**Министерство образования и науки Российской Федерации**

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего образования

**«Владимирский государственный университет**

**имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича**

**Столетовых»**

**(ВлГУ)**

**С. А. МАВРИНА**

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

**ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ**

2018

УДК 539.3

ББК 30.121

Рецензент

Кандидат технических наук,

доцент кафедры «Строительное производство»

С. В. Прохоров

Некоторые вопросы теории сопротивления материалов. Лекционный курс для выполнения расчетно-графических работ: Учебное электронное издание / Владим. гос. ун-т; сост. С. А. Маврина. – Владимир, 2018. – 62 с.

Содержатся теоретические основы сложного сопротивления, устойчивости и расчета статически неопределимых систем методом сил в сопротивлении материалов.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению «Строительство». Ориентировано для студентов очной, заочной и заочной с элементами дистанционных технологий форм обучения.

Табл. 1. Ил. 22. Библиогр.: 6 назв.

УДК 539.3

ББК 30.121

**Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**

**Введение**

«Сопротивление материалов» – раздел механики твердого деформируемого тела, в котором изучается поведение различных тел под нагрузкой. В общепринятом смысле ***сопротивление материалов*** рассматривается как наука ***об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость*** отдельных элементов конструкций и простых систем. В курсе сопротивления материалов решаются три основные задачи:

*●* изложение методов расчета элементов конструкций на прочность.

*●* изложение методов расчета элементов конструкций на жесткость.

*●*изложение методов расчета элементов конструкций на устойчивость.

Решение указанных задач в сопротивлении материалов основано на использовании ряда гипотез и допущений, схематизации реальных тел и нагрузок.

**§ 1.1. Гипотезы и допущения сопротивления материалов**

Рассмотрим основные *гипотезы о свойствах материала*.

*1.Гипотеза сплошности***.** Материал любого тела имеет сплошное (непрерывное) строение.

*2. Гипотеза однородности*. Материал любого тела однороден, то есть во всех точках материала наблюдаются одинаковые свойства.

*3. Гипотеза изотропности*. Материал любого тела изотропен, то есть во всех точках материала наблюдаются одинаковые свойства по всем направлениям. Материалы, у которых свойства в разных направлениях различны, являются *анизотропными*.

Таким образом, в сопротивлении материалов рассматривается некий условный материал, наделенный свойствами сплошности, однородности и изотропности. Использование этих и ряда других гипотез позволяет получить теоретические расчеты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными для различных материалов.

3

Допущения, *касающиеся нагрузок и характера деформирования*

● *Допущение о ненапряженном (естественном) состоянии материала*. Предполагается, что до приложения внешних нагрузок внутри любого элемента конструкции отсутствуют какие-либо внутренние усилия.

● *Допущение о линейно деформируемых телах*. Большинство строительных конструкций обладает физической и геометрической линейностью. Система является *физически линейной*, если материал конструкции работает как линейно-упругий, то есть диаграмма деформирования является линейной. В *геометрически линейных* системах перемещения конструкции настолько малы, что изменение ее размеров и формы вследствие деформации можно не учитывать.

Система, в которой внутренние усилия, напряжения, деформации и перемещения прямо пропорциональны действующей нагрузке, называется *линейно деформируемой системой*. Для таких систем справедлив принцип суперпозиции.

● *Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)*. Суммарный эффект от действия на конструкцию совокупности нагрузок равен сумме эффектов от действия каждой отдельной нагрузки. Под «эффектами в каждом конкретном случае понимаются усилия, напряжения, деформации или перемещения.

● *Принцип Сен-Венана*. В точках тела, достаточно удаленных от точек приложения внешних нагрузок, результат воздействия практически не зависит от способа приложения этих нагрузок.

Это допущение позволяет использовать статически эквивалентную систему нагрузок, заменяющую заданную, что часто обеспечивает упрощение расчетов.

***Информация.***Барре де Сен-Венан (Barre de Saint Venant) (1797 - 1886) - французский ученый, известный трудами по математической теории упругости; также внес определенный вклад и в теорию изгиба стержней.

*Замечание*. Представлена только часть гипотез и допущений.

4

**§ 1.2. Схематизация элементов конструкций**

Многообразие реальных тел и их отдельных элементов в сопротивлении материалов отражено в трех основных формах, которые и являются объектами исследования (рис. 1.1).

Рис. 1.1

*b*

*h*

*l*

*a)*

*б)*

*в)*

*г)*

*д)*

***Стержень*** (или брус) – тело, у которого один размер (длина) существенно превышает размеры поперечного сечения. Стержень с прямолинейной осью показан на рис. 1.1, *а*. Подобными стержнями рассматриваются, например, валы, оси, балки различных машин и конструкций. На этом рисунке . На рис.1.1, *б* показан стержень с изогнутой (криволинейной) осью. На практике так рассматриваются, например, грузоподъемные крюки и др. подобные элементы. В дальнейшем будем рассматривать *стержни с прямолинейной осью*. Понятие *ось стержня* рассматривается как геометрическое место центров тяжести бесконечного множества поперечных сечений. При расчетах систему координат будем выбирать следующим образом: одна ось (ось ) всегда совпадает с осью стержня, а две другие (оси и ) – лежат в плоскости поперечного сечения стержня.

***Пластина*** – тело, у которого два размера существенно больше третьего (рис. 1.1, в). Естественно искривленная пластина называется

5

***оболочкой***. Как правило, пластина представляет собой тело, ограниченное двумя *параллельными* поверхностями, а оболочка – тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями. Расстояние между поверхностями значительно меньше габаритных размеров поверхностей. В сопротивлении материалов пластинами обычно описывают плоские днища различных сосудов и резервуаров, обшивку стеновых панелей, перекрытия инженерных сооружений и др.; оболочками - купола зданий, обшивку различных частей летательных аппаратов, корпуса подводных лодок и др.

***Массив*** – тело, у которого все три размера одного порядка (рис. 1.1, *г*): например, фундаменты, подпорные стены и др.

Отдельную группу представляют ***тонкостенные конструкции*** (рис. 1.1, *д*), у которых толщина поперечного сечения много меньше длины.

**§ 1.3. Схематизация внешних воздействий**

Внешние воздействия, как и реальные тела, достаточно разнообразны, поэтому классифицировать их необходимо по различным признакам. Рассмотрим только некоторые особенности.

Все действующие нагрузки распределены по поверхности или по объему. Будем рассматривать только *поверхностные* нагрузки, возникающие в результате контакта двух или нескольких тел. При этом нагрузку естественно считать распределенной по некоторой площади или длине. Если площадь контакта мала, нагрузки можно рассматривать как *сосредоточенные*. Таким образом, все нагрузки будем рассматривать в виде *статически приложенных* сосредоточенных или распределенных по некоторой длине. (*Статическими* называются нагрузки, параметры которых не зависят от времени.) Закон распределенных нагрузок может быть произвольным. Ограничимся рассмотрением *равномерно распределенных по длине* некоторого участканагрузок.В частном случае сосредоточенные нагрузки могут быть заменены сосредоточенными моментами. На рис. 1.2 показано изображение и

6

общепринятое обозначение сосредоточенных сил , равномерно распределенных нагрузок () и сосредоточенных моментов (M).

Рис. 1.2

или

*F*

*q*

*l*

*a*

*F*

*F*

*М*

*М* = *Fa*

*Единицей измерения* сосредоточенной силы является Ньютон (Н) – в Международной системе измерений (СИ) или килограмм-сила (кгс) - в технической системе измерений. Ньютон – достаточно малая величина, , поэтому широкое распространение имеет килоНьютон (кН), . Равномерно распределенная по длине некоторого участка нагрузка характеризуется в каждой точке числовым значением и направлением вектора интенсивности этой нагрузки. Принято обозначать – *интенсивность нагрузки*, отнесенная к единице длины. Единицей измерения является или . Сосредоточенный момент (известно из дисциплины «Теоретическая механика) определяется как произведение силы на плечо, поэтому измеряется в или в .

**§ 1.4. Схематизация опорных устройств**

В сопротивлении материалов широко распространенным объектом исследования является *балка* – стержень, нагруженный силами, действующими в направлении его поперечной оси. Как правило, балки рассматриваются прикрепленными к земле с помощью опорных устройств или опор. На рис. 1.3 показаны наиболее распространенные типы опор в виде шарнирно-подвижной, шарнирно-неподвижной опор и жесткой заделки. От действия внешней нагрузки в опорах возникают опорные реакции, которые (после их нахождения) учитываются наравне с заданной нагрузкой.

7

или

или

Рис. 1.3

или

Жесткая заделка

Шарнирно-неподвижная опора (возможные варианты изображения)

Шарнирно-подвижная

опора

**§ 1.5. Понятие о расчетной схеме**

При решении конкретных задач методами сопротивления материалов реальные тела под заданной нагрузкой заменяются расчетной схемой.

***Расчетная схема*** – *упрощенное изображение реального объекта с обязательным привнесением конкретных параметров этого объекта.*

К этим параметрам прежде всего относят реальные размеры, форму и размеры поперечного сечения, материал (для того, чтобы правильно учитывать физические характеристики именно этого материала). Расчетная схема, во многом, выбирается интуитивно, однако в основе выбора лежат рассмотренные в §§ 1.2-1.4 правила схематизации элементов, внешних воздействий и опорных устройств.

8

**Глава 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ: КОСОЙ ИЗГИБ**

**§ 2.1. Понятие сложного сопротивления**

В реальных условиях работы конструкция и ее отдельные элементы подвержены *одновременному* воздействию разных нагрузок, которые обуславливают возникновение в элементах конструкции сложной деформации или *сложного сопротивления* (последний термин употребляется чаще). Применительно к отдельному брусу можно утверждать, что ***сложное сопротивление*** –  *вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает либо все шесть внутренних силовых факторов, либо одновременное сочетание нескольких* (*не менее* *двух*)*.* Важно отметить, что при рассмотрении сложного сопротивления *принимается гипотеза о малости деформаций*, то есть заведомо считается, что брус обладает достаточной жесткостью. Как следствие этого, *справедлив принцип суперпозиции* (*наложения*) *внешних нагрузок*.

Различают следующие виды сложного сопротивления.

● пространственный изгиб. Внутренними силовыми факторами являются .

**●** пространственный изгиб с растяжением (или сжатием). Внутренними силовыми факторами являются .

**●** пространственный изгиб с кручением. Внутренними силовыми факторами являются

Рассмотрим частные случаи сложного сопротивления: косой изгиб как частный случай пространственного изгиба; внецентренное сжатие как частный случай пространственного изгиба со сжатием или растяжением; изгиб с кручением как частный случай пространственного изгиба с кручением.

9

**§ 2.2. Косой изгиб**

***Косой изгиб*** *– вид деформации, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей бруса.*

В сопротивлении материалов *косой изгиб рассматривается как сочетание двух прямых поперечных изгибов: прямого изгиба в вертикальной плоскости* (*уz*) *и прямого изгиба в горизонтальной плоскости* (*xz*). В этом случае внутренними силовыми факторами являются изгибающие моменты и поперечные силы . При расчете на прочность поперечные силы не учитываются ввиду их незначительного влияния.

Рисунки 2.1 и 2.2 показывают разницу между прямым поперечным изгибом и косым изгибом. В первом случае (см. рис. 2.1, *а*) плоскость действия нагрузки и плоскость, содержащая главную центральную ось , совпадают; это особенно очевидно на рис. 2.1, *б*. На рис. 2.2 представлен тот же брус, но плоскость действия нагрузки не совпадает с плоскостью, содержащей ось ; это показано на рис. 2.2, *б*.

Рис. 2.1

*F*

*z*

Силовая плоскость

*a*)

*y*

*x*

*y*

*б*)

10

Рис. 2.2

*a*)

*б*)

*y*

*x*

Силовая плоскость

*x*

*y*

*z*

*F*

В любой - й точке поперечного сечения возникают нормальные напряжения, которые определяются формулой

где *x*, *y* – координаты рассматриваемой - й точки в системе главных центральных осей. В выражении (2.1) **подразумевается**, что все величины правой части берутся по модулю, а знак напряжения определяется знаком перед этим выражением. Фактически (2.1) рассматривается как

При рассмотрении косого изгиба расчет проводится в каждой из соответствующих плоскостей: в плоскости (вертикальная плоскость) и в плоскости (горизонтальная плоскость). В каждой плоскости строятся эпюры изгибающего момента и поперечной силы от

11

действия нагрузки именно в этой плоскости. Приняты обозначения эпюр: в вертикальной плоскости – эпюры ; в горизонтальной плоскости – эпюры . (Построение эпюр при прямом поперечном изгибе рассматривается подробно в дисциплине «Техническая механика».)

Практический интерес представляют *опасные сечения бруса* – сечения, в которых изгибающие моменты и достигают наибольших по модулю значений. В большинстве расчетных случаев сечения, в которых возникают наибольшие изгибающие моменты и в соответствующих плоскостях, **не совпадают по положению на оси бруса**, то есть координаты *z* в этих сечениях разные. Поэтому ***опасным*** является сечение, в котором и , хотя могут и не принимать одновременно наибольших значений, но в своей комбинации создают наиболее невыгодное сочетание.

**§ 2.3. Положение нейтральной линии при косом изгибе**

Расчет на прочность выполняется в *опасных точках поперечного* *сечения*. *Опасными* являются точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. *Нейтральная линия –* линия нулевых напряжений, следовательно, на нейтральной линии нормальное напряжение в произвольной точке равно нулю. *Получим* ***уравнение нейтральной линии при косом изгибе***.

Предположим, что точка *i* принадлежит нейтральной линии. Тогда нормальное напряжение в этой точке по выражению (2.1) приравняем нулю:

Рассмотрим последнее выражение *с положительными знаками*, представим его в виде:

12

Выделим из предыдущего равенства отношение координат. Получим

Очевидно, в левой части записанного равенства имеем выражение тангенса некоторого угла. Окончательно запишем выражение в виде

В учебной литературе часто вводится некоторый острый угол , для которого

В этом случае можно считать, что – угол, определяющий силовую линию (отсчитывается от горизонтальной главной центральной оси). Тогда можно записать

*Замечание относительно знака*. Полученный знак минус соответствует исходному предположению о положительных знаках в выражении (2.1). Очевидно, при предположении отрицательных знаков нами был бы получен знак плюс.

**Вывод**. ***Нейтральная линия* в случае косого изгиба *проходит через центр тяжести* поперечного сечения и составляет угол β с горизонтальной центральной осью сечения.** Угол β находим из соотношения

13

где – главные центральные осевые моменты инерции сечения.

Представленная запись формулы в виде (2.2) позволяет найти значение угла β (при правильном вычислении угол β – острый) по модулю. Естественно, возникает вопрос, а как правильно отложить этот угол от горизонтальной оси: по ходу часовой стрелки или против хода часовой стрелки? Для проведения нейтральной линии **предлагается следующий подход**. Так как нейтральная линия – это линия нулевых напряжений, очевидно, что она пройдет через те четверти координатной плоскости, в которых сочетание значений напряжений от изгиба в разных плоскостях может дать суммарное нулевое значение. Это возможно в тех четвертях координатной плоскости, в которых напряжения имеют разные знаки.

Определим знаки нормальных напряжений, возникающих в опасном сечении бруса от изгиба в разных плоскостях. Предположим: в опасном - м сечении бруса растягивает *нижние* относительно оси *x* волокна, а растягивает *правые* относительно оси *у* волокна. Так как эпюры изгибающих моментов строятся на растянутых волокнах, то там, где *волокна растянуты*, имеем *напряжение растяжения*, то есть *положительное по знаку нормальное напряжение.*

На рис. 2.3 показано распределение знаков нормальных напряжений в каждой четверти координатной плоскости, соответствующее данному предположению о действии изгибающих моментов (оси *у*, *x* – главные центральные оси сечения). Верхний индекс (показан римской цифрой) нормальных напряжений соответствует номеру четверти координатной плоскости. Вспомним из математики: первой обозначают координатную четверть (или еще называют квадрант), в которой координаты любой точки положительны. Координатные четверти нумеруют против хода часовой стрелки. В рассматриваемом примере нейтральная линия проходит через 1-ую и 3-ю четверти координатной плоскости поперечного сечения, то есть там, где имеем разные знаки

14

слагаемых напряжения. Только в этих четвертях алгебраическая сумма нормальных напряжений может быть равной нулю.

Угол β при сделанных предположениях относительно растягивающих волокон откладывается от горизонтальной оси *x* против хода часовой стрелки (см. рис. 2.3).

Нейтральная линия

1

2

β

*y*

*С*

*x*

Рис. 2.3

**Свойства нейтральной линии при косом изгибе**

1. Нейтральная линия (НЛ) проходит через центр тяжести поперечного сечения.

2. НЛ не перпендикулярна силовой линии. Углы между этими линиями тем больше отличаются друг от друга, чем больше разница между главными осевыми моментами.

3. Углы отсчитываются в одном направлении.

4. Положение НЛ не зависит от значения прикладываемой нагрузки.

15

**§ 2.4. Расчет на прочность при косом изгибе**

Расчет на прочность проводится в опасных точках поперечного сечения. *Опасными точками* поперечного сечения являются точка *1* (в области сжатия) и точка *2* (в области растяжения), так как эти точки – наиболее удаленные точки контура сечения от построенной нейтральной линии.

Условие прочности по нормальным напряжениям при косом изгибе записывается в виде

Условие записано в предположении, что расчетные сопротивления на сжатие и растяжение одинаковы, то есть (пластичный материал).

В рассматриваемом примере (см. рис. 2.3) максимальные нормальные напряжения в точках *1* и *2* (наиболее удаленных от нейтральной линии) можно записать с учетом реальных знаков напряжений; в точке 1 напряжения сжатия, а в точке 2 – растяжения. Формулы вычисления напряжений в этих точках принимают вид:

где – координаты точек *1* и *2* соответственно относительно ***главных центральных осей координат***. ***Обратим внимание***: так как знаки каждого слагаемого определены, все величины в правой части записанных выражений напряжений необходимо подставлять по модулю.

Рассматривая условие прочности, можно выполнить проверочный расчет или проектировочный (например, найти параметры прямоугольного поперечного сечения).

16

**Глава 3. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ)**

**§ 3.1. Понятие внецентренного сжатия (растяжения)**

***Внецентренное сжатие* (*растяжение*)** – *вид сложного сопротивления, при котором внешняя сжимающая (растягивающая) сила действует параллельно оси бруса, но точка приложения силы не* *совпадает с центром тяжести поперечного сечения*.

Простейший случай внецентренного сжатия в строительстве – действие сосредоточенной силы на колонну так, что точка приложения находится вне центра тяжести поперечного сечения колонны (в любой произвольной точке поперечного сечения).

Основное *отличие внецентренного сжатия от внецентренного растяжения* – в направлении приложенной силы. Ограничимся рассмотрением **внецентренного сжатия** (рис. 3.1).

Рис. 3.1

*a*)

*б*)

*y*

*z*

*F*

*x*

*О*

*y*

*x*

На рис. 3.1, *б* точкой показана **точка приложения сжимающей силы** в плоскости поперечного сечения, **точка – *полюс***. Координаты полюса  **– *эксцентриситеты*** приложенной силы относительно главных центральных осей инерции.

17

Внецентренное приложение силы обусловливает то, что в поперечных сечениях стержня возникает не только продольная сила, но и изгибающие моменты в двух плоскостях. Принято считать, что в поперечном сечении возникают **три внутренних силовых фактора (ВСФ)**:

– продольная сила;

– изгибающий момент в плоскости YZ;

– изгибающий момент в плоскости XZ.

В каждом сечении может возникать и поперечная сила, но ее действием при расчете нормальных напряжений пренебрегают.

**§ 3.2. Определение нормальных напряжений**

В общем случае внецентренного растяжения и сжатия нормальные напряжения рассчитываются по формуле

В нашем случае рассматриваем **внецентренное сжатие**, поэтому всегда имеем знак минус в первом слагаемом:

Внутренние силовые факторы, очевидно, вычислим следующим образом:

Тогда формулу (3.2) с учетом (3.3) можно переписать в виде

18

Вынесем за знак скобки общий множитель, получим окончательный вид формулы:

Таким образом, формула (3.2) или она же в виде формулы (3.4) позволяет вычислить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения.

**§ 3.3. Расчет на прочность при внецентренном**

**сжатии (растяжении)**

Расчет на прочность проводится в ***опасных точках поперечного сечения***. Поэтому практический интерес представляют именно эти точки. Как и при косом изгибе, ***опасными являются* *точки, наиболее удаленные от нейтральной* *линии*.**

При внецентренном сжатии (растяжении) ***нейтральная линия не проходит через центр тяжести поперечного сечения*,** **а отсекает на главных центральных осях отрезки .**

Определим длины отрезков, которые отсекает нейтральная линия в поперечном сечении.

Первоначально введем понятие **новых** для нас **геометрических характеристик**.

– ***квадраты радиусов инерции поперечного сечения***.

Выражение (3.4) перепишем с учетом (3.5). При этом второе и третье слагаемое умножим и разделим одновременно на параметр площади поперечного сечения *A.*

19

Далее в записи (3.6) вынесем общий множитель, окончательно получим выражение нормальных напряжений в виде

Пусть некоторая произвольная точка принадлежит нейтральной линии. Обозначим ее координаты **.** Подставим эти координатыв равенство (3.7) и приравняем его нулю. Тогда получим ***уравнение нейтральной линии*** в виде

По уравнению (3.8) *можно определить отрезки, которые НЛ отсекает на главных центральных осях поперечного сечения*.

1) Пусть , т.е. будем рассматривать точку, которая принадлежит оси *у*. Из уравнения (8) получим:

Обозначим – отрезок, который отсекает прямая по уравнению (3.8*а*), на главной (вертикальной) оси поперечного сечения, т.е. на оси *у*:

2) Пусть , т.е. будем рассматривать точку, которая принадлежит оси *х*. Из уравнения (3.8) получим:

20

Обозначим – отрезок, который отсекает прямая по уравнению (3.8*b*), на главной (горизонтальной) оси поперечного сечения, т.е. на оси *х*:

Таким образом, длины отрезков, которые НЛ отсекает на главных центральных осях поперечного сечения, находятся по формулам

Здесь –эксцентриситеты; , – квадраты радиусов инерции сечения; – площадь поперечного сечения;

– главные осевые моменты инерции сечения.

**§ 3.4. Положение нейтральной линии**

На рис. 3.2 показано предположительное положение нейтральной линии в зависимости от положения полюса. Заметим, что ***полюс и нейтральная линия расположены по разные стороны от центра тяжести сечения; при этом нейтральная линия проходит через те четверти координатной плоскости, в которых составляющие нормальных напряжений имеют разные знаки.***

Для каждой четверти координатной плоскости знаки напряжений от отдельного вида внутренних силовых факторов находятся в зависимости от положения полюса.

Напряжения от продольной силы во всех точках поперечного сечения отрицательны, так как заданная сила *F* является сжимающей.

21

Полюс расположен выше оси *x,* следовательно, **при изгибе относительно оси *x***  имеем *сжатыми верхние волокна* и, соответственно, на верхних волокнах (т.е. выше базиса) имеем напряжения сжатия ().

Тогда, очевидно, *ниже оси x волокна растянуты*, существуют напряжения растяжения (+). Аналогичные рассуждения проведем, рассматривая **изгиб от заданной силы** **относительно оси**  Полюс расположен слева от оси *у*, следовательно, слева от оси *у* волокна сжаты, существуют напряжения сжатия (); тогда справа от оси *у* волокна растянуты, существуют напряжения растяжения ().

***Обратим внимание***: так как знаки каждого слагаемого уже определены, **все величины в правой части записанных выражений напряжений необходимо подставлять по модулю**.

*С*

*x*

1

2

*О*

Нейтральная линия

Рис. 3.2

y

**§ 3.5. Расчет на прочность хрупких материалов**

Внецентренное сжатие в наибольшей степени интересно при использовании хрупких материалов. Как уже отмечалось ранее, для хрупких материалов *расчетное сопротивление при сжатии не совпадает с расчетным сопротивлением при растяжении*. В этом случае условие

22

прочности по нормальным напряжениям записывается в виде системы неравенств.

Определим опасные точки поперечного сечения. Очевидно (см. рис. 3.2), опасными являются точка *1* (в области сжатия) и точка *2* (в области растяжения), так как эти точки наиболее удалены от нейтральной линии. В точке *1* возникает наименьшее, а в точке *2* – наибольшее нормальные напряжения:

Тогда для указанных точек условие прочности принимает вид

Можно рассмотреть напряжения от каждого отдельного вида внутреннего силового фактора: – нормальные напряжения при центральном сжатии; – нормальные напряжения при изгибе относительно осей *x* и *y* соответственно. Обратим внимание на очевидные зависимости при построении соответствующих эпюр напряжений. Напряжения линейно зависят от координаты ; базисная линия эпюры проводится параллельно оси . Аналогично линейно зависят от координаты *x*; базисная линия эпюры проводится параллельно оси *x*. Базисная линия эпюры параллельна продольной оси рассматриваемого стержня (оси *z*), поэтому данную эпюру нужно показать для расчетной схемы заданного стержня, а не ограничиваться видом поперечного сечения.

23

***Замечание*** *к расчету на прочность.* Случаи сложного сопротивления можно разделить на две группы.

*К первой группе* относятся косой изгиб, внецентренное сжатие и внецентренное растяжение. Предполагается, что влияние возникающих в поперечных сечениях касательных напряжений невелико, поэтому расчет на прочность проводится без учета касательных напряжений и основан на рассмотрении нормальных напряжений в опасных точках поперечного сечения. Гипотезы прочности при этом не используются.

*Ко второй группе* относятся изгиб с кручением, сжатие или растяжение с кручением, сжатие или растяжение с кручением и изгибом одновременно. В этих случаях в поперечных сечениях возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, причем значениями последних пренебрегать нельзя. Расчет на прочность проводится на основе гипотез прочности с учетом и нормальных, и касательных напряжений.

**Глава 4. ЯДРО СЕЧЕНИЯ**

**§ 4.1. Определение ядра сечения**

***Ядро сечения*** – ***выпуклая* *область вокруг центра тяжести сечения****, обладающая свойством: если действующая сила приложена в ядре сечения, то нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения имеют одинаковый знак*. Знак нормальных напряжений определяется направлением действующей силы: если сила сжимающая, то напряжения отрицательные; если сила растягивающая, то напряжения положительные.

Известно, что многие строительные материалы (бетон, кирпич) плохо работают на растяжение, но хорошо выдерживают сжимающие нагрузки: в несколько раз. Поэтому на практике ставится **задача не допустить появления растягивающих напряжений** в колоннах, выполненных из хрупких материалов. Этой задаче и служит построения ядра сечения в плоскости поперечного сечения.

24

**§ 4.2. Свойства ядра сечения**

1) Чем дальше от начала координат расположен полюс, т.е. чем больше по абсолютной величине эксцентриситеты , тем ближе к центру тяжести проходит нейтральная линия. Это очевидно: с увеличением эксцентриситетов уменьшаются длины отрезков, которые нейтральная линия (НЛ) отсекает на главных центральных осях поперечного сечения, и наоборот.

2) Если полюс расположен на одной из главных центральных осей инерции, то НЛ перпендикулярна этой оси. Докажем это.

НЛ

*y*

*О*

*x*

Рис. 4.1

1-е положение. Пусть точка *О* находится на горизонтальной оси *х.* Очевидно, существуетТогда

25

означает, что пересечение НЛ с осью *у* возможно только в бесконечности, т. е. НЛ параллельна вертикальной оси *у.*

2-е положение. Пусть точка *О* находится на вертикальной оси *у.* Очевидно, существуетТогда

означает, что пересечение НЛ с осью *x* возможно только в бесконечности, т. е. НЛ параллельна горизонтальной оси *x.*

*y*

*О*

*x*

НЛ

Рис. 4.2

**§ 4.3.** **Анализ нормальных напряжений**

**в зависимости от положения нейтральной линии**

1) Рассмотрим случай, когда нейтральная линия *не проходит через поперечное сечение*.

Предположим, что сила приложена в центре тяжести поперечного сечения, значит, полюс находится в центре тяжести поперечного сечения. В этом случае **нормальные напряжения в поперечном сечении распределены равномерно и имеют один знак;** имеем осевое (**центральное**) сжатие (растяжение).

26

Тогда (Обратим внимание: при минимальных значениях эксцентриситетов имеем максимальные значения отрезков, которые НЛ отсекает на главных центральных осях.)

2) Увеличим эксцентриситеты, т.е. полюс будем отдалять от центра тяжести поперечного сечения. В этом случае отрезки будут уменьшаться (в силу обратно пропорциональной зависимости между эксцентриситетами и отрезками): НЛ будет приближаться к поперечному сечению. При некотором положении НЛ может коснуться поперечного сечения. Очевидно, в месте касания нормальные напряжения равны нулю.

*Утверждение*. ***Если НЛ касается контура поперечного сечения, то сжимающая (растягивающая) сила приложена в границе ядра сечения***.

3) Рассмотрим случай, когда НЛ пересекает поперечное сечение. В поперечном сечении возникают нормальные напряжения разных знаков. В произвольной точке поперечного сечения нормальное напряжение имеет вид:

Предположим, что произвольная точка принадлежит нейтральной линии, тогда уравнение НЛ запишем в виде:

где – координаты рассматриваемой точки.

Выполним анализ рисунка, представленного далее (см. рис.4.3).

1) Пусть точка *О* – полюс, а точка *i* расположена на НЛ*.* (НЛ на рисунке – линия *а-а*).

2) Поменяем местами эти точки. Предположим, что сжимающая сила приложена в точке *i* ( точка *i* – полюс)*,* а точка *О* принадлежит НЛ, поэтому

27

*a*

*i •*

*c*

*i*

*i*

*O*

*a*

*x*

НЛ

*x*

*y*

Рис. 4.3

3) Рассмотрим любую другую точку, принадлежащую прямой *а-а.* Предположим, что именно эта (любая) точка есть полюс. В этой точке значит, НЛ снова пройдет через точку *О*, но не будет совпадать с предыдущей НЛ.

*Замечания***.** 1)При любом положении полюса на прямой *а-а* НЛ будет проходить через точку *О*.

2) Каждому положению полюса соответствует определенная НЛ.

3) Разным положениям полюса на прямой *а-а* соответствуют разные нулевые линии, но все они проходят через точку *О*.

**Выводы**: 1) При перемещении полюса вдоль некоторой прямой *а-а* нулевые линии вращаются вокруг точки *О*.

2) При повороте НЛ вокруг некоторой фиксированной точки контура сечения точка приложения силы перемещается вдоль некоторой прямой.

**§ 4.4. Построение ядра сечения**

Построение ядра сечения основывается на *свойстве нейтральной* *линии*: **если нейтральная линия совпадает с контуром поперечного сечения, то полюс находится на контуре ядра сечения**.

28

Таким образом, для построения ядра сечения необходимо задать положения нейтральной линии в виде касательных к контуру поперечного сечения. При каждом конкретном положении нейтральной линии известными являются величины отрезков, которые нейтральная линия отсекает на координатных осях: . Тогда координаты полюса находим из выражений:

**Практические приемы построения ядра сечения**

Рассмотрим произвольный многоугольник, в котором оси *yx* – главные центральные оси.

*а5*

*а5*

*а4*

*а4*

*а3*

*а3*

*а2*

*а2*

*а1*

*а1*

*A5*

*A4*

*A3*

*A2*

*A1*

*y*

*x*

Рис. 4.4

29

Каждому положению полюса соответствует строго определенное положение нейтральной линии.

Точка А1 – полюс, НЛ – *а*1 *а*1.

Точка А2 – полюс, НЛ – *а*2 *а*2.

Точка А3 – полюс, НЛ – *а*3 *а*3.

Точка А4 – полюс, НЛ – *а*4 *а*4.

Точка А5 – полюс, НЛ – *а*5 *а*5.

Например, при перемещении полюса по прямой *а*2 *а*2  НЛ вращается вокруг А2 по ходу часовой стрелки, занимая различные положения.

**Порядок построения ядра сечения**

1) Определить центр тяжести и главные центральные оси поперечного сечения.

2) Определить геометрические характеристики (площадь, осевые моменты инерции, квадраты радиусов инерции).

3) Если сечение имеет вид многоугольника (т.е. образовано отрезками прямых), то **последовательно** задаем положения НЛ, совпадающие с линией контура поперечного сечения.

В этом случае фактически известны отрезки, которые НЛ отсекает, поэтому по формулам (4.4) вычисляем координаты полюса, соответствующие конкретному положению НЛ.

4) Полученные точки полюса соединяем прямыми линиями.

***Важно***. Внутренние узлы поперечного сечения не рассматриваем.

*А*

*В*

*С*

*D*

*E*

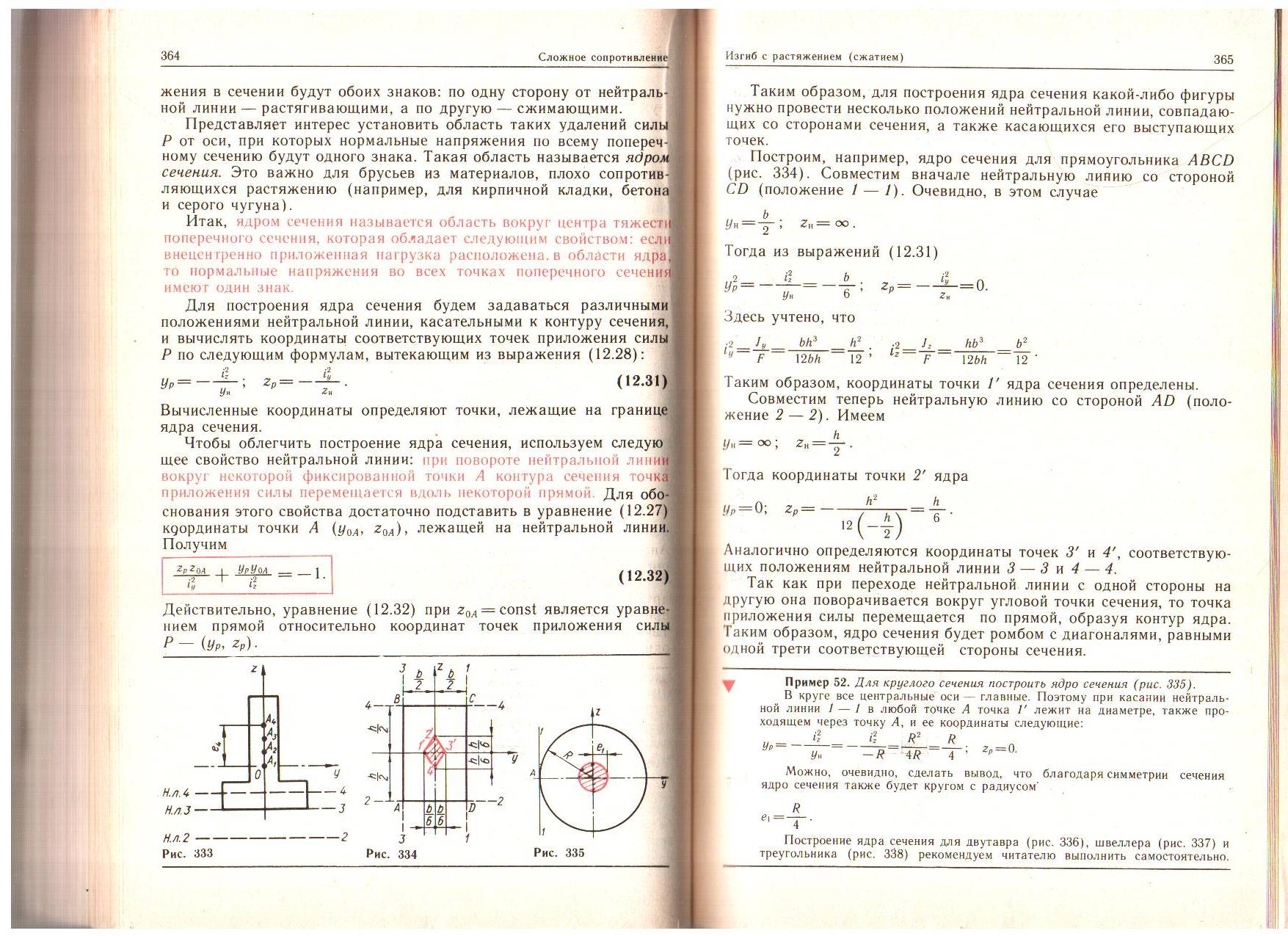
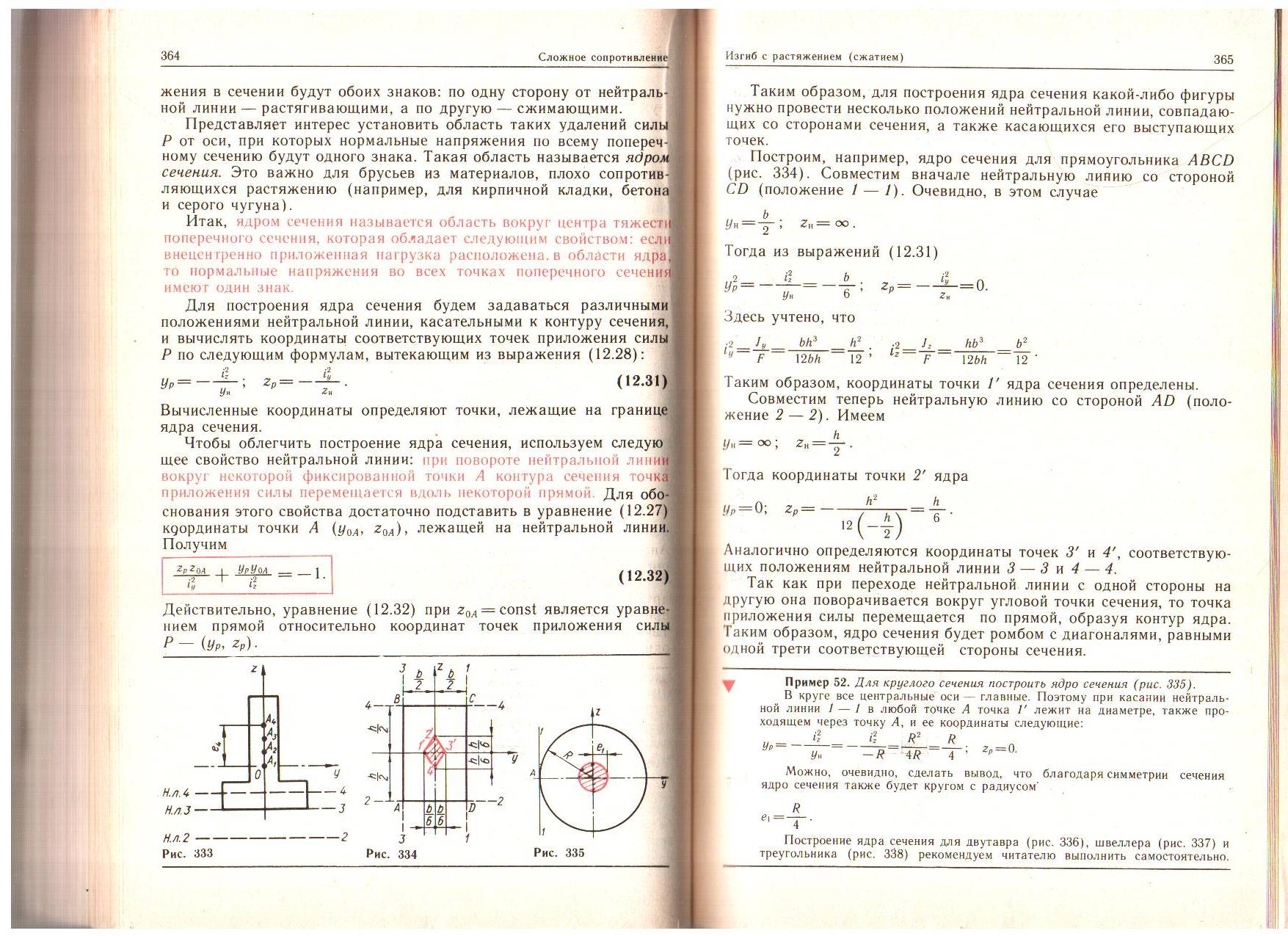
Рис. 4.5

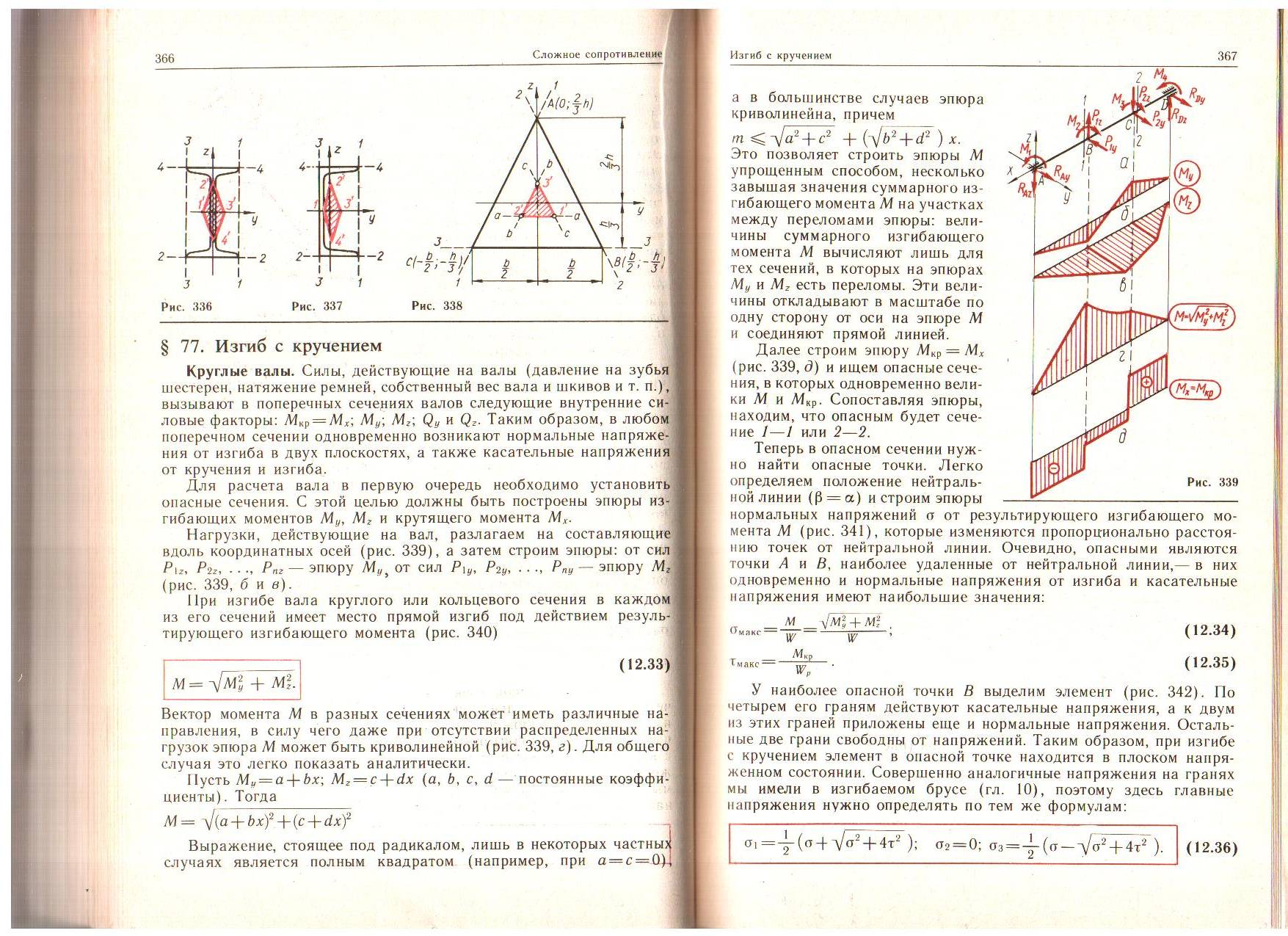
30

5) Если сечение имеет кривые линии, то задают положение НЛ в нескольких точках, касательных к кривой. Полученные точки полюсов соединяют кривыми линиями.

Положений нейтральной линии необходимо задать столько, сколько потребуется для построения замкнутого многоугольника обхода контура поперечного сечения. Например, на рис. 4 пунктирными

линиями показаны возможные положения нейтральной линии для построения ядра сечения: линии *AB*, *BC*, *CD*, *DE* и *АЕ*. Обратим внимание: обход сечения проводится только по *внешним* точкам контура сечения. Соединяя точки полюса, полученные для каждого положения нейтральной линии, получим замкнутый многоугольник – ядро сечения. Заметим, *если сечение симметричное, то ядро сечения также симметрично.* Далее показаны ***примеры построения ядра*** сечения в широко распространенных сечения.

****



31

**Глава 5. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ**

**§ 5.1. Основные понятия**

При сжатии стержня может наблюдаться не только потеря прочности, но и потеря устойчивости (выпучивание стержня). При этом ***несущая способность стержня вследствие потери устойчивости может быть исчерпана раньше, чем непосредственно от сжатия.***

Проблема (задача) потери устойчивости возникает при осевом (центральном) сжатии гибкого достаточно длинного и тонкого стержня. Вспомним, что при осевом сжатии короткого стержня наблюдается деформация сжатия. Из теоретической механики известно, что равновесие твердых тел может быть устойчивым и неустойчивым. **Упругое равновесие называется устойчивым**, если при каком-либо внешнем воздействии система стремится вернуться в исходное положение. В случае **неустойчивого равновесия** система деформируется до полного разрушения. *Замечание*. В нашем курсе мы будем рассматривать потерю устойчивости отдельных стержней системы, а не потерю устойчивости системы стержней в целом.

***Потерей устойчивости*** *стержня называется его переход из первоначального положения равновесия к другому положению равновесия, то* *есть переход из одной равновесной формы в другую*. Нагрузка, при которой происходит потеря устойчивости, называется *критической*. На рис. 5.1 показаны возможные положения стержня в зависимости от значения сжимающей силы. Обозначим – некоторое **критическое значение** сжимающей силы.

**Критической силой** принято называть наименьшее значение центрально приложенной силы, при котором прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой. Для ответа на вопрос о состоянии стержня или стержневой системы *с точки зрения потери устойчивости* действующее значение сжимающей силы сравнивается с с критическим значением.

32

*F* = *Fcr*

*б*)

*F* < *Fcr*

*а*)

*F* > *Fcr*

*в*)

Рис. 5.1

Очевидно, стержень находится ***в состоянии устойчивого равновесия***, если ***действующая сжимающая сила меньше*** некоторого критического значения – рис. 5.1, *а*.

Если ***сжимающая сила достигает критического значения***, стержень отклоняется от вертикального положения; возникает состояние как бы безразличного равновесия: после отклонения стержень приобретает равновесие и в искривленном положении; при этом он не возвращается в первоначальное положение, но и не искривляется далее. Происходит ***бифуркация***, то есть раздвоение состояния равновесия: прямолинейная форма теряет устойчивость, а криволинейная еще не успевает ее приобрести (см. рис. 5.1, *б*)*.* Наконец, если ***действующая сила превышает критическое значение***, то возникает новая криволинейная форма устойчивого равновесия (см. рис. 5.1, *в*). С практической точки зрения состояния, изображенные на рис. 5.1, *б* и 5.1, *в*, для строительных конструкций *неприемлемы*. Например, в последнем случае стержень работает не только на сжатие, но и дополнительно на изгиб: могут возникнуть недопустимо большие прогибы и напряжения даже при небольшом превышении критического значения.

33

**§ 5.2. Формула Эйлера определения критической силы**

**Леонард Эйлер** (Leonard Euler, 1707 – 1783) – величайший математик, физик, механик, астроном. Родился в Швейцарии, но более 30 лет жил в Петербурге; академик Петербургской Академии Наук.

Предварительно заметим, что существуют различные методы исследования устойчивости, которые рассматриваются в специальных курсах: например, известен курс «Устойчивость сооружений». *Метод Эйлера является наиболее простым для решения задач инженерной практики.* Метод основан на анализе разветвления возможных форм равновесия упругой системы. Повторим рассуждения Эйлера. Формула была выведена для случая шарнирного закрепления концов стержня (рис. 5.2), причем Эйлер доказал, что деформированная ось стержня (на рисунке показана тонкой линией) – *полуволна синусоиды*. В дальнейшем изогнутую ось стержня в случае потери устойчивости так и называют – ***полуволна синусоиды Эйлера***.

Рис. 5.2

*F*

*l*

Известно приближенное дифференциальное уравнение упругой линии

34

Справа в выражении (5.1) использовано распространенное обозначение производной штрихами; два штриха обозначают вторую производную: = .

Мы будем рассматривать принятую нами ранее ***систему координат*** (на рис. 5.2 она не показана): **начало координат** поместим **в нижней опоре; вдоль стержня** направим ось **z вверх; перпендикулярно** ей ось **y влево от начала координат.** Выбранной системе координат *соответствует знак плюс* в уравнениях (5.1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (5.2) |

В правой части записанных выражений (5.1) и (5.2) – изгибающий момент в произвольном сечении балки на расстоянии от начала координат; – жесткость сечения балки при изгибе.

***Замечание***. Дифференциальное уравнение упругой линии можно использовать и при изучении устойчивости сжатых стержней, так как потеря устойчивости стержня возникает при малых деформациях, т. е. справедлива гипотеза о малости деформаций.

В произвольном сечении стержня (отсчет от начала координат) с абсциссой *z* изгибающий момент имеет значение

Тогда (5.2) перепишем с учетом выражения момента, дополнительно учтем правило знака между прогибом и второй производной прогиба:

Обратим внимание: появился **знак минус**! Существует **правило**: прогиб (*y*) и вторая производная прогиба () всегда **разнозначны** независимо от выбора положительного направления оси ординат.

35

Введем дополнительно обозначение:

Тогда выражение (5.3) примет вид

Получили *однородное дифференциальное уравнение второго порядка*. Общий интеграл этого уравнения (известно из высшей математики) представляет собой выражение вида

где и – некоторые коэффициенты, которые можно найти из граничных условий по концам стержня.

С учетом найденного значения для выражение (5.6) принимает более простой вид:

Таким образом, получаем

Уравнение (5.8) верно, если один из сомножителей равен нулю.

Если то в выражении (5.6) заведомо , а это не соответствует условию задачи.

Очевидно, второй сомножитель должен быть равен нулю, т. е.

36

Решением этого тригонометрического уравнения является

Возводим в квадрат обе части выражения (5.9), получим

Отсюда выразим

Вспомним о введенном ранее обозначении (5.4) и приравняем правые части (5.4) и (5.11), получим:

Выразим значение силы в виде

Таким образом, **получили выражение критической силы** в виде (5.13). Как видим из формулы, ***существует не одна, а множество значений*** критической силы в силу изменения параметра *n*. Очевидно, наименьшее значение критической силы имеем при минимальном значении *n* , т.е. при

Для прямых стержней известна **формула Эйлера** в виде

Здесь – минимальная жесткость сечения стержня при изгибе; – длина сжатого стержня.

37

**Важно.** *Потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости!*

**Выводы**. 1. Если , то возможна только прямолинейная форма равновесия, которая в этом случае является устойчивой.

2. Для стержня, работающего в упругой стадии, **критическая сила зависит только от геометрических размеров стержня и модуля упругости**, но совершенно не зависит от прочностных характеристик материала стержня.

Далее на рис. 5.3 показаны возможные формы потери устойчивости при (на рисунке изображены красными линиями)

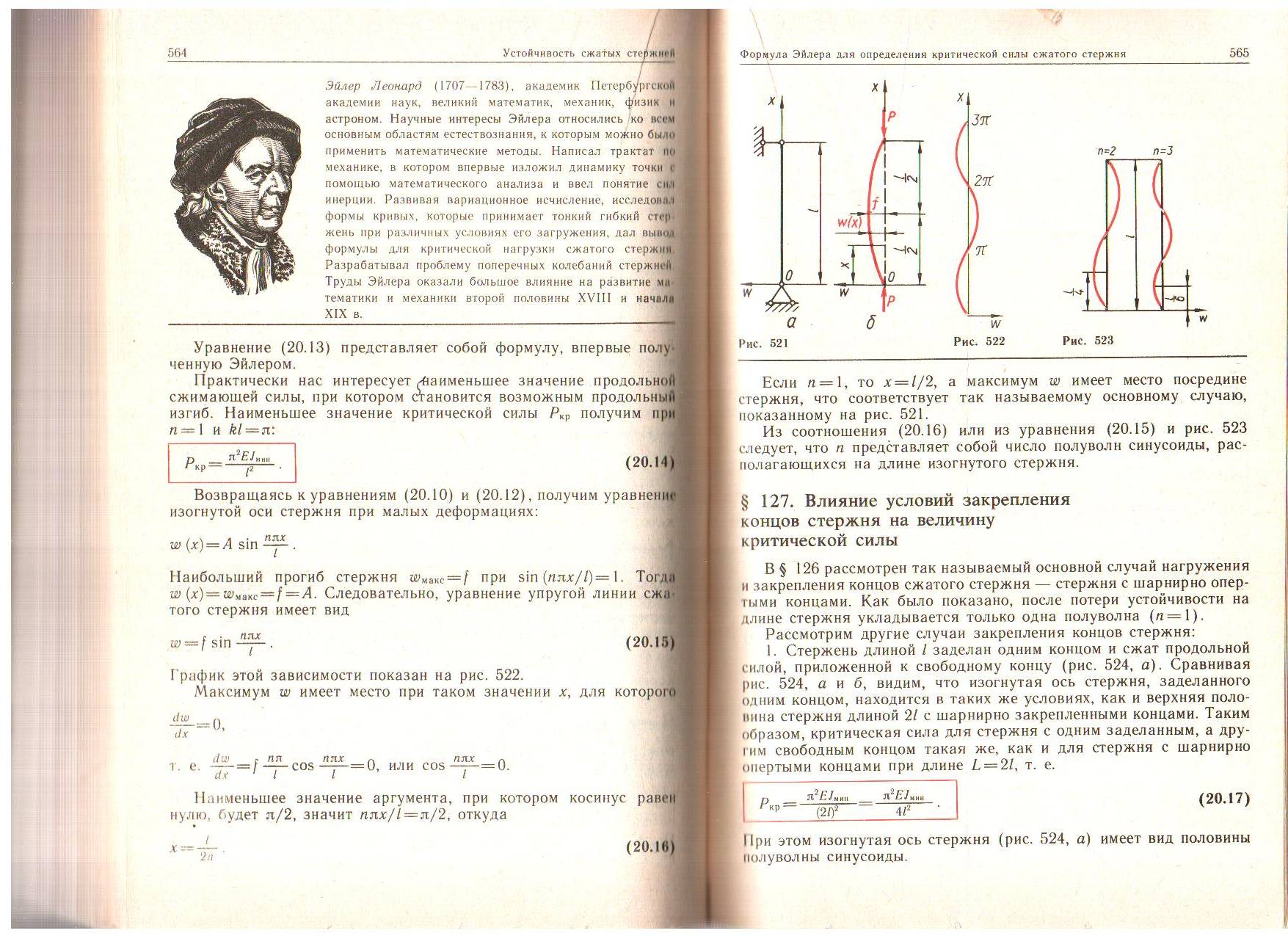
****

Рис. 5.3

**§ 5.3. Пределы применимости формулы Эйлера**

Установлено, что формулу Эйлера для сжатых стержней можно применять при определенных условиях, называемых пределами применимости формулы Эйлера. ***Формула была выведена для упругой стадии работы стержня*;** в этом случае возникающие в момент потери устойчивости напряжения не должны превышать предела пропорциональности материала :

38

Введем понятие **гибкости стержня** как отношение приведенной длины к радиусу инерции сечения:

Вычислим критические напряжения с учетом того, что устойчивость теряет, как правило, стержень максимальной гибкости, то есть при минимальном значении радиуса инерции сечения:

Здесь учтено, что Тогда условие (5.15) с учетом (5.17) можно записать в виде

Предельным значением гибкости является величина

Условие применимости формулы Эйлера можно записать в виде

(5.21)

Таким образом, ***формулу Эйлера нельзя применять для стержней, теряющих устойчивость за пределом пропорциональности***.

39

**§ 5.4. Влияние способа закрепления концов стержня**

**на значение критической силы**

В современных условиях формула вычисления критической силы имеет большое практическое значение в виде

Формула (5.22) носит название ***обобщенной формулы Эйлера***. Здесь – минимальная жесткость сечения при изгибе; – ***приведенная (эффективная) длина стержня***; – коэффициент приведения длины, учитывает реальное закрепление стержня.

Понятие приведенной длины было предложено русским ученым польского происхождения **Ф. С. Ясинским**. Феликс Станиславович Ясинский (1856 – 1899) – известный русский ученый в области устойчивости стержней и стержневых систем.

*Замечание.* Формула (5.22) фактически подразумевает, что концы стержня закреплены так, что приведенная длина стержня *одинакова* в обеих главных плоскостях сечения. Если же закрепление в разных плоскостях (плоскостях ) таково, что , то вычисляют сжимающие силы в каждой плоскости

***Меньшее из полученных значений является критической силой***, то есть .

Далее на рис. 5.4 показаны часто встречающиеся случаи закрепления концов стержней и соответствующие значения коэффициента .

40

Рис. 5.4

µ=1

*Fcr*

*l*

*Fcr*

µ=0,5

0,5*l*

µ=0,7

*Fcr*

0,7*l*

µ=0,5

*Fcr*

*0,5l*

*0,5l*

*Fcr*

2*l*

µ=2

Из анализа деформированных осей стержней рисунка 5.4 очевидно, что ***величина показывает, на какой части длины заданного сжимаемого стержня укладывается полуволна синусоиды Эйлера*** (это и есть приведенная длина стержня). Например, показывает, что , то есть полуволна синусоиды Эйлера укладывается на половине длины заданного стержня.

Для разных материалов предельное значение гибкости определяется свойствами именно материала (см. (5.20)). Например, для стержней из низкоуглеродистой стали . Для средне- и высокоуглеродистых, а также для легированных сталей предельная гибкость меньше указанной величины: для хромомолибденовой стали . Для древесины (сосна, предел пропорциональности , модуль упругости ГПа) .

41

**§ 5.5. Вычисление критических напряжений в зависимости от гибкости стержня**

Рассмотрим обобщенный график зависимости критических напряжений от гибкости (рис. 5.5). В зависимости от гибкости можно выделить *три* категории стержней.

С

λ0

МПа

Рис. 5.5

λ

*А*

*В*

*АВ* – прямая Тетмайера – Ясинского

*ВС* – гипербола Эйлера

1. ***Стержни малой гибкости*** , имеющие постоянное значение критического напряжения: или ( – значение гибкости, при которой критическое напряжение становится равным пределу текучести). Здесь – предел текучести, – предел пропорциональности (механические характеристики). Для таких стержней *опасной является потеря* *прочности* и расчет на устойчивость не проводят. Для разных марок сталей .

2. ***Стержни средней гибкости*** . В этом случае формула Эйлера неприемлема; *используется подход* *Тетмайера* –  *Ясинского*: можно найти критическое напряжение на основе достаточно простых зависимостей, полученных в результате обработки большого

42

количества экспериментальных данных. Для различных материалов эта зависимость либо линейная, либо нелинейная. Например, ***для стали*** получена линейная зависимость в виде

(5.22)

где – эмпирические коэффициенты (сталь марки Ст3, предел пропорциональности ). В этом же виде зависимость (5.22) можно использовать и ***для древесины***, но эмпирические коэффициенты в этом случае другие:

**Людвиг Тетмайер** (L.Tetmajer, 1850 –1905) – профессор Цюрихского политехнического института, установил предел применимости формулы Эйлера для стальных конструкций

*Замечание*. ***Для деревянных стержней*** (сосна, ель, лиственница) используется также формула в виде

Заметим, что формула (5.25) дает меньшее значение критического напряжения по сравнению с результатом формулы (5.23) (при одном и том же значении гибкости), следовательно, обеспечивает в большей степени запас устойчивости стержней. ***Для чугуна*** () зависимость нелинейная

где .

***Важно***. Зависимость Тетмайера – Ясинского можно применять при условии, что критические напряжения, вычисленные по эмпирическим формулам, не превосходят определенного предела. Для пластичных

43

материалов предельным является значение предела текучести ; для хрупких материалов – значение предела прочности . После определения критического напряжения критическую силу находят по формуле

(5.25)

где – площадь поперечного сечения брутто (доказано, что даже при больших местных ослаблениях сечений сжатого стержня их влияние на величину критической силы незначительно).

3. ***Стержни большой гибкости*** . Критическая сила определяется по формуле Эйлера (5.22). На основании формулы (5.17) очевидно, что графическим выражением зависимости является гипербола, называемая *гиперболой Эйлера* (см. рис. 5.5).

Таким образом, критические напряжения в зависимости от гибкости стержня вычисляют следующим образом:

**§ 5.5. Практический расчет**

**центрально**-**сжатых стержней на устойчивость**

В реальных условиях работы необходимо, чтобы сжатый стержень находился в устойчивом равновесии и имел определенный запас устойчивости. Это состояние обеспечивается в том случае, если действующая нагрузка меньше критического значения. Для обеспечения запаса устойчивости вводится коэффициент, уменьшающий расчетное

44

сопротивление на сжатие до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия. Условие сохранения устойчивости имеет вид

где – *коэффициент продольного изгиба* (или *коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления при продольном* *изгибе*); – максимальное расчетное нормальное напряжение. Коэффициент является функцией гибкости стержня, то есть . Следовательно, он зависит от размеров и формы поперечного сечения стержня. Значения коэффициента продольного изгиба для различных

гибкостей разных материалов установлены СНиПами и обычно приводятся в виде таблиц (см., например, далее табл.5.1) или эмпирических формул. Например, для *деревянных элементов*

Обратимся вновь к условию (5.27). Как правило, его можно использовать для проверки устойчивости стержня, для выполнения проектировочного расчета и для определения допускаемой нагрузки.

***Проверка устойчивости****.* Нормальные напряжения при центральном

сжатии определяются как , тогда условие устойчивости с учетом равенства принимает вид

45

Проверка устойчивости выполняется непосредственно по формуле (5.29): все параметры заданы, значение коэффициента продольного изгиба легко находится по таблице зависимости от гибкости стержня λ (вспомним, что гибкость находят на основе заданных геометрических параметров стержня).

***Проектировочный расчет***обычно проводится как задача подбора поперечного сечения стержня. В этом случае условие (5.29) рассматривается в виде

В записанном соотношении площадь поперечного сечения является неизвестной величиной; коэффициент продольного изгиба также неизвестен, так как параметры поперечного сечения не заданы и вычислить значение гибкости невозможно.Для решения задачи в этой

постановке используется ***метод последовательных приближений***.

**Основные шаги** **метода последовательных приближений**

● задают значение коэффициента на первом шаге вычисления;

● определяют площадь поперечного сечения по соотношению (5.30);

● вычисляют геометрические характеристики поперечного сечения;

● вычисляют гибкость стержня на основе полученного значения радиуса инерции поперечного сечения;

● находят расчетную величину коэффициента продольного изгиба, соответствующую вычисленной гибкости.

Анализ значений зависимости (см. табл. 5.1) показывает, что . Как правило, в качестве *первого приближения* принимают или . Если **предполагаемое**  и **расчетное**  значения не совпадают , то полностью повторяют описанный выше расчет.

46

Таблица 5.1

Коэффициенты продольного изгиба центрально-сжатых элементов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Гибкость | Значения для элементов из | | | | | | | |
| стали с расчетным сопротивлением *R*, МПа | | | | | | | древесины |
| 200 | 240 | 280 | 320 | 360 | 400 | 440 |
| 0 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 10 | 0,988 | 0,987 | 0,985 | 0,984 | 0,983 | 0,982 | 0,981 | 0,992 |
| 20 | 0,967 | 0,962 | 0,959 | 0,955 | 0,952 | 0,949 | 0,946 | 0,968 |
| 30 | 0,939 | 0,931 | 0,924 | 0,917 | 0,911 | 0,905 | 0,900 | 0,928 |
| 40 | 0,906 | 0,894 | 0,883 | 0,873 | 0,863 | 0,854 | 0,846 | 0,872 |
| 50 | 0,869 | 0,852 | 0,836 | 0,822 | 0,809 | 0,796 | 0,785 | 0,800 |
| 60 | 0,827 | 0,805 | 0,785 | 0,766 | 0,749 | 0,721 | 0,696 | 0,712 |
| 70 | 0,782 | 0,754 | 0,724 | 0,687 | 0,654 | 0,623 | 0,595 | 0,608 |
| 80 | 0,734 | 0,686 | 0,641 | 0,602 | 0,566 | 0,532 | 0,501 | 0,469 |
| 90 | 0,665 | 0,612 | 0,565 | 0,522 | 0,483 | 0,447 | 0,413 | 0,370 |
| 100 | 0,599 | 0,542 | 0,493 | 0,448 | 0,408 | 0,369 | 0,335 | 0,300 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 110 | 0,537 | 0,478 | 0,427 | 0,381 | 0,338 | 0,306 | 0,280 | 0,248 |
| 120 | 0,479 | 0,419 | 0,366 | 0,321 | 0,287 | 0,260 | 0,237 | 0,208 |
| 130 | 0,425 | 0,364 | 0,313 | 0,276 | 0,247 | 0,223 | 0,204 | 0,178 |
| 140 | 0,376 | 0,315 | 0,272 | 0,240 | 0,215 | 0,195 | 0,178 | 0,153 |
| 150 | 0,328 | 0,276 | 0,239 | 0,211 | 0,189 | 0,171 | 0,157 | 0,133 |
| 160 | 0,290 | 0,244 | 0,212 | 0,187 | 0,167 | 0,152 | 0,139 | 0,117 |
| 170 | 0,259 | 0,218 | 0,189 | 0,167 | 0,150 | 0,136 | 0,125 | 0,104 |
| 180 | 0,233 | 0,196 | 0,170 | 0,150 | 0,135 | 0,123 | 0,112 | 0,093 |
| 190 | 0,210 | 0,177 | 0,154 | 0,136 | 0,122 | 0,111 | 0,102 | 0,083 |
| 200 | 0,191 | 0,161 | 0,140 | 0,124 | 0,111 | 0,101 | 0,093 | 0,075 |
| 210 | 0,174 | 0,147 | 0,128 | 0,113 | 0,102 | 0,093 | 0,085 | 0,068 |
| 220 | 0,160 | 0,135 | 0,118 | 0,104 | 0,094 | 0,086 | 0,077 | 0,062 |

*Примечания*: 1. Для определения промежуточных значений допускается линейная интерполяция. 2. Для элементов из стали с расчетным сопротивлением коэффициент следует определять по cпециальным формулам (см., напр, [3, с. 406]) или таблицам СНиП [4,5].

На *втором шаге* *приближения*  принимают , то

есть принимают среднее арифметическое значений первого приближения.

47

Расчет проводят до совпадений значений коэффициента продольного изгиба (предполагаемого и расчетного) с точностью до двух-трех десятичных знаков. Следует также сравнить значения нормальных напряжений (расчетного и предполагаемого) на определенном шаге приближения: расчет прекращают, если разница между указанными напряжениями не превышает 2÷5 %.

Имеем:

– расчетное напряжение, соответствующее *i-*муприближению; – предполагаемое напряжение.

Погрешность вычисления на *i*-м шаге приближения вычисляется как соотношение:

Значение площади поперечного сечения принимают равным значению , полученному на последнем расчетном шаге приближения.

Таким образом, при расчете на устойчивость должно выполняться условие , где – критическая сила. Как правило, принимают

, где – нормативный коэффициент устойчивости, зависящий в основном от назначения стержней и его материала. Для стальных стержней и стальных конструкций ; для элементов машиностроительных конструкций .

48

**Глава 6**

**РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ**

**БАЛОК И РАМ МЕТОДОМ СИЛ**

**§ 6.1. Понятие статически неопределимой**

**стержневой системы**

***Статически неопределимой*** стержневой системой называют систему, которая не может быть рассчитана с использованием только уравнений равновесия – уравнений статики. В такой системе существуют лишние с точки зрения уравнений статики связи. В дальнейшем будем рассматривать *стержневые статически неопределимые системы*.

Условно можно выделить ***два вида статической неопределимости***:

1) *внешняя неопределимость* – наблюдается в статически неопределимых системах, в которых существуют лишние опорные закрепления. В этом случае из уравнений статики нельзя найти все опорные реакции.

2) *внутренняя неопределимость* – наблюдается в системах с лишними связями, введенными для взаимного соединения частей системы. В этом случае из уравнений равновесия нельзя найти все внутренние силовые факторы.

Существуют ***различные методы расчета статически неопределимых систем***. Важнейшими из них являются: метод сил, метод перемещений, смешанный метод и др. (Эти методы подробно рассматриваются в дисциплине «Строительная механика».) Здесь же рассмотрим более подробно ***расчет статически неопределимых систем методом сил*** на действие неподвижной нагрузки. Название метода подсказывает, что за неизвестные при использовании этого метода приняты силы – фактические усилия в лишних связях. Именно для неизвестных сил будут рассматриваться определенные уравнения. Но расчет начинается с определения степени статической неопределимости.

49

Основной характеристикой статически неопределимых систем является ***степень статической неопределимости* – количество «лишних**» связей, которые необходимо мысленно удалить из статически неопределимой системы для преобразования ее в статически определимую. Заметим, что слово «лишние» заключено в кавычки не случайно: некоторые связи являются лишними с точки зрения уравнений статики (их количество является недостаточным). На практике статически неопределимые системы являются более жесткими системами по сравнению с системами статически определимыми.

Степень статической неопределимости *n* для плоских систем находится по различным формулам. Наиболее простой является следующая формула:

1) .

Здесь - количество опорных реакций в системе, суммирование проводится по количеству реакций. Число «3» указывает, что для плоского случая существуют три уравнения равновесия – три уравнений статики. Но эта формула неприменима для систем, имеющих замкнутые контуры. Для них применяется формула в виде:

2) ,

где – число замкнутых контуров, включая опорные, которые можно образовать в системе; ш– общая *кратность* всех шарниров. *Кратность шарнира* – величина, на единицу меньшая количества соединяемых шарниром стержней. На рис. 6.1 показаны примеры вычисления кратности. Значение кратности показано цифрой рядом с шарниром.

1

3

2

Рис. 6.1

Вычисление степени статической неопределимости проиллюстрируем примерами, показанными на рис. 6.2. Обратим внимание на

50

вычисление степени статической неопределимости на рис. 6.2, б: из общего количества реакций (в каждой жесткой заделке существует по три реакции) вычитается число 4 (а не 3, как в формуле). В этом случае к количеству уравнений равновесия на плоскости добавляется уравнение равновесия в виде суммы изгибающих моментов относительно шарнира самой системы. Кратность шарнира в примере равна единице, поэтому добавлено одно уравнение. В примерах рис. 6.2, в и г степень статической неопределимости вычисляется через замкнутые контуры (римскими цифрами пронумерованы замкнутые контуры, уже существующие или образованные).

а) б)

1

в) г)

2

1

1

2

I

IIII

IIIII

1

1

I

II

1

1

Рис. 6.2

51

**§ 6.2. Выбор основной системы метода сил**

Рассмотрим статически неопределимую раму (рис. 6.3). Требуется выполнить расчет данной рамы, то есть построить эпюры изгибающих моментов , поперечных сил , продольных сил от действия заданной равномерно распределенной нагрузки .

*q*

*A*

*B*

Рис. 6.3

Вычислим степень статической неопределимости. Так как в раме существует 5 опорных реакций, то . Следовательно, в раме существует 2 лишние с точки зрения уравнений статики связи. Отбрасывая лишние связи, *образуем из заданной статически неопределимой системы статически определимую, которую принято называть* ***основной системой метода сил* (*ОСМС*)***.* Отбрасывание можно проводить по-разному, главное, что *образованная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой*. Заметим, что под отбрасыванием лишних связей понимается не только фактическое отбрасывание, но и выполнение разрезов, введение дополнительных шарниров. На рис. 6.4 представлены некоторые варианты выбора ОСМС для рассматриваемой рамы. Очевидно, рама, изображенная третьей справа на этом рисунке. ***не может быть*** выбрана в качестве ОСМС, так как *является геометрически изменяемой*: все три опорных стержня параллельны друг другу.

52

Геометрически изменяемая система (**неверно выбрана**)

Рис. 6.4

Для дальнейшего расчета принимаем ОСМС, изображенную на рис. 6.4 первой слева. На рис. 6.5 показана эквивалентная система, в которой и – неизвестные реакции отброшенных связей. Направление неизвестных и принято произвольно (в данном случае обе неизвестные направлены вверх), но так как отброшены вертикальные опоры, то неизвестные направлены именно вертикально.

*q*

Рис. 6.5

**§ 6.3. Канонические уравнения метода сил**

Важно подчеркнуть, что выбранная основная система метода сил (ОСМС) должна быть системой статически определимой и должна соответствовать основным требованиям правильного образования существующих стержневых систем. Последние называют «Правила образования *геометрически неизменяемых систем»* и подробно рассматривают в дисциплине «Строительная механика».

53

Если можно образовать разные виды ОСМС, то выбирают ту систему, в которой строить различные эпюры проще.

Продолжим рассмотрение с исследования выбранной ранее ОСМС. На основании принципа независимости действия сил вертикальное перемещение точки *А* можно рассматривать в виде суммарных вертикальных перемещений этой точки от отдельного действия каждого вида нагрузки. Можно записать:

,

где и – вертикальные перемещения точки *А* от отдельного действия и соответственно; – вертикальное перемещение точки от заданного силового воздействия. ( Индексом здесь и в дальнейшем принято обозначать *любое* ***силовое*** воздействие в виде сосредоточенных сил или моментов, в виде равномерно распределенной нагрузки.) Аналогично можно записать вертикальное перемещение точки *В*:

.

Очевидно, по условию в точках *А* и *В* отсутствуют вертикальные перемещения, так как в этих точках расположены вертикально шарнирно подвижные опоры. Но в выбранной основной системе вертикальные перемещения в точках *А* и *В* существуют: указанные точки свободны от закреплений. Следовательно, для устранения полученного противоречия между заданной и основной системами *необходимо принять вертикальные перемещения в точках А и В равными нулю.* Таким образом, заставляя выбранную ОСМС работать как заданную, получим систему уравнений:

или (6.1)

54

Обратим внимание: все перемещения левой части уравнений (6.1) должны быть вычислены по эпюрам, построенным в основной системе от соответствующих единичных воздействий и заданной нагрузки.

Для линейно деформируемых упругих систем любое перемещение ∆, вызванное силами и , можно представить в виде произведения силы на перемещение, найденное от единичного воздействия:

.

Здесь – перемещение - точки по направлению *силы ,* вызванное силой =1; в нашем случае . Тогда в левой части уравнений (6.1) соответствующие слагаемые можно записать в виде:

С учетом записанных соотношений система (6.1) принимает окончательный вид:

Полученная система (6.2) **представляет собой систему канонических уравнений метода сил для дважды статически неопределимой системы (степень статической неопределимости ).**  Для рамы (или любой стержневой системы) *n раз статически неопределимой* канонические уравнения метода сил принимают вид

55

*Смысл канонических уравнений*: все перемещения в направлении отброшенных связей (обобщенные перемещения) от всех неизвестных и заданной нагрузки равны нулю. Каждое уравнение системы выражает условие равенства нулю перемещения по направлению соответствующего неизвестного.

**§ 6.4. Вычисление коэффициентов и свободных членов**

**канонических уравнений метода сил и способы их проверки**

Рассмотрим систему канонических уравнений (2). Как уже отмечалось, коэффициенты при неизвестных – перемещения по направлению силы , вызванные *единичной силой* . Принято *перемещения от единичных воздействий называть удельными* перемещениями. В первом уравнении – перемещения по направлению силы , вызванные соответственно единичными силами и . Во втором уравнении – перемещения по направлению силы , вызванные соответственно единичными силами и . Свободные (или грузовые члены) , – перемещения по направлению силы , вызванные заданной нагрузкой.

Все перемещения находим методом Максвелла - Мора (перемножением соответствующих эпюр изгибающих моментов):

В формулах (6.4) интегрирование проводится в пределах длины участка перемножения, суммирование – по количеству таких участков.

Отметим ***два свойства коэффициентов при неизвестных***.

1. Перемещения с одинаковыми индексами всегда положительны, не могут быть равны нулю, поэтому их называют ***главными*** (в данном примере это и ).

2. Коэффициенты с разными индексами называют побочными коэффициентами. На основании теоремы взаимности перемещений .

56

В выражениях (6.4) (или ) – эпюры изгибающих моментов, построенные в выбранной основной системе метода сил от единичных значений неизвестных; – эпюра изгибающих моментов, построенная в ОСМС от заданной нагрузки.

***Для проверки*** найденных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо построить суммарную единичную эпюру – эпюру от одновременного действия единичных значений неизвестных. Эпюра строится в выбранной ОСМС алгебраическим сложением единичных эпюр: . В общем случае можно записать , где *n* – степень статической неопределимости системы.

Рассмотрим ***способы проверки*** коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил.

1.*Построчная проверка коэффициентов при неизвестных*: алгебраическая сумма коэффициентов *i* - й строки равна результату перемножения *i* - й единичной эпюры изгибающих моментов на суммарную единичную эпюру изгибающих моментов:

Например, для первой строки системы уравнений (6.5) (при *i* =1), имеем

2. *Универсальная проверка коэффициентов при неизвестных*: алгебраическая сумма всех коэффициентов при неизвестных равна результату перемножения суммарной единичной эпюры изгибающих моментов самой на себя:

57

.

В рассматриваемом примере с учетом равенства коэффициентов будем иметь

3. *Проверка свободных (грузовых) членов*: алгебраическая сумма грузовых членов равна результату перемножения грузовой эпюры на суммарную единичную эпюру

В правой части всех записанных выражений суммирование проводится по количеству участков перемножения, интегрирование – по длине каждого перемножаемого участка.

Выполнение проверок коэффициентов и свободных членов помогает обнаружить возможную ошибку на более ранней стадии расчета, поэтому их выполнение является желательным. Как правило, выполняют либо построчные проверки коэффициентов и проверку грузовых членов, либо универсальную проверку и также проверку грузовых членов.

**§ 6.5. Правило построения эпюры изгибающих моментов**

**в заданной стержневой системе**

После нахождения всех коэффициентов при неизвестных и свободных членов необходимо решить систему канонических уравнений (9.2) относительно неизвестных . С учетом найденного значения неизвестного окончательная эпюра изгибающих моментов

58

строится в первоначально заданной системе по правилу:

где произведение носит название исправленной эпюры. В нашем примере

где – первая исправленная эпюра, – вторая исправленная эпюра. Исправленные эпюры строятся в основной системе метода сил от найденных значений неизвестных . Так как в процессе расчета уже построены эпюры от единичных значений неизвестных, достаточно имеющиеся единичные эпюры умножить на фактические значения найденных неизвестных, то есть «исправить» единичные эпюры.

В качестве ***проверок построенной эпюры*** изгибающих моментов рассматривают следующие.

1. *Статическая проверка* (проверка равновесия узлов рамы): узлы рамы должны находиться в равновесии, то есть сумма моментов, действующих в узле по ходу часовой стрелки, должна быть равна сумме моментов, действующих в узле против хода часовой стрелки.

2. *Деформационная или кинематическая проверка*. Результат умножения окончательной эпюры изгибающих моментов на суммарную единичную эпюру изгибающих моментов (или последовательно на единичные эпюры) должен быть равен нулю.

где, как и раньше, интегрирование проводится по длине участка перемножения, а суммирование – по количеству таких участков.

59

**Список использованной и рекомендуемой литературы**

***а*) *основная литература***:

1.Сопротивление материалов : учеб. пособие / С. А. Маврина, И. А. Черноусова ; Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 144 с. (Гриф УМО) ISBN 978-5-9984-0272-2

2. Михайлов А. М. Сопротивление материалов: учебник для студ. высш. учеб. заведений / А. М. Михайлов. – М.: Издательский центр «Академия», 2009. – 448 с. ISBN 978-5-7695-2697-8.

3. Александров А. В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М.: Высшая школа, 2004. – 560 с.

4. Писаренко Г. С. Сопротивление материалов: учеб. для вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев : Вища школа, 1986. – 775 с.

***б***) ***дополнительная литература***:

1. Методические указания к выполнению расчетно-графических работ/ С. А. Маврина. – Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 60 с.

2. Сопротивление материалов. Том 5: Учебное пособие / Богомаз И.В., Мартынова Т.П., Москвичев В.В. - 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство АСВ, 2011. – 168 с. ISBN 978-5-93093-829-6

<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785930938296.html>

***в***) ***периодические издания***: Известия вузов «Строительство»

***г***) ***интернет-ресурсы***:

<http://www.edu.ru/> сайт «Российское образование»;

<http://e.lib.vlsu.ru/> сайт электронной библиотеки ВлГУ;

ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru

<http://www>. soprotmat.ru

60

Оглавление

|  |  |
| --- | --- |
| Глава 1. Основные понятия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3 |
| Введение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3 |
| § 1.1.Гипотезы и допущения сопротивления материалов. . § 1.2. Схематизация элементов конструкций. . . . . . . . . . . . .  § 1.3. Схематизация внешних воздействий . . . . . . . . . . . . . .  § 1.4. Схематизация опорных устройств . . . . . . . . . . . . . . . .  § 1.5. Понятие о расчетной схеме . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3  5  6  7  8 |
| Глава 2. Сложное сопротивление: косой изгиб . . . . . . . . . . . | 9 |
| § 2.1. Понятие сложного сопротивления . . . . . . . . . . . . . . . .  § 2.2. Косой изгиб . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 2.3. Положение нейтральной линии при косом изгибе . . .  § 2.4. Расчет на прочность при косом изгибе . . . . . . . . . . . . . | 9  10  12  16 |
| Глава 3. Внецентренное сжатие (растяжение) . . . . . . . . . . . . | 17 |
| § 3.1. Понятие внецентренного сжатия (растяжения) . . . . . .  § 3.2. Определение нормальных напряжений . . . . . . . . . . . . § 3.3. Расчет на прочность при внецентренном сжатии (растяжении) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 3.4. Положение нейтральной линии . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 3.5. Расчет на прочность хрупких материалов . . . . . . . . . . | 17  18  19  21  22 |
| Глава 4. Ядро сечения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 24 |
| § 4.1. Определение ядра сечения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 4.2. Свойства ядра сечения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 4.3. Анализ нормальных напряжений в зависимости от положения нейтральной линии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 4.4. Построение ядра сечения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 24  25  26  28 |
| Глава 5. Устойчивость сжатых стержней . . . . . . . . . . . . . . . . | 32 |
| § 5.1. Основные понятия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 5.2. Формула Эйлера определения критической силы . . . .  § 5.3. Пределы применимости формулы Эйлера . . . . . . . . . .  § 5.4. Влияние способа закрепления концов стержня на значение критической силы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .  § 5.5. Вычисление критических напряжений в зависимости от гибкости стержня . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 32  34  38  40  42 |

61

|  |  |
| --- | --- |
| § 5.6. Практический расчет центрально-сжатых стержней на устойчивость . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 44 |
| Глава 6. Расчет статически неопределимых балок и рам методом сил . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 49 |
| § 6.1. Понятие статической неопределимости стержневой системы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 49 |
| § 6.2. Выбор основной системы метода сил . . . . . . . . . . . . . . | 52 |
| § 6.3. Канонические уравнения метода сил . . . . . . . . . . . . . . | 53 |
| § 6.4. Вычисление коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 56 |
| § 6.5. Правило построения эпюры изгибающего момента в заданной стержневой системе . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 58 |
| Список использованной и рекомендуемой литературы . . . . | 60 |

62