Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых»**

Кафедра Общая и прикладная физика

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Введение в теорию погрешностей и статистических методов обработки информации в лабораторном курсе физики для студентов с ограниченными возможностями здоровья (инвалидов)

(электронный ресурс)

Владимир 2018

УДК 531.7+519.2

Составитель: Дмитриева Е.В.

Методическое пособие. «Введение в теорию погрешностей и статистических методов обработки информации в лабораторном курсе физики для студентов с ограниченными возможностями здоровья (инвалидов)» (электронный ресурс) – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2018.– 23 с.

Методическое пособие является циклом лабораторных работ посвященных некоторым простым, но крайне важным и необходимым методам обработки числовых измерений при анализе результатов экспериментальных исследований. Рассматриваются базовые методы анализа экспериментальных данных, и осуществляется отработка навыков их практического применения. Содержит введение, где рассматриваются общие методические принципы выполнения лабораторной работы и оформления отчета, «Ознакомление с теорией погрешностей», а также лабораторные работы: «Обработка результатов физического эксперимента на примере определения объема цилиндра» и «Исследование распределения результатов физических измерений».

Пособие предназначено для студентов Центра профессионального образования инвалидов ВлГУ, а также студентов всех форм обучения, изучающих физику и может быть полезно преподавателям, ведущим курс физики

Рецензент – профессор, доктор технических наук
кафедры физики и прикладной математики ВлГУ Давыдов Н.Н.

Оглавление

Введение

Методическое пособие по физике предназначено для проведения лабораторных занятий по физике со студентами Центра профессионального образования инвалидов (ЦПОИ) ВлГУ, а так же может быть использовано для работы со студентами всех инженерно-технических специальностей ВлГУ, в программу которых входит выполнение лабораторных работ по физике. Пособие разработано автором после многолетней работы со студентами ЦПОИ и апробировано в ходе проведения лабораторных занятий по физике.

Методическое пособие является циклом лабораторных работ посвященных некоторым простым, но крайне важным и необходимым методам обработки числовых измерений при анализе результатов экспериментальных исследований. Рассматриваются базовые методы анализа экспериментальных данных, и осуществляется отработка навыков их практического применения. Содержит лабораторные работы по теории погрешностей и методам математической статистики.

Перед началом выполнения лабораторной работы студенту рекомендуется вспомнить теоретический материал раздела физики, к которому относится данная лабораторная работа. По памяти воспроизвести основные понятия, определения, термины, формулировки законов, базовые формулы. Если есть необходимость, обратиться к лекционному материалу или материалу учебника. После беседы студента с преподавателем, ведущим лабораторный курс физики, по существу теоретических основ рассматриваемой проблемы и практических методов, используемых в проведении исследований, студент, получивший допуск, может приступать к выполнению лабораторной работы.

Требования к оформлению лабораторных работ.

Отчет студента по лабораторной работе оформляется в печатной и рукописной* формах на листах формата А4 по следующей схеме:

1. Титульный лист (печатная форма).
2. Цель работы (печатная форма).
3. Оборудование (печатная форма).
4. Теоретическое введение (печатная форма).
5. Методика проведения эксперимента (печатная форма).
6. Экспериментальная часть (рукописная форма).

7. Обработка результатов измерения (рукописная форма).

8. Выводы (рукописная форма).

9. Ответы на контрольные вопросы (рукописная форма).

Если в лабораторный работе результаты эксперимента (результаты обработки эксперимента) необходимо представить в графической форме, то график выполняется на миллиметровой бумаге с применением чертежных принадлежностей и вкладывается в отчет.

***** – В случае невозможности оформления студентом лабораторной работы в рукописной форме (при нарушениях зрения, координации движений) допускается ее оформление в печатной форме.

Образец титульного листа

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
"Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"

Кафедра общая и прикладная физика

Лабораторная работа №_____

____

(название работы)

Студент группы___________

____

(Ф.И.О.)

К лабораторной работе допущен_____

Лабораторную работу выполнил______

Лабораторную работу защитил_______

Владимир, 201 г.

Ознакомление с теорией погрешностей.

В процессе экспериментальных исследований необходимо осуществлять измерения различных физических величин.

Различают прямые и косвенные методы измерений.

Прямые измерения осуществляются при помощи измерительных приборов. Например, длину можно измерить линейкой, массу тела взвешиванием на весах, время – секундомером, силу электрического тока – амперметром и т.д.

При косвенных измерениях искомая физическая величина вычисляется по известной функциональной зависимости (формуле) и по результатам прямых измерений других величин. Например, определить скорость тела при равномерном движении можно по формуле $v = \frac{S}{t}$, измеряя приборами пройденный путь S и время в пути t.

Из-за влияния различных случайных факторов (несовершенство приборов, изменяющиеся внешние условия, субъективный подход к процессу исследований) все измерения осуществляются с некоторой точностью, поэтому получаются приближенные значения, а результаты измерений оказываются <u>случайными величинами</u>. Например, при взвешивании могут присутствовать случайные потоки воздушных масс, наличие пылинок, температурные колебания, различные проявления трения в подвесе чашек весов и т.д. Точность измерений это по сути характеристика качества измерений, показывающая, как результаты измерений приближены к тому значению измеряемой величины, которое мы принимаем за истинное.

Важная задача при проведении измерений – указать наиболее точное значение измеряемой величины и ошибку (погрешность) измерения.

Различают три типа ошибок (погрешностей) измерений: **промахи, систематические и случайные.**

Промах – погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий существенно (значительно) отличается от остальных результатов этого ряда. Промахи это самые грубые ошибки, которые обусловлены низкой квалификацией исследователя, его невнимательностью в отсчетах или записях результатов измерений, использованием неисправного прибора, не правильной реализацией метода измерений, сбоями в измерительной цепи прибора и т.д. Измерения, содержащие промахи, следует отбрасывать и не учитывать в дальнейшей обработке результатов исследований, но обязательно сделать ссылку в комментариях к таблице измерений о выполнении этого действия. Отбрасывание (элиминация) результатов с грубыми погрешностями предупреждает возможность значительного искажения оценки результатов измерений.

Систематической называют такую погрешность, которая не меняется при повторных измерениях одной и той же физической величины. В любом измерительном приборе присутствует систематическая погрешность, которую невозможно устранить. Такие погрешности обусловлены конструктивными особенностями измерительного прибора. Систематическую ошибку можно вычислить по классу точности, указанному на шкале прибора или в паспортных сведениях, приложенных к прибору его изготовителем. Если класс точности отсутствует, то за систематическую ошибку принимают половину шкалы деления измерительного инструмента, например линейки или цене деления шкалы, если стрелка прибора перемещается скачком (например, у секундомера). У приборов, снабженных нониусом, систематическую погрешность можно считать равной цене деления шкалы нониуса.

Случайной называют такую ошибку, которая изменяется произвольным образом от одного измерения к другому. При многократных измерениях одной и той же физической величины в одинаковых методических условиях опыта, случайная ошибка измерения определяется методом математической статистики.

Рассмотрим некоторые положения теории определения случайной ошибки в измерениях.

Прямые измерения

Пусть в эксперименте измеряется прибором величина, которую обозначим символом “x”. Осуществляется n – измерений и в таблицу вносятся результаты измерений:

Таблица

№ пп	x
1	x_1
2 . .	x_2 . .
n	x_n

Результаты каждого измерения – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ –случайные величины.

При обработке результатов в качестве наиболее точного значения измеряемой величины принимается среднее арифметическое из n измерений. В теории вероятностей доказывается, что истинное значение измеряемой величины (при отсутствии систематических погрешностей) равно ее среднему значению, получаемому при бесконечно большом числе измерений, т. е.

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_n x_i}{n} \qquad (1)$$

В каждом измерении присутствует ошибка, которая определяется по формуле:

$$\Delta x_i = <x> - x_i. \qquad (2)$$

Например, ошибка первого измерения:

$$\Delta x_1 = <x> - x_1,$$

второго измерения:

$$\Delta x_2 = <x> - x_2 \text{ и т.д.}$$

Абсолютные ошибки также являются случайными величинами.

Математическая статистика предлагает в качестве среднего значения случайной погрешности использовать величину ΔS_x называемую среднеквадратичной погрешностью:

$$\Delta S_x = \sqrt{\frac{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} \qquad (3)$$

Произведение $$\Delta x_{сл} = \Delta S_x \cdot t_\alpha(n), \qquad (4)$$

следует рассматривать как случайную погрешность определения искомой величины x. Величина $\Delta x_{сл}$ рассматривается как оценка погрешностей, вызываемых случайными процессами, протекающими вне измерительного прибора.

В формуле (4) $t_\alpha(n)$ – коэффициент Стьюдента (табличная величина, которая содержится в таблицах по теории вероятности и математической статистики, и часть такой таблицы приведена ниже). Из начертания символа этого коэффициента видно, что он зависит от числа измерений n и надежности измерений α. Надежность α – это вероятность, с которой результаты измерений попадают в доверительный интервал $\pm\Delta x_{сл}$. При выполнении лабораторных работ, если нет указаний преподавателя, рекомендуется принимать надежность α =0,95. Это численное значение показывает, что 95% сделанных измерений будут располагаться внутри доверительного интервала $\pm\Delta x_{сл}$.

Общая погрешность результата измерений учитывает случайные и систематические погрешности. Последние необходимо учитывать при значительной величине систематической погрешности

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{сл}\right)^2 + \left(\Delta x_{пр}\right)^2} = \sqrt{\left(\Delta x_{сл}\right)^2 + \left(\frac{k_\alpha}{3}\right)^2 \cdot \delta^2}\,, \qquad (5)$$

где $\Delta x_{пр}$ – приборная погрешность, k_α – коэффициент Стьюдента для n=∞; δ – систематическая погрешность прибора. Чем меньше величина δ, тем более точным является прибор. Величину Δx рассчитываемую по формуле (5) называют абсолютной погрешностью измеряемой величины x.

На практике составные части абсолютной погрешности $\Delta x_{сл}$ и $\Delta x_{пр}$ могут значительно отличаться друг от друга (на порядок и более). В этом случаях для предварительных оценок можно пренебрегать меньшей из них.

Окончательный результат измерений записывается в форме:

$$x = \langle x\rangle \pm \Delta x \qquad (6)$$

Для оценки погрешности используют также относительную ошибку ε_x, которая определяется выражением:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}, \quad \text{или в процентах: } \varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\cdot 100\%. \qquad (7)$$

Косвенные измерения.

Пусть необходимо измерить численное значение физической величины F функционально связанной с другими физическими величинами x,y,z и т.д. Физические величины x,y,z и т.д. либо известны, либо их можно измерить прямым методом. Зависимость имеет вид $F=f(x,y,z,\ldots)$, причем вид функции f экспериментатору известен.

В ходе эксперимента физические величины x,y,z и т.д. многократно измеряются и определяются их средние значения по формуле (1). Затем полученные средние значения подставляют в функцию f и определяют среднее значение физической величины $\langle F\rangle = f\left(\langle x\rangle,\langle y\rangle,.\langle z\rangle,\ldots\right)$

Абсолютная погрешность величины F определяется следующим образом:

$$\Delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2 + \ldots} \tag{8}$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ – частные производные функции F по переменным x, y, z; Δx, Δy,Δz – абсолютные погрешности величин x, y, z, полученных в прямых измерениях и рассчитанные по формуле (5). Численные значения производных рассчитываются после замены аргументов x, y, z на ранее полученные средние значения $<x>, <y>, <z>$.

Результаты косвенных измерений записываются окончательно в виде:

$$F = <F> \pm \Delta F \tag{9}$$

и относительная ошибка

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{<F>} \cdot 100\% . \tag{10}$$

Коэффициенты Стьюдента

n/α	0,5	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,999
5	0,74	0,94	1,53	2,13	2,77	3,75	4,60	5,60	6.49	7,17	8,61
6	0,73	0,92	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,40	5,89	6,86
7	0,72	0,91	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	4,82	5,21	5,96
8	0,71	0,90	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	4,46	4,79	5,40
9	0,71	0,89	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	4,21	4,50	5,04
10	0,70	0,88	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,03	4,30	4,78
11	0,70	0,88	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	3,90	4,14	4,59
12	0,70	0,88	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	3,79	4,02	4,49
13	0,69	0,87	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3,43	3,71	3,93	4,32
14	0,69	0,87	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	3,65	3,85	4,22
15	0,69	0,87	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	3,59	3,79	4,14
∞	0,67	0,84	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58	2,81	3,00	3,09	3,29

Лабораторная работа №1

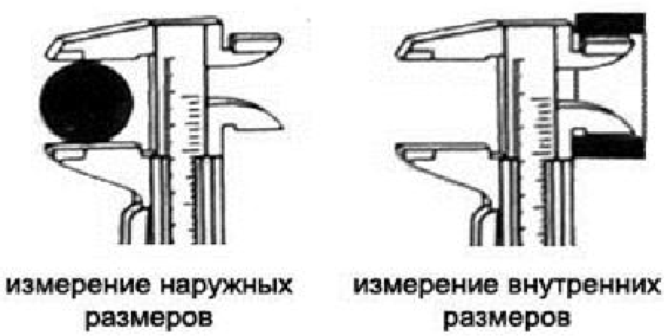
ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА НА ПРИМЕРЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМА ЦИЛИНДРА.

Цель работы: применение теории погрешностей при обработке результатов измерений.

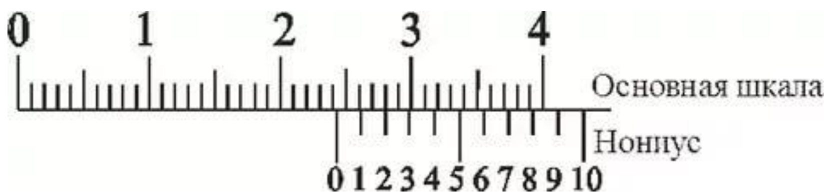
Оборудование: цилиндр, штангенциркуль.

Теоретическая часть

Штангенциркуль – высокоточный инструмент, используемый для измерения наружных и внутренних линейных размеров.



Штангенциркуль имеет основную и вспомогательную шкалу – нониус, данный элемент отличается наличием десяти делений.



Как измерять штангенциркулем.

1) Зафиксируйте измеряемый образец в нужном положении – разведите губки прибора и поместите между ними образец, губки должны плотно соприкасаться с образцом.

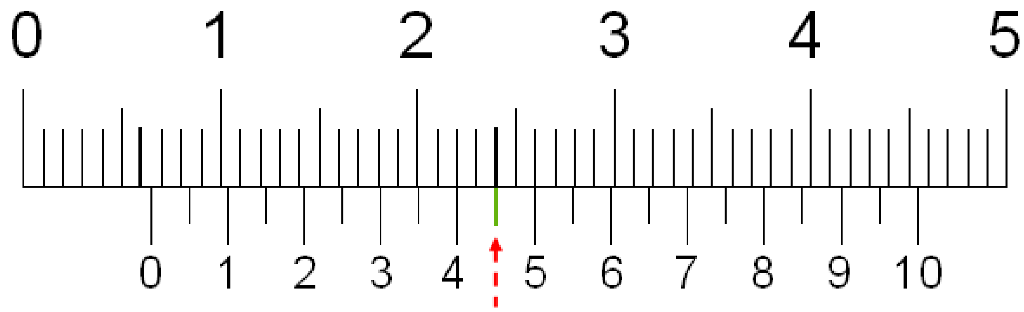
2) Для считывания показаний установите инструмент прямо перед глазами.

3) Измерьте показания основной шкалы. Количество целых миллиметров отсчитывается по основной шкале слева направо. Указателем служит нулевой штрих нониуса. Запишите полученный результат.

4) Измерьте показания нониуса. Для этого на его шкале необходимо найти тот штрих нониуса, который наиболее точно совпадает с одним из штрихов основной шкалы. После этого нужно умножить порядковый номер найденного штриха нониуса (не считая нулевого) на цену деления его шкалы. Запишите полученный результат.

5) Сложите полученные в пункте 3 и пункте 4 результаты. Запишите окончательный результат измерений.

Пример:

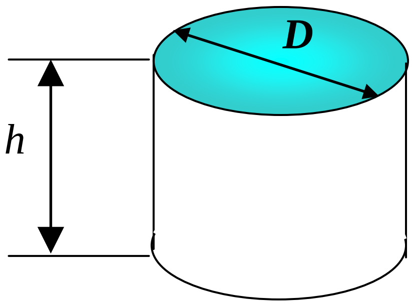


На рисунке представлена шкала прибора с ценой деления основной шкалы 1 мм, шкалы нониуса 0,05 мм.

Показания основной шкалы 6 делений. Умножим показания основной шкалы на цену деления 1 мм и получим значение 6 мм. Показания нониуса 9 делений (посчитайте количество делений нониуса до пунктирной стрелке на рисунке). Умножим показания нониуса на цену деления 0,05 мм и получим значение 0,45 мм. Результат измерения 6 мм+0,45 мм=6,45 мм.

Экспериментальная часть

Проведем измерения линейных размеров – диаметра D и высоты h цилиндра.



Обработка результатов прямых измерений.

1) Составим таблицу для 5-и измерений диаметра цилиндра D и вычислений абсолютной ΔD и относительной погрешности ε_D измерений.

Таблица 1

№ пп	D_i, мм	$<D>$, мм	ΔD_i, мм	ΔD^2_i, мм^2	ΔS_D, мм	ΔD, мм	ε_D,%
1							
2							
3							
4							
5							

Осуществляем вычисления по формулам (1), (2), (3), (4), (5) и (7), результаты вносим в таблицу 1, все расчеты подробно записываем.

Запишем конечный результат в числовом формате в виде:

$$D = <D> \underline{+} \Delta D. \tag{1.1}$$

2) Составим таблицу для 6-и измерений высоты цилиндра h и вычислений абсолютной Δh и относительной погрешности ε_h измерений.

Таблица 2

№ пп	h_i, мм	$< h >$, мм	Δh_i, мм	Δh^2_i, мм^2	ΔS_h, мм	Δh, мм	ε_h,%
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Осуществляем вычисления по формулам (1), (2), (3), (4), (5) и (7), результаты вносим в таблицу 2, все расчеты подробно записываем.

Запишем конечный результат в числовом формате в виде:

$$h = <h> \underline{+} \Delta h. \tag{1.2}$$

<u>Обработка результатов косвенных измерений</u>.

Объем цилиндра определяется по формуле

$$<V> = \frac{\pi <D>^2}{4} <h>. \tag{1.3}$$

Так как объем цилиндра является функцией трех случайных величин: π, D и h, т.е. $V=f(\pi,D,h)$, то абсолютная погрешность в его измерении определяется, в соответствии с формулой (8), следующим образом:

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 \cdot \left(\Delta\pi\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2 \cdot \left(\Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot (\Delta h)^2}\ . \tag{1.4}$$

Для удобства выполнения вычислительных процедур формулы (1.4) возьмем частные производные функции V по переменным π, D и h:

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{D^2 \cdot h}{4}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial D} = \frac{\pi \cdot 2D \cdot h}{4} = \frac{\pi \cdot D \cdot h}{2}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi \cdot D^2}{4}. \tag{1.7}$$

Рассчитаем числовые значения частных производных, заменяя аргументы D и h на ранее полученные средние значения $< D >$ и $< h >$, число π=3,14.

Затем необходимо рассчитать абсолютную погрешность ΔV. При этом, погрешность в исчислении $\Delta\pi$ взять равной 0,0016, значение ΔD из таблицы 1, значение Δh из таблицы 2.

Завершаем расчеты определением относительной погрешности ε_V по формуле (10).

Результаты косвенных измерений записываются окончательно в виде:

$$V = \langle V \rangle \pm \Delta V. \tag{1.8}$$

Завершается лабораторная работа выводом, который пишет сам исследователь.

Лабораторная работа № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ.

Цель работы: определение статистических характеристик распределения результатов измерений, построение гистограмм и получение приближенного вида функции распределения.

Оборудование: набор однотипных деталей (например, цилиндров), микрометр, штангенциркуль.

Теоретическая часть

1. Понятие о функциях распределения случайной величины

Важная роль в установлении физических закономерностей принадлежит эксперименту, в котором исследователь получает информацию. Эта информация может быть качественной, например, чего-то стало больше, чем было, или количественной, когда описание событий происходит с указанием числовых значений физических величин. Числовое значение получает исследователь по шкале прибора. Очевидно, что отсчет по шкале прибора (результат измерений) и значение физического параметра, который измеряется, - не одно и то же. Физические параметры являются вполне определенными, неслучайными (толщина пластины, разность давлений, масса предмета и т.п.). В процессе измерений из-за влияния различных факторов (колебание почвы, перепады температур, изменение положения экспериментатора относительно шкалы прибора при повторении опыта и т.д.) результаты измерений – случайные величины.

Случайной называют такую величину, значение которой изменяется при повторении опытов некоторым заранее не предсказуемым образом. Для случайной величины нельзя заранее сказать, какое конкретное значение она примет в определенных условиях, а можно только указать закон ее распределения.

Закон распределения считается заданным, если:

- указано множество возможных значений случайной величины;
- указан способ количественного определения вероятности попадания случайной величины в любую область множества возможных значений.

Вероятность попадания в заданную область может быть определена следующим образом:

$$P_m = \lim_{N \to \infty} \frac{N_m}{N}, \tag{2.1}$$

где N_m – количество измерений случайной величины, оказавшейся в заданной области; N – общее число измерений.

Аналитическим выражением законов распределения случайной величины x являются функции распределения вероятностей – интегральная $F(x)$ и дифференциальная $f(x)$.

Интегральная функция случайной величины x_i обладает следующими свойствами:

1) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$; 2) $\lim_{x\to\infty} F(x) = F(\infty) = 1$;

3) $F(x) \geq 0$ для всех x; 4) $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Если функция $F(x)$ дифференцируемая для всех значений случайной величины, то закон распределения вероятностей может быть выражен с помощью дифференциальной функции распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{2.2}$$

Таким образом, значение функции $f(x)$ приближенно равно отношению вероятности попадания случайной величины в интервал(x, $x+\Delta x$) к длине Δx этого интервала, когда Δx – бесконечно малая величина. Поэтому дифференциальную функцию называют также функцией плотности распределения вероятностей (или короче – *функцией плотности вероятности*).

Функция плотности вероятности обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geq 0$; 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$;

3) $\int_{-\infty}^{x} f(z)dz = F(x)$; 4) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,

где z – переменная интегрирования.

Интегральная и дифференциальная функции распределения являются исчерпывающими вероятностными характеристиками случайной величины. Однако некоторые основные свойства случайных величин могут быть описаны более просто с помощью нескольких определенных числовых параметров. Важную роль среди таковых на практике играют два параметра:

- математическое ожидание m_x случайной величины – характеристика центра рассеяния случайной величины;
- дисперсия σ^2 – характеристика степени рассеяния случайной величины.

2. Нормальное распределение

Одним из важнейших распределений является *нормальное распределение.* Этот термин ввел К.Пирсон, более старое название – Гаусса закон (*распределение Гаусса*). Это – наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Главная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Распределение вероятностей случайной величины x называется нормальным, если оно имеет плотность вероятности вида

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma^2}} . \qquad (2.3)$$

Функция $f(x)$ зависит от математического ожидания m_x

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \qquad (2.4)$$

и от дисперсии σ^2

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2 f(x)\,dx \quad . \qquad (2.5)$$

Квадратный корень из дисперсии $\sigma=\sqrt{\sigma^2}$ называется *средним квадратичным отклонением*. Размерность σ совпадает с размерностью случайной величины x.

Кривая плотности нормального распределения имеет вид колокола (рис.1). Она симметрична относительно ординаты, проходящей через точку $x= m_x$ и в этой точке у кривой максимум функции равный $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

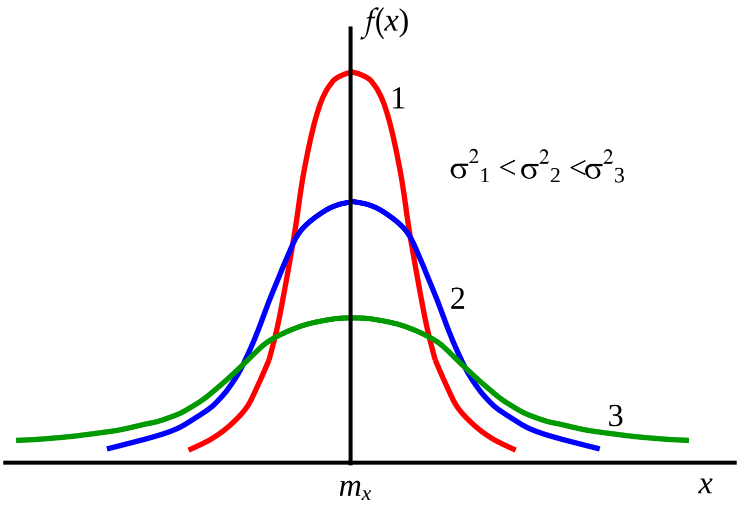


Рис. 1. Кривые нормального распределения с различными значениями σ^2

По мере удаления от значения $x = m_x$ плотность распределения падает, и при $x\to \pm\infty$ функция $f(x) \to 0$, а кривая этой функции асимптотически приближается к оси абсцисс. С уменьшением дисперсии σ^2 кривая нормального распределения становится все более островершинной (см.рис.1).

Изменение m_x при постоянной σ^2 не меняет форму кривой, а вызывает лишь ее смещение по оси абсцисс (см. рис.2).

На практике часто встречается задача вычисления вероятности попадания нормально распределенной случайной величины на участок, симметричный относительно центра рассеивания m_x. Площадь, заключенная под кривой нормального распределения, численно равна вероятности присутствия случайной величины в множестве возможных значений x и поэтому равна единице.

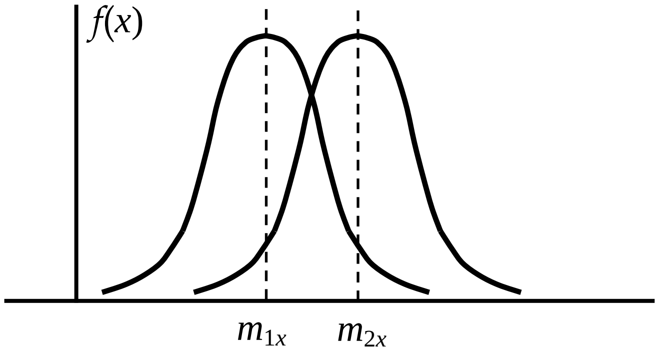


Рис. 2. Кривые нормального распределения с различными значениями m_x, но с одинаковыми σ^2

Вероятность попадания случайной величины x из множества возможных значений в интервале:

от $-\sigma$ до σ численно равна площади штрихованной фигуры (рис.3) и составляет 0,6227;

от -2σ до 2σ численно равна площади штрихованной фигуры (рис.4) и составляет 0,9545;

от -3σ до 3σ численно равна площади штрихованной фигуры (рис.5) и составляет 0,9973.

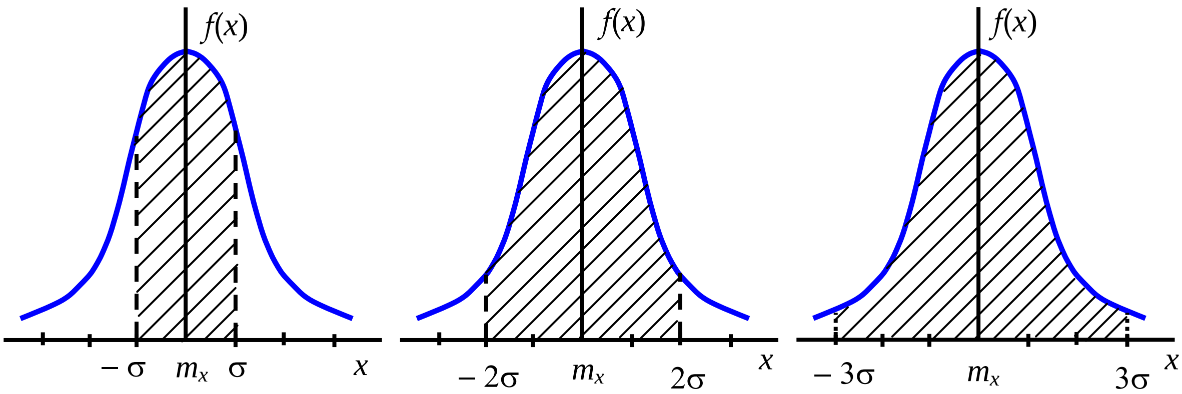


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

Это позволяет, зная среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание случайной величины, ориентировочно указать интервал её практически возможных значений. Поскольку вероятность 0,9973 (см. рис.5) близка к единице, практически считается маловероятным отклонение нормального распределения случайной величины от математического ожидания более чем на 3σ и этими значениями можно пренебречь. Такой способ оценки диапазона возможных значений случайной величины известен в математической статистике под названием «правило трех сигма». Этим правилом пользуются на практике при установлении границ допустимых отклонений случайной величины.

Нормальное распределение является хорошим приближением каждый раз, когда рассматриваемая случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых случайных величин, максимальная из которых мала по сравнению со всей суммой.

Статистическое описание результатов наблюдений

Фундаментальными понятиями статистической теории являются *генеральная совокупность* и *выборка*.

- Генеральная совокупность – это набор всех возможных результатов случайной величины, которые могут быть определены или получены при данных условиях. Например, имея цилиндр и штангенциркуль, экспериментатор за учебное занятие (45 минут) при определенных навыках и опыте может около тысячи раз измерить диаметр этого цилиндра. Считается, что свойства объекта наблюдения не изменяются во времени и присущие генеральной совокупности.
- Выборка – это конечный набор значений случайной величины, полученный в результате измерений. Число элементов n выборки называется ее объемом. Выборка является репрезентативной, если она достаточно полно характеризует генеральную совокупность.

Если какая-либо физическая величина измеряется много раз, то возникает необходимость в статистической обработке результатов измерений этой величины. Ниже на практике познакомимся с элементами статистической обработки результатов измерений.

Экспериментальная часть

В ходе выполнения работы используется набор (100 … 200 шт.), однотипных объектов, например цилиндров, которые выточил токарь, имея задание изготовить одинаковые по форме и размерам детали. В силу влияния большого количества причин, действующих случайно, совокупность высот цилиндров или их диаметров представляет набор случайных величин. Поэтому проверяем полученный в эксперименте набор случайных величин на соответствие нормальному закону распределения.

Выполняя работу необходимо:

1. Получить выборку, измеряя диаметр или высоту каждого цилиндра. В результате получим набор случайных величин в количестве n-штук. Результаты измерений поместить в табл.1

Таблица 1

№ п.п	Измеряемая величина
1.	d_1
…………	…………
n	d_n

2. Вычислить статистические оценки выборки случайной величины:

- выборочное среднее (оценка математического ожидания)

$$< d > = \frac{1}{n}\sum d_i \tag{2.6}$$

- выборочную дисперсию (оценка дисперсии)

$$\sigma^2 \cong \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(d_i - < d >)^2 \tag{2.7}$$

- стандартное отклонение (среднеквадратичное отклонение)

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{2.8}$$

3. Полученную выборку значений d_i случайной величины разбить на интервалы (кванты), для этого необходимо определить ширину интервала Δd. Находят в выборке минимальное $d_{\min}$ и максимальное $d_{\max}$ значения случайной величины и ширину интервала вычисляют по формуле

$$\Delta d = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{m}, \tag{2.9}$$

где m – число интервалов. Рекомендуется принять одно из значений $m = (6 \div 8)$. Числовое значение Δd можно округлить до последней значащей цифры случайной величины в выборке. Количество интервалов должно быть таким, чтобы в совокупности они перекрыли всю область значений от $d_{\min}$ до $d_{\max}$.

4. Из выборки подсчитывают количество попаданий n_i случайной величины в каждый интервал, и результаты вносят в табл. 2. Отметим, что значение случайной величины, попавшее на границу между соседними интервалами, относят к правому интервалу.

Таблица 2

Интервал	Число попаданий в интервал	Относительная частота попадания в интервал	Плотность частоты попадания в интервал
	n_i	$f_i = \dfrac{n_i}{n}$	$f(h) = \dfrac{n_i}{n\Delta d}$
$d_{\min} \div d_1$	n_1		
$d_1 \div d_2$	n_2		
……			

В таблице 2 $d_1 = d_{\min} + \Delta d$; $d_2 = d_1 + \Delta d$; …и т.д.…..

5. Рассчитывают относительную частоту и плотность частоты попадания случайной величины в каждый интервал и результаты вносят в табл.2.

6. Строят гистограмму (столбчатую диаграмму) выборки, которая является эмпирическим аналогом функции плотности распределения $f(d)$. Гистограмма представляет собой ступенчатый график, по оси абсцисс которого отложена случайная величина (применительно к таблице 2 это d), а сама ось разбита на отрезки, равные ширине интервала Δd. По оси ординат откладывают плотность частоты попадания. На рис.6 показан возможный вид гистограммы.

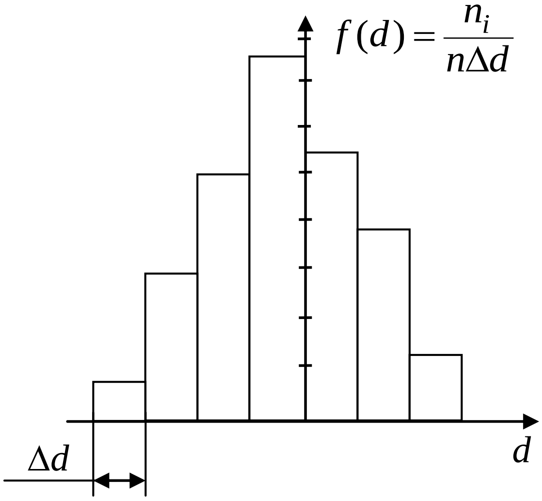


Рис. 6

7. Построить кривую распределения Гаусса. Для этого по формуле (2.3) и по результатам вычисления $<d>$, σ^2 вычисляют $f(d)$ для произвольного набора (10 ÷ 15) значений диаметра. При этом желательно, чтобы выбранные значения попадали в каждый интервал и по одному значению за пределами $d_{\min}$ и $d_{\max}$. Результаты вычислений вносят в табл.3.

Таблица 3

d, мм	d_1	d_2	….	d_k
$f(d)$	$f(d_1)$	$f(d_2)$	….	$f(d_k)$

По результатам в таблице 3 строят кривую нормального распределения, совмещая её с гистограммой (рис.6).

8. Сравнить Гауссову кривую с гистограммой и проанализировать полученные результаты.

9. Дополнительное задание. Построить гистограммы для числа попаданий и для относительной частоты попаданий в интервал. Сравнить все построенные гистограммы

Дополнительное задание

Ответить в письменной форме на вопросы:

1. Что такое генеральная совокупность?
2. Что такое выборка?
3. Запишите нормальный закон распределения случайной величины и поясните параметры, входящие в этот закон.
4. Как зависит форма и положение кривой Гаусса от математического ожидания и от дисперсии?
5. Как качественно сравнить дисперсии случайной величины для нескольких распределений по виду гистограммы или кривых Гаусса?
6. Поясните, какой смысл заложен в правило трех сигма.
7. Поясните методику построения гистограммы.

Список использованной литературы

1. Физика. Методические указания к комплексу лабораторных работ по физике для студентов-заочников (механика, молекулярная физика, электричество и магнетизм, колебания и волны, оптика) / Владим. гос. ун-т; Сост.: А.Ф. Галкин и др.; Под ред. А.А. Кулиша. Владимир 2004. 108 с.
2. Учебное пособие по физике. Механика / Е.В. Дмитриева, В.С.Плешивцев; Владим. гос. у-нт. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009. – 136с. ISBN 978-5-9984-0005-6.
3. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб.пособие для вузов. – 7-е изд., стер. М.:Высш.шк., 2001.–542 с:ил. ISBN 5-06-003634-0.

4. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента. Учебное пособие. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2002. 108 с. ISBN 5-85746-637-7.

5. Механика и термодинамика : лабораторный практикум по физике для 1, 2 курса технических специальностей всех форм обучения / Новосиб. гос. техн. ун-т ; [сост. В.Г. Дубровский и др.]. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2009.

6. Виртуальный лабораторный практикум «Механика и молекулярная физика»: электронное учебное пособие (тексто-графические учебные материалы) [Электронный ресурс] / А. Б. Гордиенко, Н. И. Гордиенок, А.В.Кособуцкий, Ю. И. Кызыласов.
http://physic.kemsu.ru/pub/library/learn_pos/mechmol/main.html

7. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1965. 511 с.

8. Деденко Л.Г. Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1977. 112 с.

9. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учеб. пособие / Бородюк В.П., Вощанин А.П., Иванов А.З. и др.; под ред. Г.К.Круга. – М.: Высш.шк. 1983. 216 с.

10. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.

11. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. – М.: МГУ, 1977. – 112 с.