

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

Кафедра физики и прикладной математики

Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине  
"Математическое моделирование систем генерации и транспортировки  
лазерного излучения"

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению  
12.04.05 «Лазерная техника и лазерные технологии»

Кутровская С.В.  
Кучерик А.О.  
Лексин А.Ю.

Владимир-2018 г.

УДК 539.1.03

ББК 22.344я7

Составители: С.В. Кутровская, А.О. Кучерик, А.Ю. Лексин

Рецензент доктор физико-математических наук, профессор Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых – Л.В. Фуров.

Печатается по решению редакционного совета ВлГУ

Методические указания для самостоятельной работы по дисциплине «Математическое моделирование систем генерации и транспортировки лазерного излучения» / Владим. гос. уни-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых; С.В. Кутровская, А.О. Кучерик, А.Ю. Лексин – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2018. – 40 с.

Рассмотрена концепция диссипативных солитонов, методы решения нелинейного уравнения Шрёдингера, альтернативных по отношению к методу SFM, математическая модель распространения связанных оптических импульсов в нелинейной среде.

Предназначены для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 12.04.05 «Лазерная техника и лазерные технологии»

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 7. Табл. 2. Библиогр.: 17 назв.

УДК 539.1.03

ББК 22.344я7

## Содержание

Введение.....	4
ТЕМА 1. Влияние нелинейно-дисперсионных эффектов на распространение световых импульсов в оптических средах.....	5
Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по теме 1 .....	7
ТЕМА 2. Численные методы анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное уравнение Шрёдингера .	11
Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по теме 2 .....	12
ТЕМА 3. Моделирование процессов распространения лазерного излучения в дисперсионно-нелинейных средах .....	24
ТЕМА 4. Системы генерации и нелинейного преобразования лазерных сигналов.....	26
Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по темам 3-4 .....	27
Список дополнительной литературы .....	39

## Введение

В данном методическом пособии представлен материал, выносящийся на самостоятельное изучение при освоении дисциплины "Математическое моделирование систем генерации и транспортировки лазерного излучения". Проведение самостоятельной работы необходимо для успешного освоения теоретического и практического содержания курса.

Настоящее методическое пособие содержит ряд рекомендаций по изучению дисциплины, а также дополнительный материал по темам, выходящим за рамки лекционного курса. В частности, речь идет о концепции диссипативных солитонов – фундаментальном расширении теории солитонов в консервативных и интегрируемых системах. Особый интерес здесь вызывает ранее мало исследованное как с теоретической так и с практической точки зрения направление – изучение возникновения и распространения диссипативных солитонов в оптически плотных средах. Давно известно, что оптические свойства плотных атомных ансамблей или сложных материалов может сильно отличаться от свойств проявляемых независимыми атомами. Некоторые из таких систем могут производить два различных выходных сигнала для одной и той же входящей интенсивности управляющего лазера. Для всего диапазона интенсивностей приложенного поля выходной сигнал будет образовывать петлю гистерезиса. Если не требуется внешней обратной связи для возникновения этого явления, то его называют внутренней оптической бистабильностью (ВОБ). Экспериментально ВОБ наблюдалась в оптическом отклике от редкоземельных ионов и ионных пар в стеклах и кристаллических структурах. Однако, намного более богатая физика возникает в том случае, если изучать связанную систему атомно-оптических уравнений Максвелла-Шрёдингера в оптически-плотной среде. С учетом локального отклика среды в такой системе становится возможным получить уравнение Гинзбурга-Ландау пятого порядка и исследовать динамику диссипативных солитонов на ее основе. Вопросы моделирования возникающих при этом устойчивых состояний электромагнитного поля (солитонов различного типа) методами нелинейной динамики являются основным предметом изучения студентами в рамках самостоятельной работы.

Самостоятельная работа студента подразумевает ознакомление с конспектом лекций, выполнение контроля собственных знаний по соответствующим контрольным вопросам, изучение дополнительной литературы по теме курса, выполнение домашних заданий к практическим занятиям, оформление отчетов по лабораторным работам.

## **ТЕМА 1. Влияние нелинейно-дисперсионных эффектов на распространение световых импульсов в оптических средах**

**Основные вопросы темы:** разновидности оптических сред, используемых в системах генерации и транспортировки лазерного излучения. Атомно-оптическое взаимодействие. Физические причины возникновения нелинейно-дисперсионных эффектов при распространении световых импульсов в оптических средах. Волоконные световоды: изготовление и материалы. Оптические потери в световодах. Вынужденное комбинационное рассеяние, вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна, их влияние на динамику распространения оптических импульсов. Основы теории хроматической дисперсии. Распространение волновых пакетов в диспергирующих средах, фазовая и групповая скорости. Оптические солитоны.

**Цель и задачи изучения темы.** Освоение материала должно способствовать пониманию физических процессов, происходящих при распространении оптических импульсов в различных средах, используемых в системах генерации и транспортировки лазерного излучения, развитию у студентов навыков анализа режимов распространения оптических импульсов, исходя из понимания физической сути происходящих процессов на микро- и макроуровне.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** уравнения Максвелла, энергетические уровни, оптические импульсы, коэффициент преломления, коэффициент поглощения, оптические потери, световод, волна накачки, стоксова волна, хроматическая дисперсия, лямбда-схема атомно-оптического взаимодействия, волновой пакет, фазовая скорость, групповая скорость.

**Требования к уровню подготовленности студента.** Студент должен знать физические принципы генерации и распространения лазерного излучения, иметь базовые представления о законах распространения оптических пучков, знать математический аппарат описания электромагнитного излучения, иметь представления об алгоритмизации.

### **Контрольные вопросы по теме:**

1. Физические характеристики оптических сред: коэффициенты преломления и поглощения.
2. Оптические потери в световодах.
3. Вынужденное комбинационное рассеяние.
4. Вынужденное рассеяние Мандельштама-Бриллюэна.
5. Динамика волны накачки и стоксовой волны при вынужденном рассеянии Мандельштама-Бриллюэна. Порог ВРМБ.
6. Основы теории хроматической дисперсии. Волновые пакеты в диспергирующих средах. Фазовая и групповая скорости.

7. Преобразование формы и спектра импульса в дисперсионных средах.
8. Самофокусировка оптических импульсов.
9. Нелинейные эффекты высших порядков. Образование ударной волны огибающей.
10. Генерация суммарных и разностных частот. Параметрические солитоны.
11. Нелинейные эффекты в волоконных световодах. Кубичный отклик среды.

## **Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по теме 1. Концепция диссипативных солитонов**

Концепция диссипативных солитонов – фундаментальное расширение теорий солитонов в консервативных и интегрируемых системах. Она состоит из трех частей: стандартной теории солитонов, развиваемой с 1960-ых годов, следствий из нелинейной теории динамики и работ Пригожина относительно систем, далеких от равновесия и самоорганизации (см. рис. 1). Это основные три источника и три составляющих компоненты этой новой парадигмы. Физически говоря, главная часть стандартной теории солитонов связана с балансом между дисперсией и нелинейностью, которая позволяет существовать стационарным ограниченными решениями. Для диссипативных систем, нужно заметить, что важный баланс – между усилением и потерями – это условие необходимо для того, чтобы солитоны были постоянными образованиями. Даже малейшая разбалансировка приведет к решению, или бесконечно увеличивающемуся, если будет преобладать усиление, или полностью исчезающему из-за потерь. Таким образом, вместо одного баланса, мы должны рассмотреть сложный баланс между несколькими физическими явлениями.

Вторая часть концепции диссипативных солитонов – нелинейная динамика – говорит нам о том, что солитон надо рассматривать как неподвижную точку бесконечномерной динамической системы. Свойства стабильности неподвижных точек непосредственно определяют стабильность солитона. Неподвижные точки могут быть преобразованы в предельные циклы при определенных значениях параметров системы, и затем, солитон становится пульсирующим образованием. Дальнейшие преобразования могут включать нерегулярное поведение траектории, таким образом, создавая хаотические солитоны. Поэтому, нелинейная динамика говорит нам о том, что возможны бифуркации солитона и хаотическая эволюция солитонов. Так как мы рассматриваем бесконечномерные динамические системы, есть огромное разнообразие типов солитонов и их бифуркаций.

Наконец, третья часть концепции – теория систем, далеких от равновесия – говорит нам о том, что солитоны являются самоорганизованными формированиями, требующими непрерывной поставки энергии. Как только эта поставка заканчивается, диссипативный солитон прекращает существовать. Говоря простым языком, самоорганизация – конвергенция определенных начальных условий к локализованному решению системы, которое является устойчивым для данного набора внешних параметров. Таким образом, конечное состояние определяется согласно физическим законам, а не согласно начальному

условию. Для бесконечномерных динамических систем устойчивое решение может быть очень сложным. Это не обязательно гладкая функция с единственным максимумом и экспоненциально убывающими хвостами. Кроме того, может быть несколько устойчивых решений, существующих для одного набора параметров. Это может даже случиться в случае относительно простого уравнения, например, как комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау пятого порядка. Большинство процессов в природе управляют намного более сложные динамические факторы. Таким образом, стационарные решения этих систем могут быть значительно более сложными.

Есть существенное различие между солитонами в гамильтоновых системах и в диссипативных. В гамильтоновых системах решения для солитона появляются в результате баланса между дифракцией (или дисперсией) и нелинейностью. Дифракция расширяет луч, в то время как нелинейность фокусирует и делает его более узким. Баланс между этими двумя явлениями приводит к постоянным решениям. Они обычно образуют однопараметрическое семейство. В системах с усилением и потерями, чтобы иметь постоянные решения, усиление и потери должны быть уравновешены. Два баланса приводят к решениям, которые постоянны. Форма, амплитуда и ширина являются постоянными и зависят от параметров уравнения. Этот случай представлен качественно на рисунке 2. Для телекоммуникационных приложений жесткость солитона может обеспечить эффективное подавление шума и остановить любое изменение параметров солитона.

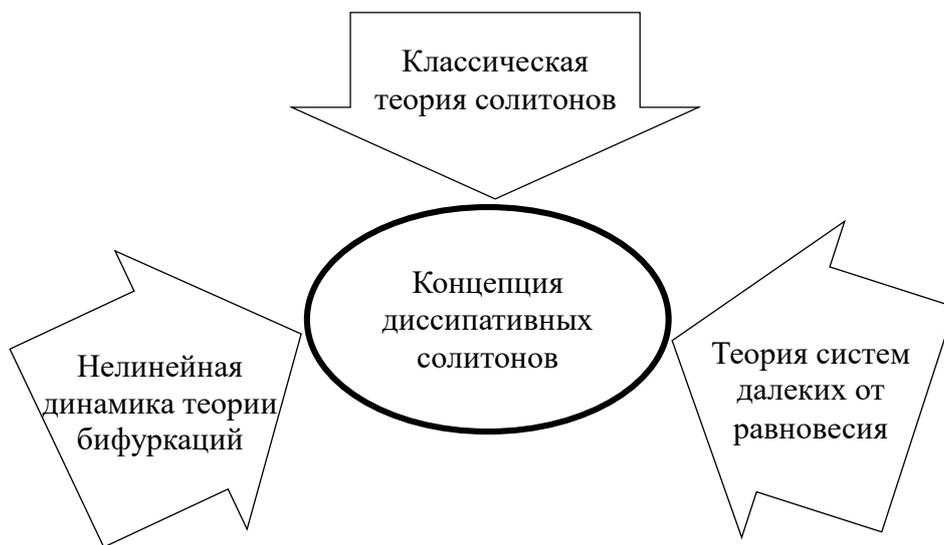


Рис. 1. Три источника и три составляющих концепции диссипативных солитонов

Ясно, что стационарные диссипативные солитоны можно рассматривать как стационарные решения бесконечномерной

динамической системы. Таким образом, их параметры зафиксированы. Эти формирования устойчивы при распространении, если параметры системы выбраны в соответствующих областях. Вообще, диссипативные солитоны не обязательно постоянны. Другими словами, стационарные решения не единственные объекты, которые могут существовать в таких системах. Например, предельный цикл – другой более сложный объект, который может существовать в фазовом пространстве динамической системы. Это соответствует пульсирующему солитону, где параметры изменяются периодически. Эти солитоны обычно существуют в регионах пространства параметров, которые являются смежными с таковыми для стационарных солитонов. Однако, даже в этом случае характеристики солитона постоянны. Возможен вариант, при котором диссипативный солитон может быть хаотическим. Если солитон является хаотическим, то характеристики этого хаотического поведения также даются параметрами системы.

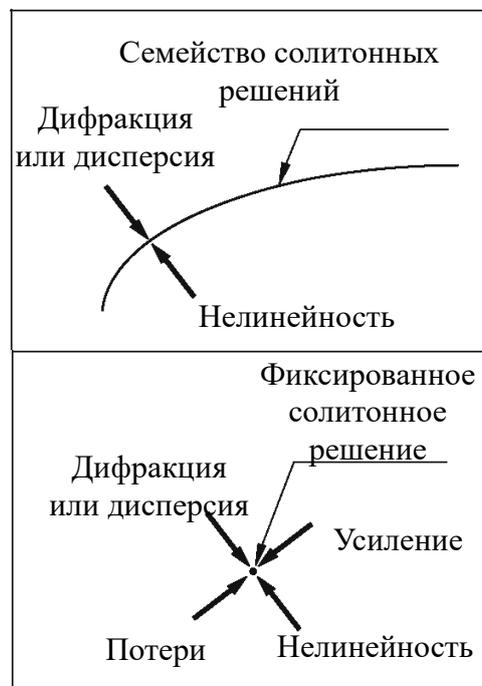


Рис. 2. Качественное различие между солитонными решениями в гамильтоновых и диссипативных системах

Другая простая качественная картина представлена на рисунке 3. Чтобы быть стационарными, солитоны в диссипативных системах должны иметь области, где они получают энергию из внешнего источника, так же как и области, где энергия рассеивается в окружающую среду. Стационарный солитон – результат динамического процесса непрерывного обмена энергией с окружающей средой и его перераспределением между различными частями солитона. Как только это перераспределение энергии заканчивается, солитон исчезает. В этом смысле, диссипативный солитон

больше походит на живое существо, чем на объект неодушевленного мира. Это как вид в биологии, который является фиксированным (или изолированным) по своим свойствам.

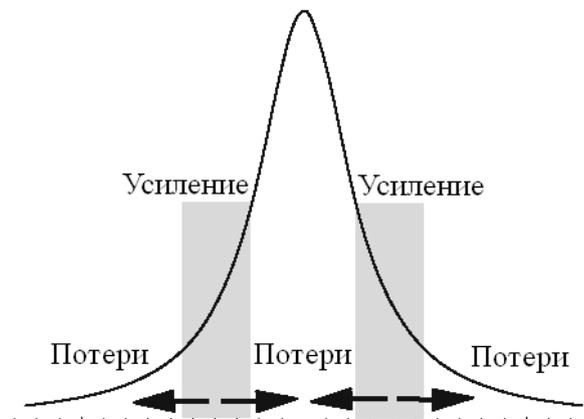


Рис. 3. Качественное описание солитонов в диссипативных системах

Таким образом, мы только что описали, хотя бы кратко, основные краеугольные камни мощного понятия диссипативного солитона, и показали их схематично на рисунке 1, 2 и 3. Рассматриваемые в рамках курса вопросы главным образом связаны с динамическими системами, развитие которых может быть описано дифференциальными уравнениями с частными производными. Такие динамические системы имеют бесконечное число степеней свободы и, конечно, они могут иметь бесчисленное число решений для солитона с бесчисленным числом бифуркаций между ними. Как правило, эти системы неинтегрируемые, что означает, что точные решения в их полной сложности могут быть изучены только численным образом. Чтобы описывать особенности бифуркаций солитона аналитически, мы нуждаемся в приближениях и небольшом количестве методов, чтобы уменьшить размерность динамической системы. Эти методы могут помочь, до некоторой степени, в описании постоянных или пульсирующих солитонов и их бифуркаций по ограниченному диапазону параметров системы. Однако, они не могут использоваться как полная замена для строгих исследований решений. Только самые характерные особенности солитонов, наряду с отдельными бифуркациями, могут быть определены таким образом. Для полной картины, мы все еще нуждаемся в численном моделировании.

## **ТЕМА 2. Численные методы анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное уравнение Шрёдингера**

**Основные вопросы темы:** нелинейное уравнение Шрёдингера как основной способ описания процессов распространения лазерного излучения в оптических средах. Обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера. Метод обратной задачи рассеяния. Фурье-метод расщепления по физическим факторам (SSFM) и его сравнение с иными методами решения нелинейного уравнения Шрёдингера. Адаптация метода SSFM для разновидностей уравнений распространения оптических импульсов. Проблемы обеспечения скорости и точности расчёта. Возможные пути улучшения качества вычислительной схемы. Поиск стационарных решений нелинейного уравнения Шрёдингера и его разновидностей. Солитонные решения. Анализ устойчивости стационарных решений. Способы представления результатов расчёта. Численный анализ многоволнового взаимодействия.

**Цель и задачи изучения темы** состоят в изучении общей методики исследования режимов распространения оптических импульсов при учёте различных линейных и нелинейных процессов в среде. Методика включает в себя получение вычислительной модели исследуемого процесса, выбор и адаптацию численного метода или алгоритма, визуализацию результатов расчётов, анализ полученных результатов. Задачей студента является практическое освоение данной методики и понимание различных аспектов её реализации в конкретном исследовании – от выбора адекватной базовой модели до разработки эффективной программной реализации численного метода.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** нелинейное уравнение Шрёдингера, разностная производная, разностный метод, преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье, кросс-взаимодействие, точность численного метода, коммутатор, фазовая траектория, фазовый портрет, стационарное решение, показатели устойчивости по Ляпунову, параллельные вычисления.

**Требования к уровню подготовленности студента** – студент должен быть знаком с теорией рядов Фурье, понимать различия в способах представления сигналов во временном и частотном доменах, знать основные принципы анализа погрешности вычислений, уметь выполнять алгоритмизацию расчётов на основе имеющихся расчётных соотношений и итерационных формул, иметь представление о способах исследования динамических систем.

### **Контрольные вопросы по теме:**

1. Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ).

2. Обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера.
3. Уравнение Гинзбурга-Ландау.
5. Оптические солитоны: фундаментальные солитоны и солитоны высших порядков.
6. Метод обратной задачи рассеяния при решении НУШ.
7. Фурье-метод расщепления по физическим факторам. Общие принципы.
8. Нормировка нелинейного уравнения Шрёдингера.
9. Коммутатор Бейкера-Хаусдорфа.
10. Решение НУШ разностными методами.
11. Средства пакета MATLAB, используемые при решении НУШ.
12. Модификация метода SSFM в случае связанных НУШ.
13. Типы стационарных решений и их классификация на основе показателей Ляпунова.
14. Способы ускорения расчётов в случае вычислительно сложных задач моделирования процессов распространения оптических импульсов.

**Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по теме 2.  
Обзор методов решения нелинейного уравнения Шрёдингера,  
альтернативных по отношению к методу SFM.**

Метод переменных направлений – итерационный метод решения систем линейных или нелинейных уравнений, возникающих в разностных или проекционно-разностных методах при приближенном решении, например, краевых задач для уравнений с частными производными эллиптического типа.

Пусть, например, имеются две пространственные переменные и последовательности квадратных сеток  $w_h$  с шагом  $h>0$  и узлами  $x_i \equiv (i_1 h, i_2 h)$ , где  $i \equiv (i_1, i_2)$  – вектор с целочисленными компонентами. Пусть  $W_h$  – множество узлов  $w_h$ , в которых ищется решение разностной или проекционно-разностной задачи, записанной в виде операторного уравнения

$L_h(u_h) = f_h$  в евклидовом пространстве  $H_h$ , отождествляемом с пространством функций, заданных в узлах  $W_h$ ; размерность  $H_h$  совпадает с числом точек  $N_h$ , из  $W_h$ .

Пусть

$$A_h u_h(x_i) = \sum x_{i+j} \in \Omega_h^{a_{i,j} u_h(x_{i+j})}, x_i \in \Omega_h \quad (1)$$

– линейные операторы, отображающие  $H_h$  в  $H_h$ . Среди операторов (1) имеются операторы, у которых ненулевые коэффициенты  $a_{i,j}$  в (1) соответствуют лишь векторам сдвига  $j \equiv (j_1, j_2)$ , с  $j_2=0$ . Такие операторы называются одномерными операторами и обозначаются  $A_{h,x_r}$ . Аналогично

для векторов сдвига с  $j_l=0$  определяются и одномерные операторы  $A_{h,x_r}$ , действующие по  $x_r$ . Системы уравнений  $A_{h,x_r}u_h = g_h$ ,  $r = 1, 2$ , расщепляются на отдельные подсистемы, каждая из которых связывает лишь значения  $u_h(x_i)$  в узлах, лежащих на отдельных горизонтальных (для  $A_{h,x_1}$ ) или вертикальных (для  $A_{h,x_2}$ ) линиях сетки. Для метода переменных направлений характерно использование расщепляющихся операторов  $R_h$ , имеющих вид:  $R_h = A_{h,x_1}A_{h,x_2}$ .

Решение системы

$$A_{h,x_1}A_{h,x_2}u_h = g_h, \quad (2)$$

тогда сводится к последовательному решению двух систем

$$A_{h,x_1}u_h = g_h \quad (3)$$

$$A_{h,x_2}u_h = v_h, \quad (4)$$

в которых вначале решаются отдельные подсистемы на горизонтальных линиях сетки (в случае (3)), а затем осуществляется перемена направлений и решаются подсистемы на вертикальных линиях сетки (в случае (4)). При этом обычно операторы  $R_h$  выбираются такими, что на решение систем (3), (4), а следовательно, и (2), уходит только  $O(N_h)$  арифметических действий. Поэтому и каждая итерация в методе переменных направлений вида

$$R_h^{(n)}u_h^{(n+1)} = R_h^{(n)}u_h^{(n)} - (L_h(u_h^{(n)}) - f_h), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

где верхний индекс соответствует номеру итерации, обычно осуществляется с затратой  $O(N_h)$  арифметических действий.

Наиболее эффективные результаты для метода переменных направлений получаются для т. н. коммутативного случая, когда оператор  $L_h$  является самосопряженным положительно определенным оператором, а операторы  $R_h^{(n)}$  – самосопряженные и перестановочные с  $L_h$ . Коммутативный случай может встретиться только для краевых задач, в которых можно произвести разделение переменных, и, следовательно, область должна быть прямоугольником. Наиболее частым случаем метода (5) для уравнения

$$L_h u_h = (\lambda_{h,x_1} + \lambda_{h,x_2})u_h = f_h$$

является метод

$$[\prod_{r=1}^2 (E_h + \tau_{r,h}^{(n)} \lambda_{h,x_r})](u_h^{(n+1)} - u_h^{(n)}) = -\gamma_h^{(n)} (L_h u_h^{(n)} - f_h),$$

где  $E_h$  – тождественный оператор.

Наряду с подходом, в котором за счет выбора итерационных параметров стремятся минимизировать норму оператора перехода от нулевой итерации к итерации с фиксированным номером, используются и подходы, основанные на различных вариационных принципах.

Метод переменных направлений часто используется в качестве внутреннего итерационного процесса в двухступенчатых итерационных

методах, использующих операторы, эквивалентные по спектру и пригодные в случае переменных коэффициентов и нелинейных задач.

Метод дробных шагов – метод построения экономичных (в смысле числа операций) устойчивых разностных схем для решения дифференциальных уравнений математической физики.

При увеличении размерности задачи число операций для получения численного решения растет как вследствие роста числа точек, так и вследствие логических трудностей составления программы расчета. Для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (6)$$

где  $L = L(\frac{\partial}{\partial x})$  – дифференциальный оператор,  $u = u(x, t)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , абсолютно устойчивые неявные схемы простой аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \lambda_1 u^{n+1} + \lambda_0 u^n, \\ \lambda_0 \sim L_0, \lambda_1 \sim \lambda_2, L_0 + L_1 &= L, \end{aligned} \quad (7)$$

становятся неэффективными в случае многомерных задач. В одних случаях требуется использовать слишком мелкий шаг по времени, в других нахождение каждого  $u^{n+1}$  требует  $const \cdot N^{a(m)}$  операций, где  $N$  – число точек на одно измерение,  $a$  – число пространственных измерений, а  $a(m)$  сильно растет с увеличением  $m$ .

Для получения экономичных устойчивых разностных схем предложены методы, основанные на следующих идеях:

- 1) расщепления разностных схем;
- 2) приближенной факторизации;
- 3) расщепления (слабой аппроксимации) дифференциальных уравнений.

В случае уравнения (6) соответствующие разностные схемы имеют вид (для простоты взяты два дробных шага и рассматривается периодичная задача Коши):

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \lambda_{11} u^{n+1/2} + \lambda_{01} u^n \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \lambda_{12} u^{n+1} + \lambda_{02} u^{n+1/2} \end{cases} \quad (8)$$

схема приближенной факторизации:

$$\begin{aligned} (E - \tau \lambda_{11})(E - \tau \lambda_{12})u^{n+1} &= (E - \tau \Omega)u^n \\ \lambda_{11} + \lambda_{12} &= \lambda_1, \Omega \sim \lambda_0, \end{aligned} \quad (9)$$

схема слабой аппроксимации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= (a_1 L_1 + a_2 L_2)u = Lu, \quad L = L_0 + L_1, \\ a_1(t, \tau) &= 2, \quad a_2(t, \tau) = 0, \quad \text{при } t \in \left[ n\tau, \left(n - \frac{1}{2}\right)\tau \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_1(t, \tau) = 0, a_2(t, \tau) = 2, \text{ при } t \in \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, (n + 1)\tau \right].$$

В случае схем (8) и (9) обращение оператора  $E - \tau\lambda_1$  заменяется обращением оператора  $(E - \tau\lambda_{11})(E - \tau\lambda_{12})$ , то есть последовательным обращением операторов  $E - \tau\lambda_{11}, E - \tau\lambda_{12}$  более простой структуры.

Трактовка (10) позволяет рассматривать схему расщепления

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} = \lambda_1 u^{n+1/2}, \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} = \lambda_2 u^{n+1/2}$$

как простую аппроксимацию уравнения (10), слабо аппроксимирующего уравнение (6).

Метод конечных разностей – широко известный и простейший метод интерполяции. Его суть заключается в замене дифференциальных коэффициентов уравнения на разностные коэффициенты, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога, то есть построить его конечно-разностную схему.

Так, заменив производную в обыкновенном дифференциальном уравнении

$$u'(x) = 3u(x) + 2$$

на конечную разность

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \approx u'(x),$$

получаем аппроксимированную форму (конечно-разностную схему)

$$u(x+h) = u(x) + h(3u(x) + 2).$$

Последнее выражение носит название конечно-разностного уравнения, а его решение соответствует приближенному решению первоначального дифференциального уравнения.

## Параллельный алгоритм анализа стационарных решений

Процессы распространения оптических импульсов описывает уравнение Гинзбурга-Ландау:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} u - \frac{1}{2} \text{sign}(\beta_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = \nu |u|^4 u - (i\delta + \delta_1)u - i\varepsilon_1 |u|^2 u - i\mu |u|^4 u + i\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad (11)$$

где:

$$n = NU, N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}, \nu = \frac{L_{NL}^2}{L_{NL}^{(5)} L_D}, y = \frac{L_{NL}}{L_{5w}}, y_1 = \frac{L_{NL}}{L_{5w}^i}, \delta = \frac{L_D}{L_{Ls}}, \delta_1 = \frac{L_D}{L_{Ls}^R}, \varepsilon_1 = \frac{L_{NL}}{L_{Ls}^3}, \mu = \frac{L_{NL}^2}{L_{Ls}^5 L_D}, \beta = \frac{L_D}{L_{DG}}$$

и введены характерные длины

$$L_{NL} = \frac{1}{y_2|\varepsilon_{in}|^2}, \quad L_{NL}^{(5)} = \frac{1}{y_4|\varepsilon_{in}|^4}, \quad L_{sw} = \frac{T_0}{|\varepsilon_{in}|^2 u_R}, \quad L_{sw}^I = \frac{T_0}{|\varepsilon_{in}|^2 u_I}, \quad L_{Ls} = \frac{1}{\alpha_I},$$

$$L_{Ls}^R = \frac{1}{\alpha_R}, \quad L_{DG} = \frac{T_0^2}{|v_2|}, \quad L_{Ls^3} = \frac{1}{\alpha_2|\varepsilon_{in}|^2}, \quad L_{Ls^5} = \frac{1}{\alpha_4|\varepsilon_{in}|^4},$$

где:

$N$  – количество атомов в области взаимодействия,

$T_0$  – длительность пробного импульса,

$\beta_2, \beta_1$  – коэффициенты дисперсии групповых скоростей второго порядка,

$y_2$  – коэффициенты кубической нелинейности на  $\chi^{(3)}$ ,

$\varepsilon_{in}$  – амплитуда пробного поля на входе в среду,

$y_4$  – коэффициенты нелинейности пятого порядка  $\chi^{(5)}$ ,

$\alpha_I$  – коэффициент линейных потерь,

$\alpha_R$  – коэффициент фазового сдвига,

$\alpha_2$  – коэффициент нелинейных потерь на  $\chi^{(3)}$ ,

$\alpha_4$  – коэффициент нелинейных потерь на  $\chi^{(5)}$ ,

$v_2$  – коэффициент спектральной фильтрации,

замена переменных  $U = \frac{\varepsilon}{\sqrt{|\varepsilon_{in}|^2}}, \quad \xi = \frac{z}{L_D}, \quad \tau = \frac{T}{T_0}, \quad T = t - \frac{z}{v_g},$

$v_g$  – групповая скорость пробного импульса.

Для изучения уравнения Гинзбурга-Ландау можно воспользоваться методом моментов, суть которого заключается в приведении полной задачи распространения с бесконечным числом степеней свободы к задаче распространения импульса с конечным набором его параметров. Для пробного импульса, имеющего единственный максимум и не имеющего топологической структуры в поперечном сечении, вид решения уравнения (11) можно задать следующим образом:

$$u(\xi, \tau) = A(\xi) \text{sh}(B(\xi)\tau) \exp(i(\Phi(\xi) + C(\xi)\tau^2)), \quad (12)$$

где  $A(\xi)$  – нормированная амплитуда,  $B(\xi)$  – обратная длительность,  $\Phi(\xi)$  – фаза,  $C(\xi)$  – нелинейный набег фазы волнового пакета.

Использование метода моментов для (11) с решением (12) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для варьируемых переменных:

$$\frac{dQ}{d\xi} = F_1 = -2\delta Q - \frac{2}{3}\varepsilon_1 B Q^2 - \frac{4}{15}\mu B^2 Q^2 - \left(\frac{2}{3}QB^2\beta + \frac{2\pi^2 C^2 Q\beta}{3B^2}\right), \quad (13a)$$

$$\frac{dC}{d\xi} = F_2 = -\frac{8vB^4 Q^2}{15\pi^2} - \frac{B^3 Q}{\pi^2} - \left(\frac{4}{\pi^2}\beta B^2 C + \frac{4}{3}\beta B^2 C\right) +$$

$$+ \left( -\frac{2}{\pi^2} B^4 + 2C^2 \right) \text{sign}(\beta_2), \quad (13б)$$

$$\frac{dB}{d\xi} = F_3 = -\frac{\mu B^3 Q^2}{\pi^2} - \frac{2}{\pi^2} \varepsilon_1 B^2 Q + 2BC \text{sign}(\beta_2) - \left( \frac{8\beta B^3}{\pi^2} - \frac{16}{15B} \beta \pi^2 C^2 \right), \quad (13в)$$

где  $Q = 2A^2 / B$ .

Стационарные решения системы уравнений (12), соответствующие условию  $F_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$  могут быть определены на основе численных методов. В нелинейной системе (13) возникает сразу несколько стационарных точек – на рисунке 4 представлен фазовый портрет вблизи двух таких точек Y и Z.

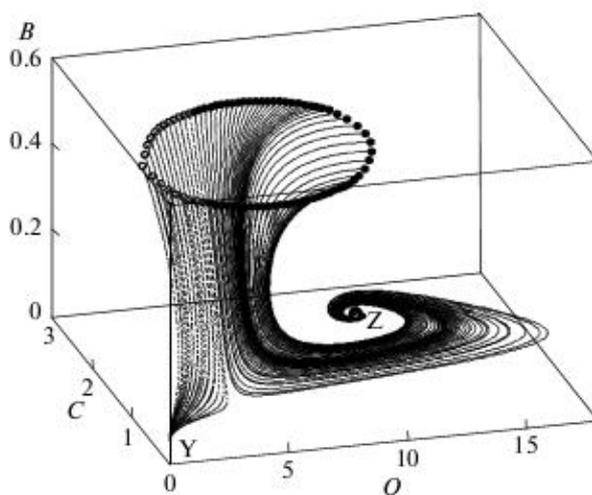


Рис. 4. Вид фазового портрета системы с двумя особыми точками

#### Последовательное решение

Алгоритм последовательного решения системы дифференциальных нелинейных уравнений распространения оптического импульса с диссипацией представлен на рисунке 5.

Последовательный алгоритм сводится к решению системы дифференциальных нелинейных уравнений при заданном значении начального приближения ( $W_0$  представлено тремя параметрами, входящими в систему уравнений (13):  $Q$ ,  $C$ ,  $B$ ) и входных параметрах системы:

- delc – частота отстройки поля накачки от резонанса,
- Den – плотность допирования,
- eps0 – диэлектрическая проницаемость среды,
- n0 – показатель преломления матрицы,
- d – диаметр световедущей жилы,
- L – длина,

$\mu_{ab}$  – величина, характеризующая структуру используемых энергетических уровней атома,

$I_p$  – интенсивность пробного импульса,

$I_c$  – интенсивность поля накачки,

$T_0$  – длительность пробного импульса,

$\Delta\omega_b$  – отстройка от резонанса для пробного импульса,

$G_{ab}$  – скорость релаксации,

$G_{ac}$  – скорость релаксации,

$\text{MaxFunEvals}$  – положительное целое,

$\text{MaxIter}$  – положительное целое,

$\text{TolFun}$  – положительный скаляр.

Решение системы нелинейных уравнений (13) осуществляется с помощью функции `fsolve()`, которая возвращает Якобиан ( $J$ ), значение стационарной точки ( $w$ ), значение устойчивости (`exitflag`). Значения устойчивости приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения устойчивости

Значение <code>exitflag</code>	Описание
$> 0$	Данная функция сходится к решению по $x$ .
0	Максимальное число оценки функции или итерации было превышено
$< 0$	Функция не сходится к некому решению.

После нахождения стационарного решения и устойчивости необходимо определить тип точки ( $\text{Funk}$ ) по теореме Ляпунова. Определение типа точки по Ляпунову представлено в таблице 2.

Таблица 2

Основные типы точек

Значение $\text{Funk}$	Тип стационарного решения
0	Центр (устойчиво)
1	Седло (неустойчиво)
2	Устойчивый фокус
3	Неустойчивый фокус
4	Устойчивый узел
5	Неустойчивый узел
6	$\text{NaN}$ в Якобиане
7	$\text{Inf}$ (бесконечные величины) в Якобиане

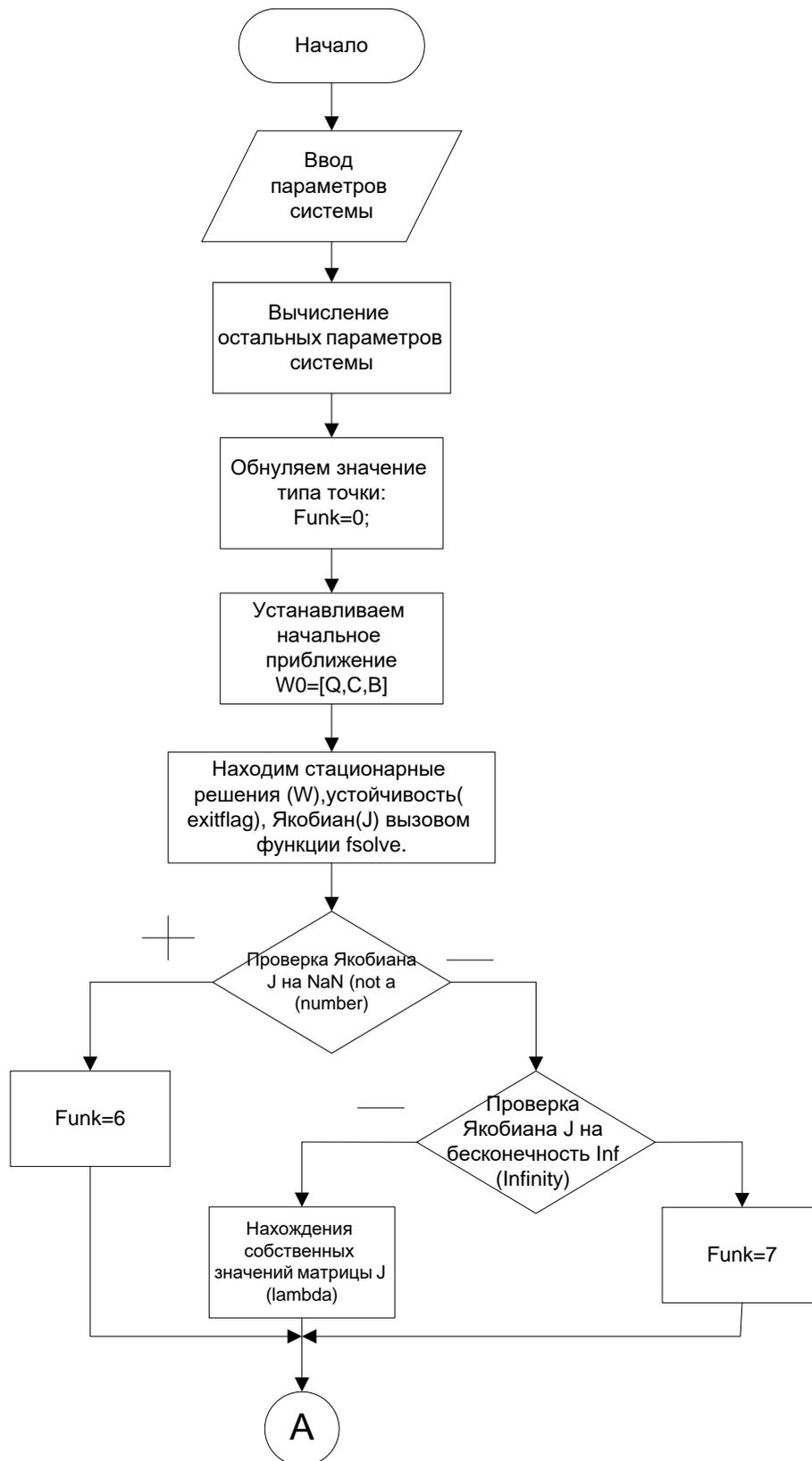


Рис. 5а. Последовательный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений

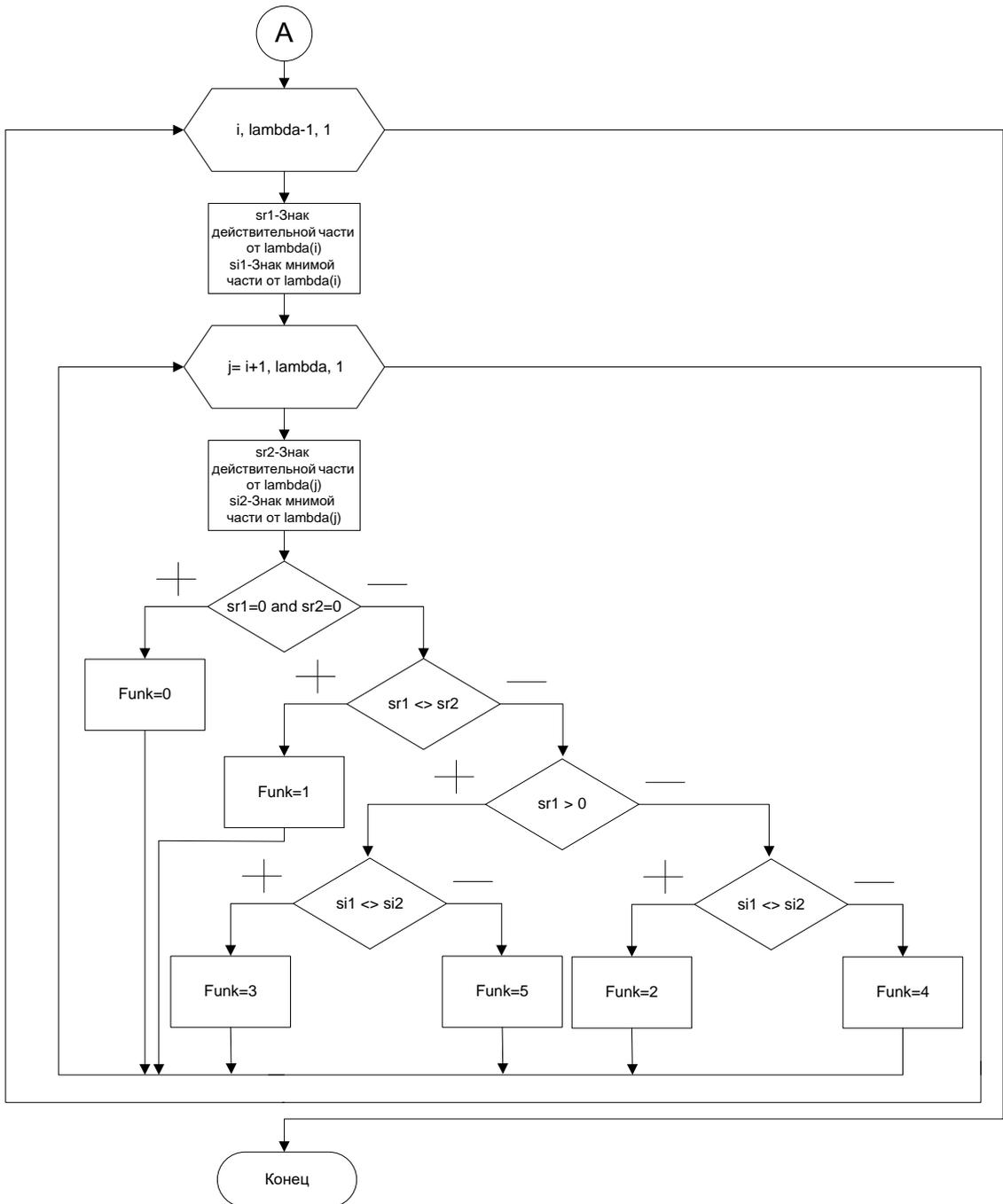


Рис. 56. Последовательный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений

Основными недостатком такого последовательного решения является то, что приходится вручную подбирать и задавать значения начального приближения. Это приводит к проблеме потери времени на поиск стационарных решений. Чтобы облегчить процесс исследования системы можно предложить алгоритм, основанный на параллельных вычислениях.

#### Параллельный алгоритм

Для разработки параллельной программы требуется выбрать или создать собственный метод для вычислений. При разработке собственного метода, для достижения требуемой производительности программы, приходится каждый раз проходить путь от спецификации алгоритма к программе на языке программирования. Такой путь становится гораздо более сложным для параллельных вычислительных систем, чем для последовательных. При переходе от одного процессора к нескольким резко возрастает сложность программирования. И многие основные подходы применить уже не получится.

Очень полезными при параллельном программировании являются диаграммы деятельности, поскольку с помощью них можно графически изобразить все ветви, выполняющиеся параллельно и определить, когда их необходимо синхронизировать. Диаграмма деятельности может указывать на то, что некоторые деятельности могут выполняться параллельно. По существу, это означает, что порядок их выполнения не играет роли.

На рисунке 7 представлена диаграмма деятельности для описания параллельного алгоритма для решения системы дифференциальных нелинейных уравнений распространения оптического импульса с диссипацией. Процессы разделения и слияния рисунке 6 хорошо отображают всю структуру параллелизма в программе.

Суть параллельного алгоритма заключается в поиске стационарных решений при полном переборе всех возможных значений диапазонов, из которых состоит начальное приближение. При таком переборе возможно получить все стационарные решения системы, определить типы точек и устойчивости решения.

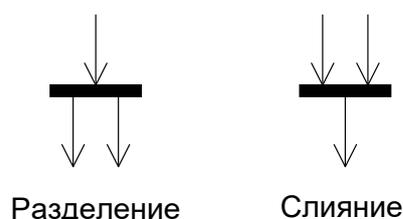


Рис. 6. Графическое изображение разделения и слияния параллельных потоков управления

Как видно из диаграммы рисунке 7, все данные равномерно распределяются между процессами, и каждый процесс работает только со своим диапазоном данных и осуществляет перебор начальных приближений. Параллельное выполнение программы заканчивается, когда найдены все стационарные решения системы. Но при таком алгоритме возникает проблема кластеризации полученных стационарных решений.

Каждое из нескольких стационарных решений системы эволюционирует по-своему при изменении параметров задачи. Построение

диаграммы устойчивости имеет смысл только в рамках эволюции конкретной стационарной точки. Однако предлагаемый подход к разработке параллельного алгоритма приводит к получению сразу всех решений системы уравнений (13) без какой-либо сортировки и упорядочивания. При этом, поскольку решения получаются численно и в виде вещественных чисел, встаёт необходимость в группировке близких стационарных решений с помощью какого-либо численного метода кластеризации данных.

Сортировка и кластеризация стационарных решений производится в последовательном режиме, так как время, затрачиваемое на поиск стационарных решений не соизмеримо (во много раз превосходит) со временем, тратящемся на сортировку и кластеризацию стационарных решений.

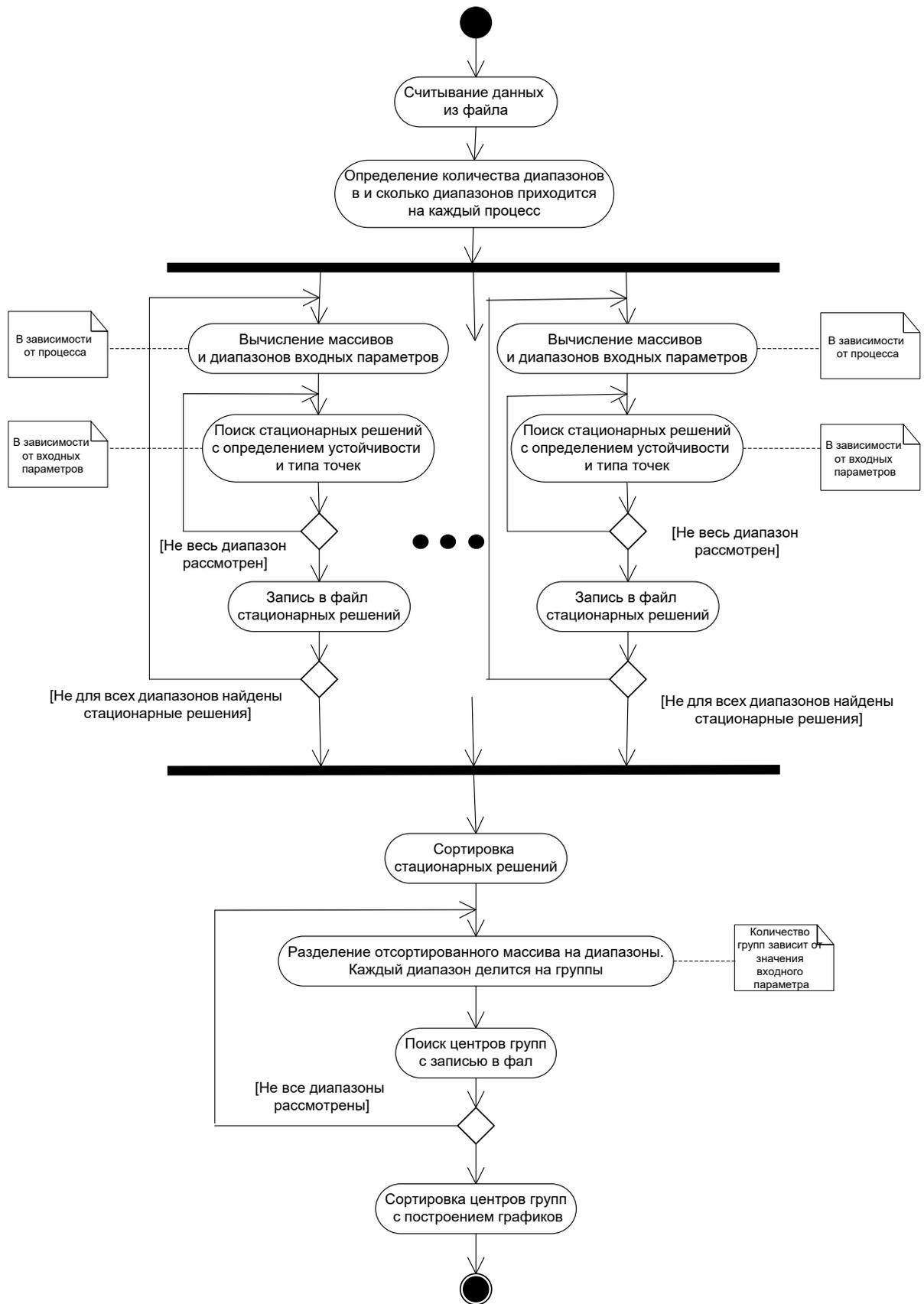


Рис. 7. Диаграмма деятельности, описывающая параллельный алгоритм анализа стационарных решений

### **ТЕМА 3. Моделирование процессов распространения лазерного излучения в дисперсионно-нелинейных средах**

#### **Основные вопросы темы:**

Конкуренция процессов в нелинейных оптических системах. Фазовая самомодуляция, дисперсия групповых скоростей. Условия возникновения оптических солитонов. Взаимодействие оптических солитонов. Параметрическое взаимодействие фемтосекундных импульсов: генерация второй гармоники (ГВГ). Параметрическое усиление коротких импульсов. Вихревые оптические пучки. Моделирование оптических сред с гигантскими нелинейностями. Моделирование микроструктурированных оптических сред и оптических решёток. Шрёдингеровские солитоны, фемтосекундные солитоны. Тёмные и светлые солитоны. Диссипативные оптические солитоны.

**Цель и задачи изучения темы.** Студент должен ознакомиться с широким спектром явлений, возникающих в системах генерации и транспортировки лазерного излучения, и их влиянием на режимы распространения оптических импульсов. При этом должно возникнуть понимание того, что за всем разнообразием возможных динамических режимов стоят единые закономерности конкуренции нелинейных процессов. На основе численных экспериментов, выполняемых в рамках лабораторного практикума и самостоятельной работы, студент должен понять, что данными процессами возможно управляемым образом воздействовать, что позволяет в инженерной практике конструировать широкий спектр устройств и систем генерации и транспортировки лазерного излучения.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** нелинейная динамика, нормальная и аномальная дисперсия, диссипативные оптические солитоны, вихревые оптические пучки, оптические пули, тёмные и светлые солитоны, оптические решётки, микроструктурированные и допированные среды.

**Требования к уровню подготовленности студента** – студент должен успешно освоить предыдущие темы курса, иметь базовые представления о принципах алгоритмизации и программирования, знать классические эксперименты по наблюдению нелинейных оптических эффектов, иметь представление об областях практического применения оптических солитонов.

#### **Контрольные вопросы по теме:**

1. Несимметрические трансформации импульса. Третье приближение теории дисперсии.
2. Взаимодействие оптических солитонов.

3. Параметрическое взаимодействие фемтосекундных импульсов: генерация второй гармоники (ГВГ).
4. Параметрическое усиление коротких импульсов.
5. Условия возникновения вихревых солитонных решений.
6. Математический аппарат описания солитонов различного типа.
7. Микроструктурированные оптические среды: модификация математической модели и влияние на эволюцию оптического излучения.
8. Шрёдингеровские солитоны.
9. Тёмные и светлые солитоны.
10. Особенности моделирования фемтосекундных лазерных импульсов.

## **ТЕМА 4. Системы генерации и нелинейного преобразования лазерных сигналов**

**Основные вопросы темы.** Сжатие оптических импульсов: волоконно-решетчатые компрессоры. Сжатие оптических импульсов: компрессоры на многосолитонном сжатии. Генерация суммарных и разностных частот. Параметрические солитоны. Проектирование высокочастотных линий связи на основе оптических вихрей. Оптические линии связи. RZ-формат кодирования сигналов. Системы с мультиплексированием по длинам волн. Некерровские оптические среды и нелинейности высших порядков.

**Цель и задачи изучения темы** состоят в выработке навыков применения полученных в ходе изучения знаний при анализе и проектировании систем генерации и транспортировки лазерного излучения. Студент должен научиться оценивать и выбирать оптическую среду в соответствии со стоящими задачами разработки и применения систем генерации и транспортировки лазерного излучения.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** волновой фронт, сжатие оптических импульсов, оптические каналы связи, кодирование оптических сигналов, мультиплексирование, шифрование оптических сигналов.

**Требования к уровню подготовленности студента** – студент должен успешно освоить предыдущие темы курса, знать принципы работы оптических каналов связи и систем оптической обработки информации, иметь представление о способах кодирования сигналов и методах защиты информации, знать основные законы и принципы квантовой электроники, описывающие генерацию монохроматического когерентного излучения.

### **Контрольные вопросы по теме:**

1. Сжатие оптических импульсов: волоконно-решетчатые компрессоры.
2. Сжатие оптических импульсов: компрессоры на многосолитонном сжатии.
3. Волоконные лазеры.
4. Проектирование высокочастотных линий связи на основе оптических вихрей.
5. Микроструктурированные оптические среды и оптические решетки.
6. Оптические линии связи. RZ-формат кодирования сигналов.
7. Системы с мультиплексированием по длинам волн.
8. Некерровские оптические среды и нелинейности высших порядков.
9. Солитонные лазеры.

**Теоретическая часть, не вошедшая в материал лекций по  
темам 3-4**

**Математическая модель распространения связанных  
оптических импульсов в нелинейной среде**

Нелинейное уравнение Шрёдингера является базовым для получения модели. Однако при моделировании многоволновых взаимодействий оно требует модификации. Рассмотрим получение математической модели, описывающей взаимодействие двух однонаправленных оптических импульсов.

Во-первых, исключим слагающие, описывающие процессы образования ударной волны огибающей и вынужденного комбинационного саморассеяния.

Во-вторых, будем считать потери пренебрежимо малыми ( $\alpha = 0$ ), что допустимо для небольших длин сред.

В-третьих, уравнения запишем для пары импульсов с амплитудами  $A_1$  и  $A_2$ , для описания линейного энергообмена между ними введем дополнительные слагаемые вида  $iKA_j$  ( $j=1,2$ ), где  $K$  [ $\text{м}^{-1}$ ] – коэффициент линейной связи между импульсами.

В-четвертых, выполним для удобства переход к бегущей системе координат, введя новую временную координату

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z.$$

Это обусловлено тем, что длительность импульса оказывается меньшей времени, в течение которого импульс находится в среде. По этой причине возможно возникновение трудностей с интерпретацией результатов решения, изображаемых в виде графиков зависимости огибающей импульса от координаты и времени.

Выполняя данный переход, мы считаем, что групповые скорости обоих импульсов одинаковы и равны  $v_g$ . Именно с этой скоростью и будет двигаться система координат.

В результате перечисленных модификаций получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial T^2} = i\gamma |A_1|^2 A_1 + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A_1}{\partial T^3} + iKA_2, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial T^2} = i\gamma |A_2|^2 A_2 + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A_2}{\partial T^3} + iKA_1. \end{cases} \quad (14)$$

В большинстве случаев обязательной процедурой для математического анализа модели физической системы должна являться нормировка размерных величин. Следует зафиксировать все этапы нормировки, чтобы после численного или аналитического исследования математической модели легко вычислить размерные величины, описывающие систему.

Процедура нормировки состоит в том, чтобы выразить значение одной размерной величины через другую величину, имеющую такую же размерность (примером может служить измерение ускорения в единицах постоянной свободного падения). Математически эта процедура состоит в умножении или делении друг на друга параметров, имеющих одинаковую размерность – нормировочного и нормируемого.

Нормировка проводится в несколько этапов.

1) На пиковую мощность первого импульса в начальной точке среды  $P_{1,0} \equiv P(x=0, \tau=0)$  введением безразмерных амплитуд.

$$U_1 = \frac{A_1}{\sqrt{P_{1,0}}}, \quad U_2 = \frac{A_2}{\sqrt{P_{1,0}}}, \quad \text{т.е.} \quad A_1 = U_1 \sqrt{P_{1,0}}, \quad A_2 = U_2 \sqrt{P_{1,0}}.$$

Продифференцировав полученные амплитуды, получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial T} &= \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_1}{\partial T}, & \frac{\partial A_2}{\partial T} &= \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_2}{\partial T}, & \frac{\partial A_1}{\partial z} &= \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_2}{\partial z}, & |A_{1,2}|^2 &= |U_{1,2}|^2 P_{1,0}. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в систему (14), получим:

$$\begin{cases} \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2^{(1)} \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial T^2} + i\gamma^{(1)} P_{1,0} \sqrt{P_{1,0}} |U_1|^2 U_1 + \frac{1}{6} \beta_3^{(1)} \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial^3 U_1}{\partial T^3} + iK \sqrt{P_{1,0}} U_2, \\ \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{i}{2} \beta_2^{(2)} \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial^2 U_2}{\partial T^2} + i\gamma^{(2)} P_{1,0} \sqrt{P_{1,0}} |U_2|^2 U_2 + \frac{1}{6} \beta_3^{(2)} \sqrt{P_{1,0}} \frac{\partial^3 U_2}{\partial T^3} + iK \sqrt{P_{1,0}} U_1. \end{cases} \quad (15)$$

Разделим все члены системы уравнений (15) на первый коэффициент произведения, стоящего в левой части уравнений. Проведем эту операцию, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(1)}\frac{\partial^2 U_1}{\partial T^2} + i\gamma^{(1)}P_{1,0}|U_1|^2U_1 + \frac{1}{6}\beta_3^{(1)}\frac{\partial^3 U_1}{\partial T^3} + iKU_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(2)}\frac{\partial^2 U_2}{\partial T^2} + i\gamma^{(2)}P_{1,0}|U_2|^2U_2 + \frac{1}{6}\beta_3^{(2)}\frac{\partial^3 U_2}{\partial T^3} + iKU_1. \end{cases} \quad (16)$$

После того, как получили систему уравнений (16), переходим ко второму этапу нормировки.

2) На длительность первого импульса в начальной точке среды  $T_{1,0}$  введением безразмерного времени.

$$\tau \equiv \frac{T}{T_{1,0}}. \quad (17)$$

Умножим дисперсионные слагаемые в системе (16) на величину  $T_{1,0}/T_{1,0} \equiv 1$  (в соответствующей степени). Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(1)}\frac{1}{T_{1,0}^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial (T/T_{1,0})^2} + i\gamma^{(1)}P_{1,0}|U_1|^2U_1 + \frac{1}{6}\beta_3^{(1)}\frac{1}{T_{1,0}^3}\frac{\partial^3 U_1}{\partial (T/T_{1,0})^3} + iKU_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(2)}\frac{1}{T_{1,0}^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial (T/T_{1,0})^2} + i\gamma^{(2)}P_{1,0}|U_2|^2U_2 + \frac{1}{6}\beta_3^{(2)}\frac{1}{T_{1,0}^3}\frac{\partial^3 U_2}{\partial (T/T_{1,0})^3} + iKU_1. \end{cases} \quad (18)$$

Учитывая выражение (17), система уравнений (18) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(1)}\frac{1}{T_{1,0}^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} + i\gamma^{(1)}P_{1,0}|U_1|^2U_1 + \frac{1}{6}\beta_3^{(1)}\frac{1}{T_{1,0}^3}\frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^3} + iKU_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{i}{2}\beta_2^{(2)}\frac{1}{T_{1,0}^2}\frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} + i\gamma^{(2)}P_{1,0}|U_2|^2U_2 + \frac{1}{6}\beta_3^{(2)}\frac{1}{T_{1,0}^3}\frac{\partial^3 U_2}{\partial \tau^3} + iKU_1. \end{cases} \quad (19)$$

Получив данную систему, можно ввести следующие коэффициенты:

$$\frac{\beta_2^{(1)}}{T_{1,0}^2} \equiv \frac{1}{L_{D2}^{(1)}}, \text{ где } L_{D2}^{(1)} - \text{длина дисперсии второго порядка (первый импульс).}$$

$$\frac{\beta_2^{(2)}}{T_{1,0}^2} \equiv \frac{1}{L_{D2}^{(2)}}, \text{ где } L_{D2}^{(2)} - \text{длина дисперсии второго порядка (второй импульс).}$$

$\gamma^{(1)} P_{1.0} \equiv \frac{1}{L_{NL}^{(1)}}$ , где  $L_{NL}^{(1)}$  – длина фазовой самомодуляции (первый импульс).

$\gamma^{(2)} P_{1.0} \equiv \frac{1}{L_{NL}^{(2)}}$ , где  $L_{NL}^{(2)}$  – длина фазовой самомодуляции (второй импульс).

$\frac{\beta_3^{(1)}}{T_{1.0}^3} \equiv \frac{1}{L_{D3}^{(1)}}$ , где  $L_{D3}^{(1)}$  – длина дисперсии третьего порядка (первый импульс).

$\frac{\beta_3^{(2)}}{T_{1.0}^3} \equiv \frac{1}{L_{D3}^{(2)}}$ , где  $L_{D3}^{(2)}$  – длина дисперсии третьего порядка (второй импульс).

$K \equiv \frac{1}{L_F}$ , где  $L_F$  – характерная длина линейной связи (межмодовых биений).

Подставив данные значения в систему уравнений (2.6), получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{i}{2} \frac{1}{L_{D2}^{(1)}} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} + \frac{1}{L_{NL}^{(1)}} |U_1|^2 U_1 + \frac{1}{6} \frac{1}{L_{D3}^{(1)}} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^3} + i \frac{1}{L_F} U_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{i}{2} \frac{1}{L_{D2}^{(2)}} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{L_{NL}^{(2)}} |U_2|^2 U_2 + \frac{1}{6} \frac{1}{L_{D3}^{(2)}} \frac{\partial^3 U_2}{\partial \tau^3} + i \frac{1}{L_F} U_1. \end{cases} \quad (20)$$

3) Последний этап нормировки – нормировка величин, имеющих размерность длины.

Будем нормировать на длину взаимодействия импульсов (на длину среды)  $L$ . Сделаем еще ряд переобозначений:

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_{D2}^{(1)}} &\equiv \mu_{D2}^{(1)}, & \frac{L}{L_{D2}^{(2)}} &\equiv \mu_{D2}^{(2)}, & \frac{L}{L_{D3}^{(1)}} &\equiv \mu_{D3}^{(1)}, & \frac{L}{L_{D3}^{(2)}} &\equiv \mu_{D3}^{(2)}, & \frac{L}{L_{NL}^{(1)}} &\equiv \mu_{NL}^{(1)}, \\ \frac{L}{L_{NL}^{(2)}} &\equiv \mu_{NL}^{(2)}, & \frac{L}{L_F} &\equiv \mu_F, & \frac{z}{L} &\equiv x. \end{aligned}$$

С их учетом математическая модель принимает окончательный вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = -\frac{i}{2} \mu_{D2}^{(1)} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau^2} + i \mu_{NL}^{(1)} |U_1|^2 U_1 + \frac{1}{6} \mu_{D3}^{(1)} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \tau^3} + i \mu_F U_2 \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{i}{2} \mu_{D2}^{(2)} \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau^2} + i \mu_{NL}^{(2)} |U_2|^2 U_2 + \frac{1}{6} \mu_{D3}^{(2)} \frac{\partial^3 U_2}{\partial \tau^3} + i \mu_F U_1 \end{cases} \quad (21)$$

Импульсы, излучаемые многими лазерами, можно приближенно считать гауссовскими ( $U(0,T) = \exp\left[-\frac{1+iC}{2}\left[\frac{T}{T_0}\right]^{2m}\right]$ ), тем не менее, часто бывает необходимо рассмотреть другие формы импульсов. Обобщенный интерес представляют импульсы, имеющие форму гиперболического секанса, которые возникают в связи с оптическими солитонами. Амплитуда поля таких импульсов на входе в световод имеет форму  $U(0,T) = \operatorname{sech}\left[\frac{T}{T_0}\right] \exp\left[-\frac{iCT^2}{2T_0^2}\right]$ . С учетом процедур нормировки начальные формы импульсов примут вид:

$$U_1(0, \tau) = \exp\left[-\frac{1+iC}{2}\tau^{2m}\right],$$

$$U_2(0, \tau) = \sqrt{m_p} \exp\left[-\frac{1+iC}{2}\left[\frac{\tau}{m_T}\right]^{2m}\right]$$

или

$$U_1(0, \tau) = \operatorname{sech}(\tau) \exp\left[-\frac{iC\tau^2}{2}\right],$$

$$U_2(0, \tau) = \sqrt{m_p} \operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{m_T}\right) \exp\left[-\frac{iC}{2}\left[\frac{\tau}{m_T}\right]^2\right],$$

где коэффициенты  $m_p$  и  $m_T$  позволяют учесть разницу в форме двух импульсов. Они характеризуют, соответственно, отношение пиковых мощностей и длительностей импульсов:

$$m_p = \frac{P_1(0,0)}{P_2(0,0)}, \quad m_T = \frac{T_1(x=0)}{T_2(x=0)}.$$

Для построения вычислительной модели воспользуемся идеей фурье-метода расщепления по физическим факторам, состоящей в разделении учета различных процессов, происходящих в ходе распространения импульса. Это возможно несколькими способами.

Используя стандартный подход метода расщепления по физическим факторам, система уравнений (21) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{D}_1 + \hat{N}_1)U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{D}_2 + \hat{N}_2)U_2. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь все процессы в среде описываются нелинейными и дифференциальными операторами:

$\hat{D}_1 = -\frac{i}{2}\mu_{D2}^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{6}\mu_{D3}^{(1)}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}$  – дифференциальный оператор первого импульса.

$\hat{D}_2 = -\frac{i}{2}\mu_{D2}^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + \frac{1}{6}\mu_{D3}^{(2)}\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}$  – дифференциальный оператор второго импульса.

$\hat{N}_1 = \mu_{NL}^{(1)}|U_1|^2$  – нелинейный оператор первого импульса.

$\hat{N}_2 = \mu_{NL}^{(2)}|U_2|^2$  – нелинейный оператор второго импульса.

Второй способ предполагает введение оператора кросс-взаимодействия. Система уравнений в этом случае выглядит иначе:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{D}_1 + \hat{N}_1 + \hat{F}_1)U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{D}_2 + \hat{N}_2 + \hat{F}_2)U_2. \end{cases} \quad (23)$$

где  $\hat{F}_{1,2} = \frac{iKU_{2,1}}{U_{1,2}}$  – оператор кросс-взаимодействия.

$\hat{D}_1$  и  $\hat{D}_2$  – дифференциальные операторы.

$\hat{N}_1$  и  $\hat{N}_2$  – операторы нелинейности.

В случаях (22) и (23) исходная система разбивается на пару независимых уравнений для амплитуд  $U_1$  и  $U_2$ . Третьим возможным вариантом является, как и в системе (23), введение оператора линейной связи, но без разделения уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{D}_1 + \hat{N}_1)U_1 + \hat{F}U_2, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{D}_2 + \hat{N}_2)U_2 + \hat{F}U_1. \end{cases} \quad (24)$$

где  $\hat{F} = iK$  – кросс-взаимодействия, а  $\hat{D}_j$  и  $\hat{N}_j$  ( $j=1,2$ ) – операторы дисперсии и нелинейности соответственно.

Решим системы (22) – (24) для того, чтобы выбрать наиболее подходящий вариант итерационной формулы.

Итак, решим систему уравнений (22). Для этого воспользуемся методом расщепления по физическим факторам. Спецификой метода SSFM, является то, что он предусматривает раздельное действие операторов, т.е. сначала действует один из операторов (другие принимаются равными нулю), а затем другие, поочередно.

Если считать, что сначала действует только оператор  $\hat{N}$ , учитывающий нелинейные процессы, то в это время дифференциальный оператор  $\hat{D} = 0$ . С учетом этого, система уравнений (22) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{N}_1)U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{N}_2)U_2. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь  $\hat{N}_1$  и  $\hat{N}_2$  – операторы нелинейности для первого и второго импульсов, соответственно. На основе решения этой системы получим промежуточные итерационные формулы.

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{N}_1 h)U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{N}_2 h)U_2(x). \end{cases} \quad (26)$$

Таким образом, в системе (26) мы получили уравнения, описывающие действие оператора нелинейности.

Далее, следуя методу SSFM, будем считать равным нулю оператор  $\hat{N}$ , учитывая воздействие только дифференциального оператора. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{D}_1)U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{D}_2)U_2. \end{cases} \quad (27)$$

Решим систему уравнений (27) таким же способом, в результате чего получим:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{D}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{D}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (28)$$

Таким образом, мы получили системы уравнений (26) и (28), которые описывают влияние нелинейного и дифференциального операторов. Возвращаясь к методу SSFM, следует объединить действие этих операторов воедино:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{D}_1) \exp(\hat{N}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{D}_2) \exp(\hat{N}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (29)$$

Итак, мы получили общую итерационную формулу для системы уравнений (22).

Аналогичным способом, применяя метод SSFM, решаются системы уравнений (23) и (24).

Решим систему (23) с учетом присутствия здесь оператора кросс-взаимодействия.

В этом случае будем учитывать воздействие только оператора кросс-взаимодействия, в то время как операторы  $\hat{N}$  и  $\hat{D}$  одновременно равны нулю. Получим систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial x} = (\hat{F}_1) U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} = (\hat{F}_2) U_2. \end{cases} \quad (30)$$

где  $\hat{F}_1$  и  $\hat{F}_2$  – операторы кросс-взаимодействия.

Решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{F}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{F}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (31)$$

Получив систему уравнений (31) и воспользовавшись ранее полученными результатами (26), (28), (29), можно получить итерационную формулу для (23). Она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{D}_1) \exp(\hat{N}_1 h) \exp(\hat{F}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{D}_2) \exp(\hat{N}_2 h) \exp(\hat{F}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (32)$$

Решая систему уравнений (24), используем те же методы решения, что и при получении итерационных формул для (22) и (23).

Если принять, что сначала действует дифференциальный оператор, то в это время  $\hat{N} = 0$  и  $\hat{F} = 0$ . С учетом этого система (24) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dx} = \hat{D}_1 U_1, \\ \frac{dU_2}{dx} = \hat{D}_2 U_2. \end{cases} \quad (33)$$

Решение (33) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{D}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{D}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (34)$$

В системе (34) мы получили уравнения, описывающие воздействие дифференциальных операторов на импульсы.

Теперь получим уравнения, описывающие влияние оператора нелинейности. Для этого будем считать операторы  $\hat{F}$  и  $\hat{D}$  равными нулю.

Учитывая эти условия, система уравнений (24) будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dx} = \hat{N}_1 U_1, \\ \frac{dU_2}{dx} = \hat{N}_2 U_2. \end{cases} \quad (35)$$

Решим её и получим на основе решения:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \exp(\hat{N}_1 h) U_1(x), \\ U_2(x+h) = \exp(\hat{N}_2 h) U_2(x). \end{cases} \quad (36)$$

Данная система описывает влияние нелинейного оператора.

Чтобы получить итоговую итерационную формулу для системы (24), следует получить решение, когда действует только оператор

взаимодействия. Для этого будем считать, что в системе уравнений (24) дифференциальный и нелинейный операторы одновременно равны нулю. Тогда

$$\begin{cases} \frac{dU_1}{dx} = \hat{F}U_2, \\ \frac{dU_2}{dx} = \hat{F}U_1. \end{cases} \quad (37)$$

Продифференцировав первое уравнение из системы, получим следующее выражение:

$$\frac{d^2U_1}{dx^2} = \frac{d\hat{F}U_2}{dx} = \hat{F} \frac{dU_2}{dx} = \hat{F}^2U_1 \text{ или } \frac{d^2U_1}{dx^2} = \hat{F}^2U_1,$$

где, заменив левую часть уравнения на  $U_1''$ , получим:

$$U_1'' - \hat{F}^2U_1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \hat{F}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm ik$$

$$U_1 = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$$

$$\begin{cases} U_1(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx} \\ U_2(x) = c_1 e^{ikx} - c_2 e^{-ikx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_1(x) = c_1 e^{Fx} + c_2 e^{-Fx}, \\ U_2(x) = c_1 e^{Fx} - c_2 e^{-Fx}. \end{cases} \quad (38)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – константы.

Для получения окончательной итерационной формулы следует найти  $c_1$  и  $c_2$ . Для этого в систему уравнений (38) следует подставить граничные условия, т.е. найти решение  $A_1(0), A_2(0)$ .

$$\begin{cases} A_1(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ A_2(0) = c_1 e^0 - c_2 e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(0) = c_1 + c_2 = B_1 \\ A_2(0) = c_1 - c_2 = B_2 \end{cases}, \quad (39)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  – некоторые константы.

Выразим  $c_1$  из второго уравнения системы (39), и подставим в первое:

$$c_2 = c_1 - B_2,$$

$$2c_1 - B_2 = B_1 \Rightarrow c_1 = \frac{B_1 + B_2}{2} \Rightarrow c_2 = \frac{B_1 + B_2}{2} - B_2 = \frac{B_1 - B_2}{2}.$$

Получившиеся значения  $c_1$  и  $c_2$  следует подставить в (38):

$$\begin{cases} U_1(x) = \frac{U_1(0,T) + U_2(0,T)}{2} e^{\hat{F}x} + \frac{U_1(0,T) - U_2(0,T)}{2} e^{-\hat{F}x}, \\ U_2(x) = \frac{U_1(0,T) + U_2(0,T)}{2} e^{\hat{F}x} - \frac{U_1(0,T) - U_2(0,T)}{2} e^{-\hat{F}x}. \end{cases} \quad (40)$$

Итак, получено решение, когда учитывается действие лишь оператора взаимодействия.

С учетом действия дифференциального и нелинейного операторов получаем итерационную формулу:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \frac{1}{2} \left\{ (e^{h\hat{F}} + e^{-h\hat{F}}) \exp(h\hat{N}_1) \exp(h\hat{D}_1) U_1(x) + (e^{h\hat{F}} - e^{-h\hat{F}}) \exp(h\hat{N}_2) \exp(h\hat{D}_2) U_2(x) \right\}, \\ U_2(x+h) = \frac{1}{2} \left\{ (e^{h\hat{F}} - e^{-h\hat{F}}) \exp(h\hat{N}_1) \exp(h\hat{D}_1) U_1(x) + (e^{h\hat{F}} + e^{-h\hat{F}}) \exp(h\hat{N}_2) \exp(h\hat{D}_2) U_2(x) \right\} \end{cases} \quad (41)$$

Полученную систему уравнений, можно преобразовать, используя определения гиперболических функций:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Кроме того, учтём, что непосредственное использование в вычислениях операторов  $\hat{D}_{1,2}$  затруднительно из-за наличия в них производных. Однако данное препятствие возможно обойти, если перейти в частотное представление с использованием преобразования Фурье. В этом случае операторы  $\hat{D}_{1,2}$  становятся скалярными значениями благодаря замене  $\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow i\Delta\omega$ , где  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau}$  – смещение относительно несущей частоты импульса (несущие частоты взаимодействующих импульсов одинаковы).

Таким образом, окончательная итерационная формула:

$$\begin{cases} U_1(x+h) = \cosh(h\hat{F}) \exp(h\hat{N}_1) \Phi^{-1} \exp[h\hat{D}_1(\Delta\omega)] \Phi U_1(x) + \\ \quad + \sinh(h\hat{F}) \exp(h\hat{N}_2) \Phi^{-1} \exp[h\hat{D}_2(\Delta\omega)] \Phi U_2(x), \\ U_2(x+h) = \sinh(h\hat{F}) \exp(h\hat{N}_1) \Phi^{-1} \exp[h\hat{D}_1(\Delta\omega)] \Phi U_1(x) + \\ \quad + \cosh(h\hat{F}) \exp(h\hat{N}_2) \Phi^{-1} \exp[h\hat{D}_2(\Delta\omega)] \Phi U_2(x). \end{cases} \quad (42)$$

В выражениях (42) символом  $\Phi$  обозначено преобразование Фурье, а символом  $\Phi^{-1}$  – обратное преобразование Фурье;

$$\hat{D}_{1,2}(\Delta\omega) = \hat{D}_{1,2}\left(\frac{\partial}{\partial\tau} \rightarrow i\Delta\omega\right).$$

Из набора итерационных формул (29), (32) и (42) наиболее приемлемой, несмотря на большую сложность, является система (42), поскольку здесь в отличие от других систем, отсутствует деление амплитуды в операторах. Данный фактор является безусловно важным, т.к. в случае нулевых значений амплитуды в ходе численных расчетов может появиться сингулярность, разрешение которой требует усложнения алгоритма расчета и вносит существенную погрешность.

Оценка точности полученных итерационных формул может быть выполнена аналогично тому, как это делается для системы с одним импульсом. Эта оценка показывает, что результаты вычислений будут иметь точность до второго порядка по шагу  $h$  дискретизации по пространственной оси.

## Список дополнительной литературы

1. Говорухин В.Н. Численный анализ динамических систем: Учеб. пособие – Ростов-на-Дону: Наука, 2009. – 81 с.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
3. Задорожный В.Н. Высшая математика для технических университетов. V. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 396 с.
4. Постнов Д.Э., Павлов А.Н., Астахов С.В. Методы нелинейной динамики: Учеб. пособие – Саратов: 2008. – 120 с.
5. Akhmediev, N., Ankiewicz, A. (eds.): *Dissipative Solitons*. Lect. Notes Phys. V. 661. Springer, Heidelberg 2005, P. 1-17.
6. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Solitons around us: Integrable, Hamiltonian and dissipative systems, in *Optical Solitons: Theoretical and Experimental Challenges*, Edited by K. Porsezian and V.C. Kurakose, (Springer, Berlin-Heidelberg, 2003), P. 105-126.
7. W. Chang, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and N. Akhmediev Dissipative soliton resonances, *Phys. Rev. E* 76, 016607, 2007.
8. Вадейко И., Прохоров А.В., Рубин А.В., Аракелян С.М., Nonlinear interaction of light with a Bose-Einstein condensate: Methods to generate sub-Poissonian light, *Phys. Rev. A* 72, 013804, 2005.
9. Власов Р.А. и Лемеза А.М., Bistable moving optical solitons in resonant photonic crystals, *Phys. Rev. A* 84, 023828, 2011.
10. Джен Вэнг Алан И. Вилнер *Optical Signal Processing: Data Exchange, Design and Architectures for Digital Signal Processing*, Dr. Gustavo Ruiz (Ed.) 2013.
11. Качалов Д.Г., Гамазков К.А., Павельев В.С., Хонина С.Н., Компьютерная оптика. Т. 35, №1, 70, 2011, С. 70-76.
12. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. – М.: Физматлит, 2005, 648 с.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974, 331с.
14. Розанов Н.Н. Диссипативные оптические солитоны от микро- к нано- и атто-. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 536 с.
15. Скарка В., Алексис Н.Б., Дербази М. Бережани В.И. Filamentation and coalescence of singular optical pulses in narrow-gap semiconductors and modeling of self-organization of vortex solitons using two-photon absorption, *Phys. Rev. B.*, 81, 035202, 2010.

16. Скарка В., Алексик Н.Б., Леблонд К., Маломед Б.А. и Михалач Д. Varieties of Stable Vortical Solitons in Ginzburg-Landau Media with Radially Inhomogeneous Losses, Phys. Rev. Lett., 105, 213901, 2010.
17. Карташов Я.В. Уединенные нелинейные волны в микроструктурированных средах: формирование, стабилизация и контроль: дис. д-ра физ.-мат. наук. – Троицк, 2012. – 324 с.