Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Н. И. ДУБРОВИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Курс лекций

Владимир 2017

УДК 517
ББК 22.161
Д79

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры функционального анализа и его приложений
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
М. С. Беспалов

Генеральный директор ООО «Кавата»
Р. Н. Рощин

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Дубровин, Н. И.

Д79 Математический анализ 1 : курс лекций / Н. И. Дубровин ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 144 с. – ISBN 978-5-9984-0827-4.

Кратко, точно и последовательно изложены все основные результаты и понятия математического анализа: предварительные сведения (логические операторы, множества, упорядоченные множества, натуральные, целые и рациональные числа), введение в анализ (поле вещественных чисел, пределы, непрерывность, элементарные функции), дифференциальное исчисление функций одной переменной (производная, дифференциал, теоремы о среднем, формула Тейлора), исследование функций одной переменной (монотонность, выпуклость, асимптотическое поведение), степенные ряды.

Предназначен для студентов вузов 1-го курса всех инженерных направлений подготовки (бакалавриат).

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 14. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-9984-0827-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель курса лекций – кратко, точно и последовательно изложить все основные результаты и понятия математического анализа. Комментарии и разъясняющие примеры, как правило, отсутствуют. Ввиду этого курс лекций никоим образом не претендует на роль учебника по математике; он, скорее, ближе к справочнику по дифференциальному анализу функций одной переменной.

Курс математического анализа в 1-м семестре включает в себя следующие разделы: предварительные сведения (логические операторы, множества, упорядоченные множества, натуральные, целые и рациональные числа), введение в анализ (поле вещественных чисел, пределы, непрерывность, элементарные функции), дифференциальное исчисление функций одной переменной (производная, дифференциал, теоремы о среднем, формула Тейлора), исследование функций одной переменной (монотонность, выпуклость, асимптотическое поведение), степенные ряды.

В издании не приводятся сведения исторического характера и зачастую не указывается авторство теорем. Связано это с тем, что излагаются только давно устоявшиеся факты, о которых написано немало исторических текстов.

Принятые следующие обозначения:

• конец доказательства или его отсутствие (ввиду непосредственной проверки) обозначается знаком □;

• соотношение $a \coloneqq b$ означает, что a по определению или по соглашению равно b.

Нумерация определений, теорем, предложений, лемм и примеров сквозная в рамках каждого пункта.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Логические операторы

Математический текст (определения, аксиомы, теоремы, предложения, следствия, леммы, доказательства) состоит из высказываний относительно математических объектов. *Высказывание* (утверждение, суждение) есть повествовательное предложение, которое может быть как истинным, так и ложным. Высказывание истинно, если приведено его доказательство на основе ранее доказанных утверждений с применением правила вывода (см. далее). Высказывание называется ложным, если его отрицание есть истинное утверждение. Заметим, что для любой математической теории, включающей в себя теорию множеств, можно указать высказывание (и не одно), которое не является ни истинным, ни ложным.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – какие-либо математические утверждения. Из них можно построить новые утверждения, пользуясь логическими операциями «и», «или», «не», «следует», «эквивалентно». Утверждение $\underline{\mathcal{A}\text{ или }\mathcal{B}}$ (называемое дизъюнкцией $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) истинно в том и только том случае, если истинно одно из утверждений: $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$ (или оба вместе). Утверждение $\underline{\mathcal{A}\text{ и }\mathcal{B}}$ (конъюнкция) истинно в том и только том случае, если истинно как утверждение $\mathcal{A}$, так и утверждение $\mathcal{B}$. Отрицание утверждения $\mathcal{A}$ обозначаем как $\underline{\text{не}\mathcal{A}}$, оно истинно, если и только если $\mathcal{A}$ ложно.

Импликация $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ значит, что из утверждения $\mathcal{A}$ следует (вытекает) утверждение $\mathcal{B}$. Импликация ложна только в одном случае: когда посылка $\mathcal{A}$ истинна, а заключение $\mathcal{B}$ ложно. В частности, импликация $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ эквивалентна утверждению $\underline{\mathcal{B}\text{ или не}\mathcal{A}}$. С импликацией связано *единственное правило вывода* (modus ponens): если утверждение $\mathcal{A}$ верно, а также истинна импликация $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, то и утверждение $\mathcal{B}$ также верно. Выводятся (доказываются) утверждения исходя из *аксиом* – математических утверждений, справедливость которых принимается на веру. Запись $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ значит, что эти утверждения эквивалентны, т. е. справедливость одного влечет справедливость другого.

Пусть $\Psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{C})$ – высказывание, построенное из атомарных высказываний $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{C}$ с помощью перечисленных выше логических операторов. Придавая различные истинностные оценки атомарным высказываниям, можно на основе истинностных оценок дизъюнкции, конъюнкции, отрицания, импликации и эквивалентности оценить Ψ. Получаем так называемую таблицу истинности Ψ. Примем за аксиому следующий *принцип разрешимости логики первого порядка*: если для двух сложных высказываний $\Psi(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{C})$ и $\Phi(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots, \mathcal{C})$ таблицы истинности совпадают, то Ψ и Φ равносильны, т. е. в доказательствах одно из них можно заменять на другое. Например:

- $\underline{\mathcal{A} \text{ и } \mathcal{B}}$ равносильно $\underline{\text{не}(\text{не}\mathcal{A} \text{ или не}\mathcal{B})}$;
- импликация $\underline{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}}$ равносильна $\underline{\mathcal{B} \text{ или не}\mathcal{A}}$;
- высказывание $\underline{\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}}$ равносильно $\underline{\text{не}(\text{не}(\mathcal{B} \text{ или не}\mathcal{A}) \text{ или не}(\mathcal{A} \text{ или не}\mathcal{B}))}$.

Заметим, что все логические операторы могут быть выражены через два оператора – «или» и «не».

Высказывание повествует о каких-либо объектах. Если вместо некоторого объекта поставить переменную-букву, пробегающую заданную область объектов, то получаем высказывательную форму. Например, запись $x^2 \leq 0$ есть высказывательная форма с одной переменной x. Если в нее подставить $x = 0$, то получим верное высказывание, а если подставить $x = -1$, то получим ложное высказывание. Высказывательную форму $\mathcal{A}(x)$ можно «замкнуть» двумя существенно разными способами. Можно сказать: 1) что существует объект x_0 из заданной области объектов U такой, что высказывание $\mathcal{A}(x_0)$ верно; 2) для любого объекта x_0 из заданной области объектов U утверждение $\mathcal{A}(x_0)$ верно. Первое высказывание кратко запишем как $\exists x \in U: \mathcal{A}(x)$, а второе – как $\forall x \in U\ (\mathcal{A}(x))$. Итак, знак $\exists$ – квантор существования, заменяет слова «существует, найдется», а квантор всеобщности $\forall$ обозначает «для любого, всякий, для каждого». Например, высказывание «$\exists x \in U$ и $x^2 = -1$» звучит так: найдется число x из числового множества U, квадрат которого равен -1. Если подразумевать область действительных чисел $\mathbb{R}$ в качестве U, то такое высказывание ложно, а для комплексных чисел оно истинно. Другой пример: $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$ – верное высказывание, а $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 > 0)$ – ложное высказывание.

Заметим, что если область объектов U конечна и состоит из объектов $a, b, \dots, c$, то высказывание $\exists x \in U\colon \mathcal{A}(x)$ равносильно дизъюнкции $\underline{\mathcal{A}(a) \text{ или } \mathcal{A}(b) \text{ или} \dots \text{или } \mathcal{A}(c)}$, а высказывание $\forall x \in U(\mathcal{A}(x))$ равносильно конъюнкции $\underline{\mathcal{A}(a) \text{ и } \mathcal{A}(b) \text{ и} \dots \text{и } \mathcal{A}(c)}$.

Знак равенства = рассматривается как логический знак отношения между двумя объектами. Равенство объектов означает возможность заменять объект в любом рассуждении на равный ему. Равенство обладает свойствами рефлексивности ($a = a$), симметричности ($a = b \Rightarrow b = a$) и транзитивности (из ($a = b$ и $b = c$) следует $a = c$).

2. Множества

Множество – неопределяемое, первичное математическое понятие. Математические синонимы этого термина – совокупность, семейство, объект. Отношение $a \in A$ между множествами означает, что объект a, называемый в этой ситуации элементом, принадлежит множеству A. Отношение принадлежности также неопределяемо, т. е. несводимо к более фундаментальным понятиям за отсутствием таковых. Запись $b \notin A$ значит, что элемент b не принадлежит множеству A. Среди всех множеств есть пустое множество $\emptyset$, которое не содержит ни одного элемента. Формально $\forall x\ (x \notin \emptyset)$. Два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов (**аксиома**):

$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$.

Множество, состоящее из элементов $a, b, \dots, c$, записывается как $\{a, b, \dots, c\}$.

Аксиома двухэлементного множества. Для любых объектов a и b существует множество $\{a, b\}$, состоящее из них, т. е.

$x \in \{a, b\} \Leftrightarrow (x = a \text{ или } x = b)$.

Очень часто множество задают следующим образом:

$A = \{\, x \in\ U \mid \text{условие отбора элементов } x \,\}$.

Здесь U – некоторое универсальное множество, из которого и отбираются элементы. Каково бы ни было условие отбора элементов, множество A существует и определено однозначно (**аксиома выделения**). В частности, пустое множество $\emptyset = \{x \in U \mid x \neq x\}$ существует и не зависит от U.

Множество B называется *подмножеством* множества A, если всякий элемент из множества B принадлежит также и A. Записывается это отношение как $B \subseteq A$ (B лежит в A) или как $A \supseteq B$ (A содержит B). Здесь употреблен символ нестрогого включения. Среди подмножеств множества A есть два крайних – $\emptyset$ и само A, остальные называются собственными подмножествами. Если мы хотим выразить, что $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то пишем $B \subset A$ (строгое включение). Аксиому равенства множеств теперь можно записать следующим образом:

($A \subseteq B$ и $B \subseteq A$) влечет $A = B$.

Аксиома. Для любого множества A существует множество всех его подмножеств $\mathcal{P}(A)$.

Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих либо A, либо B. Более общо: для любого множества E существует множество $\bigcup_{e \in E} e$, состоящее из элементов множеств e, являющихся элементами E. Это следует из того, что существует объединение семейства множеств (см. далее аксиому объединения). В частности, объединение двух множеств $A \cup B = \bigcup_{e \in \{A,\ B\}} e$ существует. *Пересечением* множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A, так и B, оно выделяется в объединение $A \cup B$ очевидным условием. Более общо: для любого непустого множества E существует множество $\bigcap_{e \in E} e$, состоящее из элементов, принадлежащих каждому $e \in E$. *Разностью* множеств A и B называется множество $A \backslash B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B. Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Оно же равно $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Свойства операций над множествами:

- коммутативность: $A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A\Delta B = B\Delta A$;
- ассоциативность: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cup (B \cup C) = = (A \cup B) \cup C, A\Delta(B\Delta C) = (A \Delta B)\Delta C$;
- дистрибутивность: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta (A \cap C)$;
- поглощение: $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A \Leftrightarrow A \cup B = A$;
- двойное дополнение: если $A \subseteq B$, то $B \backslash (B \backslash A) = A$;
- обращение включения: пусть множество C содержит как множество A, так и множество B. Тогда $A \subseteq B \Leftrightarrow (C \backslash B \subseteq C \backslash A)$;
- законы Моргана: $C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B),\ C \backslash (A \cap B) = = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$;

- обнуление: $X \backslash X = \emptyset$;
- нейтральность: $X \backslash \emptyset = X$, $A \Delta \emptyset = A$;
- булевость: $A \Delta A = \emptyset$.

Доказываются эти свойства на основе аналогичных свойств логических операторов дизъюнкции, конъюнкции и отрицания с использованием аксиомы равенства множеств. Обозначая конъюнкцию фигурной скобкой, а дизъюнкцию квадратной скобкой, докажем для примера первый закон дистрибутивности:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2.1. Декартово произведение. Пару объектов (a, b) определим как множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, в которое входит два элемента, если $a \neq b$, и один элемент, если $a = b$: $(a, a) = \{\{a\}\}$. При определении пары использована та же идея, что и при определении вектора $\overrightarrow{AB}$ как отрезка AB с указанием начала A. Две пары равны, если и только если совпадают первые компоненты и совпадают вторые компоненты пар:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $(a, b) = (a', b')$, т. е. $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Случай $a = b$ или $a' = b'$ прост, ибо здесь мы имеем дело с одноэлементным множеством. Считаем далее, что $a \neq b$ и $a' \neq b'$. Так как элемент $\{a\}$ принадлежит множеству $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, то либо $\{a\} = \{a'\}$, либо $\{a\} = \{a', b'\}$. Но второй случай невозможен, ибо тогда $a' = a$ и $b' = a$, откуда $a' = b'$ вопреки предположению. Итак, имеет место первый случай $\{a\} = \{a'\}$, следовательно, $a = a'$. Значит, $\{a, b\} = \{a, b'\}$, а так как $a \neq b$, то $b = b'$. Обратная импликация в соотношении (1) следует из аксиоматики логического знака равенства. □

Так как

$$A \times B = \{p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)) \mid p = (a, b) \text{ и } a \in A \text{ и } b \in B\},$$

то для любых двух множеств A и B существует декартово произведение A на B (обозначаем $A \times B$), состоящее из всех пар (x, y), где x пробегает A, а y пробегает B. В частности, $A^2 := A \times A$ называется декартовым квадратом.

Упорядоченной тройкой назовем объект $(x, y, z) = (x, (y, z))$. Для множеств A, B, C определяется декартово произведение $A \times B \times \times C = A \times (B \times C)$. Аналогично определяются упорядоченные четверки, пятерки и т. д.

Свойства декартова произведения:

• для любых множеств A, A', B, B' из включений $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ вытекает соотношение $A' \times B' \subseteq A \times B$;

• для любых непустых множеств A', B' и любых множеств A, B имеет место соотношение $A' \times B' \subseteq A \times B$ в том и только в том случае, когда $A' \subseteq A$ и $B' \subseteq B$;

• равенство $A \times B = \emptyset$ верно, если и только если либо A пусто, либо B пусто.

Заметим, что класс всех множеств множеством не является. Если бы это было так, то на основе аксиомы выделения можно было бы сформировать множество Z всех элементов, не принадлежащих самим себе. Если $Z \in Z$, то по определению $Z \notin Z$, а если $Z \notin Z$, то по этому же определению $Z \in Z$. Полученное противоречие показывает, что множества Z, как и множества всех множеств, не существует.

2.2. Отношения и отображения. *Отношением* $\boldsymbol{\gamma}$ между множеством $\boldsymbol{A}$ и множеством $\boldsymbol{B}$ называют правило, выражаемое очень часто в виде алгоритма, в силу которого по любой паре $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ можно установить, находится ли объект $\boldsymbol{a}$ в отношении $\boldsymbol{\gamma}$ к объекту $\boldsymbol{b}$ или нет. В первом случае пишем $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{b}$, а во втором случае символ отношения перечеркиваем. Более формально и точно тройка $\boldsymbol{\gamma} := (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{\Gamma})$, где $\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, называется отношением между множеством $\boldsymbol{A}$ и множеством $\boldsymbol{B}$. Подмножество $\boldsymbol{\Gamma}$ называют графиком отношения $\boldsymbol{\gamma}$. Именно в случае $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\Gamma}$ говорят, что $\boldsymbol{a}$ находится в отношении $\boldsymbol{\gamma}$ к элементу $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, то говорят об отношении на множестве $\boldsymbol{A}$.

Отметим некоторые фундаментальные условия, накладываемые на отношение γ на множестве A:

• рефлексивность: $a\,\gamma\,a$ для любого $a \in A$;

• симметричность: $a\,\gamma\,a'$ влечет $a'\gamma\,a$;

• транзитивность: соотношения $a\,\gamma\,a'$ и $a'\,\gamma\,a''$ влекут $a\,\gamma\,a''$;

• антисимметричность: из $a\,\gamma\,a'$ и $a'\gamma\,a$ следует равенство $a = a'$;

• линейность: для любых двух элементов $a, a' \in A$ либо $a\,\gamma\,a'$, либо $a'\gamma\,a$.

Отношение γ называется *отношением частичного порядка* на множестве A, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично одновременно (см. п. 2.3). Такое отношение обозначается часто знаком нестрогого неравенства.

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности* и обозначается часто знаками типа равенства ($\sim, \approx, \equiv, \cong$ и т. п.). Если знак $\sim$ обозначает отношение эквивалентности на множестве A и $a \in A$, то подмножество $[a] \coloneqq \{a' \in A \mid a \sim a'\}$ множества A называется *классом эквивалентности*, порожденным a. Два разных класса эквивалентности не пересекаются. Действительно, если $a \in [a_1] \cap [a_2]$, то для любого $a' \in [a_1]$ имеем $a_1 \sim a', a_2 \sim a, a_1 \sim a \Rightarrow a_2 \sim a \sim a_1 \sim a' \Rightarrow a_2 \sim a'$, откуда вытекает включение $[a_1] \subseteq [a_2]$. Обратное включение устанавливается аналогично. По аксиоме равенства множеств получаем совпадение $[a_1] = [a_2]$. В этой ситуации часто переходят к фактор-множеству $A/\sim \coloneqq \{\,[a] \mid a \in A\,\}$.

Отображение f множества A в множество B есть такое отношение между множеством A и множеством B, в силу которого произвольному элементу $x \in A$, называемому аргументом, ставится в соответствие значение $y = f(x) \in B$. График отображения f – подмножество $G \subseteq A \times B$, состоящее из всех пар $\big(x, f(x)\big)$, $x \in A$. Подмножество $G \subseteq A \times B$ задает отображение f, если и только если для любого элемента $x \in A$ найдется ровно одно значение $y_x \in B$ такое, что $(x, y_x) \in G$. В этом случае полагаем $f(x) = y_x$. Таким образом, видно, что отображение есть специальный вид отношения между множествами. Еще раз подчеркнем: отображение заключает в себе три объекта – A, B, f. Изменение одного из них (пусть даже не меняются два других) влечет изменение отображения в целом. Краткая запись, в которой фигурируют все три объекта – A, B, f, следующая: $f\colon A \to B$.

Множество A называется областью определения отображения f (или областью допустимых значений аргумента, сокращенно – ОДЗ), а множество B – областью значений.

Отображение f называется *инъективным*, или вложением, если разным аргументам соответствуют разные значения функции. По-другому

$$f - \text{инъекция} \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2).$$

Отображение f называется *сюръективным*, или отображением <u>на множество</u> B, если для всякого $y_0 \in B$ найдется элемент x_0 (возможно не единственный) такой, что $f(x_0) = y_0$. По-другому это условие выражается равенством $f(A) = B$, в котором использовано соглашение об образе подмножества $U \subseteq A$, а именно: $f(U) \coloneqq \{\, f(x) \mid x \in U \,\}$.

Отображение f называется *биективным*, или биекцией, если оно инъективно и сюръективно одновременно. Если f – биекция, то можно построить обратное отображение $h: B \to A$ так, что $h(y) = x$ в том и только в том случае, если $f(x) = y$. Существование такого $x \in A$ гарантируется равенством $f(A) = B$, а единственность следует из взаимной однозначности. Видно, что в этой ситуации f обратно по отношению к h, следовательно, можно говорить о паре *взаимно обратных отображений.*

Пусть $f: A \to B, g: B \to C$ – два отображения и при этом $y = f(x)$ и $z = g(y)$. Тогда первое отображение можно подставить во второе: $z = g\big(f(x)\big)$. Получаем «сквозное» отображение $A \to C$, которое называется *композицией* f и g (обозначается $g \circ f$).

Отображение $Id: A \to A$ такое, что $Id(x) \equiv x$, называется *тождественным*, график его представляет собой диагональ $\Delta = \{\, (x, x) \mid x \in A \,\}$ декартова квадрата A^2. Кроме того, тождественное отображение играет роль единичного элемента: $f \circ Id = f$ и $Id \circ g = g$.

Пусть $f: A \to B, h: B \to A$ – пара взаимно обратных отображений. Тогда $f\big(h(y)\big) \equiv y$ (знак $\equiv$ подчеркивает тождественное равенство) и $h\big(f(x)\big) \equiv x$. Эти равенства можно выразить так: $f \circ h$ и $h \circ f$ – тождественные отображения на множествах B и A соответственно.

Предложение 1. Композиция биекций (сюръекций, инъекций) есть биекция (сюръекция, инъекция). Обратное отображение к биекции – биекция. Тождественное отображение – биекция. □

Семейством множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ с множеством индексов I назовем отображение $\phi: I \to U$ в некоторое множество U, содержащее все A_i

как элементы и такое, что $\phi(i) = A_i$. Объединение и пересечение множеств этого семейства обозначим следующим образом:

$$\bigcup_{i \in I} A_i\,;\ \bigcap_{i \in I} A_i.$$

Объединение состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_i, а пересечение – из элементов, принадлежащих каждому из множеств A_i. Существование объединения гарантирует очередная **аксиома объединения** теории множеств, которая в случае $I = E,\ A_i = i$ позволяет объединить все элементы заданного множества E.

Для семейства множеств $\{A_i\}_{i \in I}$ определим декартово произведение $\prod_{i \in I} A_i$ как совокупность отображений $\phi: I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ таких, что $\phi(i) \in A_i$. Такое отображение часто записывают как последовательность $(a_i)_{i \in I}$, подразумевая, что $\phi(i) = a_i$.

2.3. Упорядоченные множества. Пусть знак $\leq$ обозначает частичный порядок на множестве A. Отношение строгого неравенства определим, как и для строгого включения:

$$x < y \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} x \leq y \text{ и } x \neq y.$$

Для линейно упорядоченного множества $(L, \leq)$ (кратко – л. у. множество) определим отрезки, интервалы, полуинтервалы:

$$[a, b] = \{\, x \in L \mid a \leq x \leq b \,\};\ (a, b) = \{\, x \in L \mid a < x < b \,\};$$
$$(a, b] = \{\, x \in L \mid a < x \leq b \,\};\ [a, b) = \{\, x \in L \mid a \leq x < b \,\}.$$

Здесь предполагается, что $a \leq b$. Если же $a \geq b$, то $[a, b] \coloneqq [b, a]$ и $(a, b) \coloneqq (b, a)$. *Промежутком* назовем подмножество л. у. множества, являющееся либо отрезком, либо полуинтервалом, либо интервалом.

Пусть B – подмножество л. у. множества L. *Подмножество B* называется *ограниченным сверху* (в л. у. множестве L), если найдется элемент $d \in L$ такой, что $b \leq d$ для любого $b \in B$. Элемент d, называемый верхней гранью, как правило, не единственный. Однако наименьшая верхняя грань, если она существует, единственна и обозначается $\sup B$ (супремум). Аналогично *подмножество B* называется *ограниченным снизу*, если найдется элемент $m \in L$ такой, что $m \leq b$ для любого $b \in B$. Наибольшая нижняя грань, если она существует, единственна и обозначается $\inf B$ (и́нфимум). Ограниченное сверху и снизу подмножество л. у. множества называется ограниченным. Наименьшая верхняя грань иначе называется точной верхней гранью, а наибольшая нижняя грань – точной нижней гранью.

Наибольший элемент л. у. множества L обозначим $\max L$, а наименьший – $\min L$.

Отображение $\phi: L \to M$ одного л. у. множества в другое л. у. множество назовем *возрастающим* (строго возрастающим), если неравенство $l_1 < l_2$ влечет неравенство $\phi(l_1) \le \phi(l_2)$ $(\phi(l_1) < \phi(l_2))$ для любых элементов $l_1, l_2 \in L$. *Отображение* $\psi: L \to M$ назовем *убывающим* (строго убывающим), если неравенство $l_1 < l_2$ влечет неравенство $\phi(l_1) \ge \phi(l_2)$ $(\phi(l_1) > \phi(l_2))$ для любых $l_1, l_2 \in L$.

Пусть L и M – л. у. множества. Определим на декартовом произведении $L \times M$ лексикографическое упорядочение (напомним, что квадратная скобка означает дизъюнкцию)

$$(l,m) \le (l',m') \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} l < l', \\ l = l' \text{ и } m \le m'. \end{array}\right. \tag{2}$$

Это определение распространяется на декартово произведение семейства л. у. множеств. Пусть множество индексов I линейно упорядочено и задано семейство л. у. множеств $A_i, i \in I$. Считаем, что $(a_i) < (a_i')$ тогда и только тогда, когда найдется индекс $k \in I$ такой, что $a_k < a_k'$, но $a_i = a_i'$ для всех $i < k$.

Предложение 2. Определение (2) превращает декартово произведение $L \times M$ в л. у. множество. Аналогично лексикографический порядок на произведении $\prod_{i \in I} A_i$ превращает последнее в л. у. множество. □

Линейно упорядоченное множество L называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент. Пустое множество по определению считаем вполне упорядоченным. Подмножество вполне упорядоченного множества также вполне упорядочено.

Начальным промежутком вполне упорядоченного множества L назовем подмножество $J \subseteq L$, содержащее минимальный элемент $l_0 := \min L$, а также для любого $j \in J$ все элементы $l \in L$, меньшие, чем j. Если начальный промежуток J не совпадает с L, т. е. является собственным, то определен элемент $l_J := \min L \setminus J$. В этом случае из определения начального промежутка вытекает равенство $J = [l_0, l_J)$. Наоборот, любой такой полуинтервал задает начальный промежуток. Следовательно, начальные промежутки вполне упорядочены по отношению к включению.

Предложение 3. Если L и M вполне упорядочены, то и декартово произведение $L \times M$ с отношением (2) становится вполне упорядоченным.

Доказательство. Пусть D – непустое подмножество в декартовом произведении $L \times M$. Найдем $l_0 = \min\,\{l \in L \mid \exists m \in M: (l, m) \in D\}$. Далее определим

$m_0 = \min\,\{m \in M \mid (l_0, m) \in D\}$.

Тогда $(l_0, m_0) = \min D$, что следует из определения (2). □

Аксиома. Любое множество можно вполне упорядочить.

Теорема 1. Пусть L и M – вполне упорядоченные множества. Тогда одно из них монотонно и биективно отображается на начальный промежуток второго.

Доказательство. Обозначим $l_0 = \min L\,, m_0 = \min M$. Случай $L = \{l_0\}$ отбросим как тривиальный. Пусть L_0 – подмножество множества L, состоящее из элементов $l \in L$ таких, что существует монотонная биекция промежутка $[l_0, l)$ на начальный промежуток множества M. Множество L_0 не пусто, ибо $\min(L \setminus \{l_0\}) \in L_0$.

Заметим, что монотонная биекция, о которой говорится в доказательстве теоремы 1, единственна. К тому же, если $l \in L_0$, то $(l_0, l) \subseteq L_0$, таким образом, L_0 – начальный промежуток.

Случай 1. $L_0 = [l_0, l_*)$. Пусть $\phi_l: [l_0, l) \to J_l$ – монотонно возрастающая биекция на начальный промежуток J_l множества M, существующая по условию для любого $l < l_*$. Так как для $l_2 \in (l_1, l_*)$ сужение ϕ_{l_2} на $[l_0, l_1)$ дает ϕ_{l_1}, то $J_{l_1} \subset J_{l_2}$ и можно определить монотонно возрастающую биекцию $\phi: [l_0, l_*) \to \bigcup_{l, l<l_*} J_l$, продолжающую все ϕ_l. Объединение $J \coloneqq \bigcup_{l, l<l_*} J_l$ – начальный промежуток M. Если $J = [m_0, m_*)$ для некоторого $m_* \in M$, то доопределим $\phi(l_*) = m_*$. Получим монотонную биекцию $[l_0, l_*] \to [m_0, m_*]$. Если $L = [l_0, l_*]$, то все доказано. Иначе элемент $\min(L \setminus [l_0, l_*])$, следующий за l_*, принадлежит множеству L_0. Это противоречит равенству $L_0 = [l_m, l_*)$. Противоречие показывает, что на самом деле $J = M$, таким образом, нужная биекция совпадает с обратным к ϕ отображением.

Случай 2. $L_0 = L$. Тогда, как и в случае 1, строим строго возрастающую биекцию $\phi: L \to J$. ϕ – искомая биекция. □

2.4. Мощность множества. Два множества A и B называются равномощными, если между ними можно построить биективное соответствие $\phi: A \to B$. В этом случае пишем $\#A = \#B$ (читается так:

мощность множества A равна мощности множества B). Отношение равномощности есть отношение эквивалентности, что вытекает из свойств биекций (см. предложение 1).

Рассмотрим отношение $\#A \leq \#B$ между множествами A и B, заключающееся в том, что существует инъекция $A \to B$.

Теорема 2: а) отношение $\#A \leq \#B$ эквивалентно существованию сюръекции $B \to A$;

б) отношение $\#A \leq \#B$ есть отношение линейного порядка на классе всех множеств. В частности, если $\#A \leq \#B$ и $\#B \leq \#A$ одновременно, то A и B равномощны;

в) мощность любого множества меньше, чем мощность множества всех его подмножеств.

Доказательство: а) если $\mu: A \to B$ – вложение, то построим отображение $\nu: B \to A$ так, что $\nu(b) = a$ в случае $\mu(a) = b$ и $\nu(b) = a_0$ – какой-либо фиксированный элемент из множества A в случае $b \notin \mu(A)$. Ясно, что отображение ν сюръективно. Наоборот, пусть $\nu: B \to A$ – сюръекция. Тогда для каждого $a \in A$ прообраз $\nu^{-1}(a) \coloneqq \{b \in B \mid \nu(b) = a\}$ не пуст. Выберем $b_a \in \nu^{-1}(a)$ для каждого $a \in A$ (это можно сделать с помощью полного упорядочения множества B и затем выбора $b_a = \min \nu^{-1}(a)$). Получим отображение $a \to b_a$, которое будет вложением, ибо подмножества $\nu^{-1}(a)$ множества B попарно не пересекаются;

б) рефлексивность следует из наличия тождественной биекции $Id: A \to A$, транзитивность – из предложения 1. Докажем линейность и антисимметричность. Возьмем два множества – A, B. Обозначим $D \coloneqq A \cup B$ и вполне упорядочим D. Найдем начальные промежутки A_0, B_0 вполне упорядоченного множества D, минимальные по отношению к включению и равномощные с A и B соответственно. Так как начальные промежутки линейно упорядочены, то либо $A_0 \subseteq B_0$, либо, наоборот, $B_0 \subseteq A_0$. Доказана линейность отношения сравнения мощностей. Допустим теперь, что $\#A \leq \#B$ и $\#B \leq \#A$ одновременно. Тогда, ввиду минимальности A_0, B_0, получим включения $A_0 \subseteq B_0$ и $B_0 \subseteq A_0$. Отсюда $A_0 = B_0$, поэтому $\#A = \#B$;

в) в силу вложения $A \to \mathcal{P}(A)$, сопоставляющего элементу $a \in A$ подмножество из одного элемента $\{a\}$, получим $\#A \leq \#\mathcal{P}(A)$. Приведем к противоречию предположение о существовании биекции $\phi: A \to \mathcal{P}(A)$. Рассмотрим $A_0 \coloneqq \{ a \in A \mid a \notin \phi(a) \}$. Пусть $b = \phi^{-1}(A_0)$, т. е. $\phi(b) = A_0$. Если $b \in A_0$, то по определению множества A_0 имеем $b \notin \phi(b) = A_0$. Если же $b \notin A_0 = \phi(b)$, то снова по определению множества A_0 получаем $b \in \phi(b) = A_0$. В любом случае имеет место противоречие. Оно показывает, что A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны. □

2.5. Конечные и бесконечные множества. Множество, находящееся в биективном соответствии со своим собственным подмножеством, называется бесконечным. В противном случае, если любое собственное подмножество множества A не равномощно A, то множество A называется конечным.

Например, множества

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\Big\},\ \ n + 1 \coloneqq n \cup \{n\},$$

могущие служить в качестве чисел 0, 1, 2, …, конечны.

Предложение 4: а) подмножество конечного множества конечно. Надмножество бесконечного множества бесконечно;

б) объединение двух конечных множеств конечно.

Доказательство: а) если $A \subseteq B$ и $\phi: A \to A_0$ – биекция, где $A_0 \subset A$, то $A_0 \cup (B \setminus A)$ – собственное подмножество множества A. Продолжая биекцию ϕ на все множество B посредством тождественного отображения $B \setminus A \to B \setminus A$, получаем биекцию B на собственное подмножество. Доказано, что надмножество бесконечного множества бесконечно. Это утверждение эквивалентно первому утверждению в утверждении (a);

б) в силу утверждения (a) достаточно считать объединение дизъюнктивным, т. е. таким, что $A \cap B = \emptyset$. Если, как и выше, $\phi: A \to A_0$ – биекция, где $A_0 \subset A$, то $A_0 \cup B$ – собственное подмножество множества $A \cup B$. Продолжая биекцию ϕ на все объединение $A \cup B$ посредством тождественного отображения $B \to B$, получаем биекцию объединения $A \cup B$ на собственное подмножество. Доказано, что если одно из множеств – A или B – бесконечно, то и объединение множеств $A \cup B$ бесконечно. Это утверждение эквивалентно утверждению ($б$).

Аксиома. Существует бесконечное множество.

3. Числовые системы

Операцией на множестве M называется отображение $M^2 \to M$, сопоставляющее паре $(a, b) \in M^2$ результат операции $a * b$. В качестве знака операции используют символы $+,\ \cdot, -,\ /\ ,\ \circ$. В п. 2 использовались знаки $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ для обозначения операций над множествами.

Числа с операциями сложения и умножения бывают разной природы (в круглых скобках указана сигнатура – базовые операции и отношения):

- $\mathbb{N}(+,\ \cdot,\ \leq)$ – натуральные числа $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- $\mathbb{Z}(+,\ -,\ \cdot,\ \leq)$ – целые числа $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$;
- $\mathbb{Q}(+,\ \cdot,\ -,\ /,\ \leq)$ – рациональные числа, имеют вид дроби $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$;
- $\mathbb{R}(+,\ \cdot,\ -,\ /,\ \leq)$ – вещественные, или действительные, числа, имеют вид бесконечной десятичной дроби, снабженной знаком;
- $\mathbb{C}(+,\ \cdot,\ -,\ /)$ – комплексные числа вида $x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а i – комплексная единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$.

Каждая следующая система чисел является расширением предыдущей. Для всех чисел выполняются фундаментальные алгебраические законы.

Сл1. Ассоциативность сложения: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Сл2. Коммутативность сложения: $x + y = y + x$.

Сл3 (кроме натуральных чисел). Имеется нейтральный элемент по отношению к сложению – нуль – с условием $0 + x = x + 0 = x$. Нейтральный элемент единствен (задача 6).

Сл4 (кроме натуральных чисел). Для каждого числа x найдется противоположное число x' такое, что $x + x' = 0 = x' + x$. Это противоположное число единственно (при условии ассоциативности операции) и обозначается $-x$. В силу этого любое уравнение $a + x = b$ разрешимо, и его единственным решением является разность $x = b + (-a) =: b - a$ (задача 6). □

Абстрактное множество, на котором задана операция сложения, подчиняющаяся правилам Сл1 – Сл4, называется *абелевой группой*.

Ум1. Ассоциативность умножения: $x(y \cdot z) = (x \cdot y)z$.

Ум2. Коммутативность умножения: $x \cdot y = y \cdot x$.

Ум3. Имеется нейтральный элемент по отношению к умножению – единица – с условием $1 \cdot x = x \cdot 1 = 1$.

Д. Дистрибутивность умножения по отношению к сложению: $x(y+z) = x \cdot y + x \cdot z$; $(y+z)x = y \cdot x + z \cdot x$.

Ум4 (кроме систем натуральных и целых чисел). Для любого $x \neq 0$ найдется обратный элемент x^{-1} такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Как и для сложения, обратный элемент единствен, поэтому любое уравнение $ax = b$ при условии $a \neq 0$ однозначно разрешимо: $x = a^{-1}b$ (задача 6).

Абстрактное множество (предполагается, что оно не содержит нуля), на котором задана операция умножения, подчиняющаяся правилам Ум1, Ум3, Ум4, называется *(мультипликативной) группой*. Если же выполнена и аксиома Ум2, то группа будет абелевой и мультипликативной, в отличие от аддитивной абелевой группы, где знак операции плюс. Заметим, что аксиомы абелевой аддитивной и абелевой мультипликативной групп ничем не различаются, кроме знаков операций и обозначения нейтральных элементов.

Абстрактное множество, на котором заданы операции сложения и умножения, подчиняющиеся аксиомам Сл1 – Сл4, Ум1, Ум3, Д, называется *кольцом*. Если выполнена и аксиома Ум2, то *кольцо* называется *коммутативным*.

В любом кольце выполняются следующие равенства: а) $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$; б) $(-1)m = -m$; в) $(-1) \cdot (-1) = 1$. В самом деле, равенство $0 \cdot m = (0+0)m = 0 \cdot m + 0 \cdot m$ влечет равенство (*а*). Выкладка $m + (-1)m = \big(1 + (-1)\big)m = 0 \cdot m = 0$ доказывает равенство (*б*), а равенство (*в*) следует из равенства (*б*).

Абстрактное множество, на котором заданы операции сложения и умножения, подчиняющиеся аксиомам Сл1 – Сл4, Ум1 – Ум4, Д, называется *полем*.

Все числа, кроме комплексных, линейно упорядочены. Порядок на числах связан с операциями сложения и умножения следующим образом.

П1. Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$ для любого z.

П2. Если $x \leq y$ и $z \geq 0$, то $xz \leq yz$.

Поле (кольцо), на котором задан линейный порядок, подчиняющийся условиям П1, П2, называется *линейно упорядоченным полем* (кольцом). Пусть K – л. у. кольцо. Из свойства П1 следует другое свойство.

П3. Если $x \leq y$ и $z \leq u$, то $x + z \leq y + u$. В случае, когда одно из неравенств в условии строгое, получаем $x + z < y + u$.

Действительно, $x + z \leq y + z \leq y + u$ (*). Нестрогий вариант свойства доказан. Так как равенство $x + z = y + z$ влечет равенство $x = y$, то в случае $x < y$, либо в случае $z < u$ в одном из неравенств в соотношении (*) стоит строгое отношение.

П4. $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$. Эта импликация вытекает из свойства П1:
$x \leq y \Rightarrow x + (-x - y) \leq y + (-x - y) \Rightarrow -y \leq -x$.

П5. $1 > 0$ и $-1 < 0$ в ненулевом л. у. кольце. В самом деле, если бы $1 < 0$, то $-1 > 0$ и $1 = (-1) \cdot (-1) > 0$ – противоречие.

Элемент k кольца K называется *обратимым*, если найдется элемент $l \in K$ такой, что $k \cdot l = l \cdot k = 1$. В этом случае элемент l единствен и называется обратным к k элементом (задача 6). Так же как и свойство П4, но уже с применением аксиомы П2, получаем следующее свойство.

П6. Если $x > y > 0$ и элементы x, y обратимы, то $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$. □

В л. у. кольце K определим модуль числа $k \in K$ как величину
$$|k| := \max\{k, -k\} = \begin{cases} k, \text{если } k \geq 0, \\ -k, \text{если } k < 0. \end{cases}$$
Отметим **свойства модуля** (задача 9):

- **М1**: $|xy| = |x| \cdot |y|$;
- **М2 (неравенство треугольника)**: $|x \pm y| \leq |x| + |y|$;
- **М3**: $|x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|$;
- **М4**: $|a|^2 = a^2$.

4. Натуральные числа

Определение. Под системой натуральных чисел $(\mathbb{N}, \leq)$ понимают бесконечное вполне упорядоченное множество, каждый собственный промежуток которого конечен.

Такую систему можно построить, отправляясь от бесконечного множества D, вполне упорядочив его (см. аксиому в подп. 2.3), и затем переходя к минимальному бесконечному начальному промежутку л. у. множества D.

Обозначим $1 = \min \mathbb{N}$. Натуральные числа не имеют наибольшего элемента, ибо в противном случае множество $\mathbb{N} = [1, \max \mathbb{N}) \cup \cup \{\max \mathbb{N}\}$ было бы конечным согласно утверждению предложения 4*б*, подп. 2.5. Пользуясь этим, определим операцию прибавления единицы к натуральному числу n как минимальный элемент, строго больший чем n (обозначение $n+1$). Тем самым $n+1$ однозначно определяется двумя условиями: 1) $n < n+1$; 2) неравенство $n \leq m \leq n+1$ влечет либо совпадение $m=n$, либо $m=n+1$. Ясно, что $n \to n+1$ – инъективное отображение натуральных чисел на собственное подмножество. Докажем, что образ этого отображения совпадает со всеми натуральными числами, строго большими единицы. Допустим, что это не так и число $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ непредставимо в виде $n+1$. Рассмотрим полуинтервал $[1, m)$. Если $n \in [1, m)$, то $n+1 \in [1, m)$, ибо между n и $n+1$ нет натуральных чисел, тогда прибавление единицы будет биекцией $[1, m)$ на собственное подмножество, что противоречит определению $\mathbb{N}$. Противоречие показывает, что для любого натурального m, отличного от единицы, существует единственное натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n+1=m$. В этой ситуации обозначим $n-1 \coloneqq m$.

Обозначим $2 \coloneqq 1+1$, $3 \coloneqq 2+1$, …, $9 \coloneqq 8+1$. Знаки $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ называются *цифрами,* к которым присоединим знак 0, обозначающий нулевое число (в качестве математического объекта нуль можно определить как пустое множество).

Принцип математической индукции (ПМИ). Пусть ряд

$R(1), R(2), R(3), \dots, R(n), R(n+1), \dots$

представляет собой ряд утверждений. Предположим, что первое утверждение $R(1)$ верно (база индукции), а также из справедливости утверждения $R(n)$ вытекает, что и следующее утверждение $R(n+1)$ тоже верно (индукционный переход). Тогда все утверждения $R(n)$ справедливы.

Доказательство. Предполагая противное, найдем наименьшее натуральное m, для которого $R(m)$ не верно. По условию $m \neq 1$, поэтому $m=n+1$ для натурального $n=m-1$. Так как утверждение $R(n)$ верно в силу выбора числа m, а $R(n+1)=R(m)$ ложно, то получаем противоречие с индукционным переходом. □

Теорема 1: а) для натуральных чисел n, m неравенство $n < m$ имеет место тогда и только тогда, когда $\#[1, n] < \#[1, m]$;

б) для любого непустого конечного множества A найдется единственное натуральное число n такое, что $A \sim [1, n]_{\mathbb{N}}$. Это натуральное число n называется числом элементов множества A;

в) любое конечное л. у. множество вполне упорядочено. В частности, в любом конечном л. у. множестве имеются наименьший и наибольший элементы;

г) инъективное (сюръективное) отображение конечного множества на себя будет биекцией.

Доказательство: а) пусть $n < m$. Так как $[1, n] \subset [1, m]$, то $\#[1, n] \leq \#[1, m]$. Если бы здесь имело место равенство, то существовала бы биекция $[1, m] \to [1, n]$. Это противоречит конечности отрезка $[1, m]$. Наоборот, если $\#[1, n] \leq \#[1, m]$, то существует инъекция $[1, n] \to [1, m]$. Если бы было $n \geq m$, то существовала бы инъекция $[1, m] \to [1, n]$ и тогда $\#[1, n] = \#[1, m]$;

б) единственность вытекает из утверждения (a). Для доказательства существования n вполне упорядочим множество A и применим теорему 1, подп. 2.3;

в) в силу предложения 4, подп. 2.5 достаточно доказать, что в любом конечном л. у. множестве $(K, \leq)$ найдется наименьший элемент. Доказательство проводим с помощью индукции по числу элементов n множества K. База индукции, случай $n = 1$, – тривиальность. Пусть для n утверждение доказано и теперь $\#K = n + 1$. Выберем $k \in K$. Если $k = \min K$, то доказывать нечего, если иначе, то существует $k_0 = \min K \setminus \{k\}$ по предположению индукции. Так как $k_0 < k$ по предположению $k \neq \min K$, то $k_0 = \min K$.

Утверждение о наибольшем элементе выводится автоматически, если перейти к противоположному порядку: $k_1 \leq_{op} k_2 \Leftrightarrow k_1 \geq k_2$;

г) пусть множество K конечное и не пустое. Если отображение $\phi: K \to K$ инъективно, то $\phi: K \to \phi(K)$ – биекция. По определению конечного множества подмножество $\phi(K)$ не может быть собственным, откуда $\phi(K) = K$, тем самым ϕ – биекция. Рассмотрим случай, когда отображение $\psi: K \to K$ сюръективно. Определим отображение $\phi: K \to K$ так, что $\psi \circ \phi = Id_K$, взяв для каждого $k \in K$ в качестве $\phi(k)$ один из прообразов $\psi^{-1}(k)$. Тогда автоматически ϕ – инъекция, а значит, и биекция. Но тогда и $\psi = \phi^{-1}$ – биекция. □

В силу доказанной теоремы корректно обозначение $\#A$ для числа элементов конечного множества A. Для того чтобы не исключать случай пустого множества, определим $0 \coloneqq \#\emptyset$. Считаем, что $0 < 1$, систему $\mathbb{N} \cup \{0\}$ обозначаем $\mathbb{N}_0$ и называем множеством целых неотрицательных чисел. Это множество вполне упорядочено, только минимальный элемент уже не единица, а нуль. Следовательно, ПМИ можно применять и для л. у. множества $\mathbb{N}_0$.

Предложение 1: а) объединение конечного семейства конечных множеств конечно;

б) декартово произведение двух конечных множеств конечно;

в) совокупность всех отображений конечного множества в конечное множество конечна;

г) множество всех подмножеств конечного множества конечно.

Доказательство: а) пусть $B = \bigcup_{i \in I} A_i$, где множество I и все множества A_i конечны. Без ограничения общности можно считать $I = [1, n]$. С помощью индукции по n докажем конечность B. База индукции $n = 1$, тогда имеем совпадение $B = A_1$, отсюда B конечно по условию. Пусть утверждение доказано для n. Тогда объединение

$$\bigcup_{i \in [1,\ n+1]} A_i = \left(\bigcup_{i \in [1,\ n]} A_i \right) \cup A_{n+1}$$

конечно в силу предположения индукции и предложения 4*б*, подп. 2.5;

б) так как $A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}$, то утверждение следует из утверждения (a);

в) применим индукцию по числу элементов конечного множества A. Если $\#A = 0$, то $A = \emptyset$ и множество $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ имеет один элемент. Если для $n = \#A$ утверждение доказано и $a_0 \in A$ – какой-либо элемент, то подмножества множества A разделим на два класса

$\{\, B \subseteq A \mid a_0 \in B \,\}$; $\{\, C \subseteq A \mid a_0 \notin C \,\}$.

Каждый из них конечен по предположению индукции, ибо находится в биективном соответствии с $\mathcal{P}(A \setminus \{a_0\})$. Далее применим предложение 4*б*, подп. 2.5;

г) отображение $A \to B$ задается графиком $G \subseteq A \times B$. Утверждение вытекает из утверждения (*в*) и предложения 4a, подп. 2.5. □

Определим сложение натуральных чисел n и m и/или нуля как число элементов в дизъюнктивном объединении двух множеств, содержащих n и m элементов (в качестве таковых подойдут $[1, n] \times \{0\}$ и $[1, m] \times \{1\}$ для ненулевых n, m и пустое множество в случае нуля):

$n + m \coloneqq \#([1, n] \times \{0\} \cup [1, m] \times \{1\})$; $0 + n = n + 0 = n$.

Если $m = 1$, то множество

$$[1, n] \times \{0\} \cup [1, 1] \times \{1\} = \{\, (j, 0) \mid 1 \le j \le n \,\} \cup \{(1, 1)\} \qquad (*)$$

находится в биективном соответствии с отрезком $[1, n + 1]$ (при котором пара (1, 1) переходит в $n + 1$). Таким образом, новое определение прибавления единицы совпадет со старым.

Определим умножение натуральных чисел n и m и/или нуля как число элементов в декартовом произведении двух множеств, содержащих n и m элементов (в качестве таковых подойдут $[1, n]$ и $[1, m]$ для ненулевых n, m и пустое множество в случае нуля):

$n \cdot m = \#([1, n] \times [1, m]);\ 0 \cdot n = n \cdot 0 = 0.$

Определим степень n^m как количество элементов в множестве всех отображений $[1, m]_{\mathbb{N}} \to [1, n]_{\mathbb{N}}$. Кроме того, полагаем $n^0 = 1$ и $0^n = 0$ для натурального n.

Теорема 2. Операции сложения и умножения на множестве $\mathbb{N}_0$ ассоциативны и коммутативны. Умножение дистрибутивно относительно сложения. Кроме того:

а) операции прибавления числа и умножения на натуральное число строго монотонны: $n < m \Rightarrow n + k < m + k$ и $nk < mk$ в случае $k \neq 0$;

б) неравенство $n < m$ имеет место в том и только в том случае, когда найдется натуральное число k такое, что $n + k = m$, в этом случае k единственно и обозначается как разность $m - n$;

в) $n + k = m + k \Rightarrow n = m$ и $nk = mk,\ k \neq 0 \Rightarrow n = m$ (правила сокращения);

г) любое непустое, ограниченное сверху подмножество натуральных чисел имеет наибольший элемент;

д) $n^{m+k} = n^m \cdot n^k$, операция возведения в степень n^k строго монотонна как по n, так и по k (n называется основанием, а k – показателем).

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность сложения следуют из коммутативности и ассоциативности объединения, а коммутативность произведения следует из существования биекции $A \times B \to B \times A$, переставляющей местами компоненты пары ($(a, b) \to (b, a)$). Ассоциативность умножения вытекает из наличия биекции $A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$ такой, что $\big(a, (b, c)\big) \to \big((a, b), c\big)$. Дистрибутивность умножения по отношению к сложению есть следствие очередного свойства операций над множествами:

$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C),$

при этом если $A \cap B = \emptyset$, то множества $A \times C$ и $B \times C$ также не пересекаются.

Докажем другие утверждения:

а) если $n < m$, то $n + 1 \leq m < m + 1$, $n \cdot 1 < m \cdot 1$, что доказывает утверждение в случае $k = 1$. Пусть для k утверждение доказано. Тогда

$$n + (k + 1) = (n + k) + 1 < (m + k) + 1 = m + (k + 1),$$

где применено предположение индукции. Для сложения строгая монотонность доказана. Далее

$$n(k + 1) = nk + n < nk + m < mk + m = m(k + 1),$$

где два раза применяется строгая монотонность сложения. Индукционный переход завершен полностью;

б) если $n < m$, то натуральное число $k \coloneqq \#[n + 1, m]$ удовлетворяет соотношению $n + k = m$. (Другое доказательство: применяем индукцию по m). Тем самым доказано существование k. Единственность следует из утверждения (a);

в) утверждение есть прямое следствие утверждения (a);

г) для доказательства возьмем непустое подмножество $A \subseteq \mathbb{N}$ с верхней границей d. Если $d = \max A$, то доказывать нечего. Если иначе, то множество $\{d - a \mid a \in A\}$ не пустое и, следовательно, имеет наименьший элемент $d - a_0$. Тогда $a_0 = \max A$;

д) равенство достаточно доказать для $k = 1$, а затем применить индукцию по k. Пусть $k = 1$. Отображение $f: [1, m] \to [1, n]$ дает n продолжений на отрезок $[1, m + 1]$ в зависимости от того, какой образ назначают числу $m + 1$. Получаем n-кратное дизъюнктивное объединение множеств (одно из них обозначим D), каждое из которых имеет n^m элементов. Это совпадает с количеством элементов в декартовом произведении $D \times [1, n]$, что равно $\#D \cdot n$ по определению произведения. Строгая монотонность n^k снова следует из утверждения (a). □

Последовательностью элементов $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ длиной n множества A называется отображение $\phi_n: [1, n]_{\mathbb{N}} \to A$. Здесь подразумевается, что $\phi_n(j) = a_j$ для натурального $1 \leq j \leq n$.

Построим теперь «стандартное» множество натуральных чисел, пользуясь цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 как алфавитом, упорядоченным естественным образом. Натуральное число является словом в этом алфавите. Для этого рассмотрим совокупность $\mathbb{N}_{st}$ всех конечных последовательностей множества $\mathcal{D} \coloneqq \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, не начинающихся с нуля.

Последовательности одинаковой длины упорядочим лексикографически:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 < b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0 \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}$$
$$\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \exists 0 \le k \le n\colon a_k < b_k \text{ и } a_j = b_j \text{ для всех } j > k. \qquad (1)$$

Здесь все a_j и b_j – цифры. Кроме того, более короткую конечную последовательность считаем меньшей. Последовательность $l := a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ назовем n-значным натуральным числом ввиду следующей теоремы.

Теорема 3. Множество $\mathbb{N}_{st}$ относительно порядка (1) превращается в систему натуральных чисел. В этой системе выполняются следующие соотношения:

а) $2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1; \dots; 9 = 8 + 1; 10 = 9 + 1;$

б) таблица сложения однозначных натуральных чисел;

в) таблица умножения однозначных натуральных чисел;

г) число $\underbrace{10 \dots 0}_{(n-1)\text{ раз}}$ – наименьшее, а $\underbrace{9 \dots 9}_{n\text{ раз}}$ – наибольшее n-значное натуральное число;

д) $10^n = \underbrace{10 \dots 0}_{n\text{ раз}}$. Более общо: $d \cdot 10 = d0$ для любого $d \in \mathbb{N}_{st}$.

Доказательство. Множество $\mathcal{D}$ вполне упорядочено, как и любое конечное л. у. множество (теорема 1*в*). По той же причине вполне упорядочено (лексикографическим порядком) множество $\mathcal{D}^n$ всех последовательностей длиной n (среди них есть и начинающиеся с нуля). Как подмножество вполне упорядоченного множества вполне упорядочены n-значные натуральные числа. Если подмножество $D \subseteq \mathbb{N}_{st}$ не пустое и $d \in D$ – n-значное число, то $\min D = \min D \cap \mathcal{D}^n$ ввиду определения порядка. Доказана вполне упорядоченность $\mathbb{N}_{st}$.

Докажем выполнение других соотношений:

а) равенство $9 + 1 = 10$ вытекает из того, что 10 – наименьшее двузначное число (см. определение прибавления единицы, соотношение (*)). Остальные равенства в соотношении (*а*) следуют из естественного порядка $1 < 2 < \dots < 9$;

б), в) таблица сложения строится рекурсивно. Например, для доказательства равенства $6 + 7 = 13$ надо сначала доказать, что $6 + 6 = 12$, тогда $6 + 7 = 6 + (6 + 1) = (6 + 6) + 1 = 12 + 1 = 13$. Аналогично действуем с таблицей умножения;

г) утверждение – прямое следствие определения порядка;

д) достаточно доказать с применением индукции по $d \in \mathbb{N}_{st}$, что $d \cdot 10 = d0$. Для $d = 1$ это ясно. Далее $(d+1)10 = d \cdot 10 + 10 =$ $= d0 + 10 = m0$, где $m := d + 1$. Последнее равенство здесь имеет место в силу «правила сложения столбиком», которое вытекает из таблицы сложения. □

Далее всюду пользуемся стандартной системой натуральных чисел и полагаем $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{st}$.

Следствие. Натуральное число $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$, где все a_j – цифры, совпадет с $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$. □

Названия больших натуральных чисел таковы:

- $1000 =: 10^3$ – тысяча;
- $1\,000\,000 = 10^6$ – миллион;
- $1\,000\,000\,000 = 10^9$ – миллиард;
- $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ – триллион;
- $1\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{15}$ – квадриллион;
- $1\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 10^{18}$ – квинтиллион.

4.1. Счетные множества. *Бесконечной последовательностью* элементов $a_1, a_2, a_3, \dots$ множества A называется отображение $\phi: \mathbb{N} \to A$. Если все a_j попарно различны и в совокупности исчерпывают множество A, то ϕ называется *нумерацией* A. *Множество*, равномощное множеству натуральных чисел, называют *счетным*. Именно в случае наличия нумерации всеми натуральными числами множество A счетное.

Предложение 2. Декартово произведение счетных множеств счетно.

Доказательство заключается в построении нумерации декартова квадрата $\mathbb{N}^2$: $(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), \dots$ – в соответствии с линейным порядком, задаваемым правилом

$$(i,j) < (i',j') \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \text{либо } i + j < i' + j', \text{либо } i + j = i' + j' \text{и } i < i'$$

и превращающим $\mathbb{N}^2$ во вполне упорядоченное множество (см. предложение 3, подп. 2.3).

Другое решение получим, если зададим биекцию $\psi: \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ так, что $\psi(n,m) = 2^n(2m+1) - 1$.□

Следствие. Пусть множества $A_1, \dots, A_n$ не более чем счетные, причем среди них имеется счетное множество. Тогда объединение $A_1 \cup \dots \cup A_n$ счетно. □

Последовательность (конечная или бесконечная), состоящая из нулей и единиц, называется *бинарной*.

Теорема 4. Совокупность $2^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных бинарных последовательностей несчетна.

Доказательство 1. Предположим противное – существует нумерация

$$\boldsymbol{b_1} = (b_{11}, b_{12}, b_{13}, \dots); \dots; \ \boldsymbol{b_k} = (b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}, \dots); \dots \qquad (2)$$

всех бинарных последовательностей. Строим бинарную последовательность $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3, \dots)$ так, что $c_k \neq b_{kk}$. Тогда $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{b_k}$ для любого k, ибо они не совпадают на k-м месте. Тем самым $\boldsymbol{c}$ не входит в список (2). Это противоречит тому, что последовательность (2) – нумерация всех бинарных последовательностей. Противоречие показывает, что предположение о счетности множества $2^{\mathbb{N}}$ не верно, отсюда вытекает, что данное множество несчетно. □

Доказательство 2. Заметим, что $2^{\mathbb{N}}$ находится в биективном соответствии с множеством $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. А именно бинарную последовательность γ сопоставим с подмножеством S_γ натуральных чисел n таких, что $\gamma(n) = 1$. Наоборот, подмножеству $B \subseteq \mathbb{N}$ поставим в соответствие бинарную последовательность γ_B такую, что $\gamma_B(i) = 1$ в том и только в том случае, когда $i \in B$. Эти два отображения взаимно обратны. В силу утверждения (*в*) теоремы 2, подп. 2.4 получаем, что $\#\mathbb{N} < \#2^{\mathbb{N}}$. □

Мощность множества $2^{\mathbb{N}}$ называют *континуумом*. Утверждение о существовании бесконечного подмножества в $2^{\mathbb{N}}$, не являющегося ни счетным, ни континуальным, равно как и его отрицание, недоказуемо в теории множеств (точнее, недоказуемо в той аксиоматике, которая предъявлена выше).

4.2. Комбинаторные числа. Принцип математической индукции применяется и при построении математического объекта, как правило, функции. Определим факториал $n!$ индуктивно (по-другому – рекурсивно): $0! = 1! = 1$; $(n+1)! = n!\,(n+1)$.

Видно, что $n!$ есть произведение натуральных чисел от единицы до n включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$. Укажем факториалы первого десятка: $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$; $8! = $
$= 40\,320$; $9! = 362\,880$; $10! = 3\,628\,800$.

Биективное отображение множества из n элементов в себя называется *перестановкой или подстановкой на n символах*. Множество всех перестановок обозначим S_n. Число перестановок подчиняется тому же самому рекуррентному соотношению, что и факториал. Отсюда следует равенство

$$\#S_n = n!. \tag{3}$$

Предложение 3. Пусть E – множество из n элементов и $m \leq n$. Число подмножеств множества E, имеющих m элементов, находим по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{4}$$

Число C_n^m называется биномиальным коэффициентом.

Доказательство. Выбираем элементы из множества мощностью n. Первый элемент можно выбрать n способами, второй – $(n-1)$ способом, m-й – $(n-m+1)$ способом. Итого $n(n-1)\dots(n-m+1) = n!/(n-m)!$ способов выбора упорядоченной последовательности длиной m (без возвращения). Множество из m элементов можно упорядочить $m!$ способами [см. формулу (3)], откуда получаем формулу (4). □

Бином Ньютона. В коммутативном кольце имеет место тождество

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{5}$$

Для *доказательства* нужно раскрыть скобки в произведении $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$ (n раз) и учесть, что слагаемое $a^{n-k}b^k$ встретится столько раз, сколькими способами можно выбрать k раз b и оставшиеся $(n-k)$ раз a из n скобок. Ответ на это дает формула (4). □

Свойства биномиальных коэффициентов:

$C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = C_n^{n-1} = n;$

$C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2};\ C_n^m = \dfrac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!};$

$C_n^m = C_n^{n-m};$

$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m\ (1 \leq m \leq n-1);$

$$\sum_{m=0}^{m=n} C_n^m = 2^n;\ \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m C_n^m = 0.$$

Все свойства, кроме последнего, следуют из формулы (4), а последнее – из бинома Ньютона [см. формулу (5)], если подставить $a = b = 1$ или $a = 1, b = -1$.

Биномиальные коэффициенты удобно располагать в так называемый *треугольник Паскаля*.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
C_1^k	1	1							
C_2^k	1	2	1						
C_3^k	1	3	3	1					
C_4^k	1	4	6	4	1				
C_5^k	1	5	10	10	5	1			
C_6^k	1	6	15	20	15	6	1		
C_7^k	1	7	21	35	35	21	7	1	
C_8^k	1	8	28	56	70	56	28	8	1

В нем каждое не крайнее левое и не крайнее верхнее число C_n^m равно сумме числа C_{n-1}^m, над ним стоящего, и числа C_{n-1}^{m-1}, стоящего слева от первого. В пустых клетках предполагаются нули.

5. Целые числа

Определим на множестве пар $\mathbb{N}_0^2$ отношение $(n, m) \sim (n', m')$, имеющее место в том и только в том случае, когда $n + m' = n' + m$. Это отношение эквивалентности. Действительно, рефлексивность и симметричность очевидны, докажем транзитивность. Предположим, что $(n, m) \sim (n', m') \sim (n'', m'')$. Тогда $n + m' = n' + m$ и $n' + m'' = = n'' + m'$, что влечет $n + m' + n' + m'' = n' + m + n'' + m'$. Сокращая на n' и на m', получаем $n + m'' = n'' + m$. Тем самым $(n, m) \sim \sim (n'', m'')$. Транзитивность доказана. Классы эквивалентности обозначаем как разности $n - m$. Итак, $n - m = n' - m' \Leftrightarrow n + m' = n' + m$.

Определим сложение и умножение разностей следующим образом:

$$(n_1 - m_1) + (n_2 - m_2) \coloneqq (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2); \qquad (1)$$

$$(n_1 - m_1)(n_2 - m_2) \coloneqq (n_1 n_2 + m_1 m_2) - (n_1 m_2 + m_1 n_2). \qquad (2)$$

Теорема 1: а) определения (1) и (2) корректны, т. е. результат не зависит от выбора представителей (n_1, m_1), (n_2, m_2) в классах эквивалентности;

б) множество $\mathbb{Z}$ всех классов эквивалентности является коммутативным кольцом, называемым кольцом целых чисел;

в) отображение $h: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, сопоставляющее числу n разность $n - 0$, инъективно и обладает свойством гомоморфности:

$h(n + k) = h(n) + h(k); h(nk) = h(n)h(k).$

В силу этого отождествляем разность $n - 0$ с числом $n \in \mathbb{N}_0$;

г) если $n \geq m$, то $n - m = k$ для числа $k \in \mathbb{N}_0$ такого, что $k + m = n$ (это устраняет неоднозначность в понимании разности в пп. 4 и 5);

д) целое число вида $0 - n$ $(n \in \mathbb{N})$ равно $-n$. Обозначим $-\mathbb{N} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$. Тогда имеет место разбиение $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N})$;

е) линейный порядок продолжается на кольцо целых чисел таким образом:

$$z < w \Leftrightarrow w - z \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

и превращает $\mathbb{Z}$ в л. у. кольцо.

Доказательство. Докажем утверждение (a). Пусть $(n_1, m_1) \sim (n_1', m_1')$, т. е. $n_1 + m_1' = n_1' + m_1$. Тогда $n_1 + n_2 + m_1' + m_2 = n_1' + n_2 + m_1 + m_2$ и $(n_1 n_2 + m_1 m_2) + (n_1' m_2 + m_1' n_2) = (n_1' n_2 + m_1' m_2) + (n_1 m_2 + m_1 n_2)$, ибо последнее равенство эквивалентно $(n_1 + m_1')n_2 + (m_1 + n_1')m_2 = (n_1' + m_1)n_2 + (m_1' + n_1)m_2$.

Отсюда следует $(n_1 + n_2, m_1 + m_2) \sim (n_1' + n_2, m_1' + m_2)$ и

$(n_1 n_2 + m_1 m_2, n_1 m_2 + m_1 n_2) \sim (n_1' n_2 + m_1' m_2, n_1' m_2 + m_1' n_2)$.

Доказана неизменяемость правой части в определениях (1) и (2) при выборе другого представителя класса $n_1 - m_1$. Аналогично доказывается неизменяемость при выборе другого представителя класса $n_2 - m_2$.

Коммутативность и ассоциативность сложения в определении (1) сразу следуют из коммутативности и ассоциативности сложения натуральных чисел. Разность $0 - 0$ является нейтральным элементом относительно сложения. Для разности $n - m$ противоположный элемент – разность $m - n$, ибо $(n - m) + (m - n) = (n + m) - (m + n) = 0 - 0$. Доказано, что $(\mathbb{Z}, +)$ – абелева группа.

Коммутативность умножения сразу следует из определения (3).

Докажем утверждение (*в*). Если $n - 0 = n' - 0$ в $\mathbb{Z}$, то $n + 0 = n' + 0$ в $\mathbb{N}$. Отсюда следует равенство $n = n'$ и инъективность h. Далее $h(n_1 + n_2) = (n_1 + n_2) - 0 = (n_1 - 0) + (n_2 - 0) = h(n_1) + h(n_2)$;
$h(n_1 n_2) = n_1 n_2 - 0 = (n_1 - 0)(n_2 - 0) = h(n_1)h(n_2)$.

Это дает право на отождествление натурального числа n с целым числом $n - 0$. Тогда и $0 - n = -(n - 0) = -n$.

Докажем утверждение (∂). Оно вытекает из предыдущего доказательства, ибо равенство $k + m = n$ для натуральных чисел значит, что $n - m = k - 0 = k$.

Единица – нейтральный элемент по отношению к умножению, так как $(1 - 0)(n - m) = (n + 0 \cdot m) - (0 \cdot n + m) = n - m$.

Для доказательства ассоциативности умножения $(z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3)$ достаточно заметить, что $n(-m) = (-n)m = -nm$, и проверить тождество ассоциативности для случаев $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, -1\}$. Тривиальные случаи, когда один из множителей равен нулю или единице, отбросим. Таким образом, ассоциативность сводится к равенству $(-1)[(-1)(-1)] = [(-1)(-1)](-1)$, которое вытекает из коммутативности умножения.

Далее заметим, что

$$\left.\begin{aligned} n(n_2 - m_2) &= (nn_2) - (nm_2), \\ (-n)(n_2 - m_2) &= nm_2 - nn_2 = -[n(n_2 - m_2)]. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Доказательство дистрибутивности, т. е. тождества $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$, достаточно проводить для ненулевых z_1, z_2, z_3. Оно распадается на восемь случаев в зависимости от $z_j \in \mathbb{N}$ или $z_j \in -\mathbb{N}$. Коммутативность сложения, а также соотношения (4) не оставляют от этих восьми случаев ни одного.

Докажем утверждение (e). Транзитивность отношений $<$ и $\leq$ следует из замкнутости $\mathbb{N}_0$ относительно сложения. Рефлексивность отношения $\leq$ вытекает из принадлежности нуля системе $\mathbb{N}_0$. Линейность отношения $\leq$ на множестве $\mathbb{Z}$ следует из линейности отношения на множестве $\mathbb{N}$ и, кроме того, из следующего тривиального факта: любое число $z \in -\mathbb{N}$ меньше любого натурального числа.

Если $z_1 < z_2$, то $z_2 - z_1 = n \in \mathbb{N}$. Отсюда $(z_2 + z) - (z_1 + z) = n \in \mathbb{N}$, поэтому $z_1 + z < z_2 + z$. Если $z = m \in \mathbb{N}$, то $z_2m - z_1m = (z_2 - z_1)m = nm \in \mathbb{N}$, поэтому $z_1m < z_2m$. □

Множество $\mathbb{N}$ называется множеством положительных целых чисел, а множество $-\mathbb{N}$ – множеством отрицательных целых чисел. Числа из множества $\mathbb{N}_0$ называют неотрицательными целыми числами.

Заметим, что неравенство $-k > -m$ для двух натуральных чисел k и m имеет место тогда и только тогда, когда $k < m$. Итак,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Предложение 1. Фиксируем целое число b. Отображение $z \to z + b$ является возрастающей биекцией множества $\mathbb{N}_0$ на полуинтервал $[b, +\infty)_{\mathbb{Z}}$. В частности, этот полуинтервал – вполне упорядоченное множество. □

Заметим, что $\mathbb{Z}$ – счетное множество согласно следствию предложения 2, подп. 4.1.

Отношение делимости. Говорят, что число $x \in \mathbb{Z}$ делит число y (нацело), если $y = xm$ для некоторого целого m. *Натуральное число* $p > 1$, которое не имеет положительных делителей, кроме 1 и p, называется *простым*. Приведем несколько первых простых чисел:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523.

Целое число, делящееся на два, называется *четным*, а не делящееся на два – *нечетным*. Двойка – единственное простое четное число.

Теорема 2. Для любых двух целых чисел m, k таких, что $k \neq 0$, найдутся единственные целые числа q (неполное частное) и r (остаток) с условиями

$$m = kq + r, 0 \leq r < |k|. \qquad (5)$$

Доказательство. Так как полуинтервалы $k + t|k|, [k + (t + 1)|k|)$ $(t \in \mathbb{Z})$ разбивают л. у. множество целых чисел, то найдется единственное целое число t с условием $k + t|k| \leq m < k + (t + 1)|k|$. Полагаем q таким, что $kq = k + t|k|$ ($q = 1 + t$, если $k > 0$, и $q = 1 - t$, если $k < 0$). Тогда $kq \leq m < kq + |k|$ (*) и остаток $r = m - kq$ удовлетворяет соотношениям (5). Наоборот, соотношения (5) влекут неравенства (*), и из единственности t вытекает единственность неполного частного q, а значит, и единственность остатка r.□

Множество целых чисел, кратных n, обозначим $n\mathbb{Z}$. Множество целых чисел, дающих в остатке k при делении на n ($n \neq 0$), обозначим $k + n\mathbb{Z}$.

Для целых чисел $a, b, \dots, c$, не все из которых нули, определим их наибольший общий делитель НОД$(a, b, \dots, c)$ как наибольшее натуральное число, делящее каждое из чисел $a, b, \dots, c$. По определению НОД$(0, \dots, 0) = 0$. Докажем, что для целых $(a, b) \neq (0, 0)$

$$\text{НОД}(a, b) = \min\{\, am + bk \mid m, k \in \mathbb{Z}, am + bk > 0 \,\}. \qquad (6)$$

Действительно, обозначив минимум в соотношении (6) как d, поделим a на d с остатком: $a = dq + r, 0 \leq r < d$. Так как $d = am_0 + bk_0$ для подходящих $m_0, k_0 \in \mathbb{Z}$, то и $r = a - dq = = a(m_0 - q) + bk_0 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. Но $0 \leq r < d$, поэтому $r = 0$ в силу выбора d. Доказано, что $d|a$. Аналогично $d|b$. Ясно, что если $d'|a$ и $d'|b$, то $d'|am_0 + bk_0 = d$, откуда $d' \leq d$.

Пусть число p делит произведение целых чисел ab, тем самым $ab = pn, n \in \mathbb{Z}$. Предположим, что НОД$(a, p) = 1$ (например, это так, если p – простое число, не делящее a). Тем самым, ввиду доказанного равенства (6), $1 = pm + ak$ для некоторых целых m, k. Тогда

$$b = b(pm + ak) = pbm + bak = pbm + pnk = p(bm + nk),$$

откуда $p|b$. Доказано следующее полезное свойство.

Предложение 2. Если $p|ab$ и НОД$(a, p) = 1$, то $p|b$. В частности, если простое число делит произведение целых чисел, то оно делит один из сомножителей. □

Основная теорема арифметики. Любое ненулевое целое число, не равное ± 1, однозначно представимо в виде

$$\pm p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}, \qquad (7)$$

где $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k$ – простые числа, а $n_1, n_2, \dots, n_k$ – натуральные числа.

Доказательство существования разложения основано на модификации принципа математической индукции: дан ряд утверждений $R(1), R(2), \dots$, относительно которого предполагаем, что первое утверждение $R(1)$ верно, и из справедливости $R(j)$ для всех $j < n$ вытекает справедливость $R(n)$. Тогда все утверждения $R(n)$ истинны. Доказывается этот принцип также на основе вполне упорядоченности системы натуральных чисел.

Докажем существование разложения в произведение простых чисел. Достаточно ограничиться натуральными числами больше единицы. База индукции – «двойка разложима в произведение простых чисел» – очевидное утверждение. Предположим, что все натуральные числа, меньшие n, но большие единицы, разложимы в произведение простых. Рассмотрим два случая: 1) если n – простое число, тогда доказывать нечего; 2) $n = mk$, где $m, k < n$. Автоматически тогда $m, k > 1$, и по предположению «модифицированной» индукции они разложимы в произведение простых чисел. Тогда и произведение $mk = n$ также разложимо.

Единственность доказываем с применением индукции по $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. База индукции, $n = 2$, – тривиальность. Пусть для натуральных чисел, меньших n, единственность доказана и

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} = q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_l^{m_l}$$

представляет собой два разложения, где $2 \leq q_1 < q_2 < \cdots < q_l$ – также простые числа. Согласно предложению 2 p_1 делит одно из простых чисел q_j, а значит, с ним совпадает. Сокращение на p_1 приводит к двум разложениям натурального числа n/p_1; применение предположения индукции завершает доказательство. □

Простых чисел бесконечно много. Это следует из того, что для любого набора простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_t$ ни один из простых множителей числа $p_1 p_2 \dots p_t + 1$ не совпадает ни с одним p_j (иначе он бы делил единицу).

6. Рациональные числа

Рассмотрим на множестве $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ всех пар (a, b) таких, что $a, b \in \mathbb{Z}$ и $b \neq 0$, отношение $(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$ – отношение эквивалентности. Доказательство этого факта в точности такое же, как и в п. 5 (с заменой сложения на умножение). Класс эквивалентности для пары (a, b) обозначим a/b и назовем дробью с числителем a и знаменателем b. Из определения отношения эквивалентности вытекает правило сокращения: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ $(k \neq 0)$. В общем случае

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} mn' = nm'. \tag{1}$$

Определим операции сложения и умножения над дробями:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2};\ \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}. \tag{2}$$

Теорема: а) операции (2) определены корректно, т. е. результат не зависит от представителей классов эквивалентности, и множество $\mathbb{Q}$ всех дробей является полем относительно этих операций;

б) отображение $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, переводящее целое число m в дробь $\frac{m}{1}$, представляет собой инъекцию и гомоморфизм: $h(m_1 + m_2) = h(m_1) + h(m_2)$, $h(m_1 m_2) = h(m_1) \cdot h(m_2)$. В силу этого отождествим целое число m с дробью $m/1$;

в) любую ненулевую дробь однозначно можно представить в виде m/n, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ и НОД$(m,n) = 1$;

г) отношение

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow a_1 b_2 \leq a_2 b_1, \tag{3}$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{N}, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, превращает $\mathbb{Q}$ в л. у. поле.

Доказательство: а) все дроби вида $0/n$ равны между собой и представляют нулевой элемент, который обозначаем 0. Ненулевые дроби образуют мультипликативную абелеву группу, в частности определение умножения корректно и для любой ненулевой дроби a/b имеется обратная дробь b/a. Этот факт доказан в п. 5 для операции сложения и без изменений переносится на мультипликативный случай. Докажем корректность определения сложения [операция (2)]. Пусть $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, т. е. $ab_1 = ba_1$ в кольце $\mathbb{Z}$. Тогда $\frac{ab_2 + a_2 b}{bb_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}$, ибо

$$(ab_2 + a_2 b)b_1 b_2 = (a_1 b_2 + a_2 b_1)bb_2 \Leftrightarrow (ab_2 + a_2 b)b_1 =$$
$$= (a_1 b_2 + a_2 b_1)b \Leftrightarrow ab_2 b_1 = a_1 b_2 b \Leftrightarrow ab_1 = a_1 b,$$

что верно. Коммутативность сложения усматривается непосредственно из определения (2), а ассоциативность – из следующей выкладки:

$$\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right) + \frac{a_3}{b_3} = \frac{(a_1 b_2 + a_2 b_1)b_3 + b_1 b_2 a_3}{b_1 b_2 b_3} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2}{b_2 b_3} =$$
$$= \frac{a_1}{b_1} + \left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}\right).$$

Дистрибутивность проверяется также непосредственно:

$$\frac{a_1}{b_1}\left(\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}\right) = \frac{a_1(a_2 b_3 + a_3 b_2)}{b_1 b_2 b_3} = \frac{a_1 a_2 b_1 b_3 + a_1 a_3 b_1 b_2}{b_1 b_2\, b_1 b_3} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \frac{a_1 a_3}{b_1 b_3};$$

б) проверяем:

$$h(m) = h(m') \Leftrightarrow \frac{m}{1} = \frac{m'}{1} \Leftrightarrow m = m',$$

и инъективность следует.

Далее

$$h(m_1+m_2)=\frac{m_1+m_2}{1}=\frac{m_1}{1}+\frac{m_2}{1}=h(m_1)+h(m_2);$$

$$h(m_1m_2)=\frac{m_1m_2}{1}=\frac{m_1}{1}\cdot\frac{m_2}{1}=h(m_1)\cdot h(m_2);$$

в) утверждение следует из основной теоремы арифметики;

г) линейность, рефлексивность и антисимметричность сразу следуют из определения (3). Докажем транзитивность. Пусть $\frac{a_1}{b_1}\le\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_2}{b_2}\le\frac{a_3}{b_3}$, где $b_1,b_2,b_3\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{cases}a_1b_2\le a_2b_1\\ a_2b_3\le b_2a_3\end{cases}\Rightarrow a_1b_2b_3\le a_2b_1b_3=(a_2b_3)b_1\le b_2a_3b_1.$$

В результате сокращения на b_2 неравенства $a_1b_2b_3\le b_2a_3b_1$ получаем $a_1b_3\le a_3b_1$, т. е. $\frac{a_1}{b_1}\le\frac{a_3}{b_3}$. Кроме того, если $b\in\mathbb{N}$, то

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a}{b}\le\frac{a_2}{b_2}+\frac{a}{b}\Leftrightarrow(a_1b+ab_1)b_2b\le(a_2b+ab_2)b_1b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_1bb_2+ab_1b_2\le a_2bb_1+ab_2b_1\Leftrightarrow a_1bb_2\le a_2bb_1\Leftrightarrow a_1b_2\le a_2b_1,$$

что верно. Предполагая $a,b\in\mathbb{N}$, получаем

$$\frac{a_1}{b_1}\frac{a}{b}\le\frac{a_2}{b_2}\frac{a}{b}\Leftrightarrow a_1ab_2b\le a_2ab_1b\Leftrightarrow a_1b_2\le a_2b_1,$$

что также верно. □

Поле $\mathbb{Q}$ называется *полем рациональных чисел*. Отождествляем целое число m с дробью $m/1$. Тогда $\mathbb{Q}$ – расширение л. у. кольца $\mathbb{Z}$, а $\mathbb{Z}$ в свою очередь есть расширение $(\mathbb{N},\ +,\ \cdot,\ \le)$. Заметим, что множество $\mathbb{Q}$ счетное ввиду следствия предложения 2, подп. 4.1.

Дробь $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ называется *несократимой*, если НОД$(m,n)=1$.

Предложение. Пусть $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ – многочлен с целыми коэффициентами. Если несократимая дробь m/k – корень этого многочлена, то $k|a_n$ и $m|a_0$.

Доказательство. По условию имеет место равенство $P\left(\frac{m}{k}\right)=0$, откуда

$$a_nm^n+a_{n-1}m^{n-1}k+\cdots+a_1mk^{n-1}+a_0k^n=0$$

представляет собой соотношение в целых числах, из которого следует, что $k|a_nm^n$, $m|a_0k^n$. Так как НОД$(m,k)=1$, то НОД$(m,k^n)=1$ и НОД$(m^n,k)=1$ в силу основной теоремы арифметики. Тогда согласно предложению 2, п. 5 получаем $k|a_n$ и $m|a_0$. □

Следствие. Пусть уравнение $x^n = a, a \in \mathbb{Z}$, не имеет целого корня. Тогда оно не имеет и рационального корня. В частности, не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. □

Среди всех дробей особенно употребительны десятичные – дроби вида $\frac{m}{10^k}$ (случай, когда знаменатель есть степень десятки). Любая десятичная дробь однозначно записывается в виде

$$\pm\left(a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \frac{a_{-2}}{10^2} + \dots + \frac{a_{-k}}{10^k}\right), \qquad (4)$$

где все a_j – цифры. Короче дробь вида (4) записывают так:

$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$.

Отметим, что сумма и разность, а также произведение двух десятичных дробей есть десятичная дробь, тем самым они образуют кольцо.

7. Задачи

1. Определим натуральные числа рекуррентно: $0 = \emptyset, n + 1 := n \cup \{n\}$. Отношение порядка между ними таково: $n < m \Leftrightarrow n \in m$. Написать несколько первых чисел. Сколько фигурных скобок требуется для развернутой записи числа 10?

2. Доказать, что счетное объединение счетных множеств счетно.

3. Доказать, что не существует множества всех одноэлементных множеств.

4. Придумать нумерацию всех слов в двухбуквенном алфавите.

5. Нарисовать на декартовой плоскости множество

$([2,8] \times [1,7]) \setminus ((4,6) \times (3,5))$.

6. Доказать единственность нейтральных элементов 0 и 1, а также единственность обратных элементов.

7. Булеан, т. е. множество $\{0,1\}$ с коммутативными операциями

$0 + 1 = 1;\ 0 + 0 = 1 + 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1,$

есть поле из двух элементов (можно ассоциировать «0» с «чет», а «1» – с «нечет», либо «0» – «ложь», «1» – «истина», умножение – конъюнкция, а сложение – «исключающееся или» , т. е. $\underline{(x \text{ и не} y) \text{ или } (\text{не} x \text{ и } y)}$).

8. Множество всех подмножеств $\mathcal{P}(A)$ множества A – (булевое) коммутативное кольцо относительно симметрической разности в ка-

честве сложения и пересечения в качестве умножения. В нем выполняются тождества $x^2 := x \cdot x = x$ и $2x := x + x = 0 = \emptyset$. Единица – все множество A. Будет ли оно частично упорядоченным кольцом относительно включения?

9. Обосновать свойства модуля в л. у. поле.

10. Найти корни многочлена: а) $6x^3 - 25x^2 + 34x - 15$; б) $6x^3 - 13x^2 + x + 2$.

11. Доказать, что любую правильную рациональную дробь с нечетным знаменателем можно представить в виде $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \dots + \frac{1}{q_k}$, где $q_1, \dots, q_k$ – различные нечетные числа. Например, $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{11}{9} + \frac{1}{45}$; $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; $\frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$; $\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$; $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{33} + \frac{1}{693}$.

12. Числа Фибоначчи определяются рекуррентно: $f_0 = f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (*). Доказать, что они суть числители и знаменатели подходящих дробей для бесконечной цепной дроби $\omega := 1 + \frac{1}{1+1/(1+\dots)}$. Число $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение, оно удовлетворяет, также как и $-1/\omega$, рекуррентному соотношению (*). Найти константы C_1, C_2 такие, что $f_n = C_1\omega^n + (-1)^n C_2 \omega^{-n}$.

13. Доказать соотношение $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+1/(2+\dots)} =: [1, 2, 2, 2, \dots]$.

14. Доказать тождество Лагранжа

$$\sum_{1 \le j < k \le n} \left(a_j b_k - a_k b_j\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2.$$

15. Определим последовательность $H_n = \sum_1^n \frac{1}{k}$. Вычислить несколько первых членов этой последовательности. Выразить $S_n = \sum_0^n \frac{1}{2k+1}$ через H_m. Найти: а) $A_n = \sum_1^n \frac{1}{k^2+k}$; б) $B_n = \sum_3^n \frac{1}{k^2-4}$.

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

8. Поле вещественных чисел

Определение. Полем вещественных чисел называется линейно упорядоченное поле, в котором любое непустое, ограниченное сверху множество имеет наименьшую верхнюю грань.

Обозначаем поле вещественных чисел знаком $\mathbb{R}$. Свойство существования наименьшей верхней грани можно выразить иначе. Пусть подмножества $A, B \subseteq \mathbb{R}$ не пусты и $a \leq b$ для любых $a \in A, b \in B$. Тогда найдется вещественное число d, разделяющее A и B, т. е. неравенство $a \leq d \leq b$ имеет место для любых $a \in A, b \in B$ (свойство полноты).

Согласно следствию предложения в п. 6 л. у. поле рациональных чисел не удовлетворяет свойству полноты, ибо множества $\{ q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2 \}$ и $\{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}$ не разделены никаким рациональным числом.

Далее предлагается одна из возможных конструкций поля вещественных чисел, основанная на бесконечных десятичных дробях.

Действительным, или по-другому *вещественным*, *числом* назовем бесконечную десятичную дробь (кратко – б. д. д.), снабженную знаком плюс или минус:

$$r = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} \dots \tag{1}$$

(все a_j – цифры). Перейдем к строгим формулировкам. *Абсолютным действительным числом* называется отображение $\rho\colon \mathbb{Z} \to$ $\to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (т. е. $\mathbb{Z}$-последовательность), для которого найдется целое n такое, что для любого $j > n$ j-й десятичный знак $\rho(j)$ равен нулю. Запятая (или точка) в записи (1) ставится для удобства отсчета десятичных знаков. Действительным числом назовем пару $r = (\mathrm{sgn}, \rho)$, где sgn – знак плюс или минус, а $\rho = |r|$ – абсолютное значение числа r. Абсолютное значение ρ записываем как $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k} \dots$ (без знака), подразумеваем $\rho(j) = a_j$, причем $\rho(j) = 0$ для всех $j > n$. Пару (s, ρ) проще записываем в виде (1). Примем ряд соглашений:

- б. д. д. $+0$ отождествляем с б. д. д. -0, где 0 – нулевое абсолютное значение, все десятичные знаки которого нули;

• пусть в записи (1) $a_{-k} \neq 9$, а за этим десятичным знаком стоят сплошь девятки (в этом случае говорим о бесконечном хвосте девяток и такую *б. д. д.* называем *несобственной*). Тогда полагаем $\tilde{a}_{-k} = a_{-k} + 1$ и формулу (1) отождествляем с действительным числом

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{1-k} \tilde{a}_{-k} 0 \dots; \qquad (2)$$

• абсолютное число ρ отождествляем с числом $+\rho$, в частности $-0 = +0 = 0$;

• конечную десятичную дробь $\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$ отождествляем с б. д. д., у которой десятичные знаки с номерами больше n, а также меньше $-k$ равны нулю.

Заметим, что, говоря об отождествлении, мы допускаем вольность. Если рассуждать строго, следует определить отношение эквивалентности: $+0 \sim -0$; выражение (1) эквивалентно выражению (2); $\rho \sim +\rho$ – и далее переходить к фактор-множеству, состоящему из классов эквивалентности. Но дело в том, что классы эквивалентности содержат не более чем четыре элемента. Например, класс, порожденный единицей, состоит из чисел $+1{,}000\dots$; $+0{,}999\dots$; $1{,}000\dots$; $0{,}999\dots$, которые в силу соглашений выше считаем равными.

Бесконечную десятичную дробь называем *собственной*, если она не содержит бесконечного хвоста девяток.

Совокупность действительных чисел обозначим $\mathbb{R}$. Кольцо конечных десятичных дробей обозначим $\mathbb{Q}_{10}$. В силу принятых выше соглашений построено вложение $\mathbb{Q}_{10}$ в $\mathbb{R}$.

Лексикографический порядок распространяется и на бесконечные десятичные дроби. Таким образом, $\mathbb{R}$ становится линейно упорядоченным множеством.

Конечную десятичную дробь $r_{<k} := \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{-k}$ назовем *десятичным приближением* порядка k числа (1), она имеет k «верных» знаков после запятой и отличается от r не более чем на $1/10^k$, т. е.

$$r_{<k} - \frac{1}{10^k} < r < r_{<k} + \frac{1}{10^k}. \qquad (3)$$

Предположим, что б. д. д. (1) собственная. Для несобственной б. д. д. $0{,}999\dots$ приближение порядка k есть $1{,}00\dots0$ (k нулей).

Выберем $k \in \mathbb{N}_0$. Полуинтервалы $\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, разбивают л. у. множество $\mathbb{R}$. Собственная б. д. д. (1) попадает в интервал

$\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right)$ в том и только в том случае, когда либо $r_k = \frac{m}{10^k}$ (случай $m \geq 0$), либо $r_k = \frac{m+1}{10^k}$ (случай $m < 0$). В частности, две собственные б. д. д. r и s попадают в один и тот же полуинтервал, если и только если $r_k = s_k$. Для $k+1$ аналогичные полуинтервалы являются подразбиением построенного разбиения:

$$\left[\frac{m}{10^k}, \frac{m+1}{10^k}\right) = \left[\frac{10m}{10^{k+1}}, \frac{10m+1}{10^{k+1}}\right) \cup \left[\frac{10m+1}{10^{k+1}}, \frac{10m+2}{10^{k+1}}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{10m+9}{10^{k+1}}, \frac{10(m+1)}{10^{k+1}}\right).$$

Подмножество B л. у. множества L называется *всюду плотным*, если любой интервал в множестве L содержит элементы из множества B.

Предложение 1. Конечные десятичные дроби образуют плотное подмножество в $\mathbb{R}$. □

Теорема 1. Любое непустое, ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань. Любое непустое, ограниченное снизу множество вещественных чисел имеет точную нижнюю грань.

Доказательство. Пусть подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$ не пусто и ограничено сверху. Строим последовательность десятичных приближений точной верхней грани. Взяв $k \in \mathbb{N}$ и воспользовавшись ограниченностью подмножества A, находим интервал $\left[\frac{m_k}{10^k}, \frac{m_k+1}{10^k}\right)$, в котором есть элементы из подмножества A, а в следующем полуинтервале $\left[\frac{m_k+1}{10^k}, \frac{m_k+2}{10^k}\right)$ уже нет таких элементов. Тогда конечные десятичные дроби $r_k = \frac{m_k}{10^k}$ в случае, когда найдется $x \in A$, $x \geq 0$, и $r_k = \frac{m_k+1}{10^k}$ в случае, когда $x < 0$ для любого $x \in A$, будут десятичными приближениями некоторой б. д. д. r (возможно, несобственной, как, например, для множества $A = \{0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; \ldots\}$). Если $r < a$ для какого-либо $a \in A$, то $r < r_k + \frac{1}{10^k} < a$ для достаточно большого натурального k. Это противоречит выбору r_k. Доказано, что r – верхняя грань.

Пусть $s < r$ для некоторой б. д. д. Тогда $s < r_k$ для достаточно большого k. Но полуинтервал $[r_k, r_k + 10^{-k})$ содержит элементы из множества A, тем самым s не может быть верхней гранью для множества A.

Доказано, что $r = \sup A$. □

Добавим к вещественной прямой два несобственных элемента $\pm\infty$. Считаем $-\infty < x < +\infty$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Для неограниченного сверху множества A получаем $\sup A = +\infty$, а для неограниченного снизу множества A верно $\inf A = -\infty$. Линейно упорядоченное множество $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty; +\infty]$ назовем *пополненной системой вещественных чисел.*

Предложение 2. Пусть L – л. у. множество, $B \subseteq L$ – всюду плотное его подмножество, а $\phi: B \to \mathbb{R}$ – строго возрастающее отображение, причем образ $\phi(B)$ всюду плотен на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$ пополненных вещественных чисел. Тогда отображение ϕ однозначно продолжается до строго возрастающего отображения $\tilde{\phi}: L \to [\alpha, \beta]$. Если в множестве L любое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань, то $\tilde{\phi}(L)$ – промежуток с концами α и β.

Доказательство. Пусть $l \in L \setminus B$, причем $l \neq \min L$. Тогда полагаем

$$\tilde{\phi}(l) = \sup \phi(\{ x \in B \mid x < l \}). \tag{4}$$

Если $l = \min L$, то полагаем $\tilde{\phi}(l) = \inf \phi(B)$.

Монотонность $\tilde{\phi}$ следует из монотонности ϕ. Строгая монотонность вытекает из плотности множества B в множестве L, а однозначность $\tilde{\phi}$ следует из того, что образ $\phi(B)$ плотен на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Пусть теперь в множестве L любое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань. Фиксируем $x \in (\alpha, \beta)$ и рассматриваем множество $L_x = \{ l \in L \mid \phi(l) \leq x \}$. Пусть $l_x = \sup L_x$. Если $\tilde{\phi}(l_x) < x$, то найдется $\phi(b) \in (\tilde{\phi}(l_x), x)$ для некоторого $b \in B$. Тогда $l_x < b$ и $b \in L_x$ – противоречие с определением l_x. Ясно, что $\tilde{\phi}(l_x) \leq x$. Остается единственная возможность: $\tilde{\phi}(l_x) = x$. □

Следствие. Вложение $\mathbb{Q}_{10} \subseteq \mathbb{R}$ продолжается до строго возрастающего вложения $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. □

Пусть $\frac{m}{n}$ – рациональная дробь, где $n \in \mathbb{N}$. Ее приближение конечной десятичной дробью порядка k заключается в поиске целого числа m_k такого, что $\frac{m_k}{10^k} \leq \frac{m}{n} < \frac{m_k+1}{10^k}$. Эти неравенства эквивалентны $m_k \leq \frac{10^k m}{n} < m_k + 1$. Обозначая $b = \frac{10^k m}{n} - m_k$, получим $10^k m = $ $= n m_k + bn$. Так как $0 \leq b < 1$, то $0 \leq bn < n$. При этом $bn \in \mathbb{Z}$ как разность двух целых чисел. Итак, поиск m_k заключается в евклидовом делении $10^k m$ на n с остатком. Ввиду того что остатков от деления на n конечное число, получаем, что они (остатки) с некоторой позиции k повторяются. Доказано, что рациональное число представимо периодической б. д. д. Обратное утверждение докажем позже.

Отождествим рациональное число $q \in \mathbb{Q}$ с образом при вложении в $\mathbb{R}$. Ясно, что $\mathbb{Q}$ плотно располагается на вещественной прямой. Под *вещественной прямой* понимаем л. у. множество, находящееся в биективном и строго монотонном соответствии с построенным выше л. у. множеством вещественных чисел.

8.1. Сложение вещественных чисел. Назовем рациональное число q (рациональным) приближением б. д. д. $r \in \mathbb{R}$ порядка $k \in \mathbb{N}_\mathbf{0}$ по недостатку, если $q \le r \le q + 10^{-k}$. Назовем $l \in \mathbb{Q}$ приближением б. д. д. $r \in \mathbb{R}$ порядка $k \in \mathbb{N}_\mathbf{0}$ по избытку, если $l - 10^{-k} \le r \le l$.

Предложение 3. Пусть (q_n) – последовательность приближений по недостатку, а (l_n) – последовательность приближений по избытку вещественного числа r, причем для q_k, l_k порядок приближения равен k. Тогда

$$r = \sup\{q_n\} = \inf\{l_n\}. \tag{5}$$

Доказательство. Так как $q_n \le r$ для любого n, то $\sup\{q_n\} \le r$. Предполагая, что здесь имеет место строгое неравенство, найдем $q \in \mathbb{Q}$ с условием $\sup\{q_n\} < q < r$ и далее натуральное n такое, что $q - 10^{-n} \ge \sup\{q_n\}$. Тогда $q_n \le \sup\{q_n\} \le q - 10^{-n} \Rightarrow q_n + 10^{-n} \le$ $\le q < r,$ что противоречит неравенству $q_n + 10^{-n} \ge r$. Аналогично доказывается второе равенство в соотношении (5). □

Суммой двух вещественных чисел r и s назовем

$$r + s := \sup\{q + d \mid q, d \in \mathbb{Q}, q \le r, d \le s\}. \tag{6}$$

Заметим, что определение (6) корректно: если окажется, что $r, s \in \mathbb{Q}$, то можно взять $q = r, d = s$ и тогда правая часть в определении (6) будет равной сумме рациональных чисел r и s.

Теорема 2. Определение (6) превращает $\mathbb{R}$ в линейно упорядоченную абелеву группу.

Доказательство. Коммутативность сложения в $\mathbb{R}$ следует из коммутативности сложения в $\mathbb{Q}$: $q + d = d + q$ в определении (6). Очевидно также, что нулевая б. д. д. – нейтральный элемент. Свойство П1, п. 3 ($r \le s \Rightarrow r + t \le s + t$) выполняется ввиду монотонности оператора точной верхней грани: если $A, B \subseteq \mathbb{R}$ и для любого $a \in A$ найдется $b \in B$ такой, что $a \le b$, то $\sup A \le \sup B$.

Противоположным числом к б. д. д. $+\rho$ будет $-\rho$ и наоборот. Здесь ρ – абсолютное вещественное число. Действительно,

$$\rho + (-\rho) = \sup\{\rho_{<k} + (-\rho_{<k} - 10^{-k}) \mid k \in \mathbb{N}\} =$$
$$= \sup\{-10^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Докажем ассоциативность сложения. Пусть $r, s, t \in \mathbb{R}$ и q_n, d_n, p_n – их рациональные приближения порядка n по недостатку. Докажем, что $r + (s + t) = \sup\{ q_n + d_n + p_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ (*). Неравенство $\geq$ здесь следует из свойства монотонности сложения (см. П1, п. 3). Допустим, что имеет место строгое неравенство $>$. Тогда для некоторого натурального k

$$r + (s + t) - 10^{-k} \geq \sup\{ q_n + d_n + p_n \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Возьмем приближения q_n, d_n, p_n порядка $k + 1$. С одной стороны,

$$q_{k+1} + d_{k+1} + p_{k+1} \leq \sup\{ q_n + d_n + p_n \mid n \in \mathbb{N} \} \leq r + (s + t) - \frac{1}{10^k},$$

тем самым $q_{k+1} + d_{k+1} + p_{k+1} + 10^{-k} \leq r + (s + t)$. С другой стороны, $r + (s + t) \leq q_{k+1} + d_{k+1} + p_{k+1} + 3 \cdot 10^{-k-1}$. Получаем противоречивое неравенство: $10^{-k} \leq 3 \cdot 10^{-k-1}$, сводящееся к $10 \leq 3$. Это противоречие показывает, что на самом деле верно соотношение (*). Аналогично сумма $(r + s) + t$ равна правой части соотношения (*). Таким образом, ассоциативность, а значит, и вся теорема доказаны. □

8.2. Умножение вещественных чисел. Перейдем к определению умножения вещественных чисел. Сначала сделаем это для положительных чисел $\mathbb{R}^+$, т. е. фактически для абсолютных вещественных чисел. Для этого нужно повторить все то, что изложено в подп. 8.1, заменяя сложение на умножение, нуль на единицу, противоположный элемент на обратный и, самое главное, определение приближения порядка k на определение относительного приближения порядка k.

Скажем, что положительное рациональное число q есть относительное приближение порядка k по недостатку вещественного числа q, если $q \leq r \leq q(1 + 10^{-k})$. Назовем $l \in \mathbb{Q}^+$ приближением б. д. д. $r \in \mathbb{R}^+$ порядка $k \in \mathbb{N}_0$ по избытку, если $l(1 - 10^{-k}) \leq r \leq l$.

Предложение 4. Пусть (q_n) – последовательность относительных приближений по недостатку, а (l_n) – последовательность относительных приближений по избытку числа $r \in \mathbb{R}^+$, причем для q_k, l_k порядок приближения равен k. Тогда

$$r = \sup\{q_n\} = \inf\{l_n\}. \tag{7}$$

Доказательство. Так как $q_n \leq r$ для любого n, то $\sup\{q_n\} \leq r$. Предполагая, что здесь имеет место строгое неравенство, найдем $q \in \mathbb{Q}^+$ с условием $\sup\{q_n\} < q < r$ и далее натуральное n такое, что $q(1 - 10^{-n}) \geq \sup\{q_n\}$. Тогда $q_n \leq \sup\{q_n\} \leq q(1 - 10^{-n})$, откуда следует $q_n(1 + 10^{-n}) \leq q(1 - 10^{-k})(1 + 10^{-k}) < q < r$, что противоречит неравенству $q_n(1+10^{-n}) \geq r$. Аналогично доказывается второе равенство в соотношении (7). □

Произведением двух положительных вещественных чисел r и s назовем

$$r \cdot s \coloneqq \sup\{q \cdot d \mid q, d \in \mathbb{Q}^+, q \leq r, d \leq s\}. \qquad (8)$$

Заметим, что определение (8) корректно: если окажется, что $r,\ s \in \mathbb{Q}^+$, то можно взять $q = r, d = s$ и тогда правая часть в определении (8) будет равной произведению рациональных чисел r и s.

Теорема 3. Определение (8) превращает $\mathbb{R}^+$ в линейно упорядоченную мультипликативную абелеву группу.

Доказательство. Коммутативность умножения в $\mathbb{R}^+$ следует из коммутативности умножения в $\mathbb{Q}^+$. Очевидно также, что единица – нейтральный элемент по отношению к умножению [определение (8)]. Свойство П2, п. 3 ($0 < r \leq s, t > 0 \Rightarrow r \cdot t \leq s \cdot t$) выполняется ввиду монотонности оператора точной верхней грани.

Пусть q_n – относительное приближение порядка n числа $r \in \mathbb{R}^+$ по недостатку, а $l_n = q_n(1+10^{-n})$ – приближения по избытку порядка n, ибо $l_n(1-10^{-n}) = q_n(1-10^{-2n}) < q_n$. Здесь n пробегает множество натуральных чисел. Тогда все l_n^{-1} ограничены сверху, например числом q_1^{-1}. Предположим $s = \sup\{l_n^{-1}\}$ и докажем, что $rs = 1$. Действительно,

$$rs = \sup\{\, q_n l_n^{-1} \mid n, m \in \mathbb{N}\,\} = \sup\{\,(1+10^{-k})^{-1} \mid k \in \mathbb{N}\,\} = 1.$$

Докажем ассоциативность умножения. Пусть $r, s, t \in \mathbb{R}^+$ и q_n, d_n, p_n – их относительные рациональные приближения порядка n по недостатку. Докажем, что $r(st) = \sup\{\, q_n d_n p_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ (*). Неравенство $\geq$ следует из свойства монотонности умножения (П2, п. 3). Допустим, что имеет место строгое неравенство $>$. Тогда для некоторого натурального k верна оценка

$$r(st)(1-10^{-k}) \geq \sup\{\, q_n d_n p_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}.$$

Возьмем относительные приближения q_n, d_n, p_n порядка $k+1$. С одной стороны,

$$q_{k+1} d_{k+1} p_{k+1} \leq \sup\{\, q_n d_n p_n \mid n \in \mathbb{N}\,\} \leq r(st)\left(1-\frac{1}{10^k}\right),$$

тем самым $q_{k+1} d_{k+1} p_{k+1}(1-10^{-k})^{-1} \leq r(st)$. С другой стороны, $r(st) \leq q_{k+1} d_{k+1} p_{k+1}(1+10^{-k-1})^3$. Получаем противоречивое неравенство $(1-10^{-k})^{-1} \leq (1+10^{-k-1})^3$.

В самом деле, пользуясь тождеством

$$\frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \dots + \delta^n + \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \qquad (9)$$

в случае $n = 3$, сводим последнее неравенство к следующему:

$$1 + 10^{-k} + 10^{-2k} + 10^{-3k} + \frac{10^{-4k}}{1-10^{-k}} \le$$
$$\le 1 + 3 \cdot 10^{-k-1} + 3 \cdot 10^{-2k-2} + 10^{-3k-3}. \qquad (10)$$

Но $10^{-k} > 3 \cdot 10^{-k-1}$, $10^{-2k} > 3 \cdot 10^{-2k-2}$ и $10^{-3k} + \frac{10^{-4k}}{1-10^{-k}} > > 10^{-3k-3}$, ибо после умножения на 10^{3k+3} неравенство приводится к виду $1000 + \frac{10^{-k+3}}{1-10^{-k}} > 1$.

Тем самым неравенство (10) противоречиво, а следовательно, на самом деле верно соотношение (*). Аналогично произведение $(rs)t$ равно правой части соотношения (*), таким образом, ассоциативность, а значит, и вся теорема доказаны. □

Замечание. Полная аналогия продолжения сложения и умножения связана с изоморфностью (одинаковостью) л. у. групп $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^+, \cdot)$, которая следует из свойств экспоненты и логарифма.

Распространим умножение на все вещественные числа, пользуясь правилом знаков:

$$(-1) \cdot (-1) = 1\,. \qquad (11)$$

Это соотношение объясним (а не докажем!) так: умножение на -1 есть поворот числовой оси на 180° относительно начала координат (то же самое для декартовой плоскости). Если повторить такой поворот, то получается в итоге поворот на 180° + 180° = 360°, что является тождественным преобразованием, т. е. умножением на нейтральный элемент (единицу). Итак,

$$(\mathrm{sgn}_1, \rho)(\mathrm{sgn}_2, \tau) = (\mathrm{sgn}_1 \mathrm{sgn}_2, \rho\tau). \qquad (12)$$

Здесь ρ, τ – абсолютные вещественные числа, а знак плюс соответствует числу 1, знак минус – числу -1. Заметим, что имеет место равенство $(-1)r = -r$. Ассоциативность и коммутативность умножения в множестве $\mathbb{R}$ следуют из того, что знаки ± 1 и абсолютные б. д. д. обладают этими свойствами, а по определению (12) пары перемножаются покомпонентно. □

Теорема 4. Относительно определенных операций сложения и умножения [см. определения (6), (8), (12)] множество бесконечных десятичных дробей, снабженных знаком плюс или минус, образует линейно упорядоченное поле, в котором любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.

Доказательство. Доказательству подлежит только закон дистрибутивности. Выделим следующие этапы.

Д1. Исходя из верного тождества $(n+1)q = nq + q$ ($n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}$) и применяя оператор точной верхней грани, доказываем, что $(n+1)r = nr + r$ для любого $r \in \mathbb{R}$.

Д2. С помощью индукции по $n \in \mathbb{N}$, с использованием Д1 как базы индукции доказываем равенство $n(r+s) = nr + ns$ для любых $r, s \in \mathbb{R}$.

Д3. Проверяем, что $\frac{1}{n}(r+s) = \frac{1}{n}r + \frac{1}{n}s$, умножая это соотношение на $n \in \mathbb{N}$ и применяя Д2.

Д4. Из доказанного в Д2 и Д3 вытекает тождество $q(r+s) =$ $= qr + qs$ для $q \in \mathbb{Q}^+$ и $r, s \in \mathbb{R}$.

Д5. Применяя оператор точной верхней грани к $t =$ $= \sup\{\, q \in \mathbb{Q}^+ \mid q \le t \,\}$, доказываем тождество $t(r+s) = tr + ts$, где t – произвольное абсолютное значение (случай $t = 0$ тривиален).

Д6. Применяя соотношение $(-1)t = -t$ (см. доказательство теоремы 3), доказываем равенство $t(r+s) = tr + ts$ для отрицательных вещественных t. □

Теорема 5 (принцип Архимеда): а) для любого вещественного числа r и сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что $\varepsilon N > r$;

б) пусть $a > 1$. Для любого вещественного числа b найдется натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $a^n > b$;

в) пусть $0 \le b < 1$. Для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число N такое, что $b^N < \varepsilon$.

Доказательство: а) пусть натуральные числа k и M таковы, что $\frac{1}{10^k} \le \varepsilon$ и $r \le M$. Существование таких k и M вытекает из построения системы действительных чисел как совокупности бесконечных десятичных дробей. Тогда число $N = 10^k M$ – искомое;

б) утверждение вытекает из утверждения (*а*) в силу неравенства Бернулли

$$(1+\Delta)^n \ge 1 + n\Delta, \tag{13}$$

справедливого для любого натурального n и для любого $\Delta > -1$. Доказывается неравенство (13) с помощью индукции по n: для $n = 1$ оно очевидно, а если неравенство (13) верно для какого-либо n, то

$$(1+\Delta)^{n+1} = (1+\Delta)^n(1+\Delta) \geq (1+n\Delta)(1+\Delta) =$$
$$= 1 + (n+1)\Delta + n\Delta^2 \geq 1 + (n+1)\Delta.$$

Неравенство (13) доказано для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее находим достаточно большое натуральное число n такое, что $n(a-1) \geq b,$ и тогда

$$a^n = \big(1 + (a-1)\big)^n \geq 1 + n(a-1) > n(a-1) \geq b;$$

в) случай $b = 0$ отбросим как тривиальный. Тогда в силу утверждения (*б*) найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\left(\frac{1}{b}\right)^N > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда получаем $b^N < \varepsilon$. □

Замечание. Функция $y = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}$ $(a < b)$ задает биективное соответствие между точками интервала (a, b) и всеми действительными числами. В частности, мощность множества точек любого интервала одинакова и равна мощности множества действительных чисел. Покажем, что эта мощность есть континуум, т. е. совпадает с мощностью множества всех бинарных последовательностей. Так как совокупность б. д. д. вида $0,\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots$, где все $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, лежит на интервале $(0, 1)$, то континуум не превосходит мощности этого интервала. Кодируя цифры бинарными четверками ($0 \to 0000, 1 \to 0001, \dots, 8 \to 1000, 9 \to 1001$) и ставя в соответствие б. д. д. $r \in (0, 1)$ бинарную последовательность, полученную кодированием всех десятичных знаков, видим, что мощность интервала $(0, 1)$ не больше чем континуум.

8.3. Модуль и знак числа. Число $|x| = \max\{x, -x\}$ названо модулем числа $\boldsymbol{x}$. Это определение согласуется с определением абсолютной величины б. д. д. (см. выше). Далее термины «модуль» и «абсолютная величина» рассматриваются как математические синонимы. Свойство гомоморфности модуля по отношению к умножению (M1) и неравенство треугольника (M2) (см. п. 3) обобщаются на случай любого количества сомножителей и слагаемых:

- **M1'**: $|x_1 x_2 \dots x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \dots |x_n|$;
- **M2'**: $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

Знак ненулевого числа определяется как отображение

$$\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{\pm 1\},$$

обозначаемое $y = \operatorname{sgn} x$ и принимающее значение единицы для $x > 0$ и минус единицы, если $x < 0$. Верно тождество

$$\operatorname{sgn}(x_1 x_2) = \operatorname{sgn}(x_1) \cdot \operatorname{sgn}(x_2); \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*.$$

9. Предел по базе фильтра

Под термином *«функция»* понимается отображение некоторого множества M в множество вещественных чисел.

Определение 1. Систему непустых подмножеств $\mathfrak{B}$ множества M назовем базой фильтра, если пересечение двух множеств из системы $\mathfrak{B}$ содержит какое-либо третье множество системы $\mathfrak{B}$. Элементы базы фильтра называются окончаниями.

Примеры баз. 1. Подмножества $\{n, n+1, n+2, \dots\}$, где n пробегает $\mathbb{N}$, образуют базу фильтра, которую обозначаем $n \to \infty$.

Фиксируем точку $a \in \mathbb{R}$. Пусть $\delta > 0$; δ-окрестностью точки a назовем интервал $(a-\delta, a+\delta)$, который задается неравенством $|x-a| < \delta$. *Проколотой* δ*-окрестностью* точки a называется δ-окрестность этой точки без самой точки a; проколотая δ-окрестность задается неравенствами $0 < |x-a| < \delta$. *Окрестностью* точки a назовем подмножество вещественных чисел, содержащее интервал, который в свою очередь содержит δ-окрестность a.

2. Совокупность проколотых δ-окрестностей точки a образует базу фильтра на множестве $\mathbb{R}$, которую обозначим $x \to a$.

3. Интервалы $(a, a+\delta), \delta > 0$, образуют базу фильтра, обозначаемую $x \to a+0$ (читается: x стремится к a справа). Аналогично интервалы $(a-\delta, a)$ образуют базу фильтра, которую обозначаем $x \to a-0$ (читается: x стремится к a слева).

4. Интервалы $(C, +\infty)$ вещественной прямой образуют базу фильтра, которую обозначаем $x \to +\infty$. Интервалы $(-\infty, C)$ образуют базу фильтра, которую обозначаем $x \to -\infty$.

5. Пусть $M \subseteq \mathbb{R}$, а фиксированная точка $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ такова, что любая ее проколотая окрестность имеет пересечение с множеством M. В этом случае говорим, что a – предельная точка множества M. Тогда семейство пересечений $U \cap M$, где U пробегает проколотые окрестности точки a, образует базу фильтра на множестве M. Этот пример обобщает все примеры баз, определенных выше.

Определение 2. Функция $f: M \to \mathbb{R}$ имеет предел $A \in \mathbb{R}$ по базе фильтра $\mathfrak{B}$, определенной на множестве M, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $U \in \mathfrak{B}$ такое, что $|f(m) - A| < \varepsilon$ для всякого $m \in U$.

Далее, изучая **свойства предела**, формулируем и доказываем множество утверждений, которые нумеруем так: ПР1, ПР2, …, ПР12.

ПР1. Если предел функции существует, то он единствен.

Действительно, если A и A' – пределы функции $f\colon M \to \mathbb{R}$ по базе фильтра $\mathfrak{B}$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдутся окончания $U_1, U_2 \in \mathfrak{B}$ такие, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любого $x \in U_1$ и $|f(x) - A'| < \varepsilon$ для любого $x \in U_2$. Найдем окончание $U \subseteq U_1 \cap U_2$. Тогда для $x \in U$ последние два неравенства выполняются одновременно, поэтому

$$|A - A'| \le |A - f(x)| + |f(x) - A'| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Так как это верно для любого ε, то с необходимостью следует $A = A'$. □

Предел функции по базе обозначаем $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f$.

Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной по базе* $\mathfrak{B}$, если найдется окончание U такое, что числовое множество $\{ f(x) \mid x \in U \}$ ограничено. Далее f – функция, определенная на множестве M, снабженном базой фильтра $\mathfrak{B}$. Предел функции f по базе $\mathfrak{B}$ обозначим A.

ПР2. Функция, имеющая предел по базе, ограничена по этой же базе.

Доказательство. Если $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любых $x \in U$, то для тех же x имеет место оценка $|f(x)| \le |A| + \varepsilon$. □

ПР3. Если $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) \ne 0$, то найдется окончание U такое, что $f(x)$ имеет тот же знак, что и предел, для любого $x \in U$ (в частности, $f(x) \ne 0$). Более того, в этом случае функция $1/f(x)$ (определенная по крайней мере на каком-либо окончании) ограничена по базе $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Полагаем $A > 0$. Для $\varepsilon = A/2$ найдем окончание U такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для любого $x \in U$. Тогда $f(x) > A/2$ и $0 \le 1/f(x) < 2/A$ для всех $x \in U$. Аналогично разбирается случай $A < 0$.□

Функцию, принимающую лишь одно значение для любой точки из некоторого окончания, назовем *константной* (по базе $\mathfrak{B}$).

ПР4. Предел константной функции существует и равен этой константе. □

9.1. Бесконечно малые величины. *Функция* $\alpha\colon M \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* (кратко – б. м.) относительно базы $\mathfrak{B}$, если $\lim_{\mathfrak{B}} \alpha = 0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание U такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in U$.

ПР5. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ имеет предел A по базе $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$ для некоторой б. м. $\alpha(x)$.

Доказательство. Если $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$, то для любого положительного ε найдется окончание U такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Но это значит, что функция $\alpha(x) \coloneqq f(x) - A$ имеет нулевой предел, т. е. является б. м. и удовлетворяет условию $f(x) = A + \alpha(x)$. Наоборот, если $f(x) = A + \alpha\,(x)$ для некоторой б. м. α, то для любого положительного ε найдется окончание U такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Но $\alpha(x) = f(x) - A$, поэтому $|f(x) - A| < \varepsilon$ для таких же x. По определению предела это значит, что $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$. □

Отметим **свойства бесконечно малых величин**.

БМ1. Сумма (разность) бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Доказательство. Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ б. м. относительно базы $\mathfrak{B}$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем окончания U_1, U_2 такие, что $|\alpha(x)| < \varepsilon/2$ для $x \in U_1$ и $|\beta(x)| < \varepsilon/2$ для $x \in U_2$. Тогда для окончания $U \subseteq U_1 \cap U_2$ выполняются оба неравенства, поэтому

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

БМ2. Произведение бесконечно малой величины и ограниченной по этой же базе функции является бесконечно малой величиной. В частности, произведение б. м. величины на константу или функцию, имеющую предел в точке a, есть также б. м. величина.

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ б. м., а функция $f(x)$ ограничена по базе $\mathfrak{B}$. Найдем окончание V и ненулевое число D такие, что $|f(x)| \le D$ для любого $x \in V$. Зададим число $\varepsilon > 0$ и найдем окончание U такое, что $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{D}$. Тогда для окончания $\widehat{U} \subseteq U \cap V$ справедлива оценка

$$|\alpha(x) f(x)| = |\alpha(x)| \cdot |f(x)| < \frac{\varepsilon}{D} D = \varepsilon. \ \square$$

БМ3. Отношение б. м. $\alpha(x)$ к функции $f(x)$, имеющей ненулевой предел по этой же базе, является б. м.

Действительно, если $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) \neq 0$, то $1/f(x)$ ограничена в точке a по свойству ПР3. Следовательно, на основании свойства БМ2 получаем, что $\alpha\,/f \ = \alpha\,(1/f)$ также есть б. м. величина. □

БМ4. Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая величина относительно базы $\mathfrak{B}$, а $\beta\,(x)$ – функция такая, что выполняются неравенства

$$-|\alpha\,(x)| \leq \beta\,(x) \leq |\alpha(x)|$$

для всех x из некоторого окончания этой базы. Тогда $\beta\,(x)$ также б. м. В частности, $\alpha(x)$ б. м. в том и только в том случае, когда $|\alpha(x)|$ б. м.

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ найдем окончание U такое, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in U$. Тогда и $|\beta(x)| < \varepsilon$ для тех же x. □

9.2. Бесконечно большие величины. *Функция* $A(x)$ называется *бесконечно большой* (положительной) (кратко – положительная б. б.) *величиной* относительно базы $\mathfrak{B}$, если для любого сколь угодно большого C найдется окончание U (зависящее от C) такое, что $A(x) > C$ для любого $x \in U$. Этот факт по-другому записывают так: $\lim_{\mathfrak{B}} A(x) = +\infty$ – и говорят, что предел функции $A(x)$ по базе $\mathfrak{B}$ равен $+\infty$.

Аналогично определяется бесконечно большая отрицательная величина. Это тот случай, когда $\lim_{\mathfrak{B}} A(x) = -\infty$.

Отметим **свойства бесконечно больших величин**.

ББ1. Сумма положительных (отрицательных) б. б. величин есть положительная (отрицательная) б. б. величина. □

ББ2. Произведение б. б. величины и функции, ограниченной снизу положительным числом в некотором окончании базы $\mathfrak{B}$, есть б. б. величина того же знака. В частности, произведение б. б. величины и положительной константы есть б. б. величина того же знака. □

ББ3. Если функция $A(x)$ б. б. относительно базы фильтра $\mathfrak{B}$, то $1/A(x)$ б. м. относительно той же базы. Наоборот, если $\alpha(x)$ б. м. относительно базы $\mathfrak{B}$, причем $\alpha(x)$ строго положительна (строго отрицательна) для некоторого окончания, то $1/\alpha(x)$ – положительная (отрицательная) б. б. величина. □

9.3. Арифметические свойства предела по базе. Пусть существуют пределы $\lim_{\mathfrak{B}} f(x) = A$ и $\lim_{\mathfrak{B}} g(x) = B$ для функций, определенных на множестве M с базой фильтра $\mathfrak{B}$. Тогда $f(x) = A + \alpha(x)$, $g(x) = B + \beta(x)$ для некоторых б. м. $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ согласно свойству ПР5.

ПР6. Предел суммы $f+g$ существует и равен сумме пределов

$$\lim_{\mathfrak{B}}\bigl(f(x)+g(x)\bigr)=A+B. \tag{1}$$

Доказательство. $f(x)+g(x)=A+\alpha(x)+B+\beta(x)=(A+B)+$ $+\bigl(\alpha(x)+\beta(x)\bigr)$. Так как сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ б. м. согласно БМ1, то равенство (1) следует в силу свойства ПР5. □

ПР7. Предел произведения существует и равен произведению пределов $\lim_{\mathfrak{B}}(f(x)\cdot g(x))=AB$. В частности, константу можно выносить за знак предела.

Доказательство. Имеем $f(x)g(x)=\bigl(A+\alpha(x)\bigr)\bigl(B+\beta(x)\bigr)=$ $=AB+\alpha(x)B+A\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$. Так как сумма $\alpha(x)B+A\beta(x)+$ $+\alpha(x)\beta(x)$ б. м. согласно свойствам БМ1, БМ2, то равенство $\lim_{\mathfrak{B}}(f\cdot g)=AB$ следует в силу свойства ПР5. □

Следствие ПР6, ПР7 (линейность предельного перехода). Для любых чисел λ, μ верно равенство

$$\lim_{\mathfrak{B}}\bigl(\lambda f(x)+\mu g(x)\bigr)=\lambda\lim_{\mathfrak{B}} f+\mu\lim_{\mathfrak{B}} g.$$

ПР8. Предел отношения существует и равен отношению пределов в том случае, когда предел знаменателя отличен от нуля.

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{\bigl(A+\alpha(x)\bigr)B-(\beta(x)+B)A}{g(x)B}=\frac{\alpha(x)B-\beta(x)A}{g(x)B}.$$

Так как отношение $\frac{\alpha(x)B-\beta(x)A}{g(x)B}$ б. м. согласно свойствам БМ1, БМ2, БМ3, то равенство $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f/g=A/B$ следует в силу свойства ПР5. □

9.4. Предельные переходы в неравенствах. Докажем следующее свойство предела.

ПР9. Если $f(x)\geq 0$ для любого x из некоторого окончания U, то и $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f\geq 0$ (при условии существования предела). Аналогично свойство имеет место для неравенства $\leq$.

Доказательство. Пусть $A=\lim\limits_{\mathfrak{B}} f$. Предположим противное: $A<0$. Для $\varepsilon:=-A/2$ найдем окончание $V\subseteq U$ такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ для любого $x\in V$. Тогда $f(x)<0$ для этих x. Возникает противоречие с условием. □

Замечание. «Строгий вариант» этого свойства не имеет места. Действительно, $\frac{1}{x}>0$ при любом $x>0$, однако $\lim_{x\to+\infty}1/x=0$.

ПР10. Предположим, что $f(x)\geq g(x)$ для любого x из некоторого окончания $U\in\mathfrak{B}$. Тогда и $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)\geq\lim_{\mathfrak{B}} g(x)$ при условии существования этих пределов.

Для доказательства применим свойство ПР9 к разности $f(x) - g(x)$ и выведем заключение, что $\lim_{\mathfrak{B}}(f - g) \geq 0$. Пользуясь линейностью предельного перехода, получаем требуемое. □

ПР11 (о пределе промежуточной функции). Пусть $f, g, h: M \to \mathbb{R}$ – три функции на фильтрованном множестве M с базой $\mathfrak{B}$. Предположим, что существует окончание $U_0 \in \mathfrak{B}$ такое, что $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ для любого $x \in U_0$, а также существуют и совпадают между собой пределы $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)$ и $\lim_{\mathfrak{B}} g(x)$. Тогда и предел промежуточной функции h существует и совпадает с пределами крайних функций.

Доказательство. Обозначим $A = \lim_{\mathfrak{B}} f(x) = \lim_{\mathfrak{B}} g(x)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем окончание U, лежащее в U_0 и такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|g(x) - A| < \varepsilon$ для любого $x \in U$. Так как $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$, то и $|h(x) - A| < \varepsilon$ для этих же x. По определению предела это значит, что $A = \lim_{\mathfrak{B}} h(x)$. □

ПР12 (предел сложной функции). Предположим, что задана функция $f: M \to \mathbb{R}$ и функция g, определенная в проколотой окрестности точки $b \in \mathbb{R}$:

- так, что на множестве M имеется база фильтра $\mathfrak{B}$;
- существует предел $\lim_{\mathfrak{B}} f(x)$, равный b;
- существует предел $\lim_{t \to b} g(t) = A$.

Тогда существует предел сложной функции $g(f(x))$ по базе $\mathfrak{B}$, равный A.

Доказательство. Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Находим число $\delta > 0$ такое, что $|g(t) - A| < \varepsilon$ для любого $0 < |t - b| < \delta$ (см. третье условие). Для этого δ находим окончание U такое, что $|f(x) - b| < \delta$ для всех $x \in U$. Тогда и неравенство $\left|g\big(f(x)\big) - A\right| < \varepsilon$ также выполнено для любого $x \in U$. □

9.5. Предел последовательности. Уточним определение предела последовательности. Число u будет пределом последовательности (u_n), когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N (зависящий от ε) такой, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $|u_n - u| < \varepsilon$.

В этом определении достаточно брать ε вида $1/k$ или $1/10^k$, где $k \in \mathbb{N}$. Оно эквивалентно следующему: последовательность собственных б. д. д. $u_1, u_2, \ldots$ имеет пределом б. д. д. u (не обязательно собственную), если, во-первых, знаки чисел u_j стабилизируются и совпадают со знаком числа u, и, во-вторых, для любого номера m десятичного знака m-е десятичные знаки последовательности (u_j) стабилизируются и совпадают с m-м десятичным знаком числа u.

Например, если $u_k = 0{,}99 \ldots 9$ (k девяток), то $\lim u_k = 0,(9) = 1$. Другой пример: если $r_{<k}$ – приближение порядка k бесконечной десятичной дроби r, то $\lim r_{<k} = r$.

На натуральных числах в настоящем издании рассматривается лишь одна база $n \to +\infty$, поэтому указание на нее часто опускается.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, а не имеющая предела – *расходящейся*. Если $\lim u_n = +\infty$ в расширенной системе чисел, то говорим, что последовательность (u_n) расходится к $+\infty$. Например, такова последовательность натуральных чисел. Равенство $\lim u_n = +\infty$ означает, что для любого C, сколь бы велико оно ни было, найдется номер $N = N(C)$ такой, что $u_n > C$ для всех $n \geq N$. Аналогичный смысл имеет расходимость к $-\infty$.

Теорема 1. Предел монотонно возрастающей и ограниченной сверху последовательности вещественных чисел существует и совпадает с точной верхней гранью значений этой последовательности. Аналогично предел монотонно убывающей и ограниченной снизу последовательности вещественных чисел существует и совпадает с точной нижней гранью значений этой последовательности.

Доказательство. Пусть (u_n) – возрастающая и ограниченная сверху последовательность, а $u := \sup\{u_n\}$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное N, что $u - \varepsilon < u_N \leq u$. Отсюда, ввиду монотонности, получаем, что $u_N \leq u_n \leq u$ для любого $n \geq N$. Тем самым для тех же n имеет место неравенство $|u_n - u| < \varepsilon$. □

Примеры. 1. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ монотонно убывает, и $\inf\left\{\frac{1}{n}\right\} = 0$ в силу принципа Архимеда (см. теорему 5, подп. 8.2). Следовательно, по теореме 1 $\lim 1/n = 0$.

2. Аналогично если $0 \leq a < 1$, то $\lim a^n = 0$ ввиду монотонного убывания $\{a^n\}$ и $\inf\{a^n\} = 0$.

3. Пусть $P(x) = ax^k + \cdots$ и $Q(x) = bx^m + \cdots$ представляют собой многочлены степени k и m соответственно (тем самым $a, b \neq 0$).

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}\frac{a}{b}, \text{если } n=m,\\ 0, \text{если } n<m,\\ \infty, \text{если } n>m.\end{cases}$$

Действительно, $P(n)=n^k\big(a+\alpha(n)\big), Q(n)=n^m\big(b+\beta(n)\big)$, где $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ – б. м. величины, ибо представляют собой линейную комбинацию степеней $1/n^j$ (см. пример 1). Отсюда и следует результат. □

Предложение. Если последовательность имеет предел, равный a, то и любая подпоследовательность имеет предел, равный a. □

Например, последовательность $(-1)^n$ не имеет предела, ибо подпоследовательность четных членов имеет предел единицу, а предел нечетных членов равен минус единице. Остается применить предложение, данное выше.

Теорема 2 (принцип вложенных отрезков Кантора). Любая система вложенных отрезков

$$[a_1,b_1]\supseteq[a_2,b_2]\supseteq[a_3,b_3]\supseteq\cdots \tag{2}$$

имеет общую точку (т. е. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\neq\emptyset$).

Обоснуем этот принцип. Предполагаем, что $a_n<b_n$ для всех n. Так как последовательность левых концов (a_k) монотонно возрастает и ограничена сверху любым из чисел b_k, то из теоремы 1 вытекает, что существуют $r:=\lim a_k$, $s:=\lim b_k$, причем $r\leq s$. Тогда

$$\emptyset\neq[r,s]=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]\,. \square$$

Теорема 3. Из ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Из ограниченности последовательности (x_n) вытекает, что все ее значения принадлежат отрезку $[a_1,b_1]$. Делим этот отрезок пополам и выбираем ту половину $[a_2,b_2]$, в которой бесконечное число членов последовательности (x_n) (если обе половины удовлетворяют этому условию, то выбираем, например, левую). С отрезком $[a_2,b_2]$ поступаем точно так же. Получаем систему вложенных друг в друга отрезков, которые по принципу Кантора о вложенных отрезках имеют общую точку d. Выберем затем индексы $i_1<i_2<i_3<\ldots$ так, что $x_{i_k}\in[a_k,b_k]$. Тогда в силу $b_k-a_k\to 0$ для любого $\varepsilon>0$ окрестность $(d-\varepsilon\,, d+\varepsilon)$ содержит все отрезки $[a_k,b_k]$, а значит, и все x_{i_k}, начиная с некоторого номера N. Это доказывает, что $\lim\limits_{k\to\infty}x_{i_k}=d$. □

9.6. Критерий Коши. *Последовательность* вещественных чисел (q_n) называется *фундаментальной, или последовательностью Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $n, m \geq N$ выполняется неравенство $|q_n - q_m| < \varepsilon$.

Последовательность чисел (q_n) называется *ограниченной*, если найдется число R такое, что $|q_n| \leq R$ для любого n.

Лемма. Любая последовательность Коши ограничена.

Доказательство. Пусть (q_n) – последовательность Коши. Для какого-либо $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что $|q_n - q_m| < \varepsilon$, как только $m, n \geq N$. Следовательно,

$$|q_n| \leq \max\{|q_1|, \dots, |q_N|, |q_N + \varepsilon|, |q_N - \varepsilon|\}$$

для всех без исключения членов последовательности (q_n). □

Теорема 4 (критерий Коши). Последовательность (u_n) сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

Доказательство. Пусть (u_n) сходится к u. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер N, начиная с которого выполняются неравенства $|u_n - u| < \varepsilon/2$. Тогда для $n, m \geq N$ верна оценка

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - u| + |u - u_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Предположим теперь, что (u_n) – последовательность Коши. Она ограничена согласно лемме выше. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность, пусть u – предел этой подпоследовательности. Докажем, что u является пределом и последовательности (u_n). Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что $|u_n - u_m| < \varepsilon/2$, как только $n, m \geq N$. Пусть $k \geq N$ – номер члена последовательности (u_n), входящего в обозначенную выше подпоследовательность, причем такой, что $|u_k - u| < \varepsilon/2$. Тогда

$$|u_n - u| \leq |u_n - u_k| + |u_k - u| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n \geq N$. □

9.7. Число e. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ существует и заключен между числами 2 и 3.

Доказательство. Обозначим $u_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Докажем, что (u_n) возрастает. Используя бином Ньютона, получим

$$u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ \cdot 2\cdot 1}{n!}\,\frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} +$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}. \qquad (3)$$

При переходе к следующему члену последовательности каждый из сомножителей $1-k/n$ в правой части формулы (3) увеличивается, а кроме того, добавляется еще одно (n+2)-е слагаемое. Итак, доказано, что $u_n < u_{n+1}$, т. е. последовательность $\{u_n\}$ монотонно возрастает. Если ограничить сверху каждый из сомножителей $1-k/n$ единицей, то, заменяя в факториалах все нееединичные множители на двойку, формулу (3) ограничим числом

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}} = \cdots = 3.$$

Итак, последовательность u_n монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3, значит, по теореме 1 эта последовательность имеет предел, причем он меньше либо равен трем по свойству ПР10. Так как $u_n > u_2 = 2{,}25$ для $n > 2$, то по свойству ПР10 следует, что этот предел больше двух. □

Определение 3. Предел последовательности $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ обозначают е и называют основанием натуральных логарифмов, или числом е.

Приближенное значение е ≈ 2,718281828 (1828 – год рождения Л. Н. Толстого). Чаще всего пользуются приближением е ≈ 2,7.

9.8. Арифметические операции с бесконечностью. Положим, что для всех чисел $x \in \mathbb{R}$

$$(\pm\infty) + x = x + (\pm\infty) = \pm\infty,\ \ x/\pm\infty = 0.$$

Если $c > 0$, то по определению

$$c\,(\pm\infty) = \pm\infty,\ \ (-c)(\pm\infty) = \mp\infty.$$

Полагаем также

$$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty, (\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty, (\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty.$$

Таким образом, неопределенными остаются операции

$$\left[\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ +\infty-\infty,\ 0(\pm\infty)\right].$$

Можно убедиться, что основные арифметические правила (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность) верны и для расширенной системы чисел при условии определенности всех входящих операций.

10. Числовые ряды

Неформально говоря, ряд есть последовательность чисел с указанием порядка сложения этих чисел. Формально *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \tag{1}$$

имеет общий член a_n и последовательность частичных сумм $S_n \coloneqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, и эти две последовательности (a_n) и (S_n), связанные рекуррентными соотношениями

$$S_0 \coloneqq 0;\ S_{n+1} = S_n + a_{n+1};\ a_n = S_n - S_{n-1}, \tag{2}$$

и называются рядом.

Ряд (1) называют *сходящимся* к числу S, если $S = \lim S_n$. Это число называется суммой ряда (1), и в этом случае мы записываем, допуская вольность, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Если этого предела не существует, то *ряд* называется *расходящимся*. В случае, когда предел $\lim S_n$ равен $+\infty$ $(-\infty)$, говорим, что ряд (1) расходится к $+\infty$ (к $-\infty$).

Предложение 1. Ряд с неотрицательными слагаемыми сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм ограничена сверху.

Это утверждение есть следствие теоремы о пределе монотонной последовательности.

Итак, сумма ряда (1) есть число S такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется неравенство $|S - S_n| < \varepsilon$ (*). Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ называется n-м остатком ряда (1), обозначим его r_n. Таким образом, неравенство (*) эквивалентно следующему неравенству:

$$|r_n| < \varepsilon. \tag{3}$$

Задача о вычислении суммы ряда (1) с точностью ε сводится к поиску такого натурального (по возможности наименьшего) числа n, что $|r_n| \le \varepsilon$. Тогда $s \approx\ s_n$ с точностью ε.

Замечания: а) конечная сумма $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ превращается в сходящийся ряд, если предположить $u_i = 0$ при $i > n$; при этом сумма данного ряда равна исходной сумме;

б) аналогично ряду (1) определяется ряд $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, где m – какое-либо целое число;

в) любое вещественное число $\pm\rho$, где $\rho = a_n \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots$ – его абсолютное значение, представимо в виде суммы ряда $\pm \sum_{j \geq -n} \frac{a_{-j}}{10^j}$.

Предложение 2. Дописывание или отбрасывание конечного числа слагаемых ряда не влияет на его сходимость (но влияет на его сумму). □

Пример 1. Найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots. \tag{4}$$

Заметим, что $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, поэтому $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$, т. е. единица – сумма ряда (4).

Теорема 1 (необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится, то n-й член u_n стремится к нулю.

Доказательство. $\lim u_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = \lim S_n - \lim S_{n-1} = 0$. □

Теорема 2 (критерий Коши сходимости ряда). Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$\left| u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

для любых $n \geq N$ и $p \in \mathbb{N}$.

Это утверждение есть прямое следствие критерия Коши для последовательности, ибо сумма $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}$ равна $S_{n+p} - S_{n-1}$. □

Замечание. Утверждение теоремы 1 – частный случай заключения теоремы 2 для $p = 0$.

Пример 2. *Гармоническим* называется *ряд* вида

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots. \tag{5}$$

Для этого ряда $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, но этот ряд расходится, как показывает оценка

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{2}$$

и критерий Коши.

10.1. Арифметические операции с рядами. Определим сумму двух рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$ как ряд с n-м слагаемым $u_n + v_n$. Произведение ряда $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ и числа λ – это ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda u_i$.

Теорема 3. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся соответственно к s и t, то сумма этих рядов сходится к числу $s + t$, а произведение ряда $\sum u_n$ и числа λ сходится к $\lambda\, s$.

Доказательство вытекает из свойства линейности предела. □

10.2. Геометрическая прогрессия. Это ряд вида

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots . \tag{6}$$

Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Теорема 4. Пусть $a \neq 0$. Геометрическая прогрессия (6) сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. В этом случае сумма геометрической прогрессии равна $\frac{a}{1-q}$.

Утверждение следует из равенства

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \ (q \neq 1), \tag{7}$$

которое становится ясным, если обе части равенства (7) умножить на $1 - q$. Далее надо заметить, что q^{n+1} имеет предел (равный нулю) в том и только в том случае, когда $|q| < 1$. Случай $q = 1$ – особый, тогда $S_n = an$ не имеет конечного предела, ибо $a \neq 0$. □

Предложение 3. Любая периодическая б. д. д. представляет собой рациональное число.

Доказательство достаточно провести для б. д. д. вида $\rho := 0,(ab \dots c)$, где период десятичных знаков $ab \dots c$, имеющий длину k, повторяется до бесконечности. Обозначим $N = a \cdot 10^{k-1} + b \cdot 10^{k-2} + \cdots + c$. Тогда, пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получаем

$$\rho = \frac{N}{10^k} + \frac{N}{10^{2k}} + \frac{N}{10^{3k}} + \cdots = \frac{N/10^k}{1 - 1/10^k} = \frac{N}{10^k - 1} \in \mathbb{Q}. \ \square$$

10.3. Теорема сравнения. Докажем следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $0 \le u_n \le v_n$ для любого натурального n, начиная с некоторого номера N. Если ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum u_n$ сходится. Если же ряд $\sum u_n$ расходится, то ряд $\sum v_n$ также расходится.

Доказательство. Отбрасывая, если надо, первые несколько членов рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$, сводим доказательство к случаю, когда неравенство $0 \le u_n \le v_n$ выполняется для всех n. Обозначим через s_n частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а через t_n – частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Тогда $s_n \le t_n$. Сходимость ряда $\sum v_n$ влечет ограниченность сверху последовательности (t_n), что в свою очередь дает ограниченность последовательности (s_n). Согласно предложению 1 получаем сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Наоборот, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ не может сходиться, ибо в противном случае сходился бы и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, что противоречит условию. □

Следствие (предельная теорема сравнения). Пусть выполняются неравенства $u_n \ge 0, v_n \ge 0$ для любого натурального n, начиная с некоторого номера, и существует отличный от нуля предел отношения u_n/v_n. Тогда ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ ведут себя одинаково в смысле сходимости (либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Доказательство. Пусть $k = \lim \frac{u_n}{v_n}$. По условию $k > 0$. Предположим, что ряд $\sum v_n$ сходится. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда $\frac{u_n}{v_n} \le k + \varepsilon$, начиная с некоторого N. Отсюда вытекает неравенство $u_n \le (k + \varepsilon)v_n$. Из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum (k + \varepsilon)v_n$. По теореме сравнения получаем тогда, что и ряд $\sum u_n$ сходится. Предположим теперь, что ряд $\sum u_n$ сходится. Так как $\lim \frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{k}$ (именно в этом месте нужно учесть, что $k > 0$), то можно в рассуждениях выше заменить u на v, v на u и k на $1/k$. Получаем сходимость ряда $\sum v_n$. □

Пример 3. Ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^p}$ расходится при $p \le 1$, ибо он ограничен снизу расходящимся гармоническим рядом. Ряд $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, ибо $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ (знак $\sim$ означает эквивалентность, т. е. предел отношения равен единице), а сходимость ряда $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ установлена в примере 1. Более общо: «телескопический» ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}\right)$ сходится, каково бы ни было $p>0$. Но

$$\frac{1}{n^p}-\frac{1}{(n+1)^p}=\frac{1}{n^p}\left(1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^p\right)\sim\frac{1}{n^p}\frac{p}{n+1}\sim\frac{p}{n^{p+1}}$$

(понятие эквивалентных б. м. величин, а также эквивалентность $(1+x)^p-1\sim px$ по базе $x\to 0$ см. в п. 16). Следовательно, согласно предельной теореме сравнения ряд $\zeta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ сходится для любого $s>1$. Строго убывающая от $+\infty$ при $s=1$ до единицы при $s=+\infty$ сумма $\zeta(s)$ называется *дзета-функцией Римана* (см. рисунок). Отметим без доказательства равенство $\zeta(2)=\pi^2/6$.

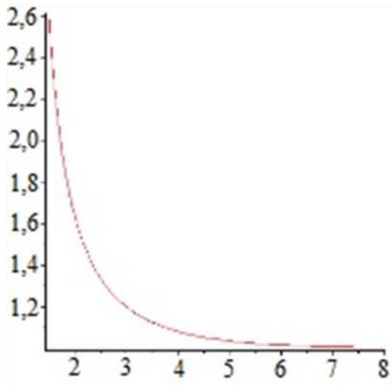


График дзета-функции

10.4. Признак Даламбера. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. Пусть $u_n\geq 0$ для всех достаточно больших натуральных n и существует предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, который обозначим d. Если $d<1$, то ряд $\sum u_n$ сходится; если же $d>1$, то ряд $\sum u_n$ расходится.

Доказательство. Пусть $d<1$. Выберем q так, что $d<q<1$. Тогда $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$, начиная с некоторого номера N. Следовательно,

$$u_{N+m}\leq qu_{N+m-1}\leq\cdots\leq q^m u_N.$$

Так как геометрическая прогрессия $\sum_{m\geq 0}q^m u_N$ сходится, то по теореме сравнения сходится и ряд $\sum_{m\geq 1}u_{N+m}$. Заменяя n на $N+m$, получаем сходимость ряда $\sum_{n\geq N}u_n$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n\geq 1}u_n$.

Если $d>1$, то и $u_n>1$, начиная с некоторого номера. Не выполнено необходимое условие сходимости, следовательно, ряд расходится. □

Пример 4. Исследуем ряд $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$ на сходимость, применяя признак Даламбера. Имеем

$$\frac{a^n/n!}{a^{n+1}/(n+1)!}=\frac{n+1}{a}\to 0 \text{ при } n\to+\infty.$$

Итак, $d=0<1$ в нашем случае и, следовательно, ряд сходится.

Предложение 4. Имеет место равенство $\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

Доказательство. Пользуемся оценкой (3) теоремы 5, подп. 9.7, из которой извлекаем неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$, получаем $e \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Далее

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\ldots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!},$$

где мы берем лишь $k+1$ слагаемое в разложении по формуле бинома Ньютона. Фиксируя k и устремляя $n \to +\infty$, получаем, что $e \ge \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!}$. Если теперь в этом неравенстве перейти к пределу $k \to +\infty$, то получаем оценку $e \ge \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Два противоположных неравенства возможны лишь в случае совпадения: $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. □

Замечание. $e \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720} \approx 2{,}7181$ дает три верных знака после запятой ввиду следующей оценки остатка:

$$\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\cdots \le \frac{1}{7!}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4410}.$$

10.5. Знакочередующиеся ряды. Ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots, \tag{8}$$

где все $u_n \ge 0$, называется знакочередующимся.

Теорема 7 (Лейбница). Если последовательность (u_n) монотонно убывает и стремится к нулю, то ряд (8) сходится, причем его сумма меньше u_1.

Доказательство. Последовательность четных частичных сумм $s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n})$ монотонно возрастает, ибо все слагаемые в скобках неотрицательны. Из другой оценки $s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n} \le u_1$ следует ограниченность этой последовательности.

По теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности устанавливаем существование предела четных частичных сумм. Так как $s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}$ и $\lim u_{2n+1}=0$, то существует предел нечетных частичных сумм и он совпадает с пределом четных частичных сумм. Отсюда следует существование предела последовательности (s_n) и совпадение его с $\lim s_{2n}$. □

Следствие. Остаток ряда (8) меньше первого отброшенного слагаемого.

10.6. Абсолютная сходимость. Дан ряд $\sum u_n$ с произвольными слагаемыми. Рассмотрим ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots, \tag{9}$$

составленный из абсолютных величин членов исходного ряда.

Теорема 8. Если ряд (9) сходится, то и исходный ряд сходится.

Доказательство. Так как $0 \le u_n + |u_n| \le 2|u_n|$ и ряд (9) сходится, то по теореме сравнения получаем сходимость ряда $\sum(u_n + |u_n|)$. Тогда сходится ряд $\sum u_n$, равный разности сходящихся рядов $\sum(u_n + |u_n|)$ и $\sum|u_n|$. □

Ряд $\sum u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд (9), составленный из абсолютных величин, сходится. Если же ряд (9) расходится, а сам ряд $\sum u_n$ сходится, то ряд $\sum u_n$ называют *условно сходящимся*.

Пример 5. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ сходится условно, ибо сам он сходится по теореме Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин, гармонический, который, как мы знаем, расходится.

11. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Число A – предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного ε найдется число $\delta > 0$, зависящее от ε ($\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x, принадлежащих проколотой δ-окрестности точки a, т. е. таких x, что $0 < |x - a| < \delta$. Формально

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow [\,\forall \boldsymbol{\varepsilon} > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \boldsymbol{\varepsilon}\,].$$

Пример. Ясно, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Пользуясь арифметическими свойствами предела П1 – П3, получаем $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$ для любого многочлена P. Далее, пользуясь свойством П4, получаем $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$, где Q – также многочлен, причем $Q(a) \ne 0$. Как вычислить этот предел, если a – корень знаменателя? Деля на $x - a$, представим $P(x) = (x - a)^k P_1(x)$; $Q(x) = (x - a)^m Q_1(x)$; $P_1(a) \ne 0$; $Q_1(a) \ne 0$.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}, \text{если } k = m, \\ 0, \text{если } k > m, \\ \text{нет предела, если } k < m. \end{cases}$$

Теперь приведем определение пределов на бесконечности. Число A – предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого положительного ε найдется число C такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in (C, +\infty)$. Аналогично число A – предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого положительного ε найдется C такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех $x \in (-\infty, C)$.

Иногда приходится рассматривать предел при дополнительных условиях, ограничениях на переменную x. Например, совершенно ясно, что $\lim\limits_{x\to 0, x>0} \frac{x}{|x|} = 1$, ибо $\frac{x}{|x|} = 1$ при ограничении $x > 0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to 0, x<0} \frac{x}{|x|} = -1$. Найденные пределы называются односторонними: первый – справа, второй – слева. Заметим, что двустороннего предела функция $x/|x|$ при $x \to 0$ не имеет.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a справа, если для любого положительного ε найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x таких, что $a < x < a + \delta$. Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a справа, записывают как $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a слева (записываем как $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$), если для любого положительного ε найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x таких, что $a - \delta < x < a$.

Предложение 1. Предел функции существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела, причем они совпадают. □

Предложение 2. Пусть $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ и $f(x)$ – функция, определенная в проколотой окрестности точки a. Тогда предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен b в том и только в том случае, когда для любой последовательности $\{x_n\}$ точек, сходящихся к a и отличных от a, последовательность значений $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Доказательство. Пусть $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ и (x_n) – последовательность, сходящаяся к a, причем для любого n значение x_n не равно a. Возьмем какое-либо положительное ε и найдем для него $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$, как только $0 < |x - a| < \delta$. Так как $\lim x_n = a$, то найдется номер N такой, что для всех $n > N$ имеет место неравенство $|x_n - a| < \delta$. Тогда $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ для тех же n. Это значит, что $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = b$.

Наоборот, пусть равенство $\lim_{x\to a} f(x) = b$ не имеет места. Тогда

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta > 0\ \exists x_\delta :\ 0 < |x_\delta - a| < \delta \text{ и } |f(x_\delta) - b| \geq \varepsilon.$$

Взяв здесь последовательность $\delta_n > 0$, сходящуюся к нулю, и выбрав для нее соответствующие значения $x_n = x_{\delta_n}$, получим последовательность x_n, сходящуюся к a. Однако для любого индекса n имеет место неравенство $|f(x_n) - b| > \varepsilon$, поэтому предел $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ не равен b. □

12. Непрерывность функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки $a \in \mathbb{R}$, называется непрерывной в этой точке, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Если $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, то говорим о непрерывности справа, а в случае $\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$ получаем непрерывность слева. Функция непрерывна на отрезке (интервале), если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (интервала). На концах отрезка подразумевается односторонняя непрерывность.

Определение непрерывности можно переписать так: функция непрерывна в точке a, если $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$, т. е. когда две операции над переменной x – функция f и предельный переход – перестановочны.

Перейдем к локальным координатам: $\Delta x = x - a$ – приращение переменной и $\Delta f = f(x) - f(a)$ – приращение функции. Тогда определение непрерывности можно сформулировать и так: f непрерывна в точке a, если величина Δf бесконечно мала при $\Delta x \to 0$, т. е. $\lim_{\Delta x\to a} \Delta f = 0$.

Свойства непрерывных функций:

Н1: сумма непрерывных функций есть непрерывная функция;

Н2: произведение непрерывных функций есть непрерывная функция;

Н3: частное непрерывных функций – непрерывная функция во всех точках, где знаменатель отличен от нуля;

Н4: подстановка непрерывной функции в непрерывную функцию есть непрерывная функция.

Эти свойства – непосредственное следствие соответствующих свойств пределов, причем свойство Н4 следует из свойства предела сложной функции.

Следствие этих свойств – непрерывность дробно-рациональной функции $P(x)/Q(x)$ на всей области ее определения, т. е. там, где знаменатель не равен нулю.

Теорема 1 (устойчивость знака непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$. Тогда $f(x) > 0$ для всех x, достаточно близких к a. Аналогично если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) < 0$, то $f(x) < 0$ для всех x, достаточно близких к a.

Доказательство – следствие свойства ПР3, п. 9. □

12.1. Точки разрыва функции. Точка, в которой отсутствует непрерывность, называется точкой разрыва функции. Если функция $y = f(x)$ определена в проколотой окрестности точки a, но не определена в самой точке a, то заведомо a – точка разрыва. Точка a – точка разрыва в следующих исчерпывающих случаях:

- существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но он не совпадает с $f(a)$ или a не входит в ОДЗ функции. В этом случае точка разрыва a называется устранимой. Доопределив функцию в точке a значением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, получаем непрерывную в точке a функцию;
- односторонние пределы в точке a существуют, но не совпадают между собой, тогда a называют неустранимой точкой разрыва первого рода;
- какого-либо одностороннего конечного предела не существует, тогда a называют точкой разрыва второго рода.

12.2. Непрерывность на отрезке. Докажем следующую лемму.

Лемма 1 (замкнутость отрезка). Отрезок содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Если все $x_n \in [a, b]$, то $x_n \le b$ для всех n. Отсюда получаем $\lim x_n \le b$. Аналогично $\lim x_n \ge a$. Тогда $\lim x_n \in [a, b]$. □

Теорема 2 (Вейерштрасса). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке и достигает своего наибольшего и наименьшего значения, т. е. существуют точки $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ такие, что $f(x_{\min}) \le f(x) \le f(x_{\max})$ для любого $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $A = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$. Если функция не ограничена сверху, то полагаем здесь $A = +\infty$. Тогда найдется последовательность точек $x_n \in [a, b]$ таких, что $f(x_n) \to A$. Выберем из нее сходящуюся подпоследовательность $\lim\limits_{k\to\infty} x_{i_k} = d$ (см. теорему 3, подп. 9.5). Число d принадлежит отрезку $[a,b]$ по лемме 1. Тогда $\lim\, f(x_{i_k}) = f(d)$ в силу непрерывности. Тем самым $A = f(d) < +\infty$ и ограниченность следует. Полагаем $x_{\max} := d$.

Аналогично доказывается существование $x_{\min}$. □

Замечание. Для полуинтервала аналогичное утверждение неверно (пример неограниченной функции $1/x$ на полуинтервале $(0,1]$).

Теорема 3 (Больцано – Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда найдется точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Строим систему вложенных друг в друга отрезков $\{\Delta_n\}$. Первый из них, Δ_1, – отрезок $[a,b]$. Далее рассмотрим точку $d = (b+a)/2$ – середину отрезка $[a,b]$. Если $f(d) = 0$, то $c = d$ – искомая точка. Если иначе, то из двух отрезков $[a,d]$ и $[d,b]$ выбираем тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Его объявляем Δ_2 и с ним поступаем точно так же, как и с отрезком Δ_1. И так далее.

На каком-то шаге мы либо придем к искомой точке c, либо получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков $\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \Delta_3 \supseteq \ldots$, каждый последующий из которых вдвое короче предыдущего. На концах каждого из отрезков Δ_n функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Из принципа Кантора о вложенных отрезках (см. подп. 9.5) вытекает существование точки c, принадлежащей всем отрезкам Δ_n. Если $f(c) > 0$, то найдется окрестность U точки c такая, что для любого $x \in U$ следует неравенство $f(x) > 0$ (устойчивость знака непрерывной функции). Но ясно, что $\Delta_n \subseteq U$ для какого-либо n. Это противоречит тому, что на концах отрезка Δ_n функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Аналогично приводится к противоречию предположение $f(c) < 0$. Остается $f(c) = 0$, что и требовалось доказать. □

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Обозначим $M = \max\{f(x) \mid [a,b]\}$, $m = \min\{f(x) \mid [a,b]\}$. Тогда для любого числа C, лежащего между m и M, найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = C$.

Достаточно применить теорему Больцано – Коши к разности $f(x) - C$ и отрезку $[x_{\min}, x_{\max}]$ вместо отрезка $[a,b]$.

Теорема 4 (непрерывность обратной функции). Если $f(x)$ непрерывно и строго монотонно отображает отрезок $[a, b]$ в отрезок $[c, d]$ так, что $f(a) = c, f(b) = d$ (либо $f(a) = d, f(b) = c$ в случае убывающей функции), то обратная функция $x = g(y)$ существует и непрерывно и монотонно отображает отрезок $[c, d]$ на отрезок $[a, b]$.

Доказательство. Существование обратной функции, т. е. фактически равенство $f([a, b]) = [c, d]$, вытекает из следствия теоремы Больцано – Коши. Монотонность g ясна.

Пусть $x_0 = g(y_0)$ и $\varepsilon > 0$. Предполагаем, что f возрастает. Тогда $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0) + \varepsilon$.

Возьмем $\delta = \min\{g(f(x_0) + \varepsilon) - y_0, y_0 - g(f(x_0) - \varepsilon)\}$. Тогда для $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ выполняется неравенство $x_0 - \varepsilon < g(y) <$ $< x_0 + \varepsilon$. Это влечет непрерывность функции g. □

Следствие. Фиксируем натуральное число n. Существует арифметический корень $y = \sqrt[n]{x}$ как обратная непрерывная функция к непрерывной монотонной функции $x = y^n$, $y \geq 0$. В частности, для любого неотрицательного числа a найдется единственное неотрицательное действительное число, квадрат которого равен a. Его обозначают $\sqrt{a}$ и называют квадратным корнем из a. □

Замечание. Для нечетного числа n продолжим арифметический корень n-й степени на отрицательные числа по нечетности: $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. Получаем всюду определенную, строго возрастающую функцию $y = \sqrt[n]{x}$ как обратную функцию к строго возрастающей функции $x = y^n, y \in \mathbb{R}$.

Теорема 5 (принцип Бореля – Лебега). Любое покрытие отрезка интервалами содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. Предположим, что $[a, b] \subseteq \bigcup_{k \in K} J_k$ – покрытие отрезка, где все J_k – интервалы. Предположим также, что не существует конечного множества $k_1, \ldots, k_n$ индексов из множества K с условием $[a, b] \subseteq J_{k_1} \cup \ldots \cup J_{k_n}$. Тогда, поделив отрезок $[a, b]$ средней точкой $c = \frac{a+b}{2}$, получим, что один из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$ также не допускает конечного подпокрытия. Обозначим его $[a_2, b_2]$ и проделаем с ним то же самое, что и с первым. В итоге получаем систему вложенных друг в друга отрезков $[a, b] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$, длины которых стремятся к нулю. Эти отрезки имеют общую точку d. Она покрыта каким-либо интервалом $J_k = (k, l)$. Найдем натуральное число n такое, что $b_n - a_n < \min\{d - k, l - d\}$.

Тогда $[a_n, b_n] \subset J_k$, что противоречит выбору отрезка $[a_n, b_n]$ как не имеющего конечного покрытия. Это противоречие показывает, что предположение в начале доказательства не верно, тем самым верно отрицание: отрезок $[a, b]$ имеет конечное подпокрытие. □

Лемма 2. Пусть функция f определена в окрестности точки a и непрерывна в этой точке. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in (a - \delta, a + \delta)$ имеет место неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. Найдем $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любой точки x такой, что $|x - a| < \delta$. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le |f(x_1) - f(a)| + |f(a) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

Теорема 6 (Кантора – Гейне о равномерной непрерывности). Функция f, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что как только $|x_1 - x_2| < \delta$ для двух точек отрезка $[a, b]$, так $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $d \in [a, b]$ найдем число $\delta_d > 0$ такое, что как только $x_1, x_2 \in (d - \delta_d, d + \delta_d) \cap [a, b]$, так сразу $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (лемма 2). Получаем покрытие отрезка интервалами $\left(d - \frac{\delta_d}{2}, d + \frac{\delta_d}{2}\right)$. Выберем из него конечное подпокрытие (см. теорему 5), т. е. фактически конечную систему точек $d_1, \dots, d_n$ отрезка $[a, b]$ такую, что

$$[a, b] \subseteq \left(d_1 - \frac{\delta_{d_1}}{2}, d_1 + \frac{\delta_{d_1}}{2}\right) \cup \dots \cup \left(d_n - \frac{\delta_{d_n}}{2}, d_n + \frac{\delta_{d_n}}{2}\right).$$

Пусть теперь заданы две точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ с условием $|x_1 - x_2| < \frac{1}{2}\min_j \delta_{d_j}$. Точка x_1 попадает в какой-нибудь интервал $J := \left(d_j - \frac{\delta_{d_j}}{2}, d_j + \frac{\delta_{d_j}}{2}\right)$. Тогда

$$|x_2 - d_j| \le |x_2 - x_1| + |x_1 - d_j| < \frac{\delta_{d_j}}{2} + \frac{\delta_{d_j}}{2} = \delta_{d_j},$$

поэтому $x_1, x_2 \in J$. Но тогда $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ в силу выбора δ_{d_j}. Проверено, что величина $\delta = \frac{1}{2}\min_j \delta_{d_j}$ – искомая. □

Пример. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на положительной полуоси. Действительно, для $\varepsilon = 1$ при любом выборе $\delta > 0$ найдем натуральное n такое, что $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \delta$ (это можно сделать, ибо $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$). Однако

$\left|y\left(\sqrt{n+1}\right) - y\left(\sqrt{n}\right)\right| = n + 1 - n = 1$ не меньше ε.

13. Декартова система координат на плоскости

Прямая и плоскость понимаются как одномерная и двумерная модели точечного евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ размерности n. На $\mathbb{E}^n$ действует n-мерное вещественное линейное пространство L векторов, снабженное скалярным произведением $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ – векторы), т. е. для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ определена операция параллельного переноса $P \to P + \boldsymbol{a}$ пространства $\mathbb{E}^n$ так, что $P + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \equiv (P + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b}$ и для любых двух точек $P, Q \in \mathbb{E}^n$ найдется единственный вектор, обозначаемый $\overrightarrow{PQ}$, такой, что $P + \overrightarrow{PQ} = Q$. Тогда формула

$$d(P,Q) := |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\overrightarrow{PQ}^2}$$

задает расстояние на $\mathbb{E}^n$, превращающее последнее в метрическое пространство. Это значит: 1) что $d(P,Q) \geq 0$, причем равенство возможно только в случае совпадения $P = Q$; 2) $d(P,Q) = d(Q,P)$; 3) $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$ для любых трех точек P, Q, R.

Векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Выберем в L ортонормированный базис $\mathcal{F} = (\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n})$, т. е. такой, что $\boldsymbol{f_i} \cdot \boldsymbol{f_j} = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, равный нулю, если $i \neq j$, и равный единице, если $i = j$. Тогда ортонормированный базис $\mathcal{F}$ вместе с некоторой точкой $O \in \mathbb{E}^n$, которую назовем началом отсчета, составляют декартову систему координат. Для каждой точки P определены декартовы координаты $(x_1^P, \dots, x_n^P)$ так, что $\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^{n} x_j^P \boldsymbol{f}_j$. Через них наиболее просто выражается расстояние между точками:

$$d(P,Q)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^Q - x_j^P\right)^2.$$

В случае размерности два получаем декартову плоскость Oxy как точечное евклидово пространство с выбранным началом отсчета

O, единичными и взаимно перпендикулярными векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$, сонаправленными с осями Ox и Oy соответственно (рис. 1).

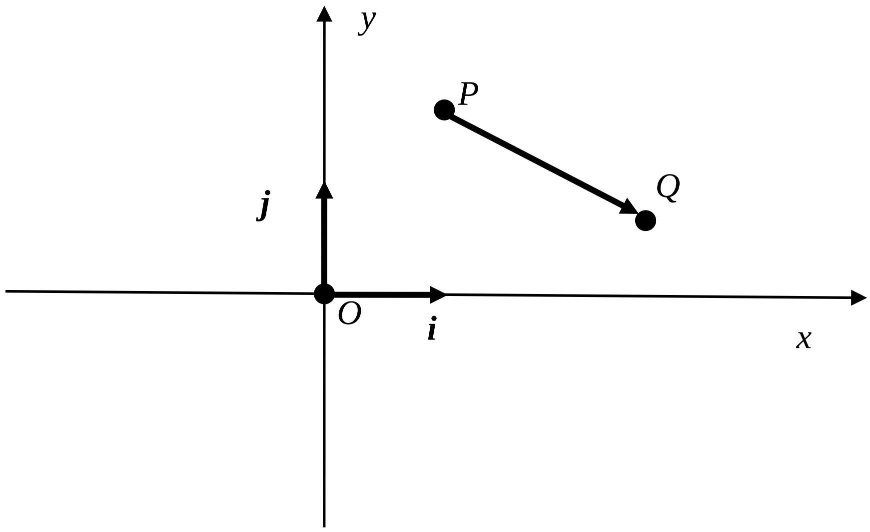


Рис. 1. Декартова плоскость Оху

Расстояние между точками P и Q находится по формуле

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}\,. \qquad (1)$$

Направление оси Ox, совпадающее с направлением вектора $\boldsymbol{i}$, назовем положительным, а противоположное направление – отрицательным. Такое же соглашение примем относительно оси Oy.

На числовой оси Ox (рис. 2) расстояние между точками определяем согласно формуле (1) с учетом $y_P = y_Q = 0$, т. е. $d(P, Q) = |x_Q - x_P|$.

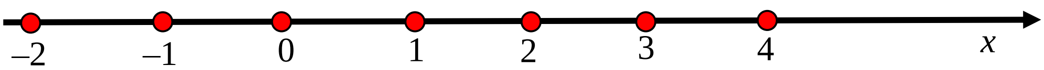


Рис. 2. Числовая ось

Соответствие между точками и их координатами столь значимо и так часто используется, что мы, допуская вольность, говорим о точке $(2, -5)$, подразумевая точку плоскости с координатами $x = 2$ и $y = -5$; говорим о прямой $x + y = 1$, подразумевая множество точек на декартовой плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению и т. д.

Принцип Декарта. Любое уравнение вида

$$F(x, y) = 0 \qquad (2)$$

задает кривую на декартовой плоскости, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Именно так и определяется график функции $y = f(x)$ – как множество точек $\{P(a, f(a)) \mid a \in \text{ОДЗ}(f)\}$. Наоборот, кривые на плоскости (прямые, окружности, эллипсы, гиперболы, параболы и т. д.), определяемые в геометрических терминах, т. е. как геометрическое место точек (ГМТ), задаются аналитическим уравнением вида (2). Например, кривая γ на декартовой плоскости может служить графиком функции, если и только если для любого $a \in \mathbb{R}$ прямая $x = a$ пересекает γ не более чем в одной точке $P(a, y_a)$; соответствие $a \to y_a$ – искомая функция.

Пример 1: а) уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B одновременно не равны нулю, задает прямую на плоскости, и каждая прямая на плоскости задается таким уравнением;

б) окружность радиусом R с центром в точке $Q(x_0, y_0)$ определяется как геометрическое место точек, удаленных от точки Q на расстояние R, и задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Наоборот, каждое уравнение вида $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ задает окружность с центром в точке $P(-a, -b)$ и радиусом $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ (предполагаем, что $a^2 + b^2 > c$);

в) найдем уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точек P и Q. С учетом формулы (1) получается

$$(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 = (x - x_Q)^2 + (y - y_Q)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$(x_Q - x_P)x + (y_Q - y_P)y = \frac{x_Q^2 - x_P^2 + y_Q^2 - y_P^2}{2},$$

т. е. срединный перпендикуляр к отрезку $[P, Q]$.

Области на плоскости задаются либо одним неравенством вида

$$F(x, y) \geq 0, \tag{3}$$

либо системой таких неравенств.

Пример 2. Неравенство вида $Ax + By + C \geq 0$, где $(A, B) \neq \neq (0, 0)$, задает полуплоскость, и каждая полуплоскость описывается таким неравенством. Круг радиусом R с центром в точке $Q(x_0, y_0)$ задается неравенством $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2$.

14. Показательные и логарифмические функции

Определение показательной функции a^x, где $a > 0$ и $a \neq 1$ – фиксированное основание, формулируется поэтапно: сначала для натурального и нулевого x, затем для отрицательных целых чисел, потом для дробей вида $x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, далее для рационального x и, наконец, для произвольного вещественного числа. При этом ограничения на основание a меняются:

$$a^0 := 1\ (a \in \mathbb{R}, a \neq 0);\ a^1 := a \text{ и } a^{n+1} = a^n \cdot a\ (a \in \mathbb{R});$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0);\ a^{1/n} = \sqrt[n]{a}\,;\ a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m\ (a \geq 0).$$

Здесь $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. В связи с последним определением заметим, что $x^{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt[3]{x}$ – разные функции: первая определена лишь для неотрицательных x, а вторая – для любых вещественных x. (Если, вопреки сказанному, предположить $(-1)^{\frac{1}{3}} = -1$, то приходим к противоречию: $1 = (-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = -1$).

Свойства степеней:

- $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ (основное свойство);
- $a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$, в частности $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- $(a^x)^k = a^{kx}$;
- $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
- если $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$; если же $0 < a < 1$,

то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Эти свойства сначала доказываются для целых показателей, а затем для рациональных показателей. Доказательства при этом чисто алгебраические, без использования предела (кроме последнего свойства). В связи с последним свойством заметим, что можно доопределить операции с бесконечностью, полагая для $a > 1$ $a^{+\infty} = +\infty$; $a^{-\infty} = 0$, а для $0 < a < 1$ наоборот: $a^{-\infty} = +\infty$; $a^{+\infty} = 0$. Операции $1^{\pm\infty}$ остаются неопределенными.

Теорема 1. Для всякого положительного числа a, не равного единице, имеется единственная строго монотонная функция a^x, удовлетворяющая перечисленным выше свойствам и совпадающая с $\sqrt[n]{a^m}$ для рационального $x = m/n$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $a > 1$. Определим

$$a^x := \sup\{\, a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q \leq x \,\} = \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} a^q.$$

Второе равенство следует в силу монотонности a^q, $q \in \mathbb{Q}$. Докажем, что функция $y = a^q, q \in \mathbb{Q}$, отображает $\mathbb{Q}$ на всюду плотное подмножество интервала $(0, +\infty)$. Фиксируем интервал (α, β). Без ограничения общности можно считать, что $\beta > \alpha > 0$. Выберем такое натуральное N, что $(\beta \backslash \alpha)^N > a$, опираясь на принцип Архимеда. Так как $a^{\frac{m}{N}} \to 0$ при $m \to -\infty, m \in \mathbb{Z}$, в силу утверждения (*в*) принципа Архимеда, то найдется целое m_0 такое, что $a^{\frac{m_0}{N}} \leq \alpha$. Выберем наибольшее такое m_0. Такой выбор обеспечивает неравенство $a^{\frac{m_0+1}{N}} > \alpha$. Вместе с оценкой

$$a^{\frac{m_0+1}{N}} = a^{\frac{m_0}{N}} a^{\frac{1}{N}} < a^{\frac{m_0}{N}} \frac{\beta}{\alpha} \leq \alpha \frac{\beta}{\alpha} = \beta$$

получаем, что $a^{\frac{m_0+1}{N}} \in (\alpha, \beta)$.

Итак, плотность $a^{\mathbb{Q}}$ в $\mathbb{R}^{>0}$ доказана. В силу предложения 2, п. 8 функция a^q единственным образом продолжается до строго возрастающей функции a^x, принимающей все значения на интервале $(0, +\infty)$ и поэтому являющейся непрерывной.

Свойства степеней справедливы и для $a^x, x \in \mathbb{R}$, ввиду продолжения по непрерывности. Например,

$$a^{x+p} = \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} a^{q+p} = a^p \lim_{q \to x, q \in \mathbb{Q}} a^q = a^x a^p,$$

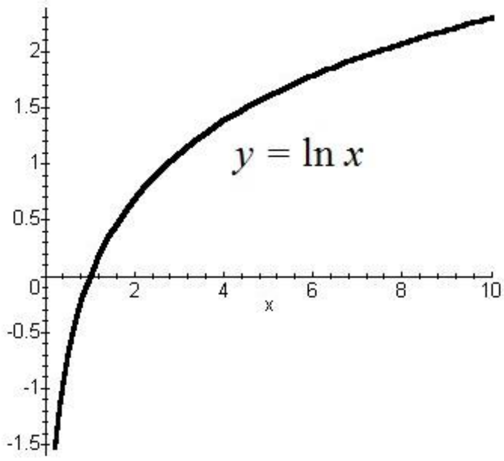
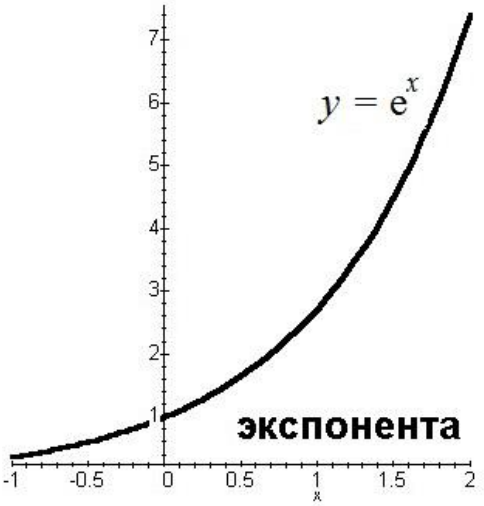
где p рационально. Далее, пользуясь этим, получаем

$$a^{x+t} = \lim_{p \to t, p \in \mathbb{Q}} a^{x+p} = a^x \lim_{p \to t, p \in \mathbb{Q}} a^p = a^x a^t. \square$$

Функцию $y = a^x$ при $a > 0, a \neq 1$, называют *показательной*. При $a > 1$ она возрастающая, а при $0 < a < 1$ – убывающая.

Функция $y = a^x$ ввиду строгой монотонности имеет обратную функцию $x = \log_a y$. Более точно: пусть $a > 0, a \neq 1$, и $b > 0$, в этом случае по определению равенство $c := \log_a b$ означает, что $a^c = b$.

Функция $y = \log_a x$ называется *логарифмической*. Ее область определения совпадает с множеством положительных чисел. Графики логарифмической и показательной функций см. на рисунке.



Графики логарифмической и показательной функций

Свойства логарифмической функции следующие:

- $\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ (основное свойство);
- $\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$;
- $\log_a x^k = k \log_a x$, $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$ (здесь $x > 0$);
- $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$ (здесь x – любое ненулевое число);
- $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, отсюда $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ и $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$;
- $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$;
- если $a > 1$, то $\log_a(+\infty) = +\infty$ и $\log_a(0 + 0) = -\infty$; если же $0 < a < 1$, то $\log_a(+\infty) = -\infty$ и $\log_a(0 + 0) = +\infty$.

Второй замечательный предел. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Существует предел функции $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), и он равен e. Это же число e равно пределу функции $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ при $t \to 0$.

Докажем это равенство, пользуясь предложением 2, п. 11 о связи предела последовательности и предела функции. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность точек, сходящихся к $+\infty$. Можно считать, что $x_n > 1$ для всех n так, что величина $u_n \coloneqq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}$ определена. Имеем

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq u_n \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}. \qquad (*)$$

Так как

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}=\frac{(1+1/([x_n]+1))^{[x_n]+1}}{1+1/([x_n]+1)}$$

и

$$\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}=\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right),$$

то пределы крайних последовательностей в неравенстве (*) существуют и равны основанию натурального логарифма е. Тогда по свойству предела промежуточной функции (ПР11, подп. 9.4) получаем, что предел последовательности u_n существует и равен е.

Пусть теперь $x\to-\infty$. Сделаем замену z на $-x+1$ Тогда $z\to+\infty$ и

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\left(1+\frac{1}{-z-1}\right)^{-z-1}=\left(\frac{z}{z+1}\right)^{-z}\frac{z+1}{z}=\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\frac{z+1}{z}.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\frac{z+1}{z}=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}.$$

Сделав замену $\frac{1}{x}$ на t, получаем еще одну формулировку второго замечательного предела: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$. □

15. Тригонометрические функции

Пусть γ – некоторая кривая с началом A и концом B [например, график функции $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, с концами $A\big(a,f(a)\big)$, $B\big(b,f(b)\big)$]. Рассмотрим на кривой γ точки $A_0=A,A_1,A_2,\dots,A_n=$ $=B$ (обозначим это разбиение кривой как ξ), расположенные в порядке продвижения от точки A до точки B. Соединим эти точки последовательно отрезками прямых. Получим ломаную L_ξ, которая называется вписанной в кривую γ. Длиной кривой γ называется точная верхняя грань длин ломаных L_ξ, где ξ пробегает всевозможные разбиения кривой γ.

Рассмотрим единичную полуокружность $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, как кривую, заданную функцией $y=\sqrt{1-x^2}$. Выберем разбиение $-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$. Обозначим

$$y_j=\sqrt{1-x_j^2};\ \Delta x_{j+1}:=x_{j+1}-x_j;\ \Delta y_{j+1}:=y_{j+1}-y_j\ (0\leq j\leq n-1).$$

Тогда длина вписанной ломаной равна $\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\Delta x_j^2+\Delta y_j^2}$. Так как $\sqrt{\Delta x_j^2+\Delta y_j^2}\le|\Delta x_j|+|\Delta y_j|$ и $\sum_1^n|\Delta x_j|=x_n-x_0=2, \sum_1^n|\Delta y_j|\le 2$, то длина ломаной меньше или равна четырем. Следовательно, длина полуокружности существует и не превосходит четырех.

Определение 1. Числом π (пи) называется длина полуокружности единичного радиуса.

Более того, взяв число $t\in[-1,\ 1]$, утверждаем на том же основании, что длина части полуокружности $y=\sqrt{1-x^2}$ при изменении аргумента x от t до единицы также существует, монотонно убывает с ростом t и ограничена сверху числом $1-t+\sqrt{1-t^2}$.

Определение 2. Длину графика функции $y=\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[t,1]$ обозначаем $\arccos t$ и называем арккосинусом. Область допустимых значений этой функции – отрезок $[-1,1]$.

Отрезок, соединяющий точки (1, 0) и $\left(t,\sqrt{1-t^2}\right)$, короче, чем любая другая линия, например дуга окружности, с концами в этих точках. Следовательно,

$$\sqrt{(1-x)^2+1-x^2}\le\arccos x\le 1-x+\sqrt{1-x^2}\text{ для } 0\le x\le 1. \quad (1)$$

Вычислим

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{(1-x)^2+1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2(1-x)}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\lim_{x\to1}\sqrt{\frac{2}{1+x}}=1,$$

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}=\lim_{x\to1}(0+\sqrt{2})/\sqrt{2}=1.$$

Использовали непрерывность корня. По теореме о промежуточной функции, примененной к неравенствам (1), получаем соотношение

$$\lim_{x\to1}\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}=1. \quad (2)$$

Имеет место равенство $\arccos x=\pi-\arccos(-x)$.

Аналогично, рассматривая функцию $x=\sqrt{1-y^2}$ на отрезке $[0,1]$, определим функцию $s=\arcsin y$ как длину дуги окружности от ее «начала» $E(1,0)$ до точки $(\sqrt{1-y^2},y)$. Продолжим построенную функцию по нечетности на отрезок $[-1,0]$: $\arcsin(-y)=-\arcsin y$.

Имеем оценку

$$|y| \le |\arcsin y| \le |y| + 1 - \sqrt{1 - y^2}\ . \qquad (3)$$

Для $x \in [0, 1]$ верно равенство $\arccos x = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$, а для $x \in [-1, 0]$ выполняется другое соотношение:

$\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

Делая замену $\sqrt{1 - x^2}$ на y в пределе (2) и учитывая четность функции $\frac{\arcsin y}{y}$, получаем равенство

$$\lim_{y \to 0} \frac{\arcsin y}{y} = 1. \qquad (4)$$

Предложение. Функции $\arcsin x, \arccos x$ непрерывны. Первая из них строго возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а вторая строго убывает от π до нуля.

Действительно, приращение $\arccos(x + \Delta x) - \arccos x$ по абсолютной величине совпадает с длиной дуги единичной окружности от точки $(x, \sqrt{1 - x^2})$ до точки $\left(x + \Delta x, \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}\right)$, и как мы видели ранее, она меньше, чем сумма длин катетов

$|\Delta x| + \left|\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} - \sqrt{1 - x^2}\right|$.

Первое слагаемое здесь – б. м. величина, а второе (без модуля) равно

$$\frac{1 - (x + \Delta x)^2 - 1 + x^2}{\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{1 - x^2}} = \frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{\sqrt{1 - (x + \Delta x)^2} + \sqrt{1 - x^2}}$$

и также есть б. м. величина. Аналогично доказывается непрерывность арксинуса. □

Приближенное значение $\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327 95$.

Перейдем к определению тригонометрических функций. *Тригонометрической окружностью* назовем окружность, задаваемую уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Вращение против часовой стрелки положительное, а по часовой стрелке – отрицательное. Пусть задано число α. Если $\alpha \ge 0$, то пройдем по тригонометрической окружности от точки $(1, 0)$ расстояние, равное α, в положительном направлении. Если же $\alpha < 0$, то пройдем расстояние $|\alpha| = -\alpha$ в отрицательном направлении. В итоге приходим в некоторую точку P_α. Абсцисса этой точки называется *косинусом* числа α и обозначается $\cos\alpha$, а ордината этой точки есть *синус* числа α (обозначается $\sin\alpha$).

Тангенс и *котангенс* определяются так:

$$\operatorname{tg}\alpha := \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha := \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

График синуса, называемый синусоидой, приведен на рис. 1.

График косинуса получается из графика синуса сдвигом на $\pi/2$ влево в силу соотношения $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и называется также синусоидой.

График тангенса (тангенсоида) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ приведен на рис. 2.

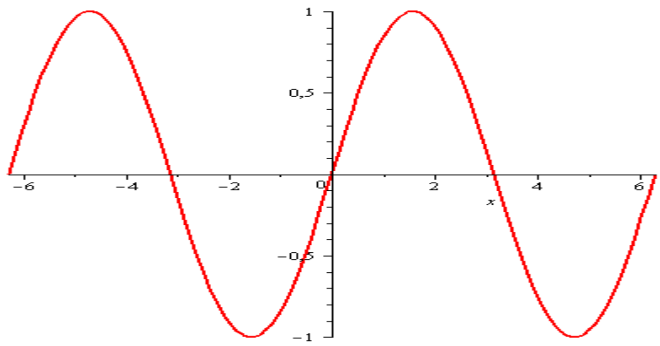


Рис. 1. Синусоида

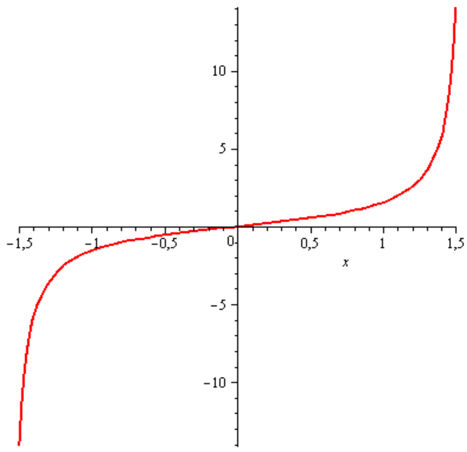


Рис. 2. Тангенсоида

Тангенс строго возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и принимает все действительные значения. Приведем определение обратной функции – арктангенса:

$$\operatorname{arctg} x = \phi \overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} \operatorname{tg}\phi = x \text{ и } \phi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Свойства тригонометрических функций приведены ниже.

Т1. Основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Т2. Периодичность: $\sin(t + 2\pi k) = \sin t$; $\cos(t + 2\pi k) = \cos t$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Т3. Полупериодичность: $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$; $\cos(t \pm \pi) = -\cos t$.

Т4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$;

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos t$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin t$.

Формулы Т2 – Т4 называются *формулами приведения* (аргумента к стандартному отрезку $[0, \pi/2]$).

Т5. Функции $\sin t, \cos t$ непрерывны на всей числовой прямой. Синус – нечетная функция, а косинус – четная.

Действительно, $\cos t$ для $t \in [0, \pi]$ непрерывен как функция, обратная к непрерывной монотонной функции. Далее учитываем (полу)периодичность. Аналогично рассуждаем относительно $\sin t$.

Т6. Ограниченность синуса и косинуса: $|\sin t| \le 1; |\cos t| \le 1$.

Т7. Справедливо неравенство $|\sin t| \le |t|$ при любом t.

Доказательство. Для $0 \le t \le \pi/2$ это неравенство следует из того, что t – длина дуги EP_t, где $E(1,0)$, $P_t(\cos t, \sin t)$, и $|EP_t| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \ge \sin t$. Для $t > \pi/2$ неравенство Т7 верно в силу Т6. □

Т8. Основные функциональные соотношения:

$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$;

$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$.

Доказательство. Векторы $\boldsymbol{i} \coloneqq \overrightarrow{OE}$; $\boldsymbol{j} = \overrightarrow{OF}$, где $F(0,1)$, образуют стандартный базис. Повернем систему координат на угол u. Тогда новый стандартный базис запишется через старый следующим образом:

$$\boldsymbol{i}' = \cos u\, \boldsymbol{i} + \sin u\, \boldsymbol{j};\ \boldsymbol{j}' = -\sin u\ \boldsymbol{i} + \cos u\ \boldsymbol{j}. \tag{5}$$

Точка $P(\cos(u+v),\ \sin(u+v))$ определяет вектор $\overrightarrow{OP}$, который запишем в старом и новом стандартных базисах:

$\overrightarrow{OP} = \cos(u+v)\, \boldsymbol{i} + \sin(u+v)\, \boldsymbol{j} = \cos v\, \boldsymbol{i}' + \sin v\, \boldsymbol{j}'$.

Учитывая равенства (5), получаем

$\cos(u+v)\, \boldsymbol{i} + \sin(u+v)\, \boldsymbol{j} = \cos v\, (\cos u\, \boldsymbol{i} + \sin u\, \boldsymbol{j}) +$

$+ \sin v\, (-\sin u\ \boldsymbol{i} + \cos u\ \boldsymbol{j})$,

откуда после раскрытия скобок и приравнивания координат получаем требуемое соотношение для синуса суммы и косинуса суммы. Для синуса разности и косинуса разности следует учесть четность косинуса и нечетность синуса. □

Т9. Справедливы следующие тригонометрические тождества:

$$\sin 2u = 2\sin u \cos v = \frac{2\operatorname{tg} u}{1+\operatorname{tg}^2 u};$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u = \frac{1-\operatorname{tg}^2 u}{1+\operatorname{tg}^2 u};$$

$$\sin u - \sin v = 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2};$$
$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2};$$
$$\operatorname{tg}(u \pm v) = \frac{\operatorname{tg} u \pm \operatorname{tg} v}{1 \mp \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v};\ \operatorname{tg} 2u = \frac{2\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg}^2 u}.$$

Все эти тождества получают из основных функциональных соотношений Т8 простыми алгебраическими манипуляциями.

Т10. Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. Ограничим ОДЗ синуса маленьким интервалом $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и обозначим $t = \sin x$. Тогда $x = \arcsin t$. Так как $x \to 0$, то $t \to \sin 0 = 0$ в силу непрерывности синуса. Но тогда отношение $\frac{\sin x}{x} = \frac{t}{\arcsin t}$ стремится к единице [см. равенство (4)].

16. Сравнение бесконечно малых величин

Пусть функции $f(x), g(x), h(x), H(x)$ определены на множестве M с базой $\mathfrak{B}$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$ (записываем это как $f(x) \sim g(x)$), если предел их отношения по базе $\mathfrak{B}$ равен единице. Если же этот предел существует и не равен нулю, то говорим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют один и тот же порядок при $x \to a$.

Предложение 1. Отношение для функций «быть эквивалентными», а также отношение «быть одного порядка» – отношения эквивалентности. □

Функция $h(x)$ называется бесконечно малой относительно $f(x)$, если $\lim_{\mathfrak{B}}\frac{h(x)}{f(x)} = 0$ (записывают это как $h(x) = o\big(f(x)\big)$ и читают так: величина $h(x)$ есть o-малая от величины $f(x)$). Функция $H(x)$ называется бесконечно большой относительно $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\frac{H(x)}{f(x)} = \pm\infty$.

Заметим, что если величина $h(x)$ бесконечно мала относительно $f(x)$, то $f(x) + h(x) \sim f(x)$. Действительно,

$$\lim_{\mathfrak{B}}\frac{f(x)+h(x)}{f(x)} = \lim_{\mathfrak{B}}\left(1 + \frac{h(x)}{f(x)}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Предложение 2. Функцию можно заменять на эквивалентную без изменения предела, если она стоит в качестве сомножителя в числителе или знаменателе.

Доказательство. Пусть $\alpha \sim \beta$. Тогда

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \beta(x)f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to a} \beta(x)f(x) =$$
$$= \lim_{x\to a} \beta(x)f(x).$$

Аналогичное доказательство подходит для случая, когда α и β стоят в знаменателе. □

Таблица эквивалентных б. м. величин по базе $x \to 0$:

$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x$;

$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;

$e^x - 1 \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$;

$(1+x)^m - 1 \sim mx \ (m \in \mathbb{R})$.

Обоснуем эти эквивалентности. Эквивалентности $x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x$ вытекают из первого замечательного предела. Далее равенства

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

доказывают эквивалентность $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$. Выкладка

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

доказывает эквивалентность $\ln(1+x) \sim x$. Здесь мы воспользовались вторым замечательным пределом и непрерывностью логарифма. Далее

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = 1.$$

Здесь сделана замена $e^x - 1$ на y, откуда $x = \ln(1+y)$. Эквивалентность $x \sim \arcsin x$ доказана в п. 15 [формула (4)]. Эквивалентность $x \sim \operatorname{arctg} x$ следует из эквивалентности $y \sim \operatorname{tg} y$ $(y \to 0)$ посредством замены y на $\operatorname{arctg} x$. Для доказательства последней эквивалентности сделаем замену $(1+x)^m - 1$ на y. Тогда $x \to 0$ влечет $y \to 0$ и при этом $x = \frac{1}{m}\ln(1+y)$. Тем самым последняя эквивалентность вытекает из предпоследней.

17. Принцип непрерывности

Функцию можно задавать таблицей из двух строк, где в первой строке перечислены все возможные аргументы, а во второй – соответствующие им значения. В математике чаще прибегают к аналитическому способу задания функции. Он состоит в том, что заранее определенные «основные» функции подвергают арифметическим операциям, а также подстановкам функции в функцию. Если набор «основных» функций – тождественная функция $y = x$ и константы, то в результате получается важный класс дробно-рациональных функций вида $P(x)/Q(x)$, где P и Q – многочлены. Если же в качестве основного набора функций мы возьмем **основные элементарные функции:**

- степенные x^n;
- показательные a^x;
- логарифмические $\log_a x$;
- тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$;
- обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$,

то получим класс элементарных функций. *Функция* называется *элементарной*, если она может быть получена из перечисленных выше основных элементарных функций действиями сложения, вычитания, умножения, деления и подстановкой функции в функцию. Так, например, $\sqrt[n]{x} = 2^{n \log_2 x}$, $|x| = \sqrt{x^2}$, $\operatorname{sgn} x = |x|/x$, $x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ – элементарные функции. Однако существуют очень важные функции, не являющиеся элементарными. Таковы, например, функция ошибок и интегральный синус:

$$\Phi(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t\,; \ \operatorname{Si}(x) \coloneqq \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Если и их включить в набор «основных», то, конечно, придем к более обширному классу функций.

Естественной ОДЗ аналитического выражения называется совокупность всех чисел, при которых все операции, входящие в аналитическое выражение, определены и получается итоговый результат: $y = f(x)$.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна на всей естественной области определения.

Доказательство. Тождественная функция и константа очевидно непрерывны. В п. 15 доказана непрерывность синуса, а в п. 14 – непрерывность экспоненты. Все другие элементарные функции получают из основных (в число которых достаточно включить $C, x, \exp x$, $\ln x$, $\sin x$, $\operatorname{arctg} x$) операциями, которые не выводят за класс непрерывных функций (см. свойства Н1 – Н4, п. 12).

Следствие. Если $y = f(x)$ – элементарная функция и $a \in \text{ОДЗ}(f)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

18. Задачи

1. Доказать **теорему Штольца**: если последовательность y_n, строго возрастая, имеет предел $+\infty$, а последовательность $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ имеет конечный либо бесконечный предел $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, то существует предел отношения x_n/y_n и он совпадает с A.

2. Если $a = \lim a_n$, то $a = \lim \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n}$ (применить теорему Штольца).

3. Найти предел $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$.

4. Найти предел последовательности:

- $n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$;
- $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$;
- $\frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n), \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$,

$\frac{1}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + \cdots + n^k)$;

- $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, здесь $a \geq 0$ – фиксированное действительное число.

5. Доказать, что предел последовательности

$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ существует.

6. Найти предел функции:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{2x}}{2\ln(1+x)-\ln(1+2x)}$.

7. Методом дихотомии найти корни уравнения:

- $x^3 = x + 1$;
- $x = \operatorname{tg}x,\ 0 < x < \frac{3\pi}{2}$;
- $\mathrm{e}^x = x + 2$;
- $2^x = x^2$.

8. Доказать, что $n^n \gg n! \gg 2^n$.

9. Доказать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и ее предел равен e. Исходя из неравенств $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, оценить e, взяв $n = 2, 4, 8, 10, 20$.

10. Доказать **признак сходимости Дирихле:** если последовательность a_n, монотонно убывая, стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum b_n$ ограничены, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится. Использовать преобразование Абеля: $a_n b_n + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} = a_{n+p} B_{n+p} - a_n B_{n-1} +$ $+ (a_n - a_{n+1}) B_n + \cdots + \left(a_{n+p-1} - a_{n+p}\right) B_{n+p-1}$, где $B_n \coloneqq b_1 + \cdots + b_n$. Как следствие получить теорему Лейбница, а также доказать сходимость ряда $\sum \frac{\sin nx}{n}$.

11. Доказать равенство $\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n) - 1) = 1$.

ПРОИЗВОДНАЯ

19. Дифференциал и производная

Постановка задачи. Дана функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки a. Для заданного натурального числа n найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, который был бы наилучшим приближением функции f в сколь угодно малой окрестности точки a. Наилучшее приближение понимается таким образом:

$$f(x) - P_n(x) = \alpha(x-a)^n, \text{где } \alpha \text{ б. м. при } x \to a. \tag{1}$$

Многочлен P_n, удовлетворяющий условию (1), называется *приближением* порядка n функции f в окрестности точки a.

Перейдем к локальным координатам

$$\Delta x = x - a;\ \Delta y = y - f(a). \tag{2}$$

Разложим многочлен P_n по степеням Δx:

$P_n = a_0 + a_1\Delta x + \cdots + a_n\Delta x^n$ $(a_j \in \mathbb{R})$,

и перепишем условие (1) следующим образом:

$$f(a + \Delta x) = a_0 + a_1\Delta x + \cdots + a_n\Delta x^n + \alpha(\Delta x)\Delta x^n. \tag{3}$$

Заметим, что если верно условие (3) и $0 < k \le n$, то многочлен $a_0 + a_1\Delta x + \cdots + a_k\Delta x^k$ – приближение функции f порядка k. Это следует из того, что все степени Δx^j с условием $j > k$ суть бесконечно малые величины высшего порядка по сравнению с Δx^k.

Предложение. Существует не более одного многочлена, удовлетворяющего условию (3).

Доказательство. Если многочлен $Q_n = b_0 + b_1\Delta x + \cdots + b_n\Delta x^n$ также удовлетворяет соотношению $f(a + \Delta x) = Q_n + \beta\Delta x^n$, где β б. м. при $\Delta x \to 0$, то, подставив $Q_n + \beta\Delta x^n$ в левую часть равенства (3), получим $Q_n - P_n = \sum_{i=0}^{n}(b_i - a_i)\Delta x^i = (\alpha - \beta)\Delta x^n$ (*). Вычисляя предел при $\Delta x \to 0$ в этом соотношении, получаем $b_0 - a_0 = 0$, т. е. $a_0 = b_0$. Если уже доказаны совпадения $a_t = b_t$ для всех $t < j$, то, поделив соотношение (*) на Δx^j и перейдя к пределу $\Delta x \to 0$, получим совпадение $a_j = b_j$. Тем самым равенство $a_j = b_j$ имеет место для всех j, $0 \le j \le n$. □

Многочлен P_n, удовлетворяющий соотношению (1), назовем *тейлоровским многочленом* функции f в точке a порядка n. Обозначим его $T_n(f,\ a)$.

Предположим, что функция f непрерывна в точке a. Перейдя в условии (3) к пределу $\Delta x \to 0$, получаем $a_0 = f(a)$. Напомним, что разность $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ называется приращением функции. В приращениях формула (3) выглядит так:

$\Delta f = a_1 \Delta x + \cdots + a_n \Delta x^n + \alpha(\Delta x)\Delta x^n$.

В частности, для $n = 1$ получаем

$$\Delta f = a_1 \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \quad (4)$$

В случае $a_1 \neq 0$ второе слагаемое в правой части формулы (4) бесконечно мало по сравнению с первым, линейным слагаемым.

Определение 1. Линейная часть приращения функции называется дифференциалом f в точке a и записывается следующим образом: $\mathrm{d}f(a, \Delta x)$.

Часто ссылки на точку a и переменную Δx опускают, и тогда $\mathrm{d}f = a_1 \Delta x$. Далее легко увидеть, что $\mathrm{d}x = \Delta x$ в любой точке. Отсюда $\mathrm{d}f = a_1 \mathrm{d}x$ – более употребительная форма записи дифференциала. Найдем коэффициент a_1, для чего поделим формулу (4) на Δx и перейдем к пределу $\Delta x \to 0$. Тогда, учитывая, что α б. м., получим $a_1 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f / \Delta x$.

Определение 2. Производной функции f в точке a называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если последнее устремить к нулю:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,. \quad (5)$$

Теорема. Пусть функция f определена в окрестности точки a. Если существует производная $f'(a)$, то функция f непрерывна в точке a и линейная функция $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ есть приближение первого порядка функции f в точке a (т. е. совпадает с $T_1(f, a)$), а дифференциал функции fв точке a имеет вид

$$\mathrm{d}f = f'(a)\mathrm{d}x. \quad (6)$$

Доказательство. Если предел (5) существует, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(a) +$ $+ \alpha(\Delta x)$ для некоторой б. м. α. Тогда $\Delta f = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Устремляя здесь Δx к нулю, получаем, что $\Delta f \to 0$, а это одна из форм определения непрерывности. □

Определение 3. Прямая, задаваемая уравнением

$$y = f(a) + f'(a)(x - a), \quad (7)$$

называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $P\big(a, f(a)\big)$.

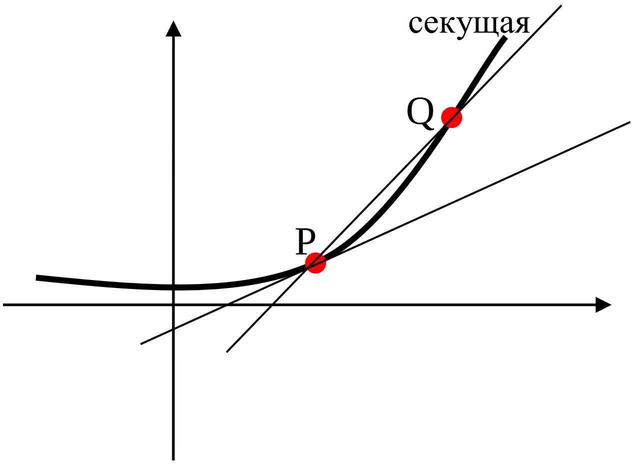
Нормаль к графику функции f в точке P по определению есть прямая, проходящая через точку $P\big(a,\ f(a)\big)$ и перпендикулярная касательной. Уравнение нормали таково:

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a). \tag{8}$$

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ точку Q с координатами $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ (см. рисунок). Предполагая, что $\Delta x \neq 0$, проведем через точки P и Q прямую

$$\ell_{PQ}: \frac{y - f(a + \Delta x)}{f(a + \Delta x) - f(a)} = \frac{x - a}{a + \Delta x - a} \Leftrightarrow y = f(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - a).$$

Эта прямая называется *секущей* графика функции f. Видно, что угловой коэффициент секущей в пределе при $\Delta x \to 0$ дает угловой коэффициент касательной. Тем самым касательная есть предельное положение секущей ℓ_{PQ} при условии, что Q приближается к точке P по графику функции f. Кроме того, выявлен геометрический смысл производной как тангенса угла наклона касательной к графику функции в рассматриваемой точке. С геометрической точки зрения значение дифференциала есть не что иное, как приращение ординаты касательной.



Секущая и касательная

Если не фиксировать точку a, то производная в произвольной точке $f'(x)$ является функцией переменной x, а дифференциал $\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ становится функцией двух переменных: x и Δx. Как следствие, получаем

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Пример 1. Вычислим производные степенной функции, синуса и экспоненты:

$$(x^m)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x + h)^m - x^m}{h} = x^m \lim_{h\to 0}\frac{(1 + h/x)^m - 1}{h} = x^m \lim_{h\to 0}\frac{mh/x}{h} = mx^{m-1}.$$

Далее

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos x.$$

Здесь использована эквивалентность $\sin\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$ $(h \to 0)$, а также непрерывность функции $\cos x$. Аналогично вычисляется производная косинуса и получается формула $(\cos x)' = -\sin x$. Вычисляем производную экспоненты:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+h}-\mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h-1}{h} = \mathrm{e}^x\cdot 1 = \mathrm{e}^x.$$

Заметим, что в производной некоторые точки могут «выпадать» из ОДЗ функции. Например, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (см. пример 1) и точка 0 «выпадает» из ОДЗ исходной функции. Можно по-другому объяснить это явление: $\lim\limits_{x\to 0+0}\left(\sqrt{x}\right)' = +\infty$. Это означает, что касательная к параболе $y = \sqrt{x}$ в начале координат вертикальна, а нормаль совпадает с осью Ox.

Может оказаться, что функция f определена лишь в правой окрестности $[a, a+\delta)$ (в левой окрестности $(a-\delta, a]$) точки a. Тогда все вышеизложенное имеет место с заменой двустороннего предела на правый (левый) предел:

$$f'(a+0) \coloneqq \lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a};\ f'(a-0) \coloneqq \lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Это правая и левая производные функции f в точке a.

Пример 2. Функция $y = |x|$ в нуле непрерывна, но не имеет производной. Правая производная в нуле равна единице, а левая равна минус единице.

Функция f называется дифференцируемой на промежутке, если она имеет производную в каждой точке этого промежутка.

Задача о мгновенной скорости. Рассмотрим материальное тело, движущееся по оси Ox. Предположим, что нам известен закон движения – функция $x(t)$, задающая координату точки в момент времени t. Фиксируем какой-либо момент времени t_0. Поставим задачу определения и вычисления мгновенной скорости $v_{\text{мг}}(t_0)$ в момент времени t_0. Придадим приращение Δt времени и найдем соответствующее ему приращение координаты $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. Тогда отношение приращения координаты к приращению времени задает среднюю скорость на временном участке $[t_0, t_0 + \Delta t]$

$$v_{\text{ср}}(t_0, t_0 + \Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Мгновенную скорость определим как предел средней скорости при условии $\Delta t \to 0$:

$$v_{\text{мг}}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t_0) .$$

Вывод: производная от координаты точки по времени есть мгновенная скорость материальной точки, движущейся по оси. Скорость также может меняться в зависимости от времени: $v = v(t)$. Производная скорости называется ускорением $a(t) = v'(t)$. Второй закон Ньютона гласит, что произведение массы и ускорения совпадает с результирующей силой F, действующей на точку. Сила может зависеть от момента времени t, положения точки x и скорости v. Таким образом, зная закон $F = F(t, x, v)$ зависимости силы от аргументов t, x, v, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} mv' = F(t, x, v), \\ x' = v. \end{cases} \tag{9}$$

Пример 3. Решим систему (9) для того простого случая, когда на материальную точку действует постоянная сила F, а в момент $t = 0$ точка имела координату x_0 и мгновенную скорость v_0. Легко подобрать функцию $v(t) = \frac{F}{m}t + C$, удовлетворяющую первому уравнению в системе (9). Так как $v(0) = v_0$ по условию, то $C = v_0$. Подставляя $\frac{F}{m}t + v_0$ во второе уравнение системы (9) и вспоминая производные степенных функций, находим $x(t) = \frac{Ft^2}{2m} + v_0 t + C$. Начальное условие $x(0) = x_0$ гарантирует $C = x_0$. Итак, закон движения тела массой m, с постоянной действующей силой F таков: $x(t) = \frac{Ft^2}{2m} +$ $+ v_0 t + x_0$. Под эту схему подходит падение тела с небольшой высоты без учета сопротивления воздуха. В этом случае на тело действует сила притяжения $F = mg$, где $g \approx 9{,}8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – ускорение свободного падения. Тогда ось Ox расположим вертикально, с положительным направлением к Земле, а начальная скорость v_0 может быть как положительной, так и отрицательной (случай подбрасывания тела вверх). Закон падения тела с высоты без учета сопротивления воздуха задается функцией $x(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$. Единственность найденных решений может быть доказана с помощью следствия теоремы Лагранжа (см. п. 21).

20. Техника дифференцирования

Производные функций вычисляются в основном не по определению, а с помощью правил дифференцирования.

Д1. Производная константной функции, а также дифференциал константной функции равны нулю: $(C)' = 0$; $\mathrm{d}C = 0$.

Далее предполагается, что функции f и g дифференцируемы.

Д2 (линейность производной и дифференциала). Для любых констант λ, μ линейная комбинация $\lambda f + \mu g$ также дифференцируема и

$$\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)' = \lambda f'(x) + \mu g'(x);\ \mathrm{d}\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g.$$

Следствие. Производная многочлена имеет вид

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}.$$

Д3 (правило Лейбница). Произведение fg дифференцируемо и

$$(fg)' = f'g + g'f;\ \mathrm{d}(fg) = g\mathrm{d}f + f\mathrm{d}g.$$

Более общо

$$(fg \dots h)' = f'g \dots h + fg' \dots h + fg \dots h'.$$

Доказательство. Вычисляем производную произведения по определению

$$(fg)' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)\right] + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Здесь применены правила предела суммы и предела произведения, а также заменен $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)$ на $g(x)$ ввиду непрерывности функции $g(x)$ (см. теорему в п. 19). Случай многих сомножителей получается с помощью индукции по их количеству.

Д4 (производная частного). Отношение f/g дифференцируемо, если знаменатель не равен нулю, и $(f/g)' = (f'\,g - g'\,f)/g^2$.

В частности, $(1/g)' = -g'/g^2$.

Докажем утверждение «в частности».

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Общий случай следует из этого частного случая в силу правила Лейбница:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = f'\frac{1}{g} + \left(\frac{1}{g}\right)' f = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{(f'g - g'f)}{g^2}.$$

Пример 1. Вычислим производную тангенса

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично вычисляется производная котангенса

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Д5 (производная сложной функции). Пусть $u = g(x)$ и $y = f(u)$ – дифференцируемые функции (u назовем промежуточным аргументом). Тогда

$$\left[f\big(g(x)\big)\right]_x' = f_u'(u)\,u_x'.$$

Обоснуем эту формулу. Придадим приращение Δx переменной x. Тогда $u(x)$ получит приращение $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$. Следовательно, f получит приращение $\Delta f = f(u+\Delta u) - f(u) = f\big(u(x+\Delta x)\big) - -f\big(u(x)\big)$. Далее

$$\left[f\big(g(x)\big)\right]_x' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f_u'(u)\,u_x'.$$

Замена $\Delta x \to 0$ на $\Delta u \to 0$ возможна в силу непрерывности дифференцируемой функции $u(x)$.

Замечание. В дифференциалах формула производной сложной функции выглядит как правило сокращения дробей:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

Следствие (инвариантность формы первого дифференциала). В условиях свойства Д5 дифференциал функции $f(u)$ с независимым переменным u и дифференциал сложной функции $f\big(g(x)\big)$ совпадают по форме с $f'_u(u)\mathrm{d}u$. □

Д6 (производная обратной функции). Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – две взаимно обратные функции. Тогда $y'_x = 1/(x'_y)$.

Действительно, если соотношение $x = g\big(f(x)\big)$ продифференцировать по x с применением правила Д5 (производная сложной функции), то получаем равенство $1 = f'_x\, g'_y = y'_x x'_y$, откуда вытекает результат.

Пример 2. Вычислим производную логарифма $y = \ln x$, пользуясь правилом Д6 (производная обратной функции):

$$(\ln x)' = \frac{1}{(\mathrm{e}^y)'_y} = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x}.$$

Таким же образом вычисляются и производные обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin\ y\,)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

20.1. Неявно заданные функции. Пусть для уравнения

$$F(x,y) = 0 \qquad (1)$$

и отрезков $[a,b], [c,d]$ верно следующее: для любого аргумента $x \in [a,b]$ найдется единственное значение $y_x \in [c,d]$ (зависящее от x) такое, что $F(x,y_x) = 0$. Тогда получаем закон f, в силу которого любому $x \in [a,b]$ ставится в соответствие число $y_x = f(x)$ такое, что $F(x,f(x)) = 0$. В этом случае $f(x)$ – функция, заданная неявно уравнением (1) в прямоугольнике $[a,b] \times\ [c,d]$.

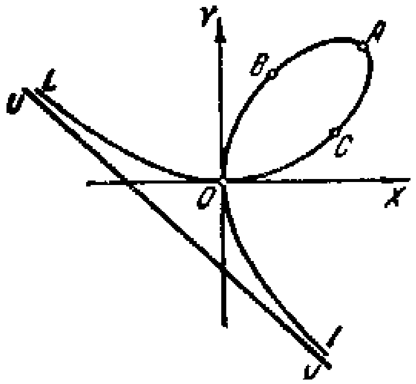
Пример 3. Соотношение $x^2 + y^2 = 25$ в области $y \geq\ 0$ задает функцию $y = \sqrt{25-x^2}$, а в области $y \leq\ 0$ – функцию $y = -\sqrt{25-x^2}$. Продифференцировав соотношение $x^2 + y^2 = 25$ по x, считая $y = y(x)$, находим $y' = -\frac{x}{y}$. В точке $P(3,4)$ производная равна $3/4$, и касательной в этой точке будет прямая, задаваемая уравнением $y - 4 = -\frac{3}{4}(x-3)$, т. е. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

Метод дифференцирования неявно заданных функций:

1) дифференцируем уравнение (1) по x, считая $y = f(x)$ функцией аргумента x;

2) из полученного соотношения выражаем y'_x через y и x. Пусть результат будет $y' = g(x, y)$;

3) если даны координаты (x_0, y_0) такие, что $y_0 = f(x_0)$, то $y'(x_0) = g(x_0, y_0)$.



Лист Декарта

Пример 4. Найдем производную функции, заданной неявно соотношением $x^3 + y^3 = 2xy$ (лист Декарта, см. рисунок) в окрестности точки $A(1, 1)$. Дифференцируем данное отношение по x, получим $3x^2 + 3y^2y' = 2y + 2xy'$. Отсюда находим $y' = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$. В точке $P(1, 1)$ эта производная равна -1 и уравнение касательной имеет вид $y = 1 - 1(x - 1) = -x + 2$.

20.2. Параметрически заданные функции. Пусть

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta,$$

есть кривая на плоскости, заданная параметрически. Предположим, что для любого $x \in [a, b]$ найдется единственное значение параметра $t_x \in [\alpha, \beta]$ такое, что $x = x(t_x)$. Тогда $y = y(t_x)$ называется функцией переменного x, заданной параметрически.

Пример 5. Соотношения

$$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t, 0 \le\ t \le 2\pi, \qquad (2)$$

задают эллипс с полуосями 3 и 2. Для любого $x \in [0, 3]$ найдется единственное число $t_x \in [0, \pi/2]$, а именно $t_x = \arccos(x/3)$, такое, что $x = 3\cos t_x$. Тогда $y = 2\sin(\arccos(x/3))$ – функция, заданная параметрически соотношением (2), в данном случае записанная как элементарная функция (другая запись той же функции: $y = 2\sqrt{1 - (x/3)^2}$).

Имеет место следующая формула для производной функции, заданной параметрически:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}.$$

Действительно, дифференцируя $y = y(t_x)$ по x как сложную функцию с промежуточным аргументом t, получаем $y'_x = y'_t(t_x)'_x$. Но $(t_x)'_x = 1/x'_t$ согласно правилу дифференцирования обратной функции. Подставляя, получим $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, что и требовалось доказать. □

Пример 6. Найдем касательную к эллипсу $x = 3\cos t\,, y =$ $= 2\sin t$ для значения $t = \pi/4$. Вычислим $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3/\sqrt{2}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. Далее

$$y'_x = \frac{2\cos t}{-3\sin t}/_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \sqrt{2} - \frac{2}{3}\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2\sqrt{2}.$$

20.3. Логарифмическая производная. Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Тогда $(\ln y)'_x = \frac{y'}{y}$ называют логарифмической производной этой функции. Ясно, что $y' = y(\ln y)'$. При дифференцировании функций, содержащих в основании и показателе степени переменную x, проще сначала найти логарифмическую производную.

Пример 7. Найдем производную функции $y = x^{\sin x}$. Сначала найдем логарифмическую производную этой функции

$$(\ln y)' = (\sin x \ln x)' = \cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}.$$

Отсюда следует

$$y' = y\left(\cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x - \frac{\sin x}{x}\right).$$

Найдем производную функции $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$

$$y' = y(\ln y)' = y\left(2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x\right)' =$$

$$= y\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2x-2} - \frac{3}{x+4} - 1\right).$$

20.4. Таблица производных.

$$(x^m)' = mx^{m-1}; (x)' = 1; (x^2)' = 2x; \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(a^x) = a^x \ln a\,; (e^x)' = e^x; (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x};\ (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; (\operatorname{cth} x)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x};$$

$$(\sin x)' = \cos x\,; (\cos x)' = -\sin x\,; (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,; (\operatorname{ctg} x)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}\,;$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,; (\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,;\ \left(\ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}\,;$$

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = u(x)^{v(x)}\left(v'\ln u + \frac{v}{u}\right).$$

$$F\big(x, f(x)\big) \equiv 0 \Rightarrow f'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\,; \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Здесь

$$\operatorname{sh} x \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,; \operatorname{ch} x \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,;\ \operatorname{th} x \coloneqq \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\,; \operatorname{cth} x \coloneqq \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

есть гиперболические функции. Основное гиперболическое тождество таково: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Другие свойства гиперболических функций см. в задаче 12.

20.5. Приближенные вычисления с помощью дифференциала. Отбрасывая в формуле $\Delta f = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ б. м. величину высшего порядка малости, получаем

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f = f'(a)\Delta x \text{ или } f(a+\Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x.$$

Пример 8. Вычислим $\sqrt{26}$, взяв в качестве f функцию $\sqrt{1+x}$ и $a = 0$:

$$\sqrt{26} = 5\sqrt{1+\frac{1}{25}} \approx 5\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}\right) = 5 + 0{,}1 = 5{,}1.$$

21. Теоремы о конечных приращениях

Теорема 1 (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности U точки a и достигает в этой точке наибольшего (наименьшего) значения (среди всех значений $f(x), x \in U$). Если f дифференцируема в точке a, то $f'(a) = 0$.

Доказательство. Предположим, что в точке a функция $f(x)$ достигает наибольшего значения. Тогда для $x > a,\ x \in U,$ имеем $\Delta x = x - a > 0$ и $\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$. Но этот правый предел совпадает с двусторонним пределом. Отсюда $f'(a) \leq 0$. Аналогично, рассматривая левый предел, получим, что $f'(a) \geq 0$. Из последних двух неравенств следует равенство $f'(a) = 0$. Аналогично рассуждаем, если значение $f(a)$ наименьшее. □

Теорема 2 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), а на концах отрезка $[a, b]$ принимает одинаковые значения. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ – точки, в которых функция $f(x)$ достигает своих наименьшего и наибольшего значений (теорема Вейерштрасса). Если $x_{\min}$ не является концевой точкой отрезка $[a, b]$, то $c = x_{\min}$ – искомая точка по теореме Ферма.

Аналогично рассуждаем в случае, когда $x_{\max}$ не является концевой точкой. Итак, осталось разобрать случай, когда обе точки $x_{\min}, x_{\max}$ концевые. Тогда $f(x_{\min}) = f(x_{\max}) = f(a) = f(b)$, поэтому функция $f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$, ибо любое значение $f(x)$ лежит между $f(x_{\min})$ и $f(x_{\max})$. В этом случае в качестве c можно взять любую точку интервала (a, b). □

Следствие. Между корнями дифференцируемой функции лежит корень производной этой функции.

Механический смысл теоремы Ролля заключается в том, что если материальная точка, двигаясь на оси, возвратилась в исходную точку, то найдется момент времени, в который ее мгновенная скорость равна нулю. Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что если концы гладкой кривой лежат на одном и том же уровне относительно некоторой прямой, то найдется точка на этой кривой, касательная в которой параллельна заданной прямой.

Теорема 3 (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для любой точки $x \in (a, b)$. Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ .$$

Доказательство. Прежде заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$, так как нет точки $c \in (a, b)$, в которой $g'(c) = 0$ (см. теорему Ролля). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big).$$

Вычислим значения вспомогательной функции на концах отрезка $[a, b]$:

$$h(a) = 0 \text{ и } h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(b) - g(a)\big) = 0,$$

следовательно, выполнены условия теоремы Ролля. Тогда получаем точку $c \in (a, b)$ с условием $h'(c) = 0$, т. е.

$$f'(c) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}g'(c) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \square$$

Приняв в теореме Коши функцию $y = x$ в качестве $g(x)$, получим теорему Лагранжа.

Теорема 4 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \;\Leftrightarrow\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \square$$

Механический смысл теоремы Лагранжа: если материальная точка движется на оси некоторый конечный отрезок времени, то найдется промежуточный момент времени, в который ее мгновенная скорость равна средней скорости. Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что если через концы гладкой кривой (т. е. имеющей в каждой точке касательную) провести секущую ℓ, то найдется точка на этой кривой, касательная в которой параллельна прямой ℓ.

Следствие. Пусть функции f и g непрерывны на промежутке J (отрезке или (полу)интервале) и дифференцируемы внутри него. Если $f'(x) = g'(x)$ для любой внутренней точки $x \in J$, то найдется константа C такая, что $f(x) = g(x) + C$. В частности, если $f'(x) \equiv 0$, то f – константная функция.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение «в частности» и затем применить его к разности $f - g$. Итак, пусть $f'(x) = 0$

для любой внутренней точки $x \in J$. Выберем $x_0 \in J$ и обозначим $C = f(x_0)$. Для любой точки $x_1 \in J$ отрезок $[x_0, x_1]$ лежит в J, тем самым $f' \equiv 0$ на интервале (x_0, x_1). Если $x_1 = x_0$, то очевидно, что $f(x_1) = C$. Если иначе, то применим к функции f на отрезке $[x_0, x_1]$ теорему Лагранжа; получим точку $c \in (x_0, x_1)$ такую, что $f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0) = 0$. Отсюда $f(x_1) = f(x_0) = C$. □

Замечание. Если J не является промежутком, то заключение следствия может не выполняться. Например, $(\operatorname{sgn} x)' \equiv 0$ на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, но $\operatorname{sgn} x$ – не константная функция.

22. Правило Лопиталя

Теорема (правило Лопиталя). Пусть функции $f(x), g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), где $-\infty \le a < b \le +\infty$. Предположим, что $g'(x) \neq 0$ для любого x на этом интервале. Пусть существует предел $A \coloneqq \lim\limits_{x \to a+0} f'(x)/g'(x)$ и выполняется одно из следующих соотношений:

- $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$;
- $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$.

Тогда существует предел отношения функций f/g и имеет место равенство

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для предела по базе $x \to b - 0$.

Доказательство. Так как $g' \neq 0$ на интервале (a, b), то функция g строго монотонна в силу теоремы Ролля. Сужая этот интервал в сторону a, если надо, можно считать, что $g(x) \neq 0$ для $x \in (a, b)$. Для произвольных и различных $x, t \in (a, b)$ найдем по теореме Коши значение $c \in (t, x)$ такое, что

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Поделим в левой части каждое слагаемое на $g(x)$ и выразим отношение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(t)}{g(x)} + \frac{f'(c)}{g'(c)}\left(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right). \qquad (2)$$

Для каждого $a < x < b$ выберем значение $t = t_x \in (a, b)$ так, что при $x \to a + 0$ имеют место предельные переходы

$$\frac{f(t)}{g(x)} \to 0 \text{ и } \frac{g(t)}{g(x)} \to 0.$$

В любом из двух случаев, обозначенных в условии теоремы, это достижимо ввиду произвольности t. Действительно, в первом случае для заданного x выбираем $t_x \in (a, x)$ так, что $|f(t_x)| < (x - a)|g(x)|$ и $|g(t_x)| < (x - a)|g(x)|$; тогда

$$\left|\frac{f(t)}{g(x)}\right| < x - a \text{ и } \left|\frac{g(t)}{g(x)}\right| < x - a \to 0 \text{ при условии } x \to a + 0.$$

Если имеет место второе условие: $g(x) \to \pm\infty$, то, наоборот, для $t \in (a, b)$ выбираем значение $x_t \in (a, t)$ так, что $|f(t)| < (t - a)|g(x_t)|$ и $|g(t)| < (t - a)|g(x_t)|$, причем функцию $t \to x_t$ строим строго монотонной и непрерывной (например, кусочно-линейной). В этом случае обратная функция $x \to t_x$ ($x_{t_x} \equiv x$ и $t_{x_t} \equiv t$) – искомая.

Так как c лежит между x и t, то $c \to a + 0$, если $x \to a + 0$. Следовательно, правая часть в отношении (2) стремится к A при $x \to a + 0$. Тем самым и левая часть имеет тот же предел. □

Переформулируем правило Лопиталя для случая $b = +\infty$. Пусть функции $f(x), g(x)$ дифференцируемы для всех достаточно больших x, причем $g'(x) \neq 0$ для тех же x. Если $f(+\infty) = g(+\infty) = 0$ либо $g(+\infty) = \pm\infty$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует предел отношения функций и эти два предела совпадают:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{3}$$

Аналогичный результат имеет место и для $x \to -\infty$.

Пример. Сравним степени возрастания показательных, степенных и логарифмических функций. Для любого $a > 1$, любого вещественного α и любых натуральных n, k имеют место предельные соотношения

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{\sqrt[k]{x}} = 0.$$

Для доказательства этих соотношений следует применить правило Лопиталя достаточное количество раз. При этом в первом соотношении рано или поздно достигают отрицательного показателя в числителе, и в этом случае первый предел станет очевидным. Во втором равенстве следует применить правило Лопиталя n раз.

По-другому доказанные предельные переходы можно сформулировать так: $\ln^n x = o\left(\sqrt[k]{x}\right)$ и $x^\alpha = o(a^x)$ при $x \to +\infty$ (здесь $a > 1$).

23. Производные и дифференциалы высших порядков

Определим индукционно

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'; \tag{1}$$

$$\mathrm{d}^{n+1}f = \mathrm{d}[\mathrm{d}^n f]\,. \tag{2}$$

Дифференциал вычисляется по переменной x. Например,

$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f'(x)\mathrm{d}x) = \mathrm{d}\big(f'(x)\big)\mathrm{d}x = f''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}x = \\ = f''(x)\mathrm{d}x^2.$$

Аналогично с помощью индукции по n получаем

$$\mathrm{d}^n f = f^{(n)}(x)\mathrm{d}x^n.$$

Если существует n-я производная $f^{(n)}(x)$ на промежутке, то говорим, что функция f дифференцируема n раз на этом промежутке.

Предложение 1 (линейность производных и дифференциалов). Пусть функции f и g дифференцируемы n раз, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(\lambda f(x) + \mu g(x))^{(n)} = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x);$$

$$\mathrm{d}^n\big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big) = \lambda \mathrm{d}^n f + \mu \mathrm{d}^n g. \ \square$$

Предложение 2 (формула Лейбница). Пусть функции f и g дифференцируемы n раз. Тогда их произведение также дифференцируемо n раз и

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \frac{n}{1}f^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,f^{(n-2)}g'' + \dots + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,f^{(n-3)}g''' + \dots + fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}.$$

Считаем по определению $f^{(0)} = f$.

Доказательство. Применяем индукцию по n. База индукции, случай $n = 1$, доказан ранее. Далее делаем выкладку:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right] =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n-k+1)} g^{(k)}\right) + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k f^{(n-k+1)} g^{(k)}\right) + f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{((n+1)-k)} g^{(k)}.$$

Она завершает индукционный переход. □

Пример. Так как $(x^3)^{(k)} = 0$ для $k > 3$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ верно

$$(x^3 \mathrm{e}^x)^{(n)} = (\mathrm{e}^x)^{(n)} x^3 + n(\mathrm{e}^x)^{(n-1)} \cdot 3x^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2} (\mathrm{e}^x)^{(n-2)} \cdot 6x + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} (\mathrm{e}^x)^{(n-3)} \cdot 6 =$$

$$= [x^3 + 3nx^2 + 3(n^2 - n)x + n^3 - 3n^2 + 2n]\mathrm{e}^x.$$

24. Формула Тейлора

Возвращаемся к задаче, поставленной в начале этого раздела: приблизить (аппроксимировать) функцию $f(x)$ в окрестности точки a многочленом степени n. Для $n = 1$ решение найдено: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$. Как и ранее, переходим к приращениям $\Delta x \coloneqq x - a$ и $\Delta y \coloneqq y - f(a)$. Приращение функции f выражается так: $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$. Задача заключается в поиске разложения вида

$$\Delta f = A_1 \Delta x + A_2 \Delta x^2 + \cdots + A_n \Delta x^n + R_n, \qquad (1)$$

где остаточный член R_n есть б. м. величина высшего порядка по сравнению с Δx^n. Известно, что $A_1 = f'(a)$. Найдем другие коэффициенты в этом разложении.

Теорема 1 (локальная формула Тейлора). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки a n раз и n-я производная непрерывна в точке a. Тогда

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \dots +$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Доказательство. Применяем n раз правило Лопиталя к пределу отношения

$$\frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \dots - \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n}{(x-a)^n}$$

и получаем, что этот предел равен нулю. □

Так как степенная функция $f^{(k)}(a)\Delta x^k$ есть дифференциал k-го порядка, обозначаемый $\mathrm{d}^k f$, то локальная формула Тейлора в дифференциалах принимает вид

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \frac{\mathrm{d}^2 f}{2!} + \frac{\mathrm{d}^3 f}{3!} + \dots + \frac{\mathrm{d}^n f}{n!} + o(\mathrm{d}x^n). \qquad (2)$$

Заметим, что с учетом теоремы 1 соотношение (1) в развернутом виде выглядит так:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) +$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \qquad (3)$$

Уточним вид остаточного члена $R_n(x)$. Для этого предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности точки a $(n + 1)$ раз. Зафиксируем x так, что $|x-a| < \delta$, и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \ldots - f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!},$$

где $|t-a| < \delta$. Функция $\Phi(t)$ в δ-окрестности точки a дифференцируема, так как существует производная функции $f^{(n)}(t)$. Кроме того, $\Phi(x) = 0$ и $\Phi(a) = R_n(x)$. Вычислим производную

$$\Phi'(t) = 0 - f'(t) - f''(t)(x-t) +$$
$$+ f'(t) - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,n(x-t)^{n-1} =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n.$$

Возьмем какую-либо функцию $\Psi(t)$, определенную и дифференцируемую в δ-окрестности точки a, причем считаем $\Psi'(t) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда по теореме Коши (см. п. 21) найдется точка $c \in (a, x)$, зависящая от x, такая, что

$$\frac{-R_n(x)}{\Psi(x)-\Psi(a)} = \frac{\Phi(x)-\Phi(a)}{\Psi(x)-\Psi(a)} = \frac{\Phi'(c)}{\Psi'(c)} = \frac{-f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n}{n!\,\Psi'(c)},$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{\Psi(x)-\Psi(a)}{\Psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n}{n!}\,. \qquad (4)$$

Подставим в формулу (4) функцию $\Psi(t) = (x-t)^p$ и заметим, что $\Psi(x) = 0$. Тогда получим

$$R_n(x) = \frac{-(x-a)^p}{-p(x-c)^{p-1}} \frac{f^{(n+1)}(c)\,(x-c)^n}{n!} =$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{pn!}(x-c)^{n-p+1}(x-a)^p.$$

Промежуточную точку c удобно записать в виде $c = a + \theta(x-a)$, где $\theta \in (0,1)$. Окончательно получаем *остаточный член в форме Шлёмильха – Роша:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{pn!}(1-\theta)^{n+1-p}(x-a)^{n+1}. \qquad (5)$$

Отметим самые употребительные частные случаи: $p = n+1$ и $p = 1$. В случае $p = n+1$ получаем *остаточный член в форме Лагранжа:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (6)$$

В случае $p = 1$ получаем *остаточный член в форме Коши:*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}. \qquad (7)$$

Форма Лагранжа остаточного члена позволяет оценить его.

Предложение. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки a $(n+1)$ раз. Фиксируем x из этой окрестности и находим константу M такую, что $M \geq \max\{|f^{(n+1)}(c)| \mid c \in [a,x]\}$. Тогда имеет место следующая оценка остаточного члена:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}. \ \square \qquad (8)$$

Частный случай формулы Тейлора – *формула Маклорена* – получается при $a = 0$. Тогда при наличии $n + 1$ производной в окрестности нуля для каждого достаточно малого x найдется значение $\theta \in (0, 1)$ такое, что

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_n,$$

где $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$ либо $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n\, x^{n+1}$.

24.1. Разложение экспоненты. Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место разложение

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\theta \in (0, 1)$ и остаточный член стремится к нулю, если $n \to \infty$ (при фиксированном x).

Действительно, $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$ для любого натурального n. Кроме того, ряд $\sum x^n/n!$ сходится абсолютно по признаку Даламбера (см. подп. 10.4), поэтому его общий член стремится к нулю. Величина $\mathrm{e}^{\theta x}$ ограничена $\max\{\mathrm{e}^x, 1\}$, что не зависит от n. Следовательно, остаточный член стремится к нулю.

24.2. Разложение синуса и косинуса. Для всех $x \in \mathbb{R}$ имеет место разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

где $|R_m(x)| \le \frac{|x|^{m+1}}{(m+1)!}$.

В самом деле, все четные производные синуса в нуле, так же как и нечетные производные косинуса в нуле, равны нулю. Кроме того, модуль любой производной синуса или косинуса ограничен единицей. Остаточный член стремится к нулю на том же основании, что и в подп. 24.1.

24.3. Бином Ньютона. Для каждого действительного числа α и каждого $k \in \mathbb{N}$ определим биномиальный коэффициент

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Относительно α это многочлен k-й степени, имеющий корни $0, 1, \dots, k-1$ и старший коэффициент $\frac{1}{k!}$. По определению полагаем также, что $C_\alpha^0 = 1$. Имеем

$$C_\alpha^1 = \alpha,\ \ C_\alpha^2 = \frac{\alpha\,(\alpha\ -1)}{2},\ \ C_\alpha^3 = \frac{\alpha\,(\alpha\ -1)(\alpha\ -2)}{2\cdot 3}, \dots\ .$$

Найдем производную порядка k в нуле функции $(1+x)^\alpha$:

$$((1+x)^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}|_{x=0} = k!\,C_\alpha^k.$$

Теорема 2. Для любого действительного α и любого $x \in\ (-1, 1)$ имеет место разложение

$$(1+x)^\alpha\ = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + R_n(x) =$$

$$= 1 + \alpha\,x + \frac{\alpha\,(\alpha\ -1)}{1\cdot 2}x^2 + \ \frac{\alpha\,(\alpha\ -1)(\alpha\ -2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots +$$
$$+\ \frac{\alpha\,(\alpha\ -1)(\alpha\ -2)\dots(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots\cdot n}x^n +\ R_n(x), \qquad (9)$$

причем остаточный член в форме Коши имеет вид

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1+\theta)^n x^{n+1}, (0<\theta<1).$$

Доказательство. Докажем, что для любого $|x|<1$ остаточный член стремится к нулю при фиксированном x и $n\to\infty$. Сначала оценим:

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}\right| \le \frac{|\alpha|(1+|\alpha|)\dots(n+|\alpha|)}{n!} =: M_n. \qquad (10)$$

Далее

$$|R_n(x)| \le M_n|1+\theta x|^{\alpha-1}\ \left|\frac{1+\theta}{1+\theta x}\right|^n\ |x|^{n+1}.$$

Так как $1+\theta > 1+\theta x$, то $\left|\frac{1+\theta}{1+\theta x}\right|^n < 1$. Кроме того, $|1+\theta x|^{\alpha-1} \le$ $\le (1+|x|)^{\alpha-1}$, если $\alpha-1\ge 0$, и $|1+\theta x|^{\alpha-1} \le (1-|x|)^{\alpha-1}$, если $\alpha-1<0$. Получаем, что величина $|1+\theta x|^{\alpha-1}$ ограничена сверху числом, скажем, D, зависящим от x, но не от n (величина θ зависит от n). Следовательно, $|R_n(x)| \le DM_n\,|x|^{n+1}$. Поскольку

$$\frac{DM_{n+1}|x|^{n+2}}{DM_n\,|x|^{n+1}} = \frac{n+1+|\alpha|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x| < 1,$$

то $DM_n\,|x|^{n+1}$ стремится к нулю, если $n\to\infty$ (см. признак сходимости ряда Даламбера). Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$. □

Рассмотрим частные случаи формулы (9).

Случай 1. $\alpha = m$ – натуральное число. Тогда $R_m(x) = 0$ ввиду $C_m^k = 0$ при условии $k > m$. Получаем тождество (бином Ньютона)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + x^m.$$

Случай 2. $\alpha = -1$. Тогда нетрудно вывести, что $C_{-1}^k = (-1)^k$. Поэтому

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x), \qquad (11)$$

где $R_n(x) = \dfrac{1}{1+x} - [1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n] =$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x} = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Здесь остаток подсчитан непосредственно как сумма геометрической прогрессии без опоры на формулу Тейлора.

24.4. Разложение логарифма. Так как $(\ln(1+x))^{(n)} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}$, то из формулы (11) или непосредственно получаем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, если $|x| < 1$.

25. Задачи

1. Найти производную функции:

- $y = x^{x^x}$;
- $y = \ln(\ln(\ln x))$;
- $y = \begin{cases} x^2, \text{если } x < 0, \\ x, \text{если } x \ge 0. \end{cases}$ Непрерывна ли эта функция? Непрерывна ли производная?
- $y = |x|$;
- $y = \operatorname{sgn} x$.

2. Найти все производные функции $y = \begin{cases} e^{-1/x^2}, \text{если } x \ne 0, \\ 0, \ \text{если } x = 0 \end{cases}$ в точке 0.

3. Пусть $\Delta(x)$ – определитель матрицы $\big(b_1(x), \dots, b_n(x)\big)$, в которой столбцы $b_1, \dots, b_n$ зависят от x и имеют высоту n. Доказать, что

$$\Delta'(x) = |b_1', b_2, \dots, b_n| + |b_1, b_2', \dots, b_n| + \dots + |b_1, b_2, \dots, b_n'|.$$

Пользуясь этой формулой, вычислить производную определителя

$$D(x)=\begin{vmatrix} x^3 & \mathrm{e}^x & 1/x \\ 3x^2 & \mathrm{e}^x & -1/x^2 \\ 6x & \mathrm{e}^x & 2/x^3 \end{vmatrix}$$

и после найти $D(x)$. Сравнить с прямым подсчетом определителя $D(x)$.

4. Найти предел:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\operatorname{arctg}x-\arcsin x}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}-x}{\operatorname{ch}x-1}$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{\arcsin x^6}$. Ответ: $\frac{19}{90}$;
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$;
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$.

5. Найти главные части вида Cx^{α} следующих функций:

- $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
- $\ln\cos\pi x$;
- a^x-b^x $(a\neq b)$.

6. Написать уравнения касательных к кривой $x=2\cos t-$ $-\cos 2t,\ y=2\sin t-\sin 2t$ в точках: а) $t=\pi/2$; б) $t=\pi$; в) $t=\frac{3\pi}{2}$. Нарисовать эту кривую. Ответ: а) $y=-x+3$; б) $x=-3$; в) $y=x-3$.

7. Найти угол, под которым пересекаются кривые $x^2+y^2=12x$ и $y=\sqrt[3]{(x-6)^2}$. Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{7}$.

8. Найти разложение $\operatorname{tg}x$ по формуле Маклорена до членов $o(x^6)$.

9. Разложить многочлен $1+x-4x^2+2x^3$ по степеням $x+2$.

10. Найти все производные функций: а) $\frac{2x+7}{x^2-3x+2}$; б) $\sin 2x$.

11. Пользуясь формулой Маклорена, вычислить с точностью 10^{-4} значения: а) $\sqrt{\mathrm{e}}$; б) $\sin\frac{\pi}{18}$; в) $\ln 3/2$.

12. Доказать соотношения для гиперболических функций:

- $\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{sh} u \operatorname{ch} v + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} v$;
- $\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v + \operatorname{sh} u \operatorname{sh} v$;
- $\operatorname{sh} y = x \Leftrightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \coloneqq \operatorname{arcsh} x$;
- $\operatorname{ch} y = x\ (y \geq 0, x \geq 1) \Leftrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \coloneqq \operatorname{arcch} x$.

13. Определить производную от вектор-функции $\boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\boldsymbol{i} + {}$ $+ a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k}$ как $\boldsymbol{a}(t)' = a_1(t)'\boldsymbol{i} + a_2(t)'\boldsymbol{j} + a_3(t)'\boldsymbol{k}$. Доказать, что для двух вектор-функций $\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)$ имеют место правила

$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}'$; $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}'$.

В частности, если $\boldsymbol{a}^2 = \text{const}$, то $\boldsymbol{a}'(t) \perp \boldsymbol{a}(t)$.

14. На пространстве функций $f\colon D \to \boldsymbol{K}$, где D – числовая область, содержащая вместе с каждым числом x также и $x+1$, определить разностный оператор $\Delta f \coloneqq f(x+1) - f(x)$ – дискретный аналог производной. Доказать линейность $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$; $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta f$ и правило Лейбница $\Delta(fg) \Delta f g(x+1) + f(x)\Delta g$. Обосновать «табличные дискретные производные»: а) $\Delta C = 0$; б) $\Delta x^{\underline{m}} = m \Delta x^{\underline{m-1}}$, где $x^{\underline{k}} \coloneqq$ $\coloneqq x(x-1)\dots(x-k+1)$ и $x^{\underline{-k}} \coloneqq 1/(x+1)(x+2)\dots(x+k)$ $(k \in \mathbb{N})$; в) $\Delta 2^x = 2^x$.

15. Основываясь на следствии теоремы Лагранжа, доказать единственность решения линейного дифференциального уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$ с условием $y(x_0) = y_0$ на интервале (функции $P(x), Q(x)$ предполагаются непрерывными).

16. Функция $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ равна нулю при $x = \pm 1$, но производная y' нигде в нуль на интервале $(-1, 1)$ не обращается. Объяснить расхождение с заключением теоремы Ролля.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

26. Исследование по первой производной

Теорема. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b).

- Если $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b), то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любой точки x этого интервала.
- Если $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для любой точки $x \in (a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a,b).
- Если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любой точки $x \in (a,b)$, то $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале (a,b).

Доказательство. Если $x_1 < x_2$ для точек $x_1, x_2 \in (a,b)$, то по теореме Лагранжа найдется точка $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. В силу того что $f'(c) \geq 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, имеем $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, т. е. $f(x_2) \geq f(x_1)$. Если $f'(c) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Наоборот, пусть $f(x)$ возрастает на интервале (a,b). Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a,b)$. Тогда для $\Delta x > 0$ такого, что $x_0 + \Delta x < b$, получаем

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0. \square$$

Замечание. Функция $y = x^3$ с производной $3x^2$, равной нулю в точке $x = 0$, показывает, что если функция строго возрастает, то это еще не значит, что производная больше нуля в любой точке.

Пример. Функция $y = \frac{1}{x}$ строго убывает на интервале $(-\infty, 0)$, а также на интервале $(0, +\infty)$. Однако на объединении этих интервалов, т. е. на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, эта функция не убывающая.

27. Экстремумы

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a. Точка a называется *точкой локального максимума*, если $f(a) \geq f(x)$ для всех x из достаточно малой окрестности точки a. Если выполняется неравенство $f(a) \leq f(x)$ для всех x из достаточно малой окрестности точки a, то a называется *точкой локального минимума*. Точки локального минимума и локального максимума называются точками локального экстремума.

Точек локального экстремума на заданном отрезке может быть сколь угодно много (в частности, бесконечно много). Значений в этих точках может быть также сколь угодно много. Но наибольшее (наименьшее) значение функции на заданном множестве может быть только одно. Каждая точка интервала, в которой достигается наибольшее или наименьшее значение, автоматически становится точкой локального экстремума, но обратное неверно (рис. 1). Как следствие теоремы Ферма (см. п. 21) получаем необходимое условие экстремума.

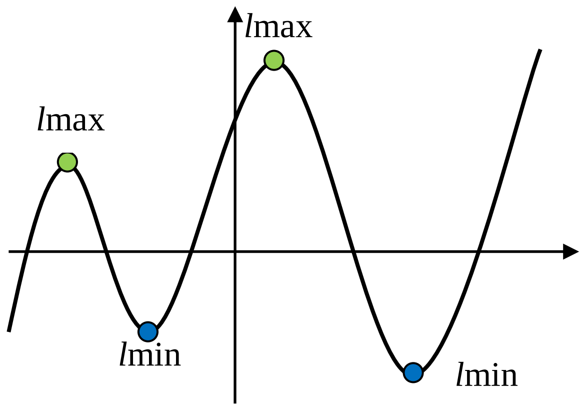


Рис. 1. Максимумы и минимумы

Необходимое условие экстремума. Пусть a – точка локального экстремума функции $f(x)$, причем эта функция имеет в точке a производную. Тогда $f'(a) = 0$.

Точка a называется *критической точкой* функции $f(x)$, если производная $f'(a)$ существует и равна нулю. Необходимое условие экстремума может быть сформулировано так: для дифференцируемой функции любая точка локального экстремума критическая. Обратное утверждение неверно, как показывает пример кубической параболы $y = x^3$, для которой нуль – критическая точка, но не экстремальная.

Первое достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки a и производная $f'(x)$ при переходе через точку a меняет знак. Тогда a – точка экстремума. При этом a – локальный максимум, если смена знака производной происходит с плюса на минус, и a – локальный минимум, если знак меняется с минуса на плюс.

Доказательство. Применим следствие признака монотонности (теорема п. 26). □

Второе достаточное условие экстремума. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точки a n раз, причем n-я производная $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке a и отлична от нуля. Предположим, что $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

- Если n нечетно, то a – не локальный экстремум.
- Если n четно и $f^{(n)}(a) > 0$, то a – локальный минимум.
- Если n четно и $f^{(n)}(a) < 0$, то a – локальный максимум.

В частности, если $f''(a) > 0$ для критической точки a, то a – локальный минимум, а если $f''(a) < 0$ для критической точки a, то a – локальный максимум.

Доказательство. Применим локальную формулу Тейлора

$$f(x) = f(a) + 0 + \dots + 0 + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \alpha(x)(x-a)^n,$$

где $\alpha(x)$ б. м. относительно базы $x \to a$. Перепишем это соотношение следующим образом:

$$\Delta f = f(x) - f(a) = \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right](x-a)^n.$$

Так как $f^{(n)}(a) \neq 0$, а α б. м., то при достаточно малых $x - a$ знак суммы $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)$ совпадает со знаком числа $f^{(n)}(a)$. Если натуральное n нечетно, то $(x-a)^n$ меняет знак при переходе через точку a, поэтому приращение Δf не является знакоопределенным в произвольно малой окрестности точки a, а следовательно, a – не экстремальная точка.

Если n четное, то $\operatorname{sgn}(x-a)^n = 1$ для $x \neq a$, поэтому $\operatorname{sgn}\Delta f = \operatorname{sgn} f^{(n)}(a)$. В случае $f^{(n)}(a) < 0$ получаем отрицательную определенность приращения функции Δf, тем самым a – локальный максимум. В случае $f^{(n)}(a) > 0$ получаем положительную определенность Δf, тем самым a – локальный минимум. □

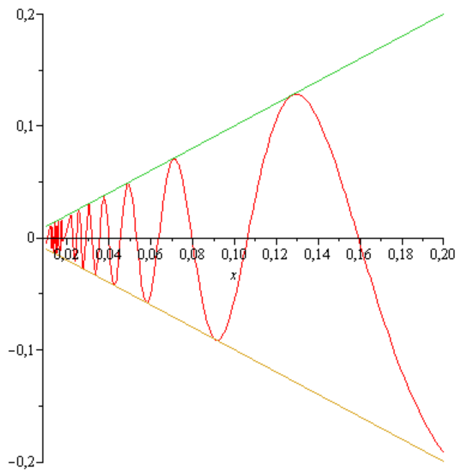


Рис. 2. График $x\sin\frac{1}{x}$

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая всюду непрерывна (см. график $h(x)$ на отрезке $[0{,}01;\ 0{,}2]$, рис. 2). Найдем ее точки экстремума.

$$h'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Заменив $\frac{1}{x}$ на t, сводим это уравнение к уравнению $\operatorname{tg} t = t$. Решения этого уравнения можно найти только численно как пересечение прямой $y = t$ и тангенсоиды $y = \operatorname{tg} t$. В каждом интервале $\left(\pi k,\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k = 1, 2, 3, \dots$, имеется ровно одно решение t_k.

Тогда $\left\{\frac{1}{t_k}\right\}$ – положительные критические точки. Далее

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x}\bigg|_{x=\frac{1}{t_k}} = -t_k^3\sin t_k.$$

Это число больше нуля, если k нечетное, и меньше нуля, если k четное. Итак, $1/t_1$,$1/t_3$,$1/t_5$, ... – локальные минимумы, а $1/t_2$, $1/t_4$, ... – локальные максимумы. Заметим, что при больших значениях k имеет место приближенное равенство $t_k \approx \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Наибольшее значение функции на отрезке. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Поставим задачу вычисления наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Напомним, что они существуют согласно теореме Вейерштрасса.

Теорема. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ – все критические точки функции $f(x)$ на интервале (a, b). Тогда

$$\max\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\} \quad (*)$$

и

$$\min\{f(x) \mid x \in [a, b]\} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\}.$$

Доказательство. Пусть в точке $c \in [a, b]$ функция $f(x)$ достигает наибольшего значения (см. теорему Вейерштрасса, подп. 12.2). Если $c \neq a$ и $c \neq b$, т. е. $c \in (a, b)$, то $f'(c) = 0$ в силу теоремы Ферма (см. п. 21). Следовательно, $c = x_i$ для какого-либо i, и равенство $(*)$ следует. Если же c совпадает с одной из концевых точек отрезка $[a, b]$, то равенство $(*)$ тривиально. □

Пример 2. Луч света из среды, где он имеет скорость распространения v_1, попадает в среду с другой скоростью распространения луча света – v_2. Входящий луч образует с нормалью угол α, а преломленный луч – угол β (рис. 3). Пусть (a, b) – координаты начальной точки, $(x, 0)$ – координаты точки преломления и $(0, -d)$ – координаты конечной точки $(a, b, d, x > 0)$. Тогда время прохождения падающего луча $t_1 = \frac{1}{v_1}\sqrt{(a-x)^2 + b^2}$, а преломленного – $t_2 = \frac{1}{v_2}\sqrt{x^2 + d^2}$. Воспользуемся

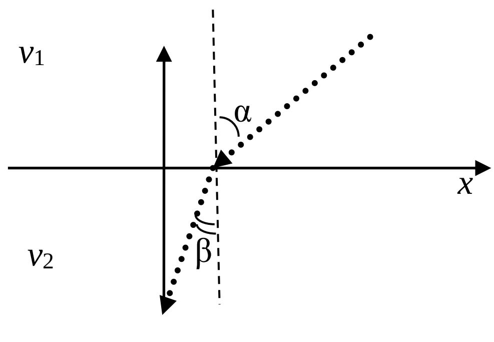


Рис. 3. Преломление света

зуемся физическим принципом наименьшего действия: сумма $t_1 + t_2$, зависящая от $x \in [0,\ a]$, должна быть минимальной. Найдем критическую точку:

$$(t_1 + t_2)'_x = 0 \Leftrightarrow -\frac{2(a-x)}{v_1\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} + \frac{2x}{v_2\sqrt{x^2 + d^2}} = 0.$$

Функция $\frac{2(a-x)}{v_1\sqrt{(a-x)^2+b^2}}$ строго убывает до нуля на отрезке $[0, a]$, а функция $\frac{2x}{v_2\sqrt{x^2+d^2}}$ строго возрастает от нуля на этом же отрезке. Следовательно, существует единственная критическая точка, в которой значения этих функций совпадают. Ввиду единственности эта точка доставляет либо глобальный минимум, либо глобальный максимум на отрезке $[0, a]$ функции $t_1 + t_2$. Вторая возможность исключается, ибо иначе производная $(t_1 + t_2)'_x$ в точке 0 должна быть больше нуля, что не так. Так как $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = \sin\alpha$ и $\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \sin\beta$, то последнее соотношение эквивалентно $\sin\alpha/\sin\beta = v_1/v_2$ – так называемый закон Снеллиуса.

28. Выпуклость и вогнутость

Подмножество D точек плоскости или пространства называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками $A, B \in D$ подмножеству D принадлежит и весь отрезок $[A, B]$. Напомним, что отрезок $[A, B]$ состоит из точек $\lambda A + (1-\lambda)B$ при условии, что λ пробегает отрезок $[0, 1]$.

Определение 1. Функция f, определенная на интервале (a, b), называется выпуклой, или выпуклой вверх, если для любых точек $a < x_1 < x_2 < b$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad (1)$$

Эта же функция f называется выпуклой вниз, или вогнутой, на интервале (a, b), если для любых точек $a < x_1 < x_2 < b$ и для любого $\lambda \in [0, 1]$ имеет место неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \qquad (2)$$

Если в условиях (1) или (2) выполняется строгое неравенство всякий раз, когда $x_1 \neq x_2$ и $\lambda \neq 0; 1$, то говорим о строгой выпуклости или строгой вогнутости соответственно.

Геометрически условие (1) означает, что график функции f лежит над хордой, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big)$. А условие (2) значит, что график функции f лежит под хордой, соединяющей точки $\big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big)$.

Например, парабола $y = x^2$ строго вогнута на всей числовой прямой, ибо $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)^2 < \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2$ для $x_1 \neq x_2$ и $0 < \lambda < 1$. Действительно, это неравенство эквивалентно $2\lambda(1-\lambda)x_1x_2 < (\lambda - \lambda^2)x_1^2 + (1 - \lambda - (1-\lambda)^2)x_2^2$. Сокращение на $\lambda(1-\lambda)$ дает верное, эквивалентное исходному неравенство $2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2$.

Заметим, что функция f выпукла вверх на интервале (a, b) в том и только в том случае, когда область на декартовой плоскости, состоящая из точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $a < x < b, y \leq f(x)$, выпуклая по определению 1 (задача 8). Отметим также простой факт: функция f выпукла, если и только если функция $-f$ вогнута.

Прямая $y = kx + b$ выпукла и вогнута на всей числовой оси одновременно. Других функций с таким свойством нет, что следует из геометрической интерпретации выпуклости и вогнутости.

Найдем критерий выпуклости. Для определенности считаем, что функция f, заданная на интервале (a, b), выпукла вверх. Возьмем произвольную точку x на отрезке $[x_1, x_2]$; для неё найдем значения $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ такие, что $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, а именно $\lambda_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \lambda_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Тогда соотношение (1) с $\lambda = \lambda_1$ и $1 - \lambda = \lambda_2$ эквивалентно следующему соотношению:

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Или, домножая на $x_2 - x_1 > 0$, выводим

$$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2).$$

Замечая, что $(x_2 - x_1)f(x) = (x_2 - x)f(x) + (x - x_1)f(x)$, из последнего неравенства получаем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3}$$

Предположим, что функция f дифференцируема на интервале (a, b). Тогда, устремляя x к x_1 справа, а затем x к x_2 слева, выводим из соотношения (3) двойное неравенство

$$f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_2),$$

откуда следует монотонность производной f'. Более того, если дополнительно функция f строго выпукла вверх, то в соотношении (3) имеет место строгое неравенство и тогда $f'(x_1) \geq f'(c_1) > f'(c_2) \geq$ $\geq f'(x_2)$, где $f'(c_1), f'(c_2)$ совпадают с левым и правым отношением в соотношении (3) (см. теорему Лагранжа, п. 21). Это означает строгое убывание производной.

Наоборот, допустим, что производная $f'(x)$ убывает (строго убывает) на интервале (a, b). Тогда $f'(c_1) \geq f'(c_2)$ (соответственно $f'(c_1) > f'(c_2)$) для выше упомянутых точек c_1, c_2. Это влечет неравенство (3) [строгое неравенство (3)], эквивалентное определению выпуклости (строгой выпуклости). Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Дифференцируемая на интервале (a, b) функция выпукла вверх тогда и только тогда, когда ее производная убывает. При этом строгая выпуклость вверх соответствует строгому убыванию. Аналогично дифференцируемая функция вогнута тогда и только тогда, когда ее производная возрастает; при этом строгая вогнутость соответствует строгому возрастанию. □

Следствие 1. Если функция f дважды дифференцируема на интервале (a, b) и ее вторая производная отрицательна (положительна) на этом интервале, то f строго выпукла (строго вогнута). В случае $f''(x) \leq 0$ для любых точек $x \in (a, b)$ получаем выпуклость функции f, а в случае $f''(x) \geq 0$ для любых $x \in (a, b)$ получаем вогнутость функции f (рис. 1). □

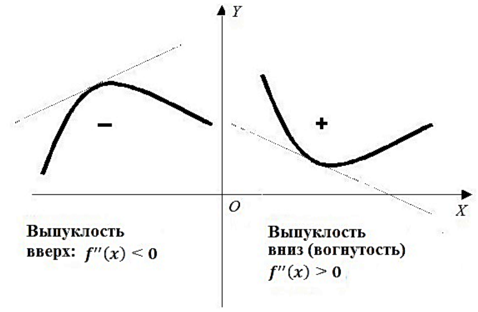


Рис. 1. Выпуклость и вогнутость

Определение 2. Точка, при переходе через которую функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называется точкой перегиба (рис. 2).

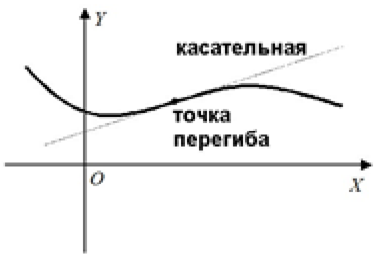


Рис. 2. Точка перегиба

В точке перегиба график функции $f(x)$ лежит по обе стороны от касательной или эквивалентно переходит с одной стороны на другую касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(a, f(a))$.

Следствие 2. Если функция дважды дифференцируема в окрестности точки a и вторая производная меняет знак при переходе через точку a, то точка a – точка перегиба. □

Замечание. Если график функции переходит с одной стороны касательной на другую, то это еще не значит, что данная точка – точка перегиба. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x^3 \sin\dfrac{1}{x^2}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0 \end{cases}$$

в окрестности точки 0. Видим, что $f'(0) = 0$, поэтому ось Ox – касательная в нуле. График f справа от точки 0 лежит выше касательной, а слева от точки 0 – ниже касательной. Однако производная $f'(x) = 9x^2 + 3x^2 \sin 1/x^2 - 2\sin 1/x^2$ около нуля не монотонна из-за последнего слагаемого.

Теорема 2. Дифференцируемая функция выпукла (вогнута) на интервале I тогда и только тогда, когда ее график лежит ниже (выше) касательной, проведенной из любой точки интервала I.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть функция f выпукла на интервале I. Так как уравнение касательной в точке $(a, f(a))$, $a \in I$, есть $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, то следует доказать неравенство

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a), \forall x, a \in I. \tag{4}$$

Применяя теорему Лагранжа, получим

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = f'(c)(x-a) - f'(a)(x-a) =$$
$$= \big(f'(c) - f'(a)\big)(x-a) \geq 0 \ \big(c \in (a,x)\big).$$

Неравенство справедливо, так как f' возрастает по теореме 1, поэтому знак разности $x-a$ совпадает со знаком разности $f'(c) - f'(a)$. Отсюда следует неравенство (4).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если выполнено неравенство (4), то $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a)$ для $x > a$ и $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a)$ для $x < a$. Тем самым для любых трех точек $x_1 < a < x_2$ интервала I получаем неравенство $\frac{f(x_2)-f(a)}{x_2-a} \leq \frac{f(a)-f(x_1)}{a-x_1}$, которое эквивалентно выпуклости [см. неравенство (3), в котором заменили x на a].

Аналогично разбирается случай вогнутости. □

Предложение. Пусть f – выпуклая функция на интервале I и $x_1, \dots, x_n \in I$. Для любых неотрицательных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, сумма которых равна единице, верно неравенство

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j). \tag{5}$$

Если f – вогнутая функция, то для тех же x_j и λ_j выполняется противоположное неравенство

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j). \tag{6}$$

Доказательство. Применим индукцию по n. База индукции, случай $n = 1$, – тривиальность, а $n = 2$ – определение выпуклости функции. Пусть для $n - 1$ неравенство установлено. Так как $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, то хотя бы один из λ_j не равен нулю и, следовательно, больше нуля. Считаем, что $\lambda_n \neq 0$, тогда и $\alpha \coloneqq \sum_{j=2}^{n} \lambda_j > 0$. Оценим, пользуясь определением выпуклости, равенством $\lambda_1 + \alpha = 1$ и индукционным предположением:

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) = f\left(\lambda_1 x_1 + \alpha \sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} x_j\right) \geq \lambda_1 f(x_1) + \alpha f\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} x_j\right) \geq$$

$$\geq \lambda_1 f(x_1) + \alpha \sum_{j=2}^{n} \frac{\lambda_j}{\alpha} f(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j). \square$$

Пример 1. Функция $y = \ln x$ строго выпукла вверх на интервале $(0, +\infty)$, ибо $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Следовательно, применяя неравенство (5) для $\lambda_j \geq 0$, $x_j > 0$ и $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, получаем

$$\ln \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \ln x_j = \sum_{j=1}^{n} \ln x_j^{\lambda_j} = \ln \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j.$$

Полагая здесь все $\lambda_j = 1/n$, получаем, что *среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического* и совпадение этих двух средних имеет место, только если все числа равны между собой:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \tag{7}$$

Пример 2. Рассмотрим вогнутую функцию x^p, где $p > 1$. Имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right)^p \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^p \text{, все } x_j \geq 0, \lambda_j \geq 0 \text{ и } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1.$$

Подставим сюда $\lambda_j = b_j^q S^{-1}$, где $q := \frac{p}{p-1}$ и $S \coloneqq \sum_{j=1}^{n} b_j^q$. Кроме того, считаем $x_j = a_j b_j^{-\frac{1}{p-1}} S$. Получим

$$\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q S^{-1} a_j b_j^{-\frac{1}{p-1}} S\right)^p \leq \sum_{j=1}^{n} b_j^q S^{-1} \left(a_j b_j^{-\frac{1}{p-1}} S\right)^p$$

или

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q a_j^p b_j^{-\frac{p}{p-1}}\right) S^{p-1},$$

что эквивалентно неравенству

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^p \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{p-1}.$$

Извлекая корень p-й степени, окончательно получаем *неравенство Гельдера:*

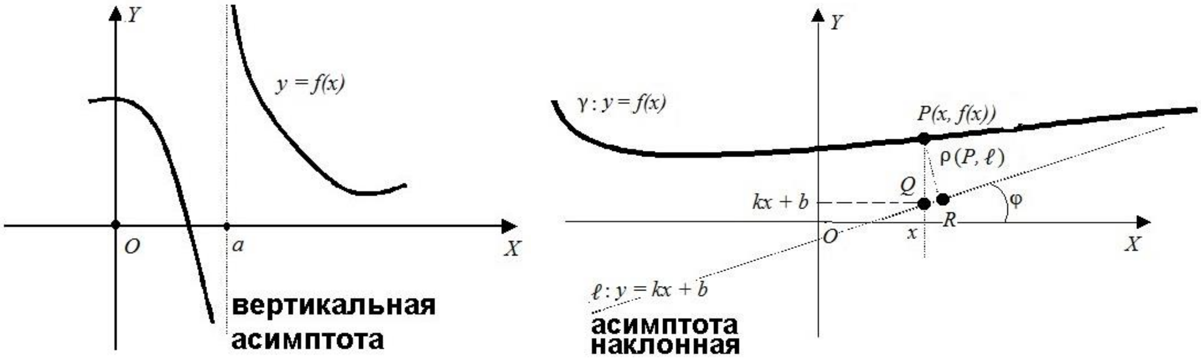
$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{8}$$

Здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и $p > 1$, а все a_j, b_j неотрицательны.

29. Асимптоты

Прямая ℓ называется асимптотой кривой γ, если расстояние от точки $P \in \gamma$ до прямой ℓ стремится к нулю при условии удаления точки P на бесконечность (см. рисунок).

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ бывают вертикальными, т. е. задающимися уравнением $x = a$, и наклонными, т. е. задающимися уравнением $y = kx + b$.



Асимптоты

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой тогда и только тогда, когда либо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, либо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$.

Теорема. Прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота к графику функции $y = f(x)$ на $+\infty$ (на $-\infty$), если и только если существуют следующие пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Для случая $-\infty$ пределы следует вычислять по базе $x \to -\infty$.

Доказательство. Обозначим через ρ расстояние от точки $M(x, f(x))$ до прямой $y = kx + b$. Тогда при $x \to +\infty$ имеют место эквивалентности

$$\rho = |f(x) - kx - b|\cos\varphi \to 0 \Leftrightarrow f(x) - kx - b \to 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Отсюда следует соотношение $f(x) - kx = b + \alpha(x)$ для некоторой б. м. величины $\alpha(x)$. Тогда $\frac{b}{x} + \alpha(x)\frac{1}{x} = \frac{f(x)}{x} - k$ и $k =$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x$. □

Замечание. Видно, что прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика функции $f(x)$ на $+\infty$ ($-\infty$) в том и только в том случае, когда разность $f(x) - (kx + b)$ бесконечно мала при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$). Например, прямая $y = 2x$ – двусторонняя наклонная асимптота функции $y = \frac{2x^3+3}{x^2}$, так как $\frac{2x^3+3}{x^2} - 2x = \frac{3}{x^2}$ – б. м. величина при $x \to \pm\infty$.

30. Задачи

1. Найти точки экстремума и промежутки монотонности функции:

- $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{x+2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$;
- $y = x^x$;
- $y = \operatorname{arctg} x - \ln x$.

2. Показать, что функция $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает при $x > 0$.

3. Проверить, что любая касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ образует с асимптотами треугольник постоянной площади.

4. Доказать неравенство $(x^a + y^a)^{\frac{1}{a}} > (x^b + y^b)^{\frac{1}{b}}$, $x, y > 0$ и $0 < a < b$.

5. Найти наибольший объем конуса с данной длиной L образующей.

6. Две точки равномерно движутся по осям координат со скоростями v_1 по оси Ox и v_2 по оси Oy. В некоторый момент точки занимали положения $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. Найти возможное кратчайшее расстояние между ними.

7. Под каким углом к оси Ox надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a > 0, b > 0)$, чтобы треугольник, образованный этой прямой и положительными полуосями координат, имел наименьший периметр?

8. Функция f выпукла вверх на интервале (a, b) в том и только в том случае, когда область, состоящая из точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств $a < x < b, y \leq f(x)$, выпукла по определению 1, п. 28.

9. Провести полное исследование и построить график функции:

- $y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$;
- $y = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$;
- $y = \sqrt{x}\ln x$;
- $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$;
- $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - \frac{x}{2}$.

10. Провести полное исследование и построить график функции, заданной параметрически: а) $x = \frac{t^2}{t^2-1}, y = \frac{t^2}{t^3+1}$; б) $x = a\ \cos^3 t\ ,\ y =$ $= a \sin^3 t$; в) $x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ (лист Декарта).

11. Провести полное исследование и построить график функции $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$. Найти угол между полукасательными в точках $x = \pm 1$.

12. Из квадратного жестяного листа со стороной a изготовляют открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и затем сгибая жесть, чтобы образовывались бока ящика. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов. (Ответ: $a/6$.)

13. Доказать, что из всех прямоугольников, которые могут быть вписаны в круг, наибольшую площадь (наибольший периметр) имеет квадрат.

14. Прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна ширине и кубу высоты. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром 16 см. (Ответ: ширина бруса 8 см.)

15. При n измерениях величины x получены отсчеты $x_1, x_2, \dots, x_n$. Показать, что сумма квадратов погрешностей $\sum_{j=1}^{n}\left(x - x_j\right)^2$ наименьшая, если за x принять среднее арифметическое отсчетов.

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

31. Функциональные ряды

Ряд вида

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \cdots \qquad (*)$$

называется функциональным. Область сходимости этого ряда – множество всех чисел x_0, при подстановке которых числовой ряд $\sum u_n(x_0)$ сходится. Пусть D – область сходимости ряда (*), тогда определена функция $S(x): D \to \mathbb{R}$ как сумма ряда (*). Обозначим через $S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$ частичную сумму ряда (*).

Определение. Предположим, что функции $f_n(x), n \in \mathbb{N}$, и $f(x)$ определены на множестве J. Говорим, что последовательность (f_n) сходится к функции f равномерно на множестве J, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное N такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для любого $n \geq N$ и любого $x \in J$. В случае, когда J – подмножество области сходимости ряда (*), ряд (*) сходится к $S(x)$ равномерно на множестве J, если последовательность частичных сумм S_n сходится к S равномерно.

Пример. Функции $f_n(x) = x^n$ сходятся к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, \text{если } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$ неравномерно, ибо для $\varepsilon = 1/2$ и любого N найдется номер $n \geq N$ и число $x \in [0, 1)$, достаточно близкое к единице, такие, что $|x^n - 0| \geq \frac{1}{2}$. Достаточно взять $n = N$ и $x = 1/\sqrt[n]{2}$. Однако на любом отрезке $[0, 1 - \Delta]$ $(0 < \Delta < 1)$ последовательность x^n сходится к нулевой функции равномерно. Это следует из оценки $x^n \leq (1 - \Delta)^n$.

Теорема: а) пусть последовательность непрерывных функций f_n сходится к f равномерно на некотором промежутке J. Тогда функция f также непрерывна; б) если в ряду (*) все слагаемые $u_n(x)$ непрерывны на некотором промежутке J и ряд (*) сходится к сумме $S(x)$ равномерно на этом промежутке, то сумма $S(x)$ непрерывна.

Доказательство: а) выберем $\varepsilon > 0$ и точку $a \in J$. Найдем номер N такой, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ для любых $n \geq N$, $x \in J$. В силу непрерывности f_N найдем $\delta > 0$ такое, что $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$, как только $|x - a| < \delta$.

Тогда для этих же значений x получаем оценку

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

из которой и следует непрерывность f в точке a;

б) утверждение вытекает из утверждения (a) ввиду того, что все частичные суммы S_n непрерывны как конечные суммы непрерывных функций. □

Ряд (*) назовем *мажорируемым* на множестве J, если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, называемый мажорантой, такой, что $|u_n(x)| \leq \alpha_n$ для любого n и любого $x \in J$.

Предложение. Если ряд (*) мажорируем на множестве J, то он сходится абсолютно и равномерно на этом множестве.

Доказательство. Абсолютная сходимость вытекает из теоремы сравнения. Равномерная сходимость получается, если в оценке

$$\left|u_N(x) + u_{N+1}(x) + \cdots + u_{N+p}(x)\right| \leq \alpha_N + \alpha_{N+1} + \cdots + \alpha_{N+p}$$

перейти к пределу $p \to \infty$ и учесть, что остатки мажоранты стремятся к нулю. □

32. Степенные ряды

Естественным обобщением многочленов являются функции, заданные в виде суммы ряда по степеням $x - x_0$:

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n. \quad (1)$$

Такой ряд называется степенным. Особенно просто ряд (1) выглядит в случае $x_0 = 0$:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n. \quad (2)$$

Линейная замена $x - x_0$ на u преобразует ряд (1) к ряду по степеням u, поэтому практически все вопросы о степенных рядах сводятся к рядам по степеням x.

Теорема 1 (первая теорема Абеля). Если ряд (1) сходится при некотором значении x^*, то он абсолютно сходится при любом $x \in \mathbb{R}$ таком, что $|x - x_0| < |x^* - x_0|$. Если же ряд (1) расходится при некотором x^{**}, то он расходится и при любом x таком, что $|x - x_0| >$ $> |x^{**} - x_0|$.

Доказательство. Считаем $x_0 = 0$, т. е. имеем дело с рядом (2). Пусть ряд $\sum c_n (x^*)^n$ сходится и $|x| < |x^*|$. Тогда величина $q \coloneqq \frac{|x|}{|x^*|}$ неотрицательна и меньше единицы. Из сходимости ряда $\sum c_n (x^*)^n$ следует, что его общий член стремится к нулю (необходимый признак сходимости), значит, последовательность $\{|c_n (x^*)^n|\}$ ограничена. Пусть M – верхняя грань этой последовательности. Оценим:

$|c_n x^n| = |c_n (x^*)^n| \, q^n \leq M q^n.$

Так как геометрическая прогрессия $\sum M q^n$ сходится, то по теореме сравнения сходится и ряд с общим членом $|c_n x^n|$. Тем самым ряд $\sum c_n x^n$ сходится абсолютно.

Второе утверждение вытекает из первого, если применить метод «от противного». □

Замечание. Доказано более сильное утверждение: если последовательность $|c_n (x^*)^n|$ ограничена, то ряд (2) сходится абсолютно при любом $x, |x| < |x^*|$.

Следствие. Существует неотрицательное действительное число R или $+\infty$, называемое *радиусом сходимости*, такое, что ряд (1) сходится абсолютно при условии $|x - x_0| < R$ и расходится, если $|x - x_0| > R$.

Интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ называется интервалом сходимости.

Доказательство. Определим R как точную верхнюю грань в множестве $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ чисел $x^* - x_0$ таких, что ряд $\sum c_n (x^* - x_0)^n$ сходится. □

Точную верхнюю грань предельных точек для последовательности (u_n) обозначим $\overline{\lim}\, u_n$ и назовем верхним пределом. Если предел $\lim u_n$ существует, то он равен верхнему пределу. Верхний предел существует в любом случае в расширенной системе чисел. Аналогично определяется нижний предел как точная нижняя грань всех предельных точек последовательности. Совпадение верхнего и нижнего пределов – это в точности тот случай, когда существует предел последовательности, и тогда все три предела совпадают.

Радиус сходимости можно вычислить по одной из следующих формул:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|c_n|}}; \; R = \lim \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}. \qquad (3)$$

Первая формула – справочная, доказывать ее не будем, а вторая формула вытекает из признака сходимости Даламбера, подп. 10.4.

Теорема 2 (вторая теорема Абеля). Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет ненулевой и конечный радиус сходимости R, а числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ сходится к числу A. Тогда имеет место равенство

$$A = \lim_{x \to R-0} S(x),\ \text{где}\ S(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Аналогичное утверждение имеет место для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$.

Доказательство. Замена $t = x/R$ сводит доказательство к случаю $R = 1$, далее так и будем считать.

I. Определим $A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ и заметим, что для любого $|x| < 1$ предел последовательности $A_n x^n$ равен нулю, так как $A_n \to A$, а $x^n \to 0$.

II. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ имеет радиус сходимости, больший или равный единице, и для любого $|x| < 1$ справедливо равенство $S(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$.

Это утверждение следует из легко проверяемого равенства

$$\sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n-1} A_j (x^j - x^{j+1}) + A_n x^n = (1 - x) \sum_{j=0}^{n-1} A_j x^j + A_n x^n$$

и утверждения п. I.

III. Из очевидного тождества $A = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A x^n$ вычтем почленно $S(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$. Получим

$$A - S(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n,\ \text{где}\ \alpha_n \coloneqq A - A_n \to 0.$$

По заданному $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что $|\alpha_n| < \varepsilon/2$ для всех $n \geq N$. Рассмотрим разложение

$$A - S(x) = (1 - x) \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n x^n + (1 - x) \sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n x^n.$$

Второе слагаемое здесь оценивается сверху величиной $\frac{|x|^N \varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, а первое слагаемое при $x \to 1 - 0$ стремится к нулю, и может быть найдено $\delta > 0$ такое, что модуль его меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ при условии $1 - \delta < x < 1$. Тогда для этих же значений x имеет место оценка $|A - S(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Лемма. Ряд (1) мажорируем на любом отрезке $[a, b]$, лежащем в интервале сходимости.

Доказательство. Сводится к случаю $x_0 = 0$. Случай $R = 0$ отбросим как тривиальный. Найдем $0 \leq q < R$ такое, что $[a, b] \subseteq [-q, q]$. Тогда $\sum |a_n q^n|$ есть мажоранта ряда (1) на отрезке $[-q, q]$, а значит, и на отрезке $[a, b]$. □

Теорема 3. Сумма ряда (1) $S(x)$ дифференцируема в интервале сходимости и

$$S'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + 4c_4(x - x_0)^3 + \cdots . \quad (4)$$

При этом ряд в правой части соотношения (4) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (1).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $x_0 = 0$. Пусть ряд $S(x)$ сходится в точке x^* и число x таково, что $|x| < |x^*|$. Из сходимости ряда $S(x)$ следует ограниченность последовательности $c_n(x^*)^n$, т. е. существование положительного числа M такого, что $|c_n(x^*)^n| \leq M$ для любого n.

Обозначим через q величину $\left|\frac{x}{x^*}\right|$ и заметим, что она меньше единицы. Оценим:

$$|nc_n x^{n-1}| = |nc_n(x^*)^n| \left|\frac{x}{x^*}\right|^n \frac{1}{|x^*|} \leq \frac{nMq^n}{|x^*|}.$$

Ряд $\sum_1^\infty nq^{n-1}$ сходится по признаку Даламбера. Следовательно, ряд с общим членом $|nc_n x^{n-1}|$ также сходится, т. е. ряд (2) сходится абсолютно.

Наоборот, пусть ряд $S'(x)$ сходится в точке x^{**} и $|x| < |x^{**}|$, тогда последовательность $|nc_n(x^{**})^{n-1}|$ ограничена и L – ее верхняя грань. Обозначим $q \coloneqq \left|\frac{x}{x^{**}}\right|$, заметим, что $q < 1$, и оценим^

$$|c_n x^n| \leq |nc_n(x^{**})^{n-1}| \left|\frac{x}{x^{**}}\right|^{n-1} |x| \leq L\, q^{n-1}|x|.$$

Так как $\sum_1^\infty q^{n-1}$ – сходящаяся геометрическая прогрессия, то ряд (1) сходится абсолютно.

Из доказанных выше утверждений вытекает, что ряды (1) и (4) имеют одинаковые радиусы сходимости.

Докажем, что сумма ряда (4) равна производной $S'(x)$. Фиксируем точку a внутри интервала сходимости и выбираем положительное число ρ настолько малым, чтобы $|a| + \rho < R$. Пусть приращение Δx таково, что $|\Delta x| \leq \rho$. Имеем

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{S(a + \Delta x) - S(a)}{\Delta x} = \sum_{0}^{\infty} c_n \frac{(a + \Delta x)^n - a^n}{\Delta x}.$$

Рассмотрим семейство непрерывных функций

$$f_n(\Delta x) = \begin{cases} c_n \dfrac{(a + \Delta x)^n - a^n}{\Delta x}, \text{если } \Delta x \neq 0, \\ n c_n a^{n-1}, \text{если } \Delta x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_1^\infty f_n(\Delta x)$. При этом

$$|f_n(\Delta x)| = |c_n||a^{n-1} + a^{n-2}(a + \Delta x) + \cdots + (a + \Delta x)^{n-1}| \leq$$
$$\leq |c_n| n(|a| + \rho)^{n-1}.$$

Построена мажоранта для функционального ряда $\sum_1^\infty f_n(\Delta x)$, тем самым данный ряд сходится равномерно на отрезке $|\Delta x| \leq \rho$. Применяя теорему из п. 31 о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, получим

$$S'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \sum_{1}^{\infty} \lim_{\Delta x \to 0} f_n(\Delta x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{1}^{\infty} n c_n a^{n-1}.$$

Следствие. Пусть $f(x)$ – сумма ряда (1) в интервале $|x - x_0| < R$. Функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на этом интервале, и ее k-я производная равна сумме k-х производных членов ряда (1):

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k}. \qquad (5)$$

При этом ряд, стоящий в правой части формулы (5), имеет тот же радиус сходимости R. Кроме того,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \; (k = 0, 1, 2, \dots). \qquad (6)$$

Обоснуем формулу (6): подставим в формулу (5) значение x_0 вместо x, получим $f^{(k)}(x_0) = k!\, c_k + 0 + 0 + \cdots$, откуда и следует (6). □

33. Ряды Тейлора и Маклорена

Вспомним формулу Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) +$$
$$+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция. Тогда степенной ряд

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки a. В частном случае, когда $a = 0$, этот ряд называют рядом Маклорена.

Предложение. Ряд (1) сходится к $f(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. □

Пример. Ряд Тейлора может сходиться, но не к функции $f(x)$. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

в окрестности нуля. Функция f бесконечно дифференцируема в нуле, и все производные в нуле равны нулю. Докажем это. С помощью индукции по k проверяем, что $f^{(k)}(x) = \frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ $(x \neq 0)$ для некоторого многочлена P и натурального числа n, зависящего от k, и $f^{(k)}(0) = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^{n/2}}{e^t} = 0$ $(t = 1/x^2)$, что доказано в п. 22, то

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^{n+1}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0;$$
$$f^{(k+1)}(x) = \left(\frac{P(x)}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \frac{P'(x)x^n - nx^{n-1}P(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x^2}} -$$
$$-\frac{2P(x)}{x^{n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{Q(x)}{x^{n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $Q(x) = x^3P'(x) - nx^2P(x) - 2P(x)$ – многочлен (при этом $Q(0) \neq 0$, если $P(0) \neq 0$). Обоснован индукционный переход, а база индукции заключена в определении функции f. Следовательно, ряд Маклорена этой функции нулевой и его сумма не равна $f(x)$.

Определение. Если ряд (1) сходится к функции $f(x)$ в окрестности точки a, то функцию $f(x)$ называют аналитической в этой точке. Аналитичность функции на множестве означает аналитичность в каждой точке этого множества.

33.1. Разложение элементарных функций в ряд Маклорена. Имея в виду полученные в п. 24 разложения элементарных функций по формуле Маклорена, начнем сразу же с таблицы разложений в ряд Маклорена:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R};$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \alpha \in \mathbb{R}, |x| < 1;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, |x| < 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!\, x^n}{(2n)!!}, -1 \le x < 1;$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots =$$
$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!\,x^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!!}, |x| \le 1;$$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, -1 < x \le 1;$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, -1 < x \le 1;$$
$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1.$$

Здесь по определению $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n+1)$ и аналогично $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n$.

Разложения экспоненты и гармоник $\sin x$, $\cos x$ следуют из того, что остаточный член в формуле Маклорена для них стремится к нулю при любом $x \in \mathbb{R}$ (см. п. 24, а также предложение в п. 33). Разложения гиперболических функций $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ получаются как линейные комбинации разложения экспоненты:

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

Аналогично для $\operatorname{sh} x$ вычисляем полуразность вместо полусуммы.

Общая формула бинома Ньютона для функции $(1+x)^\alpha$ получается из оценок остаточного члена в подп. 24.3 для $|x| < 1$. Случай $\alpha = -1$ (сумма геометрической прогрессии) по существу разобран уже в подп. 10.2. Разложение функции $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ получается из бинома Ньютона при $\alpha = -\frac{1}{2}$ и замене x на $-x$. Случай $x = -1$, т. е. равенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots,$$

получается с применением второй теоремы Абеля. Здесь ряд в правой части сходится по признаку Лейбница, если учесть, что $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \to 0$.

Действительно, $\ln\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$, и так как $\ln(1-\frac{1}{2n}) \sim -\frac{1}{2n}$, то сумма ряда $\sum\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)$ равна $-\infty$, а значит, $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \to \mathrm{e}^{-\infty} = 0$ [см. также далее равенство Валлиса (7)]. Учитывая, что производная арксинуса, равная $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, – функция, разложение которой вытекает из разложения бинома с заменой x на $-x^2$, получаем разложение арксинуса. Как и выше, доказываются равенства в разложении арксинуса при $x = \pm 1$. Получаем числовое равенство

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \cdots.$$

Отметим простое следствие биномиального разложения: так как $(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta}$, то, перемножая разложения в ряды Маклорена этих функций и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях (единственность разложения в ряд вытекает из следствия теоремы 3, п. 32), получаем

$$C_{\alpha}^{0}C_{\beta}^{n} + C_{\alpha}^{1}C_{\beta}^{n-1} + \cdots + C_{\alpha}^{n}C_{\beta}^{0} = C_{\alpha+\beta}^{n},$$

т. е. обобщение рекуррентной формулы из подп. 4.2.

Переходя к первообразным (т. е. к функциям, производная от которых равна заданным функциям) в разложении функции $\frac{1}{1+x}$, выводим, что функции $\ln(1+x)$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ отличаются на константу (см. следствие теоремы Лагранжа, п. 21). Эту константу можно вычислить, подставляя $x = 0$, что дает значение нуля. Равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\ldots \quad (2)$$

верно в силу того, что ряд справа сходится по теореме Лейбница. Тогда его сумма совпадает с $\ln 2$ в силу второй теоремы Абеля. Для достижения точности 10^{-4} надо взять 10^{4} слагаемых в ряду (2). По-другому для вычисления $\ln 2$ можно воспользоваться формулой

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad (3)$$

в которую подставим $x = \frac{1}{2n+1}$ так, чтобы $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$. Тогда

$$\ln(n+1) - \ln n = 2\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right). \quad (4)$$

В частности, при $n = 1$ получаем

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots\right).$$

Для достижения точности 10^{-5} достаточно взять пять слагаемых, ибо

$$r_n = 2\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \frac{1}{(2n+5)\cdot 3^{2n+5}} + \cdots\right) \le$$
$$\le \frac{2}{2n+1}\frac{1}{3^{2n+1}}\frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4(2n+1)\cdot 3^{2n-1}} \le \frac{1}{100\,000} \Leftrightarrow n \ge 5.$$

Тогда $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15\,309} + \frac{1}{177\,147}\right) \approx 0{,}6931460$ (точное значение равно 0,6931471…).

33.2. Формула Стирлинга. Преобразуем равенство (4), записав левую часть как $\boldsymbol{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$, поделив равенство (4) на два и умножив на $\boldsymbol{2n+1}$:

$$\frac{2n+1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \frac{1}{7(2n+1)^6} + \cdots <$$
$$< 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{3(2n+1)^4} + \frac{1}{3(2n+1)^6} + \cdots.$$

К последней сумме применим формулу суммы геометрической прогрессии

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2}\frac{1}{1-1/(2n+1)^2} =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2n(2n+2)} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Применим экспоненту к этому двойному неравенству:

$$\mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{12n(n+1)}}. \qquad (5)$$

Рассмотрим последовательность $a_n = \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}$. Найдем

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!\,\mathrm{e}^n(n+1)^{n+1+1/2}}{n^{n+1/2}(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1+1/2}}{n^{n+1/2}(n+1)\mathrm{e}} = \frac{(1+1/n)^{n+1/2}}{\mathrm{e}}.$$

Из неравенства (5) тогда следует оценка

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{\mathrm{e}^{1/\,12\mathrm{n}}}{\mathrm{e}^{1/12(\mathrm{n}+1)}}.$$

В свою очередь это дает, во-первых, неравенство $a_n > a_{n+1}$ – монотонное убывание и, как следствие, существование предела $a \coloneqq \lim a_n$, а во-вторых, неравенство $a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{12(n+1)}}$ – монотонное возрастание. Так как $\lim \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} = 1$, то $a = \lim a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} >$ $> a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}}$. Итак, $a_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n$ для любого натурального n. Следовательно, найдется величина $0 < \theta_n < 1$ такая, что $a = a_n \mathrm{e}^{-\frac{\theta_n}{12n}}$, откуда $a_n = a\mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}$. Вспоминая определение a_n, получаем

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}. \tag{6}$$

Остается найти константу a. Воспользуемся формулой Валлиса (см. доказательство в [6])

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2. \tag{7}$$

Перепишем:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Подставим сюда вместо $n!$ и $(2n)!$ выражение правой части соотношения (6):

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\theta_n/12n}\right)^2}{a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \mathrm{e}^{\theta_{2n}/24n}} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{\theta_n}{6n} - \frac{\theta_{2n}}{24n}\right).$$

Подставим это в формулу (7):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[a\sqrt{\frac{n}{2}}\exp\left(\frac{\theta_n}{6n} - \frac{\theta_{2n}}{24n}\right)\right]^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда находим $a = \sqrt{2\pi}$ и, подставляя в равенство (6), получаем *формулу Стирлинга:*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{\theta_n}{12n}}, \text{ где } \theta_n \in (0, 1).$$

34. Задачи

1. Разложить в ряд Маклорена функцию:

- $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ (сравнить с разложениями $\sin x$, $\cos x$);
- $\operatorname{tg} x$ (до членов 7-го порядка включительно);
- $(x-1)^6$;
- $\sqrt[3]{1-x}$;
- e^{-x^2};
- $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, если $x \neq 0$, и $f(0) := \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. Найти радиус сходимости ряда:

- $\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n$;
- $\sum_{n=0}^{\infty}(nx)^n$;
- $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)^n$;
- $\sum_{n=1}^{\infty}\ln n \cdot x^n$.

3. Применяя степенные ряды, решить дифференциальное уравнение:

- $y'' - xy' + x^2 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$;
- $y' = -2xy, y(0) = 1$.

4. Функцию вида ax^k $(a \neq 0)$ назовем главным слагаемым б. м. $\alpha(x)$ при $x \to 0$, если $\alpha(x) \sim ax^k$. Найти главные слагаемые следующих б. м. величин:

- $\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)$;
- $(1+x)^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}$;
- $2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x}$.

5. Построить таблицу биномиальных коэффициентов C_{-n}^{k} для $n = 1, 2, 3, \ldots$, пользуясь рекуррентной формулой $C_{\alpha}^{k} = C_{\alpha}^{k-1} - C_{\alpha+1}^{k}$.

6. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{x}{n}$.

7. Доказать, что $1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$, где ζ – дзета-функция Римана. Здесь $s > 1$.

8. Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд Ламберта $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \frac{x^n}{x^n-1}$ сходится при любых $x \neq \pm 1$.

9. Пусть ряды $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ имеют радиусы сходимости R_s и R_t соответственно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$, имеет радиус сходимости, больший или равный $\min\{R_s, R_t\} \coloneqq R$, и представляет собой функцию $S(x)T(x)$ в интервале $(-R, R)$.

10. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то для любой перестановки σ натуральных чисел ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ сходится абсолютно и его сумма равна сумме исходного ряда.

11. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то для любой нумерации $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ пар натуральных чисел ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\nu(j)_1} b_{\nu(j)_2}$ сходится абсолютно к произведению $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория пределов, ряды и дифференциальный анализ обобщаются на поле комплексных чисел. В каком-то смысле получается более совершенная теория аналитических функций. Вопросы, связанные с глобальными величинами функций (длина кривой, площадь, объем и т. п.), находятся за рамками данного курса лекций. Алгебраические конструкции (матрицы, определители, системы линейных уравнений, линейные пространства) и геометрические образы (векторы, прямые и плоскости, кривые и поверхности второго порядка) должны усваиваться параллельно с излагаемыми здесь определениями и теоремами. Все вместе это составляет фундамент математического образования инженера. Далее в зависимости от специфики будущей профессии можно изучать теорию вероятностей, математическую статистику, многомерную геометрию, логику, гармонический анализ, теорию кодирования, теорию графов и много-много других математических дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Данко, П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Изд. 4-е. – М. : Высш. шк., 1986. – 304 с.

2. *Дубровин, Н. И.* Основы теории функций комплексного переменного / Н. И. Дубровин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2004. – 68 с.

3. *Зорич, В. А.* Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1 / В. А. Зорич. – М. : Фазис, 1997. – 554 с. – ISBN 5-7036-0031-6.

4. *Кострикин, А. И.* Линейная алгебра и геометрия / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – 279 с.

5. *Пискунов, Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. В 2 т. Т. 1 / Н. С. Пискунов. – Изд. 13-е. – М. : Наука, 1985. – 432 с.

6. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – М. : Наука, 1969. – 608 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРОИЗВОДНАЯ

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Учебное издание

ДУБРОВИН Николай Иванович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Курс лекций

Редактор Т. В. Евстюничева

Технический редактор С. Ш. Абдуллаева

Корректоры О. В. Балашова, В. С. Теверовский

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 29.12.17.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,37. Тираж 150 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.