Министерство образования Российской Федерации
Владимирский государственный университет
Кафедра радиотехники и радиосистем

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500

Составитель
П.А. ПОЛУШИН

Владимир 2003

УДК 517.972

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент
Владимирского государственного университета
Л.Н. Фуров

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Владимирского государственного университета

Вариационное исчисление. Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500 / Владим. гос. ун-т; Сост.: П. А. Полушин. Владимир, 2003. 52 с.

Предназначен для магистров по направлению 552500 – радиотехника. Используется при обучении по дисциплинам: «Математический аппарат современной радиотехники» и «История и методология современной радиотехники». Является продолжением изучения математического анализа и решения соответствующих задач. Способствует дальнейшему углублённому знакомству студентов с современным математическим аппаратом с целью последующего применения в научных исследованиях в области радиотехники.

Курс также может использоваться и быть полезен для студентов инженерной формы обучения.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.972

Вариационное исчисление – это область математики, занимающаяся изучением экстремумов функций и функционалов. Если экстремум находится при каких-то условиях, то такие задачи называются условными.

1. НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ

Пусть необходимо найти экстремум функции

$$Z = f(x_1,...,x_n).$$

Имеющиеся дополнительные условия требуют формализации, т.е. преобразования в набор функций относительно x вида:

$$\left\{\begin{matrix} \varphi_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \varphi_2(x_1,...,x_n)=0 \\ --------- \\ \varphi_m(x_1,...,x_n)=0 \end{matrix}\right\},$$

при $m<n$.
Это типовая постановка задачи. Такие задачи решаются двумя способами.

Способ 1.

1. Из одного (любого) уравнения связи выражается одна из переменных $x_1 \leftarrow \varphi_1(x_1,...,x_n)$.
   Полученное x_1 подставляется в f и в $\varphi_2...\varphi_m$.
2. Из другого уравнения выражается $x_2 \leftarrow \varphi_2$. Подставляется в f, $\varphi_3...\varphi_m$, и т.д. Так повторяется m раз. Получается функция $f(x_{m+1},...,x_n)$, зависящая от n-m аргументов, а условий не остается вообще.
3. Ищется безусловный экстремум f и подставляется в обратном порядке в условия связи.

2. МЕТОД МНОЖИТЕЛЯ ЛАГРАНЖА ПРИ НАХОЖДЕНИИ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ

Условия применимости:

1. Необходимо, чтобы функции $f\left(x_1 \div x_n\right)$ и $\varphi\left(x_1 \div x_m\right)$ были непрерывные и имели непрерывные частные производные по всем аргументам.
2. Во всей области определения x ранг матрицы с элементами $\dfrac{d\varphi_i}{dx_j}$ размера $[n \times m]$ должен быть не меньше m.

При использовании метода:

а) составляется функция Лагранжа вида

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i ,$$

где λ_i – неопределенные множители Лагранжа (неизвестные коэффициенты);

б) Составляется n уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

и m уравнений вида

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x_1 \ldots x_n\right) = 0 \\ \varphi_2\left(x_1 \ldots x_n\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m\left(x_1 \ldots x_n\right) = 0 \end{cases} .$$

Таким образом мы имеем $m+n$ уравнений и $m+n$ неизвестных. Далее решается эта система. Точки, в которых производная функции f по всем аргументам $x_1 \ldots x_n$ равна нулю, называются стационарными точками. Если решение одно, то соответствующий экстремум называется глобальным экстремумом. Если решений несколько, то у функции несколько локальных экстремумов. Полученные наборы x указывают координаты экстремума. После этого необходимо проверять каждый экстремум. При этом возможны 3 варианта ситуаций в каждой точке:

1) Максимум.
2) Минимум.
3) Седловая точка.

Проверка производится следующим образом:
Строится квадратичная форма

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\Delta x_i \Delta x_k \Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^{\nabla} \\ x_2 = x_2^{\nabla} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n = x_n^{\nabla}}} \quad (x_1^{\nabla} \div x_n^{\nabla}) \text{ – решение системы.}$$

Если в некоторой малой окрестности квадратичная форма

$$d^2\Phi > 0 \text{ – то имеется максимум,}$$

$$d^2\Phi < 0 \text{ – то имеется минимум.}$$

Если $d^2\Phi$ может быть и больше, и меньше нуля, то имеется седловая точка.

Пример 1.

Дана функция

$$z = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

Найти экстремум при условии

$$\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0.$$

Сначала ищем безусловный экстремум

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) = 0; \quad x^{\nabla} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y+1) = 0; \quad y^{\nabla} = -1;$$

$$z_{ex} = z_{\min} = 0.$$

Теперь найдём условный экстремум.

Из условия выразим y:

$$y = 1 - x;$$

$$z = (x-1)^2 + (2-x)^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) + 2(2-x) = 0; \quad x^{\nabla} = 1{,}5; \quad y^{\nabla} = -0{,}5;$$

$$z_{\min} = 1/2.$$

Наличие условия приводит к другому значению экстремума и другим его координатам.

Пример 2. (Метод множителей Лагранжа).

$$f(x, y, z) = xyz;$$

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y - z - 3 = 0;$$

$$\varphi_2(x, y, z) = x - y - z - 8 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, z) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - z - 8 = 0 \end{cases}.$$

При решении получим:

$$\lambda_1 = \frac{11}{32}; \ \lambda_2 = -\frac{231}{32}; \ x^{\nabla} = \frac{11}{4}; \ y^{\nabla} = -\frac{5}{2}; \ z^{\nabla} = -\frac{11}{4}; \ f_{ex} = \frac{605}{32}.$$

Определим характер найденной точки.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = z; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = x;$$

$$d^2\Phi = 2xdydz + 2ydxdy + 2zdxdy.$$

Из условий связи:

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases};$$

$$dy = 0; \quad dx = dz;$$

$$d^2\Phi = 2y^{\nabla} dx^2.$$

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 = -5dx^2 < 0.$$

При любом знаке *x* квадратичная форма больше нуля, то есть в исследуемой точке имеется максимум.

3. ФУНКЦИОНАЛ

Пусть дан некоторый класс *M* функций *y(x)*. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие некоторое число *J*, то говорят, что в классе *M* определен функционал *J*.

$$J = J[y(x)].$$

Класс *M*, в котором определен этот функционал, называется областью задания функционала.

Пример 1.

Пусть *M* – совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

Определенный интеграл следующего вида будет функционалом:

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx;$$

при $y(x) = c \rightarrow J = c;$

при $y(x) = e^x \rightarrow J = e - 1;$

при $y(x) = \cos \pi x \rightarrow J = 0.$

Пример 2.

Пусть *M* – класс функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a, b]$ и пусть $x_0 \in [a, b]$, тогда функционалом можно считать следующее:

$$J = y'(x_0); \quad a = 1; \quad b = 3; \quad x_0 = 2;$$

при $y(x) = x^2 \rightarrow J = 4;$

при $y(x) = \ln(1 + x) \rightarrow J = \frac{1}{3}.$

4. ВАРИАЦИИ

Вариацией (приращением) δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя некоторыми функционалами, при этом обе функции принадлежат классу *M*

$$\delta y = y(x) - y(x_0).$$

Если функция *y* *k*-раз дифференцируема, то вариация порядка *k*

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y^{(k)}(x_0).$$

Говорят, что функции $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле нулевого порядка, если на рассмотренном отрезке $[a,b]$ выполняется условие: $|y(x) - y_1(x)|$ – мала. Геометрически это означает, что на рассмотренном участке функции близки по аргументам. Близость первого порядка – если мала не только их разность, но и разность между их производными.

$$\begin{cases} |y(x) - y_1(x)| \\ |y'(x) - y'(x)| \end{cases} \text{ – малые.}$$

Близость *k*-го порядка – добавляется условие:

$$\left|y^{(K)}(x) - y_1^{(K)}(x)\right| \text{ – мала}$$

(и малы все разности более низких порядков).

Если выполняется близость *k*-го порядка, то выполняется и близость предыдущего порядка.

Пример.

Имеются кривые $y(x) = \dfrac{\sin^2}{n}$ и $y_1(x) \equiv 0$. Рассмотрим их на интервале $[0, \pi]$. Можно утверждать, что они близки в смысле нулевого порядка при больших *n*.

$$|y(x) - y_1(x)| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

А в смысле первого порядка близости нет, т.к. в точке

$$x = \frac{2\pi}{n^2}.$$

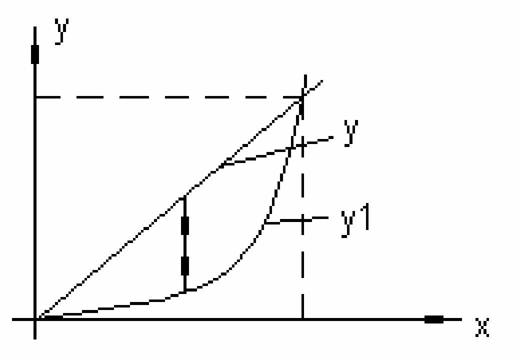
$$\left| y'(x) - y_1'(x) \right| = n \left| \cos n^2 x \right|;$$

с ростом *n* это выражение можно сделать сколь угодно большим.

Расстоянием между кривыми $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x)$ на отрезке $a \div b$ (считаем обе функции непрерывными) называется неотрицательное число ρ, равное максимуму модуля разности между ними на этом отрезке.

Пример.

Имеются функции $y = x$ и $y_1 = x^2$, $a \div b = 0 \div 1$.



$$\rho_1(x) = y - y_1 = x - x^2;$$

$$\frac{d\rho_1}{dx} = 1 - 2x;$$

$$1 - 2x = 0.$$

Максимальное расстояние в точке

$$x = \frac{1}{2}.$$

Оно равно $\rho = \frac{1}{4}$.

Расстоянием n-го порядка между кривыми называется наибольший из максимумов из следующих величин:

$$\left| f(x) - f_1(x) \right|$$

$$\left| f'(x) - f_1'(x) \right|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left| f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x) \right|,$$

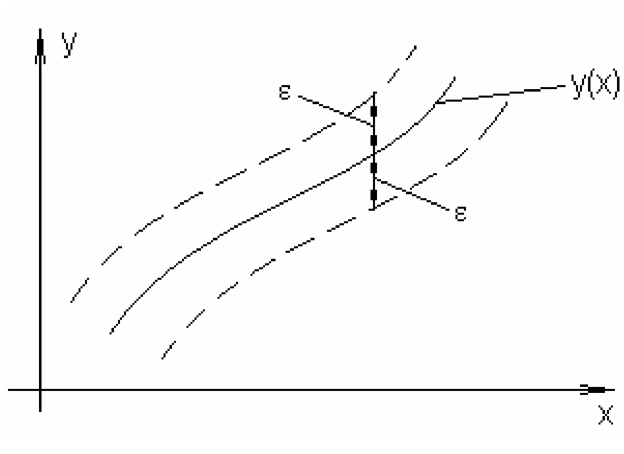
на отрезке $[a,b]$.

$$\rho_n = \rho_n\left[f(x), f_1(x)\right] = \max_{0 \le k \le n} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x) \right|.$$

ε окрестностью n-го порядка кривой $y(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется совокупность кривых $f_1(x)$, расстояние n-го порядка которых от исходной кривой $y(x)$ меньше ε.

$$\rho_n = \rho_n\left[y(x), f_1(x)\right] < \varepsilon.$$

Окрестность нулевого порядка называется сильной окрестностью. Окрестность первого порядка – слабой окрестностью. Физический смысл сильной окрестности – это совокупность всех непрерывных кривых, которые можно провести в полосе шириной 2ε около кривой $y = f(x)$.



Функционал $J[y(x)]$ в классе функций M называется непрерывным, при $y = y_0(x)$ в смысле близости n-го порядка, если для любого ε, можно подобрать такое число $\eta > 0$, чтобы выполнялось условие:

Если $\rho_n\left[y(x), y_0(x)\right] < \eta$; то $\left| J[y(x)] - J[y_0(x)] \right| < \varepsilon$.

В противном случае, он разрывный. Функционал называется линейным, если для него справедливы все свойства линейных операторов.

5. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Дан функционал

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx,$$

где F – известная функция;

y – неизвестная, кусочно – гладкая функция.

Требуется найти минимум этого функционала среди всех кусочно-гладких функций y.

Условия:

1. Функция $y(x)$ должна соединять точки $y_1 = y(x_1)$и $y_2 = y_2(x_2)$.

2. Необходимо, чтобы $F(x, y, y')$ была непрерывна по всем трем аргументам (x, y, y'), а также, чтобы были непрерывны все производные по ним до третьего порядка.

Минимум (максимум) функционала $J[y]$, достигаемый в сильной (слабой) окрестности функции $y_0(x)$ называется сильным (слабым) минимумом (максимумом) функционала $J[y]$. Экстремум функционала $J[y]$ по всей совокупности функций y, на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

6. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА. 1-я и 2-я ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть $\eta(x)$- некая произвольная кусочно-гладкая функция, которая удовлетворяет условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Введем функцию

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

где α - некоторый параметр.

Тогда совокупность всех возможных функций $\tilde{y}(x)$ принадлежит слабой окрестности функции *y*.

Функционал

$$J[\tilde{y}] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, y')dx$$

при условиях

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(x) = y(x_1) = y \\ \tilde{y}(x_2) = y(x_2) = y_2 \end{bmatrix}$$

является функцией параметра α

$$J[\tilde{y}] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')dx = \Phi(\alpha).$$

Показано, что $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$.

Для этого необходимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi(\alpha)}{\partial\alpha} = 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial^2\Phi(\alpha)}{\partial\alpha^2} \geq 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \end{cases}.$$

После дифференцирования $\Phi(\alpha)$ по параметру α:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta + \frac{\partial}{\partial(y')} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')\eta \right] dx = 0. \qquad (6.1)$$

Производная $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$ в точке $\alpha = 0$ называется первой вариацией функционала $J[y]$ и обозначается

$$\delta J = \left. \frac{d\Phi}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Соответствующая производная называется второй вариацией.

$$\delta^2 J = \left. \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0}.$$

Для того, чтобы найденная функция y давала минимум (максимум) $J[y]$, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} \delta J = 0 \\ \delta^2 J > 0 - \text{минимум} \\ \delta^2 J < 0 - \text{максимум} \end{cases}.$$

Если выражение (6.1) проинтегрировать по частям, то получим:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial (y')} - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx \right] \eta' dx = 0.$$

Это выражение должно выполняться для произвольных η. Из этого следует уравнение Эйлера-Лагранжа в интегральной форме

$$F_{y'} - \int_{x_1}^{x} F_y dx \equiv C.$$

После дифференцирования получаем

$$\left(\frac{\partial F}{\partial (y')} = F_{y'};\ \frac{\partial F}{\partial y} = F_y;\right)$$

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0. \qquad (6.2)$$

Выражение (6.2) – одно из основных уравнений вариационного исчисления. Оно же является первым необходимым экстремумом.

Гладкая функция *y(x)*, являющаяся решением этого уравнения, называется экстремальною. Экстремали называют также лагранжевыми кривыми. Экстремаль, удовлетворяющая (6.2), также удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] - F_x = 0.$$

Кроме этого, применяется развернутая форма записи:

$$y'' F_{y'y'} + y' F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0;$$

$$F_{y'y'}=\frac{d}{d(y')}\left[\frac{d}{d(y')}F\right];$$

$$F_{y'y}=\frac{d}{dy}\left[\frac{d}{d(y')}F\right];$$

$$F(x,y,y')=F(X,Y,Z).$$

Хотя аргументы и связаны между собой, но, когда производится дифференцирование по одному из аргументов, другие аргументы считаются константами.

Замечания.

1. Эта формула дает решение с точностью до двух констант, а они определяются из граничных условий.
2. Может оказаться, что при конкретных граничных условиях нет решений или решений бесконечное множество.

Примеры.

1) Дан функционал:

$$J[y(x)]=\int_1^2\left[y'^2-2xy\right]dx \text{, при } y(1)=0,\ y(2)=-1;$$

$$F(x,y,y')=y'^2-2xy;$$

$$F_{y'}=\frac{d}{d(y')}F=2y';$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=\frac{d}{dx}(2y')=2y'';\ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=-2x;\ -2x-2y''=0;$$

$$y+x=0;$$

$$y=-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2.$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases}C_1+C_2=\dfrac{1}{6}\\ 2C_1+C_2=\dfrac{2}{6}\end{cases};$$

$$C_1=\frac{1}{6};\ C_2=0;\ y=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right).$$

2) Найти экстремум функционала:

$$J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y\,dx.$$

Граничные условия:

$$y(1) = 1;\; y(3) = 4{,}5.$$

Уравнения Эйлера в этом случае будут следующими:

$$3x - 2y = 0;$$

$$y(x) = 1{,}5x.$$

Нетрудно убедиться, что полученная экстремаль не удовлетворяет первому граничному условию. Значит, задача решений не имеет.

3) Найти экстремаль функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right)dx.$$

$$y(0) = 1;\; y(2\pi) = 1.$$

Уравнение Эйлера

$$y'' + y = 0.$$

Общее решение

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y = \cos x + C \sin x.$$

Экстремалью являются все эти функции при любом *C*. То есть имеется бесконечное множество решений.

7. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА – ЭРДМАНА

Пусть *y(x)* – решение уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Тогда, если *F* имеет частные производные до 2-го порядка включительно, то во всех точках, где выполняется $\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$, функция *y(x)* имеет непрерывную вторую производную, а, значит, в этой точке нет излома.

Если $\dfrac{\partial^2 F}{\partial(y')^2} = 0$, то в этой точке имеется излом. Линии, составленные из кусков экстремалей, удовлетворяющие условию $\dfrac{\partial^2 F}{\partial(y')^2} \neq 0$, называются ломаными экстремалями.

Условие Лежандра. Во всех точках линии *y(x)*, доставляющей экстремум функционалу *J*, должно выполняться условие:

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ – минимум.

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ – максимум.

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

Условие Вейерштрасса: Если *y* – минимум (максимум), то

$$F(x, y, z) - F(x, y, y') - (z - y')F_{y'}(x, y, y') \geq 0, \ (\leq 0),$$

для произвольных *z* во всех точках этого интервала.

8. СЛУЧАИ УПРОЩЕНИЯ ИЛИ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

В отношении функции $F(x, y, y')$ возможны различные ситуации.

Случай №1.

F не зависит от *y’*. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y(x, y) = 0.$$

Здесь часто возникают ситуации, когда из-за сочетания граничных условий уравнение не имеет решения.

Пример.

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} y(2x - y)dx, \ y(0) = 0, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$2x - 2y = 0, \ y = x.$$

При этих начальных условиях решение имеется, а при других, например,

$$y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{2})=1$$

решение отсутствует.

Случай №2.

F – зависит от y' линейно.

$$F(x,y,y')=M(x,y)+N(x,y)y'.$$

Уравнение Эйлера превращается в более простое:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=0.$$

После взятия производных оно перестаёт быть дифференциальным уравнением и превращается в алгебраическое.

Бывают ситуации, когда в какой-то области это уравнение тождественно равно нулю. Это означает, что в пределах этой области функция $J[y]$ – постоянна, вариационная задача теряет смысл.

Пример.

$$J[y(x)]=\int_a^b\left(y^2+2yy'x\right)dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y;\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0.$$

Случай №3.

F зависит только от y. В этом случае уравнение Эйлера имеет вид:

$$y''Fy'y'=0.$$

Нетрудно получить общее решение:

$y=C_1x+C_2$ – всевозможные прямые линии.

Здесь C_1, C_2 – произвольные константы.

Пример.

Найти экстремум функционала (длина линии между заданными точками).

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y^2(x)}dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B;$$

$y''(x)=0;\quad y=C_1x+C_2;\quad y=\dfrac{B-A}{b-a}(x-a)+A$ (кратчайшее расстояние между двумя точками – прямая).

Случай №4.

F не зависит от y.

$$F = F(x, y').$$

В этом случае уравнение Эйлера преобразуется:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0; \quad F_{y'}(x, y') = C_1$$ - произвольная константа.

Получаем обычное дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример.

Даны 2 точки $A(1,3)$, $B(2,3)$. Среди всевозможных кривых, соединяющих эти 2 точки, найти те, среди которых может достигаться экстремум следующего функционала:

$$J[y(x)] = \int_a^b y'(x)\left[1 + x^2 y'(x)\right]dx.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}F_y(x, y') = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0;$$

$$1 + 2x^2 y' = C; \quad y' = \frac{C-1}{2x^2};$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2; \quad C_1 = \frac{1-C}{2}.$$

Используем начальные условия

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 \end{cases};$$

отсюда:

$$y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

Случай №5.

F не зависит от x в явном виде.

$$F = F(y, y').$$

(Учтем, что $\dfrac{d}{dx}F_y \;= \dfrac{dy}{dx}\dfrac{d}{dy}F_{y'} + \dfrac{dy'}{dx}\dfrac{d}{dy'}F_{y'} = y'F_{y'y} + y''F_{y'y'}$).

В данном случае уравнение примет вид:

$$F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Умножим на y:

$$y' F_y - y'^2 F_{y'y} - y'' y' F_{y'y'} = 0;$$

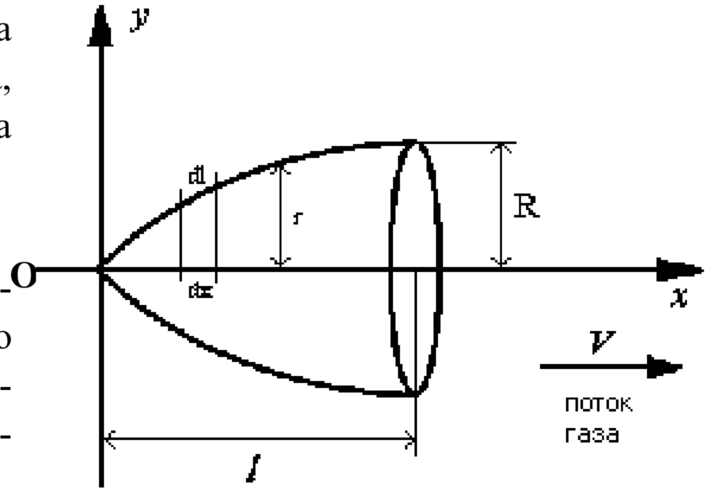
$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \frac{dy}{dx} F_y + \frac{d(y')}{dx} F_{y'} - \frac{d(y')}{dx} F_{y'} - y' \frac{dy}{dx} F_{y'y} - y' \frac{d(y')}{dx} F_{y'y'} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0,$$

где $F - y' F_{y'} = C_1$ – произвольная константа.

Это уравнение решается стандартно разделением переменных.

Пример. Рассмотрим задачу:
Имеется поток газа, в нем движется тело. Какова должна быть форма тела, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление?



Если плотность газа мала и мы далеки от скорости звука, то угол падения молекул газа равен углу отражения:

$$p = 2\rho V^2 \sin^2 \theta,$$

p – плотность газа, V – скорость молекул относительно тела, θ – угол между касательной к образующей и горизонталью.

$$dl = (1 + y')^{1/2} dx; \quad r = y(x).$$

На кольцо шириной dx действует сила:

$$dF = 2\rho V^2 \sin^2 \theta \left[2\pi y \left(1 + y'^2\right)^{1/2} \right] \sin \theta dy.$$

Полная сила, действующая вдоль оси OX.

$$F = \int_0^l dF.$$

Будем искать упрощенное решение, заменив $\sin\theta = \dfrac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{1/2}} \approx y'$.

Тогда сила, тормозящая тело,

$$F = 4\pi\rho V^2 \int_0^l y'^3\, y dx; \quad y(0)=0; \quad y(l)=R.$$

Уравнение Эйлера:

$$y'^3 - 3\frac{d}{dx}\left(yy'^2\right) = 0.$$

Умножим обе части на *y'*. Левая часть становится производной от выражения $y'^3 y$. Интегрируем:

$$y'^3\, y = C; \; y' = \frac{C_1}{\sqrt[3]{y}}; \; y = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4},$$

подставляя начальные условия: $y = R\left(\dfrac{x}{l}\right)^{3/4}$. Контур, оказывающий наименьшее сопротивление обтеканию – парабола степени 3/4.

9. ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

Если функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

преобразуется посредством замены независимой переменной *x* или одновременной заменой *x* и *y*, то экстремаль по-прежнему находится с помощью уравнений Эйлера, но составленного из преобразованного уравнения.

Пусть *x* и *y* являются функциями новых переменных:

$$x = x(U,V); \quad y = y(U,V).$$

Также пусть соблюдается условие взаимной независимости этих функций:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U}; & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U}; & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0;$$

тогда после замены

$$\int F(x,y,y')dx = \int F\left[x(U,V),\, y(U,V),\, \frac{\dfrac{\partial y}{\partial U}+\dfrac{\partial y}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial U}}{\dfrac{\partial x}{\partial U}+\dfrac{\partial x}{\partial V}\dfrac{\partial}{\partial}}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}\right)dU =$$

$$= \int \Phi(U,V,V')dU .$$

$\Phi(U,V,V')$ - некоторая новая функция.

Формулы для нахождения новой экстремали.

$$\Phi_V - \frac{d}{dU}\Phi_{V'} = 0 .$$

Пример.

Найти экстремум у функционала

$$J[y] = \int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}y'^2 - e^x y^2\right)dx .$$

Уравнение Эйлера для подынтегральной функции:

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0 .$$

Делаем замену переменных $(x = \ln U;\;\; y = V)$. Тогда исходный функционал преобразуется к виду:

$$J[V] = \int_0^2\left(e^{-\ln U}U^2V'^2 - e^{\ln U}V^2\right)\frac{dU}{U} = \int_0^2\left(V'^2 - V^2\right)dU .$$

Для такого функционала уравнение Эйлера существенно проще:

$$V'' + V = 0;$$
$$V = C_1\cos U + C_2\sin U .$$

Делая обратную подстановку:

$$y = C_1\cos e^x + C_2\sin e^x .$$

Константы определяются из начальных условий.

10. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Во многих практических приложениях для удобства необходимо использовать параметрическое задание линий:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1.$$

Предполагается, что φ и ψ – непрерывны и имеют хотя бы кусочно-линейные непрерывные производные. Необходимо, чтобы обе производные одновременно не обращались в нуль, т. е. выполнялось условие:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 0.$$

Каждая линия допускает бесконечное множество параметрических представлений.

Например, эллипс может задаваться различными видами параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad -\pi \le t \le \pi,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\left(1 - z^2\right)}{1 + z^2} \\ y = \dfrac{2bz}{1 + z^2} \end{cases}, \qquad -\infty \le z \le +\infty.$$

При неправильном подходе можно найти не истинный экстремум функционала. В этом случае экстремаль может зависеть не от *y*, а от варианта параметрического представления. Чтобы этого не случилось, необходимо и достаточно, чтобы подынтегральная функция не содержала t в явном виде. Необходимо, чтобы выполнялось условие

$$F\left(x, y, kx', ky'\right) = kF\left(x, y, x', y'\right),$$ *k*-константа.

Если некоторая линия *L* определена системой:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

где t меняется на интервале $t_0 \le t \le t_1$ и эта линия L доставляет экстремум J, то ϕ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dx'}\right] = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dy'}\right] = 0 \end{cases}.$$

Уравнения дают возможность отыскать функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Каждое из этих уравнений является следствием другого уравнения. Для этой ситуаций также существует Вейерштрассова форма уравнений Эйлера:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{y'x} - F_{x'y}}{F_1\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}; \qquad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = \frac{F_{y'x'}}{y'x'},$$

где r – радиус кривизны экстремали.

Пример.

Найти экстремаль функционала.

$$J = \int_{0,0}^{x_1, y_1} y^2 y'^2 \, dx.$$

Перейдём к параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение, чтобы исключить зависимость от t.

$$y^2 y'^2 dx = y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = y^2 \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2} \frac{dx}{dt} dt = y^2 \frac{y'^2}{x'^2} x' dt = y^2 \frac{y'^2}{x'} dt.$$

Рассмотрим первое уравнение Эйлера:

$$F_x = \frac{d}{dx}\left(y^2 \frac{y'^2}{x'}\right) = 0; \quad F_{x'} = \frac{d}{dx'}\left(y^2 \frac{y'^2}{x'}\right) = -\frac{y^2 y'^2}{x'^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(y^2\frac{y'^2}{x'^2}\right)=0;\ C_2=0;\ y\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1};$$

$$y^2=2\sqrt{C_1}x+C_2.$$

Она должна проходить через соответствующие граничные точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Отсюда $C_2 = 0$ и получаем:

$$y^2=\left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)x,$$

где y_1, x_1 – координаты точки.

Это уравнение параболы.

11. ОБОБЩЕНИЕ ПРОСТЕЙШЕЙ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

11.1. Формулы, зависящие от производных высших порядков

Минимизация функционала вида:

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F\left[x,y,y',...,y^{(n)}\right]dx.$$

Функция F должна быть дифференцируема по всем переменным n+2 раза. Граничные условия представляют собой набор:

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y'_0\\ y''(x_0)=y''_0\\ \dots\dots\dots\dots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases};\qquad \begin{cases}y(x_1)=y_1\\ y'(x_1)=y'_1\\ y''(x_1)=y''_1\\ \dots\dots\dots\dots\\ y^{(n-1)}(x_1)=y_1^{(n-1)}\end{cases}.$$

Считаем граничные условия на обоих концах заданными. Экстремали определяются уравнением Эйлера-Пуассона:

$$J[Z(x_1,x_2...x_N)]=\int_D...\int_D F(x_1,x_2,...x_N,z,p,p_2,...,p_N)dx_1dx_2...dx_N.$$

Пример.
Найти экстремаль функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(720x^2 y - y''\right)dx.$$

Граничные условия:

$$y(0) = 0; y'(0) = 1;$$
$$y(1) = 0; \; y'(1) = 1.$$

Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид:

$$720x^2 + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0; \quad y'''' = 360x^2;$$
$$y = x^6 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Подставляем граничные условия:

$C_1 = -2; \; C_2 = 0; \quad C_3 = 1; \quad C_4 = 0$ и с их учетом

$$y(x) = x^6 - 2x^3 + x.$$

11.2. Функционалы, зависящие от m *функций*

Пусть рассматриваются m функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$.

Граничные условия должны задаваться по всем функциям. Обозначим их следующим образом:

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)}; \; y_k(x_1) = y_k^{(1)}; \; k = 1 \div m.$$

Требуется найти экстремум функционала

$$J[\, y_1 \ldots y_m \,] = \int_{x_0}^{x_1} F(\, x, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m' \,)dx.$$

Для того, чтобы это сделать, необходимо решить систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} F_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F_{y_1'} = 0 \\ F_{y_1} - \dfrac{d}{dx}F_{y_2'} = 0 \\ ---------- \\ F_{y_m} - \dfrac{d}{dx}F_{y_m'} = 0 \end{cases}.$$

Пример.

Найти экстремум функционала

$$J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx.$$

Граничные условия:

$$y(1) = 1; \; y(2) = 2; \; z(1) = 0; \; z(2) = 1.$$

Система дифференциальных уравнений для этого функционала будет иметь вид:

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ z - z'' = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 e^x - c_4 e^{-x} \end{cases}.$$

Для набора *c* можно получить следующие выражения:

$$c_1 = 1;$$

$$c_2 = 0;$$

$$c_3 = \frac{1}{e^2 - 1};$$

$$c_4 = \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

Искомая экстремаль

$$\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{sh(x-1)}{sh1} \end{cases}.$$

В общем случае может оказаться, что граничных условий не хватает, чтобы определить все константы *c*, тогда в решении некоторые *c* остаются произвольными.

11.3. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

а) Первоначально рассмотрим функционалы от функций, зависящих от 2-х переменных.

Пусть функция $Z(x,y)$ зависит от 2-х переменных. Физический смысл $Z(x,y)$ – это некоторая произвольная поверхность. Таким образом, соответствующий функционал можно записать в виде:

$$J[Z(x,y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy.$$

Чтобы задача имела решение, функция *F* должна быть трижды дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Будем считать, что искомая функция *Z* в области *D* непрерывна вместе со всеми производными до 2-го порядка включительно. Пусть область *D* имеет границу *Г*. Здесь мы будем вынуждены задавать граничные условия по всей области *Г*. Для того, чтобы поверхность $Z(x,y)$ обеспечивала экстремум функционала, необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера – Остроградского:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Эти уравнения используются для нахождения экстремалей.

Пример.

Найти экстремум функционала вида

$$J[Z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] dxdy.$$

Подынтегральная функция имеет вид

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 - q^2.$$

Отсюда нетрудно получить уравнение Эйлера – Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2p)-\frac{\partial}{\partial y}(-2q)=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Далее решение стандартными методами.

б) Пусть искомая функция Z является функцией N переменных:

$$Z=Z(x_1,x_2,...,x_N).$$

Имеем функционал

$$J[Z(x_1,x_2...x_N)]=\int\limits_D...\int\limits_D F(x_1,x_2,...x_N,z,p,p_2,...,p_N)dx_1dx_2...dx_N.$$

$$p_k=\frac{\partial z}{\partial x_k},\ k=1\div n.$$

Уравнение Эйлера – Остроградского имеет вид:

$$F_z-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{F_{p_i}\right\}=0;$$

В развёрнутом виде

$$F_z-\sum_{i=1}^{n}(F_{x_i p_i}+F_{zp_i}p_i+F_{p_i p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x_i})=0.$$

В этой ситуации Γ не линия, а некоторая многомерная граница многомерной области.

12. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Вариационная задача, в которой находится экстремум функционала при дополнительных условиях на искомую функцию, называется задачей на условный экстремум.

12.1. Изопериметрическая задача

Пусть даны 2 функции: $F(x,y,y')$, $G(x,y,y')$. Предполагается, что они имеют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков на рассматриваемом интервале $x_0 \le x \le x_1$, при любых y и y'. Пусть функционал $K[y]$ определяется следующим выражением:

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = l, \tag{12.1}$$

где l – заданное значение.

При этих условиях необходимо определить экстремум функционала J.

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \to \text{extr.} \tag{12.2}$$

При решении такой проблемы используется ***теорема Эйлера***:

Если кривая $y = y(x)$ дает условный экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

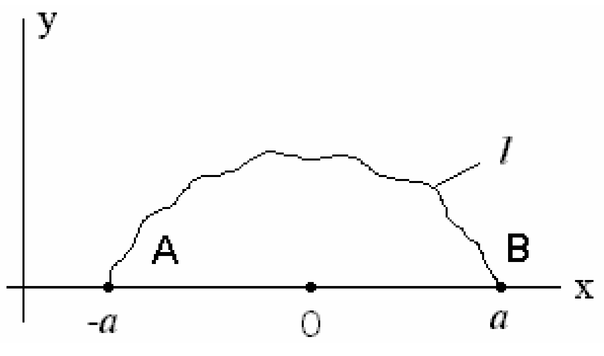
при условии

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = l, \; y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1,$$

и $y(x)$ не является экстремалью функционала $K[y]$, то существует такая константа λ, что кривая $y(x)$ есть безусловная экстремаль нового функционала L:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y')dx + \lambda G(x, y, y')]dx.$$

Пример.



Линия соединяет точки A и B

$y(-a) = y(a) = 0$.

Дана длина линии $\pi a < l < 2a$.

Требуется найти такую функцию $y(x)$, чтобы площадь, охватываемая кривой *l*, была максимальна.

Решение.

Задача сводится к отысканию экстремума выражения:

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx \text{ при условии}$$

$$y(-a) = y(0) = 0$$

и при дополнительном условии

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}dx = l.$$

Составим вспомогательную функцию

$$H = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}.$$

Получаем новый функционал

$$L = \int_{-a}^{a} H(x, y, y')dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = 1.$$

Далее

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = x + c_1.$$

После преобразований получаем:

$(x + c_1)^2 + (y + c_2)^2 = \lambda^2$ – уравнение фрагмента окружности.

12.2. Закон взаимности изопериметрических задач

Экстремаль y_1, обеспечивающая выполнение:

$$\begin{cases} J[y] \to \text{extr} \\ K[y] = \text{const} \end{cases},$$

Совпадает с экстремалью y_1, обеспечивающей выполнение:

$$\begin{cases} K[y_1] \to \text{extr} \\ J[y_1] = \text{const} \end{cases}.$$

12.3. Изопериметрические задачи с несколькими условиями

Если кусочно-гладкая функция $y(x)$ дает функционалу $J_0[y]$ условный экстремум при условиях

$$\begin{cases} J_1[y] = l_1 \\ J_2[y] = l_2 \\ ------ \\ J_k[y] = l_k \end{cases}, \; l_1 \div l_k \text{ – заданные значения.}$$

$$(J_i[y] = \int_{x0}^{x1} F_i(x, y, y')dx),$$

то существует такой набор констант $\{\lambda_i\}$, $i = 0 \div k$, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_k^2 = 1$, что кривая y дает безусловный экстремум для функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} (\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_k F_k)dx.$$

12.4. Изопериметрические задачи для совокупности функций

Изопериметрическими называют задачи на определение экстремума функционала:

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_1, y_2 ... y_n, y_1', y_2' ... y_n')dx,$$

при условиях

$$\begin{cases} \int_{x0}^{x1} G_1(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_1 \\ \int_{x0}^{x1} G_2(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_2 \\ ---------------- \\ \int_{x0}^{x1} G_m(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n')dx = l_m \end{cases}$$

$l_1 \div l_m$ заданные значения.

(Требования на непрерывность функций аналогичные).
Для получения решения составляется функционал

$$\Phi[y_1 \div y_n] = \int_{x0}^{x1} \left(F_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx.$$

Его решают обычным способом (поиском безусловного экстремума).
Константы λ и C находят из граничных и из изопериметрических условий

Пример.

Найти экстремаль функционала следующего вида:

$$J[y(x), Z(x)] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx;$$

$$\begin{cases} y(0) = 0, \quad z(0) = 0 \\ y(1) = 1, \quad z(1) = 1 \end{cases};$$

при дополнительном условии:

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2.$$

Составляем вспомогательный функционал

$$\Phi = \int_0^1 [y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)] dx.$$

Соответствующие уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(2y' + 2\lambda y' - \lambda x) = 0 \\ -4 - \dfrac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\lambda z') = 0 \end{cases}.$$

Решение:

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + 2c_1 x}{4(1+\lambda)} + c_2 \\ z(x) = \dfrac{c_3 x}{2(1-\lambda)} + c_4 \end{cases}.$$

Учёт граничных условий дает следующее:

$$c_1 = \frac{3\lambda + 4}{2},\ c_2 = 0,\ c_3 = 2(1-\lambda),\ c_4 = 0.$$

После подстановки

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda)} \\ z(x) = x \end{cases}.$$

После повторного использования изопериметрического условия:

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2 + 46\lambda + 24) = 48(\lambda^2 + 2\lambda + 1).$$

Откуда

$$\lambda_1 = -\frac{10}{11}.$$

(Другой корень $\lambda_2 = -\dfrac{12}{11}$ – не удовлетворяет исходному изопериметрическому условию).

Окончательно

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{7x - 5x^2}{2} \\ z(x) = x \end{cases}.$$

12.5. Задача Лагранжа

Это тоже задача на условный экстремум.

Постановка задачи.

Найти функции $y_1, y_2, ..., y_n$, обеспечивающие экстремум функционала:

$$J[y_1 \div y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ... y_n, y'_1, ... y'_n) dx,$$

при граничных условиях:

$$y_j(x_0) = y_{j0};\ \ y_j(x_1) = y_{j1};\ \ j = 1 \div n.$$

Дополнительные условия относятся не к функционалам от искомых функций, а к соотношениям между этими исходными функциями и имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m = \varphi_m(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \end{cases}, \qquad m<n.$$

Для поиска решения пользуются следующей теоремой.

Теорема: Функции $y_1, y_2, ..., y_n$, реализующие экстремум функционала J при наборе условий φ_i, $i=1\div m$, удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$, $i=1\div m$, уравнениям Эйлера для следующего модифицированного функционала:

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i \right] dx.$$

(Здесь λ_i – уже не константы, а функции от x)

$\varphi_i=0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала J^*, если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x) \div y_n(x)$, но и дополнительные функции $\lambda_1(x) \div \lambda_m(x)$. Обозначим

$$F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i = \Phi(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n).$$

Тогда и функции $y_j(x)$, и функции $\lambda_i(x)$ определяются из совместного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{y_i} - \dfrac{d}{dx}\Phi_{y'_j} = 0; \quad (j = 1...n) \\ \varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0; \quad (i = 1...m) \end{cases}.$$

($n+m$ – уравнений для $n+m$ искомых неизвестных функций).

Пример.

Дана поверхность, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$15x - 7y + z - 22 = 0.$$

На ней даны две точки: $A(1;-1;0)$; $B(2;1;-1)$. Найти уравнение линии кратчайшего расстояния между ними.

Решение.

На любой поверхности, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$, расстояние между точками $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ определяется по формуле:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx; \quad y=y(x); \quad z=z(x)$$ – проекции линии,

соединяющей эти точки, на соответствующие координатные плоскости.
Составим вспомогательный функционал вида:

$$J^* = \int_1^2 [\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)]dx.$$

Соответствующие уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \lambda(x)(-7) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \\ \lambda(x) \cdot 1 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0 \end{cases}.$$

После преобразований:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y' - 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}\right) = 0;$$

$$\frac{y' - 7z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = C_1; \quad z' = 7y' - 15;$$

$$y(x) = C_3 x + C_2; \quad C_3 = 2; \quad C_2 = -3;$$

$$\begin{cases} y(x) = 2x - 3 \\ z(x) = 1 - x \end{cases}.$$

Получили уравнение прямой, соединяющей две точки на плоскости (плоскость задана изопериметрическим условием).

$$\lambda(x) \equiv 0.$$

Расстояние l равно: $\qquad l = \sqrt{6}.$

Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две заданные ее точки.

13. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Это класс задач, когда пределы интеграла в функции не являются постоянными.

13.1. Простейшая задача с подвижными концами

Пусть $F(x, y, y')$ – трижды дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Пусть в плоскости *XOY* заданы две кривые:

$$y = \varphi(x);$$

$$y = \psi(x).$$

Рассмотрим функционал:

$$J[y] = \int_{\gamma} F(x, y, y')dx.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых $y(x)$, таких, что их концы лежат на этих линиях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. При этом $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$, но точки x_0 и x_1 – неизвестны. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:* Пусть кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{\gamma} F(x, y, y')dx$$

среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда $y(x)$ является экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида:

$$\begin{cases} \left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_0} = 0 \\ \left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases}.$$

Эти условия трансверсальности используются для нахождения экстремали. Решение с использованием теоремы осуществляется следующей последовательностью действий:

1. Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера обычным способом, считая границы неподвижными. При этом мы получим

$y = f(x, c_1, c_2)$, c_1, c_2 – константы, получающиеся при решении дифференциальных уравнений.

2. Используем два уравнения трансверсальности и два новых уравнения.

$$f(x_0, c_1, c_2) = \varphi(x_0);$$

$$f(x_1, c_1, c_2) = \psi(x_1).$$

Мы получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными c_1, c_2, x_0, x_1.

3. Решая эту систему, мы находим константы c_1, c_2, x_0, x_1.

Пример.

Найти наикратчайшее расстояние между двумя линиями, которые задаются следующими уравнениями:

$$y = x^2,\ x - y = 5.$$

Решение.

Оно сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$J = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

$$\varphi(x) = x^2;$$

$$\psi(x) = x - 5.$$

1. Решаем исходное уравнение Эйлера, считая граничные точки как бы фиксированными, и получаем: $y = c_1 x + c_2$. Условие трансверсальности для этой ситуации имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0, & \text{при } x = x_0 \\ \left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = 0, & \text{при } x = x_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c_1 x_0 + c_1 = x_0^2 \\ c_1 x_1 + c_1 = x_1 - 5 \end{cases};$$

$$y' = c_1;$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+c_1^2} + (2x_0 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1+c_1^2} + (1 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \end{cases};$$

$$c_1 = -1; \quad c_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_0 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = \frac{23}{8}.$$

Экстремум достигается на функции $y = -x + 3/4$. При этом минимальное расстояние равно $l = \int\limits_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+(-1)^2}\,dx = \dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

13.2. Задача для 3-х мерного пространства

Для этой задачи линии находятся в 3-х мерном пространстве, т.е. необходимо найти функционал вида:

$$J[y,z] = \int\limits_{x0}^{x1} F(x,y,z,y',z')dx.$$

Пусть хотя бы одна из граничных точек $A(x_0,y_0,z_0)$ или $B(x_1,y_1,z_1)$ перемещается по заданной кривой.

Тогда экстремум функционала J [y,z] может достигаться лишь на кривых, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx}F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx}F_{z'} = 0 \end{cases}.$$

Для простоты будем считать, что точка A закреплена неподвижно, а точка B может перемещаться по кривой, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases};$$

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x, y, z).$$

В этом случае условие трансверсальности примет вид:

$$F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-Z')F_{z'}=0, \quad \text{при } x=x_1.$$

Если же и точка *A* перемещается по кривой, то это значит, что положение точки *A* можно определить системой:

$$\begin{cases} y=\tilde{\varphi}(x) \\ z=\tilde{\psi}(x) \end{cases}.$$

Условие трансверсальности для точки *A* имеет вид:

$$F-(\tilde{\varphi}-y')F_{y'}+(\tilde{\psi}-Z')F_{z'}=0, \quad \text{при } x=x_0.$$

Пример.

Найти кратчайшее расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до произвольно ориентируемой в пространстве прямой, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} y=mx+p \\ z=nx+q \end{cases}.$$

Решение.

Задача сводится к отысканию интеграла

$$J[y,z]=\int_{x0}^{x1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx, \tag{13.1}$$

при условии, что x_1 перемещается по линии, описываемой системой:

$$\begin{cases} \varphi(x)=mx+p \\ \psi(x)=nx+q \end{cases}.$$

Общее решение для (13.1) в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} y=c_1x+c_2 \\ z=c_3x+c_4 \end{cases}.$$

Для правой границы условия трансверсальности:

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}+(m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+(n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \text{при } x=x_1.$$

Учтем, что $y'=c_1, z'=c_3$. Подставляя это в условие трансверсальности и упрощая, получаем $1+mc_1+nc_3=0$. Необходимо учесть, что искомая экстремаль должна проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$, а следовательно, порождать систему уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = c_1 x_0 + c_2 \\ z_0 = c_3 x_0 + c_4 \end{cases}.$$

Другой конец перемещается по прямой, значит точка x_1 связана системой:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 = m x_1 + p \\ c_3 x_1 + c_4 = n x_1 + q \end{cases}.$$

Таким образом, имеется 5 уравнений и 5 неизвестных x_1, c_1, c_2, c_3, c_4. Решая эти уравнения, получаем:

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + n^2 + m^2};$$

$$c_1 = \frac{m x_0 + mn(z_0 - q) - (1 + n^2)(y_0 - p)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0};$$

$$c_3 = \frac{n x_0 + mn(y_0 - p) - (1 + m^2)(z_0 - q)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0}$$

(c_2 и c_4 нам искать не обязательно, т. к. в выражение для y входят только производные y' и z', поэтому константы c_2 и c_4 на J не влияют).

Окончательный ответ:

$$\min J[y,z] = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - p)^2 - \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + n^2 + m^2}}.$$

Пусть одна из точек неподвижна – $A(x_0, y_0, z_0)$. Другая точка может перемещаться по некоторой поверхности, уравнение которой задается уравнением $z = \varphi(x, y)$. В этом случае условие трансверсальности принимает вид:

$$\begin{cases} \left[F - y' F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[F_{y'} + F_{z'} \varphi'_y\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases}.$$

Эти условия совместно с уравнением $z = \varphi(x, y)$ дают возможность найти две произвольные константы в уравнении Эйлера, а другие две константы определяются из условия прохождения экстремали через неподвижную точку A.

Пример.

Дана точка $A(1,1,1)$, дана сфера, поверхность которой описывается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Найти кратчайшее расстояние от точки до сферы.

Решение.

Задача сводится к исследованию на экстремум следующего функционала:

$$J[y,z] = \int_{x_1}^{1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx .$$

Экстремум в общем виде дается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} y = C_1 x + C_2 \\ z = C_3 x + C_4 \end{cases}.$$

Из условия прохождения экстремали через точку $A(1,1,1)$ получим:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_3 + C_4 = 1 \end{cases}.$$

Условие трансверсальности примет вид:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \left(\dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} - z' \right) \cdot \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \right] \Bigg|_{x = x_1} = 0 \\ \left[\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} + \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \cdot \dfrac{(-y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \right] \Bigg|_{x = x_1} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда получается следующее:

$$\begin{cases} z_1 - C_3 x_1 = 0 \\ C_1 z_1 - C_3 y_1 = 0 \end{cases},$$

где x_1, y_2, z_1 – координаты точки B (пока неизвестны).

$$\begin{cases} y_1 = C_1 x_1 + C_2 \\ z_1 = C_3 x_1 + C_4 \end{cases};$$

$$C_1 = 1;\ C_2 = 0;\ C_3 = 1;\ C_4 = 0 .$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} y(x) = y = x \\ z(x) = z = x \end{cases}.$$

Подставив это в уравнение сферы, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2} = 1;$$

$$x_1 = y_1 = z_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$B_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ответ: $B_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$

$$J_{\min} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{1+1+1}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \sqrt{3}dx = \sqrt{3} - 1.$$

14. ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ РАССТОЯНИЕ

Ранее было введено понятие геодезической линии.

Геодезическое расстояние – длина геодезической линии между двумя заданными точками (J – длина).

Более того, геодезическую линию в криволинейном пространстве иногда называют J – прямая (по аналогии с обычным пространством).

Пример.

Заданы т. A (0, 0) и т. B (1, 1) на некоторой криволинейной поверхности, расстояние на поверхности определяется выражением:

$$J[y] = \int_A^B y^2 \cdot y' dx .$$

Требуется найти геодезическую длину между этими точками на плоскости.

Решение.

Геодезическое расстояние – минимальное расстояние, т.е. $\min J[y]$, граничные условия: координаты т. A и т. B.

Составляем уравнение Эйлера:

$$2\cdot y^2\cdot y' - \frac{d}{dx}(2\cdot y^2\cdot y') = 0$$

$$yy'' + y'^2 = 0 = \frac{d}{dx}(yy').$$

Отсюда можно записать: $yy' = C = \text{const}$.

После некоторых преобразований:

$$y^2 = C_1\cdot x + C_2\cdot$$

Используем граничные условия:

$$\begin{cases} y(x=0)=0 \\ y(x=1)=1 \end{cases}$$

$$C_1 = 1; C_2 = 0.$$

Т.о., уравнение экстремали:

$$y^2 = x; y = \sqrt{x},$$

отсюда $J(A,B) = 0{,}25$.

Геодезическая длина = 0,25.

Геодезическое расстояние между точкой и линией определяется сложнее. Здесь необходимо соблюсти одновременно два условия:

1) $\min \int_A^B F(x, y, y')dx$.

2) Выбирается та точка, в которой наша геодезическая линия и заданная линия взаимно перпендикулярны (трансверсальны).

Геодезическое расстояние между точкой и линией – L – расстояние вдоль экстремали, соединяющей точку и линию L в том месте, где экстремаль и линия L пересекаются перпендикулярно (трансверсально).

Геодезическая окружность (J – окружность) – линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от заданной точки.

15. РАЗРЫВНЫЕ ЗАДАЧИ

Ранее определяли функцию $F(x, y, y')$ как дважды дифференцируемую по x. Показателем этого было условие: $F_{y'y'} \neq 0$. Однако существует класс задач, которые при таких жестких условиях не имеют решения, но при смягчении условий хорошо решаются.

При этом такие методы позволяют найти экстремум функционалов в виде кусочно-непрерывной функции (с изломами).

15.1. Разрывные задачи первого рода.

Рассмотрим некоторый функционал:

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx.$$

Граничные условия: пусть все допустимые решения удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \end{cases}.$$

Но кроме этого допускаем, что искомое решение $y(x)$ может иметь излом в некоторой точке $x_0 < C < x_1$. Этот излом может быть только там, где выполняется

$$F_{y'y'} = 0.$$

Для поиска решения воспользуемся условием Вейерштрасса – Эрдмана:

$$\begin{cases} F_{y'}\big|_{x=C-0} = F_{y'}\big|_{x=C+0} = 0 \\ (F - y'F_{y'})\big|_{X=C-0} - (F - y'F_{y'})\big|_{X=C+0} = 0 \end{cases}.$$

Если C – точка излома, то с разных сторон от точки C функция y может выражаться различными формулами.

$C - 0$ и $C + 0$ – куски функции y по разные стороны от излома. Кроме этого, сама экстремаль должна быть непрерывна.

$$y(x \to C - 0) = y(x \to C + 0).$$

Совокупность этих условий позволяет найти экстремаль и координаты точки излома C.

Пример:

Дан функционал: $$J[y] = \int_0^2 (y'^2 - y^2)dx.$$

Найти экстремаль.

$F_{y'y'} = 2 > 0$; $F_{y'} = 2y'$ – значит, в этом примере решение можно найти и в виде гладкой функции.

Пример:

Дан функционал: $$J[y] = \int_0^2 (y'^4 - 6y'^2)dx.$$

Граничные условия:

$$y(0) = 0; y(2) = 0.$$

$F_{y'y'} = 12y' - 12$ – вполне могут найтись точки, где это выражение=0, значит, у экстремали возможно присутствие изломов в какой-то т. C.

Будем искать экстремаль в виде ломаной линии.

Подынтегральная функция зависит только от y', отсюда решением будут прямые линии $y = C_1x + C_2$.

В области гладких функций решение одно: $y = 0$, т.к.

$$y(0) = 0 = C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0;$$

$$y(2) = 0 = C_1 \cdot 2 + C_2 \Rightarrow (C_2 = 0) = C_1 = 0,$$

поэтому в данной задаче нетривиальное решение возможно только среди экстремалей с изломом.

Т.к. F одинакова в обеих частях, то y_+ и y_- будут прямые линии, но со своими коэффициентами:

$$\begin{cases} y_+ = px + q; (x_0 \le x \le C) \\ y_- = mx + n; (C \le x \le x_1) \end{cases},$$

m, n, p, q, C – неизвестны.

Подставляя граничные условия, получим: $n = 0$; $q = -2p$,

$$\begin{cases} y_- = mx \\ y_+ = p(x+2) \end{cases}.$$

В то же время экстремаль должна быть непрерывна в т. C:

$$y_- = y_+$$

$$y_-(x=C) = y_+(x=C) \Rightarrow mC = p(C-2).$$

Используем условие Вейерштрасса – Эрдмана (В-Э):

$$\begin{cases} F_{y'} = 4y'^3 - 12y' \\ F - y'F_{y'} = -3y' + 6y'^2 \end{cases}.$$

Можно заметить, что $y'_- = m; y'_+ = p$.

Подставим это в условие В-Э. Получим:

$$\begin{cases} 4m^3 - 12n = 4p^3 + 12p \\ -3m + 6n^2 = -3p^4 + 6p^2 \end{cases}.$$

После преобразования:

$$\begin{cases} (m-p)\cdot(m^2 + mp + p^2 - 3) = 0 \\ (m^2 - p^2)\cdot(m^2 + p^2 - 2) = 0 \end{cases}.$$

Из второго уравнения $m = p; m = -p; m^2 + p^2 = 2$. Если $m = p$, экстремаль имеет непрерывную производную и ранее этот вариант отброшен. Значит, оба уравнения можно разделить на $m - p$.

$$\begin{cases} m^2 + m\cdot p + p^2 + 3 = 0 \\ (m+p)\cdot(m^2 + p^2) = 2 \end{cases}.$$

Эта более простая система имеет решения:

$$1: \begin{cases} m + p = 0 \\ m^2 + mp + p^2 = 3 \end{cases}$$

$$2: \begin{cases} m^2 + p^2 = 2 \\ m^2 + mp + p^2 = 3 \end{cases}.$$

Уравнения системы 2 получены при $m = -p$ и отброшены.

Система 1 имеет два решения:

$$1: m = \sqrt{3}; p = -\sqrt{3};$$

$$2: m = -\sqrt{3}; p = \sqrt{3}.$$

Учитывая, что $m = -p$, и подставляя в условия $y_-(C) = y_+(C)$, получаем $C = 1$.

Решение.

Искомых экстремали две, совершенно равноправных:

$$y_I = \begin{cases} \sqrt{3}x; & 0 \le x \le 1 \\ -\sqrt{3}(x-2); & 1 \le x \le 2 \end{cases};$$

$$y_{II} = \begin{cases} -\sqrt{3}x; & 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{3}(x-2); & 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

15.2. Разрывные задачи второго рода.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx; \quad y(x_1) = y_1; \quad y(x_2) = y_2.$$

Задачи второго рода – когда функция F имеет разрыв.

Пусть этот разрыв вдоль $y = \Phi(c)$ – кривая. Пусть с одной стороны от результата $F_1(x, y, y')$, с другой $F_2(x, y, y')$. Если решение существует, то оно тоже состоит из кусков экстремалей. При этом обе экстремали имеют на линии разрыва общую точку:

$$x_1 < c < x_2; \qquad x = c; \; y = \Phi(c).$$

Для определения искомой ломаной экстремали мы получаем два уравнения Эйлера. Они содержат четыре константы c_1, c_2, c_3, c_4 и надо найти неизвестную c, где встречаются 2 экстремали.

Два граничных условия: $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$;

$$y_1(x = c) = \Phi(c)$$

$$y_2(x = c) = \Phi(c)$$

Условие на стыке: $F_1 + (\Phi' - y')F_{1y'}\Big|_{x=c-0} = F_2 + (\Phi' - y')F_{2y'}\Big|_{x=c+0}$.

15.3. Разрывные задачи для функционала от нескольких функций

$$F(x, y_1, y_2, ...y_n, y'_1, y'_2, ...y'_n)$$

Если подынтегральная функция F непрерывна по всем аргументам и имеет частные производные до третьего порядка, то для осуществления ломаных экстремалей y должны выполняться условия Вейерштрасса – Эрдмана:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right|_{x_0-0} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'_i}\right|_{x_o+0};$$

$$\left. F - \sum_{i=1}^{n} y'_i \frac{\partial F}{\partial y'_i}\right|_{x_0-0} = \left. F - \sum_{i=1}^{n} y'_i \frac{\partial F}{\partial y'_i}\right|_{x_0+0}.$$

Далее все то же самое.

16. ОДНОСТОРОННИЕ ВАРИАЦИИ

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx; \qquad y(x_1) = y_1; \qquad y(x_2) = y_2.$$

Найти экстремум этого функционала при определенных условиях. Если раньше условие задавалось уравнением, то сейчас неравенством: $y - \phi(x) \geq 0$.

При такой формулировке искомая экстремаль будет состоять из кусков границ $\phi(x)$ и из кусков экстремали y. В точках стыка $\phi(x)$ и y основная экстремаль может быть гладкая, а может иметь разрывные точки.

$$\left\lfloor F(x, y, y') - F(x, y, \phi') - (\phi' - y')F_{y'}(x, y, y') \right\rfloor_{x=x_c} = 0$$

x_c – коэффициент точки стыка.

Если в x_c $F_{y'y'} \neq 0$, то экстремаль касается границы ϕ.

Пример: т. A (-2, 3), т. B (2, 3)

Найти кратчайший путь между *A* и *B*, который лежит ниже параболы $y \le x^2$.

$$J = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \min;$$

$$y \le x^2$$

$$y(-2) = 3$$

$$y(2) = 3$$

$$y = C_1 + C_2 x$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{[1 + y'^2]^{3/2}} \ne 0.$$

В точке касания ординаты параболы и ординаты прямых совпадают.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 x_c = x_c^2 \\ C_2 = 2x_c \end{cases}$$

$$C_1 + 2C_2 = 3$$

$$y = \begin{cases} -2x - 1, & -2 \le x \le -1 \\ x^2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x - 1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}.$$

В случае более сложных границ используются подвижные концы.

Библиографический список

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
2. *Цлаф Л.Я.* Вариационное исчисление и интеграционные уравнения. – М.: Наука, 1970. – 192 с.
3. *Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселёв А.И.* Вариационное исчисление. Задачи и упражнения. – М.: Наука, 1974. – 189 с.
4. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 160 с.

Оглавление

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Краткий курс лекций для магистров
по направлению 552500

Составитель
ПОЛУШИН Петр Алексеевич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой профессор О.Р. Никитин

Редактор Е.В. Невская
Корректор Е.В. Афанасьева
Компьютерная верстка Е.Г. Радченко

ЛР № 020275. Подписано в печать 07.04.03.
Формат 60x84/16. Бумага для множит. техники. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,20. Тираж 100 экз.
Заказ
Редакционно-издательский комплекс
Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.