Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к переаттестации по дисциплинам «Алгебра и геометрия» и «Численные методы»

(электронный ресурс)

Владимир 2018

Составители: **Горлов В.Н., Еркова Н.И.**

Методические указания к переаттестации по дисциплинам «Алгебра и геометрия» и «Численные методы» (электронный ресурс).- Владимир: Изд-во ВлГУ, 2018.- 25 с.

Рассмотрены численные методы решения нелинейных алгебраических уравнений. Изложен метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Приведены варианты индивидуальных заданий для переаттестации.

Методические указания разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлениям подготовки 02.03.03 – «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и 02.03.02. – «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и предназначены для студентов первого курса института прикладной математики, физики и информатики ВлГУ.

Рецензент – доктор технических наук, профессор
каф. ОиПФ ВлГУ Кузнецов А.А.

Оглавление

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ *f* (x)=0 МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ПОПОЛАМ (МЕТОД БИСЕКЦИЙ)

Пусть требуется с заданной точностью $\varepsilon > 0$ найти корень $\bar{x}$ уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (1.1)$$

Отрезок локализации *[a,b]*, т.е. отрезок, содержащий только один корень $\bar{x}$, будем считать заданным.

Предположим, что функция *f* непрерывна на отрезке *[a,b]* и на его концах принимает значения различных знаков:

$$f(a)\,f(b) < 0 \qquad (1.2)$$

На рис. 1 изображен случай, когда $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. В дальнейшем изложении будем обозначать отрезок *[a,b]* через $[a^{(0)},b^{(0)}]$. Примем за исходное значение корня середину отрезка – точку $x^{(0)} = (a^{(0)}+b^{(0)})/2$. Так как положение корня $\bar{x}$ на отрезке $[a^{(0)},b^{(0)}]$ неизвестно, то утверждать можно лишь то, что погрешность этого приближения не превышает половины длины отрезка (рис. 2):

$$\left|x^{(0)} - \bar{x}\right| \le \left(b^{(0)} - a^{(0)}\right)/2 \qquad (1.3)$$

Погрешность можно уменьшить путем уточнения отрезка локализации, т.е. замены начального отрезка $[a^{(0)},b^{(0)}]$ отрезком $[a^{(1)},b^{(1)}]$ меньшей длины. Согласно методу бисекции (половинного деления), в качестве $[a^{(1)},b^{(1)}]$ берут

тот из отрезков $[a^{(0)},x^{(0)}]$ и $[x^{(0)},b^{(0)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(1)})\,f(b^{(1)}) < 0$.

Этот отрезок содержит искомый корень. Действительно, если $f(a^{(1)})\,f(b^{(1)}) < 0$, то наличие корня следует из теоремы 2.1.

Теорема 2.1. Пусть функция f непрерывна на отрезке *[a,b]* и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$. Тогда отрезок *[a,b]* содержит, по крайней мере, один корень уравнения $f(x)=0$.

Если же $f(a^{(1)})f(b^{(1)})=0$, то корнем является один из концов отрезка. Середина полученного отрезка $x^{(1)} = (a^{(1)} + b^{(1)})/2$ дает приближение к корню с оценкой погрешности

$$\left|x^{(1)}-\bar{x}\right|\le\left(b^{(1)}-a^{(1)}\right)/2=(b-a)/2^2 .$$

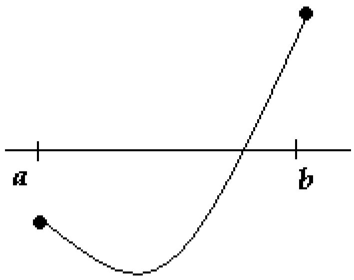

Рис. 1. График функции *f(x)*

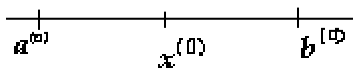

Рис.2. Точка $x^{(0)}$ – середина отрезка $[a^{(0)};b^{(0)}]$

За очередное уточнение отрезка локализации $[a^{(2)}, b^{(2)}]$ снова берется тот из отрезков $[a^{(1)}, x^{(1)}]$, $[x^{(1)}, b^{(1)}]$, на концах которого выполняется условие $f(a^{(2)})f(b^{(2)})\le 0$.

Рассмотрим $(n+1)$ итерацию метода. Пусть отрезок $[a^{(n)},b^{(n)}]$ уже найден и вычислены значения $x^{(n)}, f(a^{(n)}), f(b^{(n)})$. Тогда выполняются следующие действия:

1. Вычисляется $f(x^{(n)})$.

2. Если $f(a^{(n)})f(b^{(n)})<0$, то за отрезок локализации $[a^{(n+1)},b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[a^{(n)},x^{(n)}]$. В противном случае $f(x^{(n)})f(b^{(n)})<0$ и за $[a^{(n+1)},b^{(n+1)}]$ принимается отрезок $[x^{(n)},b^{(n)}]$.

3. Вычисляется $x^{(n+1)} = (a^{(n+1)}, \mathrm{b}^{(n+1)})/2$.

Неограниченное продолжение итерационного процесса даёт последовательность отрезков $[a^{(0)}, \mathrm{b}^{(0)}], [a^{(1)}, \mathrm{b}^{(1)}], ..., [a^{(n)}, \mathrm{b}^{(n)}]$, содержащих искомый

корень. Каждый из них (за исключением начального) получен делением пополам предыдущего отрезка.

Скорость сходимости. Середина *n*-го отрезка $x^{(n)} = (a^{(n)}, \mathrm{b}^{(n)})/2$ даёт приближение к корню $\bar{x}$ с оценкой погрешности

$$\left| x^{(n)} - \bar{x} \right| \le (b^{(n)} - a^{(n)})/2 = (b-a)/2^{(n+1)}. \qquad (1.4)$$

Из (1.4) видно, что метод бисекции сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/2$. По сравнению с другими методами метод бисекции сходится довольно медленно. Однако следует заметить, что для достижения разумной точности ε число итераций не будет очень большим. Например, для уменьшения первоначального отрезка локализации в 10^6 раз нужно 19 итераций.

Критерий окончания. Итерации следует вести до тех пор, пока не выполнится неравенство $b^{(n)} - a^{(n)} < 2\varepsilon$. При его выполнении, согласно оценке (1.4), можно принять $x^{(n)}$ за приближение к корню с точностью ε.

Пример. Найдём методом бисекции с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ положительный корень уравнения $4(1-x^2) - e^x = 0$. Этот корень локализован на отрезке $[0,1]$, причём $f(0) > 0, f(1) < 0$. Допустим, что $a^{(0)} = 0, b^{(0)} = 1, x^{(0)} = (a^{(0)} + b^{(0)}0/2 = 0.5$.

Первая итерация. Вычислим $f(x^{(0)}) \cong 1{,}3512$. Так как $f(a^{(0)}) \cdot f(x^{(0)}) > 0$, то $[a^{(1)}, \mathrm{b}^{(1)}] = [0.5{,}1]$. Вычисляем $x^{(1)} = 1/2(a^{(1)} + b^{(1)}) = 0{,}75$.

Вторая итерация. Вычисляем $f(x^{(1)}) \cong -0{,}3670$. Так как выполняется неравенство $f(a^{(1)})f(x^{(1)}) < 0$, то $[a^{(2)}, \mathrm{b}^{(2)}] = [0.5, 0.75]$ и $x^{(2)} = (a^{(2)} + b^{(2)})/2 = 0{,}625$.

Результаты следующих итераций (с четырьмя цифрами после десятичной точки) приведены в табл. 1. При *n=6* выполняется неравенство $b^{(6)} - a^{(6)} < 2 \cdot 10^{-2}$. Следовательно, заданная точность достигнута и можно принять $\bar{x} \cong x^{(6)}$. В результате $\bar{x} = 0.71 \pm 0.01$.

Таблица 1

Номер итерации n	$a^{(n)}$	$b^{(n)}$	$x^{(n)}$	$f(x^{(n)})$	$b^{(n)} - a^{(n)}$
0	0,0000	1,0000	0,5000	1,3513	1,0000
1	0,5000	1,0000	0,7500	-0,3670	0,5000
2	0,5000	0,7500	0,6250	0,5693	0,2500
3	0,6250	0,7500	0,6875	0,1206	0,1250
4	0,6875	0,7500	0,7187	-0,1182	0,0625
5	0,6875	0,7187	0,7031	0,0222	0,0312
6	0,7031	0,7187	0,7109		0,0156

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение *f(x) = 0* методом деления отрезка пополам

Номер варианта	*f(x)*	Номер варианта	*f(x)*
1	$\arccos x^{2-x}$	7	$2x^2 - x^4 - 1 - \ln x$
2	$\ln x - \dfrac{1}{1+x^2}$	8	$x^2 - x^3 - \dfrac{1}{4+x_2}$
3	$\ln\ln x - e^{-x^2}$	9	$x^3 - 3x - 2e^{-x}$
4	$arctg(1/x) - x^2$	10	$2^{x^2}(1/x)$
5	$tgx - \dfrac{1}{x}$	11	$e^x - \arccos\sqrt{x}$
6	$x^4 - 13x^2 + 36 - \dfrac{1}{x}$	12	$e^{\frac{1}{x^2}} - \ln x$

Номер варианта	f(x)	Номер варианта	f(x)
13	$arctgx-\frac{1}{x}$	19	$\frac{1+\cos x}{3-\sin x}-x$
14	$\ln\frac{1+x}{1-x}-\cos x^2$	20	$\sin x^2-6x+1$
15	$shx-x+1$	21	$\cos x^2-10x$
16	$arctgx-\ln x$	22	$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-x$
17	$chx-\frac{4x^3}{1+x^2}$	23	$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-e^{-x^2}$
18	$\frac{1}{3+2\cos x}-x^3$	24	$e^x-3-\cos x$
		25	$e^{-x}-arctgx$

2. МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ *f(x) = 0*

Применение метода простой итерации для решения нелинейного уравнения (1.1) связано с необходимостью преобразования этого уравнения к виду

$$x=\varphi(x). \tag{2.1}$$

Преобразование (2.1) (приведение уравнения к виду, удобному для итерации) можно выполнить различными способами; некоторые из них будут указаны ниже. Функцию φ далее будем называть итерационной функцией.

Допустим, что каким-либо образом выбрано приближенное значение корня $x^{(0)}$. Подставим $x^{(0)}$ в правую часть уравнения (2.1) и вычислим значение $x^{(1)}=\varphi(x^{(0)})$. Подставляя теперь $x^{(1)}$ в правую часть уравнения (2.1), получим $x^{(2)}=\varphi(x^{(1)})$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню, вычисляемых по формуле

$$x^{(n+1)}=\varphi(x^{(n)}),\quad n\geq 0 \tag{2.2}$$

Если существует предел построенной последовательности $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$, то переходя к пределу в равенстве (2.2) и предполагая функцию φ непрерывной, получим равенство

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}). \tag{2.3}$$

Геометрическая иллюстрация метода простой итерации. Построим график функции $y = x$ и $y = \varphi(x)$. На рис. 3 корень $\bar{x}$ уравнения (2.1) является абсциссой точки пересечения графиков функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Выберем начальное приближение $x^{(0)}$, которому отвечает расположенная на кривой $y = \varphi(x^{(0)})$ точка $M^{(0)}$ с координатами $(x^{(0)}, x^{(1)})$ (напомним, что $x^{(1)} = \varphi(x^{(0)})$). Соединим точку $M^{(0)}$ отрезком прямой $y = x^{(1)}$ с расположенной на прямой $y = x^{(1)}$ точкой $N^{(1)}$ с координатами $(x^{(1)}, x^{(1)})$. Проведем теперь через точку $N^{(1)}$ прямую $x = x^{(1)}$ до пересечения с кривой $y = \varphi(x)$ в точке $M^{(1)}$ с координатами $(x^{(1)}, x^{(2)})$. Продолжая этот процесс, получаем ломанную линию $M^{(0)}$ $N^{(1)}$ $M^{(1)}$ $N^{(2)}$..., для которой абсциссы точек $M^{(n)}$ представляют собой последовательные приближения $x^{(n)}$ к решению $\bar{x}$.

Сходимость метода простой итерации. Сходимость метода простой итерации связана с выполнением условия $|\varphi'(x)| < 1$.

Лемма 2.1. Пусть одношаговый итерационный метод обладает линейной скоростью сходимости в некоторой δ-окрестности корня $\bar{x}$. Тогда независимо от выбора начального приближения $x^{(0)} \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ последовательность приближений $x^{(n)}$ не выходит за пределы этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = c$ и верна оценка погрешности

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le q^n \left|x^{(0)} - \bar{x}\right|, n \ge 0$$

Теорема 2.1. Пусть в некоторой δ-окрестности корня $\bar{x}$ функция φ дифференцируема и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi'(x)| \le q \tag{2.4}$$

Тогда независимо от выбора начального приближения $x^{(0)}$ из указанной δ-окрестности корня итерационная последовательность не выходит из этой окрестности, метод сходится со скоростью геометрической прогрессии и справедлива оценка погрешности

$$\left|x^{(n)} - \bar{x}\right| \le q^n \left|x^{(0)} - \bar{x}\right| \tag{2.5}$$

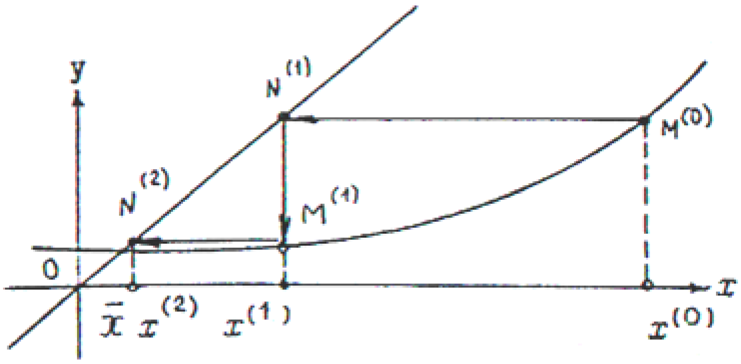

Рис. 3. Процесс вычисления приближений метода простой итерации.

Доказательство. Вычитая из равенства (2.2) равенство (2.3) и используя формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$x^{(n+1)} - \bar{x} = \varphi(x^{(n)}) - \varphi(\bar{x}) = \alpha^{(n+1)}(x^{(n)} - \bar{x}). \tag{2.6}$$

Здесь $\alpha^{(n+1)} = \varphi'(\xi^{(n)})$, где $\xi^{(n)}$-некоторая точка, расположенная между $x^{(n)}$ и $\bar{x}$. Если $x^{(n)} \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$, то $\left|\alpha^{(n+1)}\right| \le q$ в силу условия (2.2). Тогда на основании (2.4) получаем

$$\left|x^{(n+1)} - \bar{x}\right| \le q\left|x^{(n)} - \bar{x}\right|$$

Это означает, что метод простой итерации обладает линейной скоростью сходимости и поэтому доказательство теоремы завершается применением

Оценка погрешности (2.6) является априорной. Следует отметить, что неравенство (2.5), как правило, не используется для практической оценки погрешности. Одна из причин в том, что значение $\bar{x}$ неизвестно, кроме того, использование неравенства (2.5) приводит к существенно завышенной оценке погрешности.

Критерий окончания. Введем апостериорную оценку погрешности, пригодную для практического применения.

Теорема 22. Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и $x^{(0)} \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$. Тогда верна апостериорная оценка погрешности

$$\left|x^{(n)}-\bar{x}\right| \le \left(q/(1-q)\right)\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|, n \ge 1. \qquad (2.7)$$

Доказательство. В силу равенства (2.6) имеем

$$x^{(n)}-\bar{x} = \alpha^{(n)}\left(x^{(n-1)}-\bar{x}\right) = \alpha^{(n)}\left(x^{(n-1)}-x^{(n)}\right)+\alpha^{(n)}\left(x^{(n)}-\bar{x}\right).$$

Отсюда

$$x^{(n)}-\bar{x} = \left(\alpha^{(n)}/\left(1-\alpha^{(n)}\right)\right)\left(x^{(n-1)}-x^{(n)}\right). \qquad (2.8)$$

Взяв модуль от левой и правой частей этого неравенства и воспользовавшись неравенством $\left|\alpha^{(n)}/\left(1-\alpha^{(n)}\right)\right| \le q(1-q)$, получим (2.6). Если величина q известна, то неравенство (2.7) дает эффективный способ контроля погрешности и можно сформулировать следующий критерий окончания итерационного процесса. Вычисления следует вести до выполнения неравенства

$$\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right| < \left((1-q)/q\right)\varepsilon. \qquad (2.9)$$

Если это условие выполнено, можно считать, что $x^{(n)}$ является приближением к $\bar{x}$ с точностью до ε.

Пример. Используем метод простой итерации для вычисления положительного корня x уравнения $4\left(1-x^2\right)-e^x=0$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$. Преобразуем уравнение к виду (2.1), где $\varphi(x)=\sqrt{1-e^x/4}$. Заметим, что $\varphi'(x)=-e^x/\left(8\sqrt{1-e^x/4}\right)$, $\varphi''(x)=-e^x\left(1-e^x/8\right)\Big/\left(8\sqrt{1-e^x/4}\right)^3$. Так как $\varphi''<0$ на отрезке производная φ' монотонно убывает и $q=\max\left|\varphi'(x)\right|=\varphi'(b)\approx 0.37$. Следовательно, условие сходимости (2.4) выполнено. Возьмем $x^{(0)}=0.7$ и будем вести итерации до выполнения критерия (2.8). В табл. 2 соответствующие приближения приведены с десятью знаками мантиссы. Критерий окончания выполняется при $n=5$. После округления значения $x^{(5)}$ до 4 значащих цифр получим $\bar{x}=0.7035\pm 0.0001$

Таблица 2.

n	$x^{(n)}$	$\left(q/(1-q)\right)\left\lvert x^{(n)}-x^{(n-1)}\right\rvert$
0	0.7000000000	
1	0.7046714292	$3\cdot 10^{-3}$
2	0.7029968319	$1\cdot 10^{-3}$
3	0.7035984939	$4\cdot 10^{-4}$
4	0.7033824994	$2\cdot 10^{-4}$
5	0.7034600632	$5\cdot 10^{-5}$

При решении практических задач часто вместо критерия (2.8) используется привлекательный своей простотой критерий

$$\left|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right|<\varepsilon. \tag{2.10}$$

Действительно, если $0<q\le 1/2$, то $(1-q)/q>1$, и выполнение неравенства (2.21) влечет за собой выполнение неравенства (2.9) и использование критерия (2.21) оправдано. В то же время в случае $1/2\le q<1$ использование критерия (2.9) может привести к преждевременному прекращению итераций. Дело в том, что когда величина q близка к единице, итерационный процесс сходится медленно и расстояние между двумя последовательными приближениями $x^{(n)}$ и $x^{(n+1)}$ не характеризует расстояние от $x^{(n)}$ до решения $\bar{x}$.

Приведение уравнения к виду, удобному для итерации. Важным моментом в применении метода простой итерации является эквивалентное преобразование уравнения (1.1) к виду (2.1). Рассмотрим один из простых способов такого преобразования.

Предположим, что производная f' на отрезке [a,b] непрерывна и положительна. Тогда существуют положительные постоянные m, N такие, что $0<m\le f`(x)\le M,\ x\in[a,b]$. Приведем уравнение (1.1) к виду

$$x = x - \alpha f(x), \qquad (2.11)$$

Где $\alpha>0$. В этом случае итерационная функция φ имеет вид $\varphi(x)=x-\alpha f(x)$ Требуется выбрать α так, чтобы выполнялось условия (2.4), причем q должно быть по возможности минимальным.

Заметим,что $\mathrm{I}-\alpha\mathrm{M}\le\varphi`(x)=\mathrm{I}-\alpha f`(x)\le\mathrm{I}-\alpha m$, и поэтому $|\varphi`(x)|\le q(\alpha)=\max\{|1-\alpha M|,|1-\alpha m|\}$. Для того чтобы было выполнено неравенство $q(\alpha)>\mathrm{I}$, достаточно взять любое $\alpha\in(0,2/\mathrm{M})$. Конкретный выбор параметра α зависит от наличия информации о числах m и M.

Если известны обе величины, то лучшим является выбор $\alpha=\alpha_0=2/(\mathrm{M}+m)$. В этом случае $q(\alpha_0)=(\mathrm{M}-m)/(\mathrm{M}+m)$. Если же известно только M, то можно положить $\alpha=\alpha_1=\mathrm{I}/\mathrm{M}$. В этом случае

$$q(\alpha_1) = 1 - m/\mathrm{M}.$$

Кроме того, при $\alpha = \alpha_1$ производная φ`(x) неотрицательна, и в силу теоремы 2.2 сходимость будет монотонной.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение *f(x) = 0* методом простых итераций

Номер варианта	*f(x)*	Номер варианта	*f(x)*
1	$arccos\, x^2 - x$	12	$e^x - arccos\sqrt{x}$
2	$ln\, x - \frac{1}{1+x^2}$	13	$ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}$
3	$ln\, ln\, x - e^{-x^2}$	14	$ln^2 x - \frac{1}{x}$
4	$arctg\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$	15	$lg\, ln\, x - \frac{1}{1+x^2}$
5	$x - e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$	16	$arctgx - \frac{1}{x}$
6	$x^4 - 13x^2 + 36 - \frac{1}{x}$	17	$ln\frac{1+x}{1-x} - cos^2 x$
7	$2x^2 - x^4 - 1 - ln\, x$	18	$e^{-x^2} - \sqrt{x}$
8	$x - \frac{1}{arctg\, x}$	19	$arctg\, x - ln\, x$
9	$x^3 - 3x - 2e^{-x}$	20	$x - \frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36}$
10	$x - arctg(\frac{1}{x})$	21	$\frac{1}{3 + cosx} - x^3$
11	$x - ln(x - 1 + \sqrt{(1-x)^2 + 1})$	22	$x - e^{2x^2 - x^4 - 1}$

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ *f(x)=0* МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Метод Ньютона является одним из наиболее эффективных методов решения самых разнообразных нелинейных задач. Расчетные формулы метода можно получить, используя различные подходы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод касательных. Расчетную формулу для решения нелинейного уравнения (1.1) можно получить, используя простые геометрические соображения. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4. Пусть x- заданное начальное значение приближение к корню $\bar{x}$. В точке $M^{(0)}$ с координатами $(x^{(0)}, f(x^{(0)}))$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$ и за новое приближение $x^{(1)}$ примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью OX. Аналогично за приближение $x^{(2)}$ примем абсциссу точки пересечения с осью OX касательной , проведенной к графику в точке $M^{(1)}$ с координатами $(x^{(1)}, f(x^{(1)}))$.

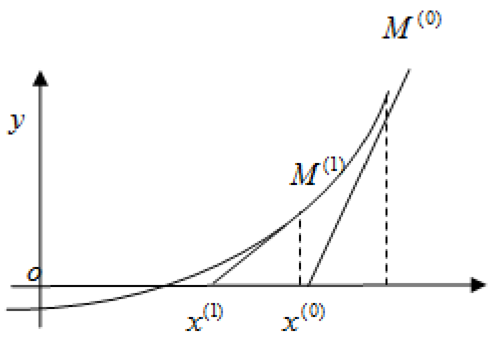

Рис. 4. Иллюстрация метода Ньютона.

Продолжая этот процесс, получим последовательность $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, $x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$ приближений к корню $\bar{x}$.

Напомним, что уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x^{(n)}, f(x^{(n)}))$, имеет вид

$$y = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}). \qquad (3.1)$$

Положим в выражении (3.1) $y = 0$. Тогда при условии $f'(x^{(n)}) \neq 0$ абсцисса x $x^{(n+1)}$ точки пересечения с осью OX удовлетворяет равенству

$$0 = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x^{(n+1)} - x^{(n)}). \qquad (3.2)$$

Выражая из (3.2) $x^{(n+1)}$, получаем расчетную формулу метода Ньютона

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - f(x^{(n)}) / f'(x^{(n)}), n \geq 0. \qquad (3.3)$$

Метод линеаризации. В более общем случае метод Ньютона можно рассматривать как итерационный метод, использующий специальную линеаризацию задачи и позволяющий свести решение исходного нелинейного уравнения к решению последовательности линейных уравнений.

Пусть приближение $x^{(n)}$ уже получено. Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x^{(n)}$ по формуле Тейлора

$$f(x) = f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) + f''(\xi)/2)(x - x^{(n)})^2, \qquad (3.4)$$

где ξ - некоторая точка , расположенная между x и $x^{(n)}$.

Заменяя в уравнении $f(x) = 0$ функцию $f(x)$ главной линейной частью разложения (3.4), получим линейное уравнение

$$f(x^{(n)}) + f'(x^{(n)})(x - x^{(n)}) = 0. \qquad (3.5)$$

Принимая решение уравнения (3.5) за новое приближение $x^{(n+1)}$, приходим к формуле (3.3).

Метод Ньютона эффективен, если известно хорошее начальное приближение для корня и в окрестности корня график функции имеет большую крутизну. Если же численное значение производной $f'(x)$ вблизи корня мало, то процесс вычисления корня может оказаться очень долгим.

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнение *f(x) = 0* методом Ньютона

Номер варианта	*f(x)*	Номер варианта	*f(x)*
1	$arccos\, x^2 - x$	15	$e^x - \ arccos\sqrt{x}$
2	$ln\, x - \frac{1}{1+x^2}$	16	$ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}$
3	$ln\, ln\, x - e^{-x^2}$	17	$ln^2 x - \frac{1}{x}$
4	$arctg\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$	18	$lg\, ln\, x - \frac{1}{1+x^2}$
5	$x - e^{\frac{-1}{\sqrt{x}}}$	19	$arctgx - \frac{1}{x}$
6	$x^4 - 13x^2 + 36 - \frac{1}{x}$	20	$ln\frac{1+x}{1-x} - cos^2 x$
7	$2x^2 - x^4 - 1 - ln\, x$	21	$e^{-x^2} - \sqrt{x}$
8	$x - \frac{1}{arctg\, x}$	22	$arctg\, x - ln\, x$
9	$x^3 - 3x - 2e^{-x}$	23	$x - \frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36}$
10	$x - arctg(\frac{1}{x})$	24	$\frac{1}{3 + cosx} - x^3$
11	$x - ln(x - 1 + \sqrt{(1-x)^2 + 1})$	25	$x - e^{2x^2 - x^4 - 1}$
12	$sin\, x^2 - 6x + 1$	26	$e^x - 3 - cos\, x$
13	$cosx^2 - 10x$	27	$e^x + arctg\, x$
14	$arccos(e^x - 3) - x$	28	$\frac{1+x}{1-x} - e^{\frac{1}{x}}$

4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГАУССА

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

где числа a_{ij} (i = 1,2, …, m; j = 1,2, …, n) называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, \dots, b_m$ – *свободными членами*. В общем случае количество уравнений m может не совпадать с числом неизвестных n. На практике встречаются все ситуации: $m = n$, $m < n$ и $m > n$.

Решением системы (4.1)называется такой набор чисел (c_1, c_2, ... , c_n), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество. *Совместная система* – система, имеющая хотя бы одно решение. *Несовместная система* – система, не имеющая ни одного решения. *Определенная система* – система, имеющая единственное решение. *Неопределенная система* – система, имеющая более одного решения. Каждое решение неопределенной системы называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными* (*равносильными*), если множества всех решений этих систем совпадают.Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Однородная система – система, у которой все свободные члены равны нулю($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

в противном случае она называется *неоднородной*. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*. Систему (4.1) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B$$

или
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{m} \end{pmatrix}$ – *матрица системы*,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ –соответственно *столбец неизвестных*(или вектор-столбец) и *столбец свободных членов.*

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Решение системы можно записать в виде столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\bar{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

Решение системы линейных уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса называют точный метод решения невырожденной системы линейных уравнений, состоящий в том, что последовательным исключением неизвестных систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4.2}$$

приводят к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n, \end{cases}$$

решение которой находят по рекуррентным формулам

$$x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad x_n = d_n, \qquad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Пусть исходная система имеет вид (4.2). Предположим, что $a_{11} \neq 0$ и разделим обе части первого уравнения системы на a_{11}. В результате получим

$$x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = b_1^1,$$

где

$b_{1j} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2,3, \dots, n$, $b_1^1 = b_1/a_{11}$. С помощью первого уравнения системы, разделенного на a_{11}, исключим из всех уравнений системы, начиная со второго, слагаемые, содержащие x_1. Для этого умножаем обе части полученного первого уравнения последовательно на $a_{21}, a_{31,} \dots a_{n1}$ и вычитаем соответственно из второго, третьего, …., n-го уравнения системы. В результате получаем систему, порядок которой на единицу меньше порядка исходной системы. Аналогично преобразуем полученную систему. В результате n-кратного повторения этого преобразования получим систему с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\qquad x_2 + \cdots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n = d_n, \end{cases}$$

которая эквивалентна исходной системе и легко решается. В самом деле, из последнего уравнения находим x_n, подставляем x_n в предпоследнее уравнение, найдем x_{n-1}, затем x_{n-2} и т.д. до x_1, которое находим из первого уравнения системы, когда уже известны все остальные неизвестные.

Таким образом, вычисления по методу Гаусса распадаются на два этапа: на первом этапе, называемом прямым ходом метода, исходную систему преобразуют к треугольному виду. На втором этапе, который называют обратным ходом, решают треугольную систему, эквивалентную исходной.

Коэффициенты $a_{11,}a_{22}^{1}, a_{33}^{2},..$ назовем ведущими элементами метода Гаусса. На каждом шаге предполагалось, что $a_{kk}^{k-1} \neq 0$. Если окажется, что это не так, то в качестве ведущего элементаможно использовать любой другой ненулевой коэффициент системы.

Задания для самостоятельной работы

Решить систему линейных уравнений вида *Ax*=*b* методом Гаусса

Номер варианта	Матрица коэффициентов системы A			Столбец свободных членов b
1	1,84 2,32 1,83	2,25 2,60 2,06	2,53 2,82 2,24	-6,09 -6,98 -5,52
2	2,58 1,32 2,09	2,93 1,55 2,25	3,13 1,58 2,34	-6,66 -3,58 -5,01
3	2,18 2,17 3,15	2,44 2,31 3,22	2,49 2,49 3,17	-4,34 -3,91 -5,27
4	1,54 3,69 2,45	1.70 3,73 2,43	1,62 3,59 2,25	-1,97 -3,79 -2,26
5	1,53 2,35 3,83	1,61 2,31 3,73	1,43 2,07 3,45	-5,13 -3,69 -5,98
6	2,36 2,51 2,59	2,37 2,40 2,41	2,13 2,10 2,06	1,48 1,92 2,16
7	3,43 4,17 4,30	3,38 4,00 4,10	3,09 3,65 3,67	5,52 6,93 7,29
8	3,88 3,00 2,67	3,78 2,79 2,37	3,45 2,39 1,96	10,41 8,36 7,67

9	3,40 2,64 4,64	3,26 2,39 4,32	2,90 1,96 3,85	13,05 10,30 17,89
10	2,53 3,95 2,78	2,36 4,11 2,43	1,93 3,66 1,94	12,66 21,97 13,93
11	2,16 3,55 4,85	1,96 3,23 4,47	1,56 2,78 3,97	13,16 21,73 29,75
12	2,69 2,73 2,93	2,47 2,39 2,52	2,07 1,92 2,02	19,37 19,43 20,80
13	3,72 4,47 4,96	3,47 4,10 4,53	3,06 3,63 4,01	30,74 36,80 40,79
14	4,35 4,04 3,14	4,39 3,65 2,69	3,67 3,17 2,17	40,15 36,82 28,10
15	4,07 2,84 4,99	3,79 2,44 4,50	3,37 1,95 3,97	40,77 27,68 49,37
16	3,19 4,43 3,40	2,89 4,02 2,92	2,47 3,53 2,40	33,91 47,21 32,92
17	2,57 4,47 4,89	2,26 4,03 4,40	1,84 3,57 3,87	28,66 50,27 55,03
18	2,83 3,00 3,72	2,50 2,55 3,21	2,08 2,07 2,68	33,28 33,59 43,43
19	3,78 4,33 4,76	3,44 3,88 4,24	3,02 3,39 3,71	46,81 53,43 58,73
20	4,59 4,83 4,06	4,24 4,36 3,53	3,82 3,88 3,01	59,54 62,33 52,11
21	4,56 3,21 4,58	4,20 2,73 4,04	3,78 2,25 3,52	61,86 42,98 61,67
22	3,75 4,18 4,43	3,39 3,70 3,88	2,97 3,22 3,36	53,38 59,28 62,62

23	2,95 5,11 4,38	2,58 4,62 3,82	2,16 4,14 3,30	44,16 46,68 65,34
24	2,93 3,47 4,78	2,55 2,98 4,22	2,14 2,50 3,70	46,41 54,78 75,81
25	3,74 4,02 4,18	3,36 3,51 3,61	2,94 3,04 3,09	63,26 67,51 70,03
26	4,07 5,30 5,11	4,28 4,79 4,54	3,87 4,32 4,03	84,43 95,45 91,69
27	4,90 3,79 4,01	4,50 3,27 3,43	4,09 2,81 2,91	94,18 71,57 75,45
28	4,25 3,86 5,40	3,84 3,84 4,82	3,43 2,87 4,30	86,07 77,12 108,97
29	3,35 5,41 3,88	2,94 4,88 3,30	2,53 4,41 2,78	70,69 115,38 81,07
30	3,05 4.14 5,63	2,64 3,61 5,03	2,23 3,14 4,52	67,17 91,43 125,40

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондаков Н.С. Основы численных методов/ практикум. - М.: Московский гуманитарный университет, 2014.- 92 с. // http://www. iprbookshop. ru/36690.
2. Колдаев В.Д. Численные методы и программирование: учебное пособие.-М.ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2016.- 336 с.

3. Бахвалов Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях/ учебное пособие.- М.: БИНОМ. Лабораторя знаний, 2015.- 241 с. //http://www. iprbookshop.ru/ 12283.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
5. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576
6. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики – Серия «Учебники для вузов. Специальная литература». – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 736 с.