A_2 = 55,86 + 3,83 \cdot 6,16 \cdot 13,9 = 383,80 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$I_{y_c} = 256,74 + 375,90 = 632,64 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c} = 2383,41 + 582,04 = 2965,45 \text{ см}^4;$$

$$I_{z_c y_c} = 170,03 + 383,80 = 553,83 \text{ см}^4.$$

Далее можно определить положение главных центральных осей u , v

фигуры (осей, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения) по формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2I_{z_c y_c}}{I_{z_c} - I_{y_c}},$$

где α_0 - угол между осью z_c и одной из главных центральных осей.

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot 553,83}{2965,45 - 632,64} = -0,4748.$$

Тогда

$$2\alpha_0 = -25^{\circ}24',$$

$$\alpha_0 = -12^{\circ}42'.$$

Угол, найденный по этой формуле, должен быть отложен от оси z_c против часовой стрелки, если он положителен, или по часовой стрелке, если он отрицателен. Положение главных центральных осей нашей фигуры показано на рис. 3. Буквой u обозначена ось, относительно которой осевой момент принимает наибольшее значение (она расположена ближе к оси z_c , относительно которой осевой момент больше, чем относительно оси y_c). За v – ось, относительно которой осевой момент минимален.

Далее найдем осевые моменты относительно главных центральных осей:

$$\begin{aligned} I_{\max} = I_u &= \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2} = \\ &= \frac{2965,45 + 632,64}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(2965,45 - 632,64)^2 + 4 \cdot 553,83^2} = 3090,26 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{\min} = I_v = \frac{I_{z_c} + I_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{z_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{z_c y_c}^2} = 507,84 \text{ см}^4.$$

Проверим правильность расчетов I_u и I_v по формуле

$$I_u + I_v = I_{z_c} + I_{y_c}.$$

$$3090,26 + 507,84 = 2965,45 + 632,64;$$

3598,10 = 3598,09 .

Задание 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ

Для систем, изображенных на рис. 6, требуется построить эпюры изгибающих моментов, нормальных и поперечных сил.

Данные для расчета взять из табл. 2 по шифру, выданному преподавателем.

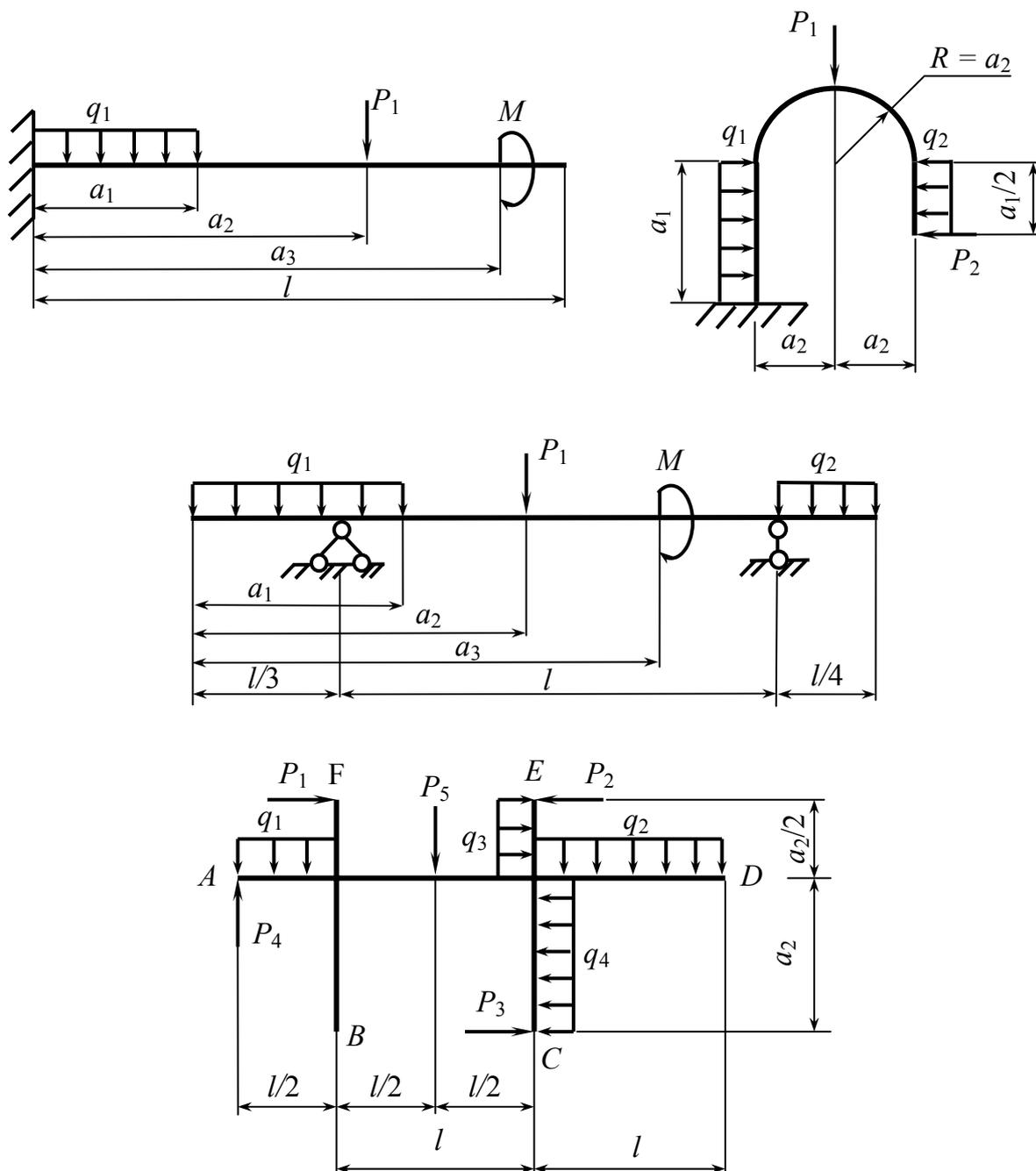


Рис. 6

Таблица 2

№ П/П	I							II									
	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	l , м	 в точке	 в точке	 в точке	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м	q_4 , кН/м	M , кН·м
1	2,0	4,0	3,0	6,0	A	C	-	-40	31	-50	-	-	6	24	-	-14	50
2	2,5	4,1	3,1	6,1	A	D	-	39	33	-	51	-	-8	16	13	-	-51
3	2,6	4,2	3,2	6,2	A	-	E	-38	35	-	-	-52	10	-22	-	15	52
4	2,7	4,3	3,3	6,3	A	-	C	37	-29	53	-	-	-12	23	-12	-	-53
5	2,8	4,4	3,4	6,4	B	-	D	36	-39	-	-59	-	14	5	-	-16	54
6	2,9	4,5	3,5	6,5	B	C	-	-34	37	-	-	-60	16	-6	11	-	-55
7	3,0	4,6	3,6	6,6	B	D	-	32	40	-54	-	-	-18	7	-	17	69
8	3,1	4,7	3,7	6,7	B	-	E	30	-41	-	-	61	20	-8	-10	-	-68
9	3,2	4,8	3,8	6,8	F	D	-	-20	43	-	62	-	7	9	-	-19	67
10	3,3	4,9	6,0	6,9	B	-	D	-22	45	55	-	-	-9	10	18	-	66
11	3,4	5,0	5,9	7,0	F	C	-	24	-47	-	-	63	11	-21	-	-20	-65
12	3,5	5,1	5,8	7,1	F	D	-	-26	49	-	-64	-	13	20	-9	-	64
13	3,6	5,2	5,7	7,2	F	-	C	28	-51	-56	-	-	-15	11	-	-21	-63
14	3,7	5,3	5,6	7,3	F	-	B	-30	53	-	65	-	17	-12	8	-	-62
15	3,8	5,4	5,5	7,4	F	-	D	42	55	-	-	-66	19	-13	-	22	61
16	3,9	5,5	5,4	7,5	C	A	-	-44	57	67	-	-	-21	19	-7	-	-60
17	4,0	5,6	5,3	7,6	C	B	-	46	-59	-	-68	-	22	14	-	-23	59
18	4,1	5,7	5,2	7,7	C	-	A	-48	61	-57	-	-	23	-15	6	-	-58
19	4,2	5,8	5,2	7,8	C	-	E	50	-63	-	-	69	-24	18	-	24	57
20	4,3	5,9	5,0	7,9	C	-	F	-52	65	58	-	-	25	17	-5	-	-56

Пример 1

Построим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для балки, показанной на рис. 7.

Внимание! Все длины выражены в метрах, силы – в килоньютонах. Поэтому в записях расчетов и на рисунках в примерах 1 - 3 единицы измерения проставляться не будут.

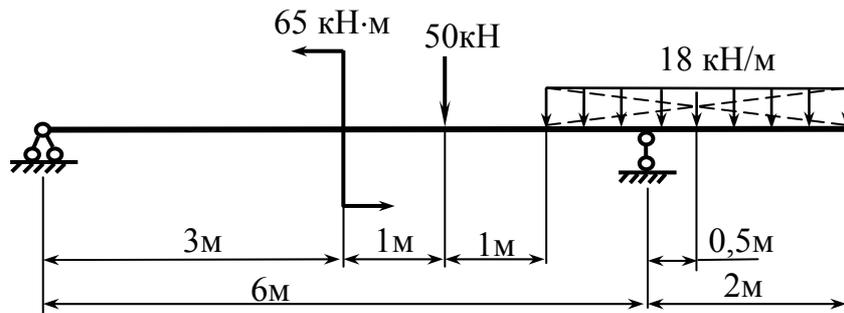


Рис. 7

Сначала определяют реакции опор балки, которые могут в них возникнуть (рис. 8, а).

Затем записывают уравнения равновесия балки, из которых находят значения реакций. С балкой связана система координат xu (рис. 8,а).

$$\sum x = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; 65 - 50 \cdot 4 - 18 \cdot 3 \cdot 6,5 + R_B \cdot 6 = 0 \rightarrow R_B = 81 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 6 + 65 + 50 \cdot 2 - 18 \cdot 3 \cdot 0,5 = 0 \rightarrow R_A = 23 \text{ кН}.$$

Проверочное уравнение:

$$\sum y = 0; 23 - 50 - 18 \cdot 3 + 81 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Положение равнодействующей Q равномернораспределенной нагрузки, необходимое для расчетов, показано на рис. 8, а.

Далее переходим к определению внутренних усилий в поперечных сечениях балки.

Вначале нужно определиться с количеством участков балки. Границами участков являются точки приложения сосредоточенных нагрузок, начала и концы участков распределенных нагрузок. Таким образом, у нашей балки пять участков.

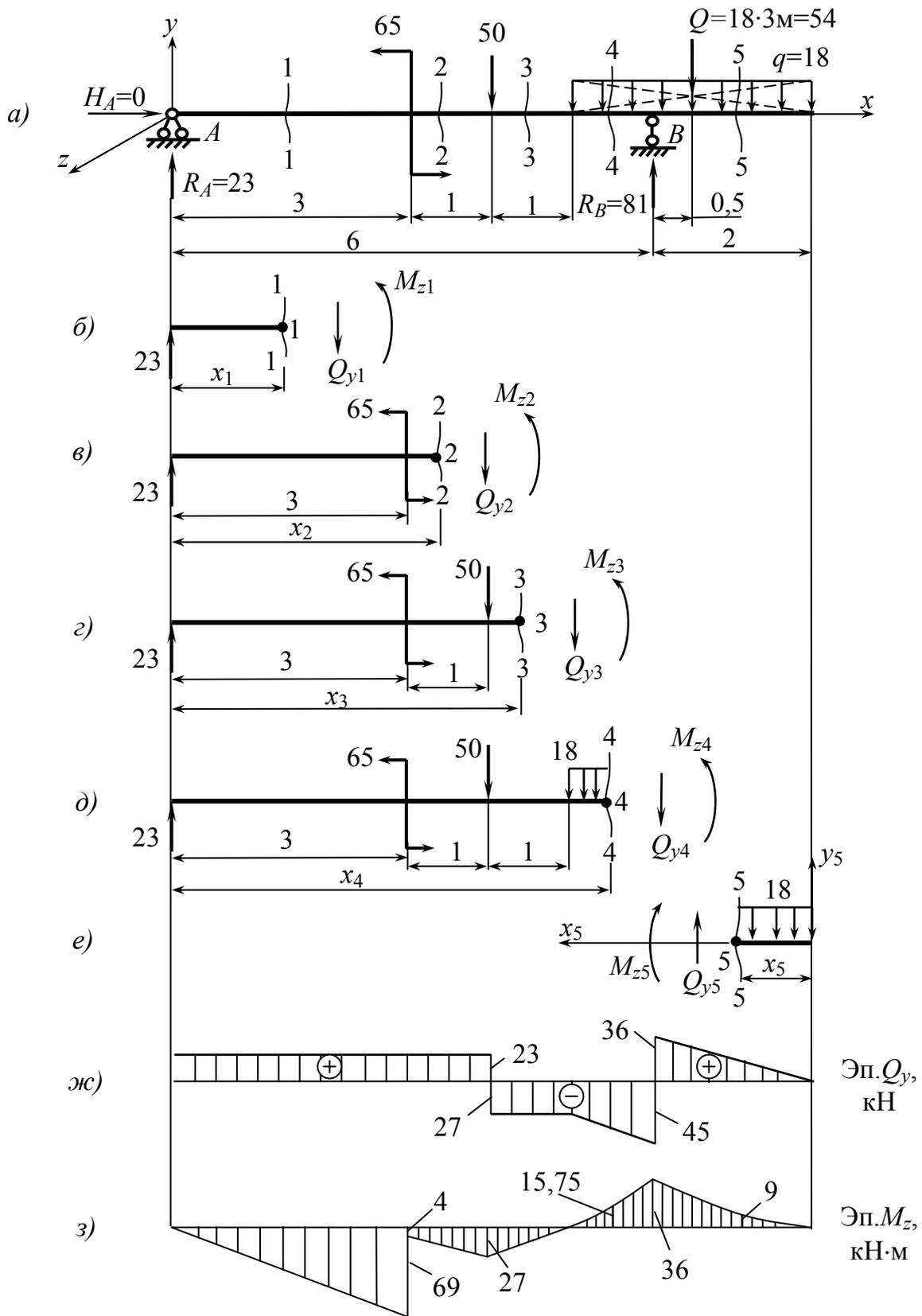


Рис. 8

Расчет внутренних усилий начат с крайнего левого участка. В его пределах проведено сечение 1 – 1, перпендикулярное оси балки, имеющее произвольную координату x_1 ($0 \leq x_1 \leq 3$ м). Этим сечением балка поделена на две части, одну из которых (левую) будем рассматривать отдельно (рис. 8, б). Действие отброшенной правой отсеченной части балки на левую заменим усилиями Q_{y1} и M_{z1} . Пока они неизвестны, поперечную силу покажем положительной.

Поперечная сила Q_y считается положительной, если она стремится вращать отсеченную часть балки по часовой стрелке.

Изгибающий момент будем направлять произвольно. Если после его определения он получится со знаком "плюс", то направление момента оказалось верным. На эпюре он будет откладываться со стороны тех волокон балки, которые он растягивает. Если же момент получится со знаком "минус", то направление момента было выбрано неверно. Тогда его направление меняется на обратное (и он также откладывается со стороны растянутых им волокон балки).

Внутренние усилия находятся из уравнений равновесия рассматриваемой отсеченной части балки:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad 23 - Q_{y1} = 0 &\rightarrow Q_{y1} = 23 \text{ кН}; \\ \sum M_1 = 0; \quad -23x_1 + M_{z1} = 0 &\rightarrow M_{z1} = 23x_1; \\ &\text{при } x_1 = 0 \quad M_{z1} = 0, \\ &\text{при } x_1 = 3 \quad M_{z1} = 69 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Для второго участка $3 \text{ м} \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$ (рис. 8, в):

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad 23 - Q_{y2} = 0 &\rightarrow Q_{y2} = 23 \text{ кН}; \\ \sum M_2 = 0; \quad -23x_2 + 65 + M_{z2} = 0 &\rightarrow M_{z2} = 23x_2 - 65; \\ &\text{при } x_2 = 3 \quad M_{z2} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ &\text{при } x_2 = 4 \quad M_{z2} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Для третьего участка $4 \text{ м} \leq x_3 \leq 5 \text{ м}$ (рис. 8, г):

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad 23 - 50 - Q_{y3} = 0 &\rightarrow Q_{y3} = -27 \text{ кН}; \\ \sum M_3 = 0; \quad -23x_3 + 65 + 50(x_3 - 4) + M_{z3} = 0 &\rightarrow \\ \rightarrow M_{z3} = 23x_3 - 50(x_3 - 4) - 65; & \\ \text{при } x_3 = 4 \quad M_{z3} = 27 \text{ кН}\cdot\text{м}, & \\ \text{при } x_3 = 5 \quad M_{z3} = 0. & \end{aligned}$$

Для четвертого участка $5 \text{ м} \leq x_4 \leq 6 \text{ м}$ (рис. 8, д):

$$\sum y = 0; 23 - 50 - 18(x_4 - 5) - Q_{y4} = 0 \rightarrow Q_{y4} = -18(x_4 - 5) - 27;$$

$$\text{при } x_4 = 5 \quad Q_{y4} = -27 \text{ кН,}$$

$$\text{при } x_4 = 6 \quad Q_{y4} = -45 \text{ кН.}$$

$$\sum M_4 = 0; -23x_4 + 65 + 50(x_4 - 4) + 18(x_4 - 5) \frac{x_4 - 5}{2} M_{z4} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z4} = -9(x_4 - 5)^2 - 50(x_4 - 4) + 23x_4 - 65;$$

$$\text{при } x_4 = 5 \quad M_{z4} = 0,$$

$$\text{при } x_4 = 5,5 \quad M_{z4} = -15,75 \text{ кН}\cdot\text{м,}$$

$$\text{при } x_4 = 6 \quad M_{z4} = -36 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Для этого участка сделан отдельный рис. 9, где показаны плечи всех нагрузок, действующих на левую отсеченную часть балки, при составлении уравнения $\sum M_4 = 0$.

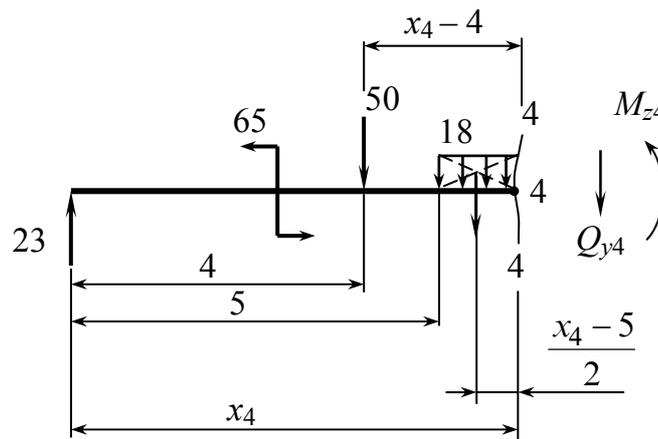


Рис. 9

Для определения усилий на последнем пятом участке рассмотрим равновесие правой отсеченной части балки, что значительно проще, чем левой. Для этого расчета использована другая система координат (рис. 8, е), $0 \leq x_5 \leq 2 \text{ м}$.

$$\sum y = 0; Q_{y5} - 18x_5 = 0 \rightarrow Q_{y5} = 18x_5;$$

$$\text{при } x_5 = 0 \quad Q_{y5} = 0,$$

$$\text{при } x_5 = 2 \quad Q_{y5} = 36 \text{ кН.}$$

$$\sum M_5 = 0; -M_{z5} - 18x_5 \frac{x_5}{2} = 0 \rightarrow M_{z5} = -9x_5^2;$$

$$\text{при } x_5 = 0 \quad M_{z5} = 0,$$

$$\text{при } x_5 = 1 \quad M_{z5} = -9 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_5 = 2 \quad M_{z5} = -36 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 8, ж, з.

Пример 2

Построим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы, показанной на рис. 10.

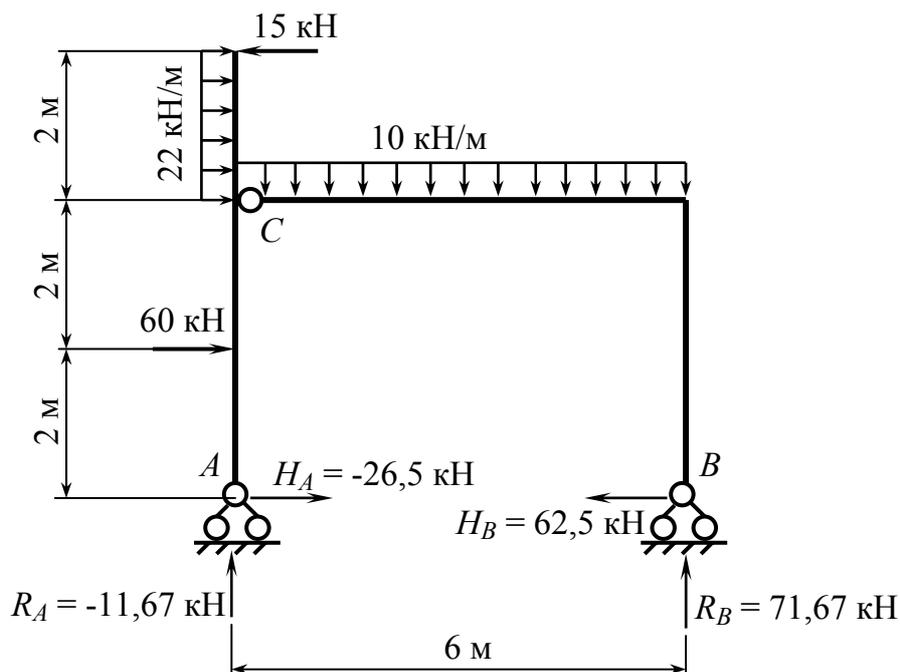


Рис. 10

Сначала определяют реакции опор A и B (рис. 10).

$$\sum M_A = 0; 15 \cdot 6 - (22 \cdot 2) \cdot 5 - 60 \cdot 2 - (10 \cdot 6) \cdot 3 + R_B \cdot 6 = 0 \rightarrow R_B = 71,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; 15 \cdot 6 - (22 \cdot 2) \cdot 5 - 60 \cdot 2 + (10 \cdot 6) \cdot 3 + R_A \cdot 6 = 0 \rightarrow R_A = -11,67 \text{ кН.}$$

Знак "минус" у реакции R_A означает, что выбранное первоначально направление этой реакции является неверным, и на самом деле реактивная сила направлена противоположно.

Проверочное уравнение для вертикальных составляющих опорных реакций:

$$\sum y = 0; -10 \cdot 6 - 11,67 + 71,67 = 0; \\ 0 \equiv 0.$$

Для расчета горизонтальных составляющих опорных реакций используют тот факт, что шарнир C (см. рис. 10) не скрепляет соединяемые части от взаимного поворота, то есть изгибающий момент в сечении рамы у шарнира C равен нулю. Отсюда

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0 \text{ и } \sum M_C^{\text{прав}} = 0,$$

где $\sum M_C^{\text{лев}}$ и $\sum M_C^{\text{прав}}$ - суммы моментов всех нагрузок, действующих только на левую и только на правую по отношению к шарниру C части рамы соответственно.

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0; 15 \cdot 2 - (22 \cdot 2) \cdot 1 + 60 \cdot 2 + H_A \cdot 4 = 0; \\ H_A = -26,5 \text{ кН;}$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0; -(10 \cdot 6) \cdot 3 + 71,67 \cdot 6 - H_B \cdot 4 = 0; \\ H_B = 62,5 \text{ кН;}$$

Проверочное уравнение:

$$\sum x = 0; -15 + 22 \cdot 2 + 60 - 26,5 - 62,5 = 0; \\ 0 \equiv 0.$$

Чтобы определить внутренние усилия в этой раме, необходимо рассмотреть пять участков. Для рам удобно на каждом из участков использовать свою систему координат (рис. 11).

Первым рассмотрен участок от опоры A до точки приложения силы

60 кН. В его пределах проведено поперечное сечение 1 – 1, которым рама разделена на две части. Рассмотрено равновесие нижней отсеченной части (рис. 12, а). Вместе с поперечной силой Q_y и изгибающим моментом M_z в поперечном сечении рамы возникает и продольная сила N . Продольная сила N считается положительной, если она растягивающая, то есть если она направлена от сечения.

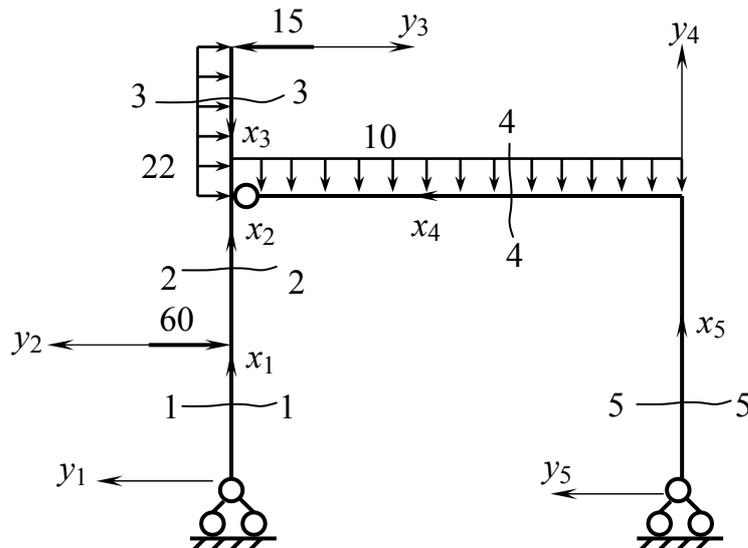


Рис. 11

Уравнения равновесия рассматриваемой нижней отсеченной части рамы $0 \leq x_1 \leq 2$ м (рис. 12, а):

$$\begin{aligned} \sum x_1 = 0; \quad -11,67 + N_1 = 0 &\rightarrow N_1 = 11,67 \text{ кН;} \\ \sum y_1 = 0; \quad 26,5 - Q_{y1} = 0 &\rightarrow Q_{y1} = 26,5 \text{ кН;} \\ \sum M_1 = 0; \quad -26,5x_1 + M_{z1} = 0 &\rightarrow M_{z1} = 26,5x_1; \\ &\text{при } x_1 = 0 \quad M_{z1} = 0, \\ &\text{при } x_1 = 2 \quad M_{z1} = 53 \text{ кН}\cdot\text{м.} \end{aligned}$$

Для второго участка $0 \leq x_2 \leq 2$ м (рис. 12, б):

$$\begin{aligned} \sum x_2 = 0; \quad -11,67 + N_2 = 0 &\rightarrow N_2 = 11,67 \text{ кН;} \\ \sum y_2 = 0; \quad 26,5 - 60 - Q_{y2} = 0 &\rightarrow Q_{y2} = -33,5 \text{ кН;} \end{aligned}$$

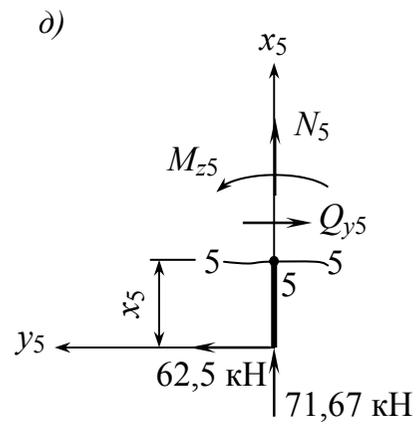
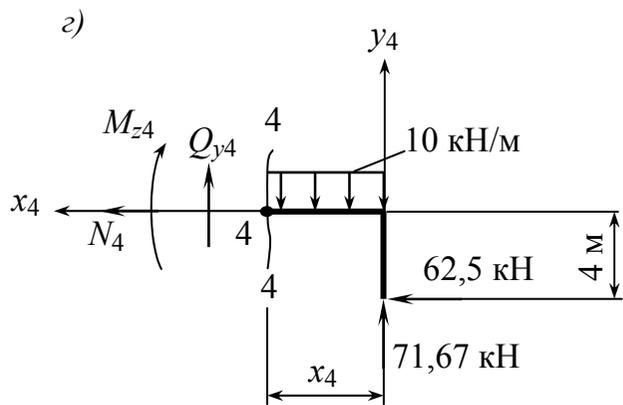
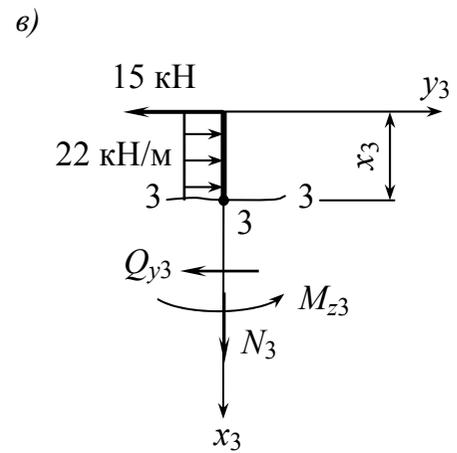
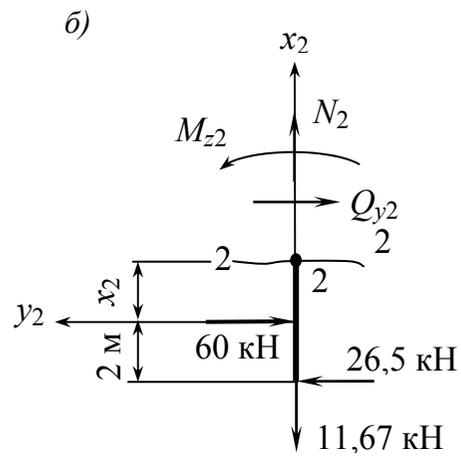
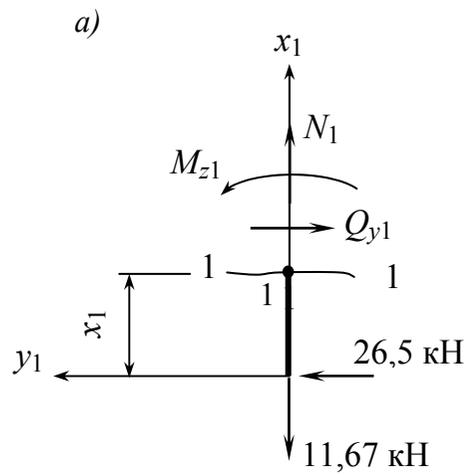


Рис. 12

$$\sum M_2 = 0; -26,5(2 + x_2) + 60x_2 + M_{z2} = 0 \rightarrow M_{z2} = -33,5x_2 + 53;$$

при $x_2 = 0$ $M_{z2} = 53$ кН·м,
при $x_2 = 2$ $M_{z2} = -14$ кН·м.

Для третьего участка рассмотрено равновесие верхней отсеченной части $0 \leq x_3 \leq 2$ м (см. рис. 12, в):

$$\sum x_3 = 0; N_3 = 0;$$

$$\sum y_3 = 0; -15 + 22x_3 - Q_{y3} = 0 \rightarrow Q_{y3} = 22x_3 - 15; \quad (1)$$

при $x_3 = 0$ $Q_{y3} = -15$ кН,
при $x_3 = 2$ $Q_{y3} = 29$ кН.

$$\sum M_3 = 0; 15x_3 - (22x_3) \frac{x_3}{2} + M_{z3} = 0 \rightarrow M_{z3} = 11x_3^2 - 15x_3; \quad (2)$$

при $x_3 = 0$ $M_{z3} = 0$,
при $x_3 = 1$ $M_{z3} = -4$ кН·м,
при $x_3 = 2$ $M_{z3} = 14$ кН·м.

На этом участке имеется сечение, где $Q_y = 0$. В соответствии с формулой, связывающей внутренние усилия в поперечных сечениях изгибаемого стержня:

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}$$

в таком поперечном сечении возникает экстремальный на участке изгибающий момент. Его необходимо знать для дальнейших расчетов на прочность. Сначала определяется координата x_3^* сечения, в котором $Q_{y3} = 0$; для этого можно приравнять к нулю выражение (1):

$$Q_{y3} = 22x_3^* - 15 = 0,$$

$$x_3^* = 0,68 \text{ м.}$$

После подстановки этого значения в (2) получено

$$M_{z3}^{\text{экстр}} = M_{z3}(x_3 = x_3^* = 0,68) = -5,11 \text{ кН·м.}$$

Для четвертого участка $0 \leq x_4 \leq 6$ м (см. рис. 12, г):

$$\begin{aligned} \sum x_4 = 0; N_4 + 62,5 = 0 &\rightarrow N_4 = -62,5 \text{ кН}; \\ \sum y_4 = 0; Q_{y4} - 10x_4 + 71,67 = 0 &\rightarrow Q_{y4} = 10x_4 - 71,67; \\ &\text{при } x_4 = 0 \quad Q_{y4} = -71,67 \text{ кН}, \\ &\text{при } x_4 = 6 \quad Q_{y4} = -11,67 \text{ кН}. \\ \sum M_4 = 0; -M_{z4} - (10x_4) \frac{x_4}{2} - 62,5 \cdot 4 + 71,67x_4 = 0 &\rightarrow \\ \rightarrow M_{z4} = -5x_4^2 + 71,67x_4 - 250; & \\ \text{при } x_4 = 0 \quad M_{z4} = -250 \text{ кН}\cdot\text{м}, & \\ \text{при } x_4 = 3 \quad M_{z4} = -80 \text{ кН}\cdot\text{м}, & \\ \text{при } x_4 = 6 \quad M_{z4} = 0. & \end{aligned}$$

Для последнего участка $0 \leq x_5 \leq 4$ м (см. рис. 12, д):

$$\begin{aligned} \sum x_5 = 0; N_5 + 71,67 = 0 &\rightarrow N_5 = -71,67 \text{ кН}; \\ \sum y_5 = 0; 62,5 - Q_{y5} = 0 &\rightarrow Q_{y5} = 62,5 \text{ кН}; \\ \sum M_5 = 0; M_{z5} - 62,5x_5 = 0 &\rightarrow M_{z5} = 62,5x_5; \\ &\text{при } x_5 = 0 \quad M_{z5} = 0, \\ &\text{при } x_5 = 4 \quad M_{z5} = 250 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Построенные по этим результатам эпюры N , Q_y , M_z представлены на рис. 13.

Пример 3

Построим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для рамы с криволинейным стержнем, показанной на рис. 14. Ось криволинейного стержня описывается уравнением окружности.

Определим реакции опоры (рис. 14):

$$\begin{aligned} \sum x = 0; -H + 60 - 40 = 0 &\rightarrow H = 20 \text{ кН}; \\ \sum y = 0; R - 10 \cdot 1,5 = 0 &\rightarrow R = 15 \text{ кН}; \\ \sum M_A = 0; M - 48 - 60 \cdot 2,5 - (10 \cdot 1,5) \cdot 1,75 + 40 \cdot 3 = 0 &\rightarrow M = 104,25 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

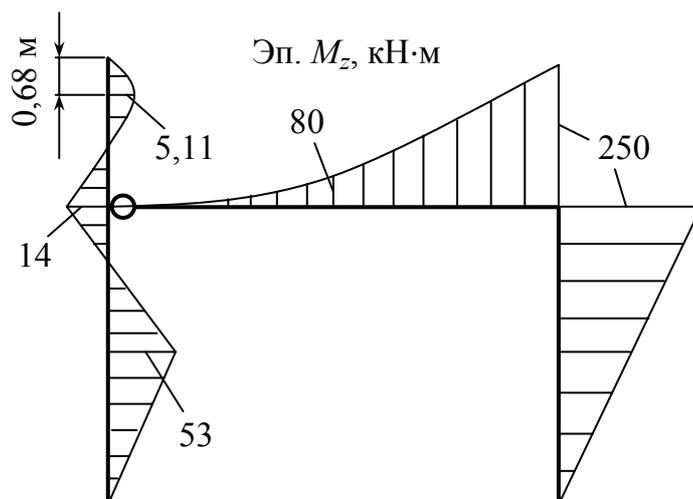
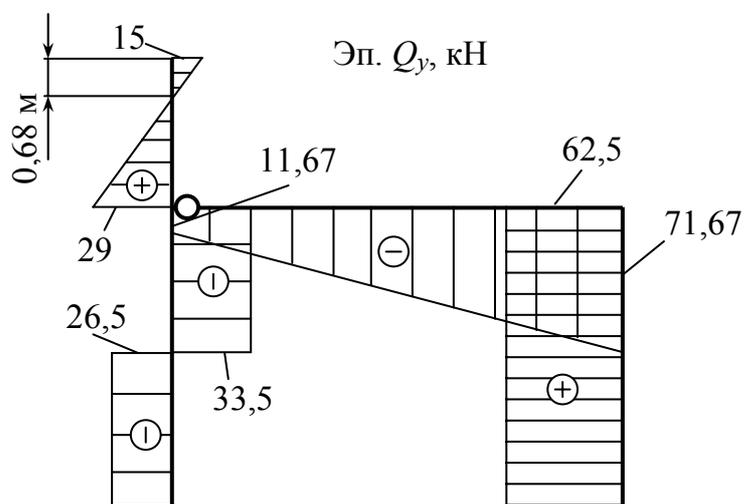
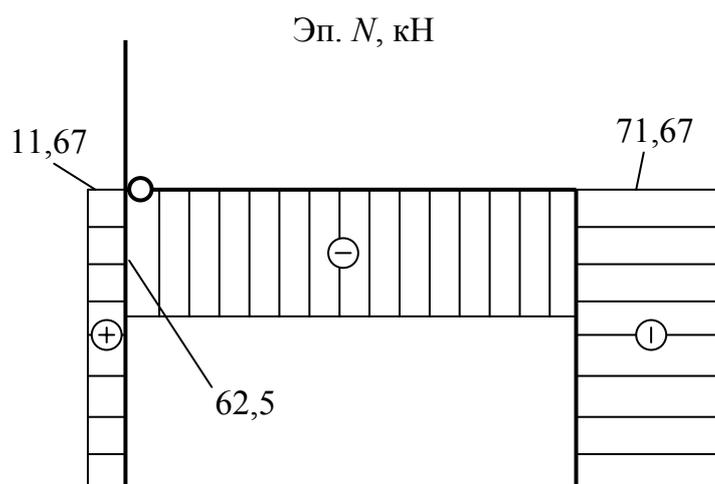


Рис. 13

Рама имеет четыре участка (рис. 14).

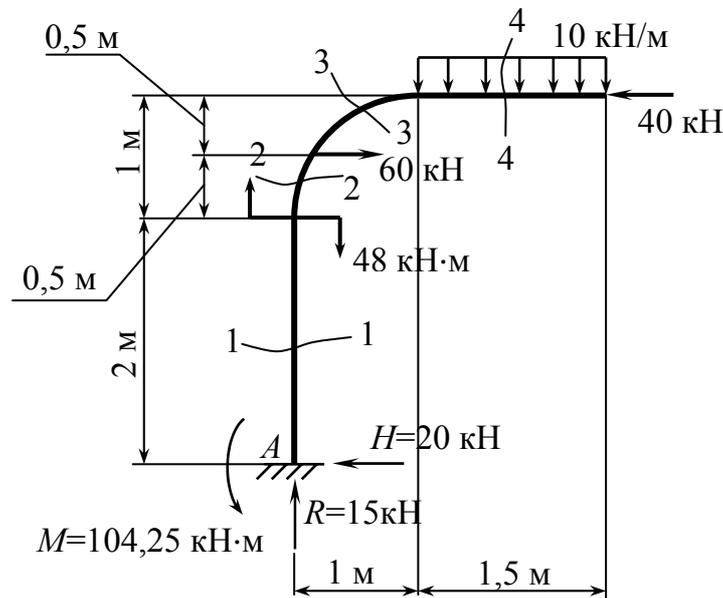


Рис. 14

Для первого участка $0 \leq x_1 \leq 2$ м (рис. 15, а):

$$\begin{aligned} \sum x_1 = 0; \quad 15 + N_1 = 0 &\rightarrow N_1 = -15 \text{ кН}; \\ \sum y_1 = 0; \quad 20 - Q_{y1} = 0 &\rightarrow Q_{y1} = 20 \text{ кН}; \\ \sum M_1 = 0; \quad 104,25 - 20x_1 - M_{z1} = 0 &\rightarrow M_{z1} = 104,25 - 20x_1; \\ &\text{при } x_1 = 0 \quad M_{z1} = 104,25 \text{ кН}\cdot\text{м}, \\ &\text{при } x_1 = 2 \quad M_{z1} = 64,25 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

На втором участке (рис. 15, б) использованы полярные координаты сечения 2 – 2 ($0^\circ \leq \alpha_2 \leq 30^\circ$):

$$\begin{aligned} \sum x_2 = 0; \quad N_2 + 15\cos\alpha_2 - 20\sin\alpha_2 = 0 &\rightarrow N_2 = 20\sin\alpha_2 - 15\cos\alpha_2; \\ &\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow N_2 = -15 \text{ кН}, \\ &\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow N_2 = -9,32 \text{ кН}, \\ &\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow N_2 = -2,98 \text{ кН}. \\ \sum y_2 = 0; \quad -Q_{y2} + 15\sin\alpha_2 + 20\cos\alpha_2 = 0 &\rightarrow Q_{y2} = 15\sin\alpha_2 + 20\cos\alpha_2; \end{aligned}$$

$$\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow Q_{y2} = 20 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow Q_{y2} = 23,2 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow Q_{y2} = 24,82 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2 = 0; 104,25 - 48 - 20[2 + 1\cos(90^\circ - \alpha_2)] - 15[1 - \cos\alpha_2] + M_{z2} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z2} = -1,25 + 20\cos(90^\circ - \alpha_2) - 15\cos\alpha_2;$$

$$\text{при } \alpha_2 = 0^\circ \rightarrow M_{z2} = -16,25 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 15^\circ \rightarrow M_{z2} = -10,56 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } \alpha_2 = 30^\circ \rightarrow M_{z2} = -4,24 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На третьем участке также используем полярные координаты для сечения 3-3 ($30^\circ \leq \alpha_3 \leq 90^\circ$) (рис. 15, в):

$$\sum x_3 = 0; N_3 + 15\cos\alpha_3 - 20\sin\alpha_3 + 60\sin\alpha_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow N_3 = -15\cos\alpha_3 - 40\sin\alpha_3;$$

$$\text{при } \alpha_3 = 30^\circ \rightarrow N_3 = -32,99 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 60^\circ \rightarrow N_3 = -42,14 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 90^\circ \rightarrow N_3 = -40 \text{ кН}.$$

$$\sum y_3 = 0; -Q_{y3} + 15\sin\alpha_3 + 20\cos\alpha_3 - 60\sin\alpha_3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow Q_{y3} = 15\sin\alpha_3 - 40\cos\alpha_3;$$

$$\text{при } \alpha_3 = 30^\circ \rightarrow Q_{y3} = -27,14 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 60^\circ \rightarrow Q_{y3} = -7,01 \text{ кН},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 90^\circ \rightarrow Q_{y3} = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_3 = 0; 104,25 - 48 - 20[2 + 1\cos(90^\circ - \alpha_3)] - 15[1 - \cos\alpha_3] +$$

$$+ 60[1\cos(90^\circ - \alpha_3) - 0,5] + M_{z3} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{z3} = 28,75 - 40\cos(90^\circ - \alpha_3) - 15\cos\alpha_3;$$

$$\text{при } \alpha_3 = 30^\circ \rightarrow M_{z3} = -4,24 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } \alpha_3 = 60^\circ \rightarrow M_{z3} = -13,39 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

при $\alpha_3 = 90^\circ$ $M_{z3} = -11,25$ кН·м.

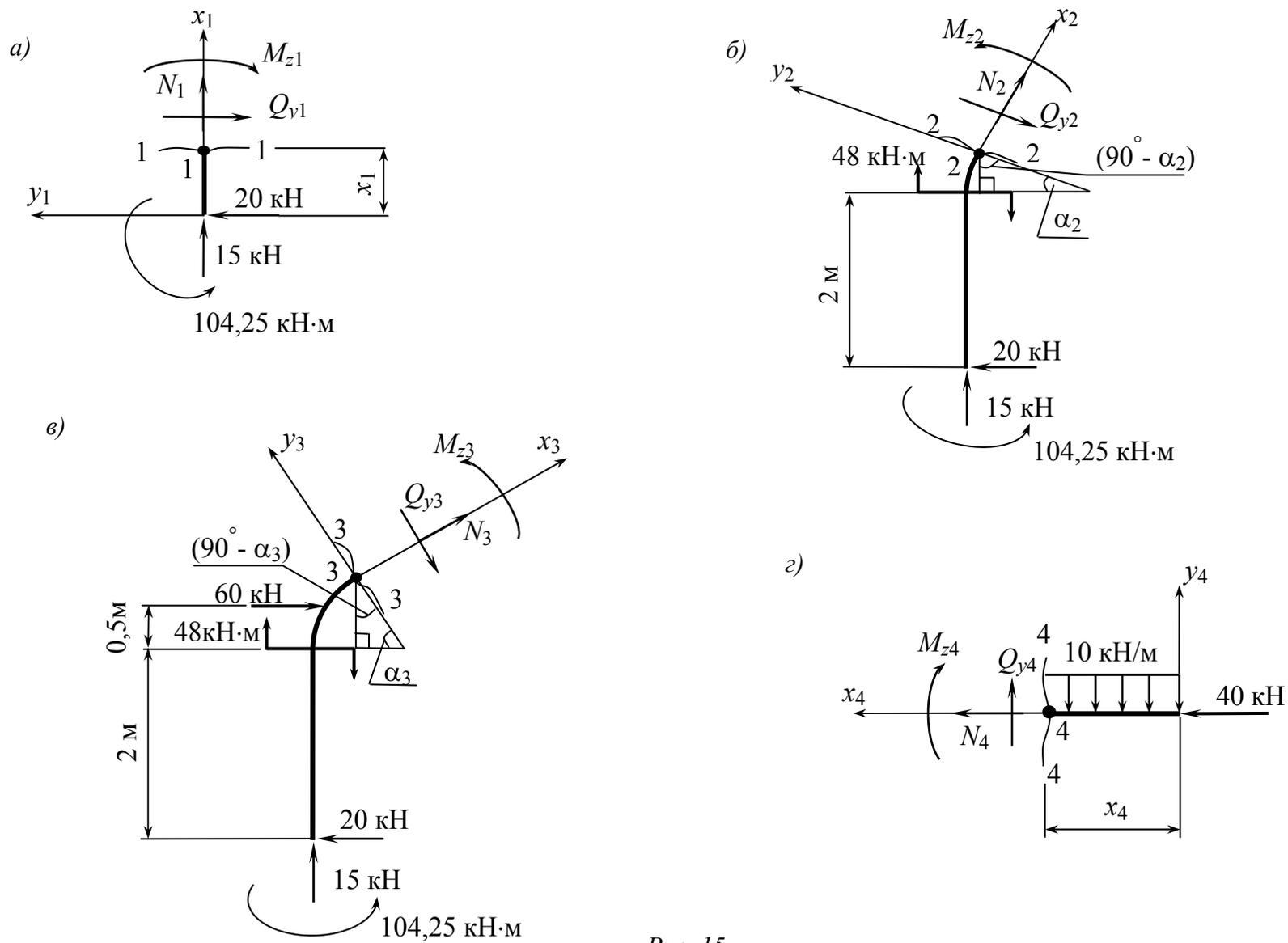


Рис. 15

Для четвертого участка 4 – 4 ($0 \leq x_4 \leq 1,5$ м) (рис. 15, г):

$$\sum x_4 = 0; N_4 + 40 = 0 \rightarrow N_4 = -40 \text{ кН};$$

$$\sum y_4 = 0; Q_{y4} - 10x_4 = 0 \rightarrow Q_{y4} = 10x_4;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad Q_{y4} = 0,$$

$$\text{при } x_4 = 1,5 \quad Q_{y4} = 15 \text{ кН};$$

$$\sum M_4 = 0; -M_{z4} - (10x_4) \frac{x_4}{2} = 0 \rightarrow M_{z4} = -5x_4^2;$$

$$\text{при } x_4 = 0 \quad M_{z4} = 0,$$

$$\text{при } x_4 = 0,75 \quad M_{z4} = -2,81 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$\text{при } x_4 = 1,5 \quad M_{z4} = -11,25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Полученные эпюры представлены на рис. 16.

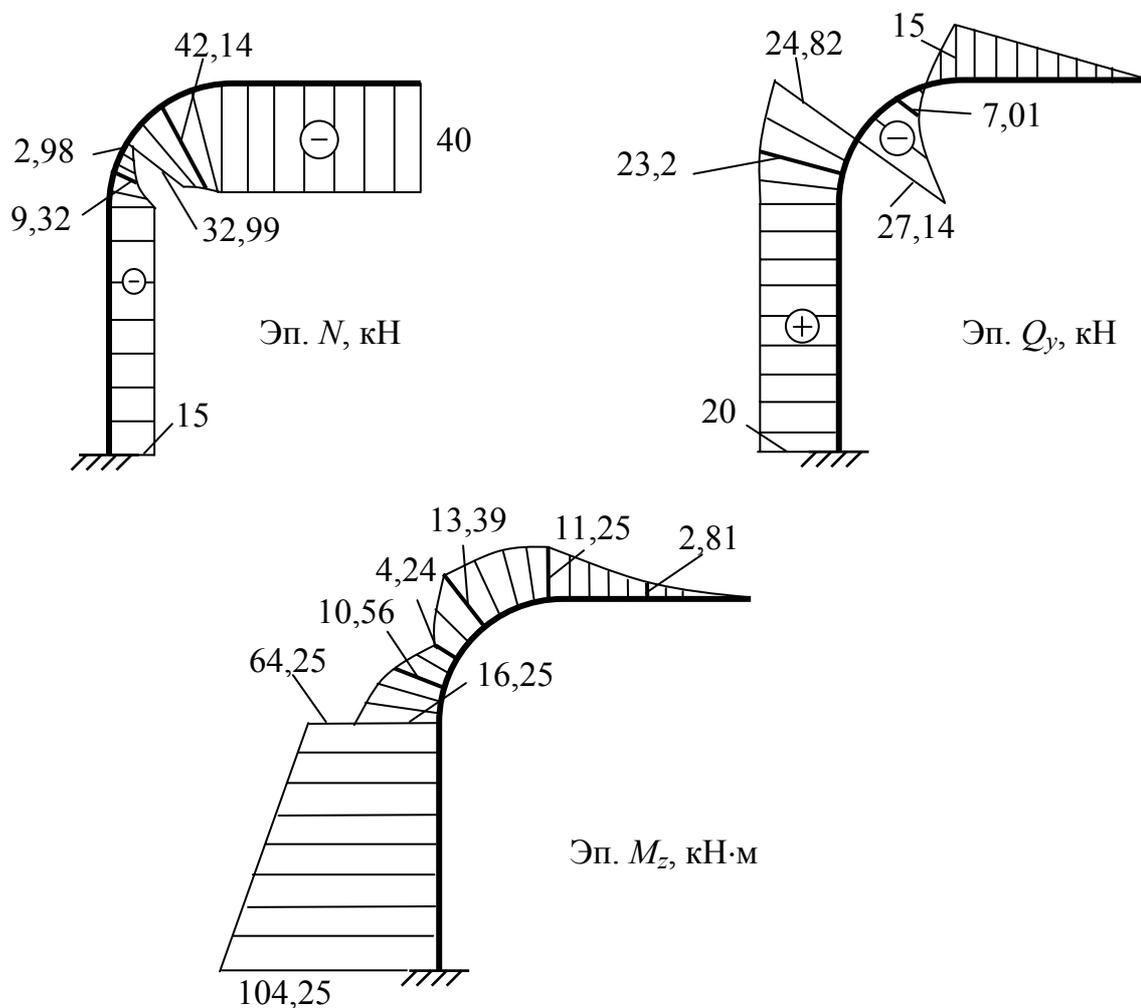


Рис. 16

Задание 3

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

В соответствии с шифром, выданным преподавателем, и данными для расчета, взятыми из табл. 3, для ступенчатого стержня, изображенного на рис. 17, требуется:

1. Построить эпюру нормальных сил.
2. Построить эпюру нормальных напряжений.
3. Построить эпюру перемещений поперечных сечений.
4. Из расчета на прочность по нормальным напряжениям найти площадь поперечного сечения, приняв $R = 210$ МПа.
5. Найти перемещение свободного конца стержня, приняв $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа.

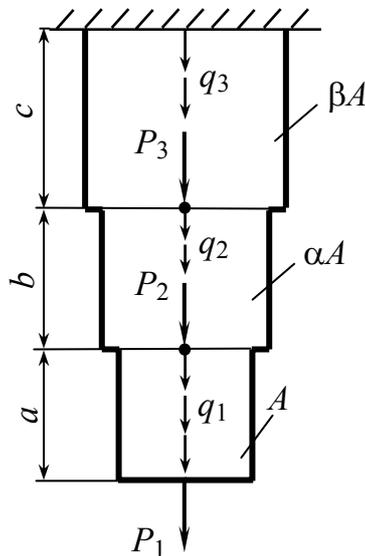


Рис. 17

Пример

Рассмотрим расчет на прочность и жесткость ступенчатого стержня, показанного на рис. 18.

1. Построим эпюру нормальных сил. Для этого разобьем стержень на участки, где зоны изменения нормальных сил остаются неизменными. Это участки 0 – 1, 1 – 2, 2 – 3 (рис. 19, а).

Найдем опорную реакцию R (рис. 19, а).

Таблица 3

№ п/п	I					II					
	a , м	b , м	c , м	α , град.	β , град.	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м
1	2,1	3,4	3,9	1,2	0,4	20	-	10	-10	-	15
2	2,2	1,5	3,8	1,3	0,5	-	-22	12	-14	10	-
3	2,3	1,6	3,7	1,4	0,6	24	-	24	-	-11	18
4	2,4	1,7	3,6	1,5	0,7	-12	28	-	-	12	20
5	2,5	1,8	3,5	1,6	0,8	-	24	-12	6	-	-12
6	2,6	1,9	3,4	1,7	0,9	16	-	28	8	18	-
7	2,7	2,0	3,3	1,8	3,0	-30	-20	-	-5	14	-
8	1,0	2,1	3,2	1,9	2,9	32	-	23	9	-	-17
9	1,1	2,2	3,1	2,0	2,8	40	-26	-	-	-13	19
10	1,2	2,3	2,0	0,5	2,7	-	44	22	11	-	14
11	1,3	2,4	2,1	0,6	2,6	-	-46	18	-	-14	16
12	1,4	2,5	2,2	0,7	2,5	36	-	-30	-	6	-8
13	1,5	2,6	2,3	0,8	2,4	-44	20	-	-15	-	5
14	1,6	2,7	2,4	0,9	2,3	-	-48	29	18	-10	-
15	1,7	2,8	2,5	2,1	2,2	-	40	18	-12	8	-
16	1,8	2,9	2,6	2,2	2,1	-34	12	-	-	15	-7
17	1,9	3,0	2,7	2,3	2,0	39	-	-40	17	-	10
18	2,0	3,1	2,8	2,4	1,9	-	22	41	7	-11	-
19	2,8	3,2	2,9	2,5	1,8	-	-16	44	-10	12	-
20	2,9	3,2	3,0	2,6	1,7	-18	32	-	-	-18	13

Для этого запишем сумму проекций всех сил на ось x :

$$\sum x = 0; 15 + 20 \cdot 2,5 - 40 - R = 0 \rightarrow R = 25 \text{ кН.}$$

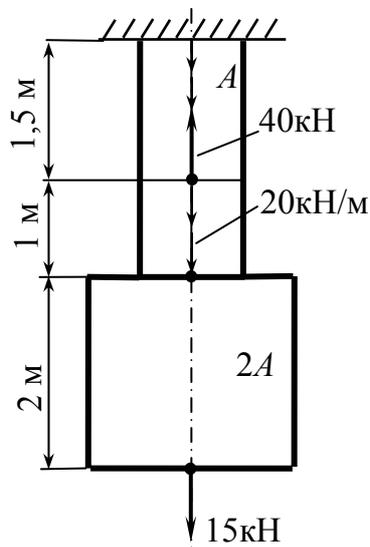


Рис. 18

Для построения эпюры нормальных сил воспользуемся методом сечений. Свяжем с каждым участком локальную систему координат.

На первом участке $0 - 1$ сделаем сечение $1 - 1$ на расстоянии x_1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м) от начала координат. Отбросим нижнюю часть и рассмотрим равновесие верхней части. Действие нижней части на верхнюю обозначим через N_1 , приняв ее растягивающей, т.е. в направлении от сечения (рис. 19, б). Найдем проекции всех сил, действующих на верхнюю часть, на ось x_1 :

$$\sum x_1 = 0; -25 + 20x_1 + N_1 = 0 \rightarrow N_1 = 25 - 20x_1.$$

$$\text{при } x_1 = 0 \quad N_1 = 25 \text{ кН;}$$

$$\text{при } x_1 = 1,5 \quad N_1 = -5 \text{ кН.}$$

График N_1 имеет вид прямой линии.

Сделаем сечение $2 - 2$ в пределах второго участка $1 - 2$ на расстоянии x_2 ($0 \leq x_2 \leq 1$ м) от начала участка (рис. 19, а).

Отбросим верхнюю часть и рассмотрим равновесие нижней части. Действие отброшенной верхней части на нижнюю обозначим через N_2 (рис. 19, в). Найдем проекции всех сил на ось x_2 :

$$\sum x_2 = 0; -N_2 + 20(1 - x_2) + 15 = 0 \rightarrow N_2 = 35 - 20x_2.$$

$$\text{при } x_2 = 0 \quad N_2 = 35 \text{ кН};$$

$$\text{при } x_2 = 1 \quad N_2 = 15 \text{ кН}.$$

Сделаем сечение 3 - 3 в пределах третьего участка 2 - 3 на расстоянии x_3 ($0 \leq x_3 \leq 2$ м) от начала участка (рис. 19, а).

Рассмотрим равновесие нижней части, обозначив действие верхней части на нижнюю через N_3 (рис. 19, г). Найдем проекции всех сил на ось x_3 :

$$\sum x_3 = 0; -N_3 + 15 = 0 \rightarrow N_3 = 15 \text{ кН}.$$

Следовательно, в пределах третьего участка 2 - 3 нормальная сила постоянна.

Полученные данные позволяют построить эпюру нормальных сил для рассматриваемого стержня (рис. 19, д).

2. Построим эпюру нормальных напряжений.

При центральном растяжении (сжатии) нормальные напряжения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Найдем нормальное напряжение для первого участка 0 - 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м)

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{25 - 20x_1}{A}, \text{ при } x_1 = 0 \quad \sigma_1 = \frac{25 \text{ кН}}{A};$$

$$\text{при } x_1 = 1,5 \quad \sigma_1 = \frac{-5 \text{ кН}}{A}.$$

Нормальное напряжение для второго участка 1 - 2 ($0 \leq x_2 \leq 1$ м)

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{35 - 20x_2}{A}, \text{ при } x_2 = 0 \quad \sigma_2 = \frac{35 \text{ кН}}{A};$$

$$\text{при } x_2 = 1 \quad \sigma_2 = \frac{15 \text{ кН}}{A}.$$

Нормальное напряжение для третьего участка 2 - 3 ($0 \leq x_3 \leq 2$ м)

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{15 \text{ кН}}{2A} = \frac{7,5 \text{ кН}}{A}.$$

Полученные данные позволяют построить эпюру нормальных напряжений (рис. 19, е).

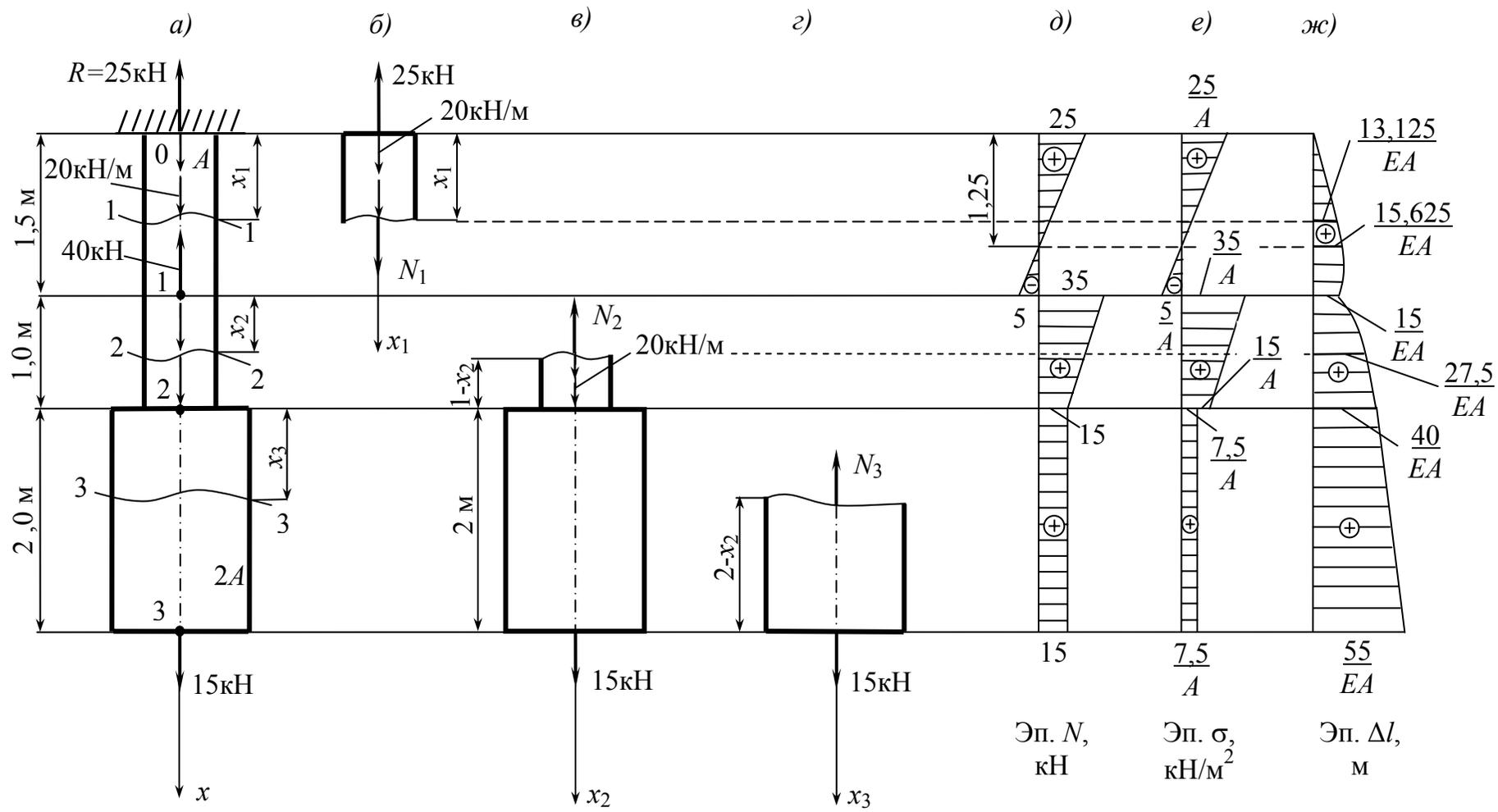


Рис. 19

3. Построим эпюру перемещений сечений стержня.

Перемещение точки с координатой x определяется по формуле:

$$\Delta l = \Delta l_0 + \int_0^x \frac{N}{EA} dx,$$

где Δl_0 - перемещение начала координат (участка).

Для первого участка 0 – 1 ($0 \leq x_1 \leq 1,5$ м) получим

$$\Delta l_1 = \Delta l_0 + \int_0^{x_1} \frac{N_1}{EA_1} dx = 0 + \int_0^{x_1} \frac{25 - 20x_1}{EA} dx = \frac{1}{EA} (25x_1 - 10x_1^2).$$

Графиком этой зависимости будет квадратная парабола. Поэтому для построения эпюры необходимо найти значения перемещений на концах и в середине участка. При $x_1 = 0$ $\Delta l_1 = 0$;

$$x_1 = 0,75 \quad \Delta l_1 = \frac{13,125 \text{ кН}}{EA};$$

$$x_1 = 1,5 \quad \Delta l_1 = \frac{15 \text{ кН}}{EA}.$$

Заметим, что перемещение на первом участке будет иметь экстремум при $x_1 = 1,25$ м и его значение будет равно $\Delta l_1 = \frac{15,625 \text{ кН}}{EA}$.

Для второго участка 1 – 2 ($0 \leq x_2 \leq 1,0$ м) получим

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 + \int_0^{x_2} \frac{N_2}{EA_2} dx = \frac{15}{EA} + \frac{1}{EA} (35x_2 - 20x_2^2).$$

Графиком этой зависимости также будет квадратная парабола. Поэтому для построения эпюры находим значения перемещений на концах и в середине участка. При $x_2 = 0$ $\Delta l_2 = \frac{15 \text{ кН}}{EA}$;

$$x_2 = 0,5 \quad \Delta l_2 = \frac{27,5 \text{ кН}}{EA};$$

$$x_2 = 1,0 \quad \Delta l_2 = \frac{40 \text{ кН}}{EA}.$$

Для третьего участка 2 – 3 ($0 \leq x_3 \leq 2,0$ м) получим

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 + \int_0^{x_3} \frac{N_3}{EA_3} dx = \frac{40}{EA} + \frac{7,5}{EA} x_3.$$

Графиком этой зависимости будет прямая линия. Поэтому для построения эпюры найдем значения перемещений только на концах участка.

$$\text{При } x_3 = 0 \quad \Delta l_3 = \frac{40 \text{ кН}}{EA};$$

$$x_3 = 2,0 \quad \Delta l_3 = \frac{55 \text{ кН}}{EA}.$$

Полученные значения перемещений позволяют построить эпюру перемещений стержня (рис. 19, ж).

4. Определим величину площади поперечного сечения стержня.

Из условия прочности по нормальным напряжениям, приняв $R = 210$ МПа, определяем величину площади поперечного сечения стержня. Для этого из эпюры нормальных напряжений (рис. 19, е) находим наибольшую величину равную $\sigma_{\max} = \frac{35 \text{ кН}}{EA}$. Тогда условие прочности запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{35 \text{ кН}}{EA} \leq R = 210 \text{ МПа} = 210 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Отсюда

$$A > \frac{35}{210 \cdot 10^3} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Найдем перемещение свободного конца стержня при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $A = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$:

$$\Delta l_3 = \frac{55 \text{ кН}}{EA} = \frac{55 \cdot 10^3 \text{ Н}}{2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Задание 4

РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ

В соответствии с шифром, выданным преподавателем, и данными для расчета, взятыми из табл. 4, для балки, изображенной на рис. 20, с поперечным сечением (см. рис. 21) требуется:

1. Построить эпюры M и Q от действующей нагрузки.
2. Подобрать размеры поперечного сечения из условия прочности по нормальным напряжениям, приняв $R_{\text{раст}} = R_{\text{сж}} = R = 12$ МПа.
3. Построить эпюру нормальных напряжений для опасного сечения.
4. Построить эпюру касательных напряжений для сечения, где поперечная сила максимальна.
5. Для поперечного сечения, по указанию преподавателя, требуется найти:
 - а) главные напряжения и положение главных площадок для точки в поперечном сечении;
 - б) наибольшие касательные напряжения и площадки, где они возникают, а также нормальные напряжения на них;
6. Определить прогиб и угол поворота балки в точке, указанной в табл. 4, методом начальных параметров.

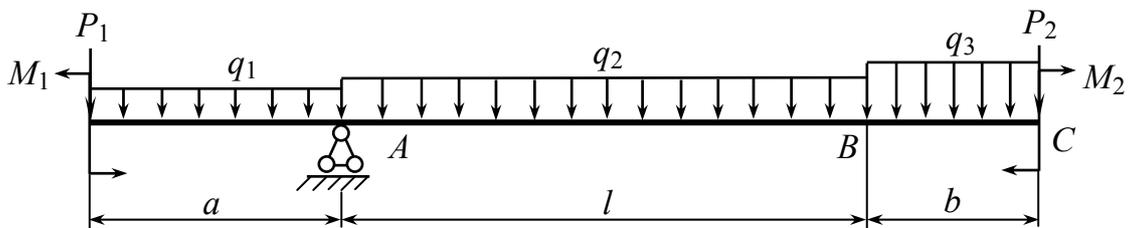


Рис. 20

Пример

Рассчитать на прочность и жесткость балку, изображенную на рис. 22, а, с поперечным сечением, показанным на рис. 22, б. Материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие и имеет $R = 12$ МПа.

Таблица 4

№ сечения	I						II					
	a , м	l , м	b , м	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м	P_1 , кН	P_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	 в точке	Перемещения в точке
1	0,5	4,0	1,3	10	49	-	20	-	-	15	<i>B</i>	<i>C</i>
2	0,6	4,2	1,4	-	50	11	-	21	16	-	<i>C</i>	<i>B</i>
3	0,7	4,4	1,5	-12	51	-	22	-	-	17	<i>B</i>	<i>C</i>
4	0,8	4,6	1,6	-	52	13	-	24	18	-	<i>B</i>	<i>C</i>
5	0,9	4,8	1,7	14	53	-	26	-	-	20	<i>C</i>	<i>B</i>
6	1,0	5,0	1,8	-	54	15	-	28	22	-	<i>C</i>	<i>B</i>
7	1,1	5,2	1,9	15	55	-	30	-	-	24	<i>B</i>	<i>C</i>
8	1,2	5,4	2,0	-	40	17	-	18	10	-	<i>C</i>	<i>B</i>
9	1,3	5,6	0,5	-18	41	-	16	-	-	12	<i>B</i>	<i>C</i>
10	1,4	5,8	0,6	-	42	19	-	14	10	-	<i>C</i>	<i>B</i>
11	1,5	6,0	0,7	-20	43	-	19	-	-	21	<i>C</i>	<i>B</i>
12	1,6	6,2	0,8	-	44	21	-	17	23	-	<i>B</i>	<i>C</i>
13	1,7	6,4	0,9	22	45	-	15	-	-	25	<i>B</i>	<i>C</i>
14	1,8	6,6	1,0	-	46	23	-	13	19	-	<i>C</i>	<i>B</i>
15	1,9	6,8	1,1	24	47	-	23	-	-	21	<i>B</i>	<i>C</i>
16	2,0	7,0	1,2	-	48	25	-	25	18	-	<i>B</i>	<i>C</i>
17	2,1	7,2	1,3	26	56	-	27	-	-	19	<i>C</i>	<i>B</i>
18	2,2	7,4	1,4	-	57	27	-	29	15	-	<i>C</i>	<i>B</i>
19	2,3	7,6	1,5	28	58	-	19	-	-	14	<i>B</i>	<i>C</i>
20	2,4	7,8	1,6	-	59	28	-	17	21	-	<i>C</i>	<i>B</i>

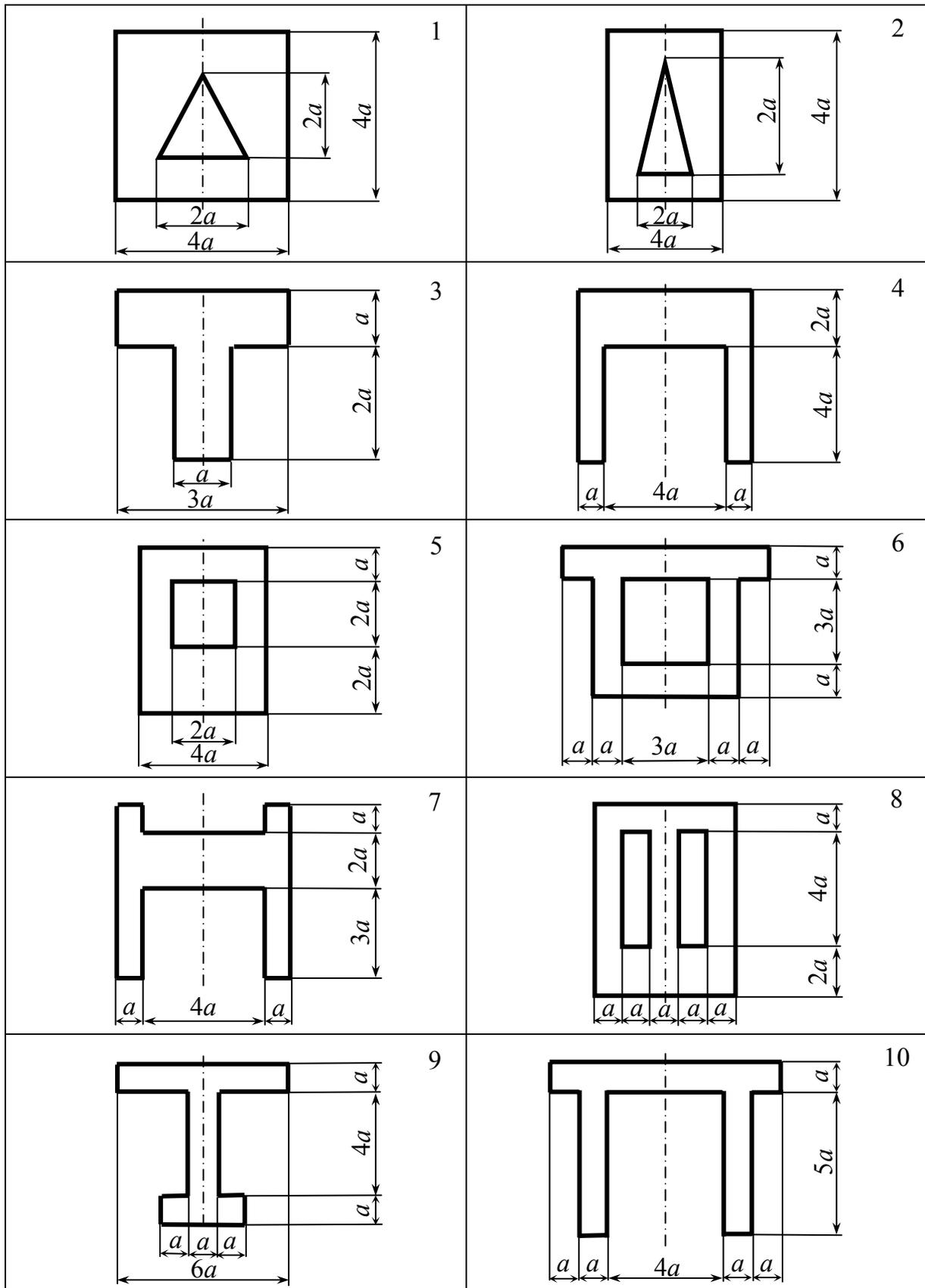
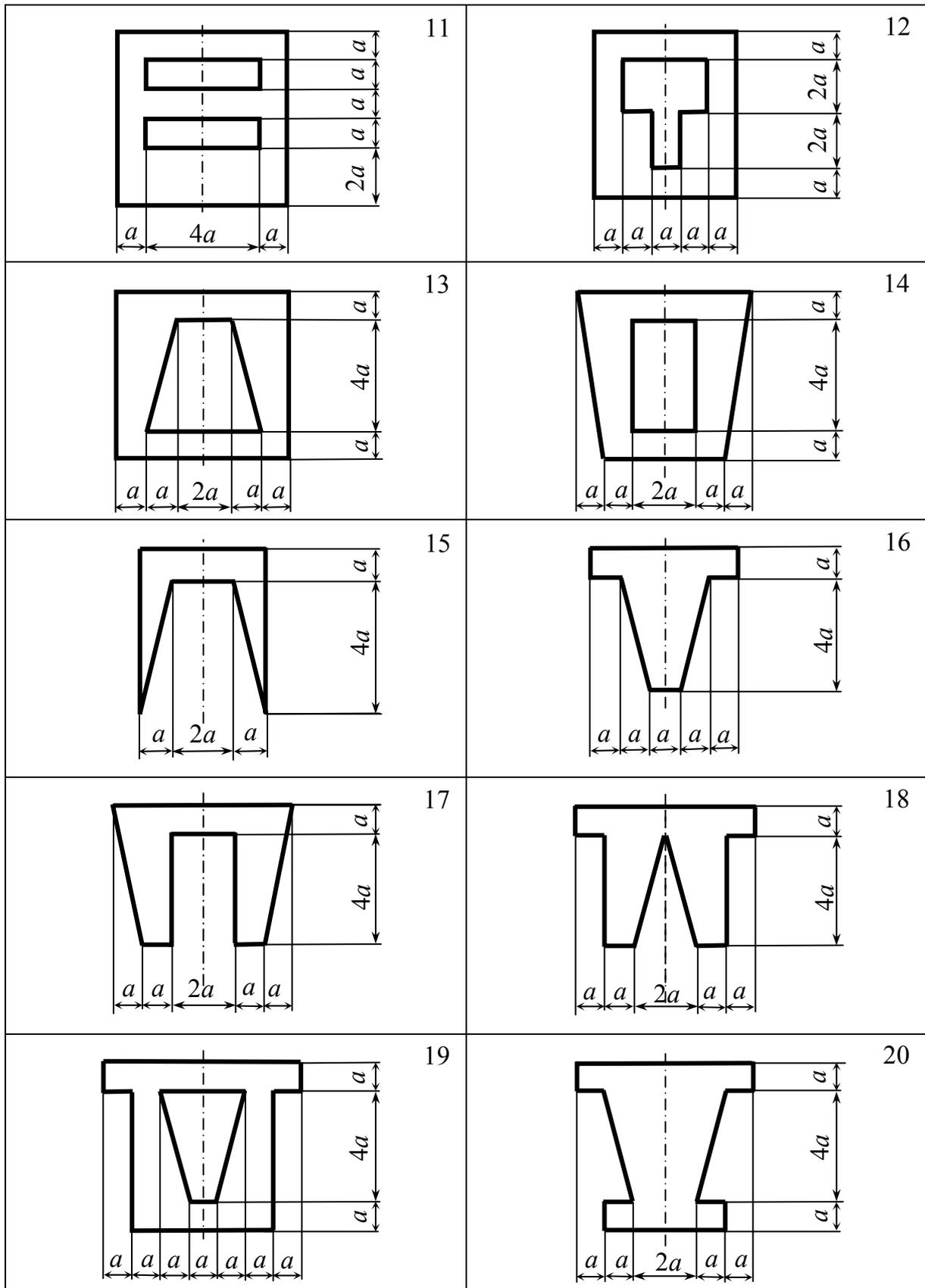


Рис. 21



Окончание рис. 21

Для рассматриваемой балки на рис. 23 представлены эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, а также сечение и главные центральные оси. Найден центр тяжести поперечного сечения, определен момент инерции относительно главной центральной оси z , равный $J_z = 5,125a^4$.

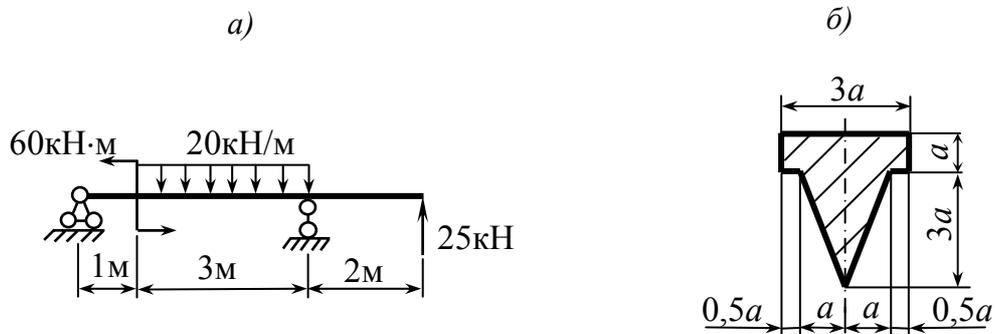


Рис. 22

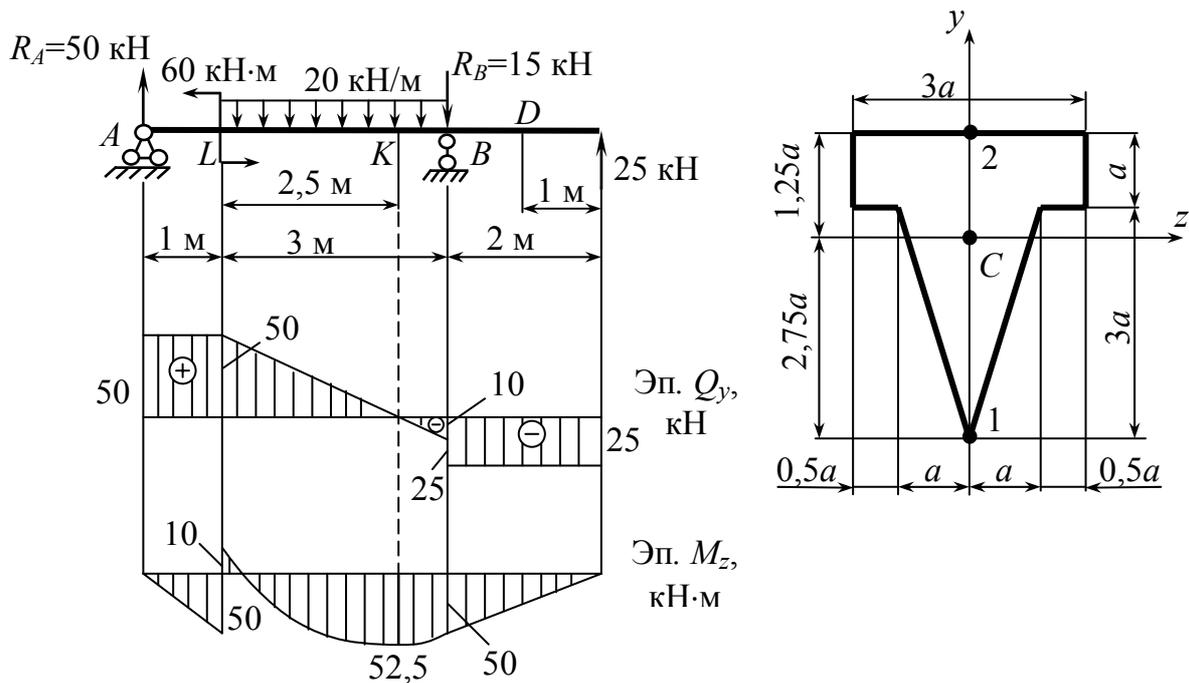


Рис. 23

1. Из условия прочности по нормальным напряжениям подберем параметр a .

Опасным является сечение K , т.к. здесь возникает наибольший изгибающий момент $M_{\max}^K = 52,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = 52,5 \cdot 10^3 \text{ Нм}$ (см. рис. 23).

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J_z} y_{\max} \leq R,$$

где y_{\max} - координата наиболее удаленной от оси z точки. Для нашего сечения это точка 1 (см. рис. 23). Подставляя данные в формулу условия прочности, получим:

$$\frac{52,5 \cdot 10^3}{5,125a^4} 2,75a \leq R = 12 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{\frac{52,5 \cdot 10^3 \cdot 2,75}{5,125 \cdot 12 \cdot 10^6}} = 13,3 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Найдем нормальное напряжение в точке 1 и в точках сечения, лежащих на линии, проходящей через точку 2.

$$J_z = 5,125a^4 = 5,125(13,3 \cdot 10^{-2})^4 = 160361,61 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{M_{\max}}{J_z} y_1 = \frac{52,5 \cdot 10^3}{160361,61 \cdot 10^{-8}} 36,575 \cdot 10^{-2} = 11,97 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = \\ &= 11,97 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{M}{J_z} y_2 = -\frac{52,5 \cdot 10^3}{160361,61 \cdot 10^{-8}} 16,625 \cdot 10^{-2} = -5,44 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = \\ &= -5,44 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Напряжение σ_2 отрицательное, т.к. в этой зоне балка сжимается. Эпюра σ сечения K показана на рис. 24. Размеры сечения на рисунке приведены в сантиметрах.

2. Построим эпюру касательных напряжений в поперечном сечении L , т.к. здесь возникает наибольшая поперечная сила (см. рис. 23), равная 50 кН. Касательные напряжения определяются по формуле

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b_y},$$

где $S_z^{\text{отс}}$ - статический момент площади, лежащей выше или ниже линии, проведенной параллельно оси z через ту точку, где определяются касательные напряжения; b_y – ширина сечения в направлении оси z .

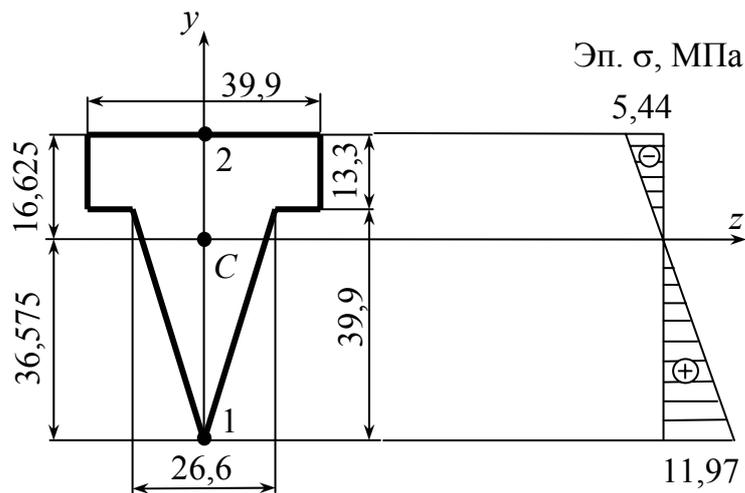


Рис. 24

Для построения эпюры касательных напряжений в сечении L необходимо определить их величины на секущих линиях, проходящих через точки 1, 2, 3, 4, 5, C поперечного сечения (рис. 25, а).

а) В точках 1 и 2 статический момент площади $S^{\text{отс}} = 0$, поэтому касательные напряжения τ_1, τ_2 в этих точках также равны нулю.

б) Найдем касательные напряжения для секущей линии, проходящей через точку 3. Статический момент площади, расположенной выше этой линии:

$$S_z^{\text{отс}} = A^I y_{c1} = 13,3 \cdot 39,9 \cdot 9,975 = 5293,4 \text{ см}^3 = 5293,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Ширина сечения $b_y = 39,9 \text{ см} = 39,9 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Тогда
$$\tau_3 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 5293,4 \cdot 10^{-6}}{160361,61 \cdot 10^{-8} \cdot 39,9 \cdot 10^{-2}} = 0,41 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 0,41 \text{ МПа}.$$

в) Найдем касательные напряжения для секущей линии, проходящей

через точку 4 (рис. 25, а). Статический момент площади отсеченной части $S_z^{\text{отс}} = 5293,4 \cdot 10^{-6}$ м, ширина сечения $b_y = 26,6$ см = $26,6 \cdot 10^{-2}$ м.

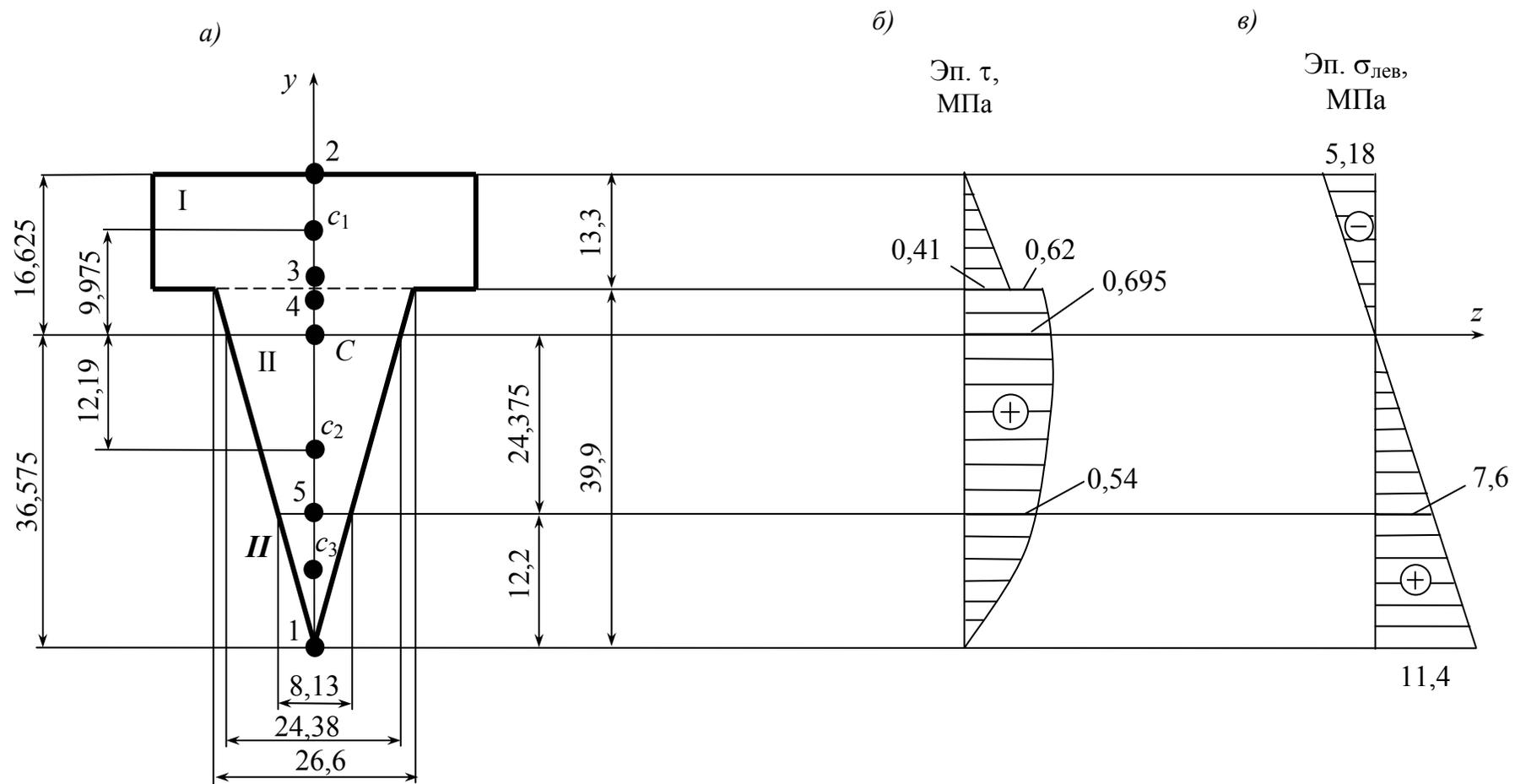


Рис. 25

Тогда
$$\tau_4 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 5293,4 \cdot 10^{-6}}{160361,61 \cdot 10^{-8} \cdot 26,6 \cdot 10^{-2}} = 0,62 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 0,62 \text{ МПа.}$$

г) Найдем касательные напряжения для секущей линии, проходящей через точку C (см. рис. 25, а). Статический момент отсеченной части

$$S_z^{\text{отс}} = A^{\text{II}} y_{c2} = \frac{24,38 \cdot 36,575}{2} 12,19 = 5434,9 \text{ см}^3 = 54349 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Ширина сечения $b_y = 24,38 \text{ см} = 24,38 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Тогда
$$\tau_C = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 5434,9 \cdot 10^{-6}}{160361,61 \cdot 10^{-8} \cdot 24,38 \cdot 10^{-2}} = 0,695 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 0,695 \text{ МПа.}$$

д) Найдем касательные напряжения для секущей линии, проходящей через точку 5 (см. рис. 25, а). Статический момент площади

$$S_z^{\text{отс}} = A^{\text{III}} y_{c3} = \frac{8,13 \cdot 12,2}{2} \left(\frac{12,2}{3} + 24,375 \right) = 1410,5 \text{ см}^3 = 1410,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Ширина сечения $b_y = 8,13 \text{ см} = 8,13 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$

Тогда
$$\tau_5 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1410,5 \cdot 10^{-6}}{160361,61 \cdot 10^{-8} \cdot 8,13 \cdot 10^{-2}} = 0,54 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 0,54 \text{ МПа.}$$

По полученным значениям строим эпюру касательных напряжений для поперечного сечения L балки (см. рис. 25, б).

3. Исследуем поперечное сечение балки, где изгибающий момент и поперечная сила в сочетании достигают наибольших величин. Этим сечением будет L , т.к. $M_z = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $Q_y = 50 \text{ кН}$ (см. рис. 23). Эпюра касательных напряжений для этого сечения показана на рис. 25, б.

4. Построим эпюру нормальных напряжений для сечения L .

Исходя из формулы нормальных напряжений, получим:

$$\sigma_1 = \frac{M}{J_z} y_1 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 36,575 \cdot 10^{-2}}{160361,61 \cdot 10^{-8}} = 11,4 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 11,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{M}{J_z} y_2 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 16,625 \cdot 10^{-2}}{160361,61 \cdot 10^{-8}} = 5,18 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 5,18 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{M}{J_z} y_5 = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 24,375 \cdot 10^{-2}}{160361,61 \cdot 10^{-8}} = 7,6 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 7,6 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 25, в.

5. Исследуем напряженное состояние в поперечном сечении L в точке 5. Так как в этой точке возникают нормальное и касательное напряжения, то здесь существует плоское напряженное состояние, где $\sigma_x = \sigma_z = 7,6$ МПа; $\tau = \tau_5 = 0,54$ МПа; $\sigma_y = 0$ (в силу гипотезы о ненадавливании горизонтальных слоев друг на друга).

а) Найдем главные напряжения в точке 5:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = \frac{7,6 + 0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{7,6^2 + 4 \cdot 0,54^2} = 3,8 \pm 3,84.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 7,64$ МПа, $\sigma_2 = -0,04$ МПа.

б) Найдем положение главных площадок. Угол, образованный нормалью к одной из главных площадок и осью z , определяют по формуле, которая применительно к изгибу балок имеет вид:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau}{\sigma_x} = -\frac{2 \cdot 0,54}{7,6} = -0,142. \text{ Тогда } 2\alpha_0 = -8^\circ \text{ и } \alpha_0 = -4^\circ.$$

Напряженное состояние в точке 5 показано на рис. 26; все напряжения указаны в МПа.

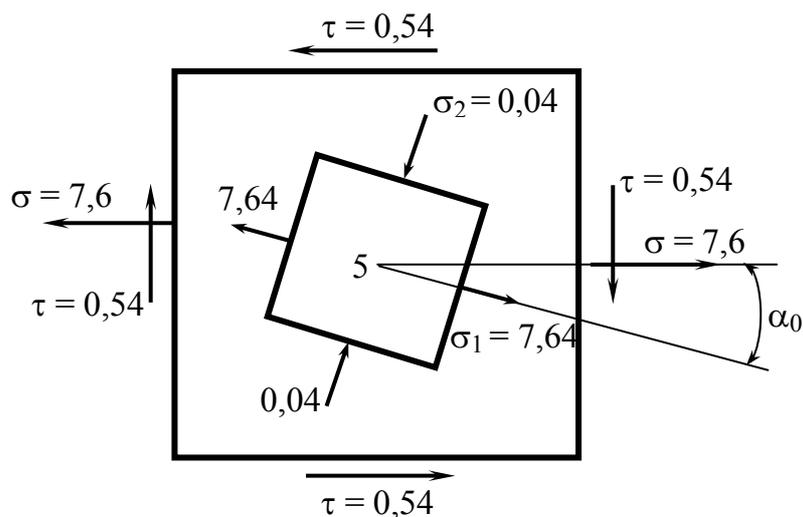


Рис. 26

в) Найдем наибольшие касательные напряжения и площадки, где они возникают. При плоском напряженном состоянии наибольшие касательные напряжения возникают на площадках, повернутых по отношению к главным площадкам на угол 45° :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{7,64 - (-0,04)}{2} = 3,84 \text{ МПа.}$$

Нормальные напряжения на площадках, где касательные напряжения достигают максимума:

$$\sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{7,64 + (-0,04)}{2} = 3,8 \text{ МПа.}$$

Полное напряженное состояние в точке 5 поперечного сечения L в балке показано на рис. 27. Все напряжения указаны в МПа.

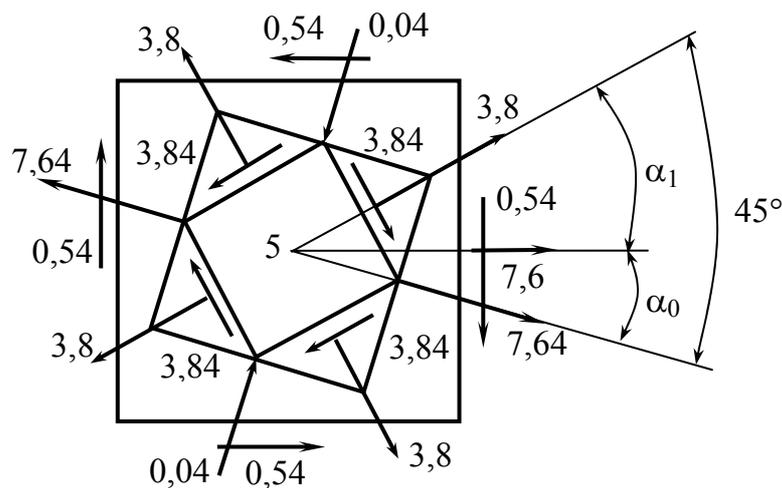


Рис. 27

6. Определим прогиб и угол поворота в поперечном сечении D (см. рис. 23). Воспользуемся методом начальных параметров. Универсальные уравнения прогибов и углов поворота для n -го участка имеют вид:

$$y_n = y_0 + \varphi_0 x + \frac{M_0}{EJ} \frac{x^2}{2!} + \frac{Q_0}{EJ} \frac{x^3}{3!} + \frac{q_0}{EJ} \frac{x^4}{4!} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta y_i + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \varphi_i (x - a_i) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta M_i}{EJ} \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta Q_i}{EJ} \frac{(x-a_i)^3}{3!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta q_i}{EJ} \frac{(x-a_i)^4}{4!} + \dots;$$

$$\varphi_n = \varphi_0 + \frac{M_0}{EJ} x + \frac{Q_0}{EJ} \frac{x^2}{2!} + \frac{q_0}{EJ} \frac{x^3}{3!} + \dots + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \varphi_i + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta M_i}{EJ} (x-a_i) +$$

$$+ \sum_{i=i}^{n-1} \frac{\Delta Q_i}{EJ} \frac{(x-a_i)^2}{2!} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Delta q_i}{EJ} \frac{(x-a_i)^3}{3!} + \dots,$$

где y_0, φ_0 - прогиб и угол поворота в начале координат; M_0, Q_0 - момент и поперечная сила в начале координат; $\Delta y_i, \Delta \varphi_i$ - перепады в значениях прогиба и угла поворота на границах участков; $\Delta M_i, \Delta Q_i$ - скачки в эпюрах моментов и поперечных сил на границах участков; Δq_i - скачки в значениях равномерно распределенной нагрузки на границах участков. Поместим начало координат в крайнюю левую точку балки (рис. 28).

Разобьем балку на участки: I - от точки A до точки 1; II от 1 до B; III от B до 2.

В начале координат: $y_0 = 0, M_0 = 0, Q_0 = R_A = 50 \text{ кН}, q_0 = 0, \varphi_0$ - неизвестно.

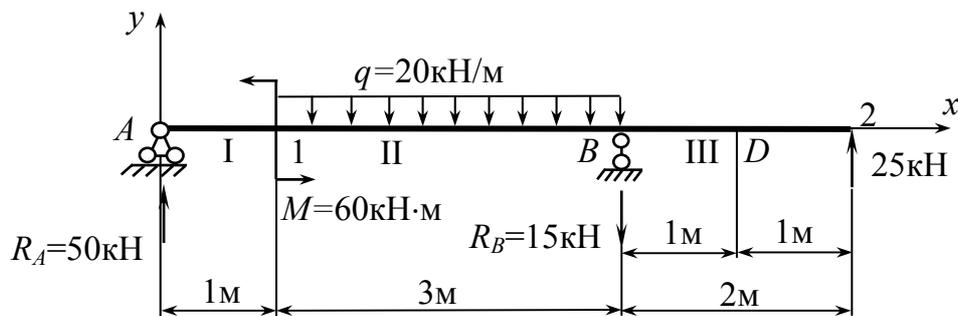


Рис. 28

На границе первого и второго участков:

$$\Delta y_1 = 0, \Delta \varphi_1 = 0, \Delta M_1 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м}, \Delta Q_1 = 0, \Delta q_1 = -20 \text{ кН/м}.$$

На границе второго и третьего участков:

$$\Delta y_2 = 0, \Delta \varphi_2 = 0, \Delta M_2 = 0, \Delta Q_2 = -R_B = -15 \text{ кН}, \Delta q_2 = 20 \text{ кН/м}.$$

Запишем выражения прогибов и углов поворота для каждого участка с учетом вышеприведенных значений.

$$\text{Для I участка } (0 \leq x \leq 1 \text{ м}): y_1 = \varphi_0 x + \frac{50}{EJ} \frac{x^3}{6}, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \frac{50}{EJ} \frac{x^2}{2}.$$

Для II участка $(1 \text{ м} \leq x \leq 4 \text{ м})$:

$$y_2 = \varphi_0 x + \frac{50}{EJ} \frac{x^3}{6} + \frac{60}{EJ} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{20}{EJ} \frac{(x-1)^4}{24},$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{50}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{60}{EJ} (x-1) - \frac{20}{EJ} \frac{(x-1)^3}{6}.$$

Для III участка $(4 \text{ м} \leq x \leq 5 \text{ м})$:

$$y_3 = \varphi_0 x + \frac{50}{EJ} \frac{x^3}{6} + \frac{60}{EJ} \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{15}{EJ} \frac{(x-4)^3}{6} - \frac{20}{EJ} \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{20}{EJ} \frac{(x-4)^4}{24},$$

$$\varphi_3 = \varphi_0 + \frac{50}{EJ} \frac{x^2}{2} + \frac{60}{EJ} (x-1) - \frac{15}{EJ} \frac{(x-4)^2}{2} - \frac{20}{EJ} \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{20}{EJ} \frac{(x-4)^3}{6}.$$

В полученных уравнениях неизвестно φ_0 , которое найдем из условия, что в точке B прогиб равен нулю. Подставив в уравнение прогиба для второго участка $x = 4 \text{ м}$, получаем

$$4\varphi_0 + \frac{50}{EJ} \frac{4^3}{6} + \frac{60}{EJ} \frac{3^2}{2} - \frac{20}{EJ} \frac{3^4}{24} = 0, \text{ следовательно } \varphi_0 = -\frac{184,0}{EJ}.$$

Угол при повороте против часовой стрелки считается положительным. Тогда, подставив найденные значения в уравнения прогибов и углов поворота сечений, получим их окончательные значения.

Для нашего примера запишем уравнения прогибов и углов поворота для III участка в точке D :

$$y_3 = \frac{1}{EJ} \left(-184x + 8,33x^3 + 30(x-1)^2 - 2,5(x-4)^3 - 0,83(x-1)^4 + 0,83(x-4)^4 \right),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{EJ} \left(-184 + 25x^2 + 60(x-1) - 7,5(x-4)^2 - 3,67(x-1)^3 + 3,67(x-4)^3 \right).$$

Подставив в полученные выражения координату точки D , равную 5 м, получаем

$$y_D = \frac{387,1}{EJ}, \quad \varphi_D = \frac{442,25}{EJ}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный практикум содержит задания, выполнение которых поможет студенту освоить курс сопротивления материалов – овладеть методами расчетов элементов строительных конструкций на прочность и жесткость. Эти знания будут использованы при изучении методов расчета более сложных конструкций, которым посвящена вторая часть практикума. Полученные навыки расчетов послужат основой для проектирования строительных конструкций, которое будет изучаться в дальнейшем в специальных курсах.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра сопротивления материалов

РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНАЯ (КУРСОВАЯ) РАБОТА

ПО _____
(название курса)

_____ (название расчетно-проектировочной (курсовой) работы)

Вариант _____

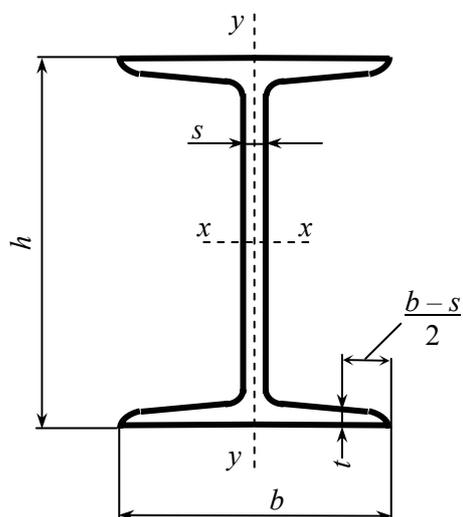
Выполнил: _____
(Ф.И.О.)

гр. _____

Принял _____
(Ф.И.О. преподавателя)

Владимир 2003

**ДУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
(ГОСТ 8239-89)**



h - высота дутавра

b - ширина полки

s - толщина стенки

t - средняя толщина полки

A - площадь поперечного сечения

I - момент инерции

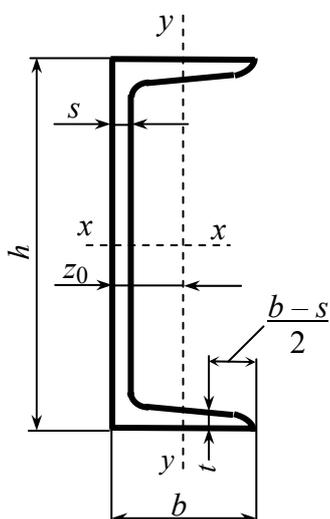
W - момент сопротивления

S - статический момент полусечения

i - радиус инерции

Номер дутавра	Масса l м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

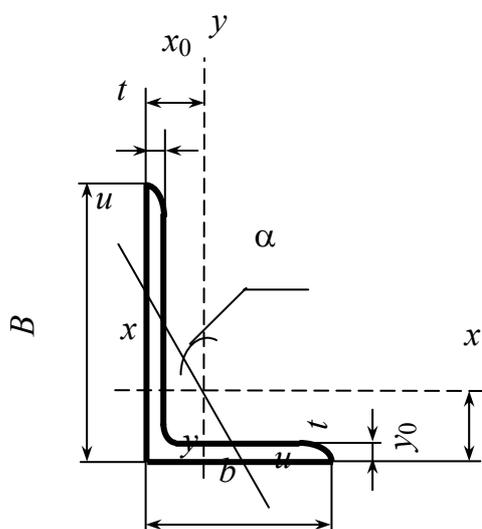
**ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
(ГОСТ 8240-89)**



- h - высота швеллера
- b - ширина полки
- s - толщина стенки
- t - средняя толщина полки
- A - площадь поперечного сечения
- I - момент инерции
- W - момент сопротивления
- S - статический момент полусечения
- i - радиус инерции
- z_0 - расстояние от оси y до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A , см ²	I_x , см ⁴	W_{x_3} , см ³	i_x , см	S_{x_3} , см ³	I_y , см ⁴	W_{y_3} , см ³	i_y , см	z_0 , см
		h	b	s	t									
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	5,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	10	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	10	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	11	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	11	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

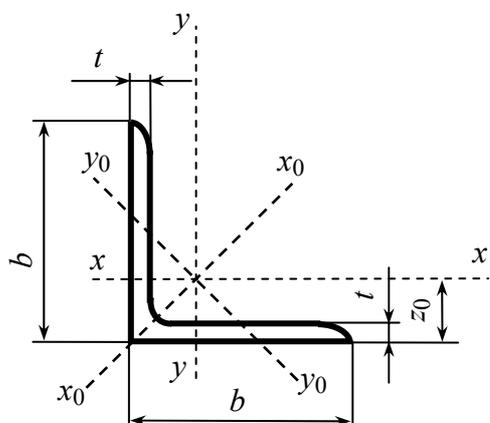
**УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ
(ГОСТ 8510-86)**



B - ширина большей полки
b - ширина меньшей полки
t - толщина полки
A - площадь поперечного сечения
I - момент инерции
i - радиус инерции
 α - угол наклона главной центральной оси
I_{xy} - центробежный момент инерции
x₀, *y₀* - расстояние от центра тяжести до
 наружных граней полок

Номер уголка	Мас са, 1 м, кг	Размеры, мм			<i>A</i> , см ²	<i>I_x</i> , см ⁴	<i>i_x</i> , см	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>i_y</i> , см	<i>I_{umin}</i> , см ⁴	<i>i_{umin}</i> , см	tg α	<i>I_{xy}</i> , см ⁴	<i>x₀</i> , см	<i>y₀</i> , см
		<i>B</i>	<i>b</i>	<i>t</i>											
5/3,2	2,40	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,70	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,20	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,70			7	11,1	113	3,19	35,0	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,50	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11,0	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,80	4,01
	12,6			8	16,0	256	4,0	83,0	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18,0	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18,0	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,20	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,390	213	2,28	5,23
	23,6			12	30,0	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,80	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,10	194	2,40	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,50
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,390	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

**УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ
(ГОСТ 8509-86)**

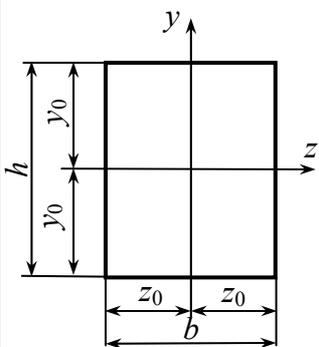
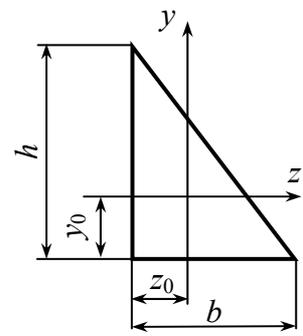
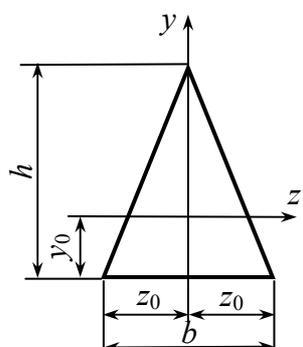
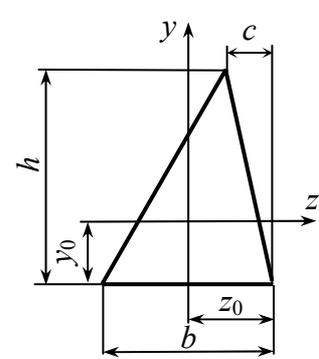


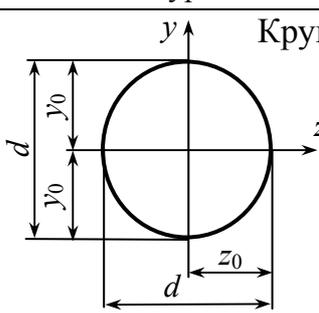
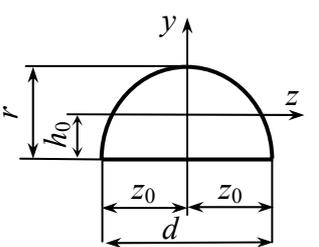
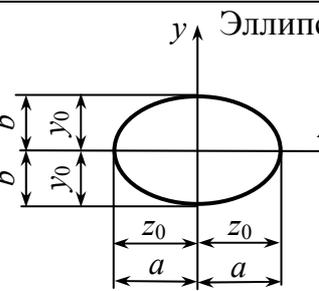
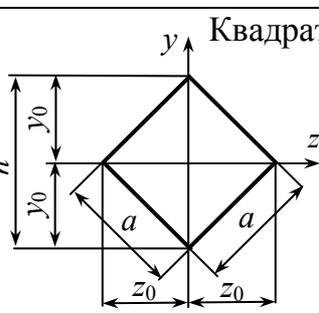
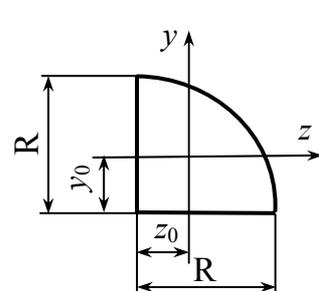
b - ширина полки
 t - толщина полки
 A - площадь поперечного сечения
 I - момент инерции
 i - радиус инерции
 I_{xy} - центробежный момент инерции
 z_0 - расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм		A , см ²	I_x , см ⁴	i_x , см	I_{x0max} , см ⁴	i_{x0max} , см	I_{y0min} , см ⁴	i_{y0min} , см	$ I_{xy} $, см ⁴	z_0 , см
		b	t									
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,80	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	9,41	1,57
6,3	3,90	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11,0	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,90
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,80	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,10
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91
11	11,9	110	7	15,2	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3,0

Номер уголка	Масса l м, кг	Размеры, мм		$A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$I_{x0\max}, \text{см}^4$	$i_{x0\max}, \text{см}$	$I_{y0\min}, \text{см}^4$	$i_{y0\min}, \text{см}$	$ I_{xy} , \text{см}^4$	$z_0, \text{см}$
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22,0	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,40
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,90
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,30
	27,0		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34,0		14	43,6	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ФИГУР ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРАЛЬНЫХ ОСЕЙ

Фигура	A	z_0	y_0	J_z	J_y	J_{xy}
	bh	$\frac{b}{2}$	$\frac{y}{2}$	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{36}$	$-\frac{b^2h^2}{72}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$	0
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{b+c}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh}{36}(b^2 - bc + c^2)$	$\frac{bh^2}{24}(3b - 2c)$

Фигура	A	z_0	y_0	J_z	J_y	J_{xy}
 <p>Круг</p>	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	0
 <p>Полукруг</p>	$\frac{\pi r^2}{2}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2 - 64)r^4}{72\pi} \approx 0,1098r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0
 <p>Эллипс</p>	πab	a	b	$\frac{\pi ab^3}{4}$	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	0
 <p>Квадрат</p>	a^2	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$	$\frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$	0
	$\frac{\pi R^2}{4}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}$	$R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$	$R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right)$	$R^4 \left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right)$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др.; Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – Киев: Вища шк., – 1986. 775 с.
3. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролубов, С.А. Енгальчев, Н.Д. Сергиевский и др. – М.: Высш. шк., – 1985. – 399 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Задание 1. Определение геометрических характеристик плоских фигур	4
Задание 2. Определение внутренних сил	15
Задание 3. Расчет ступенчатого стержня	32
Задание 4. Расчет балки на прочность и жесткость	39
Заключение	52
<i>Приложения</i>	53
<i>Библиографический список</i>	61

Учебное издание

КИСЛОВ Валентин Михайлович
КОНДРАТЬЕВА Людмила Евгеньевна
ЧЕРНОУСОВА Ирина Асафовна

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Практикум
В двух частях
Часть 1

Редактор И.А. Арефьева
Корректор Е.В. Афанасьева
Компьютерная верстка Т.А. Козлова
Дизайн обложки Т.А. Козлова

Изд. лиц. № 020275. Подписано в печать 13.03.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техн. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72. Уч.- изд. л 3,95. Тираж 150 экз.
Заказ 96-2003 г.

Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87