Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**

Институт архитектуры, строительства и энергетики

Сопротивление материалов

ПРАКТИКУМ

Для студентов, обучающихся по направлению подготовки
15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение
машиностроительных производств»

автор А.М. Бурлакова

Владимир 2018

Рецензент
кандидат технических наук, профессор
кафедры «Технология машиностроения»
Владимирского государственного университета
А.П. Шевченко

Сопротивление материалов: практикум/ А. М. Бурлакова; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир: ЭУИ, 2018 – 70 с.

Составлен в соответствии с программой курса сопротивления материалов для студентов, обучающихся по направлению 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» очной и заочной формы обучения.

Предназначен для практических занятий и выполнения курсовых работ по сопротивлению материалов. Включает варианты заданий и методические указания к их выполнению. Приведены примеры решения задач.

Табл. 7 . Ил. 30 . Библиогр.: 4 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Рабочие программы дисциплины "Сопротивление материалов" для студентов очной и заочной формы обучения направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» предусматривают практические занятия и выполнение курсовой работы в соответствии с учебным планом. Практикум «Сопротивление материалов» содержит задания по следующим темам:

- геометрические характеристики плоских сечений;
- расчет стержней на прочность при растяжении и сжатии, кручении и прямом изгибе;
- расчет стержней на прочность при сложном сопротивлении;
- расчет стержней на прочность при динамическом (ударном) нагружении.

В практикуме приведены задания для курсовой работы, основные теоретические положения и методические указания к выполнению заданий курсовой работы, задачи для практических занятий и примеры решения задач. Каждый студент выполняет курсовую работу по индивидуальному варианту, который выдается преподавателем. Номер варианта представляет собой произвольный набор четырех цифр, пример выбора данных по варианту приведен ниже (с. 5).

Курсовая работа (текстовая и графическая части) с титульным листом (см. приложение 1) оформляются в соответствии с требованиями и представляются на защиту в сроки, указанные в рабочей программе. Во время защиты курсовой работы студент должен показать знание основных положений теоретической части соответствующей темы, владение методами расчета типовых элементов конструкций на прочность и жесткость, умение отвечать на вопросы по теме курсовой работы.

Название курсовой работы «*Расчеты на прочность и жесткость прямых стержней*». В курсовую работу входят задания 1 и 2, набор задач определяется преподавателем.

Общие требования к выполнению и оформлению курсовой работы по сопротивлению материалов:

1. Курсовая работа выполняется на листах формата А-4 набором в формате Word или рукописно.

2. Условие задачи с эскизом заданной схемы и исходными данными для расчета по индивидуальному варианту записать на первом листе решения каждой задачи.

3. Текстовая часть должна содержать названия этапов решения, краткие пояснения хода решения задачи, расчетные формулы, численные расчеты и результаты вычислений по каждому этапу решения.

4. Численные расчеты проводить в системе СИ – силы в ньютонах, линейные размеры – в метрах, напряжения – в паскалях (1 МПа = 10^6 Па).

Численные значения величин подставлять в расчетную формулу в системе СИ без промежуточных преобразований и затем записывать результат вычислений с указанием единиц измерения (размерности).

5. Схемы и графики (эпюры) выполнять в выбранном масштабе; на всех расчетных схемах стержней необходимо указывать *численные значения* линейных размеров, нагрузки (сил, моментов), реакций опор; реакции опор показывать в действительном направлении с учетом знаков, полученных при решении.

6. На расчетных схемах стержней (валов, балок)принимать следующие оси координат: x – продольная ось стержня (балки, вала); y, z – поперечные оси; оси x, y, z образуют правую систему осей координат; при изображении отдельных видов балки (вала) указывать направление, с которого получено данное изображение, например, вид на балку сверху – с положительного конца оси y; применять, как правило, основные виды – с положительных концов соответствующих координатных осей; при решении задач 1, 2 задания 2 («Косой изгиб», «Изгиб с кручением вала») показывать вертикальную плоскость xy в плоскости рисунка, горизонтальную плоскость – вид с положительного конца оси y, т.е. сверху или в аксонометрическом (пространственном) виде (см. примеры решения задач); так же строить эпюры внутренних силовых факторов (внутренних усилий).

7. Окончательные результаты записывать в виде ответа.

8. Оформить курсовую работу с титульным листом в формате Word или рукописно и сдать на проверку преподавателю в сроки, установленные рабочей программой дисциплины. Для студентов, обучающихся по заочной форме с применением дистанционных технологий прислать курсовую работу, выполненную в соответствии с требованиями, на сайт ЦДО, имя файла записать латинскими буквами с указанием фамилии, например, sopromat_KR_ivanov.

Данные для решения задач выбираются из таблиц к задачам в соответствии с индивидуальным вариантом (шифром), выданным преподавателем. Номер варианта состоит из четырёх цифр. Каждая цифра соответствует номеру строки в соответствующем столбце. По первой цифре берутся данные из первого столбика таблицы, обозначенного римской цифрой I, по второй цифре берутся данные из столбика II, по третьей – из столбика III, по четвёртой – из столбика IV. Пример выбора данных: вариант 1835

Таблица

Номер строки	I	II	III	IV
	данные	данные	данные	данные
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
0				

Задание 1

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ, КРУЧЕНИИ И ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Задача № 1. Прямой стержень жестко заделан левым концом и нагружен сосредоточенными силами (рис.1).Требуется:

- изобразить расчетную схему стержня;
- построить эпюры продольной силы N;
- из условия прочности определить площадь A поперечного сечения стержня;
- найти удлинения (укорочения) участков стержня Δl_i и полное изменение длины стержня Δl.

Номер схемы стержня, данные для расчета взять по варианту из табл. 1. При расчете принять $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблица 1

Номер строки	I	II			III		IV	
	Номер схемы	a, м	b, м	c, м	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	[σ], МПа
1	1	0,5	1,0	0,4	32	14	28	120
2	2	0,4	0,9	0,2	16	20	12	140
3	3	0,3	0,8	0,5	24	18	40	160
4	4	0,2	0,7	0,6	18	30	24	100
5	5	0,4	0,6	0,3	26	12	14	150
6	6	0,5	0,4	0,8	36	14	26	120
7	7	0,6	0,3	0,9	25	15	36	130
8	8	0,7	0,2	0,4	12	28	20	140
9	9	0,8	0,4	0,6	30	15	28	150
0	10	0,3	0,6	0,5	27	10	18	160

Указания к задаче № 1

В задаче рассматривается проектировочный расчет на прочность прямого стержня при растяжении и сжатии.

Рекомендуется следующий порядок решения задачи:

1. Определить реакцию опоры (заделки).

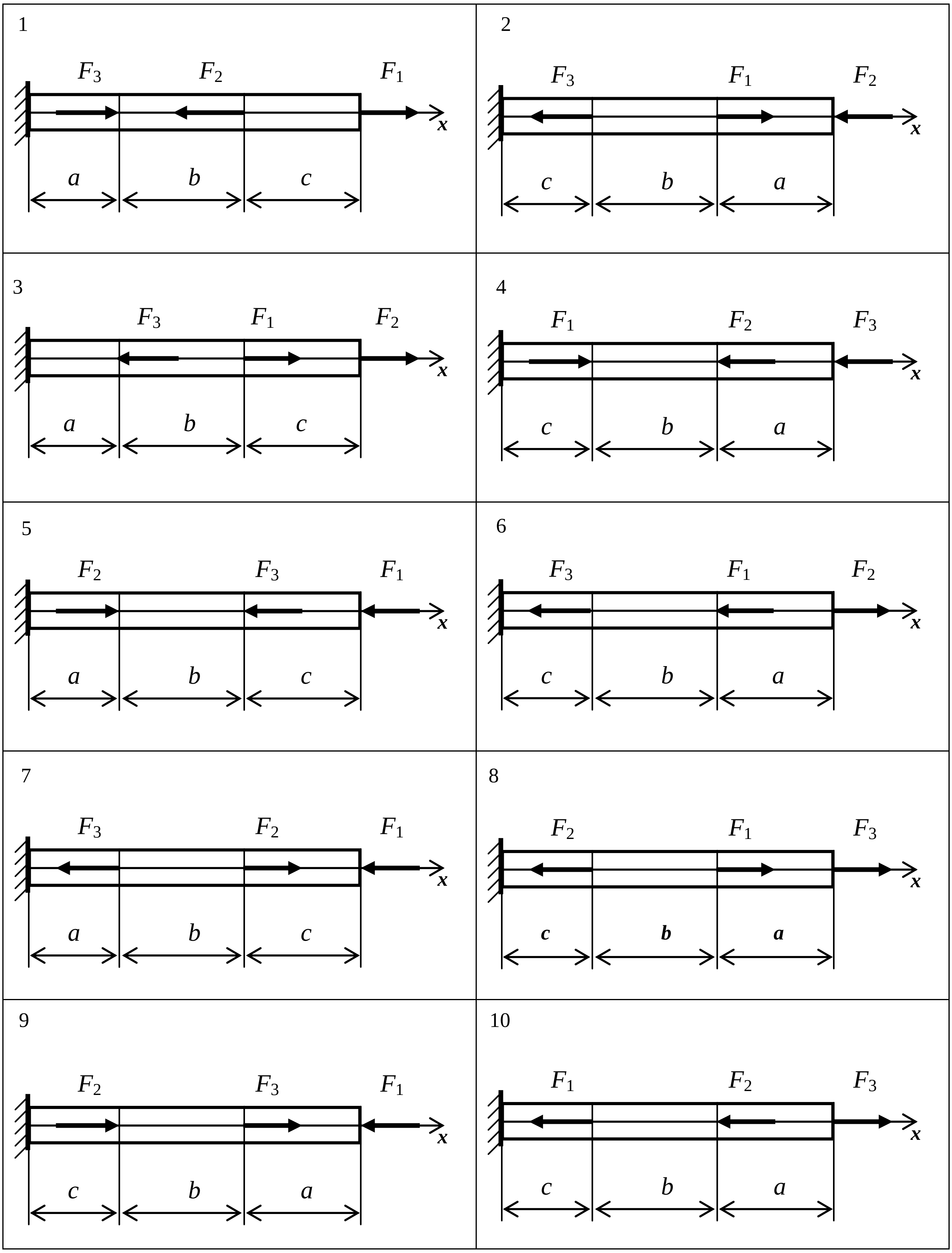

1
F3 F2 F1
x
a b c
2
F3 F1 F2
x
c b a
3
F3 F1 F2
x
a b c
4
F1 F2 F3
x
c b a
5
F2 F3 F1
x
a b c
6
F3 F1 F2
x
c b a
7
F3 F2 F1
x
a b c
8
F2 F1 F3
x
c b a
9
F2 F3 F1
x
c b a
10
F1 F2 F3
x
c b a

Рис. 1

2. Разбить рассматриваемый стержень на участки так, чтобы в пределах участка характер нагрузки не изменялся, в этом случае границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы. Для каждого i-го участка составить выражения для продольной силы N_i и построить эпюру N.

3. Определить площадь поперечного сечения из условия прочности:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|N|_{max}}{A} \leq [\sigma],$$

отсюда $$A \geq \frac{|N|_{max}}{[\sigma]}$$

4. Проверить правильность определения площади поперечного сечения. Определить нормальное напряжение на каждом i – м участке по формуле $\sigma_i = \frac{N_i}{A}$ и построить эпюру нормальных напряжений.

5. Определить изменение длины каждого участка (удлинение или укорочение) по формуле:

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA}$$

6. Определить полное изменение длины стержня $\Delta l = \sum \Delta l_i$.

7. Результаты расчета записать в ответе.

Задача № 2. Для вала (рис. 2) требуется:

- изобразить расчетную схему вала;

- построить эпюры крутящего момента M_x и максимальных касательных напряжений τ_{max};

- из условия прочности определить диаметр d вала;

- определить углы закручивания φ_i на участках вала и полный угол закручивания вала φ.

Данные для расчета и номер схемы вала (рис. 2) взять по варианту из табл. 2 . При расчете принять $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Таблица 2

Номер строки	I	II				III			IV
	Номер схемы	M_1, кН·м	M_2, кН·м	M_3, кН·м	M_4, кН·м	a, м	b, м	c, м	[τ], МПа
1	1	0	1,2	2,0	1,6	0,22	0,16	0,14	40
2	2	0,8	0	1,2	1,6	0,19	0,14	0,20	50
3	3	1,2	1,5	0	0,7	0,18	0,20	0,12	65
4	4	1,4	0,8	1,6	0	0,15	0,24	0,16	60
5	5	0	0,7	1,5	1,2	0,16	0,18	0,25	35
6	6	1,6	0	1,2	1,4	0,25	0,16	0,18	40
7	7	0,9	1,1	0	1,4	0,14	0,15	0,22	45
8	8	1,2	0,8	1,3	0	0,18	0,24	0,15	50
9	9	0	1,9	1,2	1,1	0,12	0,14	0,16	55
0	10	0,6	0	1,1	1,5	0,15	0,18	0,20	30

Указания к задаче № 2

В задаче рассматривается проектировочный расчет стержня при кручении. Стержень при кручении называется *валом*.

Решение задачи рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Изобразить схему вала, на схеме указать численные значения заданных моментов.

2. Найти неизвестный момент M_0 из уравнения равновесия внешних моментов относительно оси x:

$$\sum M_x = 0;$$

3. Разбить вал на участки, обозначить их номерами j = 1, 2, 3…

4. Методом сечений определить крутящие моменты на участках вала: на каждом участке провести мысленно секущую плоскость и составить уравнение равновесия моментов для отсеченной части вала относительно оси x, включая в эти уравнения крутящий момент $M_{\text{к}j}$ на данном участке. По полученным значениям построить эпюру крутящих моментов. По эпюре крутящих моментов $M_{\text{к}}$ определить наибольшее численное значение крутящего момента $|M_{\text{к}}|_{max}$.

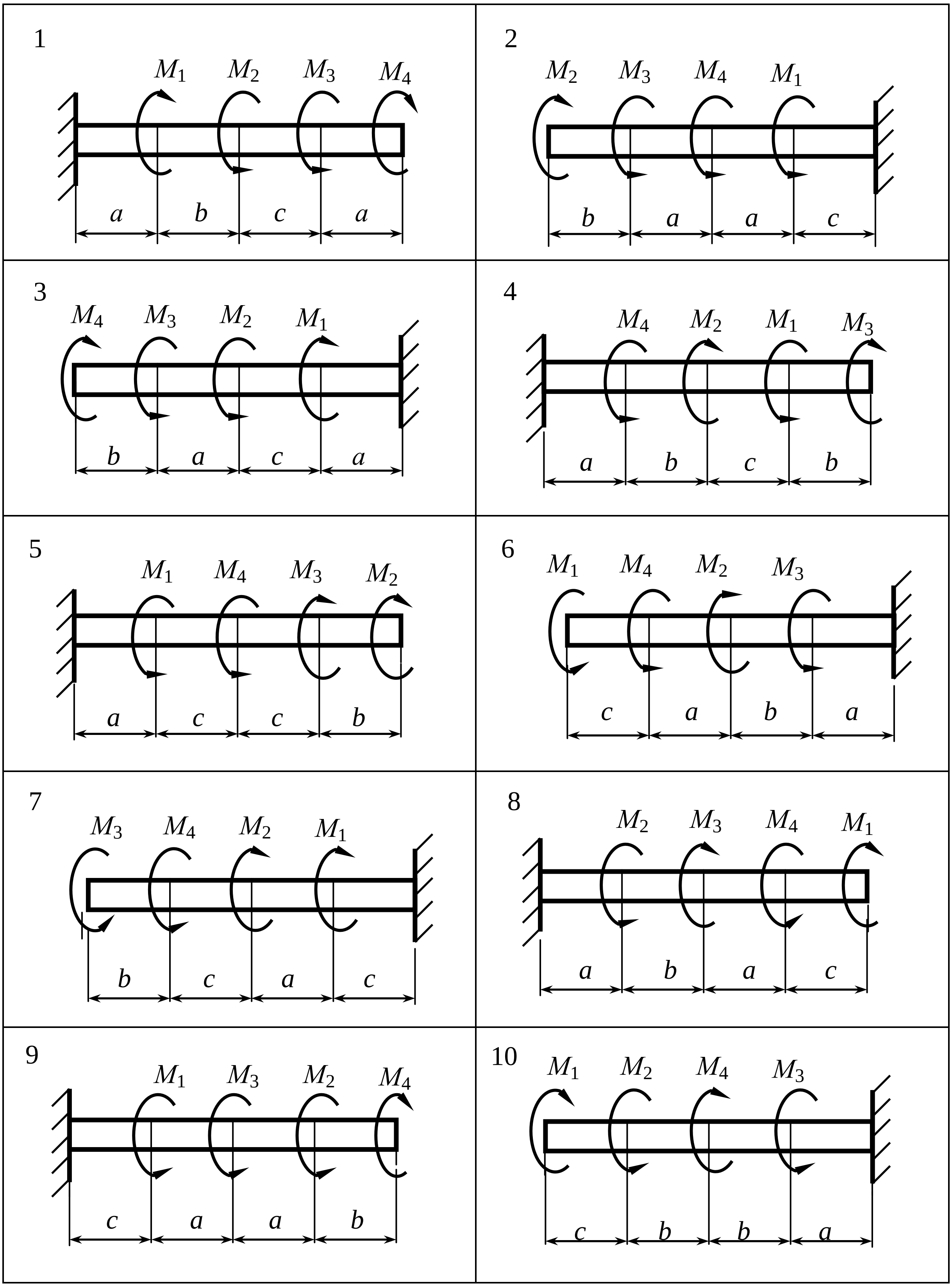

1
M1 M2 M3 M4
a b c a
2
M2 M3 M4 M1
b a a c
3
M4 M3 M2 M1
b a c a
4
M4 M2 M1 M3
a b c b
5
M1 M4 M3 M2
a c c b
6
M1 M4 M2 M3
c a b a
7
M3 M4 M2 M1
b c a c
8
M2 M3 M4 M1
a b a c
9
M1 M3 M2 M4
c a a b
10
M1 M2 M4 M3
c b b a

Рис. 2

5. Записать условие прочности при кручении

$$\tau_{max} = \frac{|M_к|_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

6. Из условия прочности найти полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения вала W_P

$$W_p \geq \frac{|M_к|_{max}}{[\tau]},$$

где $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$ – полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения вала.

Определить диаметр вала: $d \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}}$.

Диаметр вала также можно найти по формуле:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_к|_{max}}{\pi[\tau]}}.$$

7. Найти значения наибольших касательных напряжений τ_{maxj} на участках вала для расчетного значения диаметра d

$$\tau_{maxj} = \frac{M_{кj}}{W_p},$$

где j – номер участка.

По найденным значениям построить эпюру наибольших касательных напряжений на участках вала. Все значения напряжений на этой эпюре должны соответствовать условию прочности при кручении:

$$\left|\tau_j\right|_{max} \leq [\tau].$$

8. Определить углы закручивания (углы поворота сечений) на каждом участке вала по формуле:

$$\varphi_j = \frac{M_{кj} l_j}{G I_p},$$

где l_j – длина j – го участка; ; $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = W_p \cdot \frac{d}{2} -$ полярный момент инерции поперечного сечения вала, G – модуль сдвига, для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

9. Найти полный угол поворота вала:

$$\varphi = \sum \varphi_j .$$

10. Результаты расчета записать в ответе.

Задача № 3. Для заданных двух схем балок - двухопорной консольной (рис. 3, а) и консоли (рис. 3, б) требуется:

- изобразить расчетную схему каждой балки;
- построить эпюры изгибающего момента и поперечной силы;
- из условия прочности подобрать:

а) для схемы (а) стальную балку двутаврового поперечного сечения при допускаемом напряжении [σ] = 160 МПа;

б) для схемы (б) найти диаметр d круглого поперечного сечения деревянной балки при допускаемом напряжении [σ] = 10 МПа.

Данные для расчета и схемы балок взять по варианту из табл. 3.

Таблица 3

Номер строки	I	II			III		IV
	Номер схемы	*a*, м	*b*, м	*c*, м	*F*, кН	*M*, кН·м	*q*, кН/м
1	1	1,0	0,8	2,0	15	10	30
2	2	1,2	0,9	1,8	17	12	28
3	3	1,4	1,0	1,6	19	14	26
4	4	1,3	1,1	1,4	10	16	24
5	5	1,1	1,4	1,7	12	18	22
6	6	1,6	1,3	1,9	14	20	20
7	7	1,5	1,2	1,5	16	12	32
8	8	2,0	0,7	1,1	13	16	20
9	9	1,9	0,6	1,2	18	14	34
0	10	1,8	1,5	1,0	20	18	36

Указания к задаче № 3

В задаче рассматривается проектировочный расчет стержня при прямом изгибе. Стержень при изгибе называется *балкой*.

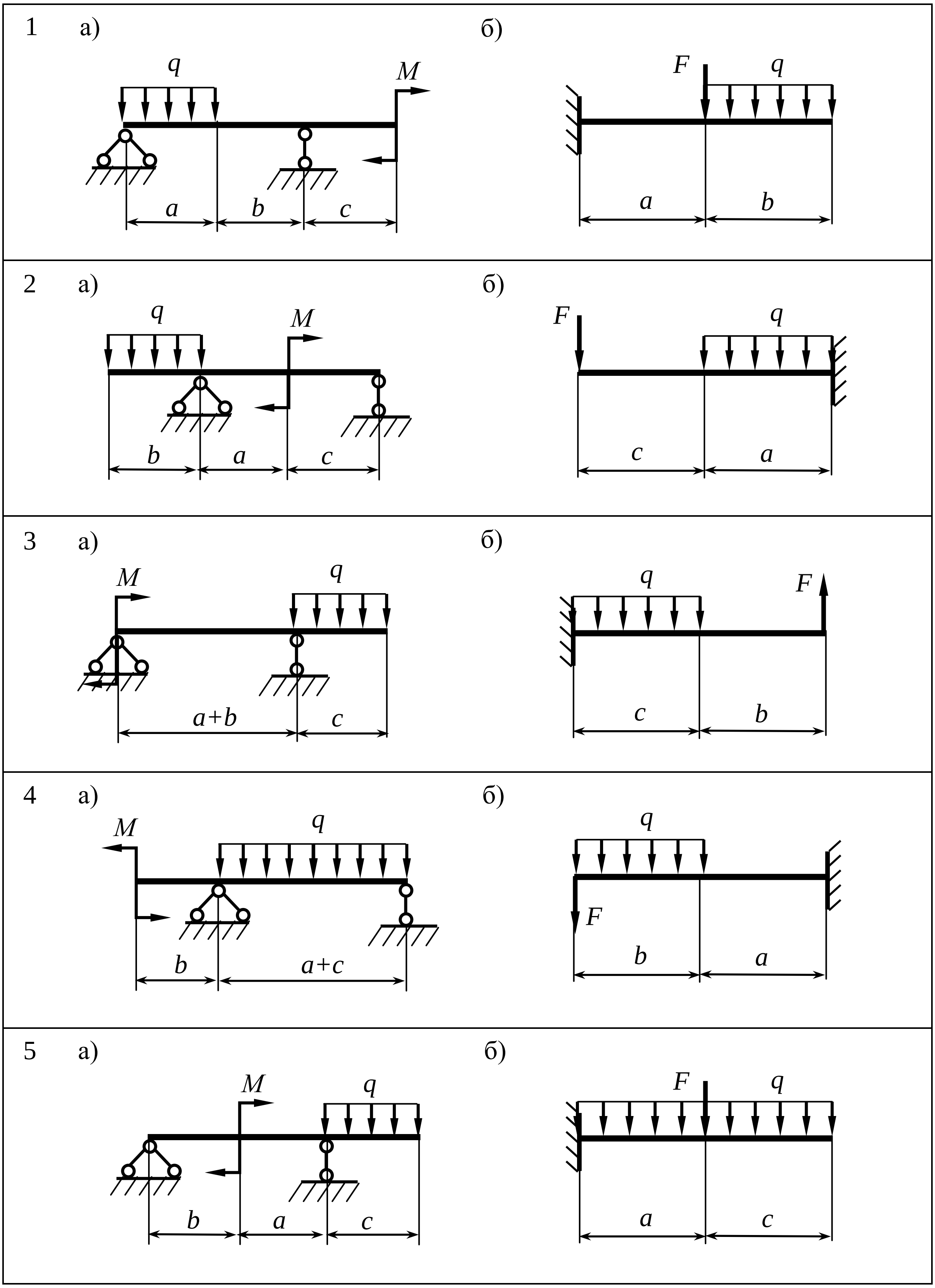

1 а)
q
M
a
b
c
б)
F
q
a
b
2 а)
q
M
b
a
c
б)
F
q
c
a
3 а)
M
q
a+b
c
б)
q
F
c
b
4 а)
M
q
b
a+c
б)
q
F
b
a
5 а)
M
q
b
a
c
б)
F
q
a
c

Рис. 3

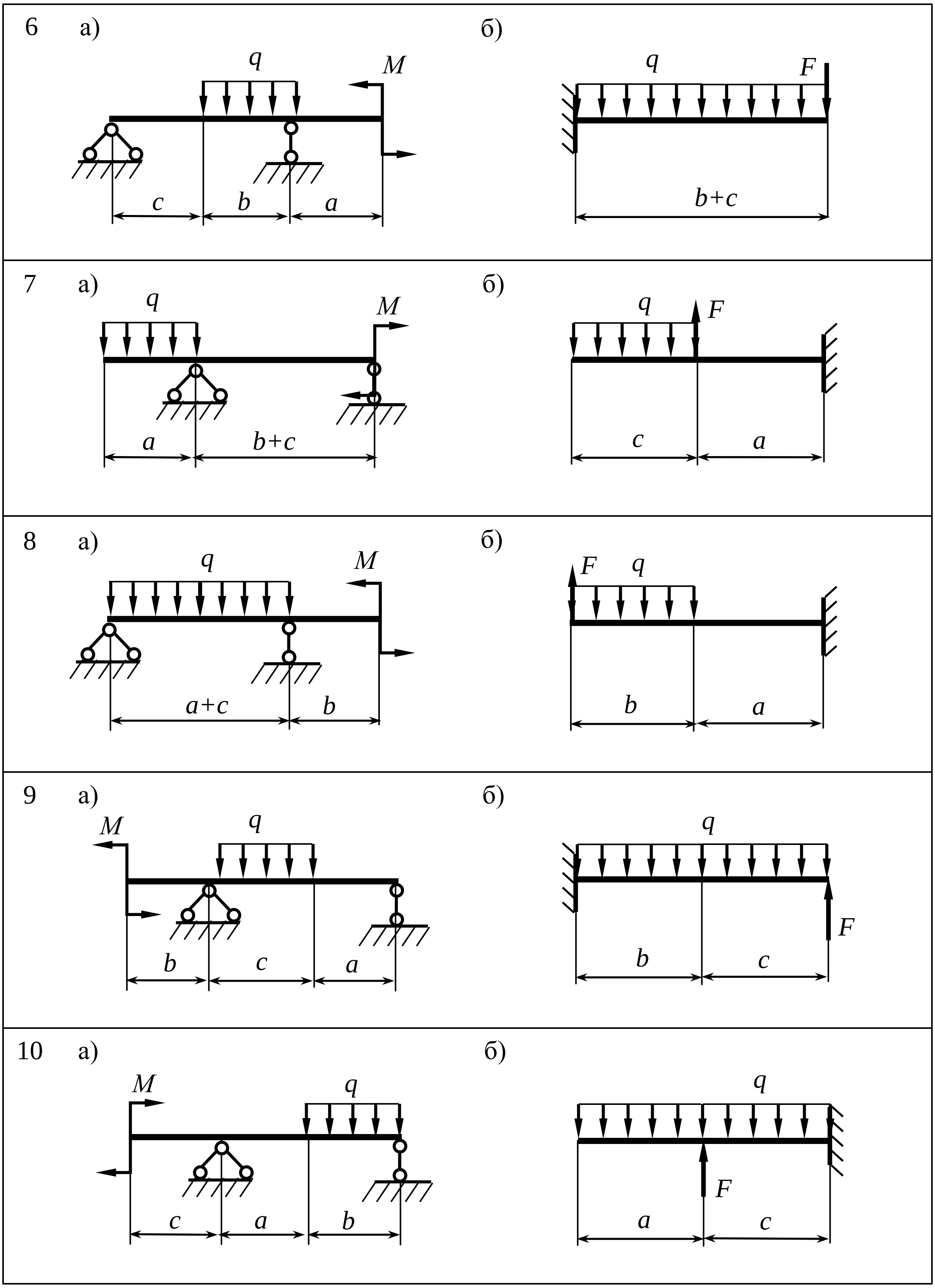


Рис.3. Окончание

Решение задачи рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Изобразить расчетную схему балки с указанием численных значений нагрузки (F, q, M) и линейных размеров (a, b, c). Обозначить опоры балки A и B.

2. Найти реакции опор балки R_A и R_B из уравнений равновесия моментов относительно точек A и B:

$$\sum M_A = 0; \ \sum M_B = 0.$$

Реакции опор показать на схеме балки в действительнм направлении, т. е. учесть знак реакции, полученный при решении уравнений равновесия.

Проверить правильность определения реакций опор, составив уравнение равновесия

$$\sum Y = 0;$$

3. Разбить балку на участки так, чтобы в пределах каждого участка характер внешней нагрузки и площадь поперечного сечения не менялись, номера участков указать на схеме – $i = 1, 2, 3\ldots$

4. На каждом участке методом сечений определить поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z: провести мысленно секущую плоскость на рассматриваемом участке и составить уравнения равновесия для отсеченной части балки (левой или правой); из этих уравнений найти искомые внутренние усилия.

По полученным значениям построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента (эпюру M_z строить на сжатых волокнах).

5. По эпюре изгибающего момента найти опасное сечение, в котором возникает наибольший по абсолютному значению (по модулю) изгибающий момент $|M_z|_{max}$.

6. Записать условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности найти осевой момент сопротивления поперечного сечения балки W_z:

$$W_z \geq \frac{|M_z|_{max}}{[\sigma]}$$

7. Для схемы (a) по таблице сортамента подобрать номер двутавровой балки так, чтобы табличное значение осевого момента сопротивления $W_{\text{табл}}$ (W_x) было возможно близко к расчетному значению W_z. Проверить выполнение условия прочности для этого номера балки:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_{\text{табл}}} \leq [\sigma].$$

Расхождение между наибольшим нормальным напряжением для выбранного номера двутавра и допускаемым напряжением не должно превышать $\pm$ 5%:

$$|\Delta\sigma| = \frac{[\sigma] - |\sigma|_{max}}{[\sigma]} \leq \pm 5\%$$

8. Для схемы (б) осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения балки определяется по формуле:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Отсюда диаметр *d* поперечного сечения балки (б):

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi}}.$$

Проверить выполнение условия прочности при найденном диаметре.

9. Результаты расчета записать в ответе.

Задача № 4. Для заданного симметричного поперечного сечения стержня (рис. 4) требуется:

- определить положение центра тяжести сечения;

- построить главные центральные оси (z_C – горизонтальная ось, y_C – вертикальная ось);

- найти главные центральные моменты инерции I_{zc}, I_{yc}.

Номер схемы сечения и данные для расчета взять по варианту из табл. 4.

Таблица 4

Номер строки	I Номер схемы	II a, мм	III b, мм	IV c, мм
1	1	60	46	80
2	2	45	52	70
3	3	50	56	96
4	4	40	38	84
5	5	36	54	50
6	6	54	45	90
7	7	48	50	65
8	8	64	35	90
9	9	42	60	75
0	10	56	40	60

Указания к задаче № 4

Определение геометрических характеристик плоских сечений стержня рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. Начертить поперечное сечение по заданным размерам в масштабе.

2. Разбить сечение на ряд простых фигур, для которых известны геометрические характеристики (см. приложение 2).

3. Показать центры тяжести простых фигур – точки C_i; провести в каждой фигуре собственные центральные оси (z_{C_i} - горизонтальные оси, y_{C_i} - вертикальные оси, i – номер простой фигуры) и выбрать оси z, y вспомогательной системы координат zOy, относительно которой будет определяться положение центра тяжести сечения C.

4. Найти координаты центра тяжести заданной фигуры по формулам:

$$z_C = \frac{\sum A_i z_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 z_{C_1} + A_2 z_{C_2} + \ldots + A_n z_{C_n}}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n},$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_{C_1} + A_2 y_{C_2} + \ldots + A_n y_{C_n}}{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}.$$

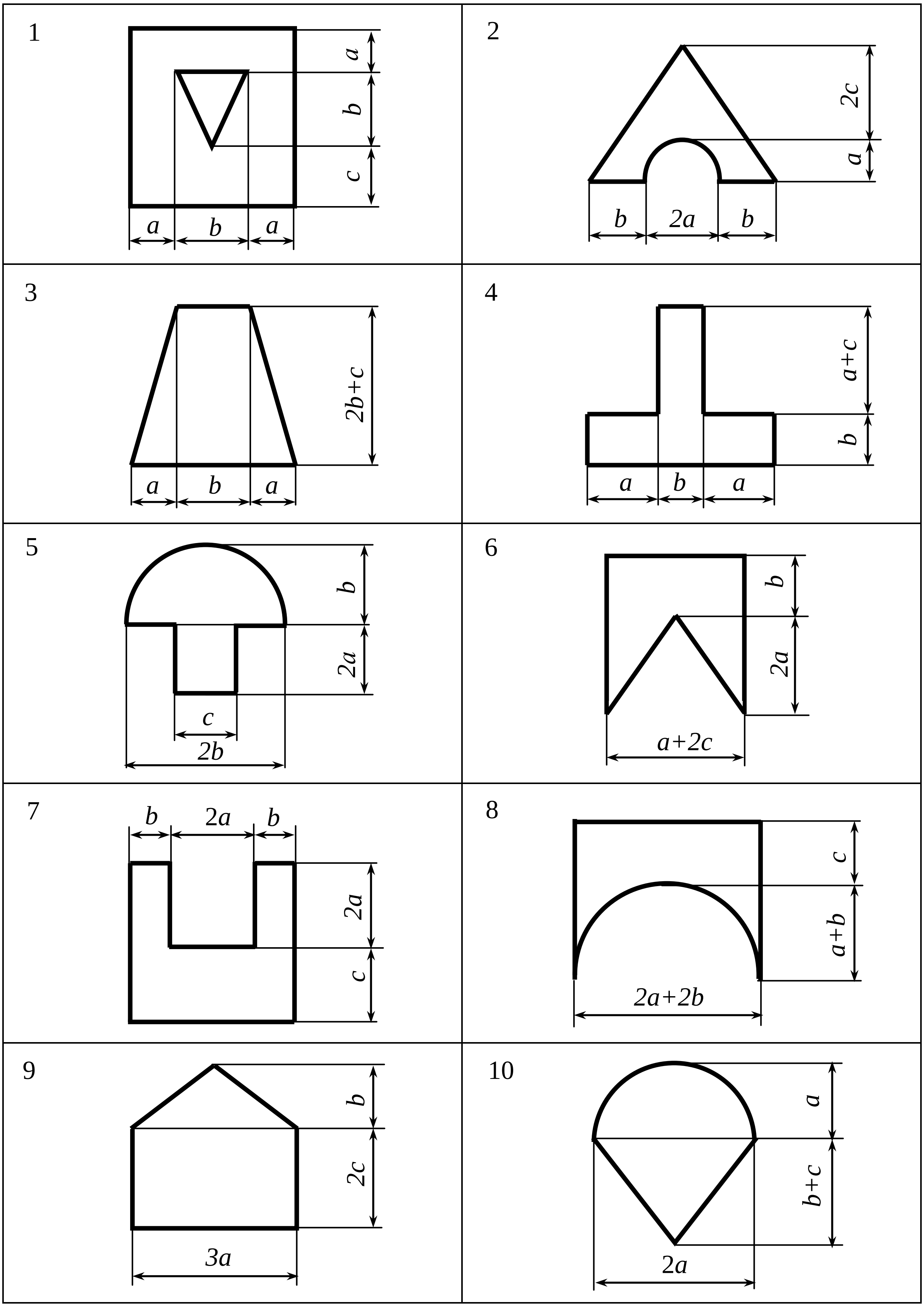

1
a
b
c
a b a
2
2c
a
b 2a b
3
2b+c
a b a
4
a+c
b
a b a
5
b
2a
c
2b
6
b
2a
a+2c
7
b 2a b
2a
c
8
c
a+b
2a+2b
9
b
2c
3a
10
a
b+c
2a

Рис. 4

Здесь A_i - площадь i-й простой фигуры; z_{C_i} и y_{C_i} - координаты центра тяжести i-й фигуры в выбранной вспомогательной системе координат. Суммирование проводится по количеству фигур разбиения (i=1, …n) алгебраически, для фигур, изображающих отверстия и выемки, площади принимаются отрицательными.

5. Провести через найденный центр тяжести *C* всего сечения оси z_c и y_c - центральные оси заданного сечения.

6. Вычислить главные центральные моменты инерции симметричного сечения сечения относительно главных центральных осей z_c и y_c по формулам:

$$I_{zC} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{zC_i} + a_i^2 A_i\right); \quad I_{yC} = \sum_{i=1}^{n}\left(I_{yC_i} + b_i^2 A_i\right);$$

Здесь a_i - расстояние между горизонтальными осями z_{c_i} и z_c; b_i - расстояние между вертикальными осями y_{c_i} и y_c.

7. Результаты расчета записать в ответе.

Задание 2

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ И УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Задача № 1. Балка с поперечным сечением в виде прямоугольника с соотношением размеров $h/b=k$ (h – высота, b – ширина) нагружена силами (F, q) и моментами (M), действующими в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 5). Требуется:

- определить внутренние силовые факторы в поперечных сечениях балки в главных плоскостях;
- построить эпюры внутренних усилий;
- из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки b и h;

- проверить выполнение условия прочности по нормальным напряжениям при найденных размерах;

- построить эпюру нормальных напряжений σ в опасном сечении.

При расчете принять допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Номер схемы балки, данные для расчета взять из табл. 5 по варианту, выданному преподавателем.

Таблица 5

Номер строки	I	II		III		IV	
	Номер схемы	a, м	c, м	k	F, кН	q, кН/м	M, кН·м
1	1	1,2	1,5	1,5	8	18	12
2	2	1,4	1,8	1,8	12	20	24
3	3	1,5	2,0	2,0	10	12	9
4	4	1,0	1,4	1,6	16	8	10
5	5	0,8	1,2	2,2	14	6	12
6	6	1,6	1,6	0,75	18	4	18
7	7	1,2	1,0	0,5	20	10	8
8	8	1,5	1,5	2,5	24	9	6
9	9	1,4	1,6	0,6	15	12	16
0	10	1,0	1,4	0,8	12	8	15

Указания к задаче № 1

В данной задаче рассматривается косой (сложный) изгиб балки. Рекомендуется следующий порядок расчета:

1. Изобразить расчетную схему балки согласно исходным данным с указанием размеров и нагрузки. Вычертить поперечное сечение в масштабе с учетом соотношения $h/b=k$.

2. Построить эпюры внутренних силовых факторов в главных плоскостях балки:

- в плоскости xy – эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z;

- в плоскости xz – эпюры поперечной силы Q_z и изгибающего момента M_y.

Эпюры изгибающих моментов строить на сжатых волокнах балки.

3. По эпюрам изгибающих моментов M_z и M_y найти опасные сечения балки. Опасными сечениями балки являются сечения, в кото-

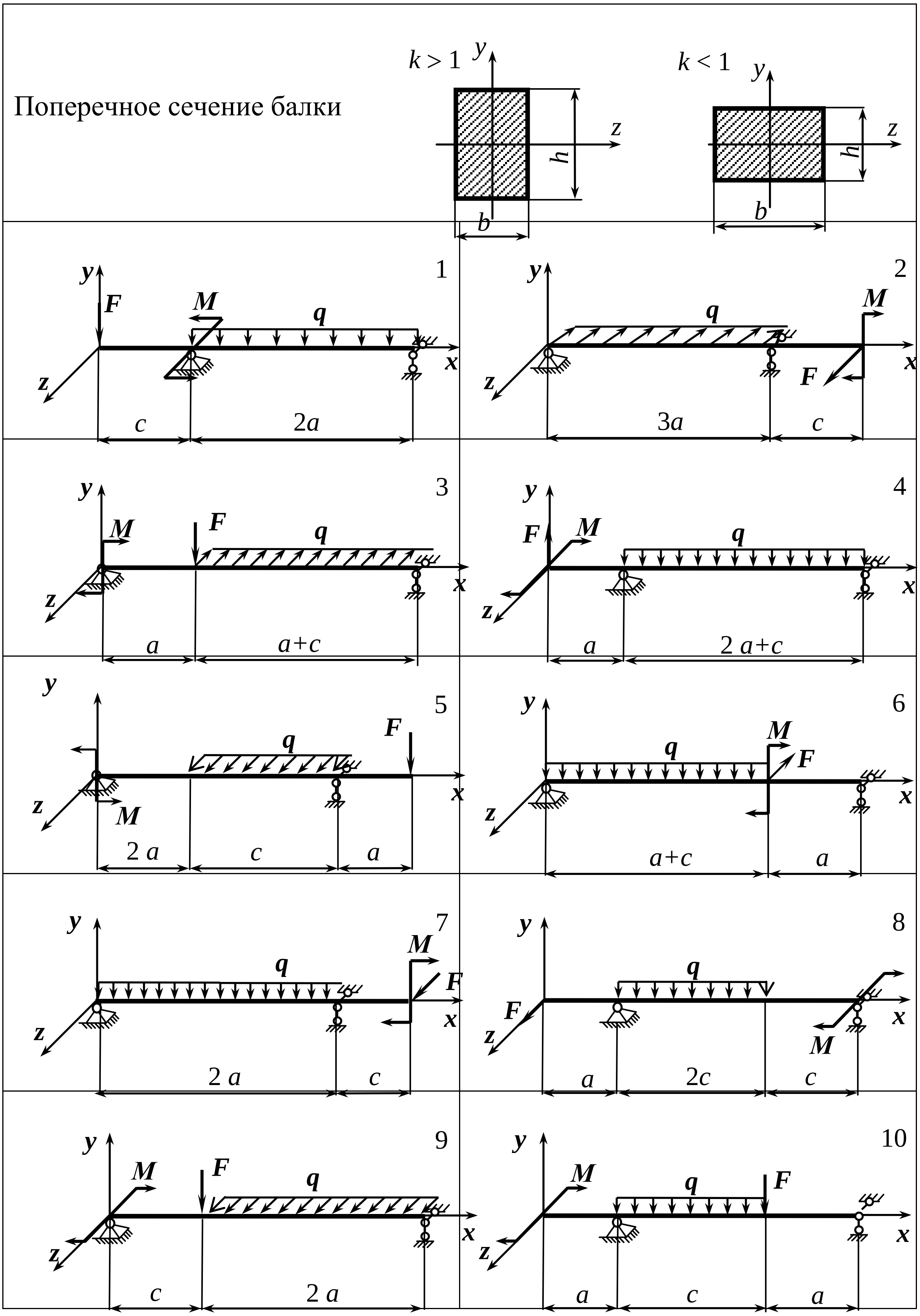

Поперечное сечение балки
k > 1
k < 1
y
z
h
b
1
y F M q z x c 2a
2
y q M F z x 3a c
3
y M F q z x a a+c
4
y F M q z x a 2 a+c
5
y q F z M x 2 a c a
6
y q M F z x a+c a
7
y q M F z x 2 a c
8
y q F z M x a 2c c
9
y M F q z x c 2 a
10
y M q F z x a c a

Рис. 5

рых оба изгибающих момента имеют максимальные по модулю значения или один из моментов имеет максимальное значение , а второй соответствующее текущее значение.

4. Определить положение нейтральной линии в опасных сечениях балки. Нейтральная (нулевая) линия составляет с осью z поперечного сечения балки угол β, который находится из выражения:

$$tg\beta = \left| \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y} \right|.$$

Нейтральная линия проходит через те четверти системы осей zy в поперечном сечении, в которых нормальные напряжения, вызванные моментами M_z и M_y, имеют разные знаки. Знаки нормальных напряжений в четвертях системы осей zy можно определить по эпюрам M_z и M_y, учитывая, что эти эпюры построены на сжатых волокнах. Опасные точки в опасных сечениях найдем как наиболее удаленные от нейтральной линии. Для прямоугольного сечения это будут угловые точки. В опасных точках нормальные напряжения от обоих изгибающих моментов имеют одинаковые знаки.

5. Условие прочности для балки с прямоугольным сечением

$$|\sigma|_{max} = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right|.$$

Здесь M_z, M_y - изгибающие моменты в опасном сечении;
$W_z = bh^2/6$, $W_y = b^2h/6$ – осевые моменты сопротивления поперечного прямоугольного сечения балки. Из условия прочности определить размеры поперечного сечения балки .

6. Начертить опасное сечение в масштабе с найденными размерами b и h. В опасном сечении показать положение нейтральной линии, знаки нормальных напряжений, опасные точки. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении. Ось эпюры провести перпендикулярно нейтральной линии. От этой оси отложить ординаты, равные в соответствующем масштабе нормальным напряжениям в точках поперечного сечения. При этом наибольшее напряжение в опасных сечениях при рассчитанных выше значениях b и h должно

быть равно допускаемому напряжению с погрешностью не лее $\pm 5\%$.

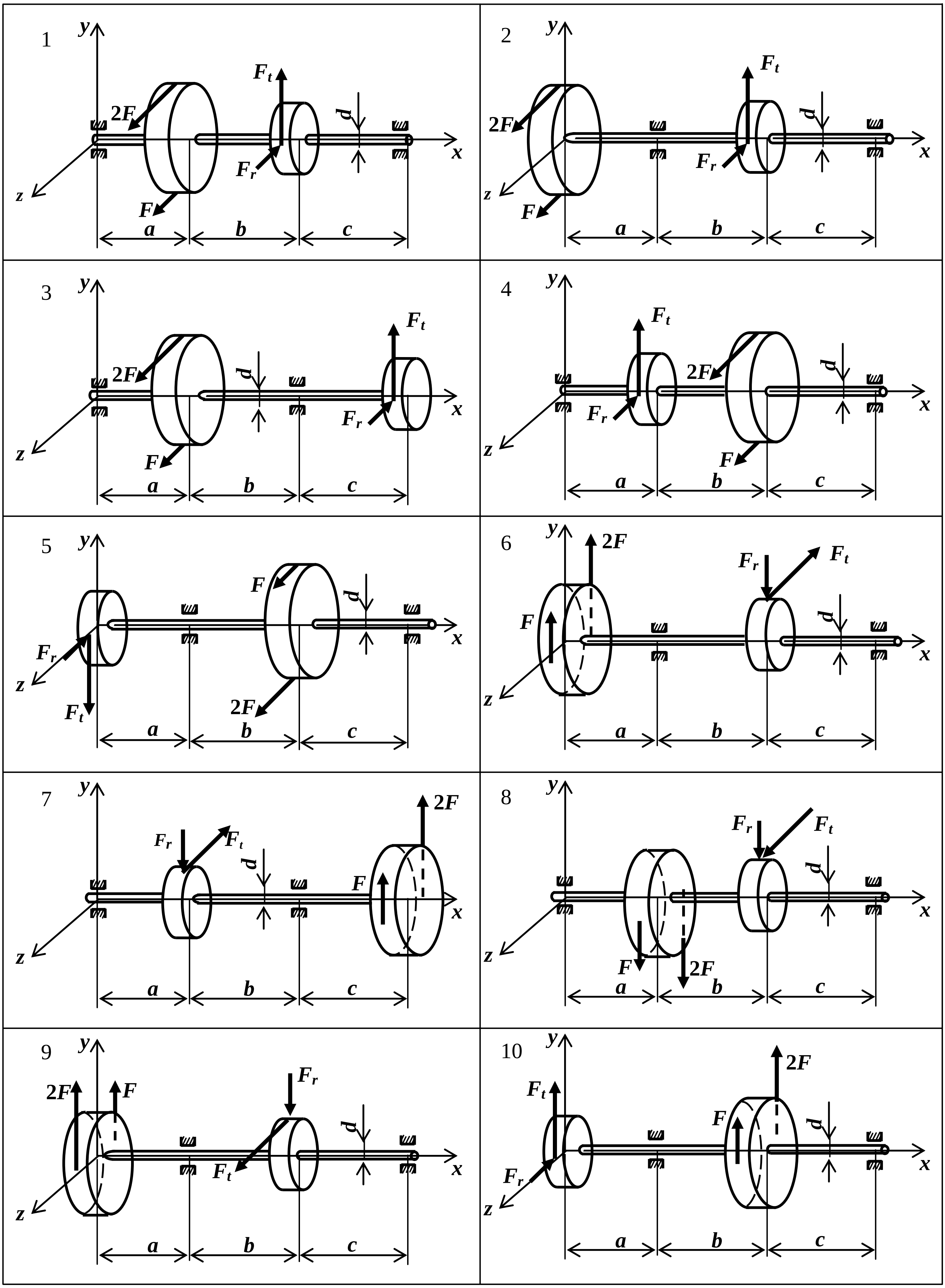
7. Результаты расчета записать в ответе.

Задача № 2. На вал механической передачи (рис. 6) насажен шкив диаметром D_1 и зубчатое колесо диаметром D_2. Шкив охвачен ремнем, натяжения ветвей которого равны силам F и $2F$. В зацеплении зубчатого колеса возникает окружная сила F_t и радиальная сила $F_r = 0{,}364F_t$. Вал вращается с постоянной угловой скоростью n и передает мощность P.

Требуется найти диаметр вала d. Расчет выполнить по третьей теории прочности (теории наибольших касательных напряжений). Вид справа на шкивы и колеса показан на рис. 7. Данные для расчета и номер схемы вала взять из табл. 6 по варианту, выданному преподавателем.

Таблица 6

Номер строки	I	II		III		IV			
	Номер схемы	P, кВт	n, об/мин	D_1, мм	D_2, мм	a, м	b, м	c, м	$[\sigma]$, МПа
1	1	8	120	180	80	0,3	0,2	0,2	80
2	2	10	140	200	100	0,4	0,3	0,2	100
3	3	12	200	240	160	0,2	0,3	0,3	120
4	4	14	180	300	180	0,3	0,2	0,4	60
5	5	16	230	360	200	0,2	0,4	0,4	90
6	6	18	320	400	220	0,3	0,2	0,3	120
7	7	20	300	420	280	0,2	0,3	0,4	80
8	8	22	350	340	200	0,3	0,2	0,3	60
9	9	24	420	220	120	0,3	0,4	0,2	70
0	10	26	440	260	140	0,4	0,3	0,4	100



1
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
2
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
3
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
4
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
5
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
6
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
7
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
8
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
9
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c
10
y
x
z
2F
F
Ft
Fr
d
a
b
c

Рис. 6.

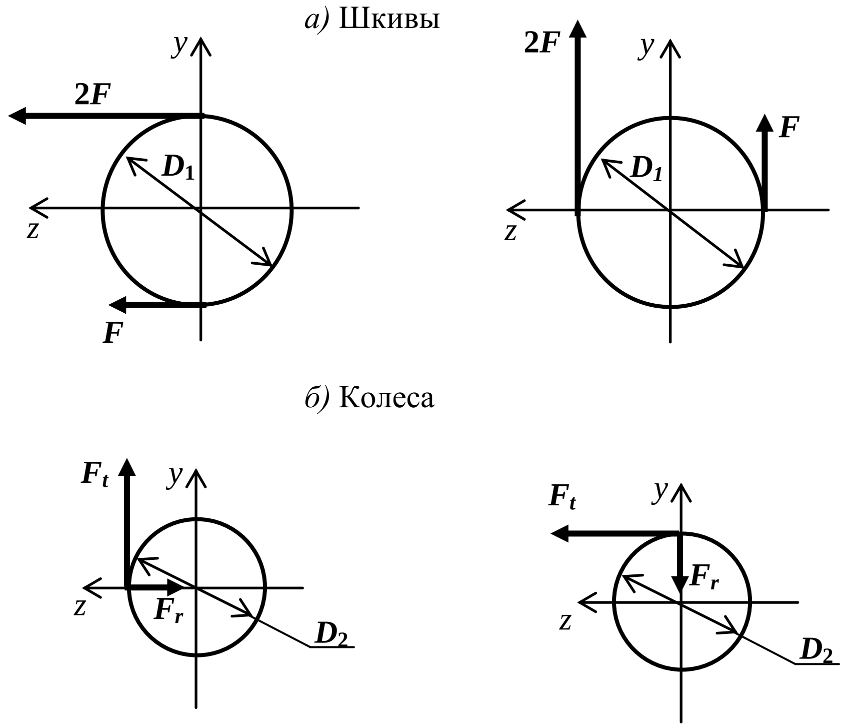


Рис.7

Указания к задаче № 2

В данной задаче рассматривается проектировочный расчет вала при совместном действии изгиба и кручения. Расчет вала рекомендуется проводить в следующем порядке:

1. Изобразить схему вала согласно варианту. На схеме указать оси координат *xyz*, численные значения сил, линейных размеров. При построении учесть , что ветви ремня располагаются горизонтально, параллельно оси z (схемы 1 – 5) или вертикально, параллельно оси y (схемы 6 – 10), см. рис. 7, *а.* Окружная сила F_t параллельна оси y (схемы1 – 5, 10) или оси z (схемы 6 – 9), радиальная сила на всех схемах направлена к оси вала, см. рис. 7, *б*.

2. Определить момент, приложенный к шкиву от ремня

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n}.$$

Здесь $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ - угловая скорость вала, рад/с.

3. Определить силу натяжения ветвей ремня из выражения

$$M = (2F - F)\frac{D_1}{2};$$

отсюда $F = \frac{2M}{D_1}$.

4. Определить силы, приложенные к колесу. Моменты, приложенные к шкиву и колесу равны по величине, тогда окружная сила $F_t = \frac{2M}{D_2}$, радиальная сила $F_r = 0{,}364\ F$.

5. Составить расчетную схему вала. Силы привести к оси вала, добавив моменты присоединенных пар M. Таким образом получаем систему сил, приложенных к оси вала и два момента M относительно оси x. Силы изгибают вал в плоскостях xy и xz, а моменты скручивают вал на участке между шкивом и колесом.

6. Определить реакции опор вала в плоскостях xy и xz.

7. Построить эпюры изгибающих и крутящего моментов. По эпюрам найти опасное сечение, в котором возникает наибольший эквивалентный момент. По третьей теории прочности эквивалентный момент определяется по формуле: $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\text{к}}^2}$, где M_z, M_y – изгибающие моменты, $M_к$ – крутящий момент.

8. Записать условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв}\,max} = \frac{M_{\text{экв}\,max}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma],$$

где $W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32}$ – осевой момент сопротивления круглого сечения вала при изгибе.

Определить диаметр вала: $d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{экв}\,max}}{\pi[\sigma]}}$.

9. Проверить выполнение условия прочности при найденном значении диаметра вала. Найти моменты сопротивления поперечного сечения вала при изгибе $W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32}$ и при кручении $W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{и}}$. Определить в опасном сечении:

- наибольшее нормальное напряжение при изгибе

$$\sigma_{\text{и}\,max} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W_{\text{и}}}$$

- наибольшее касательное напряжение при кручении

$$\tau_{max} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p}.$$

Найти наибольшее эквивалентное напряжение в опасном сечении по третьей теории прочности и сравнить его с допускаемым напряжением:

$$\sigma_{\text{экв}\,max} = \sqrt{\sigma^2_{\text{и}\,max} + 4\tau^2_{max}} \leq [\sigma].$$

Требуется выполнение условия прочности с точностью $\pm$ 5%.

10. Записать ответ.

Задача № 3. На балку с квадратным поперечным сечением длиной l с высоты h падает груз весом P (рис. 8, *а*). Требуется из условия прочности при ударном нагружении найти размер b поперечного сечения балки (рис. 8, *б*). Данные для расчета взять из таблицы согласно варианту. При расчете принять E=2·10^5 МПа.

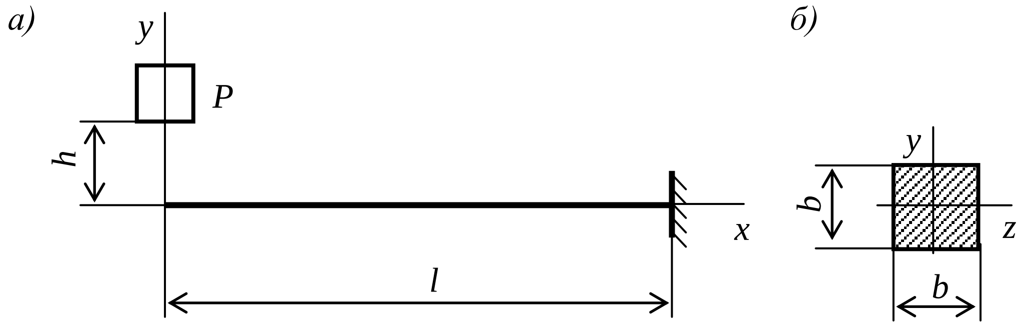


Рис. 8

Таблица 7

Номер строки	I	II	III	IV
	P, Н	h, м	l, м	$[\sigma]$, МПа
1	220	0,2	2,5	180
2	180	0,3	2,8	160
3	150	0,4	3,0	150
4	210	0,5	3,2	170
5	160	0,6	3,4	200
6	240	0,25	3,6	180
7	250	0,35	3,8	150
8	170	0,45	2,6	160
9	190	0,55	2,7	170
0	200	0,36	3,5	140

Указания к задаче № 3

В задаче рассматривается расчет на прочность балки при ударном нагружении. Рекомендуется следующий порядок расчета:

1. Выполнить статический расчёт. Приложить вес груза P к балке статически, найти нормальное напряжение $\sigma_{\text{ст}}$ в опасном сечении балки, определить прогиб $\Delta_{\text{ст}}$ балки в месте падения груза на балку.

2. Найти коэффициент динамичности $k_{\text{д}}$ по формуле:

$$k_{\text{д}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

3. Из условия прочности при ударном нагружении определить размер b квадратного поперечного сечения балки:

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{д}}\sigma_{\text{ст}} \leq [\sigma].$$

4. Проверить выполнение условия прочности при ударном нагружении, используя полную формулу для коэффициента динамичности: $k_{\text{д}} = 1 + +\sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}$

5. При невыполнении условия прочности с использованием полного выражения для $k_{\text{д}}$ уточнить численное значение размера b. Погрешность выполнения условия прочности $\pm 5\%$:

$$\Delta\sigma = \frac{[\sigma] - \sigma_{\text{д}}}{[\sigma]} \cdot 100\% \leq 5\% .$$

6. Записать ответ.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задание 1

Задача № 1. *Тема задачи*: Проектировочный расчет стержня на прочность и жесткость при растяжении и сжатии.

Для заданного стержня (рис. 9) требуется:

- найти реакцию заделки:
- построить эпюру продольной силы N;
- записать условие прочности;
- найти площадь поперечного сечения стержня;
- определить полное изменение длины стержня Δl.

Численные значения заданных сил и линейных размеров указаны на рис. 9. При расчете принять $[\sigma]$= 180 МПа.

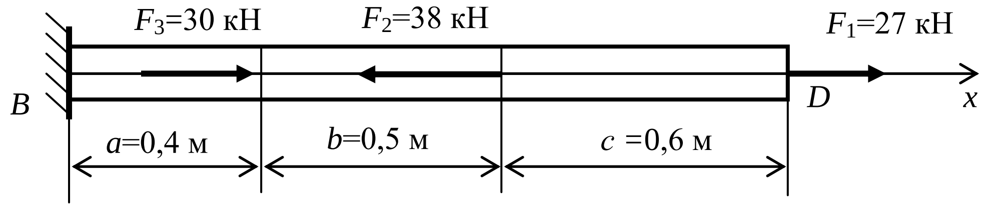


Рис. 9

Решение

1. Изображаем расчетную схему стержня с указанием численных значений сил, линейных размеров (рис. 10). Показываем предварительно направление реакции заделки R_B в положительном направлении оси x.

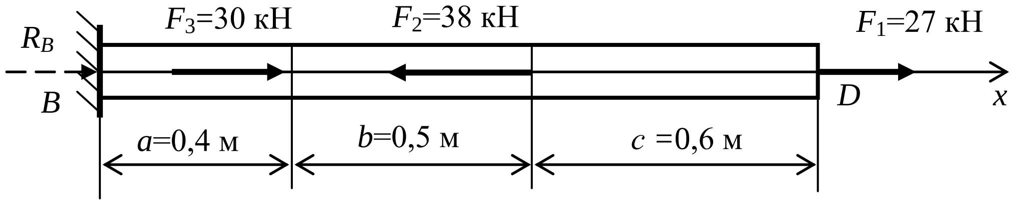


Рис. 10

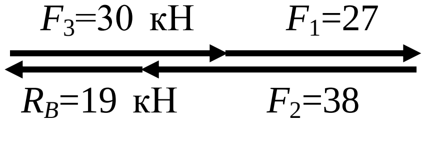
Составляем уравнение равновесия проекций сил на ось x:

$$\sum X = 0;\ F_1 - F_2 + F_3 + R_B = 0.$$

Определяем реакцию заделки:

$$R_B = -F_1 + F_2 - F_3 = -27 + 38 - 30 = -19 \text{ кН}.$$

Знак минус означает, что реакция R_B направлена не вправо, как принимали при составлении уравнения равновесия, а влево. На расчетной схеме для дальнейших расчетов надо указать действительное направление реакции (рис. 11). Правильность определения реакции легко проверить, если сложить силы, направленные вправо (F_1, F_3) и силы, направленные влево (F_2, R_B), Результаты сложения должны быть одинаковые («сколько вправо, столько влево»). Выполним проверку графически:



На расчетной схеме показываем силы, приложенные к стержню и реакцию заделки в действительном направлении (рис. 11; 12,а).

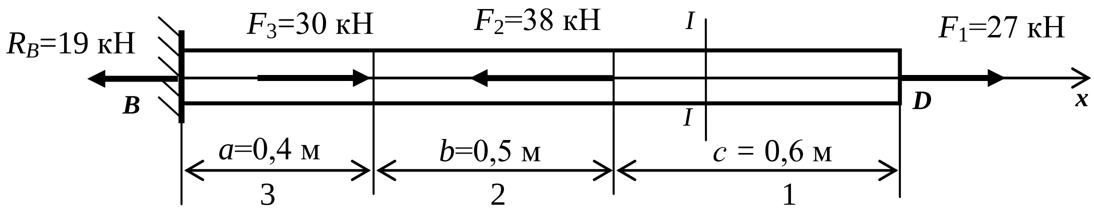
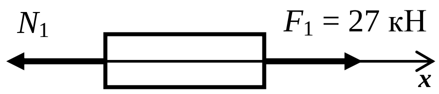


Рис. 11

2. Разбиваем стержень на участки, в нашем случае три участка, номера участков 1, 2, 3 можно проставлять слева направо или справа налево, как на рис. 11. Методом сечений определяем продольную силу на каждом участке.

Участок 1. Проводим мысленно секущую плоскость *I-I* на первом участке стержня (рис. 12, *а*). Рассмотрим отсеченную правую часть стержня. Продольную силу N_1 принимаем положительной и показываем её «от сечения», т. е. считаем первый участок растянутым. Таким же образом неизвестную продольную силу надо изображать на всех участках. Составляем уравнение равновесия для отсеченной правой части стержня:

$$\sum X = 0; \quad F_1 - N_1 = 0;$$

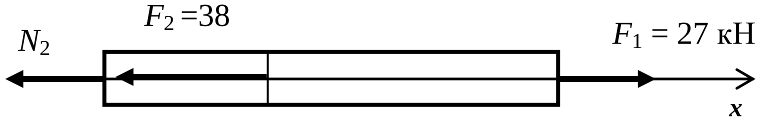


Отсюда $N_1 = F_1 = 27$ кН,

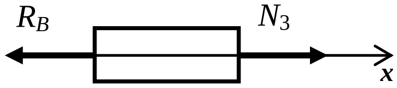
$N_1 > 0$ - растяжение.

Участок 2. Проводим секущую плоскость *II-II* (рис. 12, *а*) на втором участке. Рассмотрим отсеченную правую часть стержня. Уравнение равновесия для отсеченной части стержня: $\sum X = 0$; $F_1 - F_2 - N_2 = 0$;

$N_2 = F_1 - F_2 = 27 - 38 = -11$ кН; $N_2 < 0 -$ сжатие.



Участок 3. Проводим секущую плоскость *III-III* на третьем участке (рис. 12, *а*). Рассмотрим левую отсеченную часть стержня.



Уравнение равновесия для этой части: $\sum X = 0;\ N_3 - R_B = 0;$

$N_3 = R_B = 19$ кН; $N_3 > 0$ – растяжение.

По найденным значениям продольных сил N_i строим эпюру N (рис. 12, *б*). Численные значения продольных сил на участках стержня откладываем в выбранном масштабе.

3. Условие прочности при растяжении – сжатии стержня при постоянной площади поперечного сечения $A = const$:

$$|\sigma|_{max} = \frac{|N|_{max}}{A} \le [\sigma].$$

Здесь $|\sigma|_{max}$ – наибольшее по модулю нормальное напряжение;

$|N|_{max}$ - наибольшая по модулю продольная сила;

A – площадь поперечного сечения стержня;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала стержня.

Из условия прочности находим площадь поперечного сечения стержня:

$$A \ge \frac{|N|_{max}}{[\sigma]} = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{27 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 1{,}5\ \text{см}^2.$$

4. Определяем нормальные напряжения на участках стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_{x1}}{A} = \frac{27 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 180 \cdot 10^6\ \text{Па} = 180\ \text{МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_{x2}}{A} = \frac{-11 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = -73{,}3 \cdot 10^6\ \text{Па} = -73{,}3\ \text{МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{x3}}{A} = \frac{19 \cdot 10^3}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 126{,}6 \cdot 10^6\ \text{Па} = 126{,}6\ \text{МПа}.$$

На всех участках условие прочности выполнено:

$$\sigma_i \le [\sigma] = 180\ \text{МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (рис. 12, *в*). По виду эпюра нормальных напряжений подобна эпюре продольных сил, но ординаты в масштабе равны нормальным напряжениям в соответствующих сечениях стержня.

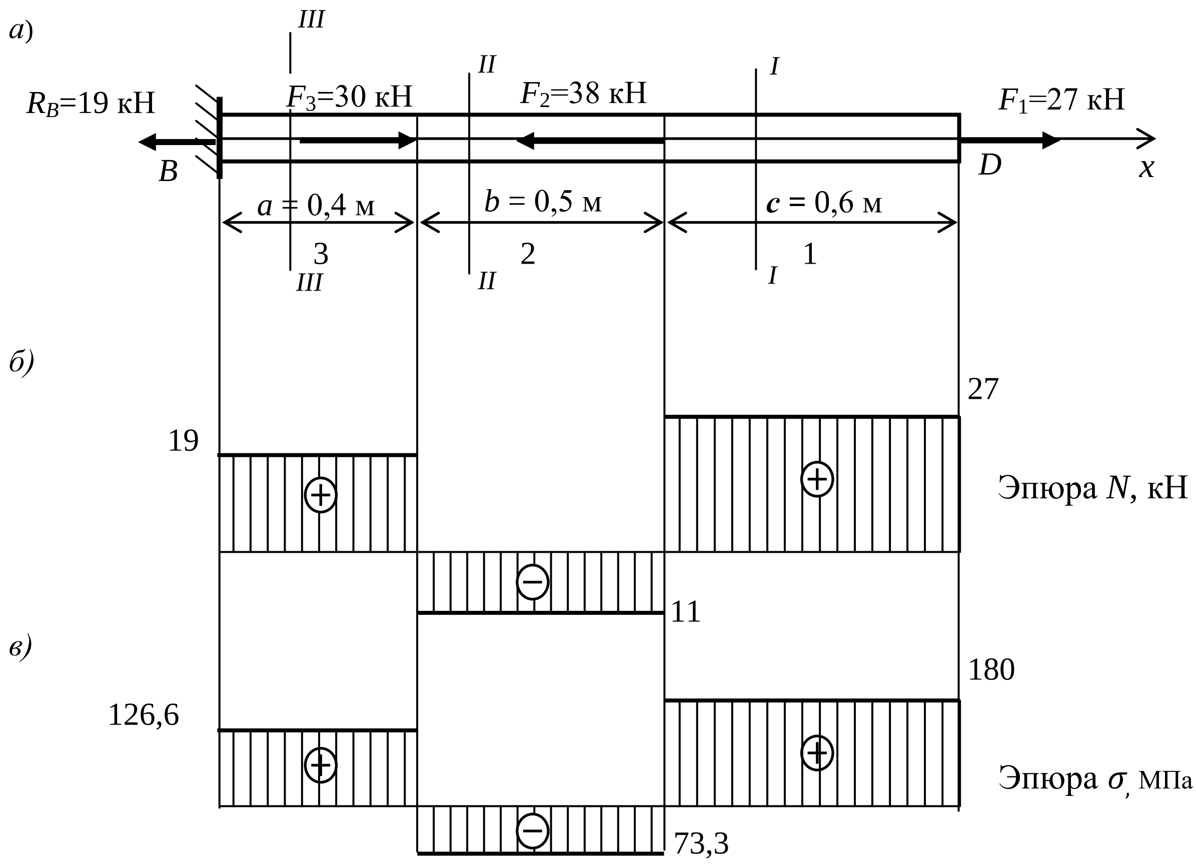


Рис. 12

5. Определяем изменение длины на участках стержня по формуле

$$\Delta l_i = \frac{N_{xi} l_i}{EA},$$

где EA – жесткость поперечного сечения стержня:

$$EA = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^7 \text{ Н}.$$

Тогда:

$$\Delta l_1 = \frac{N_{x1} l_1}{EA} = \frac{N_{x1} c}{EA} = \frac{27 \cdot 10^3 \cdot 0{,}6}{3 \cdot 10^7} = 5{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}54 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_{x2} l_2}{EA} = \frac{N_{x1} b}{EA} = \frac{-11 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5}{3 \cdot 10^7} = -1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0{,}18 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_{x3} l_3}{EA} = \frac{N_{x1} a}{EA} = \frac{19 \cdot 10^3 \cdot 0{,}4}{3 \cdot 10^7} = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}25 \text{ мм}$$

6. Находим полное изменение длины стержня:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = 0{,}54 - 0{,}18 + 0{,}25 = 0{,}61 \text{ мм}.$$

Расчетную схему стержня и эпюры строим на одном листе формата А-4 (рис. 12), на схеме и эпюрах указываем численные значения заданных величин и величины, полученные в результате расчета.

Ответ: Площадь поперечного сечения стержня A = 1,5 см^2. Условие прочности выполнено на всех участках стержня. Изменение длины стержня (удлинение) $\Delta l = 0{,}61$ мм.

Задача № 2. *Тема задачи:* Проектировочный расчет стержня (вала) на прочность и жесткость при кручении.

Для заданного вала требуется:

- определить момент M_0;

- найти крутящие моменты на участках вала и построить эпюру $M_к$;

- определить диаметр вала из условия прочности при кручении;

- определить наибольшие касательные напряжения на участках вала и построить эпюру τ_{max} ;

- найти углы закручивания на участках вала φ_j и полный угол закручивания φ.

Численные значения заданных моментов и линейных размеров показаны на рис. 13, *а*. При расчете принять $[\tau] = 30$ МПа.

Решение

1. Изображаем схему вала с указанием численных значений линейных размеров и заданных моментов (рис. 13, *а*).

2. Находим момент заделки M_0 из уравнения внешних моментов относительно оси x:

$$\sum M_{\boldsymbol{x}} = 0;\ \ -M_1 + M_2 + M_4 + M_0 = 0;$$

отсюда $M_0 = M_1 - M_2 - M_4 = 600 - 900 - 200 = -500$ Н · м.

Знак минус означает, что момент M_0 направлен не против хода часовой стрелки, а по ходу часовой стрелки, *учтем это на схеме, покажем момент M_0 в действительном направлении.*

3. Разбиваем вал на участки, обозначаем их номерами 1, 2, 3.

4. На каждом участке проводим мысленно секущую плоскость (рис. 13, *б*) и составляем уравнение равновесия моментов относительно оси x для отсеченных частей вала, включая в эти уравнения крутящие моменты на каждом участке.

Участок 1: $\sum M_x = 0;\ -M_1 + M_{\text{к}1} = 0$ - для левой отсеченной части $M_{\text{к}1} = M_1 = 600$ Н · м.

Участок 2: $\sum M_x = 0;\ -M_1 + M_2 + M_{\text{к}2} = 0;$

$$M_{\text{к}2} = M_1 - M_2 = 600 - 900 = -300 \text{Н} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 $\sum M_x = 0;\ -M_0 - M_{к3} = 0$ - для правой отсеченной части, $M_{\text{к}3} = -M_0 = -500$ Н · м.

Отсеченные части вала показаны на рис.13*, б.*

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рис. 13, *в*). Наибольшее значение крутящего момента

$$M_{\text{к}max} = 600 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

5. Условие прочности при кручении

$$\tau_{max} = \frac{|M_\text{к}|_{max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Здесь $W_P = \frac{\pi d^3}{16}$ - полярный момент сопротивления сечения вала.

6. Из условия прочности найдем W_P:

$$W_p \geq \frac{|M_\text{к}|_{max}}{[\tau]} = \frac{600}{30 \cdot 10^6} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 20 \text{ см}^3.$$

Отсюда $d \geq \sqrt[3]{\frac{16W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 20}{3{,}14}} = \sqrt[3]{101{,}91} = 4{,}67$ см.

Диаметр вала можно также найти по формуле:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16|M_к|_{max}}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 600}{3{,}14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 4{,}67 \cdot 10^{-2}\text{м} = 4{,}67 \text{ см} =$$
$$= 46{,}7 \text{ мм}.$$

7. Находим значения наибольших касательных напряжений на участках вала для расчетного значения диаметра d = 4,67 см.

Участок 1: $\tau_{max\,1} = \frac{M_{к1}}{W_p} = \frac{600}{20 \cdot 10^{-6}} = 30 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30 \text{ МПа}.$

Участок 2: $\tau_{max\,2} = \frac{M_{к2}}{W_p} = \frac{-300}{20 \cdot 10^{-6}} = -15 \cdot 10^6 \text{Па} = -15\text{МПа}.$

Участок 3: $\tau_{max\,3} = \frac{M_{к3}}{W_p} = \frac{-500}{20 \cdot 10^{-6}} = -25 \cdot 10^6 \text{ Па} = -25 \text{ МПа}.$

По найденным значениям строим эпюру наибольших касательных напряжений на участках вала (рис. 13, *г)*. Все значения напряжений на этой эпюре соответствуют условию прочности при кручении:

$$\left|\tau_j\right|_{max} \leq [\tau],$$

j – номер участка.

Условие прочности выполнено на всех участках.

8. Находим углы закручивания (углы поворота сечений) на каждом участке вала по формуле:

$$\varphi_j = \frac{M_{кj}\, l_j}{GI_p}.$$

Здесь l_j – длина участка;

G – модуль сдвига, для стали $G = 8 \cdot 10^4$ МПа;

$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = W_p \cdot \frac{d}{2} = \frac{3{,}14 \cdot 4{,}67^4}{32}$ =46,67 см^4 – полярный момент инерции круглого поперечного сечения вала;

$GI_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 46{,}67 \cdot 10^{-8} = 373{,}36 \cdot 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 -$ жесткость поперечного сечения вала при кручении.

Участок 1: $\varphi_1 = \frac{600 \cdot 0{,}22}{373{,}36 \cdot 10^2} = 0{,}354 \cdot 10^{-2}\text{рад} = 0{,}20\ \text{град.}$

Участок 2: $\varphi_2 = \frac{-300 \cdot 0{,}35}{373{,}36 \cdot 10^2} = -0{,}281 \cdot 10^{-2}\text{рад} = -0{,}16\ \text{град.}$

Участок 3: $\varphi_3 = \frac{-500 \cdot 0{,}18}{373{,}36 \cdot 10^2} = -0{,}241 \cdot 10^{-2}\text{рад} = -0{,}14\ \text{град.}$

9. Находим полный угол поворота правого сечения вала относительно левого сечения:

$$\varphi = \sum \varphi_j = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0{,}20 - 0{,}16 - 0{,}14 = -0{,}1\ \text{град.}$$

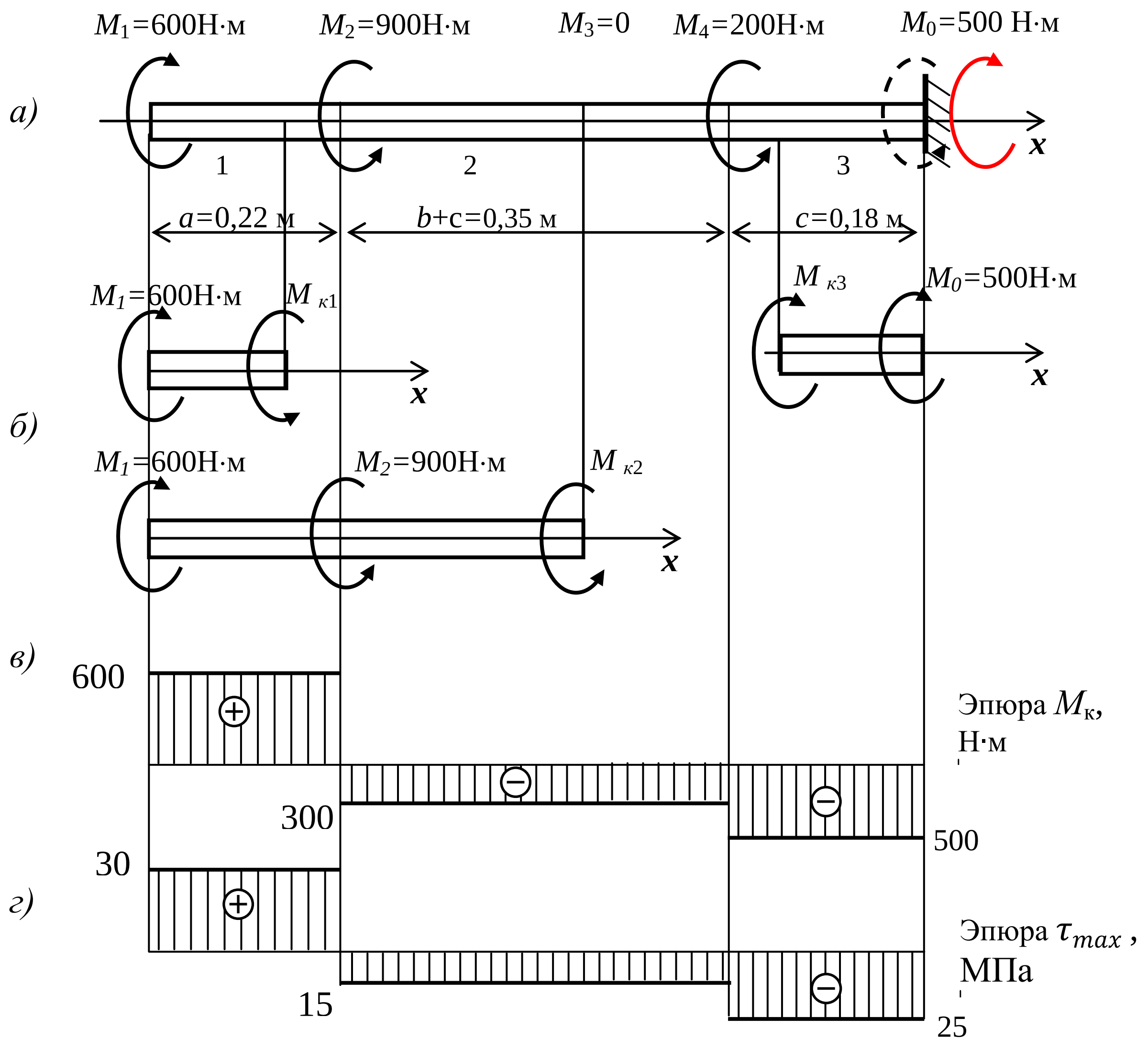


Рис. 13

Ответ: Диаметр вала d = 4,67 см;
полный угол закручивания φ = – 0,153 град.

Задача № 3. *Тема задачи*: проектировочный расчет на прочность стержня (балки) при прямом изгибе.

Условие задачи см. задание 1, задача № 3. Схема (а) (двухопорная консольная балка), численные значения заданных величин указаны на схеме балки (рис. 14).

Решение

1. Изображаем расчетную схему балки с указанием численных значений нагрузки и линейных размеров. Распределенную нагрузку приводим к равнодействующей $Q = qb$.

2. Находим реакции опор. Составляем уравнения равновесия моментов относительно точек A и B (рис. 14):

$$\sum M_A = 0;\ \ Fa + M - Q\frac{b}{2} + R_B b = 0;$$

$$R_B = \tfrac{1}{b}\left(-Fa - M + Q\tfrac{b}{2}\right) = \tfrac{1}{3}\left(-8\cdot 1{,}5 - 15 + 30\cdot\tfrac{3}{2}\right) = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;\ \ F(a+b) + Q\frac{b}{2} + M - R_A a = 0;$$

$$R_A = \frac{1}{b}\left(F(a+b) + Q\frac{b}{2} + M\right) = \frac{1}{3}\left(8(1{,}5+3) + 30\frac{3}{2} + 15\right) = 32 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций опор:

$\sum Y = 0; -F + R_A - Q + R_B = 0;\ -8 + 32 - 30 + 6 = 0; 0 = 0 -$ Реакции опор найдены верно. Реакции опор показываем на схеме балки в действительном направлении (рис.15, *а*).

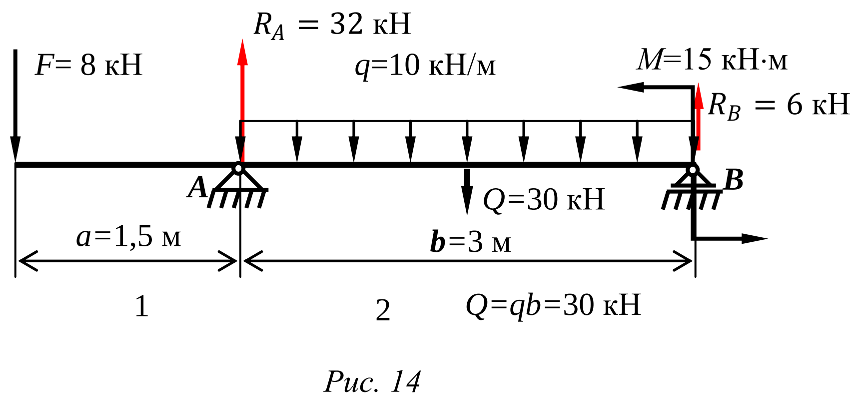


Рис. 14

3. Разбиваем балку на участки – два участка, номера участков (1, 2) указываем на схеме балки.

4. На каждом участке методом сечений определяем поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z. Для отсеченной части балки составляем уравнения равновесия проекций сил на ось y и уравнения равновесия моментов относительно оси z, проходящей через поперечное сечение (см. рис.15, *б*).

Участок 1 $(0 \le x_1 \le a)$:

$$\sum Y = 0;\ \ -Q_y - F = 0;\ \ Q_y = -F = -8 \text{ кН};$$

$$\sum M_z = 0;\ \ M_{z1} + Fx_1 = 0;\ \ M_{z1} = -Fx_1;$$

$M_{z1}(0) = 0;\ \ M_{z1}(a) = M_{z1}(1{,}5) = -8 \cdot 1{,}5 = -12\text{кН·м}.$

Участок 2 $(0 \le x_2 \le b)$: координату x_2 откладываем от сечения B справа налево

$$\sum Y = 0;\ \ Q_{y2} + R_B - qx_2 = 0;$$

$$Q_{y2} = -R_B + qx_2;$$

$$Q_{y2}(0) = -R_B = -6 \text{ кН, в сечении В};$$

$$Q_{y2}(b) = Q_{y2}(3) = -R_B + qb =$$

$$-6 + 10 = 24 \text{ кН, в сечении } A.$$

$$\sum M_z = 0;\ \ M + R_B\, x_2 - qx_2 \frac{x_2}{2} - M_{z2} = 0;$$

$$M_{z2} = M + R_B x_2 - \frac{q{x_2}^2}{2};$$

$$M_{z2}(0) = M = 15 \text{ кН·м};$$

$$M_{z2}(b) = M + R_B b - \frac{qb^2}{2} = 15 + 6 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 3^2}{2} = -12 \text{ кН·м}.$$

Определим положение сечения на участке 2, в котором поперечная сила Q_{z2} равна нулю, а изгибающий момент M_{z2} имеет максимальное значение:

$$Q_{y2} = 0 \text{ при } x_2^* = \frac{R_B}{q} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ м};$$

$$M_{z2max} = M + R_B x_2^* - \frac{q x_2^{*2}}{2} = 15 + 6 \cdot 0{,}6 - \frac{10 \cdot 0{,}6^2}{2} = 16{,}8 \text{ кН·м}.$$

По полученным значениям строим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_z (рис. 15, *в*, *г*). Положительные значения откладываем на эпюрах вверх от базовой линии (оси эпюры), отрицательные - вниз, при этом эпюру M_z строим на сжатых волокнах.

5. По эпюре изгибающего момента находим опасное сечение:

$$|M_z|_{max} = 16{,}8 \text{ кН·м.}$$

6. Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \le [\sigma].$$

Отсюда

$$W_z \ge \frac{|M_z|_{max}}{[\sigma]} = \frac{16{,}8 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 105 \cdot 10^6 \text{ м}^3 = 105 \text{ см}^3$$

7. По найденному значению осевого момента сопротивления W_z находим размеры заданного поперечного сечения балки.

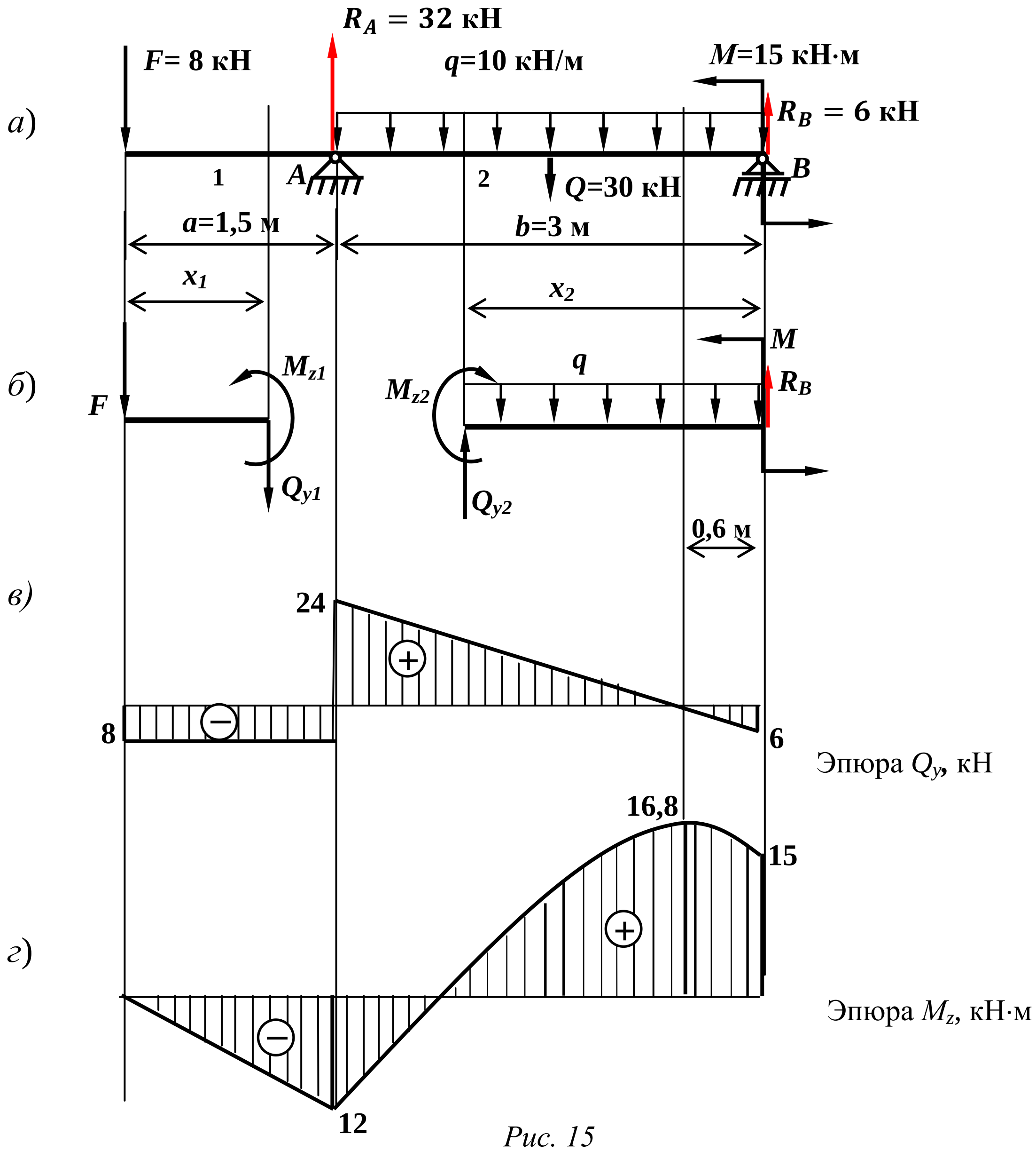


Рис. 15

По таблице (приложение 3) подбираем номер двутавровой балки, ближайшее большее значение осевого момента сопротивления:

$$W_z = W_{x\,\text{табл}} = 109\ \text{см}^3,$$

что соответствует двутавру № 16.

8. Проверим выполнение условия прочности. Наибольшее нормальное напряжение для выбранной балки № 16:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} = \frac{16{,}8\cdot 10^3}{109\cdot 10^{-6}} = 154{,}1\cdot 10^6\ \text{Па} = 154{,}1\ \text{МПа}.$$

Определим отклонение нормального напряжения от допускаемого:

$$\Delta\sigma = \frac{160 - 154{,}1}{160}100\% = 3{,}7\%.$$

Балка недогружена на 3,7%, что допускается ($\Delta\sigma \leq \pm 5\%$).

Ответ: Двутавровая балка № 16.

Задача № 3, схема б, рис. 16 (консоль).

Порядок решения см. задачу № 3, схема а. Численные значения заданных сил и моментов, линейных размеров показаны на рис. 16, *а*.

Решение

1. Изображаем заданную балку (консоль) с указанием численных значений силы F и момента M, линейных размеров (рис. 16, *а*).

2. Находим реакции заделки из уравнений равновесия:

$$\sum M_A = 0;\ -M + F(a+c) + M_A = 0.$$

Момент заделки $M_A = M - F(a+c) = 20 - 12(2+3) = -40$ кН·м; $-\ M_A$ направлен по ходу часовой стрелки (рис. 16, *а)*.

$\sum Y = 0;\ \ F - R_A = 0;\ R_A = F = 12$ кН $-$ реакция R_A направлена вниз, как показано на рис. 16, *а*.

Проверку правильности определения реакций заделки можно выполнить, составив уравнение равновесия моментов относительно какой-либо точки (B или D) и убедившись в его выполнении:

$$\sum M_B = 0; R_A(a+c) - M - M_A = 0; 12(2+3) - 20 - 40 = 0;$$

0 = 0 – реакции найдены верно.

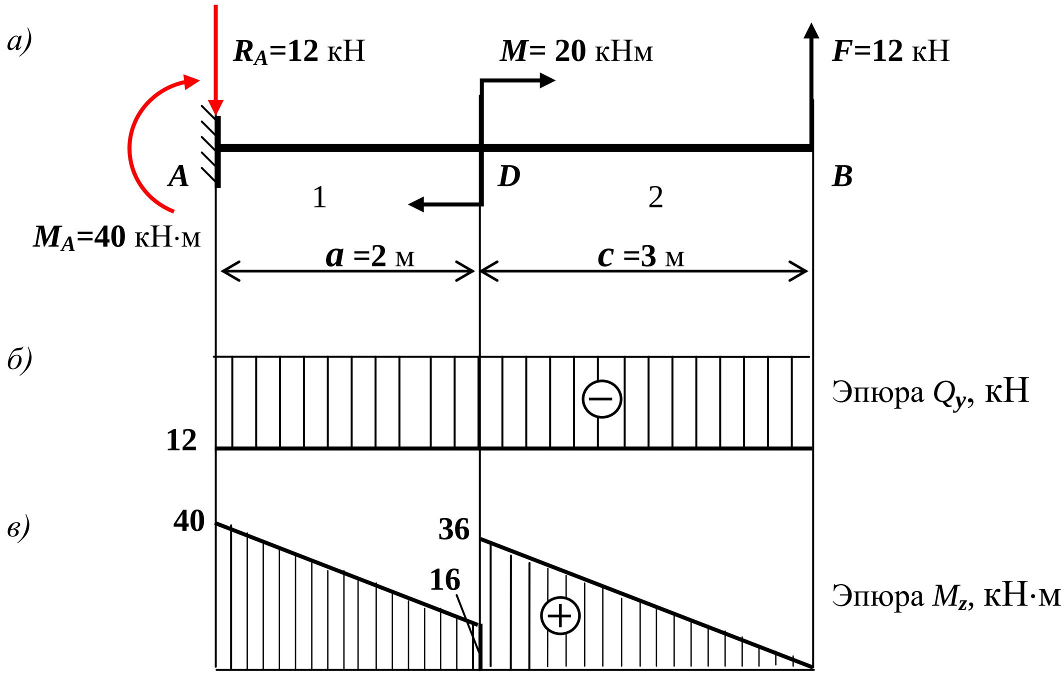


Рис. 16

3. Разбиваем балку на участки, на схеме балки указываем номера участков – 1, 2 (рис. 16, *а*).

4. На каждом участке методом сечений определяем внутренние усилия – поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z.

Участок 1: $0 \leq x_1 \leq a = 2\text{м}$; $\quad Q_{y1} = -R_A = -12$ кН;

$M_{z1} = M_A - R_A \cdot x_1 = 40 - 12 \cdot x_1$; $\quad M_{z1}(0) = M_A = 40$ кН·м

$M_{z1}(a) = M_A - R_A \cdot a = 40 - 12 \cdot 2 = 16$ кН·м.

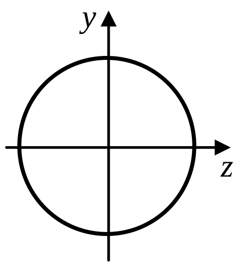
Участок 2: : $0 \leq x_2 \leq \text{c} = 3$ м; $\quad Q_{y2} = -F = -12$ кН $= Q_{y1}$.

$M_{z2} = F \cdot x_2 = 12 \cdot x_2$; $\qquad M_{z2}(0) = 0$;

$M_{z2}(c) = F \cdot c = 12 \cdot 3 = 36$ кН·м.

5. По эпюре M_z находим наибольший изгибающий момент

$$M_{z\,max} = 40 \text{ кН·м}.$$



6. Условие прочности при изгибе

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} \le [\sigma].$$

Здесь $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ - осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения вала.

Условие прочности можно записать в виде:

$$|\sigma|_{max} = \frac{32|M_z|_{max}}{d^3\pi} \le [\sigma],$$

отсюда получим:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32|M_z|_{max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 40 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 34{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{м} = 34{,}4\ \text{см}.$$

8. Проверим выполнение условия прочности.

Осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения балки

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 34{,}4^3}{32} = 3994{,}4\ \text{см}^3.$$

Наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении балки

$$\sigma_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{W_z} = \frac{40 \cdot 10^3}{3994{,}4 \cdot 10^{-6}} = 10{,}01 \cdot 10^6\ \text{Па} = 10{,}01\ \text{МПа}.$$

Условие прочности выполнено, $\sigma_{max} \approx [\sigma]$. Наибольшее нормальное напряжение незначительно отличается от допускаемого ($\Delta\sigma \approx 0{,}1$ %), что объясняется округлением результатов численных расчетов.

Ответ: Диаметр круглого сечения балки d = 34,4 см.

Задача № 4. *Тема задачи*: Геометрические характеристики плоских сечений.

Для заданного плоского сечения (рис. 17) требуется:

- определить положение центра тяжести;
- построить главные центральные оси;
- определить главные центральные моменты инерции.

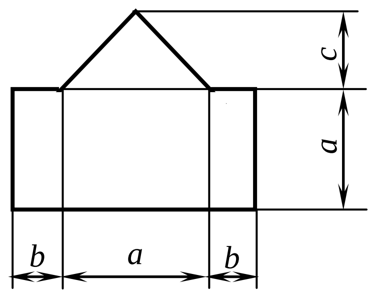


Рис. 17

Данные для расчета: a = 80 мм, b= 20 мм , c = 60 мм.

Решение

1. Изображаем заданное сечение в масштабе (рис. 18). Для удобства расчета размеры указываем в сантиметрах. На рисунках 18, 19 последовательно показан порядок построений, необходимых для расчета. При выполнения задания все построения можно изображать на одном рисунке.

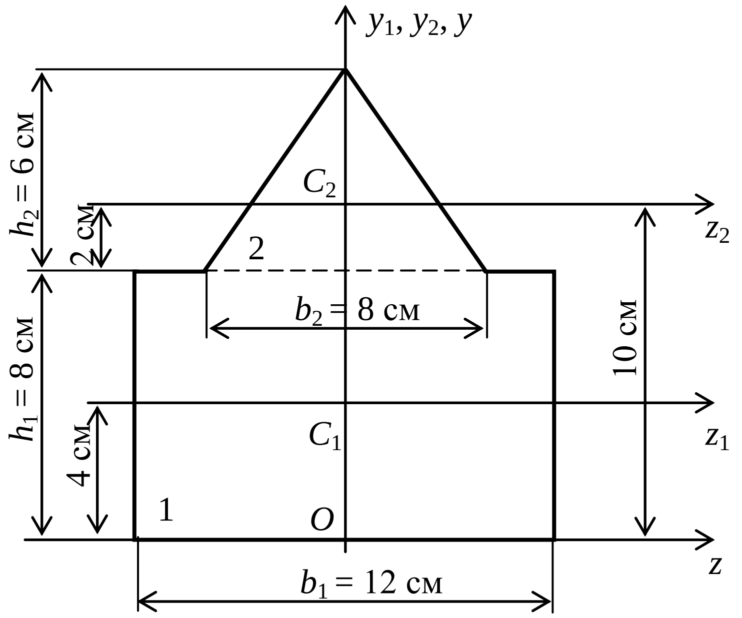


Рис.18

2. Разбиваем сечение на две части – прямоугольник 1 и треугольник 2 (рис. 18). Для каждой части показываем положение центра тяжести (точки C_1 и C_2) и главные центральные оси – для прямоугольника оси $z_1 C_1 y_1$, для треугольника – $z_2 C_2 y_2$.

3. Выбираем вспомогательную систему координат *zOy* (рис. 18) относительно которой будем определять положение центра тяжести сечения *C*, ось *y* совмещаем с осью симметрии сечения, а ось *z* – с основанием сечения. По таблице (приложение 2) находим формулы, необходимые для расчета.

4. Определяем координаты центра тяжести сечения:

- площади частей сечения:

$$A_1 = b_1 h_1 = 12 \cdot 8 = 96 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{1}{2} b_2 h_2 =\cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ см}^2.$$

- координаты центров тяжести частей 1 и 2 в осях системы координат *zOy* (рис. 19): $z_{C1} = z_{C2} = 0$; $y_{C1} = 4$ см; $y_{C2} = 10$ см.

- определяем координаты центра тяжести заданного сечения в осях системы координат *zOy*:

$$z_C = 0; \quad y_C = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{96 \cdot 4 + 24 \cdot 10}{96 + 24} = 5{,}2 \text{ см};$$

- показываем на схеме координату y_C и ценр тяжести точку C (рис. 19).

5. Проводим главные центральные оси сечения $z_c C y_c$.

6. Вычисляем главные центральные моменты инерции симметричного сечения сечения относительно главных центральных осей z_C и y_C:

- расстояния между главной центральной осью z_C и осями z_1, z_2

$$a_1 = 5{,}2 - 4 = 1{,}2 \text{ см}; \; a_2 = 10 - 5{,}2 = 4{,}8 \text{ см};$$

- расстояния $b_1 = b_2 = 0$, так как оси y_1, y_2 и y_C совпадают;

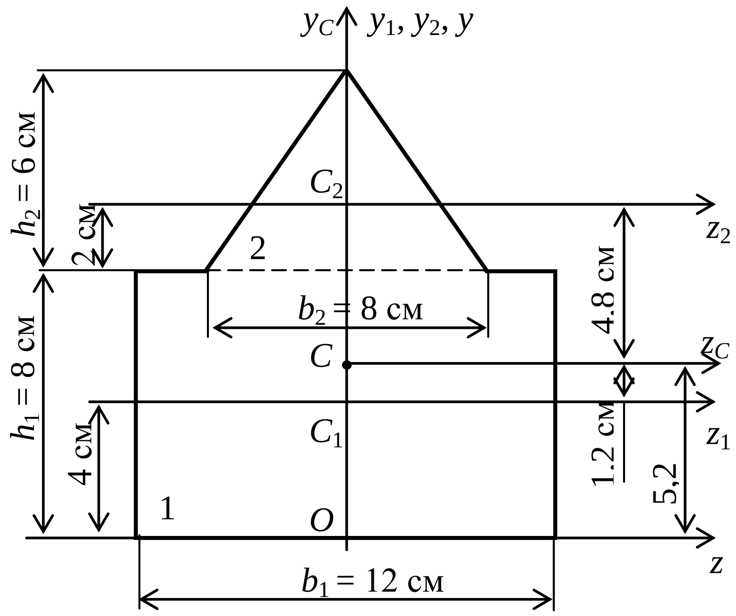


Рис. 19

- главные центральные моменты инерции сечения:

$$I_{z_C}=\sum\left(I_{z_i}+a_i^2A_i\right)=\left(\frac{b_1h_1^3}{12}+a_1^2A_1\right)+\left(\frac{b_2h_2^3}{36}+a_2^2A_2\right)=$$

$$=\left(\frac{12\cdot 8^3}{12}+1{,}2^2\cdot 96\right)+\left(\frac{8\cdot 6^3}{36}+4{,}8^2\cdot 24\right)=1251{,}2\ \text{см}^4;$$

$$I_{y_C}=\sum\left(I_{y_i}+b_i^2A_i\right)=\frac{b_1^3h_1}{12}+\frac{b_2^3h_2}{48}=\frac{12^3\cdot 8}{12}+\frac{8^3\cdot 6}{48}=1216\ \text{см}^4.$$

Ответ: Центр тяжести сечения точка C и главные центральные оси z_CCy_C показаны на рис. 19, главные центральные моменты инерции $I_{z_C}=1251{,}2\ \text{см}^4$; $I_{y_C}=1216\ \text{см}^4$.

Задание 2

Задача №1. *Тема задачи*: Расчет на прочность балки при косом (сложном) изгибе.

Балка с поперечным сечением в виде прямоугольника с соотношением размеров $h/b=k$ (h – высота, b – ширина) нагружена силами (F, q) и моментами (M), действующими в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 20). Требуется:

- определить внутренние усилия в поперечных сечениях балки в главных плоскостях;

- построить эпюры внутренних усилий;

- из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры поперечного сечения балки b и h;

- проверить выполнение условия прочности по нормальным напряжениям при найденных размерах;

- построить эпюру нормальных напряжений σ в опасном сечении .

Данные для расчета: a = 4 м; c = 2 м; k = 2; F = 12 кН; q = 6 кН/м; k =h/b= 2; M = 16 кНм; $[\sigma]=160$ МПа.

Решение

1. Изображаем расчетную схему балки согласно исходным данным с указанием размеров и нагрузки (рис. 20).

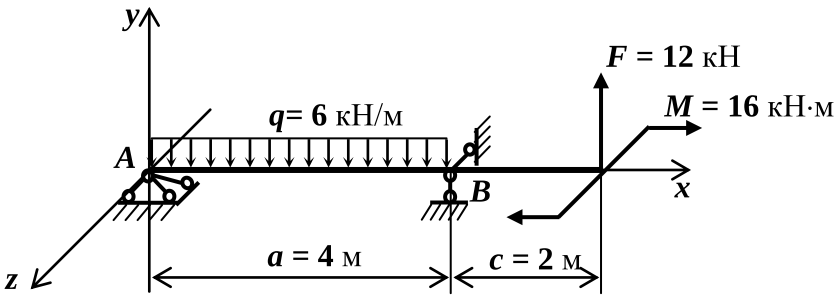


Рис. 20

2. Показываем схему балки в *вертикальной плоскости xy* (рис. 21, *а*).

Реакции опор в плоскости xy находим из уравнений равновесия моментов относительно точек *A* и *B*:

$$\sum M_A = 0;\ \ R_{By}a\ - Q\frac{a}{2} + F(a+b) = 0;$$

$$R_{By} = \frac{1}{a}\left(\frac{Qa}{2} - F(a+b)\right) = \cdots = -6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0;\ \ -R_{Ay}a + Q\frac{a}{2} + Fb = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{a}\left(\frac{Qa}{2} + Fb\right) = \cdots = 18 \text{ кН}.$$

Знак минус реакции R_{By} означает, что реакция направлена не вверх, как приняли при составлении уравнения равновесия, а вниз (рис. 21, *а*). Выполняем проверку правильности определения реакций опор:

$$\sum Y = 0;\quad R_{Ay} - Q - R_{By} + F = 0;\quad 18 - 24 - 6 + 12 = 0; 0 = 0.$$

Реакции опор найдены верно. Реакции опор показываем на расчетной схеме в действительном направлении (красные векторы).

Определяем поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_z на участках балки 1 и 2 в плоскости xy (подробное решение см. пример задание1, задача № 3):

Участок 1, $0 \le x_1 \le a$:

$$Q_{y1} = R_{Ay} - qx_1;$$

$$Q_{y1}(0) = R_{Ay} = 18 \text{ кН};$$

$$Q_{y1}(a) = R_{ay} - qa = 18 - 6 \cdot 4 == -6 \text{ кН};$$

$$M_{z1} = R_{Ay}x_1 - \frac{q{x_1}^2}{2};$$

$$M_{z1}(0) = 0;\ \ M_{z1}(a) = R_{Ay}a - \frac{qa^2}{2} = 18 \cdot 4 - \frac{6 \cdot 4^2}{2} = 24\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Определим положение сечения D, в котором поперечная сила Q_{y1} равна нулю, а изгибающий момент M_{z1} имеет экстремальное значение (максимум) (рис. 21, *а*):

$$Q_{y1} = R_{Ay} - qx_1^* = 0;\ \ x_1^* = \frac{R_{Ay}}{q} = \frac{18}{6} = 3\text{м};$$

Изгибающий момент в этом сечении равен

$$M_{z1}(x_1^*) = R_{Ay}x_1^* - \frac{qx_1^{*2}}{2} = 18 \cdot 3 - \frac{6 \cdot 3^2}{2} = 27\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2, для правой отсеченной части балки $0 \le x_2 \le \text{c}$;

$$Q_{y2} = -F = -12\ \text{кН},$$
$$M_{z2} = Fx_2;\ \ \ M_{z2}(0) = 0;\ \ M_{z2}(\text{c}) = F\text{c} = 12 \cdot 2 = 24\ \text{кН} \cdot \text{м}.$$

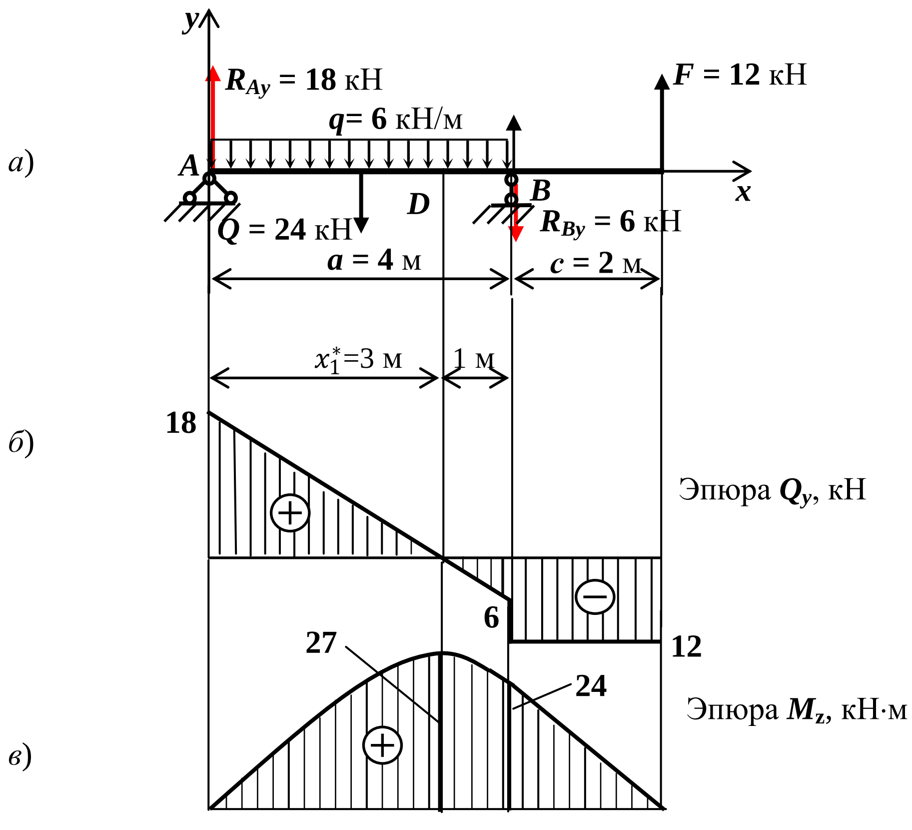


Рис. 21

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_z. Эпюры изгибающих моментов строим на сжатых волокнах (рис.21, *б*, *в*).

В горизонтальной плоскости xz на балку действует пара сил с моментом M = 16 кН·м (рис. 22, *а*). Реакции опор образуют пару сил с таким же по величине моментом, направленным противоположно внешнему моменту M:

$$R_{Az} = R_{Bz} = \frac{M}{a} = \frac{16}{4} = 4\text{кН}.$$

Определяем поперечную силу Q_z и изгибающий момент M_y на участках балки.

Участок 1: $Q_{z1} = -R_{Az} = -4$ кН, $M_{y1} = -R_{Az}x_1$;

$$M_{y1}(0) = 0, \qquad M_{y1}(a) = R_{Az}a = 4 \cdot 4 = 16\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2: $Q_{z2} = 0$; $M_{y2} = -M = -16$ кН · м.

По полученным значениям строим эпюры Q_z и M_y (рис. 22, *б*, *в*).

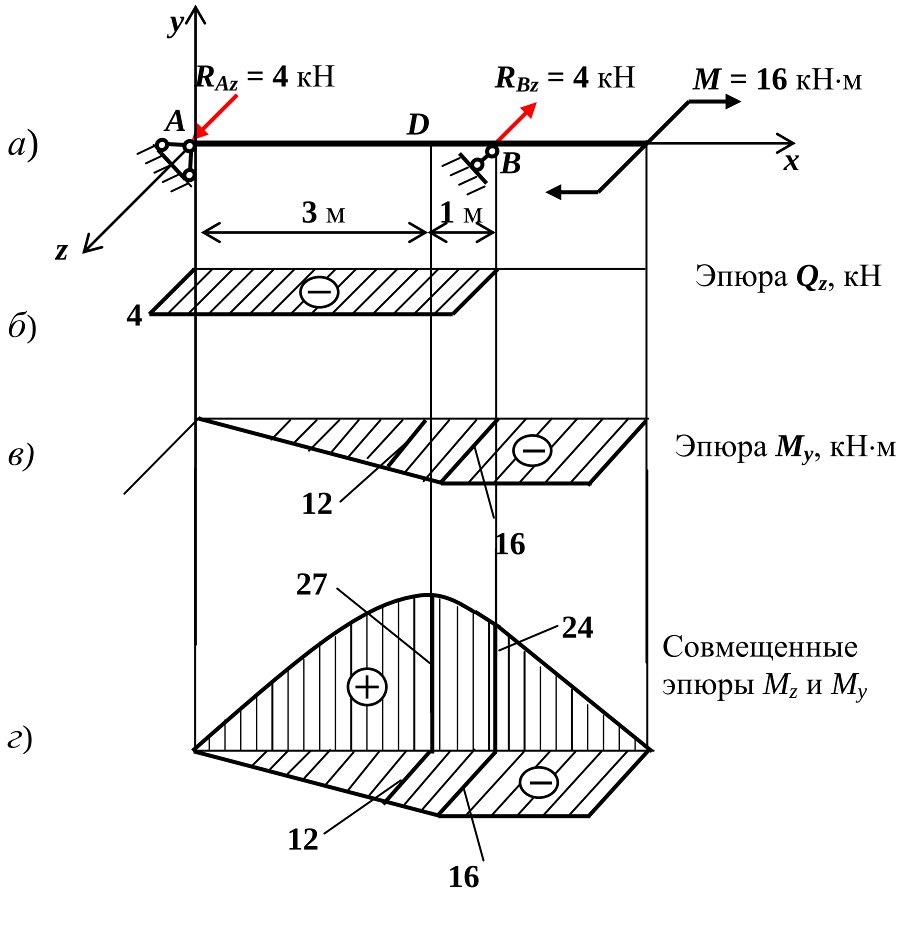


Рис. 22

3. Опасное сечение определим по эпюрам изгибающих моментов. Для наглядности покажем эти эпюры на одной схеме (рис. 22, *г*). Эпюры изгибающих моментов построены на сжатых волокнах.

Рассмотрим опасные сечения *B* и *D*.

Сечение *B*: $M_{zB} = 24$ кН · м, $|M_{yB}| = 16$ кН · м.

Сечение *D*: $M_{zD} = 27$ кН · м, $|M_{yB}| = 12$ кН · м.

4. Начертим поперечное сечение балки и покажем знаки нормальных напряжений от изгибающих моментов (вид на поперечное сечение левой отсеченной части справа – с положительного конца оси *x*) (рис. 23). Знаки напряжений определяем по эпюрам изгибающих моментов – эпюры построены на сжатых волокнах. Определим положение нулевой линии в опасных сечениях

Сечение *B*: $\tan\beta = \frac{M_{yB}}{M_{zB}}\frac{I_z}{I_y} = \frac{M_{yB}}{M_{zB}}k^2 = \frac{16}{24}2^2 = 2{,}67;\ \ \beta = 69{,}5°.$

Сечение *D*: $\beta = 60{,}6°.$

Нулевая линия проходит через четверти сечения с разными знаками нормальных напряжений.

Опасные точки – это точки, наиболее удаленные от нулевой линии. В прямоугольном сечении опасные точки находятся в углах, в которых знаки напряжений от обоих изгибающих моментов совпадают. В нашем случае это точки 1 и 2 (рис. 23). В этих точках величина нормальных напряжений одинакова, в точке 1 напряжение положительное – растяжение, в точке 2 напряжение отрицательное – сжатие.

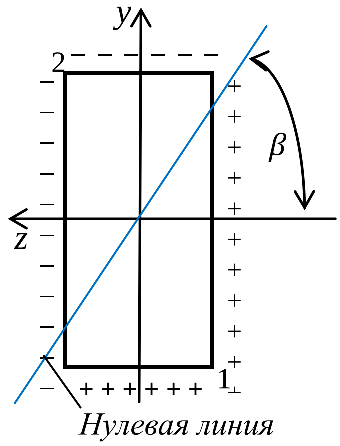


Рис. 23

Геометрические характеристики прямоугольного сечения (рис. 24): $h/b = k$.

Осевые моменты инерции

$I_z = bh^3/12;\ \ I_y = b^3h/12;\ \ I_z/I_y = k^2;$

Осевые моменты сопротивления:

$W_z = bh^2/6 = b^3k^2/6;$

$W_y = b^2h/6 = b^3k/6; \qquad W_z/W_y = k.$

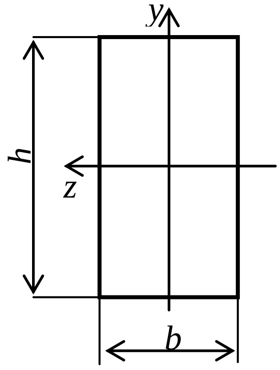


Рис. 24

5. Условие прочности для опасной (угловой) точки прямоугольного сечения:

$$\sigma_{max} = |\sigma_{\text{о.т.}}| = \left|\frac{M_z}{W_z}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right| \le [\sigma].$$

Находим размеры поперечного сечения балки с учетом зависимости между осевыми моментами сопротивления:

$$b \ge \sqrt[3]{\left(\frac{6M_z}{k^2} + \frac{6M_y}{k}\right)/[\sigma]}.$$

Сечение *B*: $b \ge \sqrt[3]{\left(\frac{6\cdot 24}{2^2} + \frac{6\cdot 16}{2}\right)\frac{10^3}{160\cdot 10^6}} = 8{,}07 \cdot 10^{-2}\text{м} = 8{,}07\text{ см}.$

Сечение *D*: $b \ge \sqrt[3]{\left(\frac{6\cdot 27}{2^2} + \frac{6\cdot 12}{2}\right)\frac{10^3}{160\cdot 10^6}} = 7{,}82 \cdot 10^{-2}\text{м} = 7{,}82\text{ см}.$

Выбираем больший размер b =8,07 см, принимаем b=8,1см; h=16,2 см.

6. Определим нормальные напряжения в опасных точках 1 и 2 опасного сечения *B*.

Моменты сопротивления:

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{8{,}1\cdot(2\cdot 8{,}1)^2}{6} = 354{,}3\text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{b^2 h}{6} = \frac{8{,}1^2\cdot 2\cdot 8{,}1}{6} = 177{,}15\text{ см}^3.$$

Нормальное напряжение в опасных точках 1 и 2:

$$\sigma_1 = \sigma_{max} = \frac{M_{zB}}{W_z} + \frac{M_{yB}}{W_y} = \frac{24\cdot 10^3}{354{,}3\cdot 10^{-6}} + \frac{16\cdot 10^3}{177{,}15\cdot 10^{-6}} =$$

$= (67{,}7 + 90{,}3)\cdot 10^6$ Па = 158 МПа.

$\sigma_2 = -158$ МПа.

Напряжения в опасных точках меньше допускаемого напряжения на 2 МПа, недогружение составляет 1,2%, что допустимо. Несовпадение расчетного значения наибольшего напряжения и допускаемого напряжения возникает за счет округления численных значений размеров сечения.

Эпюра нормальных напряжений в сечении B показана на рис. 25.

Ответ: Размеры прямоугольного сечения b=8,1см; h=16,2 см.

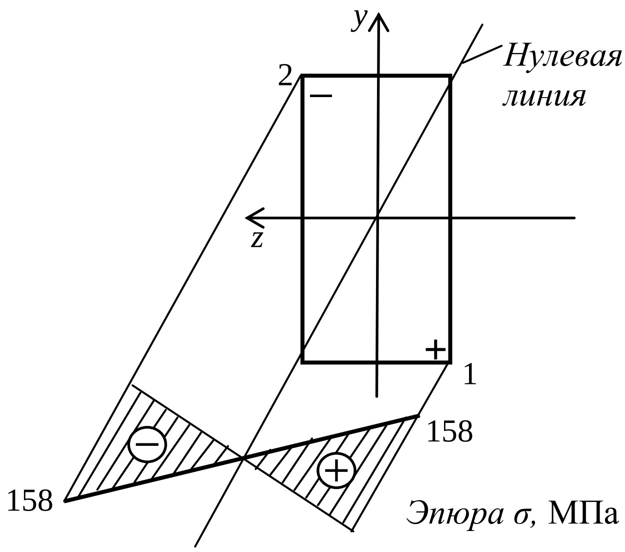


Рис. 25

Задача №2. *Тема задачи*: Расчет на прочность стержня (вала) при изгибе с кручением. Требуется: определить диаметр вала d.

Данные для расчета: схема вала (рис. 26); передаваемая мощность P =15 кВт; угловая скорость вращения вала n = 160 об/мин; D_1 =380 мм, D_2 =180 мм, a = 0,3 м, b = 0,2 м, c = 0,2м; $[\sigma] = 70$ МПа.

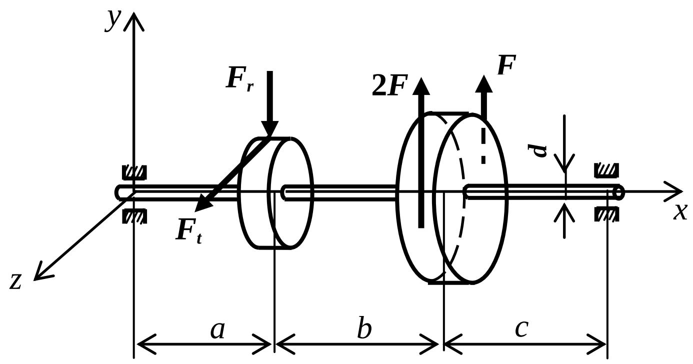


Рис.26

Решение

1. Изображаем схему вала согласно варианту (рис. 28, *а*).
2. Определяем момент *М,* приложенный к шкиву от ремня

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 15 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 160} = 896 \text{ Нм} = 0{,}896 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Определяем силу натяжения ремня, D_1 = 380 мм = 0,38 м:

$$F = \frac{2M}{D_1} = \frac{2 \cdot 896}{0,38} = 4716 \text{ Н} = 4,716 \text{ кН} \approx 4,72 \text{ кН}.$$

$3F$ = 14,16 кН.

4. Определяем силы, приложенные к колесу:

- окружная сила

$$F_t = \frac{2M}{D_2} = \frac{2 \cdot 896}{0,18} = 9956 \text{ Н} = 9,956 \text{ кН} \approx 9,96 \text{ кН}.$$

- радиальная сила

$$F_r = F_t tg\alpha = 9,96 \cdot 0,364 = 3625 \text{ Н} \approx 3,63 \text{ кН}.$$

Здесь $\alpha = 20° -$ угол зацепления зубчатой передачи,

$$tg\,20° = 0,364$$

Вид на шкив и колесо с положительного конца оси x (справа) показан на рис. 27.

5. Составим расчетную схему вала. Приводим силы к оси вала. Точки приложения сил переносим на ось вала x, добавляя моменты присоединенных пар, равных по величине моменту *М*. Составляем расчетную схему вала (рис. 28, *б*).

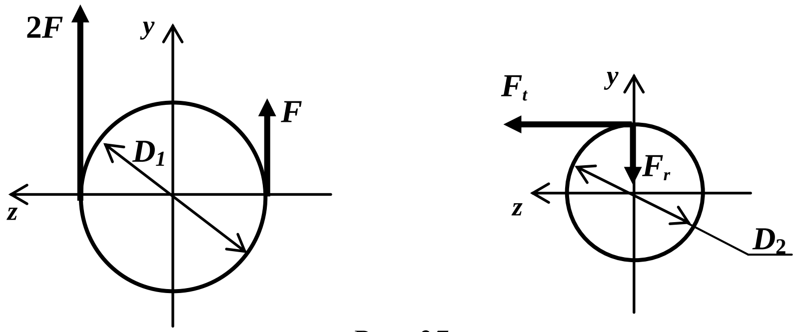


Рис. 27

6. Определяем реакции опор из уравнений равновесия моментов относительно точек A и B:

Плоскость xy: $\sum M_A = 0; \quad -F_r a + 3F(a+b) + R_{By}(a+b+c) = 0;$

$\sum M_B = 0; \quad F_r\,(b+c) - 3Fc - R_{Ay}(a+b+c) = 0.$

Подставляя численные значения сил и линейных размеров в уравнения, найдем вертикальные реакции опор:

$R_{Ay} = -1,97$ кН; $R_{By} = -8,56$ кН.

Знаки минус означают, что реакции направлены не вверх, как принимали при составлении уравнений, а вниз. На расчетной схеме показываем реакции в действительном направлении, т. е. вниз (рис. 28, *б*). Выполняем проверку правильности определения реакций, составляя уравнение проекций сил на ось y:

$$\sum Y = 0; \quad 3F - F_r - R_{Ay} - R_{By} = 0.$$

Подставляя численные значения сил и реакций, убеждаемся в правильности определения вертикальных реакций опор.

Плоскость xz. В этой плоскости к валу приложена только одна сила F_t, т.е. схема балки типовая [4, с. 60].

Определим реакции R_{Az} и R_{Bz} из выражений:

$$R_{Az} = \frac{F_t \cdot (b + c)}{a + b + c}, \quad R_{Bz} = \frac{F_t \cdot a}{a + b + c}.$$

Подставляя численные значения сил и линейных размеров, найдем: R_{Az} = 5,69 кН, R_{Bz}=4,27 кН.

Показываем реакции на расчетной схеме в действительном направлении.

7. Внутренние усилия на участках вала находим так же, как и в выше рассмотренных задачах, при прямом изгибе – см. решение задачи № 3, задание 1, при кручении – см. решение задачи № 2, задание 1. Строим эпюры изгибающих моментов. Рассматриваем вал как двухопорную балку, нагруженную сосредоточенными силами в двух плоскостях. Эпюры изгибающих моментов имеют вид наклонных прямых по всей длине балки. Изгибающий момент в сечении балки равен сумме моментов внешних сил, приложенных левее или правее данного сечения. Учитываем также свойства эпюр.

Рассмотрим вертикальную плоскость xy (рис.28, б), определяем изгибающие моменты M_z в характерных сечениях:

В сечениях над опорами A и B изгибающие моменты равны нулю

Изгибающий момент в сечении I (слева)

$$M_{z\mathrm{I}} = -R_{Ay} \cdot a = -1{,}97 \cdot 0{,}3 = -0{,}591 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Изгибающий момент в сечении II (справа)

$$M_{z\mathrm{II}} = -R_{By} \cdot c = -8{,}56 \cdot 0{,}2 = -1{,}712 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

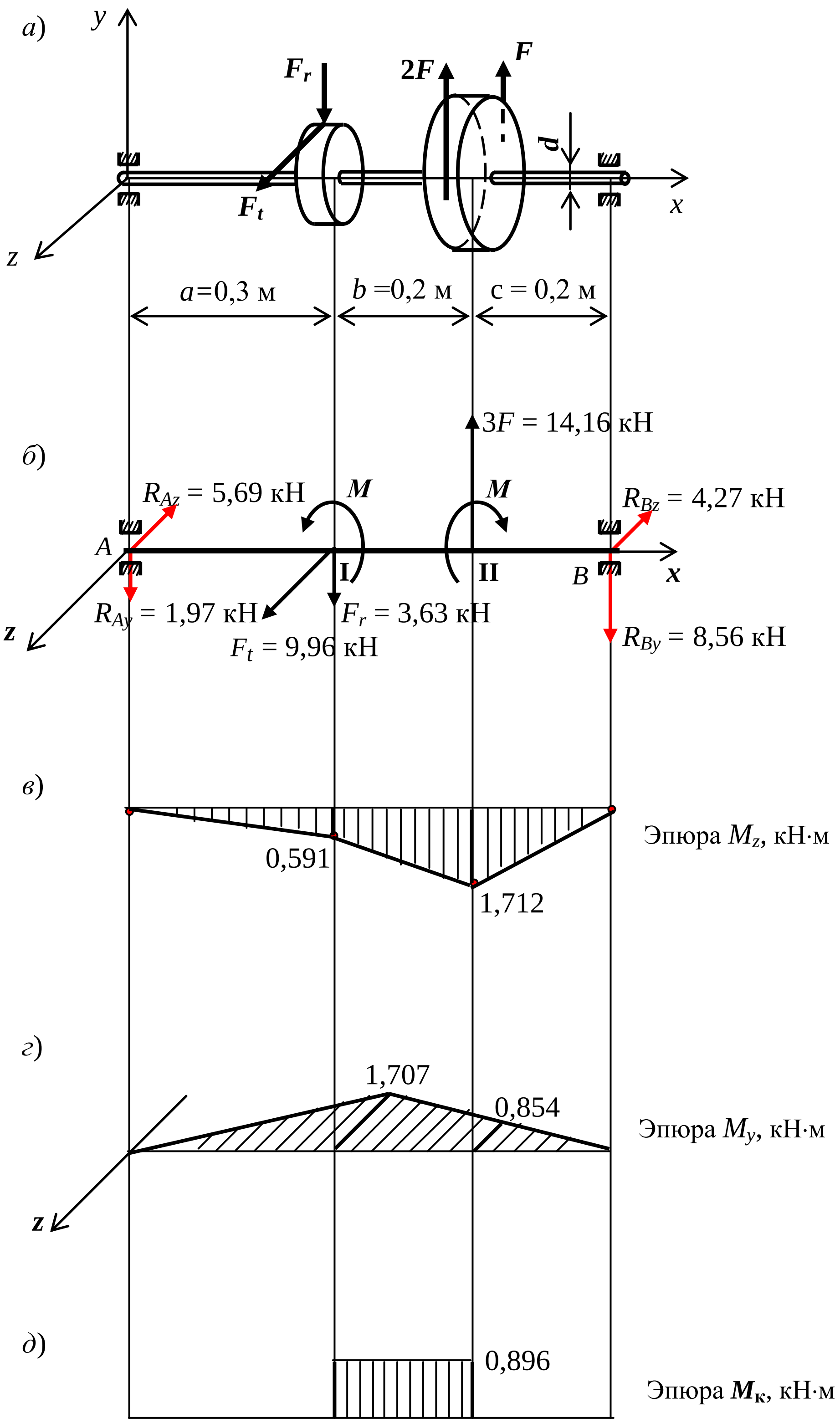

а)
y
F_r
2F
F
d
F_t
x
z
a=0,3 м
b =0,2 м
c = 0,2 м
б)
3F = 14,16 кН
R_{Az} = 5,69 кН
M
M
R_{Bz} = 4,27 кН
A
I
II
B
x
z
R_{Ay} = 1,97 кН
F_r = 3,63 кН
F_t = 9,96 кН
R_{By} = 8,56 кН
в)
0,591
1,712
Эпюра M_z, кН·м
г)
1,707
0,854
Эпюра M_y, кН·м
z
д)
0,896
Эпюра $M_к$, кН·м

Рис. 28

Строим эпюру изгибающего момента M_z на сжатых волокнах, откладываем в сечениях I и II ординаты вниз и соединяем прямыми линиями полученные точки эпюры (рис. 28, *в*).

В горизонтальной плоскости действует одна сила F_t. Для типовой балки изгибающий момент в том сечении, в котором приложена сила можно найти по формуле [4, с. 60]:

$$M_{y\mathrm{I}} = \frac{F_t \cdot a \cdot (b + c)}{a + b + c} = \frac{9{,}96 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}2 + 0{,}2)}{0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}2} = 1{,}707 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюру крутящего момента строим на участке между колесом и шкивом, $M_\text{к} = M$ (рис. 28, *д*).

8. Находим эквивалентный момент по третьей теории прочности в сечениях I и II:

$$M_{\text{экв}\mathrm{I}} = \sqrt{M_{z\mathrm{I}}^2 + M_{y\mathrm{I}}^2 + M_\text{к}^2} = \sqrt{0{,}591^2 + 1{,}707^2 + 0{,}896^2} =$$
$$= 2{,}016 \text{ кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{\text{экв}\mathrm{II}} = \sqrt{M_{z\mathrm{II}}^2 + M_{y\mathrm{II}}^2 + M_\text{к}^2} = \sqrt{1{,}712^2 + 0{,}854^2 + 0{,}896^2} =$$
$$= 2{,}112 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Выбираем наибольшее значение эквивалентного момента:

$$M_{\text{экв}\,max} = 2{,}112 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Записываем условие прочности

$\sigma_{\text{экв}\,max} = \frac{M_{\text{экв}\,max}}{W_\text{и}} \le [\sigma]$, где $W_\text{и} = \frac{\pi d^3}{32}$ - момент сопротивления круглого поперечного сечения вала при изгибе.

10. Из условия прочности определяем диаметр вала

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{экв}\,max}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2{,}112 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 6{,}75 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 6{,}75 \text{ см} = 67{,}5 \text{ мм}.$$

11. Выполняем проверку правильности определения диаметра.

Осевой момент сопротивления при изгибе

$$W_{\text{и}} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3{,}14 \cdot 6{,}75^3}{32} = 30{,}2 \text{ см}^3;$$

Полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2W_{\text{и}} = 60{,}4 \text{ см}^3.$$

Изгибающий момент в опасном сечении

$$M_{\text{и}max} = \sqrt{M_{z\text{II}}^2 + M_{y\text{II}}^2} = \sqrt{1{,}712^2 + 0{,}854^2} = 1{,}91 \text{ кНм}.$$

Наибольшее нормальное напряжение в опасной точке опасного сечения I

$$\sigma_{max} \frac{M_{\text{и}max}}{W_{\text{и}}} = \frac{1{,}91 \cdot 10^3}{30{,}2 \cdot 10^{-6}} = 63{,}2 \cdot 10^6 \text{Па} = 63{,}2 \text{ МПа}.$$

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке опасного сечения вала

$$\tau_{max} = \frac{M_{\text{к}}}{w_p} = \frac{896}{60{,}4 \cdot 10^{-6}} = 14{,}8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14{,}8 \text{ МПа}.$$

Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}\,max} = \sqrt{\sigma_{\text{и}\,max}^2 + 4\tau_{max}^2} = \sqrt{63{,}2^2 + 4 \cdot 14.8^2} = 69{,}8 \text{ МПа}.$$

Определим несовпадение напряжений $\sigma_{\text{экв}\,max}$ и $[\sigma]$:

$$\Delta\sigma = \frac{[\sigma] - \sigma_{\text{экв}\,max}}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{70 - 69{,}8}{70} \cdot 100\% = 0{,}3\%.$$

Несовпадение допускаемого и наибольшего эквивалентного напряжений возникает за счет округления результатов вычислений. В проектной практике найденное значение диаметра округляют до стандартного. Примем $d_{\text{ст}}$ =70 мм. За счет увеличения диаметра до стандартного значения запас прочности вала увеличивается.

Стандартный ряд: 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110….

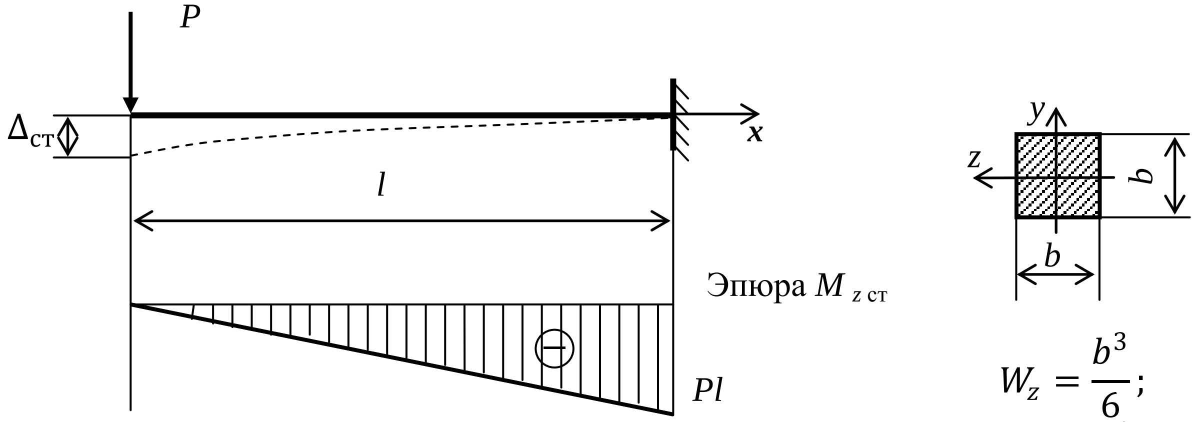
Ответ: Расчетное значение диаметра вала d = 67,3 мм,
стандартное d =70 мм.

Задача № 3. *Тема задачи*: Расчет на прочность балки при ударном нагружении.

На балку с квадратным поперечным сечением с высоты h падает груз весом P. Требуется из условия прочности при ударном нагружении найти размер b поперечного сечения балки. Данные для l=3 м, P=200 Н, h=0,5 м, $E = 2 \cdot 10^6$ МПа, $[\sigma] = 160$ МПа. При расчете принять E=2·10^5 МПа, $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

1. *Статический расчет балки*. Прикладываем вес падающего груза к балке статически, строим эпюру изгибающего момента $M_{z\,\text{ст}}$ (рис. 30).



$$W_z = \frac{b^3}{6};$$
$$I_Z = \frac{b^4}{12}$$

Рис. 30

Решаем в общем виде, расчетные формулы для типовой балки берем табличные [4, с. 58].

Определяем наибольшее нормальное напряжение в опасном сечении балки при статическом нагружении:

$$\sigma_{\text{ст}\,max} = \frac{M_{z\,max}}{W_z} = \frac{6Pl}{b^3}. \quad (1)$$

Находим статический прогиб в месте падения груза, на свободном конце балки:

$$\Delta_{\text{ст}}=\frac{Pl^3}{3EI_z}=\frac{12Pl^3}{3Eb^4}=\frac{4Pl^3}{Eb^4}. \qquad (2)$$

2. Динамический коэффициент в упрощенном виде:

$$k_{\text{д}}=\sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}. \qquad (3)$$

3. Условие прочности при ударном нагружении:

$$\sigma_{\text{д}max}=\sigma_{\text{ст}max}\cdot k_{\text{д}}\le[\sigma]. \qquad (4)$$

Подставим в условие (4) выражения (1), (2), (3):

$$\sigma_{\text{д}max}=\frac{6Pl}{b^3}\cdot\sqrt{\frac{2h\cdot 3EI_z}{Pl^3}}=\frac{6Pl}{b^3}\cdot\sqrt{\frac{2h\cdot 3Eb^4}{12Pl^3}}=\frac{6}{b}\cdot\sqrt{\frac{hEP}{2l}}\le[\sigma].$$

Отсюда $b\ge\frac{6}{[\sigma]}\sqrt{\frac{hEP}{2l}}=\frac{6}{160\cdot10^6}\sqrt{\frac{0{,}5\cdot2\cdot10^{11}\cdot200}{2\cdot3}}=0{,}0685\text{ м}=6{,}85\text{ см}.$

4. Проверочный расчет. Значение размера b является приближенным. Проверим выполнение условия прочности при этом размере b=6,85 см.

$$W_z=\frac{b^3}{6}=\frac{6{,}85^3}{6}=53{,}57\text{ см}^3;$$

$$I_Z=\frac{b^4}{12}=\frac{6{,}85^4}{12}=183{,}5\text{ см}^4;$$

$$\sigma_{\text{ст}max}=\frac{M_{z\,max}}{W_z}=\frac{Pl}{W_z}=\frac{200\cdot3}{53{,}57\cdot10^{-6}}=11{,}2\cdot10^6\text{ Па}=11{,}2\text{ МПа}$$

$$\Delta_{\text{ст}}=\frac{Pl^3}{3EI_z}=\frac{200\cdot3^3}{3\cdot2\cdot10^{11}\cdot183{,}5\cdot10^{-8}}=4{,}9\cdot10^{-3}\text{ м};$$

$$k_{д} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}5}{4{,}9 \cdot 10^{-3}}} = 15{,}3;$$

$\sigma_{дmax} = k_{д} \cdot \sigma_{стmax} = 15{,}3 \cdot 11{,}2 = 171{,}4$ МПа $> [\sigma] = 160$ МПа - условие прочности не выполнено, максимальное динамическое напряжение превышает допускаемое напряжение на 7,1 %, что не допускается.

5. *Второе приближение*. Увеличим размер b, примем b = 7 см. Вычислим все необходимые величины для этого значения b:

$W_z = 57{,}2$ см^3; $I_z = 200$ см^4; $\sigma_{стmax} = 10{,}49$ МПа

$\Delta_{ст} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$м; $k_{д} = 15{,}94$; $\sigma_{дmax} = 167{,}2$ МПа;

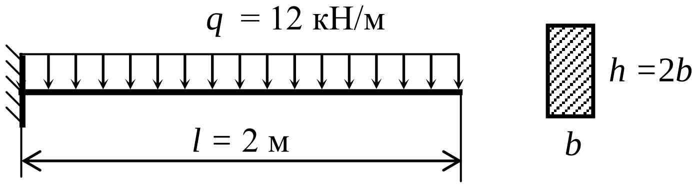
$\Delta\sigma = 4{,}5\ \% \leq 5\ \%$, что допустимо.

Принимаем размер b = 7 см.

Ответ: b=7см.

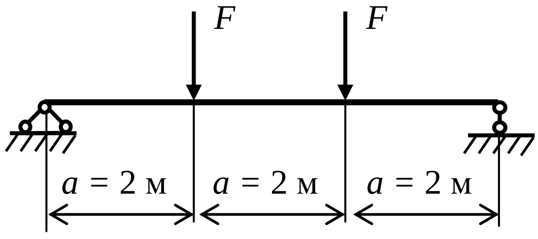
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Задача № 1. Определить размеры прямоугольного сечения деревянной балки из условия прочности по нормальным напряжениям, при расчете принять [σ] = 10 МПа.

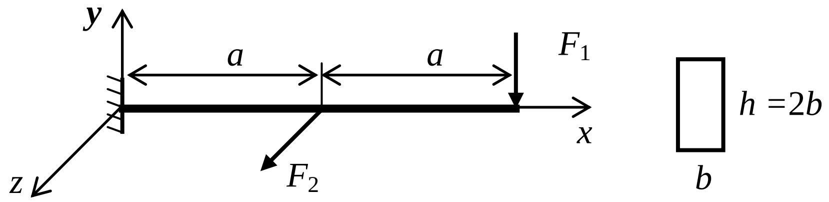


Задача № 2. Для стальной балки из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать номер двутаврового сечения.

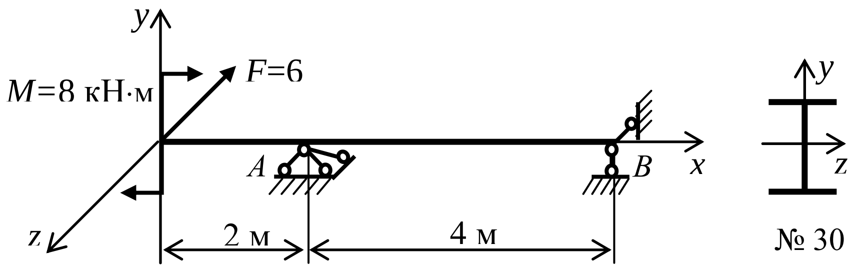
При расчете принять F = 60 кН, [σ] = 200 МПа



Задача № 3. На балку действуют две силы: F_1 =12 кН в вертикальной плоскости *xy* и F_2 = 8 кН в горизонтальной плоскости *xz*. Из условия прочности при косом изгибе определить размеры прямоугольного сечения балки с соотношением сторон *h/b* = 2.
При расчете принять *a* = 2 м; [σ] = 160 МПа.

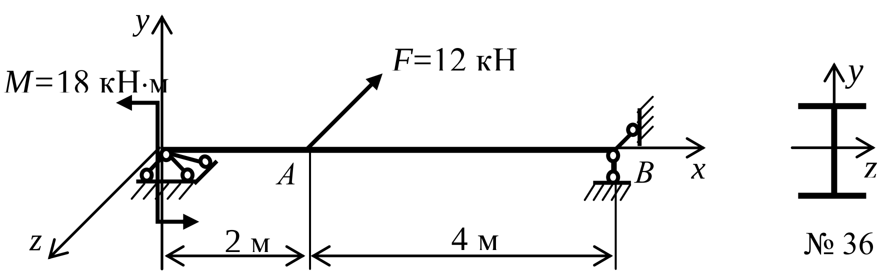


Задача № 4. Для стальной балки требуется:
- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 30 при [σ]=180 МПа.



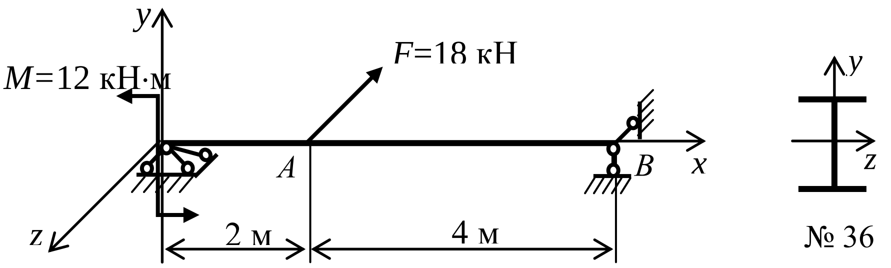
Задача № 5. Для балки, изготовленной из прокатного двутавра:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 36 при [σ]=160 МПа.



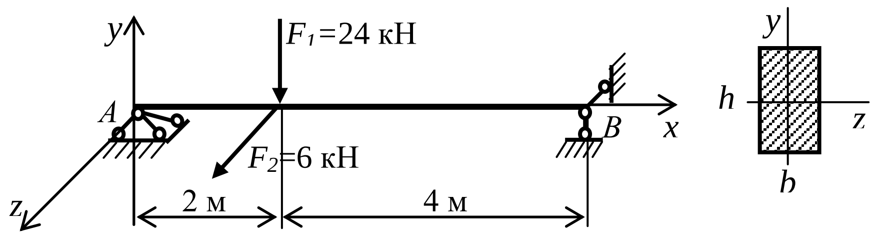
Задача № 6. Для двутавровой балки:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки и определить положение опасного сечения;
- проверить выполнение условия прочности для заданного двутаврового сечения № 36 при $[\sigma]$=160 МПа.

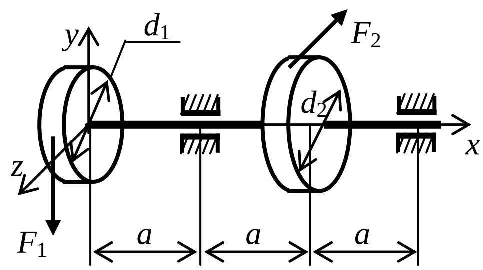


Задача № 7. Для балки с прямоугольным поперечным сечением требуется:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки, определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при следующих данных: *h/b* = 2, $[\sigma]$=160 МПа



Задача № 8. Для вала механической передачи:

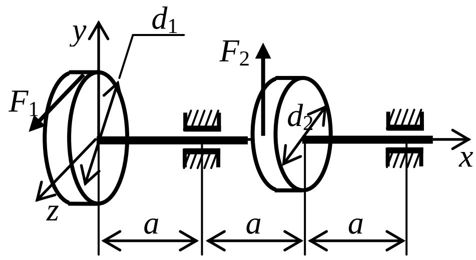


- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 160$ МПа.

Данные для расчета: $F_1 = 12$ кН, $F_2 =$ 6 кН,
$d_1 = 100$ мм, $d_2 = 200$ мм, $a = 0{,}3$м.

Задача № 9. Для вала механической передачи требуется:

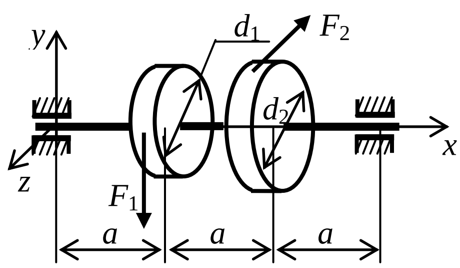
- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности.



Данные для расчета: $F_1 = 4$ кН, $F_2 = 8$ кН,
$d_1 = 100$ мм, $d_2 = 50$ мм, $a = 0{,}2$ м; $[\sigma] = 160$ МПа.

Задача № 10. Вал, на который насажены два шкива, вращается с постоянной угловой скоростью. Требуется:

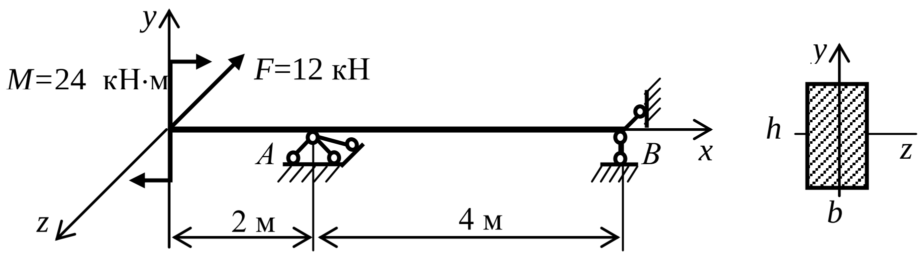
- построить эпюры изгибающих и крутящего моментов и определить положение опасного сечения;
- определить диаметр вала по третьей теории прочности при $[\sigma] = 160$ МПа.



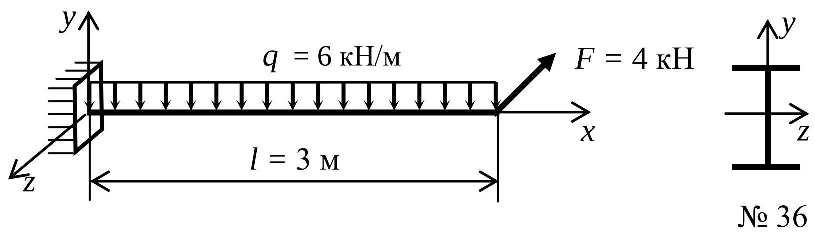
Данные для расчета: $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 5$ кН, $d_1 = 60$ мм,
$d_2 = 80$ мм, а = 0,3 м.

Задача № 11. Балка нагружена сосредоточенной силой F и парой сил с моментом M. Требуется:

- построить эпюры внутренних усилий;
- из условия прочности определить размеры прямоугольного поперечного сечения балки При расчете принять $[\sigma]$ = 10 МПа, *h/b* = 2.

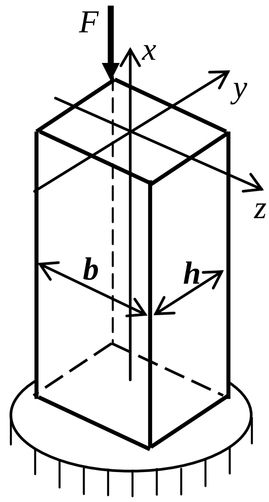


Задача № 12. Для балки, изображенной на рисунке:
- построить эпюры внутренних усилий, определить положение опасного сечения.
- проверить выполнение условия прочности для двутавровой балки № 36 при $[\sigma]$= 160 МПа.



Задача № 13. Стержень с прямоугольным поперечным сечением сжимается внецентренно силой F. Материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Требуется:

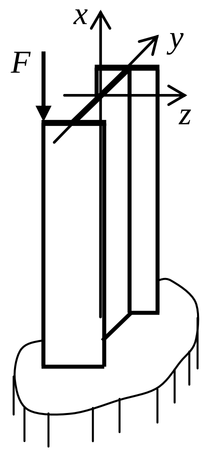
- найти геометрические характеристики поперечного сечения стержня;
- определить положение опасных точек;
- записать условия прочности для опасных точек в растянутой и сжатой частях сечения;
- из условий прочности найти силу F;
- построить ядро сечения.



Данные для расчета: $[\sigma]_{сж} = 16$ МПа, $[\sigma]_{р} = 1$ МПа,
h = 0,6 м, b = 1 м;

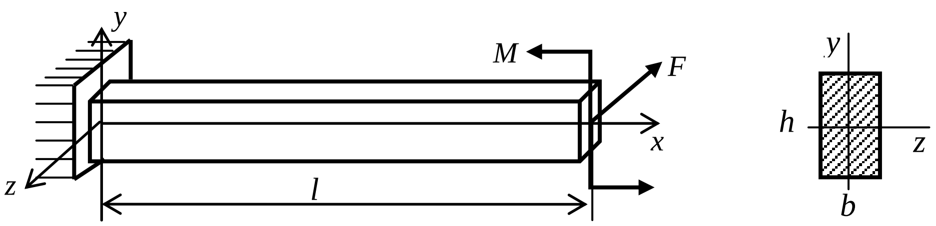
Задача № 14. Определить наибольшее напряжение сжатия в стержне, внецентренно сжатом силой F = 160 кН.

Поперечное сечение стержня - двутавр № 40.



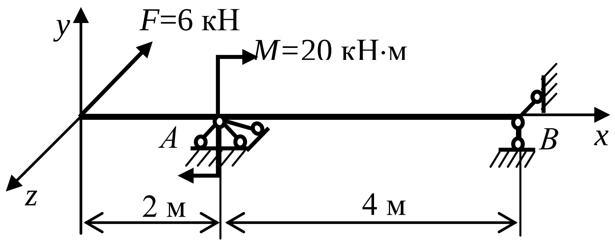
Задача № 15. Для балки, изображенной на рисунке:

- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки и определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при следующих данных: $h/b = 2$; $F = 4$ кН, $M = 12$ кН·м; $l = 4$ м; $[\sigma] = 10$ МПа.



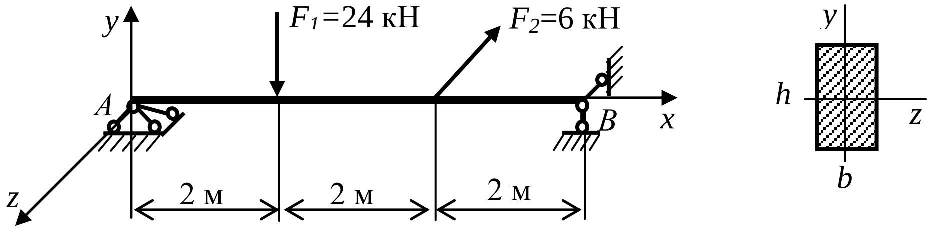
Задача № 16. Для балки требуется:

- определить внутренние усилия на участках балки и построить эпюры в главных плоскостях балки;
- определить положение опасного сечения;
- из условия прочности подобрать номер двутавровой балки при $[\sigma]=200$ МПа.



Задача № 17. Для балки, изображенной на рисунке:

- определить внутренние усилия на участках балки;
- построить эпюры внутренних усилий в главных плоскостях балки,
- определить положение опасного сечения;
- из условия прочности найти размеры прямоугольного поперечного сечения балки при $h/b = 3$, $[\sigma]=100$ МПа.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящий практикум содержит задания, выполнение которых поможет студентам освоить дисциплину «Сопротивление материалов», позволит овладеть методикой решения задач и основами инженерных расчетов типовых элементов конструкций на прочность и жесткость. Самостоятельная работа над заданиями даст возможность студентам приобрести необходимые навыки в решении задач, в выборе методики расчетов по указанным темам дисциплины. Эти навыки и полученные знания позволят применить изученные методы к решению практических задач и послужат основой для решения специальных заданий проектирования и конструирования инженерных конструкций соответственно направлению, по которому обучаются студенты.

Приложение 1

Приложение 1

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Кафедра сопротивления материалов

КУРСОВАЯ РАБОТА

Дисциплина: Сопротивление материалов

Тема: Расчеты на прочность и жесткость прямых стержней

Вариант________________

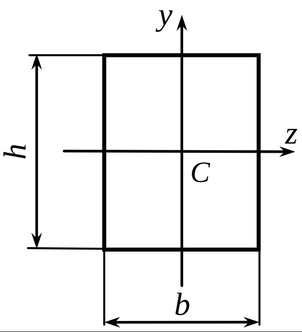
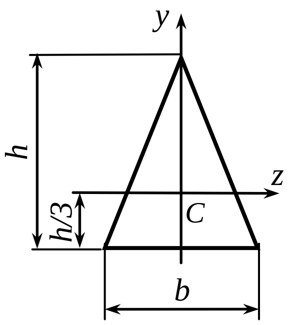
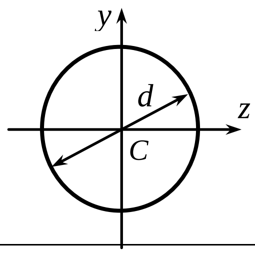
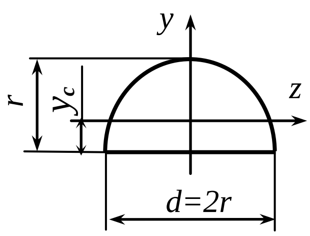
Выполнил: студент ______________
(ФИО студента)
группа ______________

Проверил: доцент Бурлакова А.М.

Владимир 20__

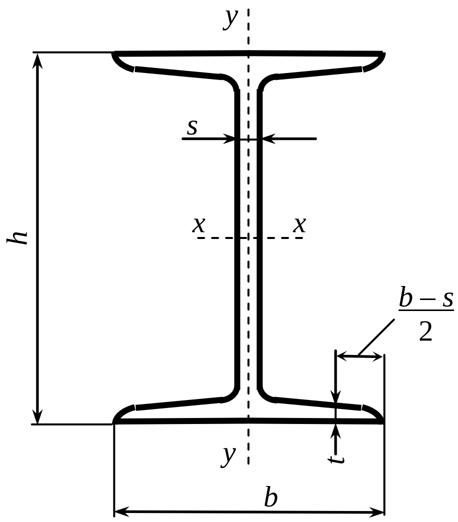
Геометрические характеристики простых сечений

h – высота сечения; b – ширина сечения;
A – площадь поперечного сечения;
C – центр тяжести сечения;
y, z – главные центральные оси сечения;
I_z, I_y – осевые моменты инерции сечения.

Фигура	A	J_{azz}	J_{ay}
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$
	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{b^3h}{48}$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$
 $y_C = 0{,}424r$	$\frac{\pi r^2}{2}$	$0{,}11r^4$	$\frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8}$

Приложение 3

ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (ГОСТ 8239-89)



h - высота двутавра

b - ширина полки

s - толщина стенки

t - средняя толщина полки

A - площадь поперечного сечения

I - момент инерции

W - момент сопротивления

S - статический момент полусечения

i - радиус инерции

Номер двутавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				A, см^2	I_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	I_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
		h	b	s	t								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21,0	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24,0	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	100,0	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	118,0	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12,0	17,8	138,0	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]/Межецкий Г.Д. – Дашков и К, 2013. http://www.studentlibrary.ru/ISBN9785394019722.html.

2. Атаров Н.М. Сопротивление материалов в примерах и задачах: учебн. пособ./Атаров Н.М.-М.: НИЦ ИНФРА.-М.,2016.-407 с.ISBN9785160038711/http:/ znanium.com/catalog.php?book info=557127.

3. Поскребко М.Д. Сопротивление материалов [Электронный ресурс] : учебник / М.Д. Поскребко.- Минск: Высш. шк., 2007.- 797 с.- ISBN 978-985-06-1293-9. http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=505146

4. Сопротивление материалов/ Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г.С. – 5-е изд. Перераб. И доп. – К.: Вища шк.Головное изд-во, 1986 (и последующие издания). – 775 с.

Рекомендуется также использовать учебники и учебные пособия других авторов по темам, указанным в рабочей программе.