Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Н.И. Еркова

Методические указания к переаттестации по дисциплине «Алгебра и геометрия»
Часть 2

Владимир 2018

Составитель: Еркова Н.И.
Методические указания к переаттестации по дисциплине
«Алгебра и геометрия» Часть 2

Данное пособие содержит необходимый теоретический материал и индивидуальные задания по разделу линейной алгебры: системы линейных алгебраических уравнений. Предназначено для студентов-бакалавров направлений подготовки 02.03.02 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 02.03.03 – «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Рецензент: Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых *Д.Я. Данченко*

Содержание

Глава 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

где числа a_{ij} (i = 1,2, …, m; j = 1,2, …, n) называются ***коэффициентами системы***, а числа $b_1, \dots, b_m$ – ***свободными членами***.

В общем случае количество уравнений m может не совпадать с числом неизвестных n. На практике встречаются все ситуации: $m = n$, $m < n$ и $m > n$.

Решением системы (*)называется такой набор чисел (c_1, c_2, ... , c_n), что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо x_1, ..., c_n вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Совместная система **–** система, имеющая хотя бы одно решение.

Несовместная система **–** система, не имеющая ни одного решения.

Определенная система – система, имеющая единственное решение.

Неопределенная система – система, имеющая более одного решения. Каждое решение неопределенной системы называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных называются ***эквивалентными*** **(*равносильными*)**, если множества всех решений этих систем совпадают.Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях системы при условии, что преобразования выполняются лишь над строками матрицы.

Однородная система – система, у которой все свободные члены равны нулю($b_1 = b_2 = \ \dots = b_m = 0$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

в противном случае она называется ***неоднородной***. Однородная система всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

Систему (*) можно записать в матричной форме:

$$A \cdot X = B$$

или $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{m} \end{pmatrix}$ – ***матрица системы***,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ –соответственно***столбец неизвестных***(или вектор-столбец) и ***столбец свободных членов.***

Произведение матриц $A \cdot X$ определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X (n штук).

Решение системы можно записать в виде столбца $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\bar{A} = (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right).$$

1.2. Решение систем линейных алгебраических уравнений

1.2.1. Матричный метод

Напомним, что систему линейных алгебраических уравнений(*) можно записать в матричной форме: $A \cdot X = B$.

Тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

► **Пример 1.** Решить систему уравнений матричным способом (с помощью обратной матрицы)

$$\begin{cases} 7y + 5x = 37 \\ 6x - y = -12 \end{cases}$$

Решение. Матрица системы A, столбец неизвестных X и столбец свободных членов B имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 37 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

det$A$ = – 47 и обратная матрица равна:

$$A^{-1} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 \\ -12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} -1 \cdot 37 + (-7) \cdot (-12) \\ -6 \cdot 37 + 5 \cdot (-12) \end{pmatrix} = \frac{1}{-47} \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ -282 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Значит решение системы: x = -1, y = 6.

Ответ: x = -1, y = 6 (можно записать ответ в виде{-1; 6}).

1.2.2. Метод Крамера

Рассмотрим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Исключим из нее y. С этой целью умножим первое уравнение на a_{22}и из того, что получится, вычтем второе уравнение, умноженное на a_{12}:

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x + a_{22}a_{12}y = a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y = a_{12}b_2 \end{cases}$$

$$(a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

Коэффициент, стоящий перед x есть не что иное, как определитель матрицы системы A (см. п. 1.3), а в правой части равенства можно увидеть определитель, полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов, обозначаемый Δ_x:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Получаем $\Delta \cdot x = \Delta_x$, откуда, если $\Delta \neq 0$, получим $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$.

Теперь исключим из начальной системы x. С этой целью умножим второе уравнениена a_{11}и из того, что получится, вычтем,первое уравнение, умноженноена a_{21}:

$$\begin{cases} a_{21}a_{11}x + a_{21}a_{12}y = a_{21}b_1 \\ a_{11}a_{21}x + a_{11}a_{22}y = a_{11}b_2 \end{cases}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

Коэффициент, стоящий при y – определитель матрицы системы A, а в правой части равенства определитель, полученный заменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов, обозначаемый Δ_y:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Получаем, $\Delta \cdot y =, \Delta_y$ откуда,если $\Delta \neq 0, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

Этот метод решения системы называется «***метод*** **(*правило*)** ***Крамера*»**.

Итак, 1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

2. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система не имеет решений.

3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечно много решений.

► **Пример 2.** Решить систему уравнений по правилу Крамера.

$$\begin{cases} 7y + 5x = 37 \\ 6x - y = -12 \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) - 6 \cdot 7 = -47 \neq 0 =>$$

система имеет единственное решение.

Вычислим Δ_x (полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 37 & 7 \\ -12 & -1 \end{vmatrix} = 37 \cdot (-1) - (-12) \cdot 7 = 47.$$

Вычислим Δ_y (полученныйзаменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 37 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-12) - 6 \cdot 37 = -282.$$

Находим неизвестные переменные по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{47}{-47} = -1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-282}{-47} = 6.$$

Самостоятельно можете убедиться в правильности решения путем подстановки найденных значений в исходную систему.

Ответ: $x = -1,\ y = 6$.

Рассмотрим теперь систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Для решения этой системы по правилу Крамера вычисляются определители:

определитель матрицы системы A:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

определитель, полученный заменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов, обозначаемый Δ_x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & \mathrm{a}_{12} & \mathrm{a}_{13} \\ b_2 & \mathrm{a}_{22} & \mathrm{a}_{23} \\ b_3 & \mathrm{a}_{32} & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix},$$

и определители, полученные заменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов (обозначается Δ_y) и третьего столбца на столбец свободных членов (обозначается Δ_z),

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & b_1 & \mathrm{a}_{13} \\ \mathrm{a}_{21} & b_2 & \mathrm{a}_{23} \\ \mathrm{a}_{31} & b_3 & \mathrm{a}_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & b_1 \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & b_2 \\ \mathrm{a}_{31} & \mathrm{a}_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.}$$

Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система не имеет решений.

Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений.

Напомним, что этот метод решения системы называется «***метод*** (***правило***) ***Крамера***».

► **Пример 3.** Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \mathbf{-3}, \\ 2x + 3y + 4z = \mathbf{5}, \\ 3x + 4y + 6z = \mathbf{8}. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (18 - 16) - 2 \cdot (12 - 12) - 3 \cdot (8 - 9) = 2 - 0 + 3 = 5 \neq 0 =>$$

система имеет единственное решение.

Вычислим Δ_x (полученныйзаменой в Δ первого столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \mathbf{-3} & 2 & -3 \\ \mathbf{5} & 3 & 4 \\ \mathbf{8} & 4 & 6 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (18 - 16) - 2 \cdot (30 - 32) - 3 \cdot (20 - 24) = -6 + 4 + 12 = 10.$$

Вычислим Δ_y (полученный заменой в Δ второго столбца на столбец свободных членов):

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{-3} & -3 \\ 2 & \mathbf{5} & 4 \\ 3 & \mathbf{8} & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (30 - 32) + 3 \cdot (12 - 12) - 3 \cdot (16 - 15) = -2 + 0 - 3 = -5.$$

Наконец,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & \mathbf{5} \\ 3 & 4 & \mathbf{8} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (24 - 20) - 2 \cdot (16 - 15) - 3 \cdot (8 - 9) = 4 - 2 + 3 = 5.$$

Находим неизвестные переменные по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Самостоятельно можете убедиться в правильности решения путем подстановки найденных значений в исходную систему.

Ответ: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1.$

1.2.3. Метод Гаусса

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения *любой* системы линейных уравнений. Как мы помним, если определитель матрицы равен нулю, то обратной матрицыне существует, соответственно найти решение системы матричным методом невозможно. Правило Крамераприи$\Delta = 0$ однозначного ответа не дает (система имеет бесконечно много решений или несовместна).Метод Гаусса основан на известном из обычного школьного курса алгебры последовательном исключенииинеизвестных переменных и в любом случаеприведет нас к ответу. Единственное ограничение в этом методе – ни один элемент главной диагонали не должен быть нулевым. Но почти всегда можно поменять уравнения (а в матрице системы – строки) местами так, чтобы это условие выполнялось.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (*)$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (*прямой ход*) система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному*) виду.

Сразу скажем, что на практике удобнее работать не ссамой системой (*), а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками таким образом, чтобы привести ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} & \cdots & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad (**)$$

Где$k \leq n$, $a_{ii} \neq 0$, $i = 1$, …, k. Коэффициенты a_{ii} назовем *главными* элементами матрицы.

Также удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (для этого можно переставить местамиуравнения, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 1$).

На втором этапе (*обратный ход*) идет последовательное определение неизвестных из ступенчатой системы, соответствующей ступенчатой расширенной матрице (**):

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots a'_{1k}x_k + \cdots + a'_{1n}x_n = b_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots a'_{2k}x_k + \cdots + a'_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{kk}x_k + \cdots + a'_{kn}x_n = b_k, \\ 0 = b_{k+1}, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Если в процессе приведения системы (*) к ступенчатому виду появятся нулевые уравнения, т. е. равенства вида 0 = 0, то их отбрасывают.Далее возможны 3 варианта.

1) Если *ступенчатая система–треугольная*, т.е. k=n, то исходная *система имеет единственное решение*. Изпоследнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестныеx_{n-2}, ... ,x_1.

2) Если появится *уравнение вида* $0 = b_i$, а число $b_i \neq 0$ (т.е. в системе получено уравнение, в котором все неизвестные имеют нулевые коэффициенты, а правая часть отлична от нуля), то это свидетельствует о том, что *система несовместна*.

3) Если *число неизвестных* n *больше числа уравнений* k, то ступенчатая *система уравнений имеет бесчисленное множество решений*. В полученной системе последнее уравнение будет содержать более одного неизвестного. Из него выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные (x_{k+1}, ... ,x_n). Затем подставляем значение x_k в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1}через (x_{k+1}, ... ,x_n); затем находим x_{k-2}, ... ,x_1. Придавая свободным неизвестным (x_{k+1}, ... ,x_n)произвольные значения, получим бесчисленное множество решений системы.

Рассмотрим метод Гаусса подробнее на примере.

► **Пример 15.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ x+2y-z=5 \\ 2x+9y-7z=5 \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 9 & -7 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}}-\mathrm{I} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}}-\mathrm{I}\cdot 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}}+\mathrm{II}\cdot 3 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x+3y-2z=4 \\ -y+z=1 \end{cases}.$$

Теперь для наглядности запишем эту систему в другом виде(слева остаются только главные переменные):

$$\begin{cases} x+3y=2z+4 \\ y=z-1 \end{cases}.$$

Подставляя выражение для y в первое уравнение, получим $x = 7 - z$. Обозначая свободную переменную z через t, получим общее решение системы: $(7-t; t-1; t)$. Частное решение системы получим, например, при $t = 0$: $(7;-1;0)$.

Ответ: система совместна и неопределенна;

общее решение$(7-t;t-1;t)$;
частное решение $(7;-1;0)$.

► **Пример 16.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований *над строками* расширенной матрицей системы приведем ее к ступенчатому виду. Для начала поменяем 1-ю и 2-ю строки местами, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I}\cdot 2 \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{I} \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{I}\cdot 5 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2-1\cdot 2 & 7-3\cdot 2 & 3-5\cdot 2 & 1+2\cdot 2 & 5-3\cdot 2 \\ 1-1 & 5-3 & -9-5 & 8+2 & 1-3 \\ 5-1\cdot 5 & 18-3\cdot 5 & 4-5\cdot 5 & 5+2\cdot 5 & 12-3\cdot 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{II}\cdot 2 \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{II}\cdot 3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему, которая соответствует полученнойрасширенной ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -1 \end{cases}$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3 и x_4, а затем подставим в первое уравнение и выразим x_1 через x_3 и x_4. В итоге получим общее решение системы: $x_2 = 7x_3-5x_4 - 1$,$x_1 = -26x_3+17x_4+5$ или $x_1 = -26u+17v+5$,$x_2 = 7u-5v - 1$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, где u,v – любые числа.

Если положить, например, u= 0, v= 0, то найдем одно из частных решений этой системы$x_1 = 5$, x_2=–1, x_3= 0, x_4 =0.

Ответ: общее решение системы:x_1 = –26u+17v+5, x_2 = 7u–5v – 1,
x_3=u, x_4=v, где u, v – любые числа.

► **Пример 17.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Т.к. коэффициент a_{11} равен 1, то менять строки местами не будем. Произведем элементарные преобразования над строчками расширенной матрицы системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}} - \mathrm{I}\cdot 2 \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} - \mathrm{I} \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{I}\cdot 4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right)$$

Поменяем местами 2-ю и 3-ю строки

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 2 & -5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{II}} : (-1) \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{III}} + \mathrm{II}\cdot 3 \\ \boxed{\mathrm{IV}} + \mathrm{II}\cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathrm{III}} : (-5) \\ \sim \\ \boxed{\mathrm{IV}} - \mathrm{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ \quad\quad x_2 \quad\quad = 2 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 = -1 \end{cases}$$

Осуществляем обратный ход. Из 3-го уравнения x_3= –1, из 2-го уравнения x_2 = 2. Подставляем найденные значенияx_1 = –1 и x_2 = 2 в первое уравнение и находим x_3 = 1.

Ответ: x_1= –1,x_2 = 2, x_3=1.

► **Пример 18.** Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

Решение. Приведем кступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 1 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{II}} - 6\cdot \mathrm{I} \\ \sim \\ \boxed{\mathbf{III}} + 7\cdot \mathrm{I} \\ \boxed{\boldsymbol{IV}} + 3\cdot \mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 10 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{III}} + \mathrm{II} \\ \boxed{\mathbf{IV}} + \mathrm{II} \\ \sim \\ \mathrm{II}\cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 15x_2 + 15x_3 + 19x_4 = 15. \\ -9x_4 = 0 \end{cases}$$

Перенесем в каждом уравнении направо свободную переменную x_3 и найденную из третьего уравнения переменную $x_4 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 - 2x_3 \\ 15x_2 = 15 - 15x_3 \end{cases}.$$

Из второго уравнения выразим x_2 через x_3 и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - 2x_3 - 2x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 1 - x_3 \\ x_1 = 1 - 2x_3 - 2\cdot(1 - x_3) = -1 \end{cases}$$

Обозначим свободную переменную: x_3 через u. Тогда общее решение системы: $x_1 = -1$, $x_2 = 1 - u$, $x_3 = u$, $x_4 = 0$ или (–1; 1 – u; u; 0). Частное решение получим, например при u = 1: (–1; 0; 1; 0).

Ответ: система совместна и неопределенна;
общее решение (–1; 1 – u; u; 0).;
частное решение (–1; 0; 1; 0).

► **Пример 19.** Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ x - 4y - 2z = -13 \\ 3x - 5y + z = -4 \end{cases}$$

Решение. Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 1 & -4 & -2 & -13 \\ 3 & -5 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{\mathbf{II}} - \mathrm{I} \\ \sim \\ \boxed{\mathbf{III}} - \mathrm{I} \cdot 3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -22 \\ 0 & 1 & 1 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \boxed{\mathbf{II}} : (-2) \\ \sim \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & -31 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \sim \\ \boxed{\mathbf{III}} - \mathrm{II} \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -42 \end{array}\right).$$

Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ y + z = 11 \\ 0 = -42 \end{cases}$$

Очевидно, что система не имеет решений (последнее уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -42$)

Ответ: система несовместна.

При решении системы методом Гаусса необязательно выписывать расширенную матрицу системы и приводить ее к ступенчатому виду.

► **Пример 20.** Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \mathbf{-3}, \\ 2x + 3y + 4z = \mathbf{5}, \\ 3x + 4y + 6z = \mathbf{8}. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $a_{11} = 1 \neq 0$, поэтому первое уравнение остается без изменения. Первое уравнение умножим на 2 и вычтем его из второго уравнения; и первое же уравнение умножим на 3 и вычтем его из третьего уравнения, в результате получим систему:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -3, \\ \quad -y + 10z = \mathbf{11}, \\ -2y + 15z = \mathbf{17}. \end{cases}$$

Далее видим, что $a_{22} = -1 \neq 0$, поэтому второе уравнение разделим на -1:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \mathbf{-3}, \\ \quad y - 10z = \mathbf{-11}, \\ -2y + 15z = \mathbf{17}. \end{cases}$$

Теперь второе уравнение умножим на -2 и вычтем его из третьего уравнения:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \mathbf{-3}, \\ \quad y - 10z = \mathbf{-11}, \\ \qquad -5z = \mathbf{-5}. \end{cases}$$

Мы получили систему с треугольной матрицей. Из третьего уравнения $z = \mathbf{1}$**,** подставим во второе уравнение и получим

$y = \mathbf{-1}$. Из первого уравнения, зная z и y, найдем $x = \mathbf{2}$.

Ответ: $x = 2,\ y = -1,\ z = 1.$

§ 2. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить систему уравнений

а) методом Крамера; *б*) матричным методом.

1.1. $\begin{cases} y-2x=5 \\ 3x+4y=9 \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} 3y-2x=17 \\ 8x+2y=2 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2y-x=-7 \\ 3x-y=16 \end{cases}$ **1.4.** $\begin{cases} 2y-5x=4 \\ 7x-5y=1 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 5y-3x=1 \\ 2x+3y=12 \end{cases}$ **1.6.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 12y-5x=4 \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} y-7x=10 \\ 5x-3y=2 \end{cases}$ **1.8.** $\begin{cases} 3x+4y=9 \\ y-2x=5 \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 4x+y=1 \\ 3y-2x=17 \end{cases}$ **1.10.** $\begin{cases} 7x-3y=-1 \\ 2y-3x=4 \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} 3x-y=16 \\ 2y-x=-7 \end{cases}$ **1.12.** $\begin{cases} 7x-5y=1 \\ 2y-5x=4 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x+3y=12 \\ 5y-3x=1 \end{cases}$ **1.14.** $\begin{cases} x+2y=8 \\ 12y-5x=4 \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ y-7x=10 \end{cases}$ **1.16.** $\begin{cases} 7x-3y=-1 \\ 2y-3x=4 \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} x+3y=6 \\ y-2x=-5 \end{cases}$ **1.18.** $\begin{cases} 3y+2x=12 \\ 5x-y=13 \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} 4y-3x=-24 \\ x-7y=25 \end{cases}$ **1.20.** $\begin{cases} 4x-y=-8 \\ 5y+3x=17 \end{cases}$

1.21. $\begin{cases} y+7x=25 \\ 4x+3y=24 \end{cases}$ **1.22.** $\begin{cases} 2y+5x=20 \\ 7x+3y=29 \end{cases}$

1.23. $\begin{cases} x-3y=-6 \\ 4y-2y=10 \end{cases}$ **1.24.** $\begin{cases} y+6x=12 \\ 7x+5y=37 \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} 5y + 3x = 30 \\ 4x - y = 17 \end{cases}$ **1.26.** $\begin{cases} y + 5x = 10 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений

а) методом Крамера; *б*) методом Гаусса.

2.1. $\begin{cases} 3x + 7y - z = -2 \\ x + 4y + 5z = 3 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} 5x + y - z = 14 \\ x + 2z = 5 \\ 4x + y - z = 11 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 5x + y = -3 \\ 3x + 7y + z = 13 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$ **2.4.** $\begin{cases} x - 2y + 4\,z = 7 \\ y - z = 0 \\ -x + 7y + 2z = 4 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ x + 3y - z = -13 \\ 5x - y + 4z = 17 \end{cases}$ **2.6.** $\begin{cases} 2x + 5y - 7z = 12 \\ 3x - y + 4z = 7 \\ x - 3z = -1 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} -x + 4y \pm z = 9 \\ 2y + z = 0 \\ 5x + y \pm 4z = -6 \end{cases}$ **2.8.** $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 4x + 3y + z = 2 \\ 3x - y + 5z = 41 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 3x + 2y - 7z = 3 \\ 5x - 3y + z = 5 \\ 2x + 5z = 9 \end{cases}$ **2.10.** $\begin{cases} 3y - 5z = 4 \\ 3x - 2y + 7z = -5 \\ 2x + 5y - z = 10 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 5x - y - 3\,z = 0 \\ 3x + 2y = 8 \\ 2x + y + 4z = 17 \end{cases}$ **2.12.** $\begin{cases} 4x - 2y + 5z = -7 \\ 3x + 5y - 2z = -1 \\ 2x + z = -1 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 8 \\ 5x - y + 2z = 17 \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} 8x + z = 14 \\ 5x + y + 3z = 3 \\ 2x + 3y - 5z = 11 \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 4y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 13 \\ x + 4y - z = 5 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -3x + 7y + 5z = 6 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = 4 \\ 3y + z = 2 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 4x + 3z = 2 \\ 3y + 2z = 4 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x + y + 5z = 9 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} 8x - y + 3z = 3 \\ 5x + 3y + 4z = 7 \\ -3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x + 4y + 6z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 9 \\ 2x + y + 3z = 6 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x + 2y + 3z = -8 \\ -2x + 4y + 5z = 2 \\ -3x + y + 2z = 9 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = -7 \\ -3x - 4y + 2z = 1 \\ 4x + 3y - 6z = 3 \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} 3x + 5y - 2z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 6 \\ x - 4y + 5z = 6 \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} 3x + 7y - 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ x + 6y - 4z = 5 \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} 2x + y - 3z = -5 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \\ -x + 4y - 5z = -8 \end{cases}$

Задание 3. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 6 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 6x_4 = 9 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 23 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -11 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 12 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 12 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 15 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 34 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -19 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 18 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 19 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 7 \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 12 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 9 \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 15 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 6x_4 = -9 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 15 \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 9 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -7 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 19 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 9 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 7 \\ 3x_1 + 10x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 36 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 29 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -9 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -7 \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 9 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 34 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 15 \\ -4x_1 - 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 19 \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 5x_1 + 14x_2 - 5x_3 - 8x_4 = 60 \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 - 5x_4 = 61 \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 13 \\ 2x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 18 \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 15 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6 \\ 4x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 24 \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 23 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 3x_4 = -11 \\ 4x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 - 7x_5 = 12 \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 47 \\ 6x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 9x_4 = 18 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -29 \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 25 \\ 5x_1 + 16x_2 + 4x_3 = 29 \\ 4x_1 + 13x_2 + 9x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 37 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 36 \end{cases}$

Библиографический список

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).

2. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: ил. – (Высшее образование).

3. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики – Серия «Учебники для вузов. Специальная литература». – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 736 с.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1. Учеб.пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Г.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 6-е изд. – М.: ООО«Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование»», 2007. – 304 с.: ил.

5. Орешкина, О.В. Элементы линейной алгебры. Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений: учеб.-практ. пособие / О.В. Орешкина, Н.И. Еркова ; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 90с. – ISBN 978-5-9984-0780-2.