Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Н.И. Еркова

Методические указания к переаттестации по дисциплине «Алгебра и геометрия»
Часть 1

Владимир 2018

Составитель: Еркова Н.И.
Методические указания к переаттестации по дисциплине
«Алгебра и геометрия» Часть 1

Данное пособие содержит необходимый теоретический материал и индивидуальные задания по разделам линейной алгебры: матрицы и определители. Предназначено для студентов-бакалавров направлений подготовки 02.03.02 – «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 02.03.03 – «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

.

Рецензент: Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых *Д.Я. Данченко*

Содержание

§ 1. МАТРИЦЫ и ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Основные понятия

Матрицей A размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, элементами которой могут быть числа, а также другие математические выражения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицы обозначаются большими латинскими буквамиA, B, C и др., а элементы матрицы – соответствующими маленькими латинскими буквами с указанием двойного индекса, где первое число i– это номер строки(i= 1,2, …, m), а второе число j– это номер столбца (j = 1,2, …, n) на пересечении которых стоит данный элемент. Например, элемент a_{32} –матрицы A расположен в 3-ей строке, 2-м столбце. Встречается обозначение $A_{m\times n} = (a_{ij})$.

Матрица может состоять из одной строки (*вектор-строка*), из одного столбца (*вектор-столбец*) и даже из одного элемента:

$$B = (b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad b_{14}), \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \quad W = (w_{11}) = w_{11}.$$

Матрица, состоящая из одного числа (т.е. размера 1 x 1), отождествляется с этим числом.

Квадратная матрица n-го порядка – матрица размера $n \times n$, т.е. у квадратной матрицы количество строк равно количеству столбцов.

Главная диагональ квадратной матрицы n-го порядка – диагональ, идущая из верхнего левого угла в нижний правый (слева направо и сверху вниз), т.е. от элемента a_{11} к элементу a_{nn}.

Диагональная матрица– квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали (т.е. с индексами $i \neq j$) равны нулю.

Треугольная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали (т.е. с индексами $i<j$или$i>j$) равны нулю. Соответственно называют нижнетреугольная и верхне треугольная матрица (по расположению ненулевых элементов).

Единичная матрица (обозначается E) – диагональная матрица, у которойна главной диагонали все элементы равны единице.

Нулевая матрица (обозначается O) – матрица любого размера, у которой все элементы равны нулю.

В матричном исчислении матрицы O и E играют соответственно роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица вида$C = (A \mid B)$,составленная из двух матриц(с одинаковым количеством строк), разделенных вертикальной чертой, называется ***расширенной***.

Примеры матриц: M – квадратная, N –нижнетреугольная, V – верхнетреугольная, D – диагональная, E – единичная, G –нулевая, R – расширенная:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x^3 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 6 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Матрицы одинакового размера *равны* между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Симметрическая матрица– матрица, у которой $a_{ij} = a_{ji}$(элементы, симметричные относительно главной диагонали, равны):

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & y \\ 7 & y & x \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы назовём ***крайним***, если он отличен от нуля, а все элементы этой строки, находящиеся левее него, равны нулю. Матрица называется ***ступенчатой***, если крайний элемент каждой строки находится правее крайнего элемента предыдущей строки. Матрицы A и B – ступенчатые, C – не ступенчатая матрица (подчеркиванием отмечены крайние элементы каждой строки):

$$A = \begin{pmatrix} \underline{2} & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \underline{2} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \underline{5} & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \underline{2} & 1 & 0 & 9 \\ 0 & \underline{4} & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} \underline{2} & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{6} \\ 0 & \underline{5} & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

Сложение, вычитание

Складывать и вычитать можно матрицы только одинакового размера.

Суммой матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для любых i, j. Запись: $C = A + B$.

Разностью матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ назовем матрицу $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такую, что $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для любых i, j. Запись: $C = A - B$.

► **Пример 1.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 4 & -8 & 6 \end{pmatrix}$.

Свойства операции сложения матриц:

1°. $A + B = B + A$ (коммутативность); 3°. $A + O = A$;

2°. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность); 4°. $A - A = O$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$***на число*** k есть матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $(b_{ij}) = (k \cdot a_{ij})$ для любых i, j. Запись: $B = k\cdot A$.

► **Пример 2.** $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 \\ 0 & -3 & 15 \end{pmatrix}$.

Чтобы вынести общий множитель элементов матрицы за скобки, нужно каждый элемент матрицы разделить на это число. Т.е. это обратное действие к умножению матрицы на число.

Матрица $-A=(-1)\cdot A$ называется ***противоположной*** матрицеA.

Разность матриц можно определить так: $A - B=A + (-B)$.

Свойства операции умножения матрицы на число:

1°. $\alpha \cdot A=A\cdot \alpha$;

2°. $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$(ассоциативность);

3°.$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A+ \alpha \cdot B$(дистрибутивность относительно сложения матриц);

4°.$(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha \cdot A+\beta\cdot A$(дистрибутивность относительно сложения чисел),

гдеA,B– матрицы, α,β– числа.

Элементарные преобразования матриц

1) Перестановка местами двух любых строк (столбцов).

2) Умножение элементов строки (столбца) на число $k\neq 0$.

3) Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

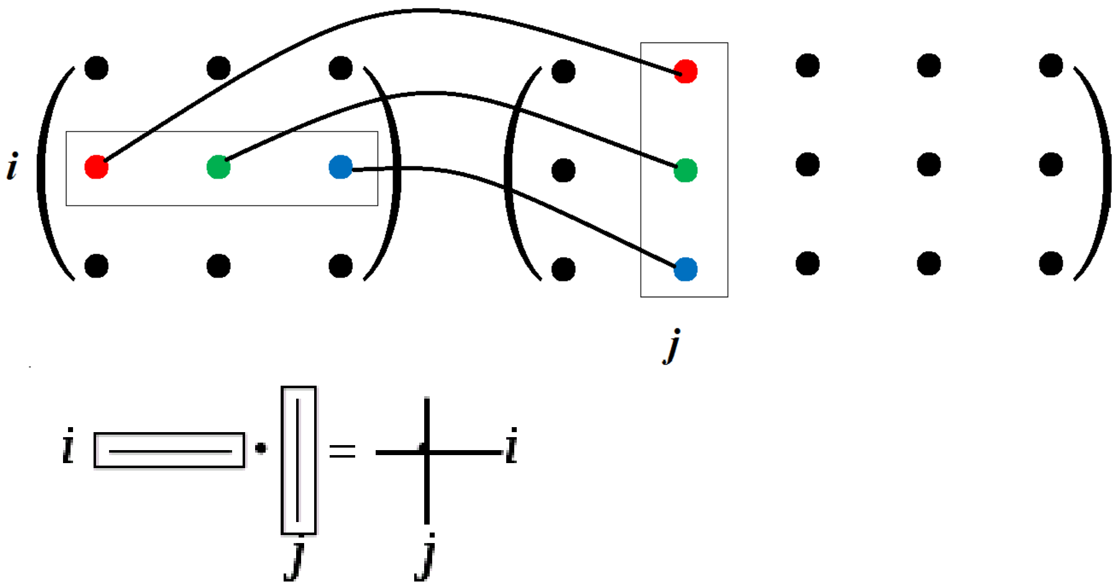
Две матрицыA и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Запись: A~B.

Произведение матриц

Произведением матриц $A_{m\times n} = (a_{ip})$и$B_{n\times k} = (b_{qj})$ называется матрица$C_{m\times k} = (c_{ij})$такая, что

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{it} \cdot b_{tj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{it} \cdot b_{tj} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

где i= 1, …, m, j= 1, …, k. Т.е. элемент новой матрицы C, находящийся в i-той строке и j-том столбце, равен сумме произведений элементов i-той строки матрицы A на соответствующие элементы j-того столбца матрицы B – правило «строка на столбец». На рис. 1схематически изображено вычисление элемента в произведенииматриц и расположение элемента в новой матрице.



а)

б)

Рис. 1.а) Вычисление элемента в произведении,
б) расположение элемента в новой матрице.

У матрицы $C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}$ количество строк равно числу строк матрицы A, а количество столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Операция умножения$C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k}$двух матриц возможна только если *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы*.Эту важную особенность легче проверять, если записать рядом размеры матриц в том порядке, в котором они умножаются:

матрицу 3х$\boxed{\mathbf{3} \text{ на } \mathbf{3}}$х 4 умножить можно, результат – матрица 3х4;
матрицу 4х $\boxed{\mathbf{2} \text{ на } \mathbf{2}}$х 2 умножить можно, результат – матрица 4х2;
матрицу 2х $\boxed{\mathbf{4} \text{ на } \mathbf{4}}$х 1 умножить можно, результат – матрица 2х1;

матрицу 2х $\boxed{\mathbf{2} \text{ на } \mathbf{3}}$х 4 умножить нельзя,
матрицу 3х $\boxed{\mathbf{3} \text{ на } \mathbf{4}}$х 3 умножить нельзя,
матрицу 1х $\boxed{\mathbf{4} \text{ на } \mathbf{3}}$х 4 умножить нельзя.

Произведение$A \cdot B$ и $B \cdot A$ квадратных матриц A и B одинакового размера возможно всегда.

► **Пример 4.** Найти произведение матриц $A \cdot B$, $B \cdot A$, $A \cdot C$, $C \cdot A$, если это возможно, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. МатрицаAимеетразмер $3 \times \underline{\mathbf{2}}$, матрица B имеетразмер $\underline{\mathbf{2}}$х2.Матрицу 3х $\boxed{\mathbf{2} \text{ на } \mathbf{2}}$х 2 умножить можно, т.е.$A \cdot B$можно вычислить, результатом будет матрица размера 3 х 2, аматрицу 2х $\boxed{\mathbf{2} \text{ на } \mathbf{3}}$х 2 умножить нельзя, т.е. $B \cdot A$вычислить нельзя.

$$\mathrm{A} \cdot B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{7} & 9 \\ \mathbf{8} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1 \cdot 7} + \mathbf{4 \cdot 8} & 1 \cdot 9 + 4 \cdot 0 \\ 2 \cdot 7 + 5 \cdot 8 & 2 \cdot 9 + 5 \cdot 0 \\ 3 \cdot 7 + 6 \cdot 8 & 3 \cdot 9 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 39 & 9 \\ 54 & 18 \\ 69 & 27 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 18 & 6 \\ 23 & 9 \end{pmatrix}.$$

МатрицаAимеетразмер 3 х$\underline{\mathbf{2}}$, матрица C имеетразмер $\underline{\mathbf{2}}$х3. Матрицу 3х $\boxed{\mathbf{2} \text{ на } \mathbf{2}}$х 3 умножить можно, т.е. $A \cdot C$ можно вычислить, результатом будет матрица размера 3 х 3. Матрицу 2х $\boxed{\mathbf{3} \text{ на } \mathbf{3}}$х 2 тоже можно умножить, т.е. $C \cdot A$можновычислить, результатом будет матрица размера 2 х 2.

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ \mathbf{-4} & -5 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1 \cdot (-1)} + \mathbf{4 \cdot (-4)} & 1 \cdot (-2) + 4 \cdot (-5) & 1 \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) \\ 2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot (-5) & 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-6) \\ 3 \cdot (-1) + 6 \cdot (-4) & 3 \cdot (-2) + 6 \cdot (-5) & 3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-6) \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}-17 & -22 & -27\\ -22 & -27 & -36\\ -27 & -36 & -45\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}17 & 22 & 27\\ 22 & 27 & 36\\ 27 & 36 & 45\end{pmatrix}.$$

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3}\\ -4 & -5 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 4\\ \mathbf{2} & 5\\ \mathbf{3} & 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(\mathbf{-1})\cdot\mathbf{1}+(\mathbf{-2})\cdot\mathbf{2}+(\mathbf{-3})\cdot\mathbf{3} & (-1)\cdot 4+(-2)\cdot 5+(-3)\cdot 6\\ (-4)\cdot 1+(-5)\cdot 2+(-6)\cdot 3 & (-4)\cdot 4+(-5)\cdot 5+(-6)\cdot 6\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14 & -32\\ -32 & -77\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}14 & 32\\ 32 & 77\end{pmatrix}.$$

Можно увидеть, что$A\cdot C$ и $C\cdot A$ получились симметрическими, но не равными матрицами.

Произведение матриц не обладает свойством коммутативности, т.е. в общем случае$A\cdot B\neq B\cdot A$. Если же $A\cdot B=B\cdot A$, то матрицы A и B называются ***перестановочными***или ***коммутирующими*** (в этом случае A и Bобязательно должны быть квадратными матрицами одинакового размера).

► Пример 5. Вычислить $AB-4C$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 0\\ 6 & -5\end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет размер 3 x **3**, матрица B имеет размер **3**x2. Матрицу 3x $\boxed{\mathbf{3}\text{ на }\mathbf{3}}$x 2 умножить можно, результатом будет матрица размера 3 x 2.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 4\\ -3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 5+3\cdot 1+2\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+3\cdot 4+2\cdot(-1)\\ 0\cdot 5+2\cdot 1+(-1)\cdot(-3) & 0\cdot(-2)+2\cdot 4+(-1)\cdot(-1)\\ 2\cdot 5+(-1)\cdot 1+5\cdot(-3) & 2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+5\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 9 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}.\ 4C=\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -4 & 0 \\ 24 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B-4C=\begin{pmatrix} 2-16 & 8-4 \\ 5-(-4) & 9-0 \\ -6-24 & -13-(-20) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 4 \\ 9 & 9 \\ -30 & 7 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матриц

1°.$A \cdot (B\cdot C) = (A \cdot B)\cdot C = A \cdot B\cdot C$(ассоциативность);
2°.$A \cdot (B+ C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность);
3°.$(A + B)\cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (дистрибутивность);
4°.$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$;
5°.$D \cdot E = E\cdot D = D$,

гдеA, B, C – матрицы, E – единичная матрица такого же размера что и квадратная матрица D, α– число.

Эти свойства верны при условии, что данные произведения матриц существуют.

Транспонирование

Транспонированной к матрице $A=(a_{ij})$ называется матрица $A^{\mathrm{T}}=(a_{ij}^{\mathrm{T}})=(a_{ji})$, полученная из исходнойматрицы заменой строк на столбцы (или столбцов на строки, результат будет такой же). В новой матрице элемент i-той строкиj-го столбца будет уже в j-той строкеi-м столбце, элементы главной диагонали при этом остаются на своих местах. Данная операция называется ***транспонированием***.

Свойства операции транспонирования

1°.Симметрическая матрица совпадает со своей транспонированной матрицей.

2°.Если транспонировать матрицу два раза, то получится исходная матрица: $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$.

3°. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$.

4°. $(A\cdot B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}\cdot A^{\mathrm{T}}$.

► **Пример 6.** Транспонировать матрицы A, B, C:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Решение. $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad C^T = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.$

1.3. Определитель второго порядка.

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы. Определитель – число, которое считается для квадратной матрицы по некоторым вполне определенным правилам. Порядок определителя – это порядок квадратной матрицы. Если при задании матриц использовались круглые скобки, то в теории определителей используют прямые скобки.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда определитель второго порядка $\det A$ вычисляется по следующему правилу

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} \quad \text{или}$$

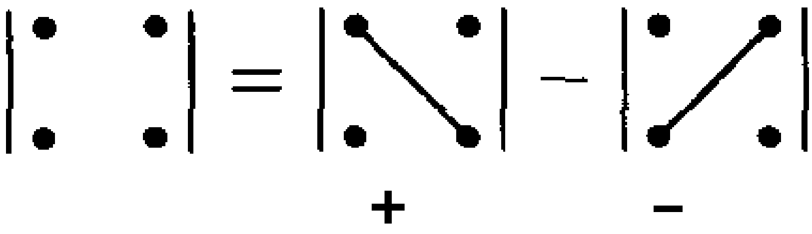


Рис. 2. Схема вычисления определителя 2-го порядка

► **Пример 7.** Вычислим определители 2-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 1\cdot 7 - 3\cdot 2 = 1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot(-2) = 11.$$

►**Пример 8.** Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3-4x & -1 \\ 4x & x \end{vmatrix} = 3.$

$$\begin{vmatrix} 3-4x & -1 \\ 4x & x \end{vmatrix} = (3-4x)\cdot x - 4x\cdot(-1) = 3x - 4x^2 + 4x =$$

$$= 7x - 4x^2. \quad 7x - 4x^2 = 3. \quad 4x^2 - 7x + 3 = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения равен 1, корни $x_1 = 1, x_2 = 0{,}75$.

1.4. Определитель третьего порядка.

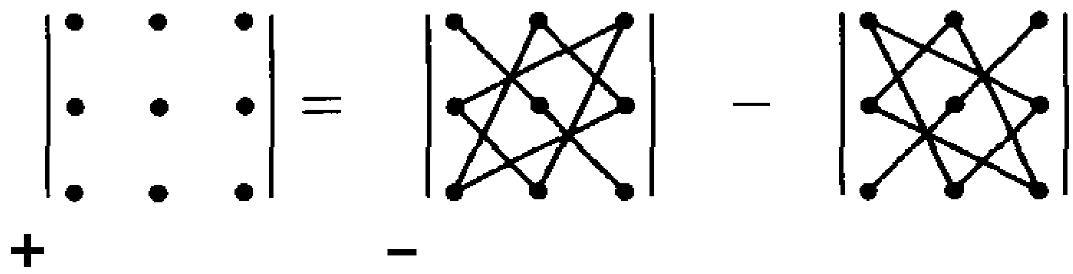
Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Тогда определитель третьего порядка $\det A$ вычисляется по следующему правилу

$$\det A = \Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

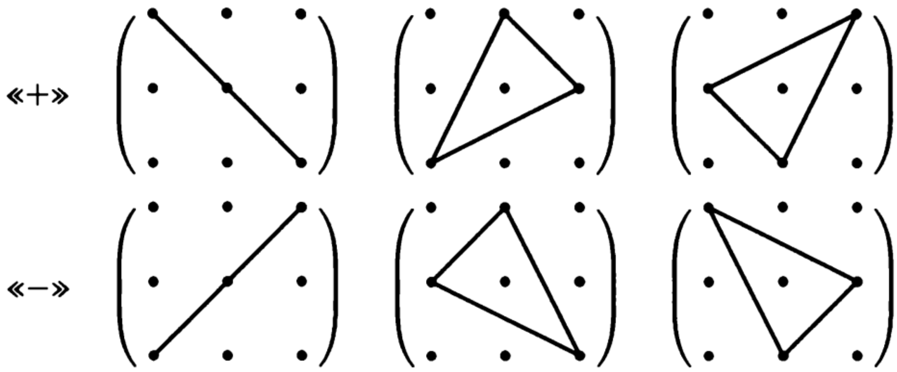
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Для запоминания этой формулы удобнее пользоваться схемой, изображенной на рис. 3 (*а*, *б*). Или запомнить так: первое из трех произведений, входящих в приведенную выше формулу со знаком «плюс», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье–произведения элементов, находящихся в вершинах двухравнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три последних произведения, входящих в формулу со знаком «минус», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали.

а)



б)



в)

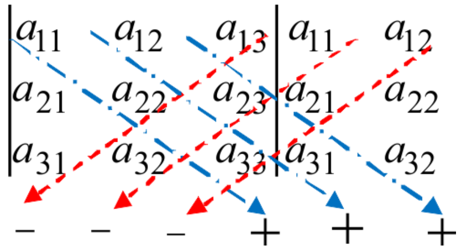


Рис. 3. Схемы вычисления определителя 3-го порядка

Можно использовать другую схему вычисления определителя 3-го порядка, но она даст в итоге аналогичную формулу. Для этого справа от определителя дописывают два первых столбца и произведения элементов на главной диагонали и на параллельных ей диагоналях берут со знаком «плюс»; а произведения элементов побочной диагонали и диагоналей, ей параллельных, со знаком «минус». Схема этого способа приведена на рис. 3 (*в*).

► **Пример 9.** Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

1-й способ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - \\ -1 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2\,) \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$= -6 + 9 + 8 + 1 + 24 + 18 = 54.$$

2-й способ. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} =$

$$= 3\cdot 1\cdot(-2) + 3\cdot 3\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot(-2) -$$
$$-(-1)\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 3\cdot(-2\,) - 3\cdot 4\cdot(-2) = 54.$$

Также для вычисления определителя 3-го порядка можно использовать определитель 2-го порядка (разложение по первой строке):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{a_{11}} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \boldsymbol{a_{12}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \boldsymbol{a_{13}} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

► **Пример 10.** Вычислить определитель

3-го порядка $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по 1-ой строке.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(1\cdot(-2) - 2\cdot 6) - 5\cdot(4\cdot(-2) - (-3)\cdot 6) - (4\cdot 2 - 1\cdot(-3)) =$$

$$= 3\cdot(-2-12) - 5\cdot(-8+18) - (8+3) = -72 - 50 - 24 = -146.$$

1.5. Свойства определителей.

1°. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот (это операция *транспонирования*).

Поэтому все свойства, верные для строк, будут верны и для столбцов.

2°. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

3°. Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца) равен нулю.

4°. Общий множитель какой-либо строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Следствие из 3° и 4°. Если все элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

5°. Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то весь определитель тоже равен нулю.

6°. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может бытьразложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

7°. «***Элементарные преобразования определителя***»
Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k.

► **Пример 11.** Решить неравенство

$$\begin{vmatrix} x+3 & x & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4x & 7 \end{vmatrix} < 6$$

Используя свойство 2° определителей, получим

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x+3 & x & -3 \\ 2 & 4x & 7 \end{vmatrix} < 6.$$

Далее разложим определитель по 1-ой строке:

$$-(0 \cdot \begin{vmatrix} x & -3 \\ 4x & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} x+3 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x+3 & x \\ 2 & 4x \end{vmatrix}) =$$

$$= -(0 - 0 + 1 \cdot ((x+3) \cdot 4x - 2x)) = -(4x^2 + 12x - 2x) =$$

$$= -4x^2 - 12x + 2x = -4x^2 - 10x.$$

После вычисления определителя перейдем к неравенству

$-4x^2 - 10x < 6$, $-4x^2 - 10x - 6 < 0$. Разделим неравенство на -2, знак неравенства изменится на противоположный.

$2x^2 + 5x + 3 > 0$. Найдем корни квадратного трехчлена: дискриминант равен 1, $x_1 = -1$; $x_2 = -1{,}5$. Коэффициент перед x^2 положительный, значит ветви параболы направлены вверх, а, следовательно, решением неравенства будет

$x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1; \infty)$.

1.6. Обратная матрица

Операции деления в матричном исчислении нет, но для некоторых матриц существует обратная матрица к матрице A, такая, что при умножении на матрицу A в произведении получится единичная матрица.

Обратной к квадратной матрице A называется матрица A^{-1} такого же размера, для которой выполнено равенство $A^{-1} \cdot A = A^{-1} \cdot A = E$, где E– единичная матрица того же порядка, что и A.

Обратная матрица *существует и единственна только у невырожденных матриц*, т.е. у которых $\det A \neq 0$.
Рассмотрим формулу нахождения обратной матрицы для квадратной матрицы второго порядка. Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

► **Пример 12.** Найти A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Решение. Обратная матрица существует и единственна только у невырожденных матриц, т.е. у которых $\det A \neq 0$.

$$\det A = 1 \cdot (-5) - 4 \cdot (-2) = 3 \neq 0.$$

По приведенной выше формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -(-2) \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку. Проверка заключается в том, что при умножении найденной обратной матрицы на исходную матрицу получилась единичная матрица: $A^{-1}{\cdot}A = A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1} \cdot A \ = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -5 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & -5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-5) \\ -4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & -4 \cdot (-2) + 1 \cdot (-5) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Проверка выполнена, обратная матрица найдена верно.

Свойства обратной матрицы

1°.$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;

2°.$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3°. $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$.

3°. $(A^{-1})^{-1} = A$.

§ 2. Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Решить уравнение

1.1. $\begin{vmatrix} 2x+1 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.2. $\begin{vmatrix} x+8 & -x \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -15$

1.3. $\begin{vmatrix} 4x-1 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.4. $\begin{vmatrix} 5x+2 & -2 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.5. $\begin{vmatrix} 1-2x & 2 \\ x & -x \end{vmatrix} = 5$

1.6. $\begin{vmatrix} 3-x & x \\ -3 & -2x \end{vmatrix} = 2$

1.7. $\begin{vmatrix} 3x-4 & 3 \\ x & x \end{vmatrix} = -4$

1.8. $\begin{vmatrix} 2-3x & 2x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 7$

1.9. $\begin{vmatrix} 5-x & 2x \\ 1 & -x \end{vmatrix} = 8$

1.10. $\begin{vmatrix} 3-4x & -4 \\ x & x \end{vmatrix} = 3$

1.11. $\begin{vmatrix} x-4 & -2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 3$

1.12. $\begin{vmatrix} 4x+3 & 2 \\ -x & x \end{vmatrix} = 9$

1.13. $\begin{vmatrix} 2x-7 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = -7$

1.14. $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 2 & 4x \end{vmatrix} = -6$

1.15. $\begin{vmatrix} 2x-3 & 3 \\ -x & 2x \end{vmatrix} = 1$

1.16. $\begin{vmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix} = 2$

1.17. $\begin{vmatrix} 5x-2 & -5 \\ x & -x \end{vmatrix} = 2$

1.18. $\begin{vmatrix} 2-4x & 5 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 5$

1.19. $\begin{vmatrix} 2x+6 & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = 6$

1.20. $\begin{vmatrix} 3x+6 & 1 \\ x & x-2 \end{vmatrix} = 2$

1.21. $\begin{vmatrix} 7x+1 & 7 \\ x & x \end{vmatrix} = 1$

1.22. $\begin{vmatrix} 2x+10 & -3 \\ x & x-5 \end{vmatrix} = 4$

1.23. $\begin{vmatrix} 4x+5 & x \\ 4 & x \end{vmatrix} = 5$

1.24. $\begin{vmatrix} 3x-12 & 3 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} = 6$

1.25. $\begin{vmatrix} x & x \\ 8 & 8x-3 \end{vmatrix} = -3$

1.26. $\begin{vmatrix} 2x+9 & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$

Задание 2. Решить неравенство

2.1. $\begin{vmatrix} 2 & 2x-1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2x & 3x+1 \end{vmatrix} \leq 2$

2.2. $\begin{vmatrix} 5x-2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4 & -x \end{vmatrix} > 2$

2.3. $\begin{vmatrix} 2-4x & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & 5 \end{vmatrix} < 5$

2.4. $\begin{vmatrix} 4 & 2x+6 & 2 \\ -3 & x & x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 6$

2.5. $\begin{vmatrix} 3x+6 & -5 & 1 \\ x & 2 & x-2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \leq 2$

2.6. $\begin{vmatrix} 7x+1 & 7 & 1 \\ x & x & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} < 1$

2.7. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2x+10 & 5 & -3 \\ x & 4 & x-5 \end{vmatrix} > 4$

2.8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4x+5 & x & -2 \\ 4 & x & -7 \end{vmatrix} \geq 5$

2.9. $\begin{vmatrix} 5 & 3x-12 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & x+1 \end{vmatrix} \leq 6$

2.10. $\begin{vmatrix} x & 5 & x \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 8x-3 \end{vmatrix} > 3$

2.11. $\begin{vmatrix} 2x+9 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & x & 3 \end{vmatrix} < 9$

2.12. $\begin{vmatrix} 2 & 2x+5 & -4 \\ -1 & 2 & x-2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \geq 6$

2.13. $\begin{vmatrix} 9x+1 & 10 & 9 \\ x & 7 & x \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \leq 1$

2.14. $\begin{vmatrix} 3-4x & -1 & 2 \\ 4x & x & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 3$

2.15. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4x-5 & 1 \\ 0 & -4 & x+2 \end{vmatrix} < 4$

2.16. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 2x+1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} \geq 1$

2.17. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ x+8 & -x & 0 \\ 1 & 2x & 0 \end{vmatrix} \leq 15$

2.18. $\begin{vmatrix} 0 & 4x-1 & 2 \\ -1 & 3 & -6 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} > 1$

2.19. $\begin{vmatrix} 5x+2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} < 1$

2.20. $\begin{vmatrix} 1-2x & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ x & -x & 0 \end{vmatrix} \geq 5$

2.21. $\begin{vmatrix} 0 & 3-x & x \\ 0 & -3 & -2x \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \leq 2$

2.22. $\begin{vmatrix} 3x-4 & 0 & 3 \\ x & 0 & x \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix} > 4$

2.23. $\begin{vmatrix} 2-3x & 2x & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} < 7$

2.24. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5-x & 2x & 0 \\ 1 & -x & 0 \end{vmatrix} \geq 8$

2.25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3-4x & 0 & -4 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} \leq 3$

2.26. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & x-4 & -2x \\ 0 & 3 & x \end{vmatrix} > 3$

Задание 3. Вычислить определитель 3-го порядка

3.1. $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3.2. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

3.3. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

3.4. $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -5 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3.5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

3.6. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

3.7. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3.8. $\begin{vmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

3.9. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & -3 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

3.10. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -5 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

3.11. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix}$

3.12. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 9 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

3.13. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

3.14. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

3.15. $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.16. $\begin{vmatrix} 13 & 5 & 8 \\ -8 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3.17. $\begin{vmatrix} 2 & -7 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 12 \end{vmatrix}$ **3.18.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -6 & -1 & -5 \\ 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

3.19. $\begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ **3.20.** $\begin{vmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 10 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

3.21. $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **3.22.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

3.23. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$ **3.24.** $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 6 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

3.25. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **3.26.** $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 4. Вычислить $\boldsymbol{AB-3C}$

4.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

4.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

4.3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

4.4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$

4.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

4.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

4.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

4.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

4.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

4.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

4.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

4.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

4.14. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}.$

4.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}.$

4.16. $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$

4.17. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

4.18. $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

4.19. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ 2 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$

4.20. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 2 & -8 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -4 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$

4.21. $A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 2 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 6 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$

4.22. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

4.23. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 10 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$

4.24. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$

4.25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

4.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Библиографический список

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.: ил. – (Высшее образование).

2. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.: ил. – (Высшее образование).

3. Натансон, И. П. Краткий курс высшей математики – Серия «Учебники для вузов. Специальная литература». – СПб.: Издательство «Лань», 1999. – 736 с.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. Ч.1. Учеб.пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Г.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 6-е изд. – М.: ООО«Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование»», 2007. – 304 с.: ил.

5. Орешкина, О.В. Элементы линейной алгебры. Определители, матрицы, системы линейных алгебраических уравнений: учеб.-практ. пособие / О.В. Орешкина, Н.И. Еркова ; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 90с. – ISBN 978-5-9984-0780-2.